Թեմա 17

Կոմպակտ տարածություն, կոմպակտ ենթաբազմություն, օրինակներ: Թեորեմ տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալի կոմպակտության մասին: Թեորեմ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածության կոմպակտ ենթաբազմությունների մասին:

Վերհիշենք ծածկույթ և ենթածածկույթ հասկացությունները: Եթե $A \subset X$, ապա A ենթաբազմության ծածկույթ կոչվում է X-ի որոշ ենթաբազմություններից կազմված այնպիսի $\{U_i,\ i \in I\}$ ընտանիքը, որ $A \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ծածկույթը կոչվում է վերջավոր ծածկույթ, եթե I-ն վերջավոր բազմություն է:

Եթե $\{V_j,\ j \in J\}$ նույնպես A-ի ծածկույթ է և $\forall\, j \in J$ ինդեքսի համար գոյություն ունի $i \in I$ ինդեքս այնպես, որ $V_j = U_i$, ապա $\{V_j,\ j \in J\}$ ծածկույթը կոչվում է $\{U_i,\ i \in I\}$ ծածկույթի ենթածածկույթ:

A ենթաբազմության ծածկույթը կոչվում է բաց ծածկույթ, եթե բոլոր U_i-երը բաց ենթաբազմություններ են X-ում:

Սահմանում: X-ի A ենթաբազմությունը կոչվում է **կոմպակտ ենթաբազմություն**, եթե նրա կամայական բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի նրա վերջավոր ենթածածկույթ (հաճախ ասում են նաև, A-ի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել A-ի վերջավոր ենթածածկույթ):

Մասնավորապես X-ը կոչվում է **կոմպակտ տարածություն**, եթե նրա կամայական $\{U_i,\ i \in I\},\ X = \bigcup\limits_i U_i$ բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի նրա վերջավոր $\{V_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ ենթածածկույթ:

Օրինակ 1: X բազմությունը անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով կոմպակտ տարածություն է, իսկ X-ը դիսկրետ տոպոլոգիայով կոմպակտ տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը վերջավոր բազմություն է (ինչո՞ւ):

Օրինակ 2: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը սովորական մետրիկ էվկլիդյան տոպոլոգիայով կոմպակտ չէ; ~~քանի որ~~ որից ℝ-ի $\{(n, n+2),\ n \in \mathbb{Z}\}$ բաց ծածկույթից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

բերել 5ը 123-ից

Թեորեմ 1: $A \subset X$ ենթաբազմությունը կոմպակտ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն կոմպակտ տարածություն է X-ից A-ի վրա մակածված տոպոլոգիայով:

Ապացուցումը հեշտությամբ անմիջական հետևությունը. եթե $\{U_i,\ i \in I\}$-ն բաց ծածկույթ է A ենթաբազմության համար, ապա $\{U_i \cap A,\ i \in I\}$ ընտանիքը բաց ծածկույթ է A ենթատարածության համար:

Թեորեմ 2: ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում թվային ուղղի $[a, b]$ փակ հատվածը կոմպակտ տարածություն է:

Որպես օրինակ դիտարկենք վերը քննարկված $\mathbb{R}^2$-ի $C = A \cup B$ ենթաբազմության B գծորեն կապակցված ենթաբազմությունը: Նրա $\overline{B} = C$ փակումը գծորեն կապակցված չէ:

Այժմ բերենք մի բավարար պայման, որի դեպքում փարածության կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են:

Թեորեմ 8: Դիցուք X փարածության յուրաքանչյուր կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կապակցված փարածություն է, դիտարկենք նրա գծային կապակցվածության որևէ U բաղադրիչ (այդպիսին գոյություն ունի շնորհիվ Հ1 հատկության): Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\forall x \in U$ կետի համար գոյություն ունի x-ի V գծորեն կապակցված շրջակայք: Թեորեմ 3-ից հետևում է, որ $V \cup U$-ն X-ի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն է, ուստի $V \subset U$: Այսպիսով U-ն շրջակայք է իր կամայական կետի համար $\Rightarrow U$-ն X-ի բաց ենթաբազմություն է: Ըստ Հ2-ի՝ $X \setminus U$-ն X-ի մյուս բոլոր գծային կապակցվածության բաղադրիչների միավորումն է: Ուստի $X \setminus U$-ն բաց ենթաբազմություն է որպես բաց ենթաբազմությունների միավորում: Քանի որ U-ն և $(X \setminus U)$-ն բաց են, նրանք նաև փակ ենթաբազմություններ են: Այսպիսով U-ն X կապակցված փարածության ոչ դատարկ, բաց և փակ ենթաբազմություն է $\Rightarrow X = U \Rightarrow X$-ը գծորեն կապակցված է: ■

Հակառակ պնդումը հետևում է թեորեմ 6-ից:

Թեորեմ 8-ից ստանում ենք:

Հետևանք 3: Եթե X փարածության ամեն մի կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք, ապա նրա ամեն մի գծային կապակցվածության բաղադրիչ X-ի բաց ենթաբազմություն է:

Հետևանք 4: Էվկլիդյան $\mathbb{R}^2$ փարածության բաց ենթաբազմությունների համար կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են (հիմնավորել): V

Ապացուցում: Դիցուք $S = \{U_i \mid U_i \subset \mathbb{R}, i \in I\}$ ընտանիքը $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության բաց ծածկույթ է՝ $[a,b] \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ենթադրենք $[a,b]$-ն կոմպակտ չէ: Նշանակում է $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ հատվածներից որևէ մեկը հնարավոր չէ ծածկել S-ի որևէ վերջավոր ենթածածկույթով: Նշանակենք այդ հատվածը $[a_1, b_1]$: Նույն դատողությամբ $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ հատվածներից գոնե մեկը հնարավոր չէ ծածկել S-ի վերջավոր ենթածածկույթով: Նշանակենք այդ հատվածը $[a_2, b_2]$ և այդպես շարունակ: Ստանում ենք ներդրված հատվածների $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ հաջորդականություն, և $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$:

Քանի որ $a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n < b_m$ ցանկացած n-ի և փչյալ m-ի դեպքում, ուստի գոյություն ունի $\sup\{a_i\} = \bar{a}$, և քանի որ $\bar{a} \le b_m$ ցանկացած m-ի դեպքում, ուստի գոյություն ունի $\inf\{b_i\} = \bar{b}$: [illegible] $\bar{a} \le \bar{b}$:

Ունենք՝ $a_n \le \bar{a} \le \bar{b} \le b_n$, և $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ ցանկացած n-ի դեպքում, հետևաբար $\bar{a} = \bar{b}$:

[illegible] $[a,b] \subset \bigcup\limits_i U_i$ [illegible] գոյություն ունի այնպիսի $U_i \in S$, որ $\bar{a} \in U_i$ և այնպիսի $\varepsilon > 0$, որ $(\bar{a}-\varepsilon, \bar{a}+\varepsilon) \subset U_i$: Ընտրենք N բնական թիվ այնպես, որ $\dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$, և ուրեմն $b_N - a_N < \varepsilon$: Քանի որ $\bar{a} \in [a_N, b_N]$, ուստի $\bar{a} - a_N < \dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$ և $b_N - \bar{a} < \dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$: Հետևաբար $[a_N, b_N] \subset (\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon) \subset U_i$, որը հակասում է նրան, որ $[a_N, b_N]$-ը հնարավոր չէ ծածկել S-ի որևէ վերջավոր ենթածածկույթով: ■

Թեորեմ 3: Կոմպակտ տարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում կոմպակտ տարածություն է:

Ապացուցում: Ունենք X կոմպակտ տարածություն, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում և $f(X) = Y$: Եթե $S = \{U_i, i \in I\}$ ընտանիքը Y-ի որևէ բաց ծածկույթ է, ապա $T = \{f^{-1}(U_i), i \in I\}$ ընտանիքը X-ի բաց ծածկույթ է: Ըստ պայմանի գոյություն ունի T-ի $f^{-1}(U_{i_1})$, $f^{-1}(U_{i_2}), \ldots, f^{-1}(U_{i_n})$ վերջավոր ենթածածկույթ՝ $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$:

Ունենք՝ $Y = f(X) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_k})) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$, ուստի Y-ը կոմպակտ տարածություն է: ■

Հետևանք 5: Եթե A-ն X տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում է, ապա $f(A)$-ն Y տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է:

Հետևանք 6: Կոմպակտությունը տոպոլոգիական հատկություն է (ինչո՞ւ, [illegible]):

Հետևանք 7: Եթե X-ը կոմպակտ տարածություն է, ապա նրա ցանկացած $X/\sim$ ֆակտոր-տարածությունը նույնպես կոմպակտ տարածություն է (ինչո՞ւ):

Սրանից հետևում է, որ շրջանագիծը, տորը, Կլեյնի շիշը, պրոյեկտիվ հարթությունը կոմպակտ տարածություններ են([illegible] 13-[illegible]):

Թեորեմ 4: Կոմպակտ տարածության $\forall$ փակ ենթաբազմություն կոմպակտ ենթա-բազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կոմպակտ է, իսկ A-ն X-ի փակ ենթաբազմություն է: Դիցուք $S = \{U_i,\ i \in I\}$-ն A-ի բաց ծածկույթ է, $A \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ապա U_i, $i \in I$ և $X \setminus A$ ենթաբազմություններով կազմված ընտանիքը X-ի բաց ծածկույթ է: Քանի որ X-ը կոմպակտ է, գոյություն ունի այդ ծածկույթի վերջավոր ենթածածկույթ այնպես, որ կամ $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n}$ կամ $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n} \cup (X \setminus A)$: Ակնհայտ է, որ երկու դեպքում էլ $A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n}$, ուստի A-ն կոմպակտ ենթաբազմություն է: ■

Թեորեմ 5: Հաուսդորֆյան տարածության ցանկացած կոմպակտ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը հաուսդորֆյան տարածություն է և $A \subset X$ կոմպակտ ենթաբազմություն է: Սևեռենք $x_0 \in X \setminus A$ կետ: Ըստ պայմանի x_0-ի և ցանկացած $a \in A$ կետի համար (նկատենք, որ $x_0 \neq a$) գոյություն ունեն չհատվող U_a և V_a բաց շրջակայքեր այնպես, որ $x_0 \in U_a$, $a \in V_a$: Քանի որ $A \subset \bigcup\limits_a V_a$, գոյություն ունի A-ի $\{V_a,\ a \in A\}$ ծածկույթի վերջավոր $V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_n}$ ենթածածկույթ: Դիտարկենք x_0-ի $U(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$ բաց շրջակայքը: Քանի որ $U(x_0) \cap V_{a_i} = \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots, n$, ուստի՝ $U(x_0) \subset (X \setminus A)$: Այսպիսով $(X \setminus A)$-ն շրջակայք է իր կամայական x_0 կետի համար, ուրեմն $(X \setminus A)$-ն բաց ենթաբազմություն է, ուստի A-ն փակ ենթաբազմություն է: ■

Թեորեմ 6: Մետրիկական տարածության ցանկացած կոմպակտ ենթաբազմություն սահմանափակ ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք A-ն (X, ρ) մետրիկական տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է: Ցույց տանք, որ A-ն կարելի է ներառնել որևէ գնդի մեջ: Ամեն մի $a \in A$ կետի համար ընտրենք a կենտրոնով որևէ $\mathcal{D}(a, r)$ բաց գունդ: Պարզ է, որ $A \subset \bigcup\limits_a \mathcal{D}(a, r)$, և քանի որ A-ն կոմպակտ է, գոյություն ունի $\{\mathcal{D}(a, r),\ a \in A\}$ ծածկույթի վերջավոր $\mathcal{D}(a_1, r_1), \mathcal{D}(a_2, r_2), \ldots, \mathcal{D}(a_n, r_n)$ ենթածածկույթ, որ $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i, r_i)$: Նշանակենք $r' = \max \rho(a_i, a_j)$, $r'' = \max(r_i)$, $r = \max(r', r'')$ և ցույց տանք, որ $A \subset \mathcal{D}(a_1, 2r)$: Իրոք, եթե $a \in A$ կամայական կետ է, ապա գոյություն ունի $\mathcal{D}(a_k, r_k)$ գունդ, որ $a \in \mathcal{D}(a_k, r_k)$: Պարզ է, որ $\rho(a, a_1) \leq \rho(a_k, a) + \rho(a_k, a_1) < r_k + r' \leq r'' + r' \leq 2r$, ուստի $a \in \mathcal{D}(a_1, 2r)$: ■

Թեորեմ 7: Տոպոլոգիական տարածությունների $X \times Y$ արտադրյալը կոմպակտ տարածու-թյուն է այն և միայն դեպքում, երբ կոմպակտ են X-ը և Y-ը:

Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք $X \times Y$-ը կոմպակտ տարածություն է: Դիտարկենք $P_X : X \times Y \to X$ կանոնական պրոյեկցիան: Քանի որ P_X-ը անընդհատ է, $P_X(X \times Y) = X$, ուստի X-ը կոմպակտ է ըստ ~~թեորեմ 3-ի~~ թեորեմ 3-ի: Նույն ձևով Y-ը ևս կոմպակտ տարածություն է:

Պայմանի բավարարության ապացուցումը կատարենք երկու քայլով:

1. Դիցուք X-ը և Y-ը կոմպակտ են և $W = \{U_i \times V_i,\, i \in I\}$ ընտանիքը $X \times Y$-ի որևէ բաց ծածկույթ է (այստեղ U_i-ները բաց են X-ում, իսկ V_i-ները բաց են Y-ում): Ցույց տանք, որ W ծածկույթից կարելի է անջատել $X \times Y$-ի վերջավոր ենթածածկույթ: Սևեռենք որևէ $x_0 \in X$ կետ և դիտարկենք W-ի այն բոլոր $U_j(x_0) \times V_j(x_0)$, $j \in J$ տարրերը, որ $x_0 \in U_j(x_0)$ (այստեղ J-ն ինդեքսների I բազմության ենթաբազմություն է և յուրաքանչյուր $U_j\,(x_0) \times V_j(x_0)$ ենթաբազմություն W-ի որևէ տարր է):

Դիտարկենք W ընտանիքի $W(x_0) = \{U_j(x_0) \times V_j(x_0),\, j \in J\}$ ենթաընտանիքը: Պարզ է, որ $X \times Y$-ի յուրաքանչյուր (x_0, y) կետ պատկանում է $W(x_0)$-ի որևէ տարրի (հակառակ դեպքում կունենանք $(x_0, y) \notin W$): Ուստի $W(x_0)$-ն $\{x_0\} \times Y$ ենթաբազմության բաց ծածկույթ է: Քանի որ $\{x_0\} \times Y$-ը $X \times Y$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է (հետևում է Y-ի կոմպակտությունից և թեմա 14-ի թեորեմ 6-ից), ուստի նրա $W(x_0)$ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Վերահամարակալենք այդ ենթածածկույթը՝

$$U_1(x_0) \times V_1(x_0), U_2(x_0) \times V_2(x_0), \ldots, U_{n(x_0)}(x_0) \times V_{n(x_0)}(x_0)$$

տեսքով, որտեղ $n(x_0)$ թիվը որոշվում է x_0 կետով:

Այժմ դիտարկենք X-ի $U(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n(x_0)} U_i(x_0)$ բաց ենթաբազմությունը: Պարզ է, որ $x_0 \in U(x_0)$: Ստացանք X-ի $\{U(x),\, x \in X\}$ բաց ծածկույթ: Քանի որ X-ը կոմպակտ է, նրա $\{U(x),\, x \in X\}$ բաց ծածկույթից կարելի է անջատել X-ի վերջավոր $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_m)$ ենթածածկույթ: Արդյունքում ունենք հետևյալ բաց ենթածածկույթները, որտեղ

1) $U_1(x_1) \times V_1(x_1),\ U_2(x_1) \times V_2(x_1),\ \ldots,\ U_{n(x_1)}(x_1) \times V_{n(x_1)}(x_1)$ ընտանիքը ծածկույթ է $U(x_1) \times Y$-ի համար,

2) $U_1(x_2) \times V_1(x_2),\ U_2(x_2) \times V_2(x_2),\ \ldots,\ U_{n(x_2)}(x_2) \times V_{n(x_2)}(x_2)$ ընտանիքը ծածկույթ է $U(x_2) \times Y$-ի համար,

... ...

m) $U_1(x_m) \times V_1(x_m),\ U_2(x_m) \times V_2(x_m),\ \ldots,\ U_{n(x_m)}(x_m) \times V_{n(x_m)}(x_m)$ ընտանիքը ծածկույթ է $U(x_m) \times Y$-ի համար (հիշեցնենք, որ յուրաքանչյուր $n(x_i)$-ն բնական թիվ է, որոշված փսյալ x_i կետի համար):

V Հետևաբար թվարկվածները կազմում են X×Y-ի W ծածկույթի վերջավոր ենթածածկույթ!

2. Դիցուք այժմ ունենք $X \times Y$-ի կամայական $W = \{W_i,\, i \in I\}$ բաց ծածկույթ:

V Ըստ $X \times Y$ ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայի սահմանման գոյություն ունի $W_i = \bigcup\limits_{k \in K} (U_{i,k} \times V_{i,k})$ [illegible]

կամ, որտեղ $U_{i,k}$-ները բաց են X-ում, իսկ $V_{i,k}$-ները բաց են Y-ում (այստեղ K-ն ինդեքսների բազմություն է որոշված փսյալ i ինդեքսի համար՝ $K = K(i)$):

Պարզ է, որ $\{U_{i,k} \times V_{i,k},\, i \in I,\, k \in K(i)\}$ ընտանիքը նույնպես $X \times Y$-ի բաց ծածկույթ է: Ըստ նախորդ 1. դեպքի՝ այդ ծածկույթից կարելի է անջատել $X \times Y$-ի վերջավոր ենթածածկույթ:

Դիցուք այն (վերահամարակալումից հետո) կազմված է $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2, \dots,$ $U_p \times V_p$ փարրերից: Այժմ յուրաքանչյուր $U_s \times V_s$, $s = 1, 2, \dots, p$ փարրի համար ընտրենք W ծածկույթի մի այնպիսի W_s փարր, որ $U_s \times V_s$-ը $W_s = \bigcup\limits_{k \in K} (U_{i,k} \times V_{i,k})$ միավորման բաղադրիչ, կսփանանք $X \times Y$-ի W ծածկույթի վերջավոր ենթածածկույթ: $W_1, W_2, \dots, W_p$

Թեորեմ 7-ն ընդհանրացվում է ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) թվով $X_1, X_2, \dots, X_n$ փարածությունների և նրանց $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ արտադրյալի դեպքում՝ $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ արտադրյալը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ կոմպակտ են բոլոր X_i արտադրիչները: Այստեղից և թեորեմ 2-ից ստանում ենք:

Հետևանք: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ արտադրյալը, որտեղ $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, կոմպակտ է որպես $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n}$ էվկլիդյան փարածության ենթաբազմություն: Կոմպակտ է նաև $\underbrace{S^K \times S^K \times \dots \times S^K}_{n}$ փարածությունը (S^K-ն $\mathbb{R}^{k+1}$-ում միավոր սֆերան է) որպես $\mathbb{R}^{nk+n} = \underbrace{\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k+1}}_{n}$ էվկլիդյան փարածության ենթաբազմություն:

Թեորեմ 8: Էվկլիդյան $\mathbb{R}^n$ փարածության M ենթաբազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փակ է և սահմանափակ $\mathbb{R}^n$-ում:

Ապացուցում: Եթե M-ը կոմպակտ է, ապա այն սահմանափակ է $\mathbb{R}^n$-ում ըստ թեորեմ 6-ի, և $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմություն է ըստ թեորեմ 5-ի: Այժմ հակառակը. դիցուք M-ը փակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում: Սահմանափակությունից հետևում է, որ գոյություն ունի n-չափականության $N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ուղղանկյունանիստ, որ $M \subset N$: Քանի որ M-ը և N-ը փակ են R^n-ում և $M \subset N$, ուստի M-ը փակ է նաև N-ում (ըստ թեորեմ 1-ի նմանակի թեմա 12-ում): Վերջապես, քանի որ N-ը կոմպակտ է ըստ թեորեմ 7-ի հետևանքի, ուստի M-ը նույնպես կոմպակտ է ըստ թեորեմ 4-ի: ■

Թեորեմ 9 ( ): Կոմպակտ փարածության վրա սահմանված անընդհատ թվային ֆունկցիան սահմանափակ է և ընդունում է մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կոմպակտ տոպ. փարածություն է և $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումն անընդհատ է: Քանի որ $f(X)$-ը, ըստ թեորեմ 3-ի, $\mathbb{R}$ թվային ուղղի կոմպակտ ենթաբազմություն է, ուստի այն փակ և սահմանափակ է համաձայն թեորեմ 8-ի: Դիտարկենք $\inf(f(X))$ և $\sup\ (f(X))$ կետերը $\mathbb{R}$-ում: Որպես $f(X)$ փակ ենթաբազմության հպման կետեր՝ դրանք պատկանում են $f(X)$-ին: Հետևաբար գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in X$ կետեր, որ $f(x_1) = \inf(f(X))$ և $f(x_2) = \sup(f(X))$: ■

Սահմանում: Դիցուք X-ը և Y-ը մետրիկական տարածություններ են համապատասխանաբար ρ_1 և ρ_2 մետրիկներով, և տրված $f: X \to Y$ արտապատկերում: Ասում ենք f-ը կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ արտապատկերում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, որ ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում եթե $\rho(x_1,x_2)<\delta$, ապա $\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$:

Պարզ է, որ ցանկացած հավասարաչափ անընդհատ արտապատկերում անընդհատ արտապատկերում է: Հակառակը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ (հիմնավորել օրինակով):

Թեորեմ 10: Եթե (X,ρ_1), (Y,ρ_2) մետրիկական տարածություններից X-ը կոմպակտ տարածություն է, ապա ցանկացած $f: X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացույց: Դիցուք $\varepsilon>0$ թիվը ամրագրված է: Ցանկացած $x\in X$ կետի համար գոյություն ունի $\delta(x)>0$ թիվ, որ եթե $x'\in X$ և $\rho_1(x',x)<2\delta(x)$, ապա $\rho_2(f(x'),f(x))<\varepsilon/2$: Պարզ է, որ x կենտրոնով և $\delta(x)$ շառավղով $D(x;\delta(x))=\{x';\ \rho_1(x',x)<\delta(x)\}$ գնդերի $\{D(x,\delta(x));\ x\in X\}$ ընտանիքը կազմում է X տարածության բաց ծածկույթ: Քանի որ X-ը կոմպակտ է, գոյություն ունի այդ ծածկույթի $D(x_1,\delta(x_1)), D(x_2,\delta(x_2)), \dots, D(x_n,\delta(x_n))$ վերջավոր ենթածածկույթ: Նշանակենք $\delta=\min\{\delta(x_1),\delta(x_2),\dots,\delta(x_n)\}$: Պարզ է, որ եթե $x,y\in X$ և $\rho_1(x,y)<\delta$, ապա $x\in D(x_i,\delta(x_i))$ ինչ-որ i $(1\le i\le n)$ ինդեքսի դեպքում: Այնուհետև, քանի որ

$$\rho_1(y,x_i)\le \rho_1(y,x)+\rho_1(x,x_i)<\delta+\delta(x_i)\le 2\delta(x_i)$$

ուստի $\rho_2(f(y),f(x_i))<\varepsilon/2$: Հետևաբար կստանանք՝

$$\rho_2(f(x),f(y))\le \rho_2(f(x),f(x_i))+\rho_2(f(x_i),f(y))<\varepsilon: \blacksquare$$

Ընդհանուր տոպոլոգիայում և նրա կիրառություններում որոշակի դեր են կատարում կոմպակտության, լոկալ կոմպակտության հասկացությունները: Այժմ դիտարկենք մի շարք հատկություններ, որոնք կոմպակտության ընդհանրացումներ են՝ հաշվելի-կոմպակտ, սեկվենցիալ կոմպակտ, լոկալ կոմպակտ, պարակոմպակտ տարածություններ: Դիտարկենք դրանցից մի քանիսը, որոնք 8-րդ մեջ կապված են կոմպակտ տարածության հատկությունների հետ:

Սահմանում: Տարածությունը կոչվում է հաշվելի-կոմպակտ տարածություն, եթե նրա յուրաքանչյուր հաշվելի բաց ծածկույթից կարելի է անջաորեւէ վերջավոր ենթածածկույթ:

Պարզ է որ, ամեն մի կոմպակտ տարածություն նաև հաշվելի-կոմպակտ տարածություն է: Հակառակ պնդումն ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ. կառուցված են տոպոլոգիական տարածությունների մի քանի օրինակներ, երբ հաշվելի-կոմպակտ տարածությունը կոմպակտ տարածություն չէ: Այդ բոլոր օրինակները բավականին բարդ են, քանի որ կոմպակտության այս երկու հասկացությունների միջև տարբերությունները ակնհայտ են մեծ չեն, ինչը առանձին ձևով հաստատված է հետևյալ թեորեմով:

Թեորեմ 11: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունների դեպքում կոմպակտությունը համարժեք է հաշվելի-կոմպակտությանը:

Ապացույց: Դիցուք X-ը հաշվելի-կոմպակտ տարածություն է, և $S=\{U_\alpha;\alpha\in A\}$ ընդհանուր բաց ենթաբազմությունների բաց ծածկույթ է: Թեորեմի պայմանից անմիջապես, որ X-ը լինդելյոֆյան տարածություն է (տես առաջադրանքը): Այնժամ թեորեմ 8-ի թեորեմ 3-ից հետևում է՝ S ծածկույթից կարելի է անջատել X-ի հաշվելի S' ենթածածկույթ, որն էլ իր հերթին առաջացնում է S'' վերջավոր ենթածածկույթ: Պարզ է, որ S''-ը վերջավոր ենթածածկույթ է նաև S ծածկույթի համար, ինչով և ապացուցված է թեորեմը:

Սահմանում: Տոպոլոգիական X տարածությունը կոչվում է սեկվենցիալ-կոմպակտ տարածություն, եթե այն բավարարում է Բոլցանո-Վայերշտրասի պայմանին՝ X-ում կետերի յուրաքանչյուր անվերջ հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն (նկատենք. սեկվենցիալ բառը լատիներենից թարգմանաբար նշանակում է հաջորդականություն):

Սեկվենցիալ-կոմպակտ տարածության պարզ օրինակ է թվային ուղղի [illegible] $[a,b]$ հատվածը. Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմով պնդվում է, որ $[a,b]$-ն բավարարում է սահմանման պայմանին:

Թեորեմ 12: Մետրիկական տարածությունների (մասնավորապես $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածությունների) դեպքում կոմպակտության, հաշվելի-կոմպակտության և սեկվենցիալ-կոմպակտության հասկացությունները համարժեք են

Ծանոթություն:

Համապատասխան, թվարկված համար կոմպակտություններ հետ առնչվող այլ հատկությունների հետ կապված է ծանոթագրում [ ] գրքում:

[illegible] էջ. 116

<u>Օրինակ 3</u>: Ցույց տանք որ (X, վերջ. լր.) տոպոլոգիական կոմպակտ տարածություն է: Իրոք, դիցուք $S = \{U_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը X-ի որևէ բաց ծածկույթ է, ընդ որում U_i ենթաբազմություններից ոչ մեկը չի համընկնում X-ի հետ (հակառակ դեպքում ապացուցելու բան չկա): Դիտարկենք այդ ծածկույթի որևէ U_{i_0} բազմություն և նշանակենք $X \setminus U_{i_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ լրացումը X-ում: Այնժամ յուրաքանչյուր x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ կետի համար ընտրելով որևէ $U_{i_k} \in S$ բազմություն այնպես, որ $x_k \in U_{i_k}$, կստանանք X-ի S ծածկույթի $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ վերջավոր ենթածածկույթը:

Գրականություն դասընթացի վերաբերյալ

Բազմությունների փեսություն

[2] П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* изд. «Наука», М., 1977.

[3] А. В. Архангельский. *Канторовская теория множеств.* изд. Московского университета, 1988.

[1] А. Френкель; И. Бар-Хиллел. Основания теории *~~Основная теория~~ множеств.* изд. «Мир», М., 1966.

Ընդհանուր փոպոլոգիա

[4] Келли Дж. *Общая топология.* изд. «Наука», М., 1968.

[6] Ч. Коснёвски. *Начальный курс алгебраической топологии.* изд. «Мир», М., 1983.

[5] Р. А. Александрян; Э. А. Мирзаханян. *Общая топология.* изд. «Высшая школа», М., 1979.