Թեմա 10

Հաջորդականությունների զուգամիտությունը տոպոլոգիական տարածություններում: Տարածության տոպոլոգիայի նկարագրումը զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով:

Մաթեմատիկական անալիզի հիմնական շատ հասկացություններ սերտորեն կապված են թվային հաջորդականություն, ենթահաջորդականություն, թվային հաջորդականության սահման հասկացությունների հետ: Սկզբունքորեն հաջորդականությունների զուգամիտության տեսություն կարելի է զարգացնել ոչ միայն թվային ուղղի վրա, և ոչ միայն մետրիկական, այլև կամայական տոպոլոգիական տարածությունում:

Եթե ունենք որևէ X բազմություն, ապա **հաջորդականություն X-ում** կոչվում է (բնական թվերով համարակալված) ամեն մի $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմություն:

Համարժեք սահմանում. հաջորդականություն X-ում կոչվում է ցանկացած $f : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերում: Իրոք, ամեն մի $n \in \mathbb{N}$ թվի համար նշանակելով $f(n) \in X$ կետը x_n-ով, կստանանք $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ հաջորդականություն նախկին իմաստով և հակառակը:

Երբեմն հաջորդականության նշանակման համար կօգտագործենք համառոտ գրառում՝ $\{x_n\}$:

Դիցուք ունենք երկու՝ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականություններ X բազմությունում, այսինքն $f : \mathbb{N} \to X$ և $g : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերումներ, որ $x_n = f(n)$, $y_n = g(n)$, $n \in \mathbb{Z}$:

Սահմանում: Ասում են, որ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը $\{x_n\}$ **հաջորդականության ենթահաջորդականություն** է, եթե գոյություն ունի $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ արտապատկերում, որ $h(i) > h(j)$ ցանկացած $i > j$ դեպքում և $g = f \circ h$:

Սահմանումից հետևում է. $y_n = g(n) = (f \circ h)(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$, այսինքն $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության յուրաքանչյուր y_n անդամ $\{x_n\}$ հաջորդականության որևէ անդամ է:

Սահմանում: X բազմության $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է ստացիոնար հաջորդականություն, եթե ինչ-որ $m \in \mathbb{N}$ համարից սկսած նրա բոլոր անդամները նույնն են՝ $x_m = x_{m+1} = \cdots$

Սահմանում: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականություն: Ասում են, որ այն զուգամիտում է $a \in X$ կետին (գրառվում է $\lim \{x_n\} = a$), եթե a կետի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի $n_0 \in \mathbb{N}$ թիվ, որ $x_n \in U$ ցանկացած $n > n_0$ թվի դեպքում: Այս դեպքում ինքը՝ հաջորդականությունը կոչվում է **զուգամետ հաջորդականություն**, իսկ a-ն կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը:

Նկատենք, որ հաջորդականությունը կարող է զուգամետ լինել կամ չլինել (սահման ունենալ, կամ չունենալ), ինչպես նաև՝ զուգամետ հաջորդականության սահմանը կարող է միակը չլինել:

Օրինակ 1: ա) Ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում ամեն մի ստացիոնար հաջորդականություն զուգամետ հաջորդականություն է (հիմնավորել):

բ) $(X,$ դիսկր.$)$ տարածությունում զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները, ընդ որում սահմանը միակն է (հիմնավորել):

գ) $(X,$ անտիդիսկր.$)$-ում ցանկացած հաջորդականություն զուգամիտում է X-ի ցանկացած կետի (հիմնավորել):

դ) Դիտարկենք որևէ $(X,$ հաշվ. լր.$)$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Այստեղ ևս զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Իրոք, ենթադրենք $\{x_n\}$-ը ստացիոնար չէ և գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$: Սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով a կետից տարբեր անդամներ: Դիտարկենք a կետի $U = X \setminus \{x_n \mid x_n \neq a,\ n \in \mathbb{N}\}$ բաց շրջակայքը: Ըստ մեր ենթադրության գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in U$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $x_n = a$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում (ինչո՞ւ): Ստացանք հակասություն:

Թվարկենք զուգամիտության մի քանի պարզ հատկություններ:

Կամայական $\{x_n\} \subset X$

1. զուգամետ հաջորդականության ամեն մի $\{y_n\}$ ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամետ հաջորդականություն է և ունի նույն սահմանը (սահմանները), ինչը որ ունի $\{x_n\}$-ը (հիմնավորել):

2. Եթե $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունը ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահմանը, ապա $a \in \{x_n\}$ (հիմնավորել):

3. Կամայական T_2-տարածությունում ամեն մի զուգամետ հաջորդականություն ունի միայն մեկ սահմանը:

Իրոք, ենթադրենք որևէ X T_2-տարածությունում ինչ-որ $\{x_n\}$ հաջորդականություն ունի $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$, $a \neq b$ սահմաններ: Դիտարկենք a և b կետերի չհատվող U և V շրջակայքեր (շարունակել ապացույցը):

Թեորեմ 1: Կամայական X մետրիկական տարածության ամեն մի $\{x_n\} \subset X$ և $a \in X$ կետի հաջորդականության համար հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.

ա) գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահման,

բ) ցանկացած $\mathcal{D}(a, r)$ բաց գնդի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a, r)$ երբ $n > n_0$:

Ապացուցում: Անցումը ա)-ից բ)-ին ակնհայտ է: Ցույց տանք բ) $\Rightarrow$ ա) անցումը: Դիցուք U-ն a կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման, գոյություն ունի a կետի V բաց շրջակայք, որ $a \in V \subset U$: Համաձայն նախորդ թեմայի թեորեմ 3-ի, գոյություն ունի a կենտրոնով $\mathcal{D}(a, r)$ բաց գունդ, որ ~~$a \in$~~ $\mathcal{D}(a, r) \subset V$: Ըստ պայմանի, գոյություն ունի n_0 թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a, r)$, երբ $n > n_0$: Հետևաբար $x_n \in U$, երբ $n > n_0$, որտեղից $\lim\{x_n\} = a$: ■

Քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպես են միմյանց հետ կապված փարածության տոպոլոգիան (այսինքն բաց և փակ ենթաբազմությունները) և տվյալ փարածության մեջ զուգամետ հաջորդականությունները: Սկսենք բաց ենթաբազմություններից:

Թեորեմ 2: Դիցուք X [illegible] տոպ. փարածությունը բավարարում է հաշվելիության I աքսիոմին: Ապա X-ի [illegible] A ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում ամեն մի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է A-ի որևէ կետի, ընկած է A-ի մեջ սկսած ինչ-որ անդամից:

Նախ ապացուցենք մի օժանդակ պնդում:

Լեմմա: Եթե X տոպոլոգիական փարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին ~~I~~ աքսիոմին, ապա նրա ամեն մի x կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի [illegible] $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա ~~այնպես~~, որ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$ [illegible]

Ապացուցում: Դիտարկենք x կետի շրջակայքերի որևէ $\{V_i(x)\}$ հաշվելի բազա և կառուցենք x-ի շրջակայքերի նոր՝ $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա, սահմանելով $U_1(x) = V_1(x)$ և $U_i(x) = \bigcap_{k=1}^{i} V_k(x)$ ամեն մի i ինդեքսի համար: Պարզ է, որ միշտ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$: ■

Թեորեմ 2-ի ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը անմիջապես հետևում է հաջորդականության զուգամիտության սահմանումից: Ցույց տանք պայմանի բավարարությունը հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք որևէ A ենթաբազմության համար նշված պայմանը տեղի ունի, բայց A-ն բաց չէ: Նշանակում է՝ գոյություն ունի $s \in A$ կետ, որը ներքին կետ չէ A-ի համար: Ըստ լեմմայի, գոյություն ունի s կետի շրջակայքերի $\{U_i(s);\, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա, որ $U_i(s) \supset U_{i+1}(s)$ ամեն մի $i,\, i+1 \in I$ դեպքում: Քանի որ $s \notin \operatorname{int} A$, ուստի ամեն մի $U_n(s)$-ում կարող ենք ընտրել x_n կետ, որ $x_n \notin A$: Պարզ է, որ ստացված $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է s կետին, և ըստ թեորեմի պայմանի՝ նրա անդամները ինչ-որ համարից սկսած պետք է պատկանեն A-ին: Բայց դա հակասում է նրան, որ $\{x_n\} \cap A = \varnothing$: ■

Այժմ քննարկենք փակ ենթաբազմությունների դեպքը: Այդ նպատակով վերադառնանք վերը բերված հատկություն 2-ին՝ եթե գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = s$ սահման, ապա $s \in \overline{\{x_n\}}$: Այս հատկությունը ճիշտ է նաև հետևյալ [illegible] [illegible] դիցուք ունենք $A \subset X$ որևէ ենթաբազմություն և $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն: Եթե գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման, ապա $s \in \bar{A}$: Այսինքն A ենթաբազմության մեջ պարունակվող [illegible] զուգամետ հաջորդականության [illegible] սահման հպման կետ է A-ի համար ([illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] է [illegible]):

Թեորեմ 3: Դիցուք X փարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին: Ապա X-ի կամայական ոչ դատարկ A ենթաբազմություն փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A ենթաբազմությունում պարունակվող ամեն մի զուգամետ հաջորդականության $\forall$ սահման հպման կետ է A-ի համար:

մասին

Պայմանի անհրաժեշտության արդեն խոսել ենք: Իսկ բավարարությունը ապացուցվում է ինչպես թեորեմ 2-ում՝ դարձյալ լեմմայի օգնությամբ (մանրամասները թողնում ենք ընթերցողին):

Հաջորդ հիմնական հարցը հետևյալն է՝ կարելի՞ է արդյոք փարածության տոպոլոգիան նկարագրել զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով: Նախ հստակեցնենք հարցադրումը:

Դիցուք ունենք ինչ-որ X բազմություն, դիտարկենք M բազմություն, որի տարրերը $(\{x_n\}, s)$ տեսքի որոշ զույգեր են, որտեղ $\{x_n\}$-ը որևէ հաջորդականություն է X-ում, իսկ s-ը X-ի որևէ կետ է: Պահանջենք, որ M-ը բավարարի հետևյալ երկու պայմաններին՝

ա) Եթե $(\{x_n\}, s) \in M$, ապա $\{x_n\}$-ի ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության դեպքում, նաև $(\{y_n\}, s) \in M$:

բ) ցանկացած $\{x_n\}$ ստացիոնար հաջորդականության դեպքում, եթե ինչ-որ անդամից սկսած $x_m = x_{m+1} = \cdots = s$, ապա $(\{x_n\}, s) \in M$:

Հարց 1: Տվյալ X և M բազմությունների դեպքում գոյություն ունի՞ արդյոք միակ այնպիսի τ տոպոլոգիա X-ում, որ $(\{x_n\}, s) \in M$ այն և միայն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման (X, τ) տարածությունում:

Այս հարցի դրական պատասխանի դեպքում կասենք, որ X-ի τ տոպոլոգիան որոշվում է M բազմությունով:

Հարց 2 (հարց 1-ի հակառակը)**:** Ճի՞շտ է արդյոք, որ X բազմության կամայական τ տոպոլոգիայի համար գոյություն ունի վերը նկարագրված $(\{x_n\}, s)$ զույգերի M բազմություն այնպես, որ M-ով որոշվող X-ի տոպոլոգիան համընկնում է τ-ի հետ:

1 և 2 հարցերի դրական պատասխանների դեպքում կունենանք, որ տվյալ X բազմության բոլոր տոպոլոգիաները կարող են լիովին նկարագրվել X-ում զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով:

Այժմ քննարկենք այդ հարցերը փակման գործողության տեսանկյունից: Դիցուք A-ն X տարածության սևեռված ենթաբազմություն է: Նշանակենք $\widetilde{A}$ բոլոր A-ի մեջ պարունակվող զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմությունը: Պարզ է, որ $\widetilde{A} \subset \overline{A}$: Ենթադրենք, որ իր հերթին $\overline{A} \subset \widetilde{A}$, և հետևաբար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Սա նշանակում է, որ $\overline{A}$ փակումը համընկնում է A ենթաբազմությունում պարունակվող բոլոր զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմության հետ: Եթե ասվածը տեղի ունենա X-ի ցանկացած A ենթաբազմության դեպքում, ապա X տարածությունում ենթաբազմությունների փակման գործողությունը, ուստի և X-ի տոպոլոգիան լիովին կորոշվի X-ում զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով (ևս մի հնարավորություն բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու համար): Այն, որ դա հնարավոր է որոշ տարածությունների դեպքում, նախապես ցույց տանք հասարակ օրինակով:

Վերցնենք որևէ X բազմություն և նրանում զուգամետ հաջորդականություններ հայտարարենք միայն և միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Եթե $\{x_n\}$-ը մի այդպիսի հաջորդականություն է $x_m = x_{m+1} = \cdots = s,$ ապա սահմանենք $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $\forall A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $\widetilde{A} = A$: Այսպիսով ստանում ենք $A \mapsto \mathrm{cl}\, A$ գործողություն $\mathrm{cl}\, A = \widetilde{A}$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այն Կուրատովսկու փակման գործողություն է (բավարարվում են K1-K4 աքսիոմները) և ստացված տոպոլոգիայում $\overline{A} = \widetilde{A} = A$: Այսինքն, ստացված X-ի դիսկրետ տոպոլոգիան է:

Հարց: Տեղի ունի՞ արդյոք նույնը ցանկացած տոպոլոգիական տարածության դեպքում: Պատասխանը բացասական է, ցույց տանք օրինակով:

Օրինակ 2: Դիտարկենք որևէ $(X, \text{հաշվ. լրաց.})$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Սևեռենք որևէ $a \in X$ կետ և դիտարկենք X-ի $A = X \setminus \{a\}$ ենթաբազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ $a \in \overline{A}$: Ցույց տանք, որ գոյություն չունի $\{x_n\} \subset A$ զուգամետ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն որ $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $U = X \setminus \{x_n\}$ ենթաբազմությունը a կետի բաց շրջակայք է: Բայց $U \cap \{x_n\} = \varnothing$, ինչը հակասում է $\lim\{x_n\} = a$ պայմանին:

Այս «անհաջողության» պատճառն այն է, որ հաջորդականությունները հաշվելի բազմություններ են, ինչը թույլ չի տալիս ընդհանուր (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում, հայտնաբերել ենթաբազմության բոլոր հպման կետերը սահման տեսքով:

Այնուամենայնիվ ընդհանուր տոպոլոգիայում զարգացվում է զուգամիտության տեսություն այնպես, որ ցանկացած տոպոլոգիա լիովին նկարագրվում է զուգամիտության տերմիններով: Արվում է դա երկու համարժեք եղանակով, ընդհանրացնելով հաջորդականություն և հաջորդականության սահման հասկացությունները: Մի դեպքում ներմուծվում են **ֆիլտր** և **զուգամետ ֆիլտր** հասկացություններ, իսկ մյուս դեպքում **ուղղվածություն** և **զուգամետ ուղղվածություն** հասկացություններ (մանրամասնությունները տե՛ս [ ] գրքում):

Որոշ դասի տարածությունների համար վերոհիշյալ հարցի պատասխանը դրական է նաև սովորական հաջորդականությունների դեպքում: Իրոք, տեղի ունի.

Թեորեմ 4: Եթե X տոպ. տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին (մասնավորապես՝ մետր. տարածություն է), ապա ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության համար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\overline{A} \subset \widetilde{A}$: Դիցուք $a \in \overline{A}$, ցույց տանք գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ըստ լեմմայի՝ a կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ բազա, որ $U_{n+1} \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$:

Քանի որ $U_n \cap A \neq \varnothing$, կարող ենք յուրաքանչյուր U_n-ում ընտրել որևէ $x_n \in A$ կետ: Ստանում ենք $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, և ակնհայտ է, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ուստի $a \in \widetilde{A}$: ∎