Թեմա 1

Բազմություններ, գործողությունները դրանց հետ (հատում, միավորում, տարբերություն), բազմությունների ընտանիքներ: Բազմությունների արտապատկերումներ (ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ արտապատկերումներ):

Բազմությունների տեսության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորն է (1845-1918), որը 1878-1884 թվերի միջև իր 6 հիմնարար աշխատանքներով ճանապարհ բացեց մաթեմատիկայի այդ բաժնի համար: Նրան ժամանակակից գրեթե բոլոր նշանավոր մաթեմատիկոսները կա՛մ դրսևորում էին ցուցադրական անտարբերություն, կա՛մ էլ (հատկապես Շվարցը և Կրոնեկերը) բացահայտ թշնամություն Կանտորի նորարարական ջանքերի նկատմամբ: Պաշտոնապես բազմությունների տեսության ճանաչումը սկսվեց 1897 թվին, երբ Առաջին միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում Ժ. Ադամարը և Ա. Հուրվիցը մատնանշեցին այդ տեսության կարևոր կիրառություններ անալիզում:

Նշենք, որ մաթեմատիկայի այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են ընդհանուր տոպոլոգիան, չափականության և չափի տեսությունները, անխզելիորեն կապված են բազմությունների տեսության հետ և ի հայտ եկան նրա հետ գրեթե միաժամանակ:

Ուստի ընդհանուր տոպոլոգիայի դասընթացը սովորաբար սկսվում է բազմությունների տեսության մի որոշ, թեկուզև շատ համառոտ ակնարկով:

Բազմությունների տեսության հիմքում ընկած է **բազմություն** հասկացությունը: Ըստ Կանտորի նշանավոր սահմանման՝ բազմություն ասելով՝ մենք հասկանում ենք մեր ինտուիցիայի կամ մտքի արդյունքում իրարից լավ տարբերվող զանազան օբյեկտների ամբողջություն: Կանգ չառնելով այստեղից ծագող հնարավոր թերըմբռնումների և հակաճառումների վրա՝ արձանագրենք միայն, որ այսուհետև մենք «բազմություն», «դաս», «ընտանիք», «համախմբություն», «ամբողջություն» տերմինները գործածելու ենք որպես հոմանիշներ:

Հաջորդ կարևոր հասկացությունը **բազմության տարրն** է: Բազմությունը կազմված է տարրերից և որոշվում է իր տարրերով. գրում ենք $x \in X$, եթե x օբյեկտը X բազմության տարր է: Սովորաբար վերջավոր բազմությունը տրվում է նրա տարրերի թվարկումով՝ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: Դիտարկվում է նաև դատարկ բազմություն. նշանակվում է $\varnothing$ սիմվոլով և չունի տարրեր:

Եթե Y բազմության ամեն մի տարր նաև տարր է X բազմության համար, ապա Y-ը կոչվում է X-ի **ենթաբազմություն**: Ասում են նաև, որ Y-ը **ընկած է** X-ում, կամ Y-ը X-ի **մաս է**, և գրառում են $Y \subset X$: Համարվում է, որ $\varnothing \subset X$ ցանկացած X-ի դեպքում:

Ընդունված է X բազմության $\varnothing$ և X ենթաբազմությունները անվանել նրա **ոչ սեփական ենթաբազմություններ:**

Բնականաբար երկու X և Y բազմություններ համընկնում են (նույնն են) այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք կազմված են միևնույն փարրերից: Դա գրառվում է $X = Y$ տեսքով և կարդացվում է ինչպես վերը նշվեց (և ոչ թե X-ը հավասար է Y-ին): Երբեմն $X = Y$ նույնականությունը հաստատելու նպատակով ցույց է տրվում, որ $X \subset Y$ և $Y \subset X$:

Հաճախ X բազմությունից նրա որևէ Y ենթաբազմություն առանձնացվում է այսպես կոչված **նկարագրական եղանակով**՝ գրառվում է

$$Y = \{x \in X \mid (x \text{ փարրի վերաբերյալ պահանջ})\}$$

Կարդացվում է. Y-ը կազմված է X-ի այն բոլոր փարրերից, որոնք բավարարում են նշված պահանջին:

Օրինակ 1: Դիցուք $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ բոլոր զույգ թվերի բազմությունն է: Պարզ է, որ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ և $2\mathbb{Z}$-ը կարող է գրառվել՝ $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 2-ի վրա}\}$:

Երբեմն «ավելի ծավալուն» բազմությունը նկարագրվում է (սահմանվում է) «ավելի նվազ ծավալով» բազմության միջոցով:

Օրինակ 2: $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը կարող է ներկայացվել $\mathbb{R}$ թվային ուղղի միջոցով, որպես թվազույգերի բազմություն՝ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$:

Բազմությունների համար սահմանվում են **հատման**, **միավորման** և **տարբերության գործողություններ**: Օգտվելով նկարագրական եղանակից՝ երկու բազմությունների հատման, միավորման և տարբերության սահմանումները կարելի է գրառել համառոտ՝

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \in B\}\,,\ A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ կամ } x \in B\}\,,\ A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}\,:$$

Այս գործողություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով. ցանկացած A, B, C բազմությունների դեպքում՝

ա) $A \cup A = A,\ A \cap A = A,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$;

բ) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ A \cup B = B \cup A,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$ $A \cap B = B \cap A$;

բ) հատկությունները կոչվում են $\cup$ և $\cap$ գործողությունների զուգորդականության և տեղափոխականության հատկություններ:

գ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

գ) հատկությունները կոչվում են բաշխական հատկություններ համապատասխանաբար միավորման և հատման նկատմամբ:

դ) $A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2),\ A \setminus (B_1 \cap B_2) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2)$:

դ) նույնությունները կոչվում են դե Մորգանի բանաձևեր:

Օրինակ 3: Ապացուցենք դե Մորգանի առաջին բանաձևը:

Այդ նպատակով ցույց տանք, որ $A\setminus(B_1\cup B_2)$ բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է $(A\setminus B_1)\cap(A\setminus B_2)$ բազմությանը և հակառակը՝

$$x\in A\setminus(B_1\cup B_2)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\notin B_1\cup B_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\notin B_1 \text{ և } x\notin B_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\setminus B_1\\ x\in A\setminus B_2\end{cases}\Rightarrow x\in(A\setminus B_1)\cap(A\setminus B_2)$$

Այս օրինակում հակառակը ցույց տալու համար նոր դատողություններ անելու կարիք չկա. բոլոր քայլերը հակադարձվում են վերջից դեպի սկիզբ: Փաստորեն բոլոր $\Rightarrow$ անցումներն ունեն $\Leftrightarrow$ համարժեքության բնույթ: ■

Եթե ունենք (վերջավոր քանակով) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ բազմություններ, ապա նրանց հատումը և միավորումը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_i,\ \text{որտեղ } i=1,2,\ldots,n\}$$
$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid \text{գոյություն ունի } i,\ \text{որ } x\in A_i\}$$

Այս դեպքում վերը բերված դե Մորգանի բանաձևերը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcap_{i=1}^{n}(A\setminus B_i)\,,\quad A\setminus\bigcap_{i=1}^{n}B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A\setminus B_i)\,,$$

որտեղ $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$-ը կամայական բազմություններ են:

Հաճախ դիտարկվում են բազմություններ, որոնց տարրերը իրենք ևս բազմություններ են: Այդպիսի բազմությունը կոչվում է **բազմությունների ընտանիք**:

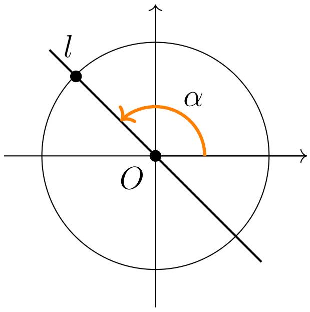
Օրինակ 4: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության մեջ գտնվող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Սա բազմությունների ընտանիք է, որի տարրերը (ուղիղները) իրենք ևս բազմություններ են կազմված $\mathbb{R}^2$-ի կետերից:

Դիցուք I-ն բազմություն է, որի ամեն մի $i\in I$ տարրի համապատասխանեցված է որևէ X_i բազմություն: Այս X_i բազմություններից կազմված բազմությունը (բազմությունների ընտանիքը) նշանակվում է $\{X_i;\ i\in I\}$ և կոչվում է **բազմությունների ինդեքսավորված ընտանիք**: Այստեղ I-ն կոչվում է **ինդեքսների բազմություն**:

Նշենք, որ բազմությունների ընտանիքը ինդեքսավորելիս սովորաբար որպես ինդեքսավորվող բազմություն ընտրում են արդեն հայտնի և լավ ընկալվող որևէ բազմություն կամ նրա որևէ մասը:

Օրինակ, թվերից կազմված հաջորդականության տարրերը սովորաբար ինդեքսավորում են (համարակալում են) կամ բոլոր բնական թվերով, կամ այդ բազմության որևէ վերջավոր մասով:

Օրինակ 5: Ինդեքսավորենք կոորդինատային $\mathbb{R}^2$ հարթության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Նկատենք, որ ամեն մի այդպիսի ուղիղ միարժեքորեն որոշվում է այն ամենափոքր α անկյունով, որով պետք է պտտել OX առանցքը O կետի շուրջը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի l ուղղի հետ:

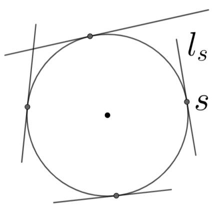


Ուսփի փվյալ բազմության փարրերը կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Այսփեղից նաև սփանում ենք, որ ցանկացած շրջանագծի կեփերի բազմությունը նույնպես կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Օրինակ 6: Դիփարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության մեջ այն բոլոր ուղիղներից կազմված L բազմությունը, որոնք գփնվում են կոորդինափների 0 սկզբնակեփից 1 միավոր հեռավորության վրա: Ցույց փանք, թե ինչպես կարելի է ինդեքսավորել L-ը: Նկափենք, որ այդ բազմության ամեն մի փարր (ուղիղ) ունի ճիշփ մի ընդհանուր կեփ $S = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ շրջանագծի հեփ (շոշափման կեփը): Նշանակելով l_s-ով շրջանագծի $s \in S$ կեփով փարված շոշափողը, կարող ենք L բազմությունը ներկայացնել որպես բազմությունների ինդեքսավորված ընփանիք՝ $L = \{l_i; i \in S\}$:

Այս օրինակում որպես ինդեքսների բազմություն հանդես եկավ միավոր շրջանագծի բոլոր կեփերից կազմված S բազմությունը: TODO: Fix the figure



Նկափենք, որ ամեն մի կոնկրեփ դեպքում ինդեքսավորող բազմության ընփրությունը կափարվում է (ոչ միակ եղանակով) ըսփ նպափակահարմարության:

Հաշվի առնելով դե Մորգանի բանաձևերի կարևորությունը՝ նշենք, որ դրանք ճիշփ են ցանկացած ինդեքսավորված բազմությունների դեպքում. եթե ունենք որևէ $\{X_i;\ i \in I\}$ ինդեքսավորված ընփանիք և X բազմություն, ապա

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i), \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \tag{1}$$

Ապացուցենք (??) նույնություններից երկրորդը.

$$x \in \left(X \setminus \bigcap_{i\in I} X_i \right) \;\Leftrightarrow\; \left(x \in X \text{ և } x \notin \bigcap_{i\in I} X_i \right) \;\Leftrightarrow\; \big(x \in X \text{ և գոյություն ունի}$$

$$i_0 \in I \text{ ինդեքս, որ } x \notin X_{i_0} \big) \;\Leftrightarrow\; x \in (X \setminus X_{i_0}) \Leftrightarrow\; x \in \bigcup_{i\in I} (X \setminus X_i) \quad \blacksquare$$

Եթե Y-ը X-ի ենթաբազմություն է, ապա $X \setminus Y$-ը կոչվում է ***Y*-ի լրացում *X*-ում**: Մասնավոր դեպքում, երբ $\{X_i;\, i \in I\}$ ընտանիքի բոլոր X պարրերը միևնույն X բազմության ենթաբազմություններ են՝ $X_i \subset X$, դե Մորգանի (??) բանաձևերն ընդունում են մտապահման հեշտ ձև. միավորման լրացումը լրացումների հատումն է, իսկ հատման լրացումը լրացումների միավորումն է:

Տարբեր բազմություններ միմյանց հետ համեմատելու միջոցը **բազմությունների արտապատկերումներն** են:

Եթե X բազմության ամեն մի x տարրի համապատասխանեցված է Y բազմության որևէ y տարր, ապա ասում են, որ տրված է X բազմության $f : X \to Y$ արտապատկերում Y բազմության մեջ:

Այս դեպքում y տարրը կոչվում է x տարրի կերպար և նշանակվում է $y = f(x)$: Ինքը՝ X բազմությունը կոչվում է f արտապատկերման **որոշման տիրույթ**, իսկ Y-ը՝ f-ի **արժեքների տիրույթ**: Ամեն մի ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f(A) \subset Y$ կերպարը, որպես Y-ի ենթաբազմություն՝ կազմված Y-ի այն բոլոր y տարրերից, որոնց համար գոյություն ունի $x \in X$ տարր, որ $f(x) = y$: Այսպիսով՝ եթե $A \neq \varnothing$, ապա կրճատ՝ $f(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ և } f(x) = y\}$: Իսկ $A = \varnothing$ դեպքում համարվում է $f(\varnothing) = \varnothing$:

Եթե $Y \subset X$, ապա դիտարկվում է $i : Y \to X$ արտապատկերում՝ սահմանելով $i(y) = y$, $\forall\, y \in Y$ տարրի համար: Ընդունված է i արտապատկերումն անվանել ***Y* բազմության ներդրում *X* բազմության մեջ**:

Ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f^{-1}(B)$ **նախակերպարը** $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում որպես X-ի ենթաբազմություն՝ կազմված X-ի այն բոլոր x տարրերից, որ $f(x) \in B$: Կրճատ՝ $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$: Պարզ է, որ $f^{-1}(Y) = X$, և համարվում է $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ ցանկացած $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում:

Նշենք նաև, որ ընդունված է Y-ի մի տարր պարունակող ամեն մի $\{y_0\}$ ենթաբազմության $f^{-1}(\{y_0\})$ նախակերպարը X-ում գրառել ավելի պարզ՝ $f^{-1}(y_0)$ տեսքով և անվանել y_0 տարրի նախակերպար $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում:

Օրինակ 7: Դիցուք X և Y բազմությունները կազմված են երկուական տարրերից՝ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$: Դիտարկենք $f : X \to Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $f(x_1) = f(x_2) = y_2$:

Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք գտնել X-ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների կերպարները Y-ում և Y-ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների նախակերպարները X-ում:

Թեորեմ 1: Ամեն մի $f : X \to Y$ արտապատկերման և կամայական $X_1, X_2 \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), \quad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2),$$
$$f(X_1) \setminus f(X_2) \subset f(X_1 \setminus X_2)\text{:}$$

Ապացուցում: Ապացուցենք օրինակ դրանցից երկրորդը՝

$$y \in f(X_1 \cap X_2) \;\Rightarrow\; (\exists\, x \in X_1 \cap X_2 \text{ և } f(x) = y) \;\Rightarrow\; (x \in X_1,\; x \in X_2 \text{ և } f(x) = y) \;\Rightarrow$$
$$(y \in f(X_1) \text{ և } y \in f(X_2)) \;\Rightarrow\; y \in f(X_1) \cap f(X_2)\text{ :}$$

Հետևաբար $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$: ■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$: Իրոք, օրինակ 7-ում վերցնելով $X_1 = \{x_1\},\ X_2 = \{x_2\}$ ստանում ենք $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, ուստի $f(X_1 \cap X_2) = \varnothing$, մինչդեռ $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y_2\} \neq \varnothing$: Հետևաբար տեղի չունի $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ ներդրում:

Նշենք, որ թեորեմ 1-ում բերված առաջին երկու առնչությունները ճիշտ են X բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{X_i;\, i \in I\}$ ինդեքսավորված ընտանիքի դեպքում՝

$$f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\left(X_i\right), \quad f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f\left(X_i\right)$$

Թեորեմ 2: Կամայական $f : X \to Y$ արտապատկերման և $Y_1, Y_2 \subset Y$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2),$$
$$f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)\text{:}$$

Ապացուցենք դրանցից առաջինը՝

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in Y_1 \\ f(x) \in Y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(Y_1) \\ x \in f^{-1}(Y_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

Նման ձևով ապացուցվում է, որ Y բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{Y_i;\, i \in I\}$ ինդեքսավորված ընտանիքի դեպքում

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i) \tag{2}$$

Թեորեմ 3: Կամայական $f : X \to Y$ արտապատկերման և $A \subset X,\ B \subset Y$

ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{3}$$

Ապացուցում: Իրոք, $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists\, x \in f^{-1}(B)$, որ $f(x) = y) \Rightarrow (f(x) \in B)$ $\Rightarrow y \in B$: Հետևաբար $f(f^{-1}(B)) \subset B$: Նման ձևով՝ $x \in A \Rightarrow (f(x) \in f(A)) \Rightarrow$ $x \in f^{-1}(f(A))$: Հետևաբար $A \subset f^{-1}(f(A))$: ■

Վերը բերված օրինակ 7-ում վերցնելով $A = \{x_1\},\ B = \{y_1, y_2\}$՝ համոզվում ենք, որ ընդհանուր դեպքում (**??**) բանաձևերում ներդրման $\subset$ նշանները չեն կարող փոխարինվել համընկնման $=$ նշանով:

Սահմանում: $f : X \to Y$ արտապատկերումը կոչվում է **ներդիր** կամ **ինյեկտիվ** արտապատկերում, եթե X-ի $\forall\ x_1 \neq x_2$ տարրերի դեպքում $f(x_1) \neq f(x_2)$: Այնուհետև, $f : X \to Y$ արտապատկերումը կոչվում է **վրադիր** կամ **սյուրյեկտիվ** արտապատկերում, եթե $\forall\ y \in Y$ տարրի համար $\exists\ x \in X$ տարր, որ $f(x) = y$:

Նշենք, որ արտապատկերման սյուրյեկտիվությունը համարժեք է $f(X) = Y$ համընկնմանը:

Նկատենք, որ օրինակ 7-ում բերված f արտապատկերումը ոչ ինյեկտիվ է և ոչ էլ սյուրյեկտիվ է:

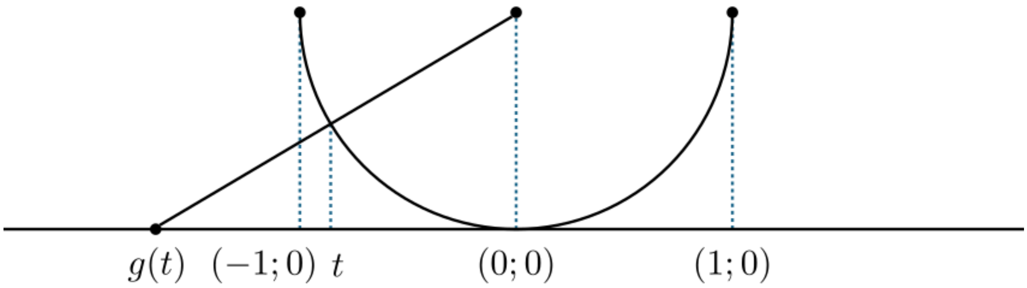
Միաժամանակ ինյեկտիվ և սյուրյեկտիվ արտապատկերումը կոչվում է **բիյեկտիվ** կամ **փոխմիարժեք** արտապատկերում:

Յանկացած X բազմության համար $x \mapsto x,\ x \in X$ համապատասխանությունը որոշում է $X \to X$ փոխմիարժեք արտապատկերում: Այն կոչվում է X-ի **նույնական արտապատկերում** և նշանակվում է id կամ $\mathbb{1}_X$ սիմվոլներով:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $f(n) = n + 1$ բանաձևով, փոխմիարժեք է (հիմնավորե՛ք) և տարբեր է $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ նույնական արտապատկերումից:

Ամեն մի փոխմիարժեք $f : X \to Y$ արտապատկերման համար սահմանվում է նրա **հակադարձ** $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերումը. որպես $\forall y \in Y$ տարրի $f^{-1}(y)$ կերպար սահմանվում է X-ի այն x տարրը, որ $f(x) = y$:

Օրինակ 9: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք արտապատկերում $(-1, 1) \to (-\infty, \infty)$: Այն կարող է սահմանվել անալիտիկորեն $f(t) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} t$, $t \in (-1, 1)$ բանաձևով, կամ երկրաչափորեն՝ ստորև նկարագրվող եղանակով: Գծագրում $(-\infty, \infty)$ թվային ուղիղը պատկերված է որպես OX կոորդինատային առանցք:



Դիտարկենք $M(0;1)$ կենտրոնով և 1 շառավղով կիսաշրջանագիծ առանց իր երկու $A(-1;1)$ և $B(1;1)$ ծայրակետերի: Այժմ կամայական $t \in (-1;1)$ կետի $g(t)$ կերպարը ստանալու համար t կետից ուղղահայաց բարձրանում ենք մինչև կիսաշրջանագծի T կետը և ապա գտնում ենք $g(t) \in (-\infty, +\infty)$ կետը՝ որպես MT ճառագայթի հատման կետ OX առանցքի հետ: Առաջարկում ենք ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ վերը սահմանված $f, g : (-1;1) \to (-\infty, +\infty)$ արտապատկերումները փոխմիարժեք են, ինչպես նաև նկարագրել նրանց հակադարձ արտապատկերումները: Նկատենք նաև, որ f-ը և g-ն նույնը չեն:

Եթե ունենք $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է նրանց $g \circ f : X \to Z$ **համադրույթ** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ բանաձևով:

Եթե $f : X \to Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում է, ապա ինչպես արդեն գիտենք, գոյություն ունի նրա հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերումը և իմաստ ունեն $f^{-1} \circ f$ և $f \circ f^{-1}$ համադրույթները: Հեշտ է տեսնել, որ

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y :$$

Ցանկացած $f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to T$ արտապատկերումների դեպքում իմաստ ունեն $(h \circ g) \circ f$ և $h \circ (g \circ f)$ համադրույթները, որոնք որոշում են միևնույն $X \to T$ արտապատկերումը՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: Իրոք, նշանակելով $h \circ g$ և $g \circ f$ համադրույթները համապատասխանաբար u և v, ցանկացած $x \in X$ տարրի համար կունենանք՝

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$
$$((h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ v)(x) = h(v(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) :$$

Հետևաբար՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 1-ի վերաբերյալ

1.1. Կամայական A, B, C բազմությունների համար ապացուցեք հետևյալ նույնությունները.

   ա) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

   բ) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

   գ) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

   դ) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

1.2. Ցույց տվեք, որ օրինակ 6-ում ուղիղների L ընտանիքը կարելի է ուղղակի ինդեքսավորել նաև $[0, 2\pi)$ միջակայքի թվերով:

1.3. Դիտարկենք էվկլիդյան կոորդինատային $\mathbb{R}^3$ տարածության սկզբնակետով անցնող բոլոր հարթությունների ընտանիքը: Այս ընտանիքի համար գտեք որևէ ինդեքսավորող բազմություն:

1.4. Ապացուցեք դե Մորգանի (**??**) բանաձևերից առաջինը:

1.5. Թեորեմ 1-ի բերված ապացույցը կազմված է որպես 4 հետևությունների հաջորդականություն: Պարզեք՝ դրանցից ո՞րը չի հակադարձվում:

1.6. Օգտվելով օրինակ 7-ում սահմանված $f : X \to Y$ արտապատկերումից և X-ում ընտրելով X_1 և X_2 հարմար ենթաբազմություններ՝ ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում թեորեմ 1-ի $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ ներդրումը չի վերածվում աջ և ձախ մասերի համընկման:

1.7. Ապացուցեք թեորեմ 1-ի երեք նույնություններից առաջինը և երրորդը:

1.8. Ապացուցեք թեորեմ 2-ի երկրորդ և երրորդ նույնությունները:

1.9. Թեորեմ 3-ի երկու պնդումների ապացույցներում ո՞ր հետևումներն են, որ չեն հակադարձվում:

1.10. Ապացուցեք (**??**) նույնությունները:

1.11. Դիտարկենք երկու հարց կապված թեորեմ 3-ի հետ. ինչպիսի՞ն պետք է լինի $f : X \to Y$ արտապատկերումը, որ տեղի ունենա

   ա) $f^{-1}(f(A)) = A$ համընկնում ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում,

   բ) $f(f^{-1}(B)) = B$ համընկնում ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության դեպքում:

   Ապացուցեք, որ ա) դեպքում անհրաժեշտ և բավարար պայման է f արտապատկերման ինյեկտիվությունը, իսկ բ) դեպքում՝ f-ի սյուրյեկտիվությունը:

1.12. Նշանակենք h-ով $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումների $g \circ f : X \to Z$ համադրույթը՝ $h = g \circ f$: Ապացուցեք, որ ամեն մի $T \subset Z$ ենթաբազմության դեպքում $h^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T))$:

1.13. Դիցուք $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ապացուցեք, որ f-ը ներդիր, g-ն վրադիր արտապատկերումներ են:

1.14. Դիցուք $f : X \to Y$ և $g : Y \to X$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ապացուցեք, որ f-ը և g-ն փոխմիարժեք, մեկը մյուսին հակադարձ արտապատկերումներ են:

Թեմա 2

Բազմությունների դեկարտյան (ուղիղ) արտադրյալ, արտապատկերումների ուղիղ արտադրյալ, անկյունագծային արտապատկերում: Համարժեքության հարաբերություն բազմության վրա, ֆակտոր-բազմություն:

Գոյություն ունի տրված բազմության կամ մի քանի բազմությունների միջոցով նոր բազմություն կառուցելու երեք հիմնական եղանակ: Դրանք են՝

ա) բազմությունից ենթաբազմության առանձնացումը,

բ) բազմությունների ուղիղ (դեկարտյան) բազմապատկումը,

գ) տվյալ բազմության ֆակտոր-բազմության կառուցումը:

Սրանցից առաջինը քննարկվեց թեմա 1-ում: Այժմ մյուս երկուսը:

Երկու՝ A և B ոչ դատարկ **բազմությունների դեկարտյան** կամ **ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է այն բազմությունը (նշանակվում է $A \times B$), որի տարրերը բոլոր (a, b) կարգավորված զույգերն են, որտեղ $a \in A$, $b \in B$:

Մի քանի $A_1, \ldots, A_n$ ոչ դատարկ **բազմությունների ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է $\{(a_1, \ldots a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ բազմությունը և նշանակվում է $A_1 \times \cdots \times A_n$ կամ $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$: Այստեղ $(a_1, \ldots, a_n)$-ը $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից մեկական վերցրած տարրերի հաջորդականություն է: Մասնավոր դեպքում, երբ $A_1 = \cdots = A_n = A$, նրանց ուղիղ արտադրյալը նշանակվում է A^n: Եթե $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից որևէ մեկը դատարկ բազմություն է, ապա նրանց արտադրյալ է համարվում $\varnothing$ դատարկ բազմությունը:

Թեորեմ 1: Կամայական A, B, C, D-ն ոչ դատարկ բազմությունների համար տեղի ունեն հետևյալ համարժեքությունները.

ա) $(A \times C = B \times D) \Leftrightarrow A = B$ և $C = D$

բ) $(A \times C \subset B \times D) \Leftrightarrow A \subset B$ և $C \subset D$:

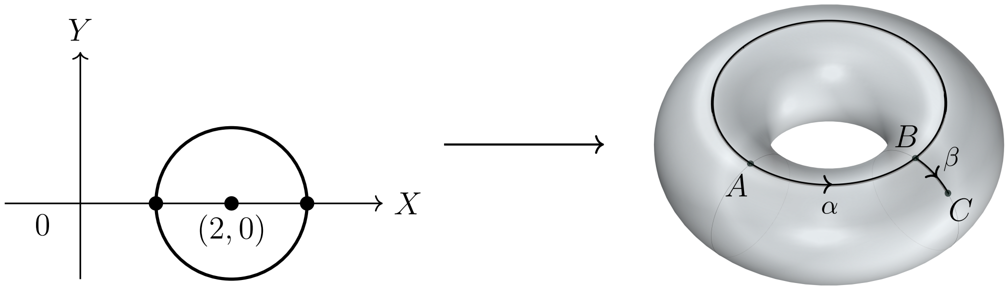
Երկու պնդումներն էլ անմիջականորեն հետևում են սահմանումներից:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ արտադրյալը (որտեղ $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է) կազմված է իրական թվերի բոլոր $(r_1, \ldots, r_n)$ հաջորդականություններից: Այն կարող է նույնացվել n-չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային գծային տարածության բոլոր կետերի բազմության հետ:

Որպեսզի պարզ լինի հաջորդ օրինակը, դիտարկենք այն մակերևույթը, որն առաջանում է, երբ որևէ շրջանագիծ, օրինակ՝ $(2, 0)$ կենտրոնով և 1 շառավղով

$(x-2)^2+y^2=1$ շրջանագիծը, պտտվում է նրան չհատող OY առանցքի շուրջը $\mathbb{R}^3$ տարածության մեջ՝ կատարելով մեկ լրիվ պտույտ: Այսպիսի մակերևույթները կոչվում են **տոր** և ունեն փրկարար օղակի տեսք: Պարզ է, որ շրջանագծի ամեն մի (x, y) կետ պտույտի ընթացքում գծում է շրջանագիծ: Այն կոչվում է **տորի զուգահեռական**: Տորն ամբողջովին ծածկված է իր զուգահեռականներով: Պարզ է նաև, որ OY առանցքով անցնող ամեն մի հարթություն հատում է տորը շրջանագծով: Դրանք նույնպես ամբողջովին ծածկում են տորը և կոչվում են **տորի միջօրեականներ**:

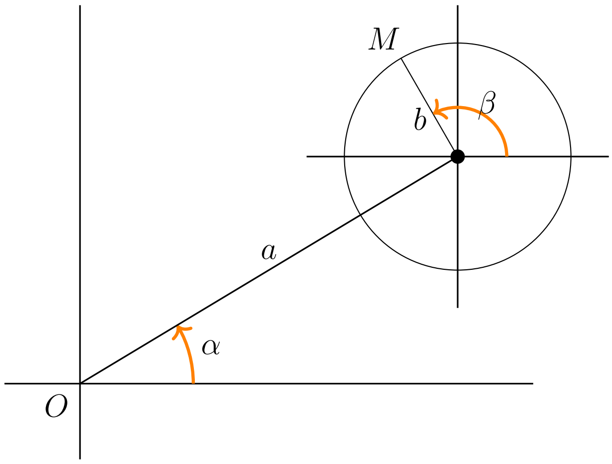
Նկատենք, որ տորի որևէ սևեռված A կետից կարելի է տեղափոխվել տորի ցանկացած այլ կետ՝ կատարելով տարածության մեջ երկու պտույտ $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ անկյուններով: Ստորև նկարում α և β անկյունները պատկերված են տորի զուգահեռականների և միջօրեականների AB և BC աղեղների տեսքով: Ընդ որում, աղեղները հաշվարկվում են սևեռված A կետից, սևեռված ուղղություններով և սևեռված հաջորդականությամբ: Այժմ տորի C կետ տեղափոխվելու համար նախ A կետից անջատվում է α աղեղ զուգահեռականով, այնուհետև B կետից՝ β աղեղ միջօրեականով: Այսպիսով կամայական տորի ցանկացած կետ միարժեքորեն ինդեքսավորվում է (α, β) թվազույգով, որտեղ $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$:



Օրինակ 2: Դիտարկենք $S \times S$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ S-ը որևէ սևեռված շրջանագծի բոլոր կետերի բազմությունն է: Այն կոչվում է **վերացական տոր**: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $S \times S$ վերացական տորի բոլոր կետերի և կամայական տորի (որպես մակերևույթի) բոլոր կետերի միջև:

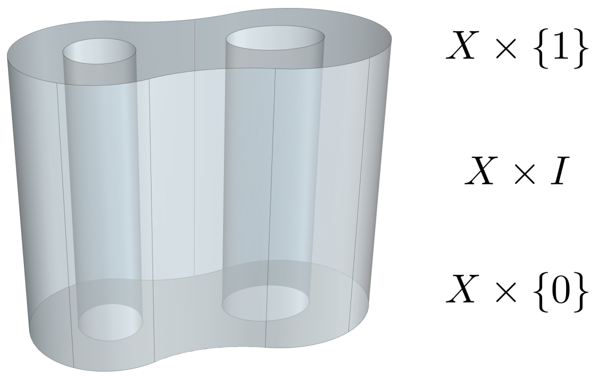
Թեմա 1-ի օրինակ 4-ից գիտենք, որ կամայական S շրջանագծի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր $[0, 2\pi)$ անկյուններով: Հետևաբար $S \times S$-ի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր (α, β) թվազույգերով, որտեղ $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$: Բայց ինչպես տեսանք, կամայական տորի կետերը նույնպես ինդեքսավորվում են այդպիսի թվազույգերով: Ուստի ցանկացած տոր կարող է դիտվել որպես $S \times S$ վերացական տորի **երկրաչափական մոդել**:

Օրինակ 3: **Կրկնակի ճոճանակ** կոչվում է միմյանց հետ շարժական ձևով միացված a և b ձողերից կազմված սարքը: Դրանցից a-ն ազատ պտտվում է իր O անշարժ ծայրակետի շուրջը, իսկ b-ն՝ a-ի հետ միացման շարժական կետի շուրջը: Հեշտ է տեսնել, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն կրկնակի ճոճանակի բոլոր $M(\alpha,\beta)$ դիրքերի բազմության և փոռի բոլոր կետերի բազմության միջև:



Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, իսկ I-ն $[0,1]$ հատվածն է: $X\times I$ ուղիղ արտադրյալը կոչվում է **գլան X հիմքով**: Նրա $X\times\{0\}$ և $X\times\{1\}$ ենթաբազմությունները կոչվում են **գլանի ստորին** և **վերին հիմքեր**: Մասնավոր դեպքում, երբ X-ը որևէ հարթ պատկեր է, $X\times I$ բազմությունը երկրաչափորեն կարող է պատկերվել որպես գլանաձև մարմին $\mathbb{R}^3$-ում:

Օրինակ 4: Ստորև պատկերված է $X\times I$ տեքսի մարմին $\mathbb{R}^3$-ում: Նրա X հիմքն ունի հարթության շրջանաձև փիրույթի տեսք, որից հեռացված են երկու ավելի փոքր շրջանաձև փիրույթներ:



Թեորեմ 2: Ցանկացած A,B,C,D բազմությունների դեպքում

ա) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$,

բ) $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$,

գ) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,

դ) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ մյուսները թողնելով ընթերցողին.

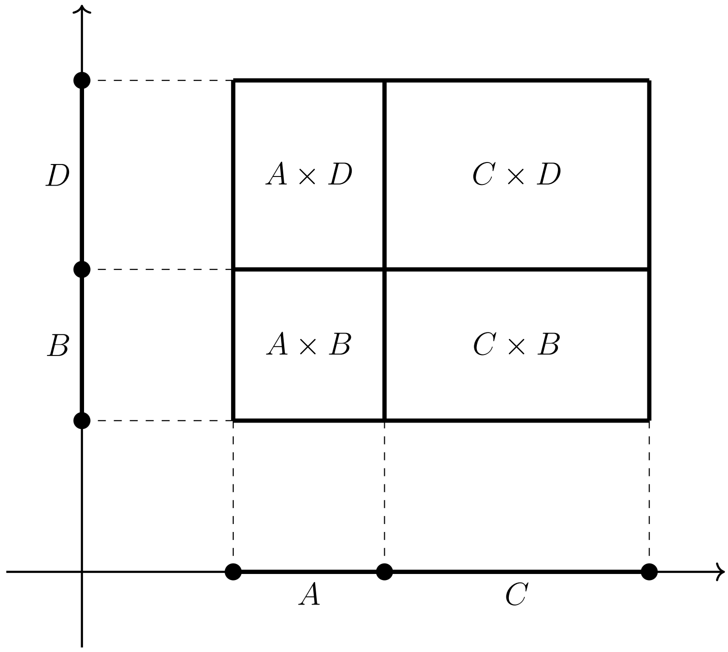
$$x \in (A \times B) \cup (C \times D) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in A \times B \\ x \in C \times D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \exists\, a \in A \text{ և } b \in B, \text{ որ } x = (a,b) \\ \exists\, c \in C, \text{ և } d \in D, \text{ որ } x = (c,d) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \cup C \text{ և } b \in B \cup D \\ c \in A \cup C \text{ և } d \in B \cup D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} (a,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \\ (c,d) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (A \cup C) \times (B \cup D) \;\Leftrightarrow\; ((A \times B) \cup (C \times D)) \subset ((A \cup C) \times (B \cup D))$$

■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$: Դա ցույց տալու համար բերենք օրինակ:



Գծագրում A, B, C, D-ն թվային ուղղի հատվածներ են, բ)-ի ձախ մասը $A \times B$ և $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, աջ մասը՝ $A \times B$, $A \times D$, $C \times B$, $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, և դրանք նույնը չեն: ■

Բազմությունների $X \times Y$ արտադրյալի համար սահմանվում են $P_X : X \times Y \to X$ և $P_Y : X \times Y \to Y$ արտապատկերումներ $P_X(x,y) = x$ և $P_Y(x,y) = y$, $(x,y) \in X \times Y$ բանաձևերով: Դրանք կոչվում են $X \times Y$-ի **կանոնական պրոյեկցիաներ** համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ արտադրիչների վրա:

Այժմ քննարկենք երկու **արտապատկերումների արտադրյալ** հասկացությունը. եթե ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1$ և $f_2 : X_2 \to Y_2$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում՝ $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ բանաձևով (կոչվում է f_1-ի և f_2-ի արտադրյալ): Այս f_1, f_2, $f_1 \times f_2$ արտապատկերում-ները և կանոնական պրոյեկցիաները միմյանց հետ կապվում են երկու կոմուտատիվ դիագրամով՝

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1\times f_2"] \arrow[d, "P_{X_1}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_1}"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1\times f_2"] \arrow[d, "P_{X_2}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_2}"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Առաջին դիագրամի կոմուտափիվությունը նշանակում է, որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_1 \circ P_{X_1}$ համադրույթները որոշում են միևնույն $X_1 \times X_2 \to Y_1$ արտապատկերումը, իսկ երկրորդ դիագրամի կոմուտափիվությունը նշանակում է, որ նույնն են $P_{Y_2} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_2 \circ P_{X_2}$ համադրույթները:

Ցույց տանք առաջինի կոմուտափիվությունը. կամայական $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ տարրի համար մի կողմից ունենք

$$(P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2))(x_1, x_2) = P_{Y_1} \circ ((f_1 \times f_2)(x_1, x_2)) = P_{Y_1}(f_1(x_1), f_2(x_2)) = f_1(x_1),$$

իսկ մյուս կողմից ունենք

$$(f_1 \circ P_{X_1})(x_1, x_2) = f_1(P_{X_1}(x_1, x_2)) = f_1(x_1):$$

Ուստի $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ P_{X_1}$: ■

Այսուհետև $f_1 \times f_2$-ի նմանությունը սահմանվում է բազմությունների ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X_i \to Y_i$ արտապատկերումների

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$$

արտադրյալը՝

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)), \quad \text{որտեղ } x_i \in X_i$$

բանաձևով:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1,\ f_2 : X_2 \to Y_2$ կամայական արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A_1 \subset X_1,\ A_2 \subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում $(f_1 \times f_2)(A_1 \times A_2) = f_1(A_1) \times f_2(A_2)$,

բ) ցանկացած $B_1 \subset Y_1$ և $B_2 \subset Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում $(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ թողնելով ա)-ի ապացուցումը ընթերցողին. $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \;\Rightarrow\; (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \;\Rightarrow\; (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2 \;\Rightarrow\; f_1(x_1) \in B_2$ և $f_2(x_2) \in B_2 \;\Rightarrow\; x_1 \in f_1^{-1}(B_1)$ և $x_2 \in f_2^{-1}(B_2) \;\Rightarrow\; (x_1, x_2) \in f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Այսպիսով ստացանք, որ $(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \subset f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Հակառակ ներդրումը հետևում է նրանից, որ իրականում բոլոր $\Rightarrow$ անցումները համարժեքություններ են: ■

Այժմ դիտարկենք արտապատկերումների ևս մի կառույց: Եթե ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ, որոնց որոշման տիրույթները նույն X բազմությունն է, ապա սահմանվում է $X \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ համադրումով:

Այդ արտապատկերումը նշանակվում է $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ և կոչվում է f_1-ով և f_2-ով ծնված **անկյունագծային արտապատկերում**: Այսպիսով $(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$:

Անկյունագծային արտապատկերում անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ մասնավոր $X = Y_1 = Y_2 = [a,b]$, $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_{[a,b]}$ դեպքում $[a,b]$ հատվածի կերպարը (f_1, f_2) արտապատկերման դեպքում $[a,b] \times [a,b]$ քառակուսու $\{(x,x) \mid x \in [a,b]\}$ անկյունագիծն է:

Նման ձևով սահմանվում է ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X \to Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ արտապատկերումներով ծնված անկյունագծային $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ արտապատկերումը՝ $(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ բանաձևով:

Թեորեմ 4: Ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $(f_1, f_2)(A) \subset f_1(A) \times f_2(A)$,

բ) ցանկացած $B_1 \in Y_1$ և $B_2 \in Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում
$(f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն:

$$x \in (f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \;\Leftrightarrow\; (f_1, f_2)(x) \in B_1 \times B_2 \;\Leftrightarrow\; (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2$$
$$\Leftrightarrow\; f_1(x) \in B_1 \text{ և } f_2(x) \in B_2 \;\Leftrightarrow\; x \in f_1^{-1}(B_1) \text{ և } x \in f_2^{-1}(B_2) \;\Leftrightarrow\; x \in f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2):$$

■

Այժմ սահմանենք բազմության ֆակտոր-բազմություն հասկացությունը:

Քանի որ մեզ համար սրանցից հիմնականն ու առաջնայինը ֆակտոր-բազմության հասկացությունն է, սկսենք դրանից:

Դիցուք՝ X բազմությունը ներկայացված է իր մի քանի զույգ առ զույգ չհատվող, ոչ դատարկ X_i ենթաբազմությունների միավորման տեսքով՝ $X = \cup X_i$: Այսպիսով $X_i \subset X$, $X_i \neq \varnothing$ ցանկացած $i \in I$ ինդեքսի դեպքում և $X_i \cap X_j = \varnothing$ ցանկացած $i \neq j$ դեպքում:

Այս դեպքում ասում են, որ ունենք X **բազմության տրոհում** $\{X_i\}$, $i \in I$ ենթաբազմությունների:

Դիտարկենք նոր՝ $F(X)$ բազմություն (բազմությունների ընտանիք), որի տարրերը X-ի X_i ենթաբազմություններն են: Այն կոչվում է X բազմության **ֆակտոր-բազմություն ծնված X-ի տվյալ տրոհումով**:

Օրինակ 5: Դիցուք X-ը ԵՊՀ բոլոր ուսանողների բազմությունն է, իսկ X_1, X_2, $\ldots$, X_{20}-ը նրա ենթաբազմություններն են ըստ ֆակուլտետների (համարենք, որ տվյալ պահին ֆակուլտետների քանակը 20 է): Այս դեպքում $F(X) = \{X_1, X_2, \ldots, X_{20}\}$:

Պատկերավորության համար թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն՝ կարող ենք $F(X)$-ը նույնացնել ԵՊՀ-ի բոլոր ֆակուլտետների բազմության հետ:

Նկատենք, որ նույն X բազմությունից կարելի է ստանալ նաև այլ ֆակտոր-բազմություններ: Դիտարկելով ԵՊՀ ուսանողների բազմության տրոհումը ըստ կուրսերի (1-ին, 2-րդ, 3-րդ, 4-րդ կուրսեր բակալավրիատում և 5-րդ, 6-րդ կուրսեր մագիստրատուրայում)՝ կստանանք մի նոր ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը կարելի է ինդեքսավորել բնական թվերի բազմության $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ենթաբազմության տարրերով:

Քննարկված երկու դեպքերից յուրաքանչյուրում, ելնելով պատկերավորության նկատառումներից՝ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացրինք **մոդելի** միջոցով: Մոդելի ընտրությունը նպատակահարմարության կամ ճաշակի հարց է: Բայց պարտադիր է, որ հաստատված լինի որոշակի փոխմիարժեք համապատասխանություն իրական ֆակտոր-բազմության և տվյալ մոդելի տարրերի միջև:

Դիցուք ունենք X բազմություն, նրա որևէ $\{X_i,\, i \in I\}$ տրոհում, և $F(X)$-ը X-ի ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանվում է $P : X \to F(X)$ **կանոնական արտապատկերում**. որպես $x \in X$ կետի $P(x)$ կերպար վերցվում է $F(X)$-ի այն X_i տարրը, որ $x \in X_i$: Պարզ է, որ P-ն սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և $F(X)$-ի տարրերի նախակերպարները որոշում են X-ի $\{X_i\}$ տրոհումը: Այսպիսով՝ X-ի յուրաքանչյուր $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն ծնվում է ուղղակի $P : X \to F(X)$ սյուրյեկտիվ արտապատկերումով:

Հակառակը նույնպես ճիշտ է՝ ամեն մի $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում որոշում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը Y-ի բազմության տարրերի նախակերպարներն են X-ում:

Գոյություն ունի բազմությունից ֆակտոր-բազմություն կազմելու մեկ ուրիշ (վերը բերվածին համարժեք) եղանակ: Այն հիմնված է համարժեքության հարաբերություն հասկացության վրա: Համարժեքության հարաբերությունը երկտեղ հարաբերության տեսակ է: Պարզաբանենք այս բոլորը:

Դիցուք X բազմության $x_1, x_2, \ldots$ տարրերից կազմված զույգերի համար սահմանված է մի որոշակի հարաբերություն: Եթե տվյալ (x_i, x_j) զույգի համար այդ հարաբերությունը տեղի ունի, ապա դա արձանագրում են $x_i R x_j$ գրառումով (R-ը Relation բառի կրճատն է) և կարդում են՝ X-ի x_i և x_j տարրերը գտնվում են տվյալ R երկտեղ հարաբերության մեջ: Այս դեպքում ասում են, որ ունենք R երկտեղ հարաբերություն X բազմության վրա:

Օրինակ 6: Դիտարկենք իրական թվերի բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու իրական թվեր կամ հավասար են, կամ նրանցից մեկը մեծ է մյուսից» ասույթը: Սա երկտեղ հարաբերություն է, և $r_1 R r_2$-ը տեղի ունի իրական թվերի ցանկացած (r_1, r_2) զույգի դեպքում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու ամբողջ թվերից մեծը առանց մնացորդի բաժանվում է փոքրի վրա» ասույթը: Պարզ է, որ $6R2$, $2R6$, $-3R6$, $0R(-1)$ հարաբերությունները տեղի ունեն, իսկ $5R2$, $3R0$, $4R4$ հարաբերությունները՝ ոչ:

Այսպիսով՝ ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ R երկտեղ հարաբերությունը տեղի ունենա ցանկացած (x_i, x_j) զույգի համար: Դիտողություն: ընդհանուր դեպքում երկտեղ հարաբերության վերը բերված սահմանումն իր մեջ պարունակում է անորոշություն. չի հստակեցվում՝ ինչ հասկանալ ասելով «հարաբերություն բազմության x_1, x_2 տարրերի միջև»: Երկտեղ հարաբերության խիստ սահմանումը հետևյալն է:

Սահմանում: X բազմության վրա երկտեղ հարաբերություն կոչվում է $X \times X$ ուղիղ արտադրյալի ցանկացած M ենթաբազմություն:

Ըստ այս սահմանման համարվում է, որ $x_i R x_j$-ը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_i, x_j) \in M$:

Այսուհետև մեզ համար կարևոր են լինելու երկտեղ հարաբերությունների հետևյալ հատկությունները: Ասում են, որ X-ի վրա տրված R երկտեղ հարաբերությունը (այսինքն՝ $X \times X$-ի M ենթաբազմությունը) օժտված է

1. **ինքնահամալուծության** հատկությամբ, եթե $\forall x \in X$ տարրի համար xRx-ը տեղի ունի (այսինքն՝ $(x, x) \in M$ ցանկացած $x \in X$ տարրի համար),

2. **համաչափության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ $x_1 R x_2$-ը տեղի ունի, հետևում է, որ $x_2 R x_1$-ը ևս տեղի ունի (այսինքն $(x_1, x_2) \in M \;\Rightarrow\; (x_2, x_1) \in M$),

3. **փոխանցականության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ տեղի ունեն $x_1 R x_2$ և $x_2 R x_3$, հետևում է, որ տեղի ունի $x_1 R x_3$-ը (այսինքն եթե $(x_1, x_2) \in M$, $(x_2, x_3) \in M \;\Rightarrow\; (x_1, x_3) \in M$):

Հասկանալի է, որ երկտեղ հարաբերությունը կարող է բավարարել կամ չբավարարել 1-3 հատկություններին, կամ դրանց մի մասին:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության վրա դիտարկենք չորս՝ R_1, R_2, R_3, R_4 երկտեղ հարաբերություններ, սահմանելով՝

ա) $xR_1y \;\Leftrightarrow\; (x > 0$ և $y > 0)$,

բ) $xR_2y \;\Leftrightarrow\; x$-ը բաժանվում է y-ի վրա առանց մնացորդի,

գ) $xR_3y \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \geq 0$,

դ) $xR_4y \;\Leftrightarrow\; (x - y)$-ը բաժանվում է 5-ի վրա առանց մնացորդի:

Սրանցից առաջինում տեղի չունի ինքնահամալուծության հատկությունը՝ $(-1)R_1(-1)$-ը տեղի չունի: Երկրորդում տեղի չունի համաչափության հատկությունը՝ $6R_22$-ը տեղի ունի, բայց $2R_26$-ը տեղի չունի: Երրորդում տեղի չունի փոխանցականության հատկությունը: Իրոք, $(-4R_30)$ և $0R_32$-ը տեղի ունեն, բայց $(-4)R_32$-ը տեղի չունի: Չորրորդ օրինակում բավարարվում են բոլոր երեք հատկությունները:

Սահմանում: Բազմության վրա տրված երկտեղ հարաբերությունը կոչվում է **համարժեքության հարաբերություն**, եթե այն օժտված է վերը բերված 1-3 հատկություններով:

Այսպիսով, օրինակ 8-ում բերված չորս երկտեղ հարաբերություններից համարժեքության հարաբերություն է միայն R_4-ը:
Դիցուք ունենք R համարժեքության հարաբերություն X բազմության վրա:

Սահմանում: Որևէ $x \in X$ տարրի **համարժեքության դաս** տվյալ համարժեքության հարաբերության նկատմամբ (նշանակվում է $[x]$), կոչվում է X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունը, որոնք գտնվում են R հարաբերության մեջ x տարրի հետ՝ $[x] = \{x' \in X \mid x'Rx\}$:

Այն դեպքում, երբ R համարժեքության հարաբերության նկատմամբ տեղի ունի x_1Rx_2-ը, ապա ասում են, որ $x_1, x_2 \in X$ տարրերը **համարժեք են միմյանց** տվյալ՝ R հարաբերության նկատմամբ: Ուստի վերը բերված սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես. $x \in X$ տարրի համարժեքության դասը X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունն է, որոնք համարժեք են x-ին R-ի նկատմամբ:

Թեորեմ 5: Դիցուք R-ը որևէ համարժեքության հարաբերություն է X-ի վրա: Ապա համարժեքության դասերն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1. ցանկացած համարժեքության դաս X-ի ոչ դատարկ ենթաբազմություն է,

2. ցանկացած երկու համարժեքության դասեր կամ ունեն դատարկ հատում, կամ էլ համընկնում են,

3. X-ի բոլոր համարժեքության դասերի միավորումը X-ն է:

Ապացուցում: 1-ը և 3-ը հետևում են նրանից, որ $x \in [x]$ կամայական x-ի դեպքում:
Ապացուցենք 2-ը: Եթե $[x_1] \cap [x_2] \neq \varnothing$, ապա գոյություն ունի $x_3 \in [x_1] \cap [x_2]$: Ունենք՝ $x_3 \in [x_1]$ և $x_3 \in [x_2] \Rightarrow (x_3Rx_1$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow (x_1Rx_3$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow x_1Rx_2$: Ցույց տանք, որ $[x_1] \subset [x_2]$: Դիտարկենք կամայական $x \in [x_1]$ տարր: Ունենք՝

$$xRx_1 \text{ և } x_1Rx_2 \;\Rightarrow\; xRx_2 \;\Rightarrow\; x \in [x_2] \;\Rightarrow\; [x_1] \subset [x_2]$$

Նման ձևով ստանում ենք $[x_2] \subset [x_1]$, ուստի $[x_1] = [x_2]$: ■

Հետևանքներ թեորեմ 5-ից: X բազմության վրա տրված R համարժեքության հարաբերությունը որոշում է X-ի որոշակի տրոհում՝ կազմված զույգ առ զույգ չհատվող $[x]$ համարժեքության դասերից: Իր հերթին այդ տրոհումը որոշում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որը նշանակվում է $X/_R$ (կարդացվում է՝ X բազմություն ֆակտոր-բազմություն՝ որոշված R համարժեքության հարաբերությունով):

Որպես օրինակ դիտարկենք R_4 համարժեքության հարաբերությունը օրինակ 8-ում: Այս դեպքում երկու ամբողջ թվեր համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանք 5-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: Ուստի ունենք միմյանց հետ չհատվող հինգ համարժեքության դաս, որոնք ներկայացվում են $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ տեսքերի թվերով:

Հետևաբար տվյալ ֆակտոր-բազմությունը կարող ենք ներկայացնել, օրինակ, $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ մոդելի տեսքով:

Անդրադառնալով ֆակտոր-բազմության առաջին սահմանմանը՝ նկատենք, որ իրականում ցանկացած $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն կարող է ներկայացվել որպես $X/_R$ տեսքի ֆակտոր-բազմություն, ինչ-որ R համարժեքության հարաբերության միջոցով: Իրոք, դիցուք ունենք X բազմության ինչ-որ $\{X_i,\ i \in I\}$ տրոհում և $F(X)$-ը այդ տրոհումով որոշված ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանենք X-ի վրա R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ x_1 և x_2 տարրերի համար տեղի ունի $x_1 R x_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $i \in I$, որ $x_1, x_2 \in X_i$: Հեշտ է ստուգել, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է, ընդ որում համարժեքության դասերը X_i ենթաբազմություններն են: Հետևաբար $F(X)$ ֆակտոր-բազմությունը համընկնում է $X/_R$ ֆակտոր-բազմության հետ:

Բերենք ֆակտոր-բազմությունների ևս մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 9: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը: Կհամարենք, որ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ տարրերը (թվերը) գտնվում են R հարաբերության մեջ, եթե $(x_1 - x_2)$ տարբերությունը ամբողջ թիվ է: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է և որոշում է ֆակտոր-բազմություն: Որո՞նք են համարժեքության դասերը: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի թիվ $[0, 1)$ հատվածից, և հակառակը՝ $[0, 1)$ հատվածի յուրաքանչյուր կետ (թիվ) պարունակվում է համարժեքության որևէ դասում: Այսպիսով՝ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $\mathbb{R}/_R$ ֆակտոր-բազմության բոլոր տարրերի և $[0, 1)$ միջակայքի կետերի միջև: Ուստի կարող ենք տվյալ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացնելու համար որպես մոդել վերցնել $[0, 1)$, կամ $(-1, 0]$, կամ $\left[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, և ընդհանրապես ցանկացած $[a, b)$ կամ $(a, b]$ տեսքի միջակայք, պայմանով, որ $b - a = 1$:

Համեմատելով $[0, 1)$ և $(0, 1]$ մոդելները՝ նկատենք, որ դրանցից առաջինում 0 թվին համապատասխանող տարրը ֆակտոր-բազմությունում նույնն է, ինչ երկրորդ մոդելում 1 թվին համապատասխանող տարրը նույն ֆակտոր-բազմությունում: Ուստի ավելի բնական է թվում այն տարբերակը, երբ որպես ֆակտոր-բազմության մոդել վերցնենք օրինակ $[0, 1]$ փակ հատվածը, բայց միմյանց հետ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0, 1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը: Այսպիսի նույնացումը մեզ բերում է մի նոր մոդելի, որը բնական է ներկայացնել օվալի կամ շրջանագծի տեսքով: Այսպիսով՝ որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել, օրինակ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը:

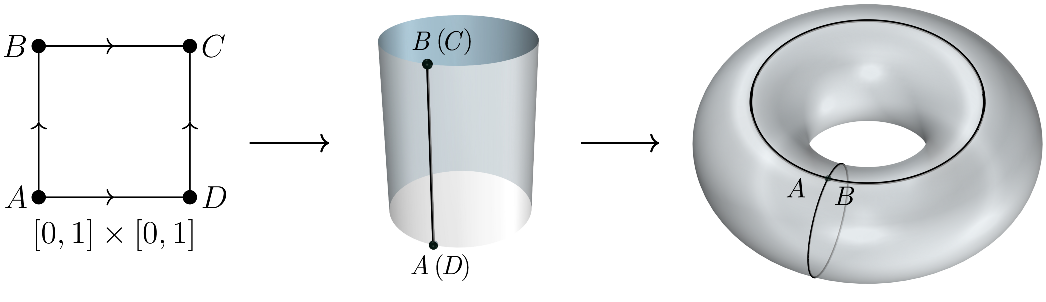
Օրինակ 10: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և սահմանենք R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ տեղի ունի $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_1 - x_2)$-ը և $(y_1 - y_2)$-ը ամբողջ թվեր են: Սա համարժեքության հարաբերություն է (1-3 հատկությունների ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին): Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի կետ $[0,1) \times [0,1)$ ուղիղ արտադրյալից: Այդ բազմությունը 1 միավոր կողմով կիսափակ քառակուսի է (նրա եզրագծում բացակայում են $(1, y)$ կետերը, որտեղ $1 \geq y \geq 0$ և $(x, 1)$ կետերը, որտեղ $1 \geq x \geq 0$): Այսպիսով, որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել այդ քառակուսին:

Մեկ ուրիշ, ավելի պատկերավոր մոդել կստացվի, եթե վերցնենք 1 միավոր կողմով փակ $[0,1] \times [0,1]$ քառակուսին՝ կատարելով նրա եզրագծի կետերի որոշ նույնացումներ: Քանի որ ամեն մի $y \in (0,1)$ դեպքում տեղի ունի $(0, y)R(1, y)$ համարժեքություն, ուստի $[0,1] \times [0,1]$ քառակուսու եզրագծի $(0, y)$ և $(1, y)$ կետերը որոշում են մի համարժեքության դաս: Նույն դատողությամբ՝ քառակուսու $(x, 0)$ և $(x, 1)$ կետերը ամեն մի $x \in (0,1)$ դեպքում նույնպես որոշում են մի համարժեքության դաս: Բացի այդ, մի համարժեքության դաս են որոշում քառակուսու A, B, C, D չորս գագաթները: Ինչ վերաբերում է քառակուսու ներքին կետերին, ապա դրանցից յուրաքանչյուրը (ինչպես նախորդ մոդելի դեպքում) համարժեք է միայն ինքն իրեն և որոշում է մի կետանոց համարժեքության դաս:

Այժմ ստացված ֆակտոր-բազմության համար կառուցենք երկրաչափական մոդել:

Վերացական ֆակտոր-բազմությունից իրական մոդելի անցնելիս հարմար է յուրաքանչյուր համարժեքության դասի բոլոր տարրերը (կետերը) պատկերացնել միմյանց հետ ֆիզիկապես նույնացված: Որոշ հարթ պատկերների դեպքում (այդպիսին է $[0,1] \times [0,1]$ քառակուսին) համարժեք կետերի ֆիզիկական նույնացումը կարելի է իրականացնել սովորական սոսնձումով:

Այժմ, նախ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0,1] \times [0,1]$ քառակուսու AB և CD կողմերը (ըստ գծագրում նշված ուղղությունների)՝ ստանում ենք գլանաձև մակերևույթ կամ գլան: Այնուհետև սոսնձելով իրար գլանի ստորին և վերին հիմքերը ըստ AD-ի վրա նշված ուղղությունների՝ ստանում ենք տոր:

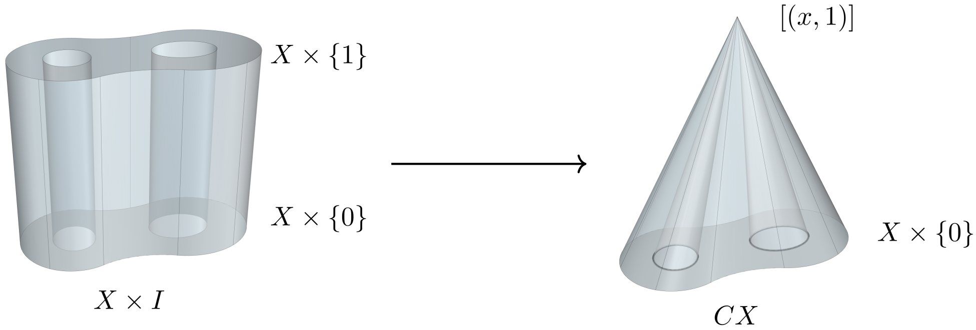


Այսպիսով, տվյալ ֆակտոր-բազմության համար որպես մոդել կարող է ծառայել նաև տորը: Նկատենք, որ քառակուսու A, B, C, D գագաթները նույնացվեցին իրար հետ՝ վերածվելով տորի մի կետի: Բացի այդ, AB-ի և BC-ի նույնացումով ստացվեց փորի այդ կետով անցնող զուգահեռական, իսկ AD-ի և BC-ի նույնացումով՝ փորի միջօրեական:

Դիտողություն: Թե՛ օրինակ 9-ում և թե՛ օրինակ 10-ում միևնույն ֆակտոր-բազմության համար մենք կառուցեցինք պեսքով միմյանցից էապես տարբերվող մի քանի մոդելներ: Հարց է առաջանում. այդ օրինակներից յուրաքանչյուրի դեպքում ո՞ր մոդելն է գերադասելի և ո՞ր հիմքով: Այս հարցի պատասխանը կտրվի դասընթացի շարունակությունում, երբ կծանոթանանք տոպոլոգիական տարածություն, հոմեոմորֆ կամ միապեսակ տոպոլոգիական տարածություններ և տոպոլոգիական տարածության ֆակտոր-տարածություն հասկացություններին:

Օրինակ 11: Դիտարկենք $X \times I$ գլանը (տե՛ս օրինակ 4-ը), որտեղ I-ն $[0,1]$ հատվածն է, իսկ X-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է: Սահմանենք համարժեքության հարաբերություն գլանի կետերի բազմության համար:

Կհամարենք, որ գլանի ամեն մի (x,t) կետ, որտեղ $0 \leq t < 1$, համարժեք է իրեն և միայն իրեն: Բացի այդ կհամարենք, որ գլանի վերին $X \times \{1\}$ հիմքի ցանկացած երկու $(x_1,1)$ և $(x_2,1)$ կետեր համարժեք են միմյանց: Սա իրոք համարժեքության հարաբերություն է (ստուգումը թողնվում է ընթերցողին): Համարժեքության դասերը մի կետանոց $\{(x,t)\}$, $t \neq 1$ ենթաբազմություններն են, ինչպես նաև գլանի վերին հիմքի բոլոր կետերից կազմված $\{(x,1) \mid x \in X\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ֆակտոր-բազմությունը կոչվում է X **հիմքով կոն** և նշանակվում է CX: Այդ կոնի համար գագաթ է ծառայում $[(x,1)]$ դասը, որտեղ x-ը որևէ կետ է X-ից: Մասնավոր դեպքում, երբ $X = S$ շրջանագիծ է, CS-ի համար որպես մոդել կարող է ծառայել պարրական երկրաչափությունից հայտնի կոնը:



Խնդիրներ և հարցեր թեմա 2-ի վերաբերյալ

2.1. Ո՞ր դեպքերում է հնարավոր

ա) $A \times B = B \times A$ նույնություն,

բ) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ նույնություն:

2.2. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $[a,b]\times[c,d]$, $[a,b]^2$, $[a,b]^3$, $[a,b]\times[c,d]^2$ ուղիղ արտադրյալները, որտեղ $[a,b]$-ն և $[c,d]$-ն թվային ուղղի հատվածներ են:

2.3. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $A\times[0,1]$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ A-ն $\mathbb{R}^2$ հարթության

ա) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ շրջանագիծն է,

բ) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ շրջանն է:

2.4. Ապացուցեք թեորեմ 2-ի ա), գ), դ) նույնությունները:

2.5. Դիցուք X_1, X_2-ը որևէ բազմություններ են: Ապացուցեք, որ ցանկացած $A\subset X_1$, $B\subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$P_{X_1}^{-1}(A)=A\times X_2,\quad P_{X_2}^{-1}(B)=X_1\times B,\quad P_{X_1}^{-1}(A)\cap P_{X_2}^{-1}(B)=A\times B,$$

որտեղ P_{X_1}-ը և P_{X_2}-ը $X_1\times X_2\to X_1$, $X_1\times X_2\to X_2$ կանոնական պրոյեկցիաներն են:

2.6. Ապացուցեք թեորեմ 3-ի ա) նույնությունը:

2.7. Սահմանեք $S\times S$ վերացական փորի համար զուգահեռականի և միջօրեականի հասկացություններ՝ որպես $S\times S$ ուղիղ արտադրյալի ենթաբազմություններ:

2.8. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցեք.

$h: S\times S\to S\times S,\quad h(s_1,s_2)=(s_2,s_1),\quad s_1,s_2\in S$ արտապատկերումը

ա) $S\times S$ վերացական փորը փոխմիարժեք արտապատկերում է ինքն իր վրա,

բ) h-ը վերացական փորի զուգահեռականները արտապատկերում է նրա միջօրեականների, իսկ միջօրեականները՝ զուգահեռականների:

2.9. Ապացուցեք, որ օրինակ 6-ի երկտեղ հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է: Նկարագրեք նրանով որոշվող ֆակտոր-բազմությունը:

2.10. $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր ուղիղներով կազմված (l_1,l_2) զույգերի համար սահմանված է ա) R' երկտեղ հարաբերություն՝ «տեղի ունի $l_1R'l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1-ը և l_2-ը զուգահեռ են» ասույթով, և բ) R'' երկտեղ հարաբերություն՝ «տեղի ունի $l_1R''l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1 և l_2 ուղիղները կամ նույնն են, կամ զուգահեռ են» ասույթով:

Պարզեք, թե այս երկուսից որն է համարժեքության հարաբերություն, և որը՝ ոչ: Առաջին դեպքում նկարագրեք համարժեքության դասերը և ֆակտոր-բազմության համար կառուցեք որևէ երկրաչափական մոդել:

2.11. Թղթի թերթից կտրեք $A(-10,-1)$, $B(-10,1)$, $C(10,1)$, $D(10,-1)$ գագաթներով երկու ուղղանկյուն (մասշտաբը՝ 1 սմ): Մի դեպքում առանց ոլորելու՝ սպացված $ABCD$ ուղղանկյան AB կողմը սոսնձեք DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, D գագաթները և B, C գագաթները, իսկ մյուս դեպքում՝ կապարելով թղթի շերտի **մի** ոլորում՝ նորից սոսնձեք AB կողմը DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, C գագաթները և B, D գագաթները:

Համոզվեք, որ առաջին դեպքում կսպացվի **գլանային մակերևույթ**, իսկ երկրորդ դեպքում կսպացվի գլանաձև, բայց **ոչ գլանային մակերևույթ**, որը կոչվում է **Մյոբիուսի թերթ**: Նաև համոզվեք, որ առաջին մակերևույթի եզրագիծը կազմված է **երկու անջատ օվալից**, իսկ երկրորդի եզրագիծը՝ **մի օվալից**:

Սահմանեք կոորդինատային բացահայտ տեսքով $ABCD$ ուղղանկյան կետերի համար երկու (երկտեղ) համարժեքության հարաբերություն այնպես, որ արդյունքում սպացվող փակտոր-բազմություններից մեկը լինի գլանայինը, իսկ մյուսը՝ Մյոբիուսի թերթը:

2.12. Ի՞նչ կարող եք ասել մակերևույթների մասին (տե՛ս նախորդ խնդիրը), որոնք սպացվում են, երբ մինչև սոսնձումը կապարվում է թղթի շերտի 2 ոլորում, 3 ոլորում, և այլն:

Թեմա 3

Վերջավոր և անվերջ բազմություններ, բազմությունների քանակական համեմատումը, թեորեմներ հաշվելի բազմությունների վերաբերյալ: Բազմության հզորության հասկացությունը, Կանտորի թեորեմը: Պարադոքսները բազմությունների նաիվ տեսությունում:

Դիցուք A-ն որևէ ոչ դատարկ բազմություն է, նրանում ընտրենք որևէ $a_1 \in A$ տարր: Եթե $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$, ապա կարող ենք ընտրել ևս մի $a_2 \in A$ տարր: Եթե $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, ապա կարող ենք ընտրել ևս մի $a_3 \in A$ տարր և այսպես շարունակ: Հնարավոր է երկու դեպք. կա՛մ այս պրոցեսը ինչ-որ n-րդ քայլում կընդհատվի, և ուստի $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$-ը **վերջավոր բազմություն** է, կա՛մ էլ այս պրոցեսը վերջ չունի: Այս երկրորդ դեպքում A-ն կոչվում է **անվերջ բազմություն**:

Օրինակ 1: Վերցնենք 1 թիվը, նրան հաջորդում է $1 + 1 = 2$ թիվը, դրան հաջորդում է $2 + 1 = 3$ թիվը և այլն: Այս պրոցեսն անվերջ է: Ստացվող $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ բազմությունը կոչվում է բնական թվերի բազմություն: Կարո՞ղ ենք այն համարել լիովին կազմավորված ավարտուն բազմություն: Մաթեմատիկայում սա վիճելի հարց է:

Անվերջ բազմությունները լինում են երկու տեսակի, կապված անվերջության ընկալման հետ՝ **պոտենցիալ** (**շարունակական**) **անվերջություն** և **ակտուալ** (**ավարտուն**) **անվերջություն**: Այսօր մաթեմատիկոսների մեծամասնությունը տարբերություն չի դնում այս երկու անվերջությունների միջև՝ համարելով դրանք միատեսակ անվերջություններ: Օրինակ՝ և՛ բնական թվերի բազմությունը (որպես պոտենցիալ անվերջ բազմություն), և՛ կամայական ուղիղ (որպես հարթության կետերից կազմված ավարտուն անվերջ բազմություն) համարվում են պարզապես անվերջ բազմություններ:

Անցնենք բազմությունների քանակական համեմատմանը:

Օրինակ 2: Ենթադրենք ունենք բավականաչափ մեծ երկու քարակույտեր: Խնդիրն է պարզել, թե դրանցից որում ավելի շատ քար կա: Խնդիրը կարող ենք լուծել փորձելով հաշվել կույտերում քարերի քանակները: Այս մեթոդի անհարմարությունը նրանում է, որ մեզ հայտնի (գործածական) թվերը կարող են չբավականացնել: Ուստի վարվենք այսպես. վերցնենք մի քար առաջին կույտից, մի քար էլ երկրորդ կույտից և այս երկուսը դնենք մի կողմ: Այնուհետև նորից վերցնենք մի քար առաջին կույտից, մի քար էլ երկրորդ կույտից և նորից դնենք մի կողմ: Շարունակելով այսպես՝ որոշ քայլերից հետո կպարզվի, որ դրանցից մեկում քարերն ավելի քիչ են, քան մյուսում, կամ երկուսում էլ քարերի քանակները նույնն են:

Այս օրինակը հիմք է ծառայում հետևյալ սահմանման համար. երկու A և B բազմություններ (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում են **քանակապես համարժեք** կամ

հավասարազոր (նշանակվում է $A \sim B$), եթե նրանց փարրերի միջև կարելի է հաստատել մեկը-մեկի կամ փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Օրինակ 3: Չնայած, որ զույգ թվերի բազմությունը կազմում է մաս ամբողջ թվերի բազմության՝ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, դրանք հավասարազոր բազմություններ են: Իրոք, $n \mapsto 2n$ համապատասխանությունը որոշում է բիյեկտիվ (փոխմիարժեք) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ արտապատկերում:

Միմյանց հավասարազոր են նաև կետերի $(-1, 1)$ և $(-\infty, +\infty)$ բազմությունները (հիմնավորումը տե՛ս թեմա 1-ի օրինակ 9-ում)՝ չնայած, որ $(-1, 1)$ ինտերվալը կազմում է թվային ուղղի մաս՝ չհամընկնելով նրա հետ: Ինչպես կտեսնենք հետագայում, այն իրավիճակը, երբ բազմությունը հավասարազոր է իր սեփական մասին (այսինքն՝ իր հետ չհամընկնող ենթաբազմությանը), բնութագրում է բոլոր անվերջ բազմությունները:

Բերենք այդպիսի, ավելի ընդհանուր բնույթի օրինակ:

Թեորեմ: Ցանկացած X անվերջ բազմություն հավասարազոր է իր $X \times X$ քառակուսուն:

Չապացուցելով թեորեմը (ապացույցը բարդ է), բավարարվենք նրա որոշ մեկնաբանությամբ: Սևեռելով որևէ $x_0 \in X$ կետ՝ դիտարկենք $f : X \to X \times X$, $f(x) = (x_0, x)$ արտապատկերումը: Պարզ է, որ f-ը ինյեկտիվ արտապատկերում է և թույլ է տալիս համարել X-ը ներդրված $X \times X$-ում՝ որպես $X \times X$-ի սեփական ենթաբազմություն: Իրոք, $(X \times X) \setminus f(X) \neq \varnothing$, քանի որ (x, x_0)-ն չի պատկանում $f(X)$-ին, եթե $x \neq x_0$: Այսպիսով՝ այս դեպքում ևս ըստ թեորեմի ունենք իրավիճակ, երբ $X \times X$ անվերջ բազմությունը հավասարազոր է իր $f(X)$ սեփական ենթաբազմությանը:

Վերադառնալով երկու բազմությունների հավասարազորության սահմանմանը՝ նկատենք, որ ցանկացած երկու A և B բազմությունների դեպքում տեսականորեն կարող է տեղի ունենալ հետևյալ 5 հնարավորություններից որևէ մեկը:

1. A-ն և B-ն հավասարազոր են: Այս դեպքում ասում են, որ A-ն և B-ն ունեն **հավասար քանակով տարրեր**:

2. A-ն հավասարազոր է B-ի որևէ մասին, բայց B-ն հավասարազոր չէ A-ի որևէ մասին (հետևաբար նաև A-ին): Այս դեպքում ասում են, որ A-ի տարրերի **քանակը քիչ է** B-ի տարրերի քանակից:

3. B-ն հավասարազոր է A-ի որևէ մասին, բայց A-ն հավասարազոր չէ B-ի որևէ մասին (հետևաբար նաև B-ին): Այս դեպքում ասում են նաև, որ A-ի տարրերի **քանակը շատ է** B-ի տարրերի քանակից:

4. A-ն հավասարազոր չէ B-ի որևէ մասի, և B-ն էլ հավասարազոր չէ A-ի որևէ մասի:

Սա իհարկե հնարավոր չէ վերջավոր բազմությունների դեպքում: Ապացուցվում է, որ այն հնարավոր չէ նաև անվերջ բազմությունների դեպքում (Կանտոր-Բերնշտեյնի թեորեմ): Ապացույցը բարդ է, և մենք այն այստեղ չենք բերում:

5. A-ն հավասարազոր է B-ի որևէ մասին, և B-ն էլ հավասարազոր է A-ի որևէ մասին:

   Ապացուցվում է (Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմ), որ այս դեպքում A-ն և B-ն հավասարազոր են (5-րդ դեպքում տեղի ունի 1-ը):

Այսպիսով՝ փաստացի հնարավոր են միայն 1-3 դեպքերը: Իսկ դա նշանակում է, որ **ցանկացած երկու բազմություններ քանակապես համեմատելի են**:

Մինչև վերոհիշյալ՝ 5-րդ դեպքի կիրառության մի օրինակի քննարկումը հիշեցնենք. մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից գիտենք՝ ցանկացած իրական թիվ ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Ընդ որում՝ իռացիոնալ թվերը ներկայացվում են միակ ձևով՝ ոչ պարբերական անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով: Իսկ ռացիոնալ թվերը ներկայացվում են պարբերական կոտորակների տեսքով, ընդ որում՝ որոշ թվերի դեպքում այդպիսի ներկայացումը կարող է միակը չլինել: Օրինակ՝ $\frac{1}{8}$ թվի համար ունենք երկու տարբեր տեսքերի ներկայացումներ՝ $0{,}12499\ldots$ և $0{,}12500\ldots$: Ամեն մի այդպիսի դեպքում որոշակիության համար կդիտարկենք միայն առաջին տեսքի ներկայացումը: Ապացուցվում է. երկու իրական թվեր, գրված տասնորդական կոտորակների տեսքով, հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ հավասար են նրանց ամբողջ մասերը և հավասար են ստորակետից հետո նույն դիրքերում գրված թվանշանները:

Օրինակ 4: Ցույց տանք, որ $(0,1)$ ինտերվալը և նրա $(0,1)\times(0,1)$ քառակուսին հավասարազոր են: Իհարկե, դա հետևում է վերը բերված ընդհանուր թեորեմից, բայց մենք կտանք ուղղակի ապացույց՝ հիմնվելով Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմի վրա:

Վերցնենք որևէ $(r_1, r_2) \in (0,1)\times(0,1)$ թվազույգ, որտեղ $r_1 = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, իսկ $r_2 = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots$ և $(r_1;r_2)$ թվազույգին համադրենք $r = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$ թիվը $(0,1)$-ից: Գրեթե ակնհայտ է, որ $(r_1;r_2)\mapsto r$ համադրումը որոշում է ինչ-որ $(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$ ինյեկտիվ արտապատկերում (հիմնավորե՛ք): Այսպիսով՝ $(0,1)\times(0,1)$-ը հավասարազոր է $(0,1)$-ի ինչ-որ մասին: Մյուս կողմից էլ ունենք, որ $(0,1)$-ը հավասարազոր է $(0,1)\times(0,1)$-ի որոշ մասին (տե՛ս վերը բերված թեորեմի մեկնաբանությունը): Այժմ Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմից հետևում է, որ $(0,1)$-ը և $(0,1)\times(0,1)$-ը հավասարազոր են:

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք հավասարազոր անվերջ բազմությունների օրինակներ: Հարց է առաջանում. իսկ կա՞ն ոչ հավասարազոր անվերջ բազմություններ: Պատասխանը դրական է և կտրվի ավելի ուշ (թեորեմ 6-ում):

Սահմանում: Բազմությունը, որը հավասարազոր է բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությանը կամ նրա որևէ վերջավոր մասին, կոչվում է **հաշվելի բազմություն**: Այսպիսով՝ հաշվելի բազմությունը կարող է լինել վերջավոր բազմություն կամ անվերջ բազմություն:

Համարժեք սահմանում. բազմությունը կոչվում է հաշվելի բազմություն, եթե նրա բոլոր փարրերը կարելի է ինդեքսավորել (համարակալել) բոլոր բնական թվերով կամ դրա որևէ $\{1, 2, \ldots, n\}$ մասով:

Օրինակ 5: Հաշվելի բազմություններ են բոլոր վերջավոր բազմությունները, ինչպես նաև $\mathbb{N}$-ը, $\mathbb{Z}$-ը, $2\mathbb{Z}$-ը:

Թեորեմ 1: Հաշվելի բազմության ցանկացած ենթաբազմություն հաշվելի բազմություն է՝ վերջավոր կամ հաշվելի անվերջ:

Ապացուցում: Դիցուք A-ն որևէ հաշվելի բազմություն է, և $B \subset A$: Կարող ենք համարել, որ A-ի փարրերը համարակալված են՝ $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$: Դիտարկենք այդ հաջորդականության այն առաջին անդամը, որը պատկանում է B-ին: Դիցուք դա a_{n_1}-ն է: Եթե $B \neq \{a_{n_1}\}$, ապա նշանակենք a_{n_2}-ով $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots$ հաջորդականության այն առաջին անդամը, որը պատկանում է B-ին: Շարունակելով այսպես karogha but kam ket արդյունքում սպանում ենք կա՛մ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}\}$, վերջավոր բազմություն, որի փարրերը համարակալված են $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ թվերով, կամ որ նույնն է՝ $1, 2, 3, \ldots, k$ բնական թվերով, կա՛մ էլ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$ անվերջ բազմություն, որի փարրերը համարակալվում են $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ բնական թվերով, կամ որ նույնն է՝ բոլոր $1, 2, 3, \ldots$ բնական թվերով: Ուստի երկրորդ դեպքում B ենթաբազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է:
Որպես հետևանք թեորեմ ??-ից և Էվկլիդեսի թեորեմից՝ սպանում ենք. բոլոր պարզ թվերի բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 2: Ցանկացած X անվերջ բազմություն պարունակում է հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Ընտրենք որևէ $a_1 \in X$ փարր: Քանի որ $X \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$, կարող ենք ընտրել որևէ $a_2 \in X \setminus \{a_1\}$ փարր: Քանի որ $X \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, կարող ենք ընտրել որևէ $a_3 \in X \setminus \{a_1, a_2\}$ փարր և այդպես շարունակ: Այս պրոցեսն անվերջ է, և արդյունքում սպանում ենք X-ի հաշվելի անվերջ $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ենթաբազմություն: ■

Հետևանք: Ցանկացած անվերջ բազմության փարրերի քանակը մեծ կամ հավասար է հաշվելի անվերջ բազմության փարրերի քանակից (այստեղ տեղին է նկատել, որ այդուհանդերձ մենք դեռ չենք սահմանել կամայական բազմության համար նրա փարրերի քանակ հասկացությունը):

Թեորեմ 2-ի հետ կապված առաջանում է հարց. որևէ անվերջ բազմություն իր մեջ որքա՞ն զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ կարող է պարունակել:

Պատասխանը հետևյալն է. ցանկացած անվերջ բազմություն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Բերենք համապատասխան օրինակ, որից և թեորեմ 2-ից հետևում է պատասխանը:

Օրինակ 6: Դիտարկենք բոլոր պարզ թվերի $P = \{2, 3, 5, \dots\}$ հաշվելի անվերջ բազմությունը, և ամեն մի k բնական թվի համար՝ $P_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$ հաշվելի բազմությունը: Պարզ է, որ $P_1 = P$, $P_k \cap P_l = \varnothing$, եթե $k \neq l$ և $\bigcup\limits_k P_k \subset \mathbb{N}$: Այսպիսով՝ բնական թվերի բազմությունն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Այժմ որպես հետևանք օրինակ **??**-ից և թեորեմ **??**-ից՝ ստանում ենք. ցանկացած անվերջ բազմություն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Թեորեմ 3: Հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի բազմություն է:

Նկատենք, որ թեորեմի պայմանն իր մեջ պարունակում է 4 հնարավորություն.

ա) վերջավոր թվով վերջավոր բազմությունների միավորում,

բ) վերջավոր թվով հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում,

գ) հաշվելի անվերջ քանակով վերջավոր բազմությունների միավորում,

դ) հաշվելի անվերջ քանակով հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում:

Քննարկենք թեորեմը դ) դեպքում: Դիցուք ունենք հաշվելի անվերջ քանակով $A_1, A_2, \dots$ հաշվելի անվերջ բազմություններ:Պարզության համար ենթադրենք, որ այդ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում: Յուրաքանչյուր A_i բազմության տարրերը համարակալենք բոլոր բնական թվերով՝ $A_i = \{a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots\}$ և դասավորենք դրանք հետևյալ ուղղանկյուն անվերջ աղյուսակի տողերի տեսքով (այստեղ a_j^i սիմվոլում վերևի i նշիչը ցույց է տալիս տվյալ տարրի պատկանելիությունը A_i բազմությանը, իսկ ներքևի j նշիչը՝ տարրի համարն է այդ բազմությունում):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_1^1 & \longrightarrow & a_2^1 & & a_3^1 & \longrightarrow & a_4^1 & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_4^2 & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_1^3 & & a_2^3 & & a_3^3 & & a_4^3 & & \dots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Այժմ կարող ենք $\bigcup A_i$ միավորման տարրերը համարակալել բոլոր բնական թվերով՝ շարժվելով անկյունագծերով: Արդյունքում ստանում ենք, որ $\bigcup\limits_i A_i = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է, որտեղ $b_1 = a_1^1$, $b_2 = a_2^1$, $b_3 = a_1^2$, $b_4 = a_1^3$, $b_5 = a_2^2$ և այլն (ապացուցման այս եղանակը հայտնի է «Կանտորի նշանավոր անկյունագծային մեթոդ» անվանումով):

Թեորեմ 3-ի ապացուցումը: Դիցուք ունենք հաշվելի (վերջավոր կամ անվերջ) քանակով հաշվելի (վերջավոր կամ անվերջ) $A_i,\ i \in I$ բազմություններ, որտեղ ինդեքսների I բազմությունը կա՛մ բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությունն է, կա՛մ նրա որևէ վերջավոր $\{1,2,\dots,n\}$ մասն է: Սկզբում դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ $A_i \cap A_j = \varnothing$, ցանկացած $i \neq j$ ինդեքսների դեպքում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն A_1 բազմության և պարզ թվերի $P_1 = \{2,3,5,\dots\}$ բազմության ինչ-որ B_1 ենթաբազմության տարրերի միջև ($B_1 = P_1$ համընկնումը չի բացառվում և տեղի ունի, երբ A_1-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է):

Ասվածը գրառենք կարճ՝ $\exists A_1 \leftrightarrow B_1 \subset P_1$ տեսքով: Նույն դատողություններով գոյություն ունեն

$$A_2 \leftrightarrow B_2 \subset P_2 = \{2^2,3^2,5^2,\dots\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_k \leftrightarrow B_k \subset P_k = \{2^k,3^k,5^k,\dots\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

փոխմիարժեք համապատասխանություններ:

Արդյունքում ստանում ենք $\bigcup\limits_i A_i \leftrightarrow \bigcup\limits_i B_i$ փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր $A_i,\ i \in I$ բազմությունների $\bigcup\limits_i A_i$ միավորման և բոլոր B_i բազմությունների $\bigcup\limits_i B_i$ միավորման տարրերի միջև: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $\bigcup\limits_i P_i$-ն հաշվելի բազմություն է որպես բնական թվերի բազմության ենթաբազմություն: Նույն պատճառով $\bigcup\limits_i B_i$-ն հաշվելի բազմություն է որպես $\bigcup\limits_i P_i$ հաշվելի բազմության ենթաբազմություն: Ուստի $\bigcup\limits_i A_i$ բազմությունը հաշվելի բազմություն է:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ որոշ $A_i \cap A_j,\ i \neq j$ հատումներ կարող են դատարկ չլինել: Անցնենք նոր՝ $A'_1, A'_2, \dots$ բազմությունների՝ սահմանելով դրանք (ինդուկտիվ եղանակով) հետևյալ բանաձևերով.

$$A'_1 = A_1,\ A'_2 = A_2 \setminus A'_1,\ A'_3 = A_3 \setminus (A'_1 \cup A'_2),\ \dots,\ A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1}):$$

Պարզ է, որ յուրաքանչյուր A'_i հաշվելի բազմություն է՝ որպես A_i հաշվելի բազմության ենթաբազմություն: Բացի այդ, $A'_i \cap A'_j = \varnothing$, երբ $i \neq j$: Ուստի $\bigcup\limits_i A'_i$-ը հաշվելի բազմություն է՝ համաձայն վերը ապացուցված մասնավոր դեպքի: Ցույց տանք, որ $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup\limits_i A'_i$, որից էլ կհետևի, որ $\bigcup\limits_i A_i$ հաշվելի բազմություն է:

Քանի որ $A'_i \subset A_i$, ուստի $\bigcup\limits_i A'_i \subset \bigcup\limits_i A_i$: Միավորելով $A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1})$ նույնության երկու կողմերը $A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1}$ բազմության հետ՝ կստանանք $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i = A_n \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A'_i\right)$: Ուստի $A_n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i$, և ուրեմն $\bigcup\limits_i A_i \subset \bigcup\limits_i A'_i$: Այսպիսով՝ $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup\limits_i A'_i$: ■

Հետևանքներ թեորեմ 3-ից: ա) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է,

բ) ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է:

Ապացուցում: ա) Սևեռելով որևէ $a \in \mathbb{Z}$ ամբողջ թիվ՝ դիտարկենք $\{a\}\times\mathbb{Z}$ ենթաբազմությունը $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-ում: Պարզ է, որ այն հաշվելի անվերջ բազմություն է: Այժմ կարող ենք $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-ը ներկայացնել որպես հաշվելի անվերջ թվով, հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում՝ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \bigcup(\{a\}\times\mathbb{Z})$, որտեղ միավորումը կատարվում է ըստ $a \in \mathbb{Z}$ փոփոխականի: Ուստի $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է՝ ըստ թեորեմ 3-ի:

բ) Յանկացած $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ ռացիոնալ թիվ կարող է միակ ձևով ներկայացվել որպես չկրճատվող $\dfrac{p}{q}$ կոտորակ, որի q հայտարարը դրական ամբողջ թիվ է, իսկ p համարիչը ամբողջ թիվ է: Կառուցենք ինյեկտիվ $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ արտապատկերում $f(r) = (p,q)$, $f(0) = (0,1)$ բանաձևով: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $f(\mathbb{Q})$-ն հաշվելի անվերջ բազմություն է որպես $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ հաշվելի անվերջ բազմության անվերջ ենթաբազմություն: Հետևաբար $\mathbb{Q}$-ն ևս հաշվելի անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 4: Յանկացած X անվերջ բազմությունից կարելի է զատել հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն այնպես, որ մնացորդն իր մեջ դարձյալ պարունակի հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Ընտրենք որևէ $a_1 \in X$ տարր, իսկ $X\setminus\{a_1\}$-ում ընտրենք որևէ b_1 տարր: Այնուհետև $X\setminus\{a_1,b_1\}$-ում ընտրենք որևէ a_2 տարր, իսկ $X\setminus\{a_1,b_1,a_2\}$-ում ընտրենք որևէ b_2 տարր և այսպես շարունակ: Կստանանք երկու չհատվող $A = \{a_1,a_2,\dots\}$ և $B = \{b_1,b_2,\dots\}$ հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ: Նշանակենք $X\setminus(A\cup B) = Y$: Քանի որ $A\cap B = \varnothing$, ուստի $X = A\cup B\cup Y$ և $A\subset X,\ B\subset X\setminus A$: ■

Թեորեմ 5: Բազմությունը անվերջ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն պարունակում է իրեն հավասարազոր, իրենից տարբեր ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Պայմանի **անհրաժեշտությունը**: Դիցուք X-ը անվերջ բազմություն է: Ըստ թեորեմ 4-ի՝ գոյություն ունեն A և B հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ այնպես, որ $X = A\cup B\cup Y$ և $X\setminus A = B\cup Y$: Քանի որ $(A\cup B)$-ն (ըստ թեորեմ 3-ի) և B-ն հաշվելի անվերջ բազմություններ են, ուստի գոյություն ունի $(A\cup B)\leftrightarrow B$ փոխմիարժեք համապատասխանություն նրանց տարրերի միջև: Այդ համապատասխանության երկու կողմերը միավորելով $Y\leftrightarrow Y$ նույնական համապատասխանության հետ՝ կստանանք $X\leftrightarrow(X\setminus A)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն, ընդ որում $(X\setminus A)\subset X$ և $X\setminus A\neq X$:

Պայմանի **բավարարությունը**: Դիցուք X-ը որևէ բազմություն է, $A\subset X,\ A\neq X$, և գոյություն ունի $X\leftrightarrow A$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Պարզ է, որ X-ը վերջավոր բազմություն լինել չի կարող, ուստի այն անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 6: Իրական թվերի բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Ապացուցում: Հիշեցնենք, որ տեղի ունի $(-\infty,+\infty)\sim(-1,1)$ հավասարությունը (տես օրինակ vstah chem vor ref-y ok a **??**-ը թեմա **??**-ում): Տեղի ունի նաև $(-1,1)\sim(0,1)$ հավասարազորություն որոշված $h:(-1,1)\to(0,1)$ արտապատկերումով, ուստի $(-\infty,+\infty)$-ը հավասարազոր է $(0,1)$ ինտերվալին: Հետևաբար թեորեմի ապացուցման համար բավական է ցույց տալ, որ $(0,1)$ ինտերվալը ոչ հաշվելի բազմություն է: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք գոյություն ունի $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Սա նույնն է, թե $(0,1)$ ինտերվալի բոլոր թվերը կարելի է համարակալել բոլոր $1,2,\dots$ բնական թվերով: Ներկայացնելով $f(i)$ թիվը միակ $0{,}\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\dots$ անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով, որտեղ α_{ij}-ն $0,1,2,\dots,9$ թվանշաններից որևէ մեկն է, կունենանք՝

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0{,}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\dots\\
f(2) &= 0{,}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(n) &= 0{,}\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Օգտվելով այս շարքից՝ կազմենք մի $b=0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\dots$ թիվ, որտեղ β_1-ը α_{11} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, β_2-ը α_{22} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, $\dots$, β_n-ը α_{nn} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, $\dots$ և այսպես շարունակ:

Պարզ է, որ $b\neq f(n)$ ցանկացած բնական n-ի դեպքում (b և $f(n)$ թվերի n-րդ տասնորդական թվանշանները տարբեր են): Իսկ դա նշանակում է, որ մի կողմից $b\in(0,1)$, մյուս կողմից b թիվը բացակայում է համարակալված թվերի շարքում, այսինքն՝ $b\notin(0,1)$: Ստացանք հակասություն: ∎

Դիտողություն: Ուշադիր ընթերցողը հավանաբար նկատեց, որ b թիվը կազմելիս նրա թվանշանները ընտրվեցին յուրատեսակ անկյունագծային եղանակով:

Հետևանքներ թեորեմ 6-ից: ա) Բոլոր իռացիոնալ թվերի I բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է: Իրոք, $\mathbb{R}=I\cup\mathbb{Q}$, $I\cap\mathbb{Q}=\varnothing$: Եթե I-ն լիներ հաշվելի բազմություն, ապա $\mathbb{R}$-ը նույնպես կլիներ հաշվելի բազմություն՝ համաձայն թեորեմ 3-ի, ինչը հակասում է թեորեմ 6-ին:

բ) Իռացիոնալ թվերը քանակապես շատ են ռացիոնալ թվերից: Սա հետևում է թեորեմ 2-ի հետևանքից և թեորեմ 6-ից:

Մինչև այժմ մենք քանակապես համեմատում էինք բազմությունները՝ առանց հստակեցնելու, թե ինչ է **բազմության տարրերի քանակությունը**: Հիշեցնենք, որ երկու X և Y բազմություններ կոչվում են հավասարազոր (նշանակվում է $X\sim Y$), եթե գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն նրանց տարրերի միջև: Սա երկտեղ հարաբերություն է սահմանված և՛ վերջավոր, և՛ անվերջ բազմությունների դեպքում: Ցույց տանք, որ այն համարժեքության հարաբերություն է:

1. $X \sim X$ (իրոք, X-ի նույնական $\mathbb{1}_X : X \to X$ արտապատկերումը ինքն իր վրա փոխմիարժեք է):

2. Եթե $X \sim Y$, ապա $Y \sim X$ (եթե գոյություն ունի $f : X \to Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում, ապա գոյություն ունի նաև նրան հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ փոխմիարժեք արտապատկերում):

3. Եթե $X \sim Y$ և $Y \sim Z$, ապա $X \sim Z$ (եթե գոյություն ունեն $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ փոխմիարժեք արտապատկերումներ, ապա պարզ է, որ $g \circ f : X \to Z$ արտապատկերումը նույնպես փոխմիարժեք է):

Հետևաբար դիտարկվող բազմությունները տրոհվում են համարժեքության դասերի՝ ըստ այդ համարժեքության հարաբերության: Ստացված ֆակտոր-բազմության տարրերը կոչվում են **հզորություններ**: Ամեն մի X բազմության համար X-ը պարունակող $\left[X\right]$ համարժեքության դասը կոչվում է X-ի հզորություն և նշանակվում է $|X|$: Վերջավոր բազմությունների դեպքում բազմության հզորությունը կարող է նույնացվել նրա տարրերի քանակի հետ:

Ընդհանուր դեպքում բազմությունների հզորությունները կոչվում են **կարդինալ թվեր** կամ **պարզապես կարդինալներ**: Բոլոր հաշվելի անվերջ բազմություններն ունեն նույն հզորությունը կամ նույն կարդինալը, որը նշանակվում է ω: Իրական թվերի բազմության հզորությունը կոչվում է **կոնտինուում** և նշանակվում է $\mathfrak{c}$: Ըստ բազմությունների քանակական համեմատման՝ ունենք $\omega < \mathfrak{c}$:

Այսպիսով՝ անվերջ բազմությունների դեպքում առայժմ ունենք որակապես տարբեր երկու հզորություններ՝ ω և $\mathfrak{c}$: Իսկ այդ երկուսից բացի գոյություն ունե՞ն արդյոք այլ հզորություններ: Հարցին պատասխան է տալիս Կանտորի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 7: Ցանկացած X բազմության բոլոր ենթաբազմություններից կազմված $\operatorname{Ens} X$ բազմության հզորությունը մեծ է X-ի հզորությունից:

Ապացուցում: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ X-ը վերջավոր բազմություն է՝ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: Ինչպես գիտենք, այս դեպքում $\operatorname{Ens} X$ բազմության տարրերի քանակը $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ թիվն է, և $2^n > n$, երբ $n \geq 1$: Ուստի $|\operatorname{Ens} X| > |X|$:

Դիցուք՝ այժմ X-ը անվերջ բազմություն է: Համապատասխանեցնելով X-ի ամեն մի x տարրին $\{x\}$ տարրը $\operatorname{Ens} X$-ում՝ ստանում ենք, որ $|X| \leq |\operatorname{Ens} X|$: Ցույց տանք, որ իրականում $|X| < |\operatorname{Ens} X|$:

Կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է՝ $|X| = |\operatorname{Ens} X|$, այսինքն գոյություն ունի $f : X \to \operatorname{Ens} X$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Ցանկացած $x \in X$ տարրի դեպքում կա՛մ $x \in f(x)$, կա՛մ $x \notin f(x)$: Դիտարկենք X-ի A ենթաբազմությունը կազմված X-ի այն բոլոր a տարրերից, որ $a \notin f(a)$: Կարճ՝ $A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$: Ցույց տանք, որ A-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Իրոք, ըստ ենթադրության, գոյություն ունի $x_0 \in X$ տարր, որ $f(x_0) = \varnothing$ և իհարկե $x_0 \notin f(x_0)$: Ուստի $x_0 \in A$, և ուրեմն $A \neq \varnothing$: Քանի որ $A \in \operatorname{Ens} X$, ուստի գոյություն ունի $a_0 \in X$ տարր, որ $f(a_0) = A$ և $a_0 \neq x_0$:

Պարզ է, որ կա՛մ ա) $a_0 \in A$, կա՛մ բ) $a_0 \notin A$: Քննարկենք այս երկու դեպքերն առանձին-առանձին:

ա) Եթե $a_0 \in A$, ապա $a_0 \notin f(a_0)$: Նշանակում է $a_0 \notin A$ (հակասություն):

բ) Եթե $a_0 \notin A$, ապա $a_0 \in f(a_0)$: Նշանակում է $a_0 \in A$ (հակասություն):

Այսպիսով մեր ենթադրությունը, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $X \leftrightarrow \operatorname{Ens} X$, բերեց աբսուրդի: Հետևաբար $|X| \neq |\operatorname{Ens} X|$, և ուրեմն $|X| < |\operatorname{Ens} X|$: ■

Հետևանք թեորեմ 7-ից: Վերցնելով որևէ X անվերջ բազմություն և հաջորդաբար կիրառելով թեորեմ 7-ը՝ կստանանք $|X| < |\operatorname{Ens} X| < |\operatorname{Ens}(\operatorname{Ens} X)| < \dots$

Այսինքն՝ գոյություն ունեն անթիվ քանակով միմյանց զույգ առ զույգ ոչ հավասարազոր անվերջ բազմություններ, ուստի և անթիվ քանակով կարդինալ թվեր:

Բազմությունների տեսության պարադոքսների մասին

Բազմությունների այսպես կոչված կանտորյան կամ նաիվ տեսության հետ կապված առաջին պարադոքսները հայտնվեցին դեռ 1897 թվին: Դրանցից մեկը հայտնաբերեց ինքը՝ Կանտորը:

Դիցուք Ω-ն բոլոր հնարավոր բազմությունների բազմությունն է: Ըստ թեորեմ 7-ի՝ $|\Omega| < |\operatorname{Ens} \Omega|$: Բայց $\operatorname{Ens} \Omega$ ինքը բազմություն է, որի տարրերը (որպես բազմություններ) պարունակվում են Ω-ում: Այսինքն՝ $\operatorname{Ens} \Omega \subset \Omega$, և հետևաբար $|\operatorname{Ens} \Omega| \leq |\Omega|$: Ստացանք հակասություն:

Բերենք ևս մի պարադոքս (Ռասսելի պարադոքսը): Համարենք, որ բոլոր հնարավոր բազմությունները տրված են միաժամանակ: Նշանակենք Q-ով այն բոլոր բազմությունների բազմությունը, որոնք չեն պարունակում իրենց որպես տարր: Հարց. պարունակո՞ւմ է արդյոք Q-ն իրեն որպես տարր: Եթե ոչ, այսինքն $Q \notin Q$, ապա ըստ Q-ի սահմանման $Q \in Q$ (հակասություն): Իսկ եթե այո, այսինքն՝ $Q \in Q$, ապա նորից ըստ Q-ի սահմանման Q-ն չպետք է լինի տարր իր համար, ուստի $Q \notin Q$ (հակասություն):

Որպես կանոն, այդպիսի պարադոքսների առաջացման պատճառը բազմություն, բազմության տարր հասկացությունների կամայական (ոչ կանոնակարգված) ընկալումն է կամ մեկնաբանումը:

Եղել են տարբեր մոտեցումներ՝ ինչպես խուսափել պարադոքսներից: Հիմնական ելքը բազմությունների տեսության կառուցումն է աքսիոմատիկ եղանակով: Կան մի քանի այդպիսի համակարգեր, որոնցից ամենահայտնին այսպես կոչված Ցերմելո-Ֆրենկելի աքսիոմատիկ համակարգն է (տե՛ս [**Frenkel**]-ում):

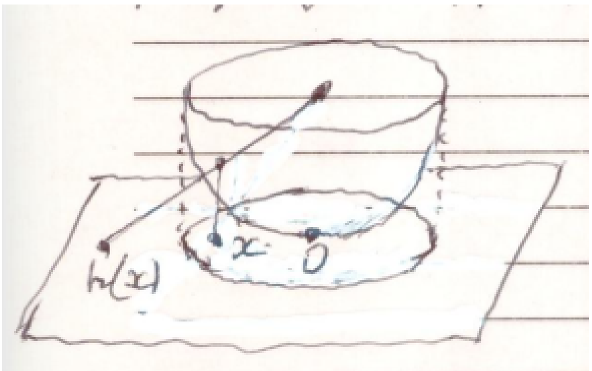


Figure 1: Խնդիր 3.1

Գոյություն ունի մեկ ուրիշ, գործնականում պարզ և հարմար եղանակ՝ խուսափելու պարադոքսներց, այդուհանդերձ մնալով բազմությունների կանտորյան (նաիվ) տեսության շրջանակներում: Այդ մոտեցման հիմքում ընկած են երկու հիմնական սկզբունքներ:

Սկզբունք A. չի կարելի բոլոր հնարավոր բազմությունները համարել տրված միաժամանակ:

Սկզբունք B. ոչ մի բազմություն չի կարող լինել տարր ինքն իր համար:

Թվում է, թե սկզբունք A-ն ենթադրում է դիտարկվող բազմությունների տեսականին կամ քանակությունը սահմանափակել բազմությունների նախապես տրված մի ինչ-որ M ընտանիքով: Դա այնքան էլ այդպես չէ: Յուրաքանչյուր կոնկրետ մաթեմատիկական հետազոտության դեպքում նպատակահարմար է տվյալ պահին մեր տրամադրության տակ գտնվող բազմությունների M ընտանիքը համարել սահմանափակ: Բայց եթե ընթացքում հարկ է լինում, ըստ նպատակահարմարության, հետազոտության մեջ ներգրավել նոր բազմություններ, այսինքն ընդլայնել M-ը, ապա առաջարկվող համակարգը այդպիսի հնարավորություն տալիս է: Այս և այլ դեպքերի հետ ավելի մանրամասն կարելի է ծանոթանալ [**Arxangelski**]-ում:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 3-ի վերաբերյալ

3.1. Թեմա 1-ի օրինակ 9-ի նմանությամբ կառուցեք փոխմիարժեք h արտապատկերում $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ անեզր շրջանի և $\mathbb{R}^2$ հարթության կետերի միջև:

> **Ցուցում.** Տեղադրելով 1 շառավղով անեզր կիսասֆերան այնպես, որ շոշափի $\mathbb{R}^2$ հարթությունը O կետում, նախ կառուցեք փոխմիարժեք համապատասխանություն շրջանի և կիսասֆերայի միջև, և ապա՝ կիսասֆերայի և հարթության կետերի միջև՝ ինչպես ցույց է տրված նկարում:

3.2. Ապացուցեք հետևյալ հավասարազորությունները.

$$(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$$

Ցուցում. Նախ այդ բազմությունները ներկայացրեք որպես միայն ռացիոնալ թվերից և միայն իռացիոնալ թվերից կազմված երկու ենթաբազմությունների միավորում: Օրինակ՝ $(0,1) = \mathbb{Q} \cup I$ և $[0,1] = (\mathbb{Q} \cup 0,1) \cup I$, որտեղ $\mathbb{Q}$-ն և $\mathbb{I}$-ն $(0,1)$ ինտերվալի ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմություններն են: Այժմ կարող ենք հաստատել $(0,1) \sim [0;1]$ համասարազորություն՝ լրացնելով $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q} \cup 0,1$ համասարազորությունը (որը տեղի ունի ըստ թեորեմ 3-ի) նույնական $I \to I$ արտապատկերումով: vstah chem vor petq er es mathb-n hanel I-ic, mi ban bayc cher havanel hastat

3.3. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի $(-\infty, a), (-\infty, b], (c, +\infty), [d, +\infty], , (a, b), [c, d], [m, n), [p, q]$ տեսքի ցանկացած երկու ենթաբազմություն համասարազոր են:

Ցուցում. Դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումները.

ա) $f_1 : (a, b) \to (0, 1), f_2 : [a, b] \to [0, 1], f_3 : (a, b] \to (0; 1], f_4 : [a, b) \to [0; 1)$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$ համադրումով,

բ) $g_1 : (-\infty; 0) \to (0, 1), g_2 : (-\infty; 0] \to (0, 1]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ համադրումով,

գ) $h_1 : (0; +\infty) \to (0, 1), h_2 : [0; \infty) \to [0, 1]$ որոնք սահմանվում են $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ համադրումով,

դ) $u_1 : (-\infty; a) \to (-\infty; 0), u_2 : (-\infty; a] \to (-\infty; 0]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto x - a$ համադրումով,

ե) $v_1 : [a; +\infty) \to (0; +\infty), u_2 : (a; +\infty] \to (0; +\infty]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto x - a$ համադրումով,

զ) $w : (-\infty; 0) \to (0; +\infty)$, սահմանվում է՝ $w(x) = -x$:

Հիմնավորելով սրանցից յուրաքանչյուրի փոխմիարժեքությունը՝ օգտվեք դրանց համադրույթներից և խնդիր 3.2-ից:

3.4. Ապացուցեք, որ հաշվելի A բազմությունից նրա որևէ B վերջավոր ենթաբազմություն անջատելիս ստացված $A \setminus B$ մնացորդը դարձյալ հաշվելի բազմություն է:

Ցուցում. Դիտարկեք A-ի տարրերի որևէ $a_1, a_2, \ldots$ համարակալում և երկու դեպք՝ A-ն վերջավոր է, A-ն անվերջ է: Երկրորդ դեպքում օգտվեք թեորեմ 1-ից do the ref magic here bitte:

3.5. Ապացուցեք. եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n$, որտեղ $n \geq 1$, բազմությունները հաշվելի են, ապա նրանց $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ուղիղ արտադրյալը նույնպես հաշվելի բազմություն է:

Ցուցում. Դիտարկեք $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \bigcup_i A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times \{b_i\}$ ներկայացումը, որտեղ $A_n = \{b_1, b_2, \dots\}$, և օգտվելով թեորեմ 3-ից՝ կիրառեք ինդուկցիա ըստ n-ի:

3.6. Ապացուցեք. հաշվելի բազմության տարրերով կազմված բոլոր վերջավոր հաջորդականությունների բազմությունը հաշվելի է:

Ցուցում. Հաշվելի $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ բազմության տարրերով կազմված n երկարության ամեն մի $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ asum a indexnery mecacnel, bayc axer ay dzer cavy tanem, vonc, petq a a-ern el hety mecacnel uremn, esim e, esim հաջորդականություն կարելի է դիտել որպես $A \times A \times \cdots \times A$ ուղիղ արտադրյալի տարր և հակառակը: Օգտվելով խնդիր 3.5-ից՝ կիրառեք ինդուկցիա ըստ n-ի:

3.7. Ունենք բազմությունների որևէ $f : A \to B$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում: Ապացուցեք՝ եթե A-ն հաշվելի է, ապա B-ն նույնպես հաշվելի է:

Ցուցում. Ամեն մի $b \in B$ տարրի համար ընտրենք որևէ $a \in f^{-1}(B)$ տարր և սահմանենք $g : B \to A$, $g(b) = a$ արտապատկերում: Ցույց տվեք, որ g-ն ինյեկտիվ արտապատկերում է, և օգտվեք թեորեմ 1-ից:

3.8. Ապացուցեք, որ հաշվելի $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ բազմության բոլոր վերջավոր ենթաբազմությունների բազմությունը հաշվելի է:

Ցուցում. Տարրերի ամեն մի $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ վերջավոր հաջորդականություն համադրենք A բազմության $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\}$ ենթաբազմությունը: Արդյունքում ստանում ենք որոշակի f արտապատկերում A բազմության տարրերով կազմված բոլոր վերջավոր հաջորդականությունների բազմությունից դեպի A-ի բոլոր վերջավոր ենթաբազմություններով կազմված բազմության մեջ ցույց տվեք, որ f-ը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և օգտվեք նախորդ երկու խնդիրներից:

3.9. Ապացուցեք. եթե A-ն անվերջ բազմություն է, իսկ B-ն հաշվելի բազմություն է, ապա $A \cup B$-ն հավասարազոր է A-ին:

Ցուցում. Օգտվեք հետևյալ երկու պնդումներից՝ հիմնավորելով դրանք.

ա) եթե A_1-ը A բազմության որևէ հաշվելի ենթաբազմություն է, ապա տեղի ունի $A_1 \cup B \sim A_1$ հավասարազորությունը,

բ) $A \cup B = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \setminus A_1) \cup A_1 = A_1$:

3.10. Ապացուցեք. եթե A-ն անվերջ և ոչ հաշվելի բազմություն է, իսկ B-ն հաշվելի է, ապա $A \setminus B \sim A$:

Ցուցում. Օգտվեք $A = (A \setminus B) \cup B$ նույնությունից և նախորդ խնդրից:

3.11. Ի՞նչ հզորություն ունի բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմությունը:

Ցուցում. Օգտվեք խնդիր 3.9-ից screw the ref-s, ageed? pls ` վերցնելով որպես A բոլոր իռացիոնալ թվերի, իսկ որպես B՝ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունները:

3.12. Ճի՞շտ է արդյոք, որ բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմությունը և $(-1, 1)$ ինտերվալի իռացիոնալ թվերի բազմությունը ունեն նույն հզորությունը: