Թեմա 16

Գծորեն կապակցված փարածություններ, գծային կապակցվածությունը որպես փոպոլոգիական հափկություն: Կապը կապակցվածություն և գծային կապակցվածություն հասկացությունների միջև: Տոպոլոգիական փարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչները:

Նախորդ թեմայում պարզաբանեցինք կապակցված փոպոլոգիական փարածություն և փարածության կապակցվածության բաղադրիչ հասկացությունները: Մասնավորապես փեսանք, որ թվային ուղիղը կապակցված է և ունի կապակցվածության մի բաղադրիչ՝ ինքը $\mathbb{R}$-ը: Իսկ $\mathbb{R}\setminus 0 = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ փարածությունը (որպես $\mathbb{R}$-ի ենթատարածություն) կապակցված չէ և ունի կապակցվածության երկու բաղադրիչ՝ $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$:

Այս օրինակներում ենթագիփակցաբար (կամ բառացի) կապակցվածությունը կարող է ընկալվել նաև որպես փվյալ փարածության կամայական մի կեփից մի այլ կեփ ինչ-որ ճանապարհով (ուղիով) անընդհափ փեղափոխվելու հնարավորություն: Բնական է համարել, որ $\mathbb{R}$-ում դա միշտ հնարավոր է, իսկ ~~սիա~~ $\mathbb{R}\setminus 0$ փարածությունում -1 կեփից $+1$ կեփ որևէ ուղիով անընդհափ փեղափոխվել հնարավոր չէ (0 կեփի հեռացումը խախփում է $\mathbb{R}$-ի ամբողջականությունը): Այս ամենի հսփակեցումը մեզ բերում է գծորեն կապակցված փարածություն հասկացությանը:

Սահմանում: X փոպոլոգիական փարածությունում **ուղի** կոչվում է $I = [0;1]$ հափվածի ամեն մի $f : I \to X$ անընդհափ արփապափկերում: Եթե ուղեգիծ $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$, ապա x_0-ն և x_1-ը կոչվում են f ուղու **սկիզբ** և **վերջ**: Եթե $f : I \to X$ ուղի, ~~է,~~ որը միացնում է x_0 կեփը x_1 կեփին, ապա $\bar{f} : I \to X$, $\bar{f}(t) = f(1-t)$, $t \in I$ արփապափկերումը նույնպես ուղի է, որը միացնում է x_1-ը x_0-ին: Եթե f ուղին այնպիսին է, որ $f(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$, ապա f-ը կոչվում է **հասփափուն ուղի x_0 կեփում** և նշանակվում է ε_{x_0}:

Դիցուք ունենք երկու $f, g : I \to X$ ուղիներ X-ում, ընդ որում $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ և $g(0) = x_1$, $g(1) = x_2$: Սահմանենք նոր՝ $h : I \to X$ արփապափկերում

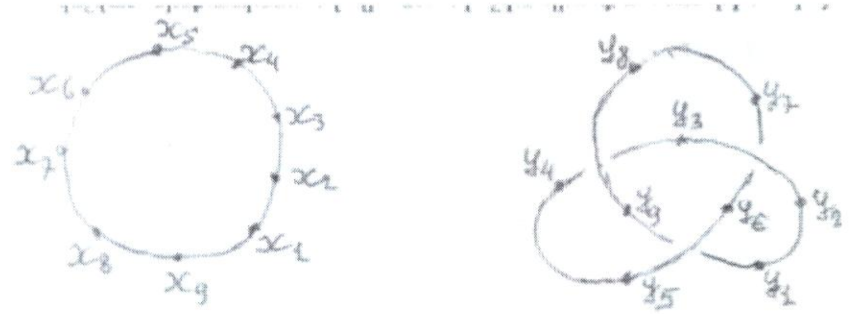
$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

բանաձևով: Նկափենք, որ $h(0) = f(0) = x_0$, $h(1) = g(1) = x_2$:

Այս արփապափկերումը կոչվում է f և g ուղիների արփադրյալ և նշանակվում է $f * g$:

Թեորեմ 1: Ուղիղների $f * g$ արփադրյալը ուղի է, որն սկսվում է x_0 կեփից և ավարփվում է x_2 կեփում:

Օրինակ՝ $\mathbb{R}^3$ տարածությունում հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների $x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$ շրջանագիծը անընդհատ ձևափոխումներով համընկեցնել այսպես կոչված «երեքնուկաձև» օվալի հետ: Մինչդեռ դրանք հոմեոմորֆ են միմյանց:



Իրոք, վերցնելով շրջանագծի վրա $x_1, x_2, \dots, x_9$ կետերը, իսկ օվալի վրա $y_1, y_2, \dots, y_9$ կետերը, մենք կարող ենք նախ կառուցել հոմեոմորֆիզմներ այդ պատկերների համապատասխան աղեղների միջև՝ $h_1 : x_1x_2 \to y_1y_2,\ h_2 : x_2x_3 \to y_2y_3, \dots,\ h_8 : x_8x_9 \to y_8y_9, h_9 : x_9x_1 \to y_9y_1$: Այնուհետև հաջորդաբար «սոսնձելով» այդ արտապատկերումներից յուրաքանչյուրն իր հաջորդի հետ (թեմա 12-ի թեորեմ 3-ի իմաստով), կստանանք որոնվող h հոմեոմորֆիզմ:

Ապացուցելու համար մնում է ցույց տալ $f * g$ արտապատկերման անընդհատությունը: Այն անմիջապես հետևում է թեմա 12-ի թեորեմ 3-ից:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **գծորեն կապակցված տարածություն**, եթե նրա ցանկացած x_1 և x_2 կետեր կարող են միացվել որևէ ուղիով X-ում:

Թեորեմ 2: Դիցուք $x_0 \in X$ որևէ սևեռված կետ է: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի ցանկացած կետ միացվում է x_0-ին որևէ ուղիով:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը Ցույց տանք բավարարությունը: Ըստ պայմանի՝ $\forall x_1, x_2 \in X$ կետերի համար գոյություն ունեն $f, g : I \to X$ ուղիներ, որ $f(0) = g(0) = x_0$ և $f(1) = x_1$, $g(1) = x_2$: Ուստի $\overline{f} * g$ ուղին x_1-ը միացնում է x_2-ին: ■

Սահմանում: X տարածության Y ենթաբազմությունը կոչվում է X-ի **գծորեն կապակցված ենթաբազմություն**, եթե Y-ը գծորեն կապակցված է որպես X-ի ենթատարածություն: Սա համարժեք է նրան, որ Y-ի կամայական y_1, y_2 կետեր կարող են միացվել որևէ $f : I \to Y$ ուղիով:

Նկատենք, որ շնորհիվ $I \to Y \subset X$ համադրույթի անընդհատության՝ f-ը նաև ուղի է X-ում:

$X = \bigcup X_j$:

Թեորեմ 3: Դիցուք X տարածությունը ներկայացված ~~է որպես~~ իր որոշ X_j, $j \in J$ գծորեն կապակցված ենթաբազմությունների միավորում: Եթե $\bigcap_j X_j \neq \varnothing$, ապա X-ը ևս գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք $x_0 \in \bigcap_j X_j$ որևէ սևեռված կետ է, դիտարկենք կամայական $x_1 \in X$ կետ: Գոյություն ունի այնպիսի X_j, որ $x_1 \in X_j$ և այնպիսի $f : I \to X_j$ ուղի, որ $f(0) = x_0$, $f(x) = x_1$: ~~Եթե~~ $h_j : X_j \to X$ արտապատկերումը, X_j ենթաբազմության ներդրում´ է X-ի մեջ (այսինքն $h_j(x) = x, \forall x \in X_j$ կետի դեպքում), ~~ապա~~ $h_j \circ f$ ուղին միացնում է x_0 կետը x_1 կետին: Ուստի X-ը գծորեն կապակցված է ըստ թեորեմ 2-ի: ■

Թեորեմ 4: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածության ցանկացած ուռուցիկ ենթաբազմություն գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Եթե $x, y \in \mathbb{R}^n$, ապա $(1-t)x + ty$, $t \in I$ տեսքի բոլոր կետերի բազմությունը x, y ծայրակետերով $[x, y]$ հատվածն է $\mathbb{R}^n$-ում (տե՛ս թեմա 14-ի վերջում): Հետևաբար, եթե W-ն ուռուցիկ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում և $x, y \in W$, ապա $[x, y]$ հատվածը պարունակվում է W-ում և $f : I \to W$, $f(t) = (1-t)x + ty$, $t \in I$ արտապատկերումը ուղի է W-ում, որը միացնում է x-ը y-ին: ■

Թեորեմ 5: Տարածության գծային կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է:

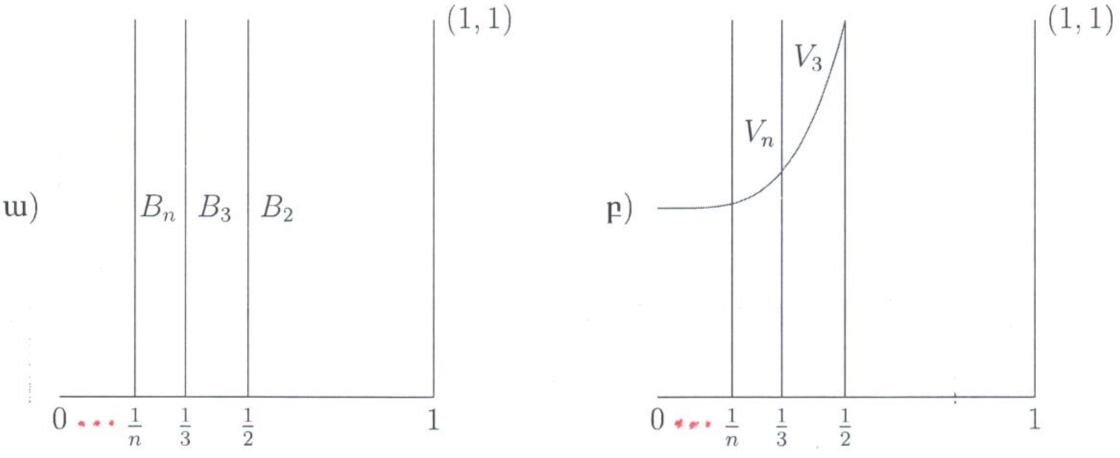
Ապացուցում: Բավական է ցույց տալ, որ գծորեն կապակցված տարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում նույնպես գծորեն կապակցված է: Դիցուք $h : X \to Y$ անընդհատ է և $h(X) = Y$: Դիտարկենք $\forall y_1, y_2 \in Y$ կետեր: Պայմանից հետևում է. գոյություն ունեն $x_1,\ x_2 \in X$ կետեր, որ $h(x_1) = y_1,\ h(x_2) = y_2$, և գոյություն ունի այնպիսի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1,\ f(1) = x_2$: Ուստի $g = h \circ f$ համադրույթը ուղի է Y-ում և $g(0) = y_1,\ g(1) = y_2$: ■

Կապը կապակցվածության և գծային կապակցվածության միջև

Թեորեմ 6: Ամեն մի գծորեն կապակցված տարածություն նաև կապակցված տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը գծորեն կապակցված է, բայց կապակցված չէ: Նշանակում է գոյություն ունեն X-ի ոչ դատարկ, չհատվող U և V բաց ենթաբազմություններ, որ $X = U \cup V$: Վերցնենք որևէ $x_1 \in U,\ x_2 \in V$ կետեր: Ապա գոյություն ունի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1,\ f(1) = x_2$: Ունենք $I = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, ընդ որում $f^{-1}(U)$-ն և $f^{-1}(V)$-ն ոչ դատարկ, չհատվող բաց ենթաբազմություններ են $[0; 1]$ հատվածում, ինչը հակասում է $[0; 1]$-ի կապակցվածությանը: ■

Կապակցված տարածությունը կարող է գծորեն կապակցված չլինել: Բերենք համապատասխան օրինակ: Ներկայացնելով $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ հարթության (x, y) կետերը նաև որպես $x+iy$ կոմպլեքս թվեր՝ դիտարկենք $\mathbb{R}^2$-ի A և B երկու ենթաբազմություններ՝ $A = \{i\}$, $B = [0; 1] \cup \left\{\dfrac{1}{n} + yi, n \in \mathbb{N},\ 0 \le y \le 1\right\}$, որտեղ $[0; 1]$-ը OX առանցքի $\{(x, 0); 0 \le x \le 1\}$ ենթաբազմությունն է: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության $C = A \cup B$ ենթաբազմությունը $\mathbb{R}^2$-ի սովորական մետրի տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով:



Թեորեմ 7: C-ն կապակցված, բայց ոչ գծորեն կապակցված տարածություն է:

Ապացույցը ստացվում է հետևյալ երեք պնդումներից:

Պնդում 1. C-ն կապակցված տարածություն է:

Իրոք, քանի որ B-ի յուրաքանչյուր $B_n = [0;1] \cup \left\{ \frac{1}{n} + yi,\ 0 \le y \le 1 \right\}$ ենթաբազմությունը կապակցված է որպես երկու հատվող հատվածների միավորում (տե՛ս նկար ա-ն) և $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \ne \varnothing$, ուստի C-ի $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ենթաբազմությունը կապակցված է ըստ թեմա 15-ում թեորեմ 3-ի:

Մյուս պնդումը ձևակերպելու համար կանգ առնենք i կետի շրջակայքերի մի առանձնահատկության վրա: Դիտարկենք i կետի $U = C \cap \left\{ z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \frac{1}{2} \right\}$ բաց շրջակայքը C տարածությունում (տես նկար բ-ն): Այստեղ $\left\{ z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \frac{1}{2} \right\}$ ենթաբազմությունը i կենտրոնով $r = \frac{1}{2}$ շառավղով բաց շրջան է $\mathbb{R}^2$-ում: Նկատենք, որ $U \cap B$ ենթաբազմությունը զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող $V_n = U \cap \left\{ \frac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1 \right\}$, $n > 2$ ենթաբազմությունների միավորումն է:

Պնդում 2. Յուրաքանչյուր V_n բաց և փակ ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Իրոք, քանի որ ամեն մի $\left\{ \frac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1 \right\}$ ենթաբազմություն փակ է $\mathbb{R}^2$-ում (հիմնավորել [illegible]), ուստի V_n-ը փակ է U ենթաբազմությունում ըստ մակածված տոպոլոգիայի սահմանման: Մյուս կողմից V_n-ը կարող է ներկայացվել

$$V_n = U \cap \left\{ (x,y); \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

տեսքով, որտեղ $\left\{ (x,y);\ \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R} \right\}$ ենթաբազմությունը բաց է $\mathbb{R}^2$-ում որպես երկու՝ $\left\{ (x,0);\ \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1} \right\}$ և $\{(0;y),\ y \in \mathbb{R}\}$ բաց ենթաբազմությունների ուղիղ արտադրյալ: Հետևաբար V_n-ը նաև բաց ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Վերջապես ապացուցելու համար, որ C-ն գծորեն կապակցված չէ, բավական է ցույց տալ, որ i կետը հնարավոր չէ C-ում ուղիով միացնել B-ի որևէ կետի հետ: Դրա համար ցույց կտանք, որ եթե $f : I \to C$ ուղին այնպիսին է, որ $f(0) = i$, ապա f-ը հաստատուն ուղի է, այսինքն՝ $f(t) = i,\ \forall t \in I$ դեպքում: Նախ ապացուցենք:

Պնդում 3. Յանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i) \subset I$ ենթաբազմության համար:

Ապացուցում: Դիտարկենք $f(t_0) = i$ կետի վերը բերված U բաց շրջակայքը C-ում: Քանի որ f-ը անընդհատ է t_0 կետում, ուստի գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, որ $f(t) \in U$, երբ $|t - t_0| < \varepsilon$, այսինքն՝ երբ $t \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$: Ցույց տանք, որ t_0-ի այդ շրջակայքն ընկած է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմությունում: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի $t_1 \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ կետ և $f(t_1) \ne i$: Նշանակում է $f(t_1) \in U \cap B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$, ուստի գոյություն ունի $n_1 > 2$ բնական թիվ, որ $f(t_1) \in V_{n_1}$: Քանի որ $[0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ենթաբազմությունը հետևյալ երեք՝ $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$,

$[0; t_0+\varepsilon)$ և $(t_0-\varepsilon, 1]$ ենթաբազմություններից որևէ մեկն է, ուստի այն կապակցված ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Հետևաբար $W = f\left([0,1] \cap (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\right) \subset U$ ենթաբազմությունը կապակցված է շնորհիվ f-ի անընդհատության: Քանի որ $W \subset U$, իսկ V_{n_1}-ը համաձայն պնդում 2-ի բաց և փակ ենթաբազմություն է U-ում, ուստի $V_{n_1} \cap W$-ն բաց և փակ է W-ում (ըստ U-ից W-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի սահմանման): Բացի այդ $f(t_1) \in V_{n_1} \cap W$ և ուրեմն $V_{n_1} \cap W \neq \varnothing$: Այժմ W-ի կապակցվածությունից հետևում է, որ $W = V_{n_1} \cap W$, ուստի $W \subset V_{n_1}$: Բայց դա անհնարին է, քանի որ մի կողմից $i = f(t_0) \in W \subset V_{n_1}$, իսկ մյուս կողմից $i \notin V_{n_1}$: Հետևաբար $[0,1] \cap (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset f^{-1}(i)$, և ուրեմն ցանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմության համար: ■

Այժմ պատրաստ ենք ավարտելու թեորեմ 7-ի ապացուցումը:

Նախ, որպես հետևանք պնդում 3-ից ստանում ենք, որ $f^{-1}(i)$-ն ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Մյուս կողմից, $\{i\}$-ն փակ ենթաբազմություն է C-ում, ուստի $f^{-1}(i)$-ն փակ ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում շնորհիվ f-ի անընդհատության: Հետևաբար $f^{-1}(i) = [0,1]$ շնորհիվ $[0,1]$-ի կապակցվածության: ■

Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչները

[illegible]

սահմանվում են կապակցվածության բաղադրիչների նմանությամբ:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչը կոչվում է նրա ամեն մի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն, որը չի պարունակվում իրենից տարբեր որևէ գծորեն կապակցված ենթաբազմությունում:

Տոպոլոգիական տարածության կապակցվածության բաղադրիչների նմանությամբ, գծային կապակցվածության բաղադրիչները նույնպես օժտված են հետևյալ հատկություններով:

Հ1. Տարածության ամեն մի կետ պատկանում է գծային կապակցվածության որևէ բաղադրիչի,

Հ2. Գծային կապակցվածության ցանկացած երկու բաղադրիչ կամ չեն հատվում, կամ համընկնում են,

Հ3. Տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչների քանակը (հզորությունը) տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

Այդուհանդերձ կապակցված ենթաբազմության և կապակցվածության բաղադրիչների ոչ բոլոր հատկություններն են տարածվում գծորեն կապակցված ենթաբազմության և գծային կապակցվածության բաղադրիչների վրա:

Մասնավորապես գծորեն կապակցված ենթաբազմության փակումը կարող է չլինել գծորեն կապակցված ենթաբազմություն: