Դիսկրետ մաթեմատիկա - Գործնական 8

Ռեկուրենտ առնչություններ՝ մանրամասն լուծումներ
դատողությունները՝ քայլ առ քայլ բացված

Ընդգրկում է Գործնական 8-ի հանձնարարված խնդիրները՝ 2 և 6։

Նախապատրաստում՝ ի՞նչ է ռեկուրենտ առնչությունը և ի՞նչ է պահանջվում

Ռեկուրենտ առնչությունը սահմանում է հաջորդականություն՝ յուրաքանչյուր անդամ արտահայտելով նախորդ անդամներով, մի քանի սկզբնական պայմանների հետ միասին։ Օրինակ՝ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$-ը $a_0 = a_1 = 1$ պայմաններով Ֆիբոնաչիի կանոնն է։

Այս գործնականում հանդիպում են երկու բոլորովին տարբեր խնդիր, և ստորև բերված երկու խնդիրները հենց դրանցից մեկական են՝

- Լուծել ռեկուրենտ առնչությունը - գտնել a_n-ի փակ բանաձև, որը չի հղում նախորդ անդամներին (Խնդիր 2)։ Գործիքը բնութագրիչ հավասարումն է։
- Կառուցել ռեկուրենտ առնչություն - հաշվարկային հարցը թարգմանել ռեկուրենտ առնչության, ապա կիրառել այն (Խնդիր 6)։ Գործիքը խելացի դեպքերի բաժանումն է։

Խնդիր 2 - Գծային ռեկուրենտ առնչության լուծում

Խնդիր 2

Լուծել ռեկուրենտ առնչությունը

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \qquad n > 2,$$

$a_1 = 2,\ a_2 = 10$ սկզբնական պայմաններով։ («Լուծել»-ը նշանակում է գտնել a_n-ի փակ բանաձևը։)

Գաղափարը

Նախ՝ անվանենք կառուցվածքը։ Այս ռեկուրենտ առնչությունը գծային է (յուրաքանչյուր a_i հանդես է գալիս առաջին աստիճանով, երբեք ոչ a_i^2 կամ $a_i a_j$), համասեռ է (աջ կողմում ոչինչ չի ավելացվում) և ունի հաստատուն գործակիցներ (5-ը և -6-ը երբեք չեն փոխվում n-ի հետ)։ Հենց այս տեսակի ռեկուրենտ առնչության համար ճիշտ ենթադրությունը երկրաչափական հաջորդականությունն է՝ $a_n = r^n$։ Այն գլխից հնարած չէ՝ երեք դիտարկում պարտադրում են այն։
(i) Ամենապարզ ռեկուրենտ առնչությունն արդեն երկրաչափական է։ Մեկքայլանի $a_n = b\,a_{n-1}$ կանոնն ամեն քայլում բազմապատկում է նույն b հաստատունով, ուստի

$$a_n = b\,a_{n-1} = b^2 a_{n-2} = \cdots = a_0\,b^n.$$

Կրկնվող հաստատուն բազմապատկիչը հենց երկրաչափական աճ է։ Մեր երկքայլանի կանոնը պարզապես երկու այդպիսի աճի խառնուրդ է, ուստի սպասում ենք երկրաչափական բաղադրիչներ։

(ii) Երկրաչափականը միակ ձևն է, որտեղ մեկ քայլ ետ գնալը նշանակում է հաստատունով բազմապատկում: Եթե $a_n = r^n$, ապա $a_{n-1} = \frac{1}{r} a_n$ և $a_{n-2} = \frac{1}{r^2} a_n$: Հաստատուն գործակիցներով ռեկուրենտ առնչությունը հենց սա է անում՝ այն կապում է անդամը նախորդ հարևանների հետ ֆիքսված թվերի միջոցով: Երկրաչափական հաջորդականությունը կառուցված է հենց այդ քայլին համապատասխանելու համար:
(iii) Այն փլուզում է անվերջ շատ հավասարումներ մեկի մեջ: Ռեկուրենտ առնչությունը պետք է ճիշտ լինի ամեն n-ի համար միաժամանակ, ինչը անվերջ շատ պահանջ է: Տեղադրենք $a_n = r^n$, և յուրաքանչյուր անդամ ունի ընդհանուր r^{n-2} արտադրիչը: Կրճատենք այն, և n ինդեքսն ամբողջությամբ անհետանում է՝ թողնելով միակ $r^2 = 5r - 6$ հավասարումը: Այսպիսով՝ մեկ լավ ընտրված r թիվը բավարարում է կանոնին 3-րդ, 4-րդ, 100-րդ քայլում և այդպես շարունակ՝ միաժամանակ: Ահա ենթադրության աշխատելու իրական պատճառը՝ երկրաչափական ձևը միակն է, որը ստիպում է հաստատուն գործակիցներով ռեկուրենտ առնչությանն ամեն քայլում ասել ճիշտ նույն բանը: Համապատասխանող r-երի արժեքները ռեկուրենտ առնչության մեջ թաքնված աճի տեմպերն են:

Քայլ 1 - Տեղադրենք ենթադրությունը: $a_n = r^n$-ը տեղադրենք $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$-ի մեջ՝

$$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}.$$

Բաժանենք ամենափոքր r^{n-2} աստիճանի վրա (թույլատրելի է, քանի որ $r = 0$-ն տալիս է միայն տրիվիալ հաջորդականությունը)՝

$$r^2 = 5r - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{r^2 - 5r + 6 = 0}.$$

Սա բնութագրիչ հավասարումն է:

Քայլ 2 - Լուծենք այն:

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 3.$$

Գտանք երկու տարբեր երկրաչափական լուծում՝ 2^n և 3^n:

Քայլ 3 - Միավորենք դրանք (վերադրում): Քանի որ ռեկուրենտ առնչությունը գծային է և համասեռ, լուծումների ցանկացած կոմբինացիա նորից լուծում է: Երկու տարբեր արմատների դեպքում ընդհանուր լուծումն է

$$a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n,$$

որտեղ C, D-ն հաստատուններ են: Ունենք ճիշտ երկու անհայտ՝ մեր երկու սկզբնական պայմաններին համապատասխանելու համար, և դա պատահականություն չէ:

Ինչու՞ է $C \cdot 2^n + D \cdot 3^n$-ը ամեն լուծում, ոչ թե միայն դրանց մի մասը: Ենթադրենք մեկ այլ հաջորդականություն ևս բավարարում է $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$-ին և պատահաբար համընկնում է մեր բանաձևի հետ երկու հաջորդական ինդեքսներում: Այդ դեպքում նրանք պետք է համընկնեն ամենուր՝ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամը որոշվում է նախորդ երկուսով (և կանոնը գործում է նաև հակառակ ուղղությամբ՝ որոշելով նախորդ անդամները): Ուստի լուծումը լիովին որոշվում է ցանկացած երկու հաջորդական արժեքով, և C, D հաստատունները տալիս են հենց այնքան ազատություն, որքան անհրաժեշտ է a_1-ին և a_2-ին համապատասխանելու համար: Այդ համապատասխանեցումը միշտ հաջողվում է, և միարժեքորեն, քանի որ երկու երկրաչափական բաղադրիչներն անկախ են՝ ստորև C, D-ի համար կազմված գծային համակարգի որոշիչը $2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6 \neq 0$ է: Ընդհանուր դեպքում այս որոշիչը $r_1 r_2 (r_2 - r_1)$ է՝ ոչ զրո հենց այն դեպքում, երբ երկու արմատները տարբեր են և ոչ մեկը 0 չէ՝ այստեղ դրանք 2 և 3 են, ուստի այն ապահով կերպով ոչ զրո է: (Հավասար արմատները կզրոյացնեին այն՝ այն դեպքը, որը պահանջում է մեթոդի վանդակում նշված ձևափոխված տեսքը:) Երբ C, D-ն որոշված են, բանաձևը հենց հաջորդականությունն է:

Քայլ 4 - Օգտագործենք սկզբնական պայմանները։

$$\begin{cases} a_1 = 2: & 2C + 3D = 2, \\ a_2 = 10: & 4C + 9D = 10. \end{cases}$$

Առաջին հավասարումը բազմապատկենք 2-ով և հանենք երկրորդից՝

$$(4C + 9D) - (4C + 6D) = 10 - 4 \implies 3D = 6 \implies D = 2,$$

ապա $2C + 3(2) = 2 \Rightarrow C = -2$։

Քայլ 5 - Գրենք փակ բանաձևը։

$$a_n = -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}.$$

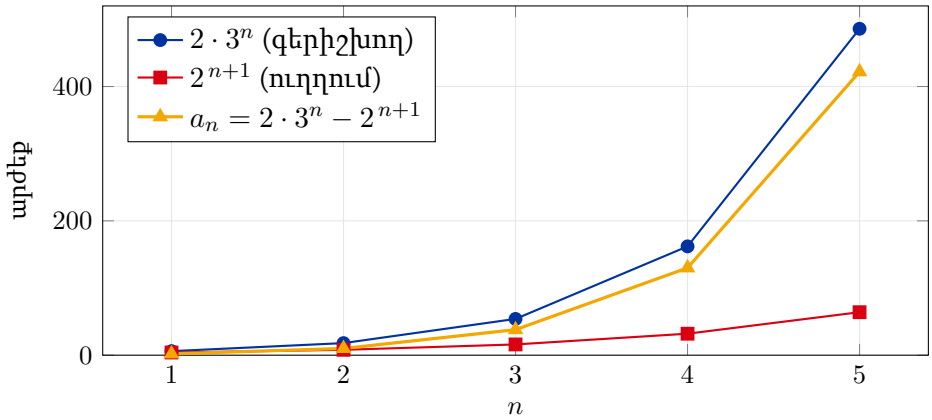
Քայլ 6 - Միշտ ստուգենք։

$$a_1 = 2 \cdot 3 - 2^2 = 6 - 4 = 2 \checkmark \qquad a_2 = 2 \cdot 9 - 2^3 = 18 - 8 = 10 \checkmark$$

$$a_3 \overset{\text{բանաձև}}{=} 2 \cdot 27 - 2^4 = 38 \quad \text{ընդդեմ} \quad a_3 \overset{\text{ռեկուրենտ}}{=} 5 \cdot 10 - 6 \cdot 2 = 38 \checkmark$$

Պատասխան՝ $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$

Բանաձևը տեսնելը։ Հաջորդականությունը երկու երկրաչափական «շարժիչների» տարբերությունն է։ 3^n շարժիչը (կապույտ) հաղթում է մրցավազքում՝ 2^{n+1} շարժիչը (կարմիր) նվազող ուղղում է, ուստի a_n-ը (նարնջագույն) n-ի աճին զուգահեռ ավելի ու ավելի սերտ մոտենում է $2 \cdot 3^n$-ին։



n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	10	38	130	422	1330
a_n/a_{n-1}		5	3.80	3.42	3.25	3.15

Նայեք ստորին տողին՝ քայլից քայլ աճի տեմպը՝ a_n/a_{n-1}, հաստատվում է 3-ի շուրջ՝ ավելի մեծ բնութագրիչ արմատը։ Մեծ n-երի համար 3^n անդամը գերակշռում է 2^{n+1} անդամին, ուստի հաջորդականությունը վերջում աճում է գրեթե ճիշտ 3^n-ի պես։ Սա երկրաչափական ենթադրության հակառակ ուղղությամբ արդյունք տալն է՝ արմատները, որ գտանք, իրականում այն աճի տեմպերն են, որ ռեկուրենտ առնչությունն ի սկզբանե թաքցնում էր։

★ Հիշարժան մեթոդ

Երկրորդ կարգի գծային համասեռ $a_n = p\,a_{n-1} + q\,a_{n-2}$ ռեկուրենտ առնչության համար՝

1. Գրիր $r^2 = pr + q$ բնութագրիչ հավասարումը:
2. Երկու տարբեր արմատ $r_1 \neq r_2$՝ ընդհանուր լուծում $a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$:
3. Կրկնակի արմատ $r_1 = r_2 = r$՝ ընդհանուր լուծում $a_n = (C + Dn)\,r^n$ (լրացուցիչ n արտադրիչ՝ անհրաժեշտ, քանի որ r^n-ը մենակ տալիս է միայն մեկ լուծում):
4. Գտիր C, D-ն երկու սկզբնական արժեքներից, ապա ստուգիր:

Խնդիր 6 - Ռեկուրենտ առնչության կառուցում հաշվելու համար

Խնդիր 6

10 երկարության քանի՞ երկուական տող (0-երից և 1-երից կազմված տողեր) է պարունակում երկու հաջորդական զրո (այսինքն՝ ինչ-որ տեղ հանդիպում է «00» բլոկը):

Գաղափարը

«00» պարունակող տողերն ուղղակիորեն հաշվելը դժվար է՝ բլոկը կարող է տեղավորվել բազմաթիվ համընկնող տեղերում, և դու ավելորդ կհաշվեիր այն տողերը, որոնք պարունակում են այն մեկից ավելի անգամ:
Լրացման միջոցով հաշվում: Շատ ավելի հեշտ է հաշվել հակառակը՝ «00» չպարունակող տողերը, և հանել ընդհանուրից՝

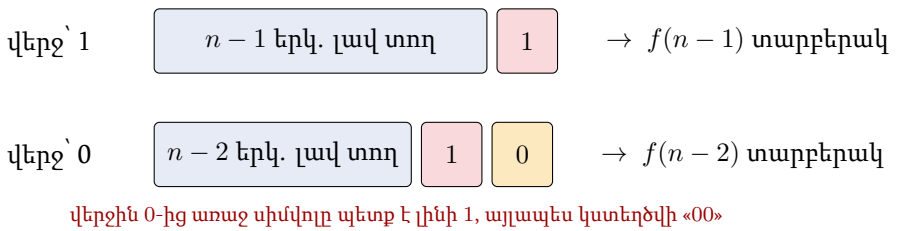
$$\#(\text{պարունակում է } 00) \;=\; \underbrace{2^{10}}_{\text{բոլոր տողերը}} \;-\; \#(\text{խուսափում է } 00).$$

Իսկ «00-ից խուսափելը» հենց այն տեսակի հատկություն է, որը լավ կառուցվում է մեկ սիմվոլ առ սիմվոլ՝ ուստի բավարարում է ռեկուրենտ առնչության:

Քայլ 1 - Սահմանենք այն, ինչ իրականում հաշվում ենք: Դիցուք

$$f(n) = \#\{n \text{ երկարության երկուական տողեր՝ առանց երկու կից } 0\text{-ի}\}.$$

Քայլ 2 - Գտնենք ռեկուրենտ առնչություն՝ նայելով վերջին սիմվոլին: Վերցրու n երկարության ցանկացած «լավ» տող և նայիր, թե ինչով է այն վերջանում: Կան ճիշտ երկու փոխբացառող դեպք, և յուրաքանչյուր դեպք կպցված է ավելի կարճ լավ տողի վրա՝



- Վերջանում է 1-ով՝ ինչ էլ որ լինի դրանից առաջ՝ կարող է լինել ցանկացած $n-1$ երկարության լավ տող (1 ավելացնելը երբեք չի ստեղծում «00»): Սա տալիս է $f(n-1)$ տող:
- Վերջանում է 0-ով՝ «00»-ից խուսափելու համար անմիջապես առջևի սիմվոլը պետք է լինի 1, ուստի տողը վերջանում է «10»-ով: Ինչ էլ որ լինի դրանից առաջ՝ ցանկացած $n-2$ երկարության լավ տող է: Սա տալիս է $f(n-2)$ տող:

Երկու դեպքերը երբեք չեն համընկնում և ընդգրկում են ամեն ինչ, ուստի

$$\boxed{f(n) = f(n-1) + f(n-2)}.$$

Սա Ֆիբոնաչիի կանոնն է՝ հաշվարկն ինքն է այն բացահայտում։

Քայլ 3 - Բազային դեպքեր (փոքր տողերը հաշվել ձեռքով)։

$$\begin{aligned} n = 1: &\ \{0,\ 1\} \Rightarrow f(1) = 2, \\ n = 2: &\ \{01,\ 10,\ 11\}\ (\text{ոչ } 00) \Rightarrow f(2) = 3, \\ n = 3: &\ \{010,\ 011,\ 101,\ 110,\ 111\} \Rightarrow f(3) = 5. \end{aligned}$$

($5 = 3 + 2$ նկատեք՝ հաստատելով ռեկուրենտ առնչությունը։)

Քայլ 4 - Կիրառենք ռեկուրենտ առնչությունը մինչև $n = 10$։

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Այսպիսով՝ կա $f(10) = 144$ հատ 10 երկարության տող, որ խուսափում է «00»-ից։

Քայլ 5 - Լրացման հաշվարկ։

$$\#(\text{պարունակում է } 00) = 2^{10} - f(10) = 1024 - 144 = 880.$$

Պատասխան՝ 10 երկարության 880 երկուական տող պարունակում է երկու հաջորդական զրո։

★ Հիշարժան մեթոդ

Երկու փոխանցելի հնարք՝

1. Լրացման միջոցով հաշվում - երբ «առնվազն մեկ վատ կաղապար» պայմանը խճճված է, հաշվիր մաքուր տողերը և հանիր ընդհանուրից։
2. Ըստ վերջին սիմվոլի դեպքերի բաժանում - տեղային արգելված կաղապար ունեցող տողերի համար ռեկուրենտ առնչություն կառուցելու համար ճյուղավորիր ըստ տողի վերջի՝ յուրաքանչյուր ճյուղ ֆիքսված վերջածանց է կպցնում ավելի կարճ վավեր տողի վրա։