Դիսկրետ մաթեմատիկա - Գործնական 7

Բազմությունների տրոհումներ և կցում-արտաքսում՝ մանրամասն լուծումներ դատողությունները՝ քայլ առ քայլ բացված

Նախապատրաստում

Այս թերթիկում աշխատում են երկու գործիք։ Առաջինը երկրորդ սեռի Ստիռլինգի թիվն է $S(n,k)$՝ n-տարրանոց բազմությունը k ոչ դատարկ չպիտակավորված դասերի տրոհելու տարբերակների քանակը։ Երկրորդը կցում-արտաքսման սկզբունքն (ԿԱՍ) է՝ «վատ» հատկությունների ցանկից խուսափող տարրերը հաշվելու համար սկսիր ընդհանուրից, հանիր յուրաքանչյուր վատ բազմություն, ապա հետ ավելացրու յուրաքանչյուր զույգ հատում (որը երկու անգամ հանվեց), հանիր եռյակ հատումները և այդպես շարունակ։ Այս թերթիկի մեծ մասը քողարկված ԿԱՍ է՝ բաժանելիության սահմանափակումներով թվերի հաշվումը, կամ վերին սահմաններով հավասարման ամբողջ լուծումների հաշվումը, նույն նշանափոխ-գումարի գաղափարն է։ Լուծում ենք 1, 7, 10 և 12 խնդիրները։

Խնդիր 1 - Բազմության տրոհումը ոչ դատարկ դասերի

Խնդիր 1

Քանի՞ տարբերակով կարելի է 5-տարրանոց բազմությունը տրոհել 3 ոչ դատարկ դասերի։ (Դասերը չպիտակավորված են՝ նշանակություն ունի միայն խմբավորումը, ոչ թե դասերի անունները կամ կարգը։)

Գաղափարը

Այս քանակը հենց երկրորդ սեռի Ստիռլինգի $S(5,3)$ թիվն է, և այն ճշտելու ամենամաքուր ձևը մեկ տարրի վրա կենտրոնանալով կառուցված ռեկուրենտ առնչությունն է։ Առանձնացրու մեկ ֆիքսված տարր, ասենք վերջինը՝ x_5։ 3 ոչ դատարկ դասերի ցանկացած տրոհման մեջ x_5-ի հետ տեղի է ունենում ճիշտ երկու բաներից մեկը՝

- x_5-ը մենակ է իր սեփական դասում։ Այդ դեպքում մյուս 4 տարրերը պետք է կազմեն մնացած 2 ոչ դատարկ դասերը՝ $S(4,2)$ տարբերակ։
- x_5-ը միանում է մյուսներին։ Այդ դեպքում մյուս 4 տարրերն արդեն կազմում են բոլոր 3 ոչ դատարկ դասերը ($S(4,3)$ տարբերակ), և x_5-ը գցվում է այդ 3 դասերից մեկի մեջ՝ $3 \cdot S(4,3)$ տարբերակ։

Այս երկու դեպքերը փոխբացառող են և ընդգրկում են ամեն ինչ, ուստի դրանք գումարում ենք։ Սա $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$ ընդհանուր ռեկուրենտ առնչությունն է, և այն թույլ է տալիս բարձրանալ փոքր հայտնի արժեքներից։

Քայլ 1 - Ստանանք ավելի փոքր $S(4,2)$ և $S(4,3)$ արժեքները։ Նույն ռեկուրենտ առնչությամբ (և $S(n,1)=1$, $S(n,n)=1$)՝

$$S(4,2) = S(3,1) + 2\,S(3,2) = 1 + 2\cdot 3 = 7, \qquad S(4,3) = S(3,2) + 3\,S(3,3) = 3 + 3\cdot 1 = 6.$$

(Այստեղ $S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3$։)

Քայլ 2 - Միավորենք։

$$S(5,3) = S(4,2) + 3\,S(4,3) = 7 + 3\cdot 6 = 7 + 18 = 25.$$

Ստուգում: Անկախ բանաձևը $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$ տալիս է

$$S(5,3) = \frac{1}{6}\left(3^5 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 1^5\right) = \frac{243-96+3}{6} = \frac{150}{6} = 25.$$

$\{1,2,3,4,5\}$-ի բոլոր տրոհումների ուղիղ համակարգչային թվարկումը գտնում է ճիշտ 25-ը՝ երեք դասով: ✓

Պատասխան՝ $S(5,3) = 25$

★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա - Ստիռլինգի ռեկուրենտ առնչությունը՝

$$S(n,k) = \underbrace{S(n-1,k-1)}_{\text{նոր տարրը մենակ է}} + \underbrace{k\,S(n-1,k)}_{\text{նոր տարրը միանում է } k \text{ դասերից մեկին}}.$$

Մեկ տարր առանձնացնելը և «մենա՞կ է, թե՞ միանում է» հարցնելը ռեկուրսիվ կառուցվածքների հաշվման հիմնական հնարքն է: Զգուշացում՝ եթե դասերը պիտակավորված լինեին (տարբերակելի արկղեր), քանակը կլիներ $k!\,S(n,k)$, իսկ դատարկ արկղեր թույլ տալու դեպքում՝ k^n:

Աղյուսակի կառուցումը: Յուրաքանչյուր վանդակ «վերին-ձախ հարևանն» է գումարած $k\times$«ձախ հարևանը»՝ մեր թիրախ $S(5,3) = 25$-ը գունանշված է:

$n\backslash k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1

Խնդիր 7 - 11-ի վրա բաժանվող, բայց ոչ 5-ի և ոչ 3-ի վրա

Խնդիր 7

Հաշվիր 1-ից 16500 ընկած ամբողջ թվերը, որոնք բաժանվում են 11-ի վրա, բայց չեն բաժանվում 5-ի վրա և չեն բաժանվում 3-ի վրա:

Գաղափարը

«11-ի վրա բաժանվող» արտահայտությունը ֆիքսում է մեր տիեզերքը՝ մոռացիր մնացած բոլոր թվերը և նայիր միայն տիրույթում գտնվող 11-ի 1500 բազմապատիկներին: Այդ տիեզերքի ներսում պետք է դուրս նետենք նրանց, որոնք նաև բաժանվում են 5-ի կամ 3-ի վրա: «Կամ»-ը կցում-արտաքսման ազդանշանն է՝ եթե պարզապես գումարենք (5-ի բազմապատիկներ) և (3-ի բազմապատիկներ), ապա և՛ 5-ի, և՛ 3-ի վրա բաժանվող թվերը կհաշվվեն երկու անգամ, ուստի դրանք մեկ անգամ հետ ենք ավելացնում:
Մաքուր հնարք, որը թվաբանությունը պահում է ճշգրիտ՝ «11-ի բազմապատիկ և 5-ի բազմապատիկ» նշանակում է «55-ի բազմապատիկ» (քանի որ 5, 11-ը փոխադարձաբար պարզ են), նմանապես 3-ը տալիս է 33, իսկ 5-ը և 3-ը միասին՝ 165: Քանի որ 16500 =

$11 \cdot 1500$ և 16500-ը նաև 55-ի, 33-ի և 165-ի բազմապատիկ է, ստորև յուրաքանչյուր ստորին ամբողջ մաս ճշգրիտ բաժանում է՝ կլորացման մասին անհանգստանալու կարիք չկա։

Քայլ 1 - Տիեզերքը՝ 11-ի բազմապատիկները։

$$\left\lfloor \frac{16500}{11} \right\rfloor = 1500.$$

Քայլ 2 - «Վատ»-երը (նաև բաժանվում են 5-ի կամ 3-ի վրա)։ 11-ի բազմապատիկների մեջ՝

$$\#(\text{նաև } 5) = \frac{16500}{55} = 300, \quad \#(\text{նաև } 3) = \frac{16500}{33} = 500, \quad \#(\text{նաև } 5 \text{ և } 3) = \frac{16500}{165} = 100.$$

Քայլ 3 - Կցում-արտաքսում «կամ»-ի համար։ 11-ի բազմապատիկներ, որոնք բաժանվում են 5-ի կամ 3-ի վրա՝

$$300 + 500 - 100 = 700.$$

Քայլ 4 - Հանենք տիեզերքից։

$$1500 - 700 = 800.$$

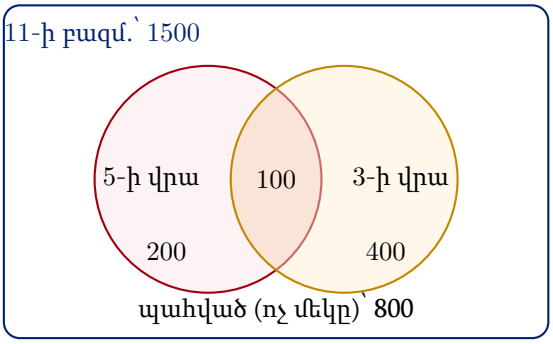
Ստուգում։ $1, \ldots, 16500$ վրայով ուղիղ ցիկլը, որը հաշվում է $11 \mid n$, $5 \nmid n$, $3 \nmid n$ պայմանին բավարարող n-երը, վերադարձնում է ճիշտ 800։ Խաչաձև ստուգում կոտորակներով՝ 11-ի բազմապատիկների մեջ «ոչ 5, ոչ 3» պայմանին գոյատևող մասը $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ է, և $1500 \cdot \frac{8}{15} = 800$ (այս մաքուր կոտորակն աշխատում է, քանի որ 1500-ը 15-ի բազմապատիկ է)։ ✓

Պատասխան՝ $1500 - (300 + 500 - 100) = 800$

★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա - հաշվիր ճիշտ տիեզերքում, ապա ԿԱՍ՝ «A, բայց ոչ B կամ C»-ի համար՝ սահմանափակվիր A-ով, ապա հանիր $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ (ամենը չափված A-ի ներսում)։ Բաժանելիության համար «a-ի և b-ի բազմապատիկ» նշանակում է «$\mathrm{lcm}(a, b)$-ի բազմապատիկ», և N-ից ոչ մեծ քանակը $\lfloor N / \mathrm{lcm} \rfloor$ է։

Վեննի պատկեր (11-ի 1500 բազմապատիկների ներսում քանակները)։ Ջնջում ենք գունանշված համընկնող շրջանը՝ $300 + 500 - 100 = 700$, և պահում 800-ը դրսում։



Խնդիր 10 - Եռանկյունները կողմերի բաժանման կետերի վրա՝ ABC-ին զուգահեռ կողմ չունենալով

Խնդիր 10

ABC եռանկյան յուրաքանչյուր կողմ բաժանված է 8 հավասար մասի։ Քանի՞ տարբեր եռանկյուն ունի իր երեք գագաթները բաժանման կետերի մեջ, որպես գագաթ չի օգտագործում A, B, C անկյունները, և ոչ մի կողմ զուգահեռ չէ ABC-ի կողմին։

Գաղափարը

Կարևոր են միայն կողմերի բաժանման կետերը. յուրաքանչյուր կողմ կրում է 7 ներքին բաժանման կետ (անկյունները բացառված են), ուստի կա 21 թեկնածու գագաթ և ոչ մի ներքին ցանց։
Ողջ խնդիրը հենվում է «ոչ մի կողմ զուգահեռ» պայմանի վրա։ Եթե երկու գագաթ լինեն ABC-ի նույն կողմի վրա, դրանք միացնող հատվածը կընկներ այդ կողմի վրա՝ զուգահեռ նրան, ինչը արգելված է։ Ուստի յուրաքանչյուր թույլատրելի եռանկյուն վերցնում է ճիշտ մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմից։ Սա հաշիվը հանգեցնում է հետևյալին՝ ընտրել յուրաքանչյուր կողմի 7 կետերից մեկը ($7^3 = 343$ եղանակ), ապա դեն նետել այն ընտրությունները, որոնք դեռ թողնում են ABC-ին զուգահեռ կողմ։

Քայլ 1 - Հանգեցում մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմին։ Եթե երկու գագաթ կիսում են ABC-ի մի կողմ, եռանկյունն ունի այդ կողմի վրա ընկած (հետևաբար նրան զուգահեռ) կողմ՝ բացառվում է։ Ուստի մաքրողները վերցնում են մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմից՝ $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ ընտրություն։ Ոչ մեկը այլասերված չէ. ուղիղը եռանկյան երեք կողմերին ներքուստ հատվում է առավելագույնը երկու կետում (Մենելաոս), ուստի երեք կետ՝ յուրաքանչյուր կողմի խստորեն ներսում, երբեք համագիծ չեն։

Քայլ 2 - Ե՞րբ է եռանկյան կողմը զուգահեռ ABC-ի կողմին։ Զուգահեռությունը աֆինական անփոփոխ է, ուստի դնենք $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (0,8)$ և նշանակենք

$$P_i = (i,0)\,(AB\text{-ի վրա}), \quad Q_j = (8-j,j)\,(BC\text{-ի վրա}), \quad R_k = (0,k)\,(CA\text{-ի վրա}), \qquad i,j,k \in \{1,\dots,7\}.$$

$P_iQ_jR_k$ եռանկյան համար՝ ստուգելով յուրաքանչյուր կողմ ABC-ի երեք ուղղությունների դեմ՝

- $P_iQ_j \parallel CA$ (ուղղաձիգ) $\iff i+j=8$;
- $P_iR_k \parallel BC$ (թեքություն -1) $\iff i=k$;
- $Q_jR_k \parallel AB$ (հորիզոնական) $\iff j=k$.

Յուրաքանչյուր պայման թողնում է մեկ ինդեքս ազատ, ուստի յուրաքանչյուրը տեղի ունի 343 եռանկյուններից $7 \cdot 7 = 49$-ում։

Քայլ 3 - Ներառման-բացառման սկզբունք։ Երեք «զուգահեռ» դեպքերն ունեն $|A_i| = 49$։ Ցանկացած երկուսը միասին որոշում են բոլոր երեք ինդեքսները (օրինակ՝ $i+j=8$ և $i=k$ տալիս են $j=8-i,\ k=i$), ուստի $|A_i \cap A_j| = 7$; բոլոր երեքը տալիս են $i=j=k=4$, ուստի $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$։ Գոնե մեկ ABC-ին զուգահեռ կողմ ունեցող եռանկյունների քանակը՝

$$3 \cdot 49 - 3 \cdot 7 + 1 = 147 - 21 + 1 = 127,$$

և թույլատրելի եռանկյունները՝

$$343 - 127 = 216.$$

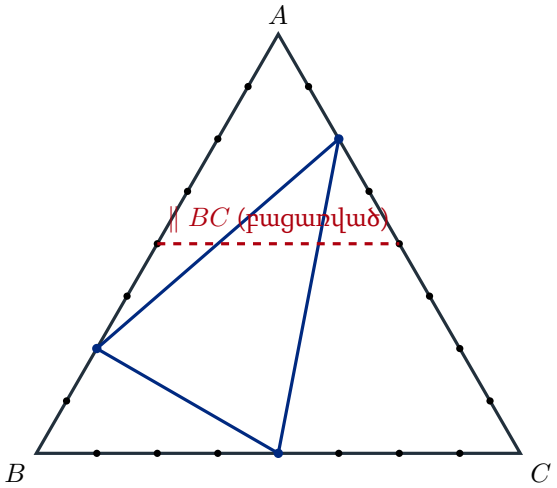
Ստուգում։ Բոլոր $\binom{21}{3} = 1330$ գագաթ-եռյակների ուղիղ թվարկումը (դեն նետելով $3\binom{7}{3} = 105$ համագիծ եռյակները, ապա ամեն եռանկյուն՝ AB-ին, BC-ին կամ CA-ին զուգահեռ կողմով) վերադարձնում է ճիշտ 216, բոլորը մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմի վրա՝ հաստատելով Քայլ 1-ը։

Պատասխան՝ $343 - 127 = 216$

★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա - արգելիր ըստ ուղղության, ապա ներառում-բացառում։ «Ոչ մի կողմ զուգահեռ» պայմանն ամենից լավ օգտագործվում է երկու քայլով։ Նախ թող այն պարտադրի կառուցվածք (այստեղ՝ մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմի վրա)՝ փոքրացնելով թեկնածուների բազմությունը։ Ապա հաշվիր մնացած վատ դեպքերը ներառման-բացառմամբ՝ յուրաքանչյուր արգելված ուղղության համար մեկ դեպք. համաչափությունը սովորաբար հավասարեցնում է եզակի, զույգ և եռակի հատումները բոլոր ուղղություններով, ուստի պետք են ընդամենը երեք թիվ։

Նկարը. Յուրաքանչյուր կողմ կրում է իր 7 բաժանման կետերը (անկյունները բացառված)։ Կապույտ եռանկյունը թույլատրելի է՝ մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմի վրա, ոչ մի կողմ ABC-ին զուգահեռ։ Կարմիր կետագիծ հատվածը միացնում է հավասար բարձրության երկու կետ. այն զուգահեռ է BC-ին՝ հենց այն տիպի կողմ, որից թույլատրելի եռանկյունը պետք է խուսափի։



Խնդիր 12 - Գծային հավասարման սահմանափակ ամբողջ լուծումները

Խնդիր 12

Գտիր համակարգի ամբողջ լուծումների քանակը՝

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40, \qquad 4 \le x_1 \le 15, \quad 9 \le x_2 \le 18, \quad 5 \le x_3 \le 16.$$

Գաղափարը

Երկու խոչընդոտ կա մեր և պարզ «աստղեր և ձողիկներ» հաշվի միջև՝ փոփոխականներն ունեն ստորին սահմաններ (չեն սկսում 0-ից) և վերին սահմաններ (չեն կարող անսահման աճել)։ Դրանք հեռացնում ենք մեկ առ մեկ։
Ստորին սահմանները ձրի են՝ տեղադրիր $y_i = x_i -$ (իր մինիմումը), որպեսզի յուրաքանչյուր $y_i \ge 0$ լինի և ընդհանուրը համապատասխանաբար նվազի։ Վերին սահմանները պահանջում են կցում-արտաքսում՝ նախ հաշվիր լուծումները՝ անտեսելով վերին սահմանները (հեշտ աստղեր և ձողիկներ), ապա հանիր «անօրինական» լուծումները, որտեղ ինչ-որ y_i գերազանցում է իր սահմանը։ Խելացի մասը՝ «y_i-ն

գերազանցում է իր c_i սահմանը» նշանակում է «$y_i \geq c_i + 1$», ինչը կիրառում ենք՝ նախապես $c_i + 1$ միավոր հանձնելով y_i-ին և մնացածը ազատ հաշվելով: Միանգամից երկու փոփոխականի գերազանցումները հանվում են երկու անգամ, ուստի ԿԱՍ-ը դրանք հետ է ավելացնում: Ամբողջ լուծումը մեկ կոկիկ նշանափոխ գումար է:

Քայլ 1 - Վերացնենք ստորին սահմանները: Դիցուք $y_1 = x_1 - 4,\ y_2 = x_2 - 9,\ y_3 = x_3 - 5$: Այդ դեպքում $y_i \geq 0$ և

$$y_1 + y_2 + y_3 = 40 - 4 - 9 - 5 = 22, \qquad 0 \leq y_1 \leq 11,\ \ 0 \leq y_2 \leq 9,\ \ 0 \leq y_3 \leq 11.$$

(Սահմանները՝ $15 - 4 = 11, 18 - 9 = 9, 16 - 5 = 11$:)

Քայլ 2 - Հաշվենք՝ անտեսելով վերին սահմանները: $y_1 + y_2 + y_3 = 22$-ի ոչ բացասական լուծումներն աստղերով և ձողիկներով՝

$$\binom{22+3-1}{3-1} = \binom{24}{2} = 276.$$

Քայլ 3 - Հանենք միայնակ գերազանցումները: «y_i-ն իր սահմանից վեր» նշանակում է $y_i \geq$ սահման $+1$՝ տուր նրան այդքան միավոր և հաշվիր $22 -$ (սահման $+1$) կրճատված ընդհանուրի լուծումները՝

$$|y_1 \geq 12| = \binom{(22-12)+2}{2} = \binom{12}{2} = 66, \quad |y_2 \geq 10| = \binom{(22-10)+2}{2} = \binom{14}{2} = 91,$$

$$|y_3 \geq 12| = \binom{(22-12)+2}{2} = \binom{12}{2} = 66.$$

Քայլ 4 - Հետ ավելացնենք կրկնակի գերազանցումները: Միանգամից երկու սահման գերազանցված (տուր երկուսին էլ իրենց սահման $+ 1$ միավորները, ապա հաշվիր մնացածը)՝

$$|y_1 \geq 12,\ y_2 \geq 10| = \binom{(22-12-10)+2}{2} = \binom{2}{2} = 1, \quad |y_2 \geq 10,\ y_3 \geq 12| = \binom{2}{2} = 1,$$

$$|y_1 \geq 12,\ y_3 \geq 12| :\ 22 - 12 - 12 = -2 < 0 \ \Rightarrow\ 0.$$

Միանգամից բոլոր երեք սահմանները պահանջում են $12 + 10 + 12 = 34 > 22$ միավոր, անհնար է, ուստի եռյակ անդամը 0 է:

Քայլ 5 - Հավաքենք (կցում-արտաքսում):

$$276 - (66 + 91 + 66) + (1 + 1 + 0) - 0 = 276 - 223 + 2 = 55.$$

Ստուգում: $x_1 \in [4, 15]$, $x_2 \in [9, 18]$, $x_3 \in [5, 16]$ վրայով ուղիղ եռակի ցիկլը, որը հաշվում է $x_1 + x_2 + x_3 = 40$ բավարարողները, վերադարձնում է ճիշտ 55: ✓

Պատասխան՝ $\binom{24}{2} - \left[\binom{12}{2} + \binom{14}{2} + \binom{12}{2}\right] + [1 + 1] = 55$

★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա - սահմանափակ կոմպոզիցիաներ՝ $x_1 + \cdots + x_k = N$-ի ամբողջ լուծումները $a_i \leq x_i \leq b_i$ պայմանով հաշվելու համար՝

1. Տեղադրիր $y_i = x_i - a_i$՝ բոլոր ստորին սահմանները 0 դարձնելու համար (և N-ը նվազեցրու $\sum a_i$-ով):

2. Հաշվիր առանց վերին սահմանների՝ $\binom{N'+k-1}{k-1}$։
3. ԿԱՍ-ով հանիր/ավելացրու անդամեր, որտեղ փոփոխականների ընտրված S ենթաբազմությունը գերազանցում է՝ յուրաքանչյուր այդպիսի փոփոխական ընդհանուրից հանում է $(\text{սահման}_i + 1)$, $(-1)^{|S|}$ նշանով։ Բաց թող ցանկացած անդամ, որի մասցած ընդհանուրը բացասական է դառնում (այն տալիս է 0)։

ԿԱՍ-ի հաշվառումը մի հայացքով։

գերազանցման բազմություն	մասցած ընդհանուր	$\binom{\cdot+2}{2}$	նշան	ներդրում
ոչ մեկը	22	276	$+$	$+276$
$y_1 \geq 12$	10	66	$-$	-66
$y_2 \geq 10$	12	91	$-$	-91
$y_3 \geq 12$	10	66	$-$	-66
$y_1 \geq 12,\ y_2 \geq 10$	0	1	$+$	$+1$
$y_2 \geq 10,\ y_3 \geq 12$	0	1	$+$	$+1$
$y_1 \geq 12,\ y_3 \geq 12$	-2	0	$+$	0
բոլոր երեքը	-12	0	$-$	0
		զուտ ընդամենը (ներդրումների գումար)		55