Թեմա 5

Տոպոլոգիայի բազա, բազայի հայտանիշ, տոպոլոգիայի տրում բազայի միջոցով: Տոպոլոգիական տարածության փակ ենթաբազմությունները, տոպոլոգիայի այլընտրանքային սահմանում: Անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները,

Ենթատարածություններ և հարաբերական տոպոլոգիաներ

Որևէ X բազմության վրա տոպոլոգիա տալու համար պարտադիր չէ հատիկ-հատիկ թվարկել τ-ի բոլոր տարրերը (X-ի բաց բազմությունները): Բավական է տալ կամ նկարագրել դրանց մի մասը՝ պայմանով, որ մյուսները ստացվեն դրանց միավորումներով: Այս կերպ գալիս ենք տոպոլոգիայի բազա հասկացությանը:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածության բաց ենթաբազմությունների $B \subset \tau$ համախմբությունը կոչվում է τ **տոպոլոգիայի բազա**, եթե ցանկացած ոչ դատարկ U բաց ենթաբազմություն ներկայացվում է որպես B-ի որոշ քանակով տարրերի միավորում:

Պարզ է, որ ցանկացած τ տոպոլոգիայի համար ինքը՝ τ-ն բազա է:

Օրինակ 1: ա) Ակնհայտ է, որ $(X, \text{անտիդ.})$ տարածության համար կա տոպոլոգիայի միայն մի բազա՝ $B = \{X\}$, իսկ $(X, \text{դիսկր.})$ տարածության դեպքում տոպոլոգիայի ցանկացած բազա իր մեջ պետք է պարունակի բոլոր մի կետանոց $\{x\} \subset X$ ենթաբազմությունները: Նկատենք նաև, որ $(X, \text{դիսկր.})$-ում իրենք՝ բոլոր մի կետանոց ենթաբազմությունները ևս կազմում են տոպոլոգիայի բազա, և այն որոշակի իմաստով «նվազագույն» բազա է (պարունակվում է ցանկացած այլ բազայում):

բ) $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի համար (ըստ սահմանման) բազա են կազմում բոլոր (a, b) ինտերվալները, նաև դրա մասը կազմող ռացիոնալ ծայրակետերով բոլոր (r_1, r_2), $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ինտերվալները: Սա հիմնավորելու համար նկատենք, որ ցանկացած իրական թիվ կարելի է ցանկացած ճշտությամբ և՛ հավելորդով, և՛ պակասորդով մոտարկել ռացիոնալ թվերով: Դրա շնորհիվ ունենք $(a, b) = \bigcup (r_1, r_2)$ ներկայացում, որտեղ միավորումը տարածվում է ռացիոնալ ծայրակետերով այն բոլոր (r_1, r_2) ինտերվալների վրա, որոնք բավարարում են $a < r_1 < r_2 < b$ պայմանին:

Բերված օրինակներից հետևում է, որ ընդհանուր դեպքում տվյալ տոպոլոգիայի համար բազան կարող է միակը չլինել:

Այժմ բերենք բազայի հայտանիշ կետերի շրջակայքերի տերմիններով (հիշենք, որ կետի շրջակայք հասկացությունը բաց բազմություն հասկացությանը համարժեք հասկացություն է):

Թեորեմ 1: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և X-ի բաց ենթաբազմությունների մի $B \subset \tau$ համախմբություն՝ $B = \{W_j \mid W_j \in \tau, j \in J\}$: Ապա B-ն τ տոպոլոգիայի բազա է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall x \in X$

կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի որևէ $W \in B$ տարր, որ $x \in W \subset V$:

Ապացուցում: ա) Դիցուք B-ն τ տոպոլոգիայի որևէ բազա է, իսկ V-ն $x \in X$ կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի $U \in \tau$ բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Ըստ տոպոլոգիայի բազայի սահմանման ունենք՝ $U = \bigcup\limits_{k \in K} W_k$, որտեղ K-ն ինդեքսների J բազմության ենթաբազմություն է: Ուստի գոյություն ունի $k \in K$ տարր, որ $x \in W_k$: Այսպիսով $x \in W_k \subset V$, $W_k \in B$:

բ) Ապացուցենք հակառակ պնդումը. դիտարկենք կամայական $U \in \tau$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ U-ն կարելի է ներկայացնել որպես B-ի որոշ տարրերի միավորում: Որպես բաց բազմություն՝ U-ն շրջակայք է իր ամեն մի կետի համար (տե՛ս թեորեմ 1-ը թեմա 4-ում): Ըստ պայմանի՝ տվյալ $x \in U$ կետի համար գոյություն ունի $W(x) \in B$ տարր, որ $x \in W(x) \subset U$: Հետևաբար, $U = \bigcup\limits_{x \in U} W(x)$, որից էլ հետևում է, որ B-ն τ տոպոլոգիայի բազա է: ■

Տոպոլոգիայի բազա հասկացությունը հաճախ հեշտացնում կամ պարզեցնում է բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ընթացքը: Այն նաև թույլ է տալիս պարզեցնել շատ թեորեմների ապացույցները, ինչում կհամոզվենք հետագայում:

Թեորեմ 2 (բազայի միջոցով տոպոլոգիայի տրման մասին)**:** Դիցուք տրված է X բազմության որոշ ենթաբազմությունների $B = \{W_i \mid W_i \subset X, \ i \in I\}$ ընտանիք այնպես, որ

1. B-ի բոլոր տարրերի միավորումը X-ն է՝ $\bigcup\limits_{i \in I} W_i = X$,

2. B-ի ցանկացած երկու տարրերի (ոչ դատարկ) հատումը կարող է ներկայացվել որպես B-ի որոշ քանակով տարրերի միավորում:

Ապա X-ի վրա գոյություն ունի, ընդ որում միակ, այնպիսի τ տոպոլոգիա, որի համար B-ն տոպոլոգիայի բազա է:

Ապացուցում: Որպես τ վերցնենք B-ի բոլոր տարրերը, նրանց բոլոր հնարավոր միավորումները և $\varnothing$-ը: Տոպոլոգիայի առաջին երկու աքսիոմները τ-ի համար ստուգվում են հեշտությամբ (հետևում են 1-ից և τ-ի սահմանումից): Մնում է ստուգել 3, կամ նրան համարժեք $3'$ աքսիոմը: Դիցուք $U_1, U_2 \in \tau$, և $U_1 = \bigcup\limits_{k \in K} W_k$, $U_2 = \bigcup\limits_{l \in L} W_l$, որտեղ K-ն և L-ը ինդեքսների I բազմության ենթաբազմություններ են: Ունենք՝

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_k W_k\right) \cap \left(\bigcup_l W_l\right) = \bigcup_{k,\,l} (W_k \cap W_l):$$

Ըստ թեորեմի 2-րդ պայմանի՝ $W_k \cap W_l \neq \varnothing$ հատումը B-ի որոշ տարրերի միավորում է: Ուստի $U_1 \cap U_2$-ը ևս B-ի որոշ տարրերի միավորում է, հետևաբար $U_1 \cap U_2 \in \tau$: Այսպիսով τ-ն տոպոլոգիա է, որի համար B-ն տոպոլոգիայի բազա է: Ստացված տոպոլոգիայի միակությունը հետևում է նրանից, որ տվյալ բազայով տոպոլոգիա որոշվում է միարժեքորեն (ինչո՞ւ):

Այժմ թեորեմ 2-ի կիրառումով սահմանենք ևս մի հետաքրքիր տոպոլոգիա $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա: Նրա համար որպես բազա վերցնենք բոլոր $[a,b)$ տեսքի կիսաբաց ինտերվալները: Դրանք բավարարում են թեորեմի 1-2 պայմաններին, քանի որ մի կողմից $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1)=\mathbb{R}$, և մյուս կողմից էլ $[a,b)$ տեսքի որևէ երկու միջակայքերի հատումը կամ $\varnothing$ է, կամ էլ նույն տեսքի կիսաբաց ինտերվալ է:

Ստացված տոպոլոգիան կոչվում է **աջից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիա**: Ընթերցողին, որպես օգտակար խնդիր, առաջարկում ենք ապացուցել, որ այս տոպոլոգիան ավելի ուժեղ է թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից:

Նման ձևով սահմանվում է **ձախից կիսաբաց** $(a,b]$ **ինտերվալների տոպոլոգիան**: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը, վերցված աջից կամ ձախից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիայով, նշանակվում են համապատասխանաբար $(\mathbb{R},\mapsto)$ և $(\mathbb{R},\leftarrow\!\shortmid)$: Այդ տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են **Զորգենֆրեյի ուղիղներ**:

Այժմ անդրադառնանք թեմա 4-ում առաջարկված խնդրին. տոպոլո՞գիա է արդյոք երկու տոպոլոգիաների միավորումը: Նախ ճշտենք հարցադրումը. X բազմության վրա տրված երկու τ_1 և τ_2 տոպոլոգիաների միավորում ասելով հասկանալու ենք X-ի ենթաբազմությունների $\tau_1\cup\tau_2$ ընտանիքը: Հարցը հետևյալն է. ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական բազմության ցանկացած երկու տոպոլոգիաների միավորումը դարձյալ տոպոլոգիա է այդ բազմության համար:

Ցույց տանք, որ թվային ուղղի աջից կիսաբաց τ_1 և ձախից կիսաբաց τ_2 տոպոլոգիաների $\tau_1\cup\tau_2$ միավորումը տոպոլոգիա չէ այդ ուղղի համար (չի բավարարվում տոպոլոգիայի 2-րդ՝ միավորման աքսիոմը): Իրոք, ունենք՝ $[a,b)\in\tau_1$, $(a,b]\in\tau_2$, բայց նրանց $[a,b)\cup(a,b]=[a,b]$ միավորումը չի պատկանում ո՛չ τ_1-ին, և ո՛չ էլ τ_2-ին (հիմնավորե՛ք): ■

Վերը թվային ուղղի սովորական և կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիաները սահմանվեցին համապատասխանաբար $\{(a,b)\}$, $\{[a,b)\}$, $\{(a,b]\}$ բազաների միջոցով: Դրա հետ կապված առաջանում է հարց. հանդիսանո՞ւմ է արդյոք թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի բազա բոլոր $[a,b]$ փակ հատվածների բազմությունը: Հեշտ է ցույց տալ, որ $\{[a,b]\}$ ընտանիքը, ի տարբերություն նախորդ երեք օրինակների, չի բավարարում թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանին, և ուրեմն չի հանդիսանում բազա թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի համար (հիմնավորե՛ք):

Մյուս կողմից, թվային ուղղի **բոլոր** փակ ենթաբազմությունները (այսինքն այն բոլոր ենթաբազմությունները, որոնք պարունակում են իր~~ա~~ենց բոլոր հպման կետերը), օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ. ցանկացած F փակ ենթաբազմության $\mathbb{R}\setminus F$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է: Իրոք, եթե $x\in\mathbb{R}\setminus F$, ապա x-ը հպման կետ չէ F-ի համար, ուստի գոյություն ունի x-ի որևէ $U(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ շրջակայք, որ $U(x,\varepsilon)\subset\mathbb{R}\setminus F$: Սրանից հետևում է, որ $R\setminus F=\bigcup\limits_{x}U(x,\varepsilon)$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է $\mathbb{R}$-ում՝ որպես ինտերվալների միավորում: Բնականաբար V հակառակը նույնպես ճիշտ է՝ թվային ուղղի բաց ենթաբազմությունների լրացումները փակ ենթաբազմություններ են:

Թվային ուղղի բաց և փակ ենթաբազմությունների այս հատկության հիմքով ներմուծվում է փակ ենթաբազմության հասկացություն կամայական տոպոլոգիական տարածությունում:

Սահմանում: (X,τ) տոպոլոգիական տարածության **փակ ենթաբազմություն** կոչվում է X-ի ամեն մի F ենթաբազմություն, որի $X\setminus F$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է X-ում (այսինքն՝ $(X\setminus F)\in\tau$):

Օրինակ 2: $(X,$ անտիդ.$)$-ում փակ են միայն $\varnothing$-ը և X-ը, իսկ $(X,$ դիսկր.$)$-ում փակ են X-ի բոլոր ենթաբազմությունները: Այնուհետև, $(\mathbb{R},$սովոր.$)$-ում փակ են բոլոր $[a,b]$ հատվածները, $(-\infty;a]$ և $[a;+\infty)$ հատվածները, բոլոր մի կետանոց $\{a\}$ ենթաբազմությունները, ինչպես նաև դրանց վերջավոր միավորումները:

$(\mathbb{R},$վերջ. լր.$)$ տարածությունում փակ ենթաբազմությունները $\mathbb{R}$-ի վերջավոր ենթաբազմություններն են:

$(\mathbb{R},\mapsto)$ տարածությունում $[a,b)$ ենթաբազմությունները միաժամանակ և՛ բաց, և՛ փակ ենթաբազմություններ են (ինչո՞ւ): Իսկ (a,b), $(a,b]$, $(a,+\infty)$ ենթաբազմությունները փակ չեն, քանի որ դրա՛նց լրացումները չեն հանդիսանում շրջակայք a կետի համար (հիմնավորե՛ք):

Փակ բազմությունների հիմնական հատկությունները: Ցանկացած (X,τ) տոպ. տարածությունում

F1. $\varnothing$-ը և X-ը փակ ենթաբազմություններ են (ակնհայտ է),

F2. X-ի ցանկացած վերջավոր քանակով փակ ենթաբազմությունների միավորումը փակ ենթաբազմություն է,

(Իրոք, եթե $F_1,F_2,\dots,F_n$-ը փակ են X-ում, ապա $X\setminus F_1,X\setminus F_2,\dots,X\setminus F_n$-ը բաց են X-ում: Ուստի բաց է նաև նրանց $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$ հատումը: Այժմ դե Մորգանի առաջին բանաձևից ստանում ենք, որ $X\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$ ենթաբազմությունը բաց է X-ում, ուստի $\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$ միավորումը փակ ենթաբազմություն է X-ում):

F3. X-ի ցանկացած քանակով փակ ենթաբազմությունների հատումը X-ի փակ ենթաբազմություն է (ապացուցվում է նախորդ հատկության նմանությամբ, դե Մորգանի մյուս բանաձևի միջոցով):

Փակ բազմությունների F1-F3 հատկությունները լիովին բնութագրում են (X,τ) տարածության տոպոլոգիան հետևյալ իմաստով:

Թեորեմ 3: Դիցուք տրված է X բազմության ենթաբազմությունների մի որոշ σ համախմբություն այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1*. $\varnothing$-ը և X-ը պատկանում են σ-ին,

2*. σ-ի ցանկացած վերջավոր քանակով տարրերի միավորումը պատկանում է σ-ին,

3*. σ-ի ցանկացած քանակով տարրերի հատումը պատկանում է σ-ին:

Ապա X-ի վրա գոյություն ունի միակ τ տոպոլոգիա, որի նկատմամբ փակ ենթաբազմությունները ճիշտ և ճիշտ σ-ի տարրերն են:

Ապացույց: Սահմանենք τ տոպոլոգիա X-ի վրա՝ վերցնելով որպես τ-ի տարրեր σ-ի տարրերի լրացումները: Այսինքն X-ում բաց ենթաբազմություններ ենք համարում X-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնց լրացումները պատկանում են σ-ին: Տոպոլոգիայի 1-3 պայմանների ստուգումը կատարվում է 1*-3* աքսիոմների և դե Մորգանի բանաձևերի միջոցով: ■

Այսպիսով թեորեմ 3-ը տալիս է բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ևս մի եղանակ՝ որպես հիմք ընդունելով բազմության փակ ենթաբազմություն չսահմանվող հասկացությունը, իսկ որպես աքսիոմներ՝ 1*, 2*, 3*-ը:

Առայժմ բավարարվելով վերը շարադրվածով՝ մենք արդեն կարող ենք ձեռնարկել տոպոլոգիական տարածությունների որոշ ուսումնասիրություն՝ հիմնվելով դրանց այս կամ այլ կարևոր հատկության վրա:

Որպես առաջին այդպիսի հատկություն կդիտարկենք այսպես կոչված անջատելիության աքսիոմները:

Անջատելիության աքսիոմները լուծում են հետևյալ խնդիրը. եթե տվյալ տոպոլոգիական տարածությունում ունենք երկու կետեր կամ (ընդհանուր դեպքում) երկու ենթաբազմություններ, հնարավո՞ր է արդյոք դրանք մասնակիորեն կամ լիովին տարանջատել միմյանցից չհատվող շրջակայքերով: Սկզբում կքննարկենք երկու կետերի տարանջատման խնդիրը երեք տարբերակով (T_0, T_1, T_2 աքսիոմներ):

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **անջատելիության T_0 աքսիոմին** (կարճ՝ X-ը T_0-տարածություն է), եթե X-ի կամայական երկու տարբեր կետերից գոնե մեկն ունի շրջակայք, որը չի պարունակում մյուս կետը:

V

Նկատենք, որ ոչ բոլոր տարածություններն են բավարարում այդ պայմանին. այդպիսի օրինակ է երկուսից ոչ պակաս կետերով $(X,$ անտիդ.$)$-ը (հիմնավորե՛ք):

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **անջատելիության T_1 աքսիոմին**, եթե նրա $\forall\, x_1 \neq x_2$ կետերից յուրաքանչյուրն ունի շրջակայք, որը չի պարունակում մյուս կետը:

Պարզ է, որ T_1 աքսիոմին բավարարող տարածությունը բավարարում է նաև T_0 աքսիոմին: Հակառակը ճիշտ չէ. $X = \{x_1, x_2\}$ բազմությունը $\tau_1 = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ տոպոլոգիայով T_0-տարածություն է, բայց T_1-տարածություն չէ (ինչո՞ւ):

V

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպ. տարածությունը **հաուսդորֆյան** կամ T_2-**տարածություն** է, եթե նրա $\forall x_1 \neq x_2$ կետեր ունենն չհատվող շրջակայքեր:

T_2-տարածության պարզագույն օրինակ է որևէ երկկետանոց բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով:

Պարզ է, որ T_2 աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն բավարարում է նաև T_1-ին: Հակառակը ճիշտ չէ. օրինակ կբերենք քիչ հետո: Իսկ հիմա.

Թեորեմ 4: X տոպոլոգիական տարածությունը T_1-տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա յուրաքանչյուր մի կետանոց $\{x\}$ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք X-ը T_1-տարածություն է, ցույց տանք, որ $\forall x \in X$ կետի դեպքում $X \setminus \{x\}$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է, որից կհետևի, որ $\{x\}$-ը փակ է: Դիտարկենք $\forall y \in X \setminus \{x\}$ կետ: Ըստ պայմանի՝ գոյություն ունի y կետի U_y շրջակայք, որ $x \notin U_y$: Նշանակում է $U_y \subset X \setminus \{x\}$: Այսպիսով $X \setminus \{x\}$-ը շրջակայք է իր ամեն մի կետի համար $\Rightarrow X \setminus \{x\}$-ը բաց ենթաբազմություն է $\Rightarrow \{x\}$-ը փակ ենթաբազմություն է:

Պայմանի բավարարությունը: Ունենք, որ $\forall \{x\} \subset X$ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է: Կամայական $x_1 \neq x_2$ կետերի համար $X \setminus \{x_2\}$-ը և $X \setminus \{x_1\}$-ը համապատասխանաբար x_1-ի և x_2-ի բաց շրջակայքեր են, ընդ որում՝ $x_1 \notin X \setminus \{x_1\}$ և $x_2 \notin X \setminus \{x_2\}$: ■

Այժմ բերենք T_1-տարածության օրինակ, որը T_2-տարածություն չէ: Դիտարկենք որևէ $(X, \text{վերջ. լր.})$ տարածություն, որտեղ X-ը անվերջ բազմություն է: Սա T_1-տարածություն է (քանի որ ցանկացած մի կետանոց ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է), բայց T_2-տարածություն չէ, քանի որ այս տարածությունում ցանկացած երկու բաց ենթաբազմություններ ունենն ոչ դատարկ հատում (հիմնավորե՛ք):

Բացի T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից տոպոլոգիայում դիտարկվում են անջատելիության նաև այլ աքսիոմներ:

Սահմանում: Ասում են որ (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է T_3 աքսիոմին, եթե նրա կամայական x կետի և այդ կետը չպարունակող կամայական F փակ ենթաբազմության համար գոյություն ունեն U_x և U_F չհատվող բաց ենթաբազմություններ, որ $x \in U_x$, $F \subset U_F$:

Նման ձևով սահմանվում է T_4 աքսիոմը. պահանջվում է, որ X-ի կամայական երկու չհատվող F_1 և F_2 փակ ենթաբազմությունների համար գոյություն ունենան X-ի չհատվող U_{F_1} և U_{F_2} բաց ենթաբազմություններ, որ $F_1 \subset U_{F_1}$, $F_2 \subset U_{F_2}$:

Նկատենք. եթե T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից յուրաքանչյուր հաջորդը ավելի ուժեղ էր նախորդից, ապա այդ օրինաչափությունը խախտվում է աք-

աքսիոմների T_2, T_3, T_4 համապատասխանաբար ընդհանուր: Պատճառը կայանում է նրանում, որ T_3 կամ T_4 աքսիոմից չի հետևում միակետանոց $\{x\}$ ենթաբազմությունների փակությունը X-ում: Բայց եթե լրացուցիչ ենթադրենք, որ (X,τ)-ն բավարարում նաև T_1 աքսիոմին, ապա համաձայն թեորեմ 4-ի, կստանանք օրինաչափությունների կարգավորվածությունը:

Սահմանում: (X,τ)-ն կոչվում է ռեգուլյար տարածություն (կամ X-ը ռեգուլյար է), եթե բավարարված է T_1 և T_3 աքսիոմներին և կոչվում է նորմալ տարածություն, եթե բավարարված է T_1 և T_4 աքսիոմներին:

Այսպիսով ռեգուլյար տարածությունները հաուսդորֆյան են, իսկ նորմալ տարածությունները ռեգուլյար են (ապացուցեք):

Կան նաև հաուսդորֆյան, բայց ոչ ռեգուլյար, և ռեգուլյար, բայց ոչ նորմալ տարածությունների օրինակներ: Դրանց կառուցումը բավականին բարդ է և այստեղ դրանք չենք բերի:

Տեղեկացնենք միայն, որ նորմալ տարածությունների դասը բավականին լայն է և փաստորեն նրա մեջ ներառված է բոլոր «լավ» տարածությունները (տես թեորեմ 6-ը թեմա 7-ում):

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 5-ի վերաբերյալ

1.1. Հանդիսանու՞մ է արդյոք ենթաբազմությունների $\{[a,b];\ a \le b]\}$ ընտանիքը թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի բազա:

1.2. Ապացուցեք, որ թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանը կարելի է փոխարինել հետևյալ համարժեք պայմանով. ցանկացած $W_i,\ W_j \in B$ փարրերի և ամեն մի $x \in W_i \cap W_j$ փարրի համար գոյություն ունի $W_k \in B$ փարր, որ $x \in W_k$ և $W_k \subset W_i \cap W_j$:

1.3. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության ենթաբազմությունների Φ_1 և Φ_2 ընտանիքներ կազմված բոլոր այնպիսի անեզր քառակուսիներից (կողմերն ու գագաթները հեռացված են), որ առաջին ընտանիքում քառակուսիների կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին, իսկ երկրորդ ընտանիքում քառակուսիների անկյունագծերն են զուգահեռ կոորդինատային առանցքներին:

Ապացուցեք. Φ_1-ը և Φ_2-ը ծառայում են որպես բազա $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ τ_1 և τ_2 տոպոլոգիաների համար:

Ցուցում. Դիտարկելով որևէ երկու հատվող քառակուսի առաջին ընտանիքից և օգտվելով խնդիր 5.2-ից՝ ստուգեք թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանը (առաջին պայմանը բավարարվում է ակնհայտորեն): Երկրորդ ընտանիքի դեպքը բերվում է առաջին ընտանիքի դեպքին՝ կտտարելով պտույտ կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը $45°$-ով:

1.4. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր անեզր շրջանների (եզրային շրջանագծերը հեռացված են) Φ_3 ընտանիքը: Ապացուցեք, որ Φ_3-ը բազա է $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ τ_3 տոպոլոգիայի համար:

1.5. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր եզրով (փակ) շրջանների ընտանիքը կազմում է բազա $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ տոպոլոգիայի համար:

1.6. Ապացուցեք, որ 5.3 և 5.4 խնդիրներում նկարագրված Φ_1, Φ_2, Φ_3 բազաները որոշում են թվային ուղղի նույն տոպոլոգիան:

Ցուցում. Ցույց տվեք, որ յուրաքանչյուր Φ_i բազայի $(i = 1, 2, 3)$ ցանկացած տարր կարող է ներկայացվել որպես Φ_j, $j \neq i$ բազայի անվերջ քանակությամբ որոշ տարրերի միավորում:

1.7. Ապացուցեք, որ բնական թվերից կազմված բոլոր անվերջ թվաբանական պրոգրեսիաների համախմբությունը բոլոր բնական թվերի բազմության ինչ-որ տոպոլոգիայի բազա է:

Ցուցում. Դիցուք ունենք բնական թվերից կազմված $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ և $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ երկու անվերջ թվաբանական պրոգրեսիա համապատասխանաբար d_1 և d_2 տարբերություններով: Դիցուք c_1-ը $A \cap B$ բազմության փոքրագույն տարրն է: Ցույց տվեք, որ $C = A \cap B = \{c_1, c_2, \dots\}$ բազմությունը անվերջ թվաբանական պրոգրեսիա է $d_3 = [d_1, d_2]$ տարբերությունով, որտեղ $[d_1, d_2]$-ը d_1 և d_2 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

1.8. Ապացուցեք. ցանկացած T_1 տարածության ամեն մի վերջավոր ենթաբազմություն փակ բազմություն է:

1.9. Ապացուցեք, որ աջից կիսաբաց ինտերվալների $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տոպոլոգիական տարածությունում

ա) ամեն մի $[a, +\infty)$ ենթաբազմություն և բաց է, և փակ է,

բ) ամեն մի $(a, b]$ ենթաբազմություն ոչ բաց է, ոչ էլ փակ է:

1.10. Ապացուցեք. խնդիր 5.4-ում դիտարկված $(\mathbb{R}^2, \tau_3)$ տարածությունը հաուսդորֆյան տարածություն է:

1.11. Պարզեք՝ ստորև բերված տարածություններից որո՞նք են հաուսդորֆյան տարածություն.

ա) դիսկրետ տարածություն,

բ) անտիդիսկրետ տարածություն,

գ) աջից կիսաբաց ինտերվալների տարածություն: