Թեմա 11

Կապը արտապատկերման անընդհատության և հաջորդականությունների զուգամիտության միջև: Հոմեոմորֆիզմ, հոմեոմորֆ տարածություններ, տոպոլոգիական հատկություն: Բաց (փակ) արտապատկերումներ, հոմեոմորֆիզմի հայտանիշ բաց (փակ) արտապատկերումների տերմիններով:

Դիցուք ունենք X և Y բազմություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ամեն մի $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականության կարող ենք համադրել $\{y_n\} \subset Y$ հաջորդականության, որտեղ $y_n = f(x_n)$: Այս $\{f(x_n)\}$ հաջորդականությունը կոչվում է $\{x_n\}$ **հաջորդականության կերպար** f արտապատկերման դեպքում:

Այսուհետև պարզության համար $\lim\{x_n\}$ և $\lim\{f(x_n)\}$ նշանակումների փոխարեն կօգտագործենք $\lim x_n$ և $\lim f(x_n)$ գրառումները:

Թեորեմ 1: Եթե $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է $a \in X$ կետում, իսկ $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունը զուգամիտում է a կետին՝ $\lim x_n = a$, ապա նրա կերպար $\{f(x_n)\} \subset Y$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $f(a) \in Y$ կետին՝ $\lim f(x_n) =$ $f(\lim x_n) = f(a)$:

Ապացույց: Վերցնենք $f(a)$ կետի որևէ V շրջակայք: a կետում f-ի անընդհատությունից գոյություն ունի a կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Այն բանից, որ $\lim x_n = a$ գոյություն ունի n_0 թիվ, որ $x_n \in U$, երբ $n > n_0$: $f(x_n) \in V$, երբ $n > n_0$, $\lim f(x_n) = f(a)$: ■

Հակառակ պնդումը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ. գոյություն ունեն X և Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում, որ X-ում զուգամետ ամեն մի $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{f(x_n)\}$ կերպարը զուգամետ է Y-ում և $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, բայց f-ը անընդհատ չէ:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $(X, \text{հաշվ. լր.})$ և $(X, \text{դիսկր.})$ տարածությունները, որտեղ Դիցուք X-ը ոչ հաշվելի որևէ բազմություն է: Ինչպես գիտենք, այս տարածություններում զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները (տե՛ս օրինակ 1-ը թեմա 9-ում): Դիտարկենք $f : (X, \text{հաշվ. լր.}) \to (X, \text{դիսկր.})$ արտապատկերումը, որտեղ f-ը X-ի $\mathbb{1}_X$ նույնական արտապատկերումն է:

Պարզ է որ, եթե $\lim x_n = a$ ապա $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$

որ f-ը անընդհատ չէ X-ի և ոչ մի կետում: Իրոք, դիտարկելով $f(x_0) = x_0$ կետի $V = \{x_0\}$ շրջակայքը $(X, \text{դիսկր.})$-ում, տեսնում ենք, որ գոյություն ունի x_0 կետը պարունակող միակ՝ $U = \{x_0\}$ ենթաբազմություն, որ $f(U) \subset V$: Բայց այդ U-ն բաց չէ $(X, \text{հաշվ. լր.})$-ում, քանի որ $X \setminus U = X \setminus \{x_0\}$ ենթաբազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Այնուամենայնիվ, որոշ դեպքերում արտապատկերման անընդհատությունը կարող է նկարագրվել հաջորդականությունների զուգամիտության տերմիններով:

Թեորեմ 2: Դիցուք X, Y տոպոլոգիական տարածությունները և $f : X \to Y$ արտապատկերումն այնպիսին են, որ

ա) X-ում զուգամետ ամեն մի $\{x_n\}$ հաջորդականության համար $\{f(x_n)\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է Y-ում և $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$,

բ) X-ը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապա f-ը անընդհատ արտապատկերում է:

Ապացուցում: Ենթադրենք f-ը անընդհատ չէ X-ի ինչ-որ a կետում: Այդ կետի համար դիտարկենք շրջակայքերի որևէ $\{U_n\}$ հաշվելի բազա: Կարող ենք համարել, որ $U_{n+1} \subset U_n$ (տե՛ս լեմման թեմա 9-ում): Քանի որ f-ը անընդհատ չէ a կետում, գոյություն ունի $f(a)$ կետի V շրջակայք, որի համար գոյություն չունի a կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Մասնավորապես սա նշանակում է, որ ամեն մի U_n-ում գոյություն ունի $x_n \in U_n$ կետ, որ $f(x_n) \notin V$: Պարզ է, որ [illegible] $\{x_n\}$ [illegible] $\lim x_n = a$ սահման: Հետևաբար, համաձայն թեորեմի առաջին պայմանի գոյություն ունի նաև $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$ սահման: Բայց $\{f(x_n)\}$ հաջորդականության բոլոր կետերը դուրս են $f(a)$-ի V շրջակայքից (հակասություն): ■

[illegible] շնորհիվ հնարավոր է դառնում մաթ. [illegible] անալիզի դասընթացներում անընդհատության հետ կապված շատ ապացուցումներ փոխադրել հաջորդականությունների զուգամիտության լեզվով [illegible] հիմնավորումների:

Դիտողություն: [illegible] $\mathbb{R}^n$ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] $\mathbb{R}^2$ [illegible] թեորեմ 2-ի ......

Ինչպես գիտենք (տե՛ս թեմա 1-ում), ամեն մի փոխմիարժեք $f : X \to Y$ արտապատկերման համար գոյություն ունի նրան հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերում, ընդ որում $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$ և $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$: Այս դեպքում ասում են նաև, որ f արտապատկերումը հակադարձելի է: Բերենք հակադարձելիությանը համարժեք պայման (հայտանիշ)՝ $f : X \to Y$ արտապատկերումը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $g : Y \to X$ արտապատկերում, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$:

Իրոք, եթե f-ը հակադարձելի է, ապա որպես $g : Y \to X$ արտապատկերում կարելի է վերցնել f^{-1}-ը: Հակառակը. դիցուք f-ի համար $\exists g : Y \to X$, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ցույց տանք, որ f-ը փոխմիարժեք է: Ենթադրենք $f(x_1) = f(x_2)$: Ունենք՝ $x_1 = \mathbb{1}_X(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1))$, նման ձևով $x_2 = g(f(x_2))$, ուստի $x_1 = x_2$, այսինքն f-ը ինյեկտիվ է: Կամայական $y \in Y$ կետի համար ունենք՝ $y = \mathbb{1}_Y(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$: Նշանակելով $g(y) = x \in X$, ստանում ենք $f(x) = y$, այսինքն f-ը սյուրյեկտիվ է: Ուստի f-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է: ■

Այժմ պատրաստ ենք ներմուծել մի կարևորագույն հասկացություն: Ցանկացած հանրահաշվական կամ երկրաչափական տեսություն կառուցելիս, որի նպատակը քննարկվող օբյեկտների (լինեն դրանք խմբեր, օղակներ, գծ. տարածություններ, երկրաչափական պատկերներ և այլն) դասակարգումն է, հստակեցվում է հետևյալ հարցը. ե՞րբ են տվյալ տեսության մեջ ուսումնասիրվող երկու օբյեկտներ համարվում նույնը կամ նույնականացվող: Օրինակ՝ խմբերի տեսությունում երկու G_1 և G_2 խմբեր համարվում են նույնը, եթե նրանք իզոմորֆ են: Դա համարժեք է նրան, որ գոյություն ունենան $\varphi_1 : G_1 \to G_2$ և $\varphi_2 : G_2 \to G_1$ հոմոմորֆիզմներ այնպես, որ $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathbb{1}_{G_1}$ և $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathbb{1}_{G_2}$: Տոպոլոգիայում հոմոմորֆիզմների դերը կատարում են հոմեոմորֆիզմները: Այդ երկու անվանումները գրեթե համահնչուն են, բայց ունեն միանգամայն տարբեր իմաստ և գործածելիս պետք է չշփոթել:

Սահմանում: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ: Ապա $f : X \to Y$ հակադարձելի արտապատկերումը կոչվում է **հոմեոմորֆիզմ**, եթե f-ը և նրա հակադարձ $f^{-1} : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ են: Ասում են, նաև, որ X տարածությունը **հոմեոմորֆ** է Y տարածությանը, եթե գոյություն ունի որևէ $f : X \to Y$ հոմեոմորֆիզմ:

Սահմանումից հետևում է:

1) Ցանկացած X տոպոլոգիական տարածության համար $\mathbb{1}_X : X \to X$ նույնական արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է: Հետևաբար ամեն մի տոպոլոգիական տարածություն հոմեոմորֆ է ինքն իրեն:

2) Եթե f-ը հոմեոմորֆիզմ է, ապա f^{-1}-ը ևս հոմեոմորֆիզմ է: Ուստի, եթե X-ը հոմեոմորֆ է Y-ին, ապա իր հերթին Y-ը հոմեոմորֆ է X-ին:

Վերը շարադրվածից նաև հետևում է. X և Y տոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $f : X \to Y$ և $g : Y \to X$ անընդհատ արտապատկերումներ, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$:

Թեորեմ 3: Տոպոլոգիական տարածությունների հոմեոմորֆության հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է: Ապացուցման համար մնացել է ստուգել տրանզիտիվության (փոխանցականության) հատկությունը: Դիցուք X-ը հոմեոմորֆ է Y-ին և Y-ը հոմեոմորֆ է Z-ին: Նշանակում է գոյություն ունեն $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ հոմեոմորֆիզմներ: Պարզ է, որ $g \circ f : X \to Z$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է որպես փոխմիարժեք արտապատկերումների համադրույթ: Ուստի այն հակադարձելի է: Այն նաև անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: Բացի այդ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ Z-ից X արտապատկերումը անընդհատ է նույն հիմքով: Հետևաբար $g \circ f$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է: Ուստի X-ը հոմեոմորֆ է Z-ին: ■

Տոպոլոգիական տարածությունների համարժեքության (ըստ հոմեոմորֆության) ամեն մի դաս կոչվում է **տոպոլոգիական տիպ**: Ընդհանուր տոպոլոգիայում տվյալ տոպոլոգիական փիպը ներկայացնող բոլոր տարածությունները (միմյանց հոմեոմորֆ տարածությունները) համարվում են միատեսակ (նույնը):

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության որևէ հատկություն կոչվում է **տոպոլոգիական հատկություն** կամ **տոպոլոգիական ինվարիանտ**, եթե այդ հատկությամբ օժտված են միմյանց հոմեոմորֆ տվյալ պահին դիտարկվող բոլոր տոպոլոգիական տարածությունները:

[illegible] հետևում է, որ երկու տոպոլոգիական տարածություն հոմեոմորֆ չեն այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի տոպոլոգիական հատկություն, որով օժտված է այդ տարածություններից մեկը, բայց օժտված չէ մյուսը:

Ընդհանուր տոպոլոգիայի հիմնական խնդիրը կարելի է կարճ ձևակերպել այսպես. կառուցել տոպոլոգիական ինվարիանտների լրիվ համակարգ տվյալ պահին դիտարկվող բոլոր տոպոլոգիական տարածությունների համար:

Տոպոլոգիական հատկությունների օրինակներ են անջատելիության աքսիոմները, հաշվելիության I և II աքսիոմները, սեպարաբելությունը և այլն (հիմնավորե՛լ):

Հոմեոմորֆ (ոչ հոմեոմորֆ) տարածությունների օրինակներ, ինչպես նաև տոպոլոգիական այլ ինվարիանտների օրինակներ կբերենք հաջորդ թեմաներում: Իսկ հիմա, որպես օրինակ ցույց տանք, որ սեպարաբելությունը տոպոլոգիական հատկություն է: Այդ նպատակով նախ ապացուցենք:

Թեորեմ 4: Եթե X և Y տարածություններից X-ը սեպարաբել է և գոյություն ունի անընդհատ, սյուրյեկտիվ $f: X \to Y$ արտապատկերում, ապա Y-ը ևս սեպարաբել է:

Ապացուցում: Ըստ պայմանի X-ում գոյություն ունի հաշվելի, ամենուրեք խիտ $\{x_n\}$ ենթաբազմություն: Ապացուցենք, որ $\{f(x_n)\}$ հաշվելի ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է Y-ում: Դիտարկենք կամայական $V \subset Y$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $\{f(x_n)\} \cap V \neq \varnothing$ (դրանից կհետևի Y-ի սեպարաբելությունը ըստ թեմա 8-ում թեորեմ 4-ի): Քանի որ f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(V)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում: Այժմ X-ի սեպարաբելությունից հետևում է $\{x_n\} \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, և ուրեմն նաև $f(\{x_n\}) \cap f(f^{-1}(V)) \neq \varnothing$: Քանի որ $f(f^{-1}(V)) = V$ (հետևում է f-ի սյուրյեկտիվությունից՝ $f(X) = Y$), ~~ապա~~ $f(\{x_n\}) \cap V \neq \varnothing$: ■

Հետևանք թեորեմ 4-ից: Եթե միմյանց հոմեոմորֆ երկու տարածություններից մեկը սեպարաբել է, ապա մյուսը նույնպես սեպարաբել է: Իրոք, դիցուք X-ը սեպարաբել տարածություն է և հոմեոմորֆ է Y-ին: Ուստի գոյություն ունի $f: X \to Y$ հոմեոմորֆիզմ: Հոմեոմորֆիզմի վերը բերված սահմանումից մասնավորապես հետևում է, որ f-ը անընդհատ, սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և ուրեմն Y-ը սեպարաբել է համաձայն թեորեմ 4-ի:

Ինչպես գիտենք, եթե $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում Y-ում բաց բոլոր ենթաբազմությունների նախակերպարները բաց ենթաբազմություններ են X-ում, ապա f-ը անընդհատ է:

Իսկ ի՞նչ կարելի է ասել այն արտապատկերումների մասին, որոնք հակառակը՝ X-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում են Y-ում բաց ենթաբազմությունների: Հետևյալ հասարակ օրինակը ցույց է տալիս, որ այդպիսի արտապատկերումը կարող է անընդհատ չլինել: Դիտարկենք $f : (X, \text{անտ.}) \to (X, \text{դիսկր.})$ արտապատկերումը, որտեղ X-ը պարունակում է մեկից ավելի կետեր, իսկ f-ը X-ի նույնական արտապատկերումն է: Պարզ է, որ f-ը անընդհատ չէ (ինչո՞ւ), չնայած որ այն X-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է Y-ում բաց ենթաբազմությունների: Այնուամենայնիվ, նշված հատկության և անընդհատության համակցումը բերում է բաց (փակ) արտապատկերումներ հասկացություններին, որոնք օգտակար են և հարմար որոշ իրավիճակներում:

Սահմանում: $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը կոչվում է **բաց արտապատկերում**, եթե X-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության կերպարը բաց ենթաբազմություն է Y-ում:

Նման ձևով սահմանվում է փակ արտապատկերումը՝ նախորդ սահմանման մեջ ամենուրեք բաց բառը փոխարինելով փակ բառով:

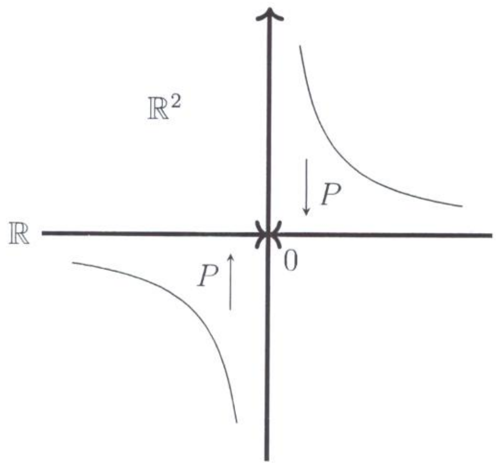
Նկատենք, որ վերը բերված օրինակում $\mathbb{1}_X : (X, \text{անտիղ.}) \to (X, \text{դիսկր.})$-ը և՛ բաց, և՛ փակ արտապատկերում է, իսկ $\mathbb{1}_X : (X, \text{դիսկր.}) \to (X, \text{անտիղ.})$ արտապատկերումը ոչ բաց և ոչ էլ փակ արտապատկերում է:

Օրինակ 2: Հետևյալ $C : (\mathbb{R}, \text{սովոր.}) \to (\mathbb{R}, \text{սովոր.}),\ C(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ հաստատուն արտապատկերումը 0 կետի վրա, փակ արտապատկերում է, բայց բաց արտապատկերում չէ (հետևում է նրանից, որ $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունը փակ, բայց ոչ բաց ենթաբազմություն է):

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ P(x_1, x_2) = x_1$ պրոյեկցիան բաց, բայց ոչ փակ արտապատկերում է: Իրոք, $\mathbb{R}^2$-ի մետրի տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում բոլոր անեզր շրջանները, իսկ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ի համար՝ բոլոր անեզր (a, b) ինտերվալները:

Քանի որ անեզր շրջանի պրոյեկցիան անեզր ինտերվալ է, ուստի P-ն $\mathbb{R}^2$-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է $\mathbb{R}$-ում բաց ենթաբազմությունների: Բացի այդ, P-ն անընդհատ է, քանի որ $P^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \times (a, b)$ ենթաբազմությունները բաց են $\mathbb{R}^2$-ում: Այսպիսով P-ն բաց արտապատկերում է: Ցույց տանք, որ P-ն փակ արտապատկերում չէ:

Դիտարկենք $A = \left\{ \left(x; \dfrac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ ենթաբազմությունը $\mathbb{R}^2$-ում ($y = \dfrac{1}{x}$ հիպերբոլի գրաֆիկը): Այն փակ ենթաբազմություն է, քանի որ $\mathbb{R}^2 \setminus A$ լրացումը բաց է (հիմնավորե՛լ): Բայց նրա $P(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ կերպարը փակ չէ $\mathbb{R}$-ում (ինչո՞ւ): Ուստի՝ P-ն փակ արտապատկերում չէ: ■



Ինչպես գիտենք, եթե $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներն անընդհատ են, ապա նրանց $g \circ f : Y \to Z$ համադրույթը անընդհատ է: Քննարկենք հակառակ խնդիրը. դիցուք հայտնի է, որ $g \circ f$ համադրույթը անընդհատ է, և անընդհատ է f, g արտապատկերումներից մեկը: Կլինի՞ անընդհատ մյուսը: Հետևյալ օրինակները ցույց են տալիս, որ ընդհանուր դեպքում հարցի պատասխանը բացասական է:

Օրինակ 4: Դիտարկենք որևէ $f : X \to Y$ ոչ անընդհատ արտապատկերում և $g : Y \to \mathbb{R}$, $g(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$ հաստատուն արտապատկերումը: Պարզ է, որ $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ համադրույթը նույնպես հաստատուն արտապատկերում է, և հետևաբար այն անընդհատ է: Այսպիսով՝ $g \circ f$ –ը և g-ն անընդհատ են, բայց f-ը անընդհատ չէ:

Ընթերցողին առաջարկում ենք բերել նման օրինակ, երբ անընդհատ են $f : X \to Y$ և $f \circ g : X \to Z$ արտապատկերումները, բայց անընդհատ չէ $g : Y \to Z$ արտապատկերումը:

Հետևյալ երկու հատուկ դեպքերում f, g արտապատկերումներից մեկի և նրանց $g \circ f$ համադրույթի անընդհատությունից հետևում է նաև մյուսի անընդհատությունը:

Թեորեմ 5: Ունենք $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումներ, ընդ որում $g \circ f$-ը անընդհատ է.

ա) եթե g-ն ինյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա f-ը անընդհատ է,

բ) եթե f-ը սյուրյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա g-ն անընդհատ է:

Ապացուցենք ա)-ն: Դիցուք $V \subset Y$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում, ցույց տանք, որ $f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում: Ըստ պայմանի $g(V)$-ն բաց է Z-ում: Հետևաբար $(g \circ f)^{-1}(g(V))$-ն բաց է X-ում: Ունենք՝ $(g \circ f)^{-1}(g(V)) = f^{-1}(g^{-1}(g(V)) = f^{-1}(V) \Rightarrow$ $f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում $\Rightarrow$ f-ը անընդհատ է: ■

Նման ձևով ապացուցվում է բ)-ն՝ թողնելով [illegible] ընթերցողին:

Բերենք նաև հոմեոմորֆիզմի հայտանիշ բաց (փակ) արտապատկերումների տերմիններով:

[illegible]

Թեորեմ 6: Որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում հոմեոմորֆիզմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը բաց (կամ փակ) բիյեկտիվ արտապատկերում է:

Ապացուցում: Դիցուք f-ը հոմեոմորֆիզմ է: Նշանակում է f-ը անընդհատ է, փոխմիարժեք է և նրա $g : Y \to X$ հակադարձ արտապատկերումը նույնպես անընդհատ է: Եթե ~~այժմ~~ U-ն որևէ բաց ենթաբազմություն է X-ում, ապա f-ի բիյեկտիվությունից և g-ի անընդհատությունից հետևում է, որ $f(U) = g^{-1}(U)$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում, ուստի f-ը բաց արտապատկերում է: f-ի բիյեկտիվությունից հետևում է, որ f-ը նաև փակ արտապատկերում է:

Այժմ հակառակը. դիցուք f-ը բաց, բիյեկտիվ արտապատկերում է: Նշանակում է f-ը անընդհատ է և գոյություն ունի նրա հակադարձ $g : Y \to X$ արտապատկերում: Մնում է ցույց տալ, որ g արտապատկերումը անընդհատ է: Եթե U-ն որևէ բաց ենթաբազմություն է X-ում, ապա $g^{-1}(U) = f(U)$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում ըստ պայմանի: Ուստի g-ն անընդհատ է ըստ թեմա 10-ում թեորեմ 3-ի: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 11-ի վերաբերյալ:

11.1. Դիցուք տրված է կամայական $f:X\to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. ամեն մի $x_0\in X$ կետի յուրաքանչյուր U շրջակայքի $f(U)$ պատկերը շրջակայք է $f(x_0)\in Y$ կետի համար:

Ցուցում: Դիտարկել որևէ $f:X\to Y$ հաստատուն արտապատկերում, որտեղ Y-ը օժտված է անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով և պարունակում է մեկից ավելի կետեր:

11.2. Դիցուք X բազմության վրա տրված են երկու τ և σ տոպոլոգիաներ: Ապացուցել, $X\to X$ նույնական արտապատկերումը (X,τ) և (X,σ) տոպոլոգիական տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ τ-ն և σ-ն նույնն են:

11.3. Դիցուք $f:X\to Y$ արտապատկերումը (X,σ) և (Y,τ) տոպոլոգիական տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է: Ապացուցել, եթե որևէ $U\subset X$ ենթաբազմություն շրջակայք է որևէ $x_0\in X$ կետի համար, ապա $f(U)\subset Y$ ենթաբազմությունը շրջակայք է $f(x_0)$ կետի համար:

11.4. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. վերջավոր թվով կետերից կազմված տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում կետերի թվի հավասարությունը տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

11.5. Բերել անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից որևէ մեկը և ապացուցել, որ այն տոպոլոգիական հատկություն է:

11.6. Բերել տոպոլոգիական տարածությունների որևէ $f:X\to Y$ անընդհատ, բայց ոչ բաց արտապատկերման օրինակ:

Ցուցում: Դիտարկել R թվային ուղղի և R^2 կարթեզյան հարթության համապատասխան սովորական (էվկլիդյան) մետրիկներով ծնված տոպոլոգիաները: Ապացուցել, որ $f:R\to R^2$, $f(x)=(x,0)$, $x\in R$ արտապատկերումը անընդհատ, բայց ոչ բաց արտապատկերում է:

11.7 Դիցուք $f:X\to Y$ և $g:Y\to Z$ արտապատկերումներ են, ընդ որում $g\circ f:X\to Z$ համադրությունը անընդհատ է: Ապացուցել, եթե f-ը սյուրյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա g-ն անընդհատ արտապատկերում է:

11.8. Ճի՞շտ է արդյոք, որ թվային ուղղի $R\to R$ նույնական արտապատկերումը որոշված է տոպոլոգիական տարածությունների

$(\mathbb{R}, \leftarrow\!\!|) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mapsto)$ հոմեոմորֆիզմ, որտեղ $\leftarrow\!\!|$ և $\mapsto$ այն նշանները ընդգծում ձախից կիսաբաց և աջից կիսափակ ինտերվալների թոպոլոգիաներն են:

11.9 Ապացուցել՝ $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}, \leftarrow\!\!|)$ թոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ են:

Ցուցում: Դիտարկել $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x$ արտապատկերումը և օգտվել թեորեմ 6-ից:

11.10. Ճիշտ՞ է արդյոք, որ $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}$, սովոր.$)$ տարածությունները հոմեոմորֆ են:

Ցուցում: Ապացուցել, որ $[a, b)$ տեսքի ենթաբազմությունները միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություններ են $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում, և օգտվել թեորեմ 6-ից: