Թեմա 15

Կապակցված տարածություն, կապակցված ենթաբազմություն: Թեորեմներ, կապակցված ենթաբազմությունների միավորման և կապակցված ենթաբազմության փակման մասին: Կապակցվածության բաղադրիչ, ոչ հոմեոմորֆ տարածությունների օրինակներ:

Եթե ունենք (X, τ) և (Y, σ) տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X \cap Y = \varnothing$, ապա $X \cup Y$ բազմությունը կարելի է վերածել տոպոլոգիական տարածության, համարելով, որ $X \cup Y$-ում ենթաբազմությունները լինելու են բաց U ենթաբազմությունները, երբ $U \cap X$ և $U \cap Y$ բաց են համապատասխանաբար X-ում և Y-ում: Տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ: Նկատենք, որ ստացված տոպոլոգիական տարածությունում X և Y ենթաբազմությունները ոչ դատարկ, չհատվող, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություններ են: Այս տարածությունը կոչվում է X և Y տարածությունների **չկապակցված միավորում**:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **կապակցված տարածություն**, եթե այն չի կարող ներկայացվել որպես իր երկու ոչ դատարկ, չհատվող, բաց ենթաբազմությունների միավորման տեսքով:

Համարժեք ձևակերպում. տարածությունը կապակցված է, եթե այն չի կարող ներկայացվել որպես իր երկու ոչ դատարկ, չհատվող, փակ ենթաբազմությունների միավորման տեսքով:

Եվս մի համարժեք ձևակերպում. X տոպ. տարածությունը կապակցված է, եթե X-ում գոյություն ունի միայն մի ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն՝ ինքը X-ը:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմությունը կոչվում է **X-ի կապակցված ենթաբազմություն**, եթե Y-ը կապակցված տարածություն է X-ից մակածված տոպոլոգիայով:

Օրինակ 1: ա) Յանկացած անտիդիսկրետ տարածություն կապակցված տարածություն է: բ) Մեկից ավելի կետեր պարունակող ամեն մի դիսկրետ տարածություն կապակցված չէ: գ) $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ թվային ուղղի $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $(0, 1) \cup (1, 2)$ և $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ենթաբազմությունները կապակցված չեն (ինչո՞ւ):

Թեորեմ 1: Թվային ուղղի $[a, b]$ հատվածը կապակցված տարածություն է ($\mathbb{R}$-ի սովորական մետրիկայից տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով):

Ապացուցում: Դիցուք $[a, b] = U \cup V$, որտեղ U-ն և V-ն չհատվող, ոչ դատարկ, բաց (հետևաբար նաև փակ) ենթաբազմություններ են: Որոշակիության համար ենթադրենք $a \in U$ և դիտարկենք U-ի ենթաբազմությունը կազմված U-ի այն բոլոր տարրերից, որոնք փոքր են V-ի բոլոր տարրերից՝ $W = \{u \in U \mid u < v, \forall v \in V\}$:

Քանի որ $a \in W$, ուստի $W \neq \varnothing$: Նշանակենք h-ով W ենթաբազմության ճշգրիտ վերին եզրը՝ $h = \sup W$: Քանի որ h-ը հպման կետ է W-ի համար, և $W \subset U$, ուստի h-ը հպման կետ է նաև U-ի համար: Հետևաբար $h \in \overline{U} = U$, ուրեմն $h \in W$ (ինչո՞ւ): Մյուս կողմից՝ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար $(h-\varepsilon, h+\varepsilon) \cap V \neq \varnothing$: Հակառակ դեպքում, եթե $(h-\varepsilon_0, h+\varepsilon_0) \cap V = \varnothing$ որևէ ε_0-ի համար, ապա կունենանք, $\cancel{[h, h+\varepsilon_0) \subset U}$: Իսկ դրանից կհետևի, որ $h + \dfrac{\varepsilon_0}{2} \in W$, և ուրեմն $h \neq \sup W$:

Նշանակում է՝ h-ը հպման կետ է V-ի համար, ուստի $h \in \overline{V} = V$: Այսպիսով ստացանք $h \in U \cap V$ (հակասություն): ■

Թեորեմ 2: Կապակցված փարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում կապակցված տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կապակցված է, $f : X \to Y$ անընդհատ է և $f(X) = Y$: Ենթադրենք $Y = U \cup V$, որտեղ U-ն և V-ն ոչ դատարկ, չհատվող, բաց ենթաբազմություններ են Y-ում: Պարզ է, որ $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$-ն ոչ դատարկ, բաց ենթաբազմություններ են X-ում և $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$: Ստացվեց, որ X-ը կապակցված չէ (հակասություն): ■

Հետևանք: Կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X փարածության $Y_i \subset X$, $i \in I$ կապակցված ենթաբազմություններ: Եթե նրանց հատումը դատարկ չէ, ապա նրանց $Y = \bigcup_i Y_i$ միավորումը նույնպես կապակցված

Ապացուցում: Դիցուք U-ն ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է Y-ում: Ցույց տանք, որ այն համընկնում է Y-ի հետ (դրանից կհետևի, որ Y-ը կապակցված է): Գոյություն ունի $i_0 \in I$, որ $U \cap Y_{i_0} \neq \varnothing$: Պարզ է, որ $U \cap Y_{i_0}$-ն ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է Y_{i_0}-ում, ուստի $U \cap Y_{i_0} = Y_{i_0}$ (շնորհիվ Y_{i_0}-ի կապակցվածության): Նշանակում է՝ $Y_{i_0} \subset U$: Կամայական $i \neq i_0$ ինդեքսի դեպքում, քանի որ $Y_{i_0} \cap Y_i \neq \varnothing$, ուստի $U \cap Y_i \neq \varnothing$: Այժմ, կրկնելով վերը բերված դատողությունները արդեն Y_i և U ենթաբազմությունների համար, ստանում ենք, որ $Y_i \subset U$: Հետևաբար $\bigcup_i Y_i \subset U$, և ուրեմն $U = Y$: ■

Թեորեմ 4: Տոպոլոգիական փարածությունների $X \times Y$ արտադրյալը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ կապակցված ~~են~~ X-ը և Y-ը

Ապացուցում: ա) Ենթադրենք $X \times Y$-ը կապակցված է: Քանի որ $P_1 : X \times Y \to X$, $P_2 : X \times Y \to Y$ կանոնական պրոյեկցիաները անընդհատ և սյուրյեկտիվ արտապատկերումներ են, ուստի X-ը և Y-ը կապակցված են համաձայն թեորեմ 2-ի:

բ) Դիցուք X-ը և Y-ը կապակցված են: Կամայական $(x, y) \in X \times Y$ կետի դեպքում $\{x\} \times Y$ և $X \times \{y\}$ փարածությունները, ըստ թեմա 14-ում թեորեմ 6-ի՝ հոմեոմորֆ են համապատասխանաբար Y և X փարածություններին: Ուստի նրանք կապակցված փարածություններ են՝ ըստ թեորեմ 2-ի հետևանքի:

Այնուհետև, քանի որ $(x,y) \in (\{x\}\times Y)\cap(X\times\{y\})$, ուստի $(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ միավորումը կապակցված է համաձայն թեորեմ 3-ի: Այժմ, սևեռելով որևէ $y_0 \in Y$ կետ, ամեն մի $x \in X$ կետի համար դիտարկենք $Z_x = (\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y_0\})$ ենթաբազմությունը $X\times Y$-ում: Քանի որ $X\times\{y_0\} \subset Y_x$, ուստի $\bigcap Z_x$ հատումը [illegible] թեորեմ 3-ի: դատարկ չէ: Մյուս կողմից պարզ է, որ $\bigcup\limits_x Z_x$ միավորումը $X\times Y$-ն է: ~~Հետևաբար~~ [illegible] [illegible] $X\times Y$-ը կապակցված է ~~համաձայն թեորեմ 3-ի~~: ■

[illegible] էջ 104

Հետևանք 3: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը կապակցված է, քանի որ $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[-n;n]$ և $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[-n;n] \neq \varnothing$, իսկ $[-n;n]$, $n\in N$ հատվածները կապակցված են ըստ թեորեմ 1-ի:

Հետևանք 4: Կամայական $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ կետի դեպքում $\mathbb{R}^2\setminus(x_0,y_0)$ տարածությունը (որպես $\mathbb{R}^2$-ի ենթատարածություն) կապակցված է:

Իրոք, $\mathbb{R}^2\setminus(x_0,y_0)$-ն կարող ենք ներկայացնել որպես ~~$\mathbb{R}^2$-ի~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-ի չորս բաց՝ A,B,C,D ենթաբազմությունների միավորում՝ $\mathbb{R}^2\setminus(x_0,y_0) = A\cup B\cup C\cup D =$
$= \big(\mathbb{R}\times(y_0,+\infty)\big)\cup\big(\mathbb{R}\times(-\infty,y_0)\big)\cup\big((-\infty,x_0)\times\mathbb{R}\big)\cup\big((x_0,+\infty)\times\mathbb{R}\big)$:

Դրանցից յուրաքանչյուրը կապակցված է որպես երկու կապակցված ենթաբազմությունների ուղիղ արտադրյալ: Քանի որ $A\cap C\neq\varnothing$ և $B\cap D\neq\varnothing$ ուստի $A\cup C$ և $B\cup D$ ենթաբազմությունները կապակցված են ըստ թեորեմ 3-ի: Նաև ակնհայտ է, որ $(A\cup C)\cap(B\cup D)\neq\varnothing$, ուստի $\mathbb{R}^2\setminus(x_0,y_0)$ տարածությունը կապակցված է դարձյալ ըստ թեորեմ 3-ի:

Կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է և թույլ է տալիս որոշ դեպքերում ապացուցել երկու տարածությունների ոչ հոմեոմորֆությունը:

Տոպոլոգիայում տեղի ունի Բրաուերի նշանավոր թեորեմը (1911թ) [illegible]

Թեորեմ 5: Եթե $n\neq m$, ապա $(\mathbb{R}^n$, սովոր. մետր. տոպ.$)$ և $(\mathbb{R}^m$, սովոր. մետր. տոպ.$)$ տարածությունները միմյանց հոմեոմորֆ չեն:

Ապացույցը ընդհանուր դեպքում բարդ է, իսկ դրա համար անհրաժեշտ գիտելիքը դուրս է մեր դասընթացի շրջանակներից:

Ապացուցենք թեորեմը $n=1,\ m=2$ մասնավոր դեպքում: Ենթադրենք՝ գոյություն ունի $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ հոմեոմորֆիզմ: Դիցուք $h(0)=z_0\in\mathbb{R}^2$: Հեռացնելով $\mathbb{R}$-ից 0 կետը, իսկ $\mathbb{R}^2$-ից z_0 կետը՝ դիտարկենք $\overline{h}:\mathbb{R}\setminus 0\to\mathbb{R}^2\setminus z_0$ արտապատկերում՝ սահմանելով $\overline{h}(t)=h(t),\ t\in\mathbb{R}\setminus 0$: Պարզ է, որ $\overline{h}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է: Նրա անընդհատությունը հետևում է h-ի անընդհատությունից (հիմնավորել):

Քանի որ $(\mathbb{R}\setminus 0)$-ն կապակցված չէ, իսկ $(\mathbb{R}^2\setminus z_0)$-ն կապակցված է, (ըստ թեորեմ 4-ից հետևանքի), ստանում ենք հակասություն թեորեմ 2-ի հետ: ■

Թեորեմ 6: Տոպոլոգիական տարածության կապակցված ենթաբազմության փակումը նորից կապակցված ենթաբազմություն է:

Սա ապացուցելու նպատակով նախ ապացուցենք:

Լեմմա: Դիցուք X-ը Y փարածության որևէ կապակցված ենթաբազմություն է: Եթե $y_0 \in Y$ կետը հպման կետ է X-ի համար, ապա $\{y_0\} \cup X$-ը Y-ի կապակցված ենթաբազմություն է:

Այլ կերպ ասած, կապակցված ենթաբազմությանը նրա որևէ հպման կետ ավելացնելիս դարձյալ սփացվում է կապակցված ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Դիփարկենք այն դեպքը, երբ $y_0 \notin X$: Ենթադրենք հակառակը՝ $\{y_0\} \cup X = U \cup V$, որփեղ U-ն և V-ն ոչ դափարկ, չհափվող, բաց ենթաբազմություններ են $\{y_0\} \cup X$-ում (Y-ից $\{y_0\} \cup X$-ի մեջ մակածված փոպոլոգիայում): Դիցուք $y_0 \in U$, և ուրեմն $V \subset X$: Նշանակում է V-ն միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է X կապակցված ենթաբազմությունում, որից հեփևում է, որ $V = X$ և $U = \{y_0\}$: Այսպիսով՝ y_0 կեփն ունի $U = \{y_0\}$ բաց շրջակայք և $U \cap X = \{y_0\} \cap X = \varnothing$: Սրանից հեփևում է, որ y_0-ն հպման կեփ չէ X-ի համար (հակասություն): ■

Ապացուցենք թեորեմ 6-ը: Դիցուք X-ը ինչ-որ փոպոլոգիական փարածության կապակցված ենթաբազմություն է, իսկ Y-ը X-ի հպման կեփերի բազմությունն է՝ $Y = \overline{X}$: Կարող ենք Y-ը ներկայացնել $Y = \overline{X} = X \cup Y = \bigcup\limits_{y \in Y} (X \cup \{y\})$ փեսքով: Յուրաքանչյուր $X \cup \{y\}$ ենթաբազմություն կապակցված է համաձայն լեմմայի: Քանի որ $\bigcap\limits_{y \in Y} (X \cup \{y\})$ հափումը դափարկ չէ, ուսփի Y-ը կապակցված է համաձայն թեորեմ 3-ի: ■

Այժմ ներմուծենք ~~Սփորև ներմուծվում է~~ կապակցված փարածությունների մի կարևոր բնութագրիչ:

~~Տոպոլոգիական փարածության կապակցվածության բաղադրիչները:~~

Սահմանում: Տոպոլոգիական փարածության կապակցվածության բաղադրիչ կոչվում է նրա ամեն մի կապակցված ենթաբազմություն, որը չի պարունակվում փվյալ փարածության մի այլ կապակցված ենթաբազմության մեջ:

Օրինակ 2: ա) Հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր կապակցված փարածություն ունի միայն մի կապակցվածության բաղադրիչ՝ ինքը: բ) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ փարածությունը ($(\mathbb{R}$, սովոր.$)$ փարածության փոպոլոգիայից մակածված փոպոլոգիայով) ունի երկու կապակցվածության բաղադրիչ՝ $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$ ենթաբազմությունները: գ) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ փարածությունը, որպես $(\mathbb{R}$, սովոր.$)$-ի ենթափարածություն, ունի անթիվ կապակցվածության բաղադրիչներ՝ իր բոլոր կեփերը:

Թեորեմ 7: Տոպոլոգիական փարածության յուրաքանչյուր կեփ պափկանում է նրա ճիշփ մի կապակցվածության բաղադրիչի:

Ապացուցում: Ակնհայփ է, որ X փարածության ցանկացած մի կեփանոց $\{x\}$ ենթաբազմություն X-ի կապակցված ենթաբազմություն է: Այժմ դիփարկենք կամայական

~~ենթաբազմությունը, որտեղ միավորումը~~ $U(x)=\bigcup U_i$ միավորումը: $x \in X$ սևեռված կետը պարունակող բոլոր կապակցված U_i ենթաբազմությունների: Քանի որ $\bigcap U_i \neq \varnothing$, ուստի $U(x)$-ը կապակցված ենթաբազմություն է (ըստ թեորեմ 3-ի), ~~պարունակում է x կետը և ակնհայտ է, որ~~ և չի պարունակվում իրենից փարբեր որևէ կապակցված ենթաբազմությունում: Ուստի $U(x)$-ը x կետը պարունակող կապակցվածության բաղադրիչն է: ■

Հետևանք 1: Տվյալ տոպ. տոպոլոգիական տարածության ցանկացած երկու կապակցվածության բաղադրիչ կամ չեն հատվում, կամ համընկնում են: Ուստի ցանկացած տոպոլոգիական տարածություն ներկայացվում է որպես իր կապակցվածության բաղադրիչների չկապակցված միավորում:

Հետևանք թեորեմներ 6 ից և 7-ից : Տոպոլոգիական տարածության ամեն մի կապակցվածության բաղադրիչ փակ բաց չէ՞ ենթաբազմություն է այդ տարածությունում:

Օրինակ 3: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթությունը իր սովորական մետրիկայով տոպոլոգիայով և նրանում C կորը, որտեղ C-ն ա) շրջանագիծ է, բ) երկու ներքնապես շոշափող շրջանագծերի միավորումն է, գ) երկու արտաքնապես շոշափող շրջանագծերի միավորումն է:

Ապա $\mathbb{R}^2 \backslash C$ ենթատարածությունը ունի ա) դեպքում երկու, իսկ բ) և գ) դեպքերում երեքական կապակցվածության բաղադրիչներ (որո՞նք են դրանք):

Թեորեմ 8: Տոպոլոգիական տարածության կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունը (ընդհանուր դեպքում որպես բազմության հզորություն) տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

Մասնավորապես դա նշանակում է, որ եթե ինչ-որ տոպոլոգիական տարածություն ունի վերջավոր քանակով՝ ճիշտ n հատ կապակցվածության բաղադրիչ, ապա նրան հոմեոմորֆ ամեն մի տարածություն նույնպես ունի ճիշտ n հատ կապակցվածության բաղադրիչ:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը և Y-ը հոմեոմորֆ տարածություններ են: Նշանակում է գոյություն ունեն $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ անընդհատ արտապատկերումներ, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Նշանակենք $N(X)$-ով և $N(Y)$-ով համապատասխանաբար X-ի և Y-ի կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունները:

Այժմ նկատենք, որ X-ի ամեն մի կապակցվածության բաղադրիչի կերպարը f անընդհատ արտապատկերման դեպքում ընկած է Y-ի որևէ կապակցվածության բաղադրիչի մեջ: Իրոք, դիցուք $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմությունները կապակցվածության բաղադրիչներ են, ընդ որում $f(A) \cap B \neq \varnothing$: Ուստի $f(A) \cup B$-ն Y-ի կապակցված ենթաբազմություն է համաձայն թեորեմ 2-ի և թեորեմ 3-ի: Կապակցվածության բաղադրիչի սահմանումից հետևում է, որ $f(A) \subset B$: Նշանակում է $N(X) \leq N(Y)$: Կատարելով նույն դատողությունները g արտապատկերման նկատմամբ՝ ստանում ենք $N(Y) \leq N(X)$, ուստի $N(X) = N(Y)$: ■

Որպես հետևանք թեորեմ 8-ից ստանում ենք, որ օրինակ 3-ում (բերված $\mathbb{R}^2$-ից) տարածությունները հոմեոմորֆ չեն [illegible] բ) և գ) տարածությունների (բերված $\mathbb{R}^2$-ից) հոմեոմորֆության վերաբերյալ թեորեմ 8-ը ոչինչ չի տալիս:

Օրինակ 4: Դիտարկենք հայոց այբուբենի  և  տառերը (գծապատկերները) որպես $(\mathbb{R}^2, \text{սովոր.})$ տարածության ենթատարածություններ: Հարց. արդյոք հոմեոմո՞րֆ են դրանք միմյանց:

Նկատենք, որ եթե հնարավոր է երկու գծապատկերներից մեկը անընդհատ ձևափոխելով, առանց կտրատելու և առանց ինքնահատումների համընկեցնել մյուսի հետ, ապա դրանք հոմեոմորֆ են: Տվյալ դեպքում հարցի պատասխանը դրական է, և օրինակ հոմեոմորֆիզմ կարելի է կառուցել հետևյալ հաջորդականությամբ՝

Այժմ քննարկենք նույն հարցը  և  գծապատկերների համար: Այս դեպքում բոլոր փորձերը նախորդի նմանությամբ մի պատկերից ստանալ մյուսը դատապարտված են ձախողման: Պատճառը այդ պատկերների կառուցվածքային էական տարբերության մեջ է. եթե մենք  պատկերից հեռացնենք մի որևէ կետ, ապա ստացված պատկերը կարող է լինել ոչ կապակցված տարածություն, որի կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունը կարող է լինել ամենաշատը երեք: Իսկ եթե նման գործողություն կատարենք  պատկերի հետ, ապա կախված հեռացվող կետից կարող է ստացվել տարածություն, որն ունի կապակցվածության չորս բաղադրիչ: Այժմ, օգտագործելով այս հանգամանքը, ապացուցենք, որ այս պատկերները հոմեոմորֆ չեն միմյանց:

Իրոք, ենթադրենք գոյություն ունի h :  $\rightarrow$  հոմեոմորֆիզմ: Հեռացնենք  պատկերից a կետը, իսկ  պատկերից $h(a)$ կետը:
Ստացված $\bar{h}$:  $\setminus\{a\} \rightarrow$  $\setminus\{h(a)\}$ արտապատկերումը նորից հոմեոմորֆիզմ է (ինչո՞ւ): Բայց  $\setminus\{a\}$ տարածությունն ունի կապակցվածության 4 բաղադրիչ, մինչդեռ  $\setminus\{h(a)\}$ տարածության համար դրանց քանակությունը փոքր է 4-ից (հակասություն թեորեմ 8-ի հետ):

Անդրադառնալով տարածությունների միջև հոմեոմորֆիզմ կառուցելու խնդրին՝ կատարենք կարևոր դիտողություն: Եթե մի տարածություն (օրինակ գծապատկեր) հնարավոր չէ առանց կտրատումների և ինքնահատումների համընկեցնել մյուսի հետ, դա դեռ չի նշանակում, որ այդ տարածությունները հոմեոմորֆ չեն:

գծապատկեր) հնարավոր չէ առանց կտրատումների և ինքնահատումների համընկեցնել մյուսի հետ, դա դեռ չի նշանակում, որ այդ տարածությունները հոմեոմորֆ չեն:

Օրինակ $\mathbb{R}^3$ տարածությունում հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների $x^2 \quad y^2 = r^2,\ z = 0$ շրջանագիծը անընդհատ ձևափոխումներով համընկեցնել այսպես կոչված «երեքնուկաձև» օվալի հետ: Մինչդեռ դրանք հոմեոմորֆ են միմյանց:

105-8 նկար

Իրոք, վերցնելով շրջանագծի վրա $x_1, x_2, \dots, x_9$ կետերը, իսկ օվալի վրա $y_1, y_2, \dots, y_9$ կետերը, մենք կարող ենք նախ կառուցել հոմեոմորֆիզմներ այդ պատկերների համապատասխան աղեղների միջև՝ $h_1: x_1x_2 \to y_1y_2$, $h_2: x_2x_3 \to y_2y_3, \dots$, $h_8: x_8x_9 \to y_8y_9$, $h_9: x_9x_1 \to y_9y_1$: Այնուհետև հաջորդաբար «սոսնձելով» այդ արտապատկերումներից յուրաքանչյուրն իր հաջորդի հետ (թեմա ~~12-ից~~ 12-ում թեորեմ 3-ի իմաստով), կստանանք որոնվող h հոմեոմորֆիզմ: