Թեմա 13

Ֆակտոր-տոպոլոգիա, ֆակտոր-տարածություն, օրինակներ: Տոպոլոգիական տարածություններում «սոսնձման» (նույնացման) գործողությունը, օրինակներ: Միակողմանի և երկկողմանի մակերևույթներ:

Նախորդ թեմայում (X, τ) տոպ. տոպոլոգիական տարածության $A \in X$ ենթաբազմության վրա սահմանեցինք մակածված տոպոլոգիա որպես A բազմության ամենաթույլ տոպոլոգիա, որի դեպքում $i : A \to X$ ներդրումը անընդհատ է:

Այժմ դիտարկենք այդ նույն խնդիրը մի փոքր այլ, ավելի ընդհանրացված տեսքով: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպ. տոպոլոգիական տարածություն, A բազմություն (որը կարող է և չլինել X-ի ենթաբազմություն) և $f : A \to X$ արտապատկերում: Ինչպե՞ս սահմանել տոպոլոգիա A բազմության վրա, որպեսզի f արտապատկերումը լինի անընդհատ: Կարելի է օրինակ, A-ն օժտել ամենաուժեղ՝ դիսկրետ տոպոլոգիայով, և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ (ինչո՞ւ): [illegible] ~~Բայց մենք ցանկանում ենք~~ գտնել A-ի այն ամենաթույլ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Հասկանալի է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակելու է բոլոր $f^{-1}(V)$ ենթաբազմությունները, որտեղ $V \in \tau$: Հեշտ է տեսնել, որ այդ պայմանը, լինելով անհրաժեշտ, նաև բավարար պայման է, քանի որ A բազմության ենթաբազմությունների $\{f^{-1}(V) \mid V \in \tau\}$ ընտանիքը, շնորհիվ

$$f^{-1}\left(\bigcup_i V_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(V_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_i V_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(V)$$

նույնացումների, բավարարում է տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմներին (այդ տոպոլոգիան կոչվում է [illegible] A բազմության վրա):

Մասնավոր դեպքում, երբ $A \in X$ իսկ f-ը $A \to X$ ներդրումն է, այս տոպոլոգիան [illegible] համընկնում է τ_A մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Հիմա քննարկենք մեկ այլ, այս խնդրին նման խնդիր: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն, ինչ-որ B բազմություն և $f : X \to B$ արտապատկերում: Ի՞նչ տոպոլոգիա վերցնենք B-ի վրա, որպեսզի f-ը լինի անընդհատ արտապատկերում: Կարելի է օրինակ B-ն օժտել անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ արտապատկերում: [illegible] ~~Մենք ցանկանում ենք~~ գտնել B-ի համար այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Հասկանալի է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակ է B-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց ենթաբազմություններ են X-ում: Դարձյալ վերը բերված երկու նույնացումներից հետևում է, որ այդ [illegible] ~~պայմանը ոչ միայն անհրաժեշտ, այլ նաև բավարար է. այսինքն~~ [illegible] B բազմության ենթաբազմությունների $\{V \in B \mid f^{-1}(V) \in \tau\}$ ընտանիքը բավարարում է տոպոլոգիայի բոլոր 1-3 աքսիոմներին:

Ամփոփենք. եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում, որտեղ X-ը տոպոլոգիական տարածություն է, իսկ Y-ը բազմություն է, ապա Y-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են X-ում, կազմում են Y-ի (այս տոպոլոգիան կոչվում է ~~ֆինալ~~ տոպոլոգիա Y-ի վրա որոշված f արտապատկերումով):

տոպոլոգիա: Ընդ որում, դա այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան է Y-ի վրա, որի դեպքում f-ը անընդհատ է: Մասնավոր դեպքում, երբ f-ը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է (հենց սրանից) (այսինքն $f(X) = Y$), այդ տոպոլոգիան կոչվում է $\boldsymbol{f}$ **արտապատկերումով ծնված ֆակտոր-տոպոլոգիա** Y բազմության վրա, իսկ Y բազմությունը, օժտված այդ ֆակտոր-տոպոլոգիայով, կոչվում է $\boldsymbol{X}$ **տարածության ֆակտոր-տարածություն որոշված** $\boldsymbol{f}$ **արտապատկերումով**:

Պարզաբանենք այս անվանումները: Եթե X բազմության վրա ունենք R համարժեքության հարաբերություն (տես թեմա 2-ում), ապա $X/_R$ ֆակտոր-բազմության համար ունենք $P : X \to X/_R$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում (կանոնական պրոյեկցիա), որը $\forall\, x \in X$ կետի համապատասխանեցնում է նրա $P(x) = [x]$ համարժեքության դասը: Եթե X-ը նաև տոպոլոգիական տարածություն է, ապա վերը նկարագրված եղանակով $X/_R$ ֆակտոր-բազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության (ֆակտոր-տարածության)՝ օժտված P արտապատկերումով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Մյուս կողմից՝ ամեն մի $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում որոշում է R համարժեքության հարաբերություն X-ի վրա, ըստ որի $x_1, x_2 \in X$ տարրերը համարվում են համարժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x_1) = f(x_2)$: Դիտարկենք $h : X/_R \to Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $h([x]) = f(x)$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ h-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է և

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/_R \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

դիագրամը կոմուտատիվ է, այսինքն $f = h \circ P$: Համեմատելով $X/_R$ և Y բազմությունների վրա P և f արտապատկերումներով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիաները՝ տեսնում ենք, որ h-ը, ինչպես նաև h^{-1}-ը, բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում են բաց ենթաբազմությունների: Ուստի h-ը հոմեոմորֆիզմ է: Այն տոպոլոգորեն նույնացնում է $X/_R$ և Y ~~բազմությունները~~ տարածությունները, ինչպես նաև P և f արտապատկերումները:

Ամփոփենք. ֆակտոր-տարածություն կարելի է սահմանել երկու համարժեք եղանակով՝ որպես ելակետ վերցնելով կամ

ա) X տոպ. տարածություն, Y բազմություն և որևէ $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, կամ էլ

բ) X տոպոլոգիական տարածություն և X բազմության վրա տրված R համարժեքության հարաբերություն (այսինքն X բազմության որևէ տրոհում):

Օրինակ 1: Վերցնենք $X \triangleq [0, 1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով; Դիտարկենք ~~վերցնենք~~ նաև որևէ երեք՝ α, β, γ տարրերից կազմված $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ բազմություն և $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, սահմանելով $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$ և $f(x) = \gamma$, $\forall\, x \in (0, 1)$: Ըստ ֆակտոր-տոպոլոգիայի սահմանման, Y-ում բաց են համարվում նրա այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են $[0,1]$-ում: Դիտարկելով Y-ի բոլոր $2^3=8$ ենթաբազմությունները՝ ստանում ենք.

$f^{-1}\varnothing=\varnothing,\ f^{-1}\{\alpha\}=\{0\},\ f^{-1}\{\beta\}=\{1\},\ f^{-1}\{\gamma\}=(0,1),\ f^{-1}\{\alpha,\beta\}=\{0;1\},\ f^{-1}\{\alpha,\gamma\}=[0,1),\ f^{-1}\{\gamma,\beta\}=(0,1],\ f^{-1}\{\alpha,\beta,\gamma\}=[0,1]$:

Այս ութ ենթաբազմություններից միայն հինգն են բավարարում վերոհիշյալ պայմանին: Ուստի X-ի ֆակտոր-տարածությունը երեք տարրից կազմված $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ բազմություն է օժտված $\tau=\{\varnothing,\{\gamma\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},\{\alpha,\beta,\gamma\}\}$ ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Այժմ այս նույն օրինակը քննարկենք մյուս՝ երկրորդ ելակետային մոտեցումով. սահմանենք $\sim$ երկտեղ հարաբերություն $X=[0,1]$ հատվածի կետերի համար, ըստ որի համարելու ենք $0\sim0,\ 1\sim1$, և $x_1\sim x_2,\ \forall x_1,x_2\in(0,1)$ կետերի դեպքում (այս և սրա օրինակներում xRy հարաբերությունը գրառելու ենք $x\sim y$ տեսքով):

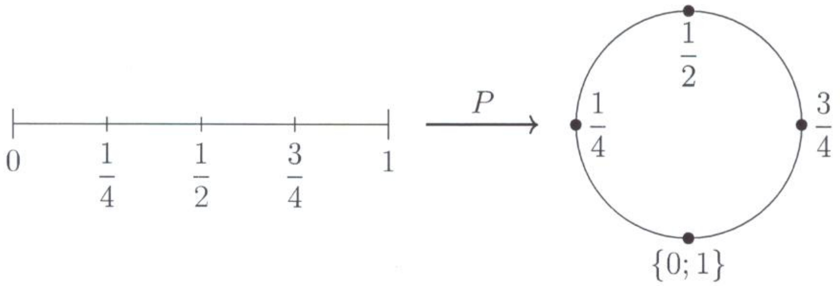
Սա համարժեքության հարաբերություն է, ուստի այն որոշում է $[0,1]$ հատվածի ֆակտոր-բազմություն, կազմված երեք տարրերից՝ $[0],\ [1],\ \left[\frac{1}{2}\right]$ (այս վերջին համարժեքության դասը կարող է ներկայացվել իր ցանկացած $t\in(0,1)$ ներկայացուցչով՝ $[t]$): Նշանակելով $\alpha=[0],\ \beta=[1],\ \gamma=\left[\frac{1}{2}\right]$, կունենանք ${[0,1]}/{\sim}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ նույնացում և կանոնական $P:[0,1]\to\{\alpha,\beta,\gamma\}$ պրոյեկցիա՝ $P(x)=[x],\ x\in[0,1]$:

Ինչ վերաբերում է $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ ֆակտոր-բազմության ֆակտոր-տոպոլոգիային, ապա այն որոշվում է ինչպես նախորդ դեպքում և բերում է նույն արդյունքին: Նկատենք, որ այս դեպքում f արտապատկերման դերը կատարում է P պրոյեկցիան:

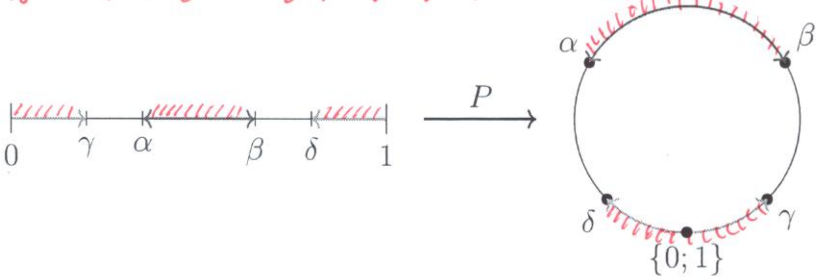
Դիտողություն: ${X}/{R}$ ֆակտոր-տարածությունը կարող է չժառանգել X տարածության որոշ տոպոլոգիական հատկություններ: Քիչ առաջ դիտարկված օրինակում $[0,1]$-ը հաուսդորֆյան տարածություն է, մինչդեռ ${[0,1]}/{\sim}$ տարածությունը հաուսդորֆյան չէ (ինչո՞ւ):

Օրինակ 2: Նորից դիտարկենք $X=[0,1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով և սահմանենք համարժեքության $\sim$ հարաբերություն $[0,1]$-ի վրա համարելով $x\sim x,\ \forall x\in[0,1]$ կետի դեպքում, և բացի այդ $0\sim1$: Այս օրինակում համարժեքության դասերն անթիվ են. դրանք $[0,1]$ հատվածի մի կետանոց $\{x\},\ x\in(0,1)$ ենթաբազմություններն են և երկկետանոց $\{0,1\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ${[0,1]}/{\sim}$ ֆակտոր-բազմությունը կարելի է նույնացնել 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծի հետ (տես օրինակ 9-ը թեմա 2-ում):

Անցումը $[0,1]$-ից շրջանագծի կարելի է պատկերացնել հետևյալ գծագրի օգնությամբ. մենք պարզապես նույնացնում (սոսնձում) ենք $[0,1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը, հատվածին տալով, օրինակ շրջանագծի տեսք:



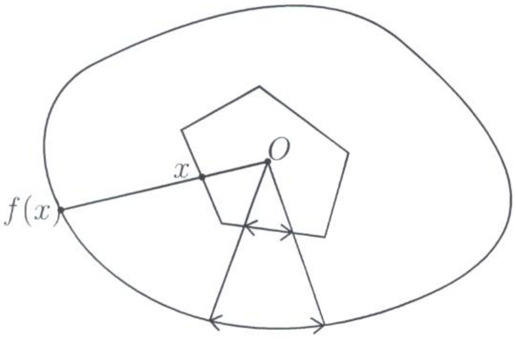
Այժմ նկարագրենք շրջանագծի ստացված ֆակտոր-տոպոլոգիան: Նկատենք, որ շրջանագծի ամեն մի անեզր $\alpha\beta$ աղեղ, որը չի պարունակում ֆակտոր-բազմության $\{0;1\}$ կետը (դասը), հանդիսանում է բաց ենթաբազմություն (պատկանում է ֆակտոր-տոպոլոգիային), քանի որ նրա նախակերպարը P պրոյեկցիայի դեպքում (α,β), $0 < \alpha < \beta < 1$ տեսքի ինտերվալ է $[0,1]$ հատվածում: Իսկ եթե շրջանագծի որևէ $\delta\gamma$ անեզր աղեղ պարունակում է $\{0;1\}$ կետը, ապա նրա $P^{-1}(\delta\gamma)$ նախակերպարը $[0,\gamma)\cup(\delta,1]$ միավորումն է, որը բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Ուրեմն $\delta\gamma$ աղեղը նույնպես բաց բազմություն է շրջանագծի ֆակտոր-տոպոլոգիայում:



Այսպիսով շրջանագծի (որպես ֆակտոր-բազմության) ֆակտոր-տոպոլոգիան կազմված է նրա բոլոր անեզր աղեղներից և դրանց միավորումներից: Նկատենք, որ այն ակնհայտորեն համընկնում է $\mathbb{R}^2$ հարթության շրջանագծի վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Դիտողություն: Ընթերցողի մոտ կարող է հարց առաջանալ. արդյո՞ք պարտադիր էր օրինակ 2-ում որպես ֆակտոր-բազմություն վերցնել 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը: Այս մասին խոսվել է թեմա 2-ում. ֆակտոր-բազմության մոդելի ընտրության հարցում մենք ունենք ազատություն: Կարելի է շրջանագծի փոխարեն վերցնել ցանկացած էլիպս կամ բազմանկյուն, կամ օվալ (ինքն իրեն չհատող փակ գիծ):

Հեշտ է տեսնել, որ այս բոլոր մոդելները, հարթությունից մակածված տոպոլոգիայով, միմյանց հոմեոմորֆ տոպոլոգիական տարածություններ են և կարող են դիտարկվել որպես ${}^{[0,1]}\!/\!_{\sim}$ ֆակտոր տարածության դրսևորումներ (կրկնօրինակներ): Կից գծագրում



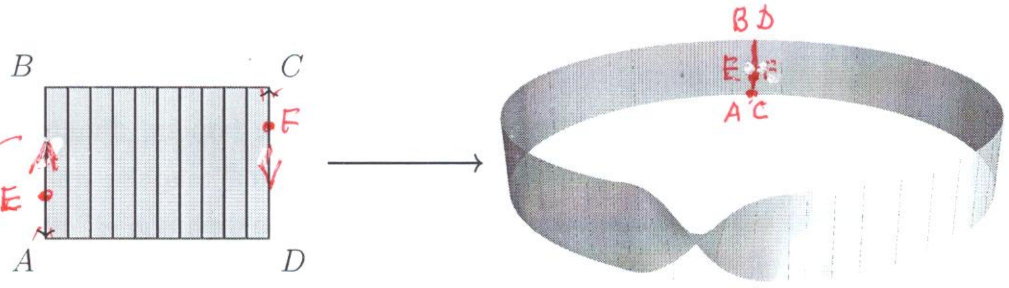
պատկերված օվալն ու հնգանկյուն բազմանկյունը հոմեոմորֆ են միմյանց. օրինակ, որպես հոմեոմորֆիզմ կարող է դիտարկվել սևեռված կետից հնգանկյան կենտրոնական f պրոյեկտումը օվալի վրա:

Օրինակ 2-ի իմաստով ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ ֆակտոր-տարածության մասին հաճախ ասում են, որ այն ստացվում է X-ից նրա որոշ տարրերի **սոսնձումներով** կամ **նույնացումներով**:

Ստորև բերվող ֆակտոր-տարածությունների օրինակներում մենք կբավարարվենք նշելով նույնացվող (սոսնձվող) տարրերը, պատկերելով ստացվող տարածությունները մակերևույթների տեսքով $\mathbb{R}^3$-ում: A-ն D-ի հետ, B-ն C-ի հետ, E-ն F-ի հետ նույնացնել:

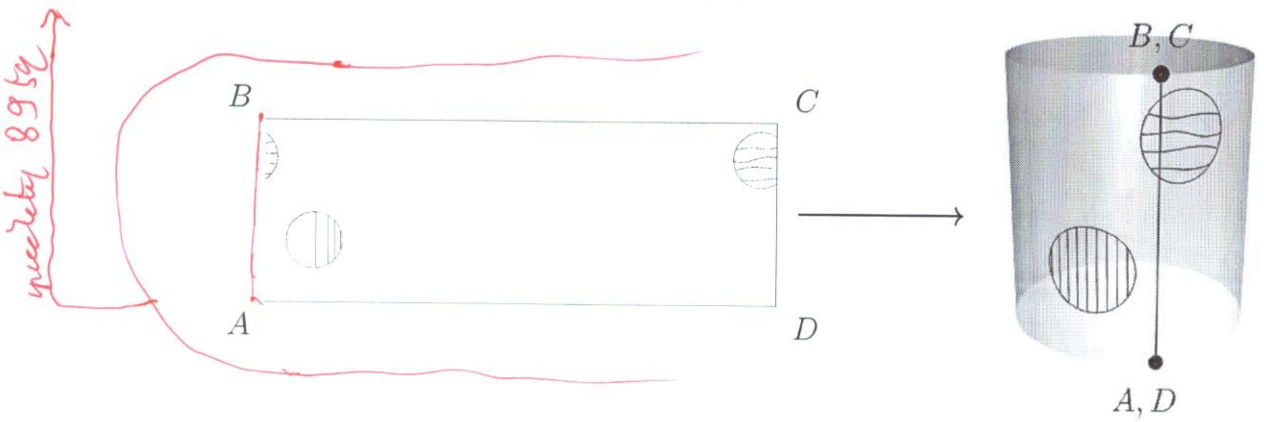
Օրինակ 3: Վերցնենք թղթի շերտ $ABCD$ ուղղանկյան տեսքով և նույնացնենք AB և DC կողմերի կետերը զույգ առ զույգ, պահպանելով նշված ուղղությունները:

Արդյունքում ստանում ենք գլան: Նրա եզրը կազմված է երկու շրջանագծերից: Որպես վարժանք ընթերցողին առաջարկում ենք. $ABCD$ ուղղանկյան կետերի տվյալ նույնացումները ներկայացնել որպես համարժեքության հարաբերության դասեր: Ընթերցողին առաջարկում ենք ցույց տալ, որ գլանի ֆակտոր տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^3$-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:



Օրինակ 4: Նորից վերցնենք $ABCD$ ուղղանկյունը, բայց այս անգամ նույնացնենք AB և CD ուղղորդված հատվածների կետերը՝ պահպանելով դրանց ուղղությունները: A-ն C-ի հետ, B-ն D-ի հետ, E-ն E-ի հետ նույնացնել:

Ստացված ֆակտոր տարածությունը կոչվում է **Մյոբիուսի թերթ**: Այն [illegible]



Պարզաբանենք՝ ինչ է նշանակում միակողմանի մակերևույթ $\mathbb{R}^3$-ում: Սովորաբար դա ներկայացնում են այսպես. գլանը կամ սֆերան կարելի է ներկել երկու գույնով՝ դրսից մի գույնով (օրինակ՝ կարմիր), իսկ ներսից այլ գույնով (օրինակ՝ կապույտ): Մինչդեռ Մյոբիուսի թերթի դեպքում սկսելով այն ներկել ինչ-որ տեղից, ասենք կանաչ գույնով, անընդհատ շարժվելով մակերևույթով, կպարզվի, որ մակերևույթը թե՛ «ներսից» և թե՛ «դրսից» ներկվել է մի՝ կանաչ գույնով: Այսինքն՝ այս մակերևույթի համար իմաստ չունեն ներս, դուրս հասկացությունները, ուստի այն ունի մի երես (չնայած, որ յուրաքանչյուր կետի բավականաչափ փոքր շրջակայք ունի երկու երես, որոնք կարելի է ներկել տարբեր գույներով):

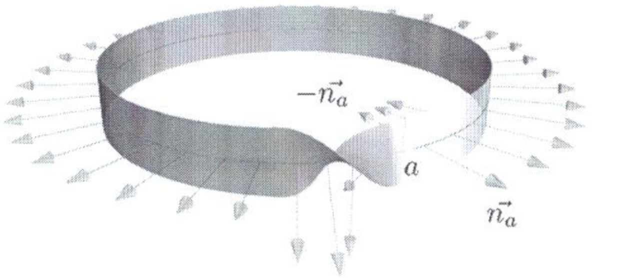
Սկզբունքորեն սա ընդունելի է, եթե մենք համարում ենք, որ մակերևույթն ունի **հաստություն**: Մինչդեռ մաթեմատիկայում մակերևույթները չունեն հաստություն և անիմաստ է երկու երես հասկացությունը:

Մյուս կողմից՝ եթե պատկերացնենք, որ դիտորդը կանգնած է մակերևույթի վրա, ապա նա կարող է հայտնվել մակերևույթի նկատմամբ կամ մի, կամ մյուս կողմում: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս ներմուծել միակողմանի կամ երկկողմանի մակերևույթ հասկացությունները:

Դիցուք մակերևույթի որևէ a կետում ընտրված է երկու նորմալ միավոր վեկտորներից մեկը՝ $\vec{n}_a$: Դիտարկենք մակերևույթի վրա a կետով անցնող որևէ օվալ և շարժվելով a կետից օվալի երկայնքով, անընդհատ տեղափոխենք $\vec{n}_a$ վեկտորն այնպես, որ այն շարունակ մնա ուղղահայաց մակերևույթին: Ապա a կետ վերադառնալիս հնարավոր է երկու դեպք՝ ա) նորմալ վեկտորը հայտնվում է նախկին դիրքում, բ) նորմալ վեկտորը փոխել է իր ուղղությունը (այսինքն համընկել է $-\vec{n}_a$ վեկտորի հետ): Եթե տեղի ունի ա)-ն բոլոր հնարավոր օվալների դեպքում, ապա ասում են, որ մակերևույթը **երկկողմանի մանկերևույթ** է, իսկ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի օվալ, որ տեղի ունի բ)-ն, ապա մակերևույթը կոչվում է **միակողմանի մակերևույթ**:

Նկատենք, որ մակերևույթի միակողմանի կամ երկկողմանի լինելը մակերևույթի ներքին հատկությունն է: Այն հետևանք է մակերևույթի ներդրումից $\mathbb{R}^3$-ում:

Մյոբիուսի թերթի դեպքում հետևյալ գծագիրը ցույց է տալիս, որ միջին գծի երկայնքով մի պտույտ կատարելիս մակերևույթի նորմալը փոխում է իր ուղղությունը, ուստի Մյոբիուսի թերթը միակողմանի մակերևույթ է:

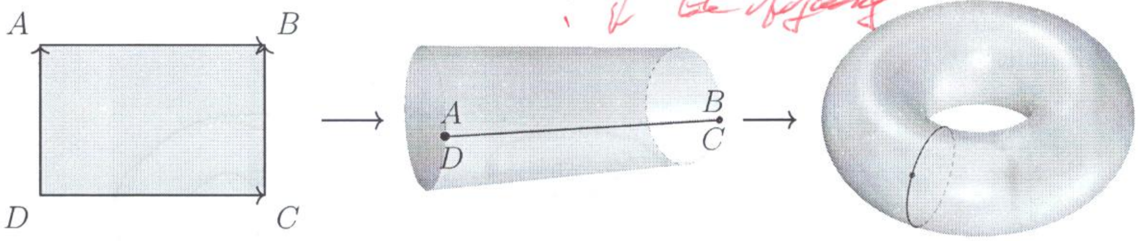


Նկատենք նաև, որ եթե որևէ մակերևույթ իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ, ապա այն միակողմանի մակերևույթ է:

Մի քանի կարևոր, առանց եզր մակերևույթներ ստացվում են ուղղանկյան կամ քառակուսու բոլոր կողմերի զույգ առ զույգ նույնացումներով:

Օրինակ 5: Նախ նույնացնելով $ABCD$ քառակուսու AB կողմը DC կողմի հետ և այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը պահպանելով նշված ուղղությունները, ստացվում է տոր:

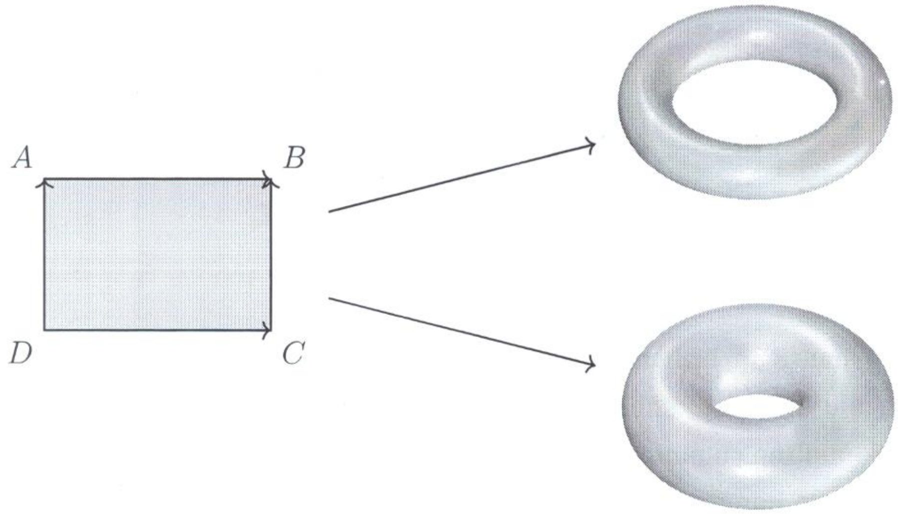
? [illegible]



Փորձեք ցույց տալ, որ այս դեպքում ևս տորի ֆակտոր տոպոլոգիան համընկնում է նրա վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի հետ:

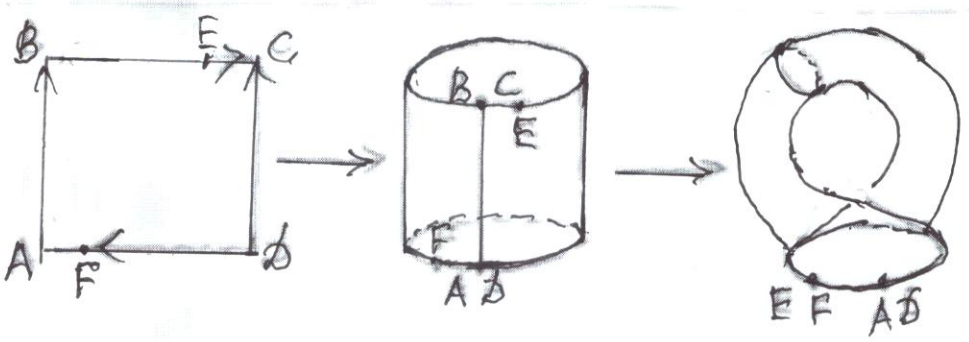
Նկատենք, որ տորը որպես ֆակտոր տարածություն կարող է ստացվել նաև $\mathbb{R}^2$ հարթությունից (տես թեմա 2-ում):

Դիտողություն: Տոր կարելի է ստանալ $ABCD$ ուղղանկյունուց փոխելով կողմերի նույնացումների հաջորդականությունը. նախ առանձնացնելով DA և CB կողմերը և ապա սոսնձել AB և DC կողմերը: Արդյունքում կստանանք տորի մեկ ուրիշ իրացում $\mathbb{R}^3$-ում:



Ընթերցողին առաջարկում ենք կառուցել կանոնական հոմեոմորֆիզմ դրանց միջև այնպես, որ մի իրացման զուգահեռականներն ու միջօրեականները փոխակերպվեն համապատասխանաբար մյուս իրացման միջօրեականների ու զուգահեռականների:

Օրինակ 6: Նորից դիտարկենք $ABCD$ ուղղանկյուն, բայց կողմերի այլ կողմնորոշումներով:



Նույնացնելով AB-ն DC-ի հետ, այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը ըստ նշված ուղղությունների, ստացվում է անեզր մակերևույթ, որը կոչվում է **Կլեյնի շիշ**: Այն իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ (հիմնավորել) և այդ պատճառով նույնպես միակողմանի մակերևույթ է: Կլեյնի շիշը հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների պատկերել եռաչափ տարածության մեջ: Առանց ինքնահատումների այն իրացվում է քառաչափ տարածությունում:

Օրինակ 7: Գոյություն ունի ուղղանկյան կողմերի զույգ առ զույգ նույնացման ևս մի եղանակ (տես գծագիրը). այժմ AB-ն նույնացվում է CD-ի հետ, իսկ BC-ն՝ DA-ի հետ: