Թեմա 6

Կետի դիրքը ենթաբազմության նկատմամբ. ենթաբազմության ներքին և արտաքին կետեր, ենթաբազմության ներքինն ու արտաքինը, ենթաբազմության եզրային կետեր և ենթաբազմության եզր: Փակման գործողություն բազմության վրա, Կուրատովսկու թեորեմը:

Հիշեցնենք, որ թվային ուղղի X ենթաբազմության x_0 կետը կոչվում է նրա ներքին կետ, եթե գոյություն ունի այդ կետի որևէ $U(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ ε-շրջակայք, որ $U(x_0, \varepsilon) \subset X$: Նույնպիսի հասկացություն, հետևյալ ընդհանուր տեսքով, ներմուծվում է բոլոր տոպոլոգիական տարածություններում:

Դիցուք (X, τ)-ն տոպոլոգիական տարածություն է, A-ն X-ի որևէ ենթաբազմություն է:

Սահմանում: $x \in X$ կետը կոչվում է A **ենթաբազմության ներքին կետ**, եթե գոյություն ունի x-ի որևէ U_x շրջակայք, որ $x \in U_x \subset A$: Տվյալ A ենթաբազմության բոլոր ներքին կետերի բազմությունը կոչվում է A-ի **ներքինը** և նշանակվում է $\operatorname{int} A$:

Նկատենք, որ ներքին կետի սահմանման մեջ կարելի էր պահանջել, որ U_x-ը լինի x կետի բաց շրջակայք: Այն, որ սահմանման այդ երկու տարբերակները համարժեք են միմյանց, հետևում է կետի շրջակայքի սահմանումից: (հիմնավորե՛ք):

Ենթաբազմության ներքինի հատկությունները.

1. $\operatorname{int} A \subset A$ և $\operatorname{int} A$-ն X-ի բաց ենթաբազմություն է: Իրոք, ըստ ներքին կետի համարժեք սահմանման՝ ամեն մի $x \in \operatorname{int} A$ կետի համար գոյություն ունի U_x բաց շրջակայք, որ $x \in U_x \in \operatorname{int} A$: Այստեղից ստանում ենք՝ $\operatorname{int} A = \bigcup U_x$, որտեղ միավորումը կատարվում է ըստ բոլոր $x \in \operatorname{int} A$ կետերի: Հետևաբար $\operatorname{int} A$-ն բաց ենթաբազմություն է՝ որպես U_x բաց ենթաբազմությունների միավորում:

2. $\operatorname{int} A$-ն A-ի մեջ պարունակվող բոլոր բաց ենթաբազմություններից ամենամեծն է հետևյալ իմաստով. եթե V-ն A-ի որևէ բաց ենթաբազմություն է, ապա $V \subset \operatorname{int} A$: Իրոք, V-ի բոլոր կետերը ներքին կետեր են V-ի համար, հետևաբար ներքին կետեր են նաև A-ի համար, ուստի $V \subset \operatorname{int} A$:

3. $A \mapsto \operatorname{int} A$ համադրումը գործողություն է որոշված X-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմության վրա: Մասնավորապես $\operatorname{int} \varnothing = \varnothing$, $\operatorname{int} X = X$: Այդ գործողությունը բնութագրում է X-ի բաց ենթաբազմությունները հետևյալ իմաստով. **X-ի որևէ ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն համընկնում է իր ներքինի հետ:** Իրոք, եթե

Հակառակը՝ եթե $A = \operatorname{int} A$, ապա A-ն բաց ենթաբազմություն է ըստ հատկություն 1-ի:

Օրինակներ: $(X, \text{դիսկր.})$ տարածությունում ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության ներքինը A-ն է: Իսկ $(X, \text{անտիդ.})$-ում $\operatorname{int} A = X$, երբ $A = X$, և $\operatorname{int} A = \varnothing$, երբ $A \neq X$: Այնուհետև, $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունում (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ ենթաբազմությունների ներքինները (a, b)-ն է, իսկ ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$, ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$, իռացիոնալ թվերի I բազմությունների ներքինները $\varnothing$ բազմությունն է, $(\mathbb{R}, \text{հաշվ. լր.})$ տարածությունում $\operatorname{int} \mathbb{Z} = \operatorname{int} \mathbb{Q} = \varnothing$, իսկ $\operatorname{int} I = I$ (հիմնավորե՛ք):

Ենթաբազմության ներքինի հատկությունները (շարունակություն).

4. Եթե $A \subset B \subset X$, ապա $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$ (հետևում է սահմանումից):

5. Ցանկացած $A, B \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$:

   Ապացուցում: Ունենք՝ $A \cap B \subset A \;\Rightarrow\; \operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A$: Նման ձևով $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} B \;\Rightarrow\; \operatorname{int}(A \cap B) \subset (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B)$: Հակառակը՝

$$x \in (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B) \Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{int} A \\ x \in \operatorname{int} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists U_x \in \tau, \text{ որ } x \in U_x \subset A \\ \exists V_x \in \tau, \text{ որ } x \in V_x \subset B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (U_x \cap V_x) \in \tau \\ x \in (U_x \cap V_x) \subset A \cap B \end{cases} \Rightarrow \; x \in \operatorname{int}(A \cap B):$$

■

6. Ցանկացած $A, B \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$:

   Ապացուցում: Ունենք՝ $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B \Rightarrow (\operatorname{int} A, \; \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)) \;\Rightarrow\; (\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \neq \operatorname{int}(A \cup B)$: Որպես օրինակ՝ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ում դիտարկենք $A = \mathbb{Q}$ և $B = I$ ենթաբազմությունները: Մի կողմից՝ $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \operatorname{int} I = \varnothing \Rightarrow \operatorname{int} \mathbb{Q} \cup \operatorname{int} I = \varnothing$, իսկ մյուս կողմից $\operatorname{int}(\mathbb{Q} \cup I) = \operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R}$: ■

Ենթաբազմության ներքին կետ, ներքինը հասկացությունների նմանությամբ կամայական տոպոլոգիական տարածությունում ներմուծվում են ենթաբազմության արտաքին կետ, արտաքինը, ինչպես նաև ենթաբազմության եզրային կետ և եզր հասկացությունները:

Որևէ $x \in X$ կետ կոչվում է տվյալ $A \subset X$ ենթաբազմության **արտաքին կետ**, եթե բոլոր արտաքին կետերի բազմությունը կոչվում է A**-ի արտաքինը** և նշանակվում է $\text{ext}\,A$: Նույն ձևով, ինչպես ներքինի դեպքում, ապացուցվում է, որ ենթաբազմության արտաքինը X-ի բաց ենթաբազմություն է (տե՛ս հատկություն 1-ի ապացույցը):

Որևէ $x \in X$ կետ կոչվում է A ենթաբազմության **եզրային կետ**, եթե նրա ցանկացած շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում A-ի և՛ ներքինի, և՛ արտաքինի հետ: Տվյալ A ենթաբազմության բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է A**-ի եզր** և նշանակվում է ∂A:

Սահմանումներից հետևում է՝

$$\text{int}\,A \cap \text{ext}\,A = \text{int}\,A \cap \partial A = \text{ext}\,A \cap \partial A = \varnothing,$$

$$X = \text{int}\,A \cup \text{ext}\,A \cup \partial A$$

Այժմ $\partial A = X \setminus (\text{int}\,A \cup \text{ext}\,A)$ նույնությունից հետևում է՝ X-ի ցանկացած ենթաբազմության եզրը փակ ենթաբազմություն է:

Օրինակ 1: Դիցուք A-ն հետևյալ $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ ենթաբազմություններից որևէ մեկն է թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում: Ապա $\text{int}\,A = (0,1)$, $\text{ext}\,A = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, $\partial A = \{0,1\}$ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 2: Դիցուք A-ն նախորդ օրինակում բերված ենթաբազմություններից որևէ մեկն է թվային ուղղի աջից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիայում: Դրանցից $A = (0,1)$ դեպքում $\text{int}\,A = (0,1)$, $\text{ext}\,A = (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$, $\partial A = \{0\}$, իսկ $A = [0,1]$ դեպքում $\text{int}\,A = [0,1)$, $\text{ext}\,A = (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$, $\partial A = \varnothing$:

Մյուս երկու դեպքերը որպես խնդիր թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ անդրադառնանք տոպոլոգիական տարածության փակ ենթաբազմության հասկացությանը:

Նախորդ՝ թեմա 5-ում փակ ենթաբազմությունները սահմանվեցին բաց ենթաբազմությունների միջոցով: Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես են նկարագրվում փակ ենթաբազմությունները կետերի շրջակայքերի տերմիններով:

Սահմանում: (X,τ) տոպոլոգիական տարածությունում $x \in X$ կետը կոչվում է $M \subset X$ **ենթաբազմության հպման կետ**, եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում M-ի հետ:

Դիտողություն: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացներում գործածվում է նաև **ենթաբազմության սահմանային կետ** հասկացությունը:

Այս դեպքում պահանջվում է, որպեսզի x կետի ցանկացած շրջակայք ունենա ոչ դատարկ հատում $M \setminus \{x\}$ ենթաբազմության հետ: Պարզ է, որ ենթաբազմության ամեն մի սահմանային կետ նաև նրա հպման կետ է: Հակառակը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ: Օրինակ՝ $\forall\,(X,\tau)$ տարածությունում ցանկացած x կետ հպման կետ է $\{x\}$ ենթաբազմության համար, բայց սահմանային կետ չէ նրա համար:

Սահմանում: $M \subset X$ ենթաբազմության բոլոր հպման կետերի բազմությունը կոչվում է այդ **ենթաբազմության փակույթ** և նշանակվում է $\overline{M}$:

Անցումը M ենթաբազմությունից $\overline{M}$-ին, այսինքն $M \mapsto \overline{M}$ համադրումը կոչվում է **փակման գործողություն տոպոլոգիական տարածությունում**:

Օրինակ 3: ա) $(X,$ անտիղ.$)$ տարածությունում X-ի ցանկացած x կետ հպման կետ է ցանկացած $M \subset X$, $M \neq \varnothing$ ենթաբազմության համար, և ուրեմն $\overline{M} = X$:

բ) $(X,$ դիսկր.$)$-ում M ենթաբազմության համար հպման կետեր են միայն և միայն M-ի կետերը: Այսինքն՝ $\overline{M} = M, \forall M \subset X$ ենթաբազմության դեպքում:

գ) $(\mathbb{R},$ սովոր.$)$ տարածությունում (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակույթը $[a,b]$-ն է: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության փակույթը ինքը՝ $\mathbb{Z}$-ն է, իսկ բոլոր ռացիոնալ, կամ բոլոր իռացիոնալ թվերից կազմված ենթաբազմությունների փակույթները $\mathbb{R}$-ն է:

դ) $(\mathbb{R},$ վերջ. լր.$)$ տարածությունում $(a,b]$, $[a,b]$ ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակույթը $\mathbb{R}$-ն է: Ընդհանրապես, այս տարածությունում ցանկացած $M \subset \mathbb{R}$ անվերջ ենթաբազմության (օրինակ՝ $\mathbb{Z}$-ի) փակույթը $\mathbb{R}$-ն է (հիմնավորե՛ք):

Փակույթի հատկությունները. Ցանկացած (X,τ) տոպոլոգիական տարածությունում՝

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$;
2. $M \subset \overline{M}$ ցանկացած M ենթաբազմության դեպքում;
3. եթե $M \subset N$, ապա $\overline{M} \subset \overline{N}$;
4. ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (այստեղ $\overline{\overline{M}}$ սիմվոլով նշանակված է $\overline{M}$-ի փակույթը, այսինքն $\overline{\overline{M}} = \overline{(\overline{M})}$):

Սրանցից 1-ը, 2-ը և 3-ը ակնհայտ են, ապացուցենք 4-ը: Ըստ 2-ի՝ $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$, ուստի մնում է ցույց տալ, որ $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$: Դիտարկենք կամայական $x \in \overline{\overline{M}}$ կետ: Այն հպման կետ է $\overline{M}$-ի համար: Ցույց տանք, որ x-ը հպման կետ է նաև M-ի համար: Եթե U-ն x-ի որևէ բաց շրջակայք է, ապա $U \cap \overline{M} \neq \varnothing$, և հետևաբար գոյություն ունի $y \in X$ կետ, որ $y \in U$ և $y \in \overline{M}$: Ստացվում է, որ y-ը հպման կետ է M-ի համար: Քանի որ U-ն նաև y-ի շրջակայք է, ուստի $U \cap M \neq \varnothing$, և ուրեմն $x \in \overline{M}$: Այսպիսով $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$:

Դիտողություն: Բերված ապացույցում մենք վերցրինք x կետի ոչ թե կամայական U շրջակայք, այլ կամայական U **բաց** շրջակայք: Առաջարկում ենք ընթերցողին նախ պարզել, թե ինչը ստիպեց այդպես վարվել, և ապա հիմնավորել, որ դրանով չի խախտվել ապացույցի լիարժեքությունը:

Թեորեմ 1: X տոպ. տարածության M ենթաբազմությունը փակ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ M-ը պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը:

Ապացուցում: ա) Եթե M-ը փակ է $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ը բաց է $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ում չկան M-ի հպման կետեր $\Rightarrow$ M-ի հպման կետերը M-ում են $\Rightarrow$ $\overline{M} \subset M$:

բ) Եթե $\overline{M} \subset M$ $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ում M-ի հպման կետեր չկան $\Rightarrow$ $\forall x \in X \setminus M$ կետ հպման կետ չէ M-ի համար $\Rightarrow$ $\forall x \in X \setminus M$ կետի համար $\exists x$-ի U_x (բաց) շրջակայք, որ $U_x \subset (X \setminus M)$: Այսպիսով $(X \setminus M)$-ը շրջակայք է իր բոլոր կետերի համար $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ը բաց ենթաբազմություն է $\Rightarrow$ M-ը փակ ենթաբազմություն է: ■

Հետևանք 1: $M \subset X$ ենթաբազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում է իր փակույթի հետ՝ $M = \overline{M}$:

Հետևանք 2: Ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը X-ի փակ ենթաբազմություն է: Իրոք, քանի որ $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ ըստ հատկություն 4-ի, ուստի $\overline{M}$-ը փակ ենթաբազմություն է համաձայն հետևանք 1-ի:

Թեորեմ 2: Ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը համընկնում է M-ը ընդգրկող բոլոր փակ ենթաբազմությունների հատման հետ: Այսինքն $\overline{M} = \bigcap F$, որտեղ հատումը կատարվում է ըստ այն բոլոր $F \subset X$ փակ ենթաբազմությունների, որ $M \subset F$:

Ապացուցում: Մի կողմից՝ եթե F-ը փակ է և $M \subset F$, ապա $\overline{M} \subset \overline{F} = F$, ուստի $\overline{M} \subset \bigcap F$: Մյուս կողմից՝ քանի որ $M \subset \overline{M}$ և $\overline{M}$-ը փակ է, ուստի F փակ ենթաբազմություններից մեկը $\overline{M}$-ն է: Հետևաբար $\bigcap F \subset \overline{M}$, և ուրեմն $\overline{M} = \bigcap F$: ■

Թեորեմ 3: Ցանկացած $M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում տեղի ունի $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ համընկում:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\overline{M \cup N}$ և $\overline{M} \cup \overline{N}$ բազմություններից յուրաքանչյուրը մյուսի ենթաբազմություն է: Իրոք,

$$M \subset \overline{M},\ N \subset \overline{N} \ \Rightarrow\ M \cup N \subset \overline{M} \cup \overline{N} \ \Rightarrow\ \overline{M \cup N} \subset \overline{\overline{M} \cup \overline{N}} = \overline{M} \cup \overline{N}.$$

Այստեղ օգտվեցինք նրանից, որ $\overline{M} \cup \overline{N}$-ը փակ է որպես երկու փակ ենթաբազմությունների միավորում: Մյուս կողմից՝

$$M \subset M \cup N,\ N \subset M \cup N \ \Rightarrow\ \overline{M} \subset \overline{M \cup N},\ \overline{N} \subset \overline{M \cup N} \ \Rightarrow\ \overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}.$$ ■

Ավարտելով փակույթի հատկությունները՝ նկատենք, որ $\forall M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում տեղի ունի $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$ ներդրում (հիմնավորե՛ք և բերե՛ք օրինակ, երբ $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$):

Այս ամենից հետո պատրաստ ենք ծանոթանալու կամայական բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ևս մի հիմնական եղանակի հետ:

Վերը (X, τ) տոպոլոգիական տարածության ամեն մի $M \subset X$ ենթաբազմության համար սահմանվեց $\overline{M}$ փակ ենթաբազմություն (M-ի փակույթը τ տոպոլոգիայում): Այդ $M \mapsto \overline{M}$ համադրումը կոչվում է **փակման գործողություն տոպոլոգիական**

Այժմ գնալու ենք հակառակ ուղղությամբ. վերացարկելով այդ հատկություններից հիմնականները՝ սահմանվում է գործողություն, որի միջոցով որոշվում է տոպոլոգիա բազմության վրա:

Սահմանում: Դիցուք ինչ-որ եղանակով X բազմության ամեն մի M ենթաբազմության համադրված է X-ի ինչ-որ ենթաբազմություն, որը նշանակվում է $\mathrm{cl}\, M$ (cl-ն ֆրանսերեն clôture — փակում բառի կրճատն է), այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ 4 պահանջները.

K1. $\mathrm{cl}\, \varnothing = \varnothing$;

K2. $M \subset \mathrm{cl}\, M$;

K3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, M) = \mathrm{cl}\, M$;

K4. $\mathrm{cl}(M \cup N) = \mathrm{cl}\, M \cup \mathrm{cl}\, N$, ցանկացած $M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում:

Ամեն մի այսպիսի գործողություն կոչվում է Կուրատովսկու **փակման գործողություն բազմության վրա**:

Լեմմա: 1-4 աքսիոմներից հետևում է՝

ա) $\mathrm{cl}\, X = X$;

բ) եթե $A \subset B \subset X$, ապա $\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$:

Ապացույցում: ա) Մի կողմից, ըստ K2-ի $X \subset \mathrm{cl}\, X$, իսկ մյուս կողմից ակնհայտ է, որ $\mathrm{cl}\, X \subset X$: Ուստի $\mathrm{cl}\, X = X$;

բ) $A \subset B \;\Rightarrow\; (B = A \cup (B \setminus A)) \;\Rightarrow\; (\mathrm{cl}\, B = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}(B \setminus A)) \;\Rightarrow\; (\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B)$: ■

Թեորեմ 4 (K. Kuratowski, 1922)**:** X բազմության վրա տրված Կուրատովսկու փակման գործողությունը որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա: Ընդ որում՝ ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը այդ տոպոլոգիայում համընկնում է $\mathrm{cl}\, M$-ի հետ՝ $\overline{M} = \mathrm{cl}\, M$:

Ապացույցում: Սահմանենք σ տոպոլոգիա X բազմության վրա՝ հիմնվելով փակ ենթաբազմությունների վրա (տե՛ս թեորեմ 3-ը թեմա 5-ում): $M \subset X$ ենթաբազմությունը համարելու ենք փակ σ տոպոլոգիայում, եթե $M = \mathrm{cl}\, M$: Այսպիսով

$$M \in \sigma \;\Leftrightarrow\; M = \mathrm{cl}\, M.$$

Ստուգենք σ-ի համար տոպոլոգիայի 1*-3* աքսիոմները (տե՛ս թեորեմ 3-ը թեմա 5-ում): Դրանցից 1*-ը հետևում է K1-ից և լեմմայից: Միավորման 2* աքսիոմը բավարարվում է շնորհիվ K4-ի: Ստուգենք 3*-ը: Դիցուք ունենք փակ ենթաբազմությունների որևէ $\{M_i \subset X, i \in I \mid \mathrm{cl}\, M_i = M_i\}$ ընտանիք: Ցույց տանք, որ նրանց

$F = \bigcap\limits_{i \in I} M_i$ հատումը պատկանում է σ-ին (դա համարժեք է նրան, որ ցույց տանք $\operatorname{cl} F = F$): Մի կողմից ունենք $F \subset \operatorname{cl} F$ ըստ K2-ի: Մյուս կողմից՝ $F \subset M_i \Rightarrow (\operatorname{cl} F \subset \operatorname{cl} M_i)$, և քանի որ $\operatorname{cl} M_i = M_i$, ուստի $\operatorname{cl} F \subset \bigcap\limits_{i \in I} M_i = F$: Այսպիսով $\operatorname{cl} F = F$, և ուրեմն σ-ն տոպոլոգիա է X բազմության վրա:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը. ցույց տանք, որ $\forall M \subset X$ ենթաբազմության համար $\overline{M} = \operatorname{cl} M$: Ըստ թեորեմ 3-ի ունենք՝ $\overline{M} = \bigcap F$, որտեղ հատումը տարվում է ըստ բոլոր այն $F \subset X$ ենթաբազմությունների, որ $\operatorname{cl} F = F$ և $M \subset F$: Նրանից, որ $M \subset F \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset \operatorname{cl} F = F) \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset F) \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset \bigcap F = \overline{M})$: Մյուս կողմից՝ $M \subset \operatorname{cl} M \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{\operatorname{cl} M}$: Քանի որ $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} M) = \operatorname{cl} M$ ըստ K3-ի, ուստի $\operatorname{cl} M \in \sigma$ ըստ τ տոպոլոգիայի սահմանման: Քանի որ $\operatorname{cl} M$-ը փակ ենթաբազմություն է σ տոպոլոգիայում, հետևաբար $\overline{\operatorname{cl} M} = \operatorname{cl} M$, որից հետևում է, որ $\overline{M} = \operatorname{cl} M$: ∎

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 6-ի վերաբերյալ

1.1. Իրական թվերի սովորական տոպոլոգիայում գտեք անվերջ քանակով փակ ենթաբազմությունների որևէ ընտանիք, որի տարրերի միավորումը փակ չէ:

1.2. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը. ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում (բացառությամբ դիսկրետ տարածությունների) գոյություն ունի անվերջ քանակով փակ ենթաբազմությունների ընտանիք, որի տարրերի միավորումը փակ չէ:

Ցուցում. Դիտարկեք $\{[x, 1) \colon x > 0\}$ ընտանիքը $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում:

1.3. Թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում գտեք A ենթաբազմության փակույթը, եթե

ա) A-ն ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ ենթաբազմությունն է,

բ) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}$,

գ) A-ն բոլոր ռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունն է,

դ) A-ն բոլոր իռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունն է:

1.4. Թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիայում գտեք A ենթաբազմության փակույթը նախորդ խնդրում թվարկված դեպքերում:

1.5. Դիտարկենք $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների Φ ընտանիքը՝ կազմված $\varnothing$, $\mathbb{R}$ և բոլոր $(-r, r)$, $r > 0$ ենթաբազմություններից: Ապացուցեք, որ Φ-ն որոշում է տոպոլոգիա $\mathbb{R}$-ի վրա: Ամեն մի $r \in \mathbb{R}$ դեպքում գտեք $X(r) = (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը, եզրը և փակույթը:

1.6. Դիտարկենք 0 սկզբնակետով $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության ենթաբազմությունների Ψ ընտանիքը՝ կազմված $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$ և 0 կենտրոնով բոլոր $\mathcal{D}(r) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2;\ r > 0\}$ շրջաններից: Ապացուցեք, որ Ψ-ն որոշում է տոպոլոգիա $\mathbb{R}^2$-ի վրա (կոչվում է **համակենտրոն տոպոլոգիա**): Ապացուցեք, որ ամեն մի $r > 0$ դեպքում $A(r) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}(r)$ ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը, եզրը և փակույթը հետևյալն են՝

$$\operatorname{int} A(r) = \varnothing, \quad \operatorname{ext} A(r) = \mathcal{D}(r), \quad \partial A(r) = A(r), \quad \overline{A(r)} = A(r)\ :$$

1.7. Ապացուցեք, որ X տոպոլոգիական տարածության կամայական A ենթաբազմության և $X \setminus A$ ենթաբազմության եզրերը նույնն են՝ $\partial A = \partial(X \setminus A)$:

1.8. Ապացուցեք, որ տոպոլոգիական տարածության կամայական երկու չհատվող փակ ենթաբազմություններ չունեն որևէ ընդհանուր եզրային կետ:

1.9. Ապացուցեք. եթե X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմությունն այնպիսին է, որ $Y \subset F \subset X$, որտեղ F-ը փակ ենթաբազմություն է, ապա $\overline{Y} \subset F$:

1.10. Ապացուցեք. X տոպոլոգիական տարածության A ենթաբազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\partial A \subset A$:

1.11. Ապացուցեք, որ X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմության ∂Y եզրը դատարկ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ը բաց է և փակ է:

1.12. Ապացուցեք. տոպոլոգիական տարածության կամայական երկու չհատվող բաց ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակումը չի հատվում մյուս ենթաբազմության հետ: