Թեմա 16

Գծորեն կապակցված փարածություններ, գծային կապակցվածությունը որպես տոպոլոգիական հատկություն: Կապը կապակցվածություն և գծային կապակցվածություն հասկացությունների միջև: Տոպոլոգիական փարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչները:

Նախորդ թեմայում ... կապակցված տոպոլոգիական տարածություն և տարածության կապակցվածության բաղադրիչ հասկացությունները: Մասնավորապես տեսանք, որ թվային ուղիղը կապակցված է և ունի կապակցվածության մի բաղադրիչ՝ ինքը $\mathbb{R}$-ը: Իսկ $\mathbb{R}\setminus 0 = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ տարածությունը (որպես $\mathbb{R}$-ի ...) կապակցված չէ և ունի կապակցվածության երկու բաղադրիչ՝ $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$:

Այս օրինակներում ենթագիտակցաբար (կամ բառացի) կապակցվածությունը կարող է ընկալվել նաև որպես տվյալ տարածության կամայական մի կետից մի այլ կետ ինչ-որ ճանապարհով (ուղիով) անընդհատ տեղափոխվելու հնարավորություն: Բնական է համարել, որ $\mathbb{R}$-ում դա հնարավոր է, իսկ ~~ահա~~ $\mathbb{R}\setminus 0$ տարածությունում -1 կետից $+1$ կետ որևէ ուղիով անընդհատ տեղափոխվել հնարավոր չէ (0 կետի հեռացումը խախտում է $\mathbb{R}$-ի ամբողջականությունը): Այս ամենի հսպակեցումը մեզ բերում է գծորեն կապակցված տարածություն հասկացությանը:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածությունում **ուղի** կոչվում է $I = [0;1]$ հատվածի ամեն մի $f : I \to X$ անընդհատ արտապատկերում: Եթե $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$, ապա x_0-ն և x_1-ը կոչվում են f ուղու **սկիզբ** և **վերջ**: Եթե $f : I \to X$ ուղի ~~է~~, որը միացնում է x_0 կետը x_1 կետին, ապա $\bar{f} : I \to X$, $\bar{f}(t) = f(1-t)$, $t \in I$ արտապատկերումը նույնպես ուղի է, որը միացնում է x_1-ը x_0-ին: Եթե f ուղին այնպիսին է, որ $f(t) = x_0$, $t \in I$ ապա f-ը կոչվում է **հաստատուն ուղի x_0 կետում** և նշանակվում է ε_{x_0}:

Դիցուք ունենք $f, g : I \to X$ ուղիներ X-ում, ընդ որում $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ և $g(0) = x_1$, $g(1) = x_2$: Սահմանենք նոր՝ $h : I \to X$ արտապատկերում

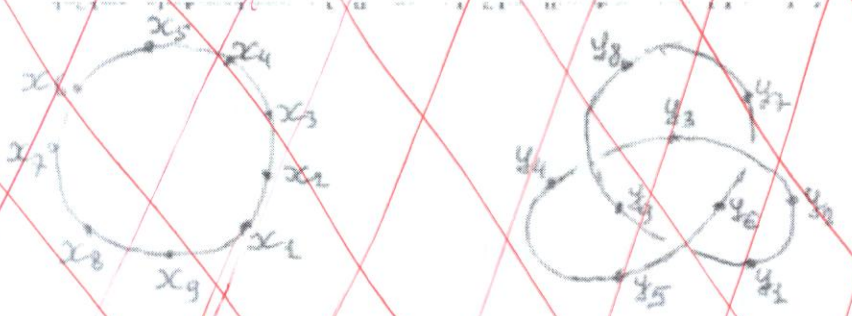
$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

բանաձևով: Նկատենք, որ $h(0) = f(0) = x_0$, $h(1) = g(1) = x_2$:

Այս արտապատկերումը կոչվում է f և g ուղիների արտադրյալ և նշանակվում է $f * g$:

Թեորեմ 1: Ուղիղների $f * g$ արտադրյալը ուղի է, որն սկսվում է x_0 կետից և ավարտվում է x_2 կետում:

Օրինակ՝ $\mathbb{R}^3$ տարածությունում հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների $x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$ շրջանագիծը անընդհատ ձևափոխումներով համընկեցնել այսպես կոչված «երեքնուկաձև» օվալի հետ: Մինչդեռ դրանք հոմեոմորֆ են միմյանց:



Իրոք, վերցնելով շրջանագծի վրա $x_1, x_2, \ldots, x_9$ կետերը, իսկ օվալի վրա $y_1, y_2, \ldots, y_9$ կետերը, մենք կարող ենք նախ կառուցել հոմեոմորֆիզմներ այդ պատկերների համապատասխան աղեղների միջև՝ $h_1 : x_1x_2 \to y_1y_2$, $h_2 : x_2x_3 \to y_2y_3, \ldots, h_8 : x_8x_9 \to y_8y_9, h_9 : x_9x_1 \to y_9y_1$: Այնուհետև հաջորդաբար «սոսնձելով» այդ արտապատկերումներից յուրաքանչյուրն իր հաջորդի հետ (թեմա 12-ի թեորեմ 3-ի իմաստով), կստանանք որոնվող h հոմեոմորֆիզմ:

Ապացուցելու համար մնում է ցույց տալ $f * g$ արտապատկերման անընդհատությունը: Այն անմիջապես հետևում է թեմա 12-ի թեորեմ 3-ից:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **գծորեն կապակցված տարածություն**, եթե նրա ցանկացած x_1 և x_2 կետեր կարող են միացվել որևէ ուղիով X-ում:

Թեորեմ 2: Դիցուք $x_0 \in X$ որևէ սևեռված կետ է: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի ցանկացած կետ միացվում է x_0-ին որևէ ուղիով:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը ակնհայտ է: Ցույց տանք բավարարությունը: Ըստ պայմանի՝ $\forall x_1,\, x_2 \in X$ կետերի համար գոյություն ունեն $f, g : I \to X$ ուղիներ, որ $f(0) = g(0) = x_0$ և $f(1) = x_1$, $g(1) = x_2$: Ուստի $\overline{f} * g$ ուղին x_1-ը միացնում է x_2-ին: ■

Սահմանում: X տարածության Y ենթաբազմությունը կոչվում է X-ի **գծորեն կապակցված ենթաբազմություն**, եթե Y-ը գծորեն կապակցված է որպես X-ի ենթատարածություն: Սա համարժեք է նրան, որ Y-ի կամայական y_1, y_2 կետեր կարող են միացվել որևէ $f : I \to Y$ ուղիով:

Նկատենք, որ շնորհիվ $I \to Y \subset X$ համադրույթի անընդհատության՝ f-ը նաև ուղի է X-ում:

$X = \bigcup X_j$:

Թեորեմ 3: Դիցուք X տարածությունը ներկայացված է որպես իր որոշ X_j, $j \in J$ գծորեն կապակցված ենթաբազմությունների միավորում: Եթե $\bigcap\limits_j X_j \neq \varnothing$, ապա X-ը ևս գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք $x_0 \in \bigcap\limits_j X_j$ որևէ սևեռված կետ է, դիտարկենք կամայական $x_1 \in X$ կետ: Գոյություն ունի այնպիսի X_j, որ $x_1 \in X_j$ և այնպիսի $f : I \to X_j$ ուղի, որ $f(0) = x_0$, $f(x) = x_1$: Դիցուք $h_j : X_j \to X$ արտապատկերումը X_j ենթաբազմության ներդումն է X-ի մեջ (այսինքն $h_j(x) = x, \forall x \in X_j$ կետի դեպքում): Պարզ է, որ $h_j \circ f$ ուղին միացնում է x_0 կետը x_1 կետին, ուստի X-ը գծորեն կապակցված է ըստ թեորեմ 2-ի: ■

Թեորեմ 4: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածության ցանկացած ուռուցիկ ենթաբազմություն գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Եթե $x, y \in \mathbb{R}^n$, ապա $(1-t)x + ty$, $t \in I$ տեսքի բոլոր կետերի բազմությունը x, y ծայրակետերով $[x, y]$ հատվածն է $\mathbb{R}^n$-ում (տե՛ս թեմա 14-ի վերջում): Հետևաբար, եթե W-ն ուռուցիկ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում և $x, y \in W$, ապա $[x, y]$ հատվածը պարունակվում է W-ում և $f : I \to W$, $f(t) = (1-t)x + ty$, $t \in I$ արտապատկերումը ուղի է W-ում, որը միացնում է x-ը y-ին: ■

Թեորեմ 5: Տարածության գծային կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է:

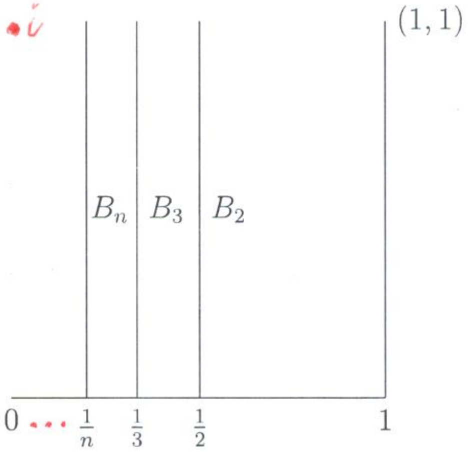
Ապացուցում: Բավական է ցույց տալ, որ գծորեն կապակցված փարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում նույնպես գծորեն կապակցված է: Դիցուք $h : X \to Y$ անընդհատ է և $h(X) = Y$: Դիտարկենք $\forall y_1, y_2 \in Y$ կետեր: Պայմանից հետևում է. գոյություն ունեն $x_1,\ x_2 \in X$ կետեր, որ $h(x_1) = y_1$, $h(x_2) = y_2$, և գոյություն ունի այնպիսի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$: Ուստի $g = h \circ f$ համադրույթը ուղի է Y-ում և $g(0) = y_1$, $g(1) = y_2$: ■

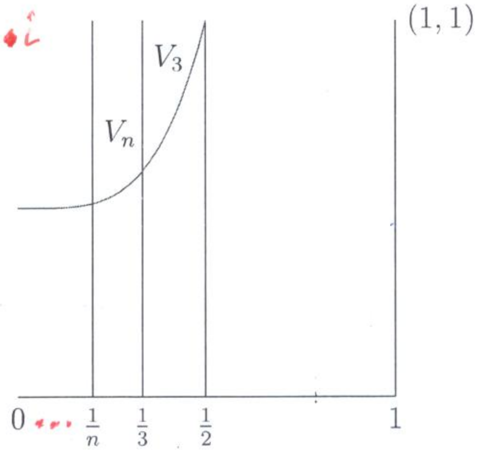
Կապակցվածության և գծային կապակցվածության

Թեորեմ 6: Ամեն մի գծորեն կապակցված փարածություն նաև կապակցված փարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը գծորեն կապակցված է, բայց կապակցված չէ: Նշանակում է գոյություն ունեն X-ի ոչ դատարկ, չհատվող U և V բաց ենթաբազմություններ, որ $X = U \cup V$: Վերցնենք որևէ $x_1 \in U,\ x_2 \in V$ կետեր: Ապա գոյություն ունի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$: Ունենք $I = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, ընդ որում $f^{-1}(U)$-ն և $f^{-1}(V)$-ն ոչ դատարկ, չհատվող բաց ենթաբազմություններ են $[0;1]$ հատվածում, ինչը հակասում է $[0;1]$-ի կապակցվածությանը: ■

Կապակցված փարածությունը կարող է գծորեն կապակցված չլինել: Բերենք համապատասխան օրինակ: Ներկայացնելով $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ հարթության (x,y) կետերը նաև որպես $x+iy$ կոմպլեքս թվեր՝ դիտարկենք $\mathbb{R}^2$-ի A և B երկու ենթաբազմություններ՝ $A = \{i\}$, $B = [0;1] \cup \left\{\dfrac{1}{n} + yi;\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le y \le 1\right\}$, որտեղ $[0;1]$-ը OX առանցքի $\{(x,0); 0 \le x \le 1\}$ ենթաբազմությունն է: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության $C = A \cup B$ ենթաբազմությունը $\mathbb{R}^2$-ի սովորական մետրիկ տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով:

ա) 

բ) 

Թեորեմ 7: C-ն կապակցված, բայց ոչ գծորեն կապակցված փարածություն է:

Ապացույցը ստացվում է հետևյալ երեք պնդումներից:

Պնդում 1. C-ն կապակցված փարածություն է:

Իրոք, քանի որ B-ի յուրաքանչյուր $B_n = [0;1] \cup \left\{ \dfrac{1}{n} + yi,\ 0 \le y \le 1 \right\}$ ենթաբազմությունը կապակցված է որպես երկու հատվող հատվածների միավորում (տե՛ս նկար ա-ն) և $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$, ուստի C-ի $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ենթաբազմությունը կապակցված է ըստ թեմա 15-ում թեորեմ 3-ի:

Մյուս պնդումը ձևակերպելու համար կանգ առնենք i կետի շրջակայքերի մի առանձնահատկության վրա: Դիտարկենք i կետի $U = C \cap \left\{ z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \dfrac{1}{2} \right\}$ բաց շրջակայքը C տարածությունում (տես նկար բ-ն): Այստեղ $\left\{ z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \dfrac{1}{2} \right\}$ ենթաբազմությունը i կենտրոնով $r = \dfrac{1}{2}$ շառավղով բաց շրջան է $\mathbb{R}^2$-ում: Նկատենք, որ $U \cap B$ ենթաբազմությունը զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող $V_n =$ վերաձևակերպել պարզաբանել չէ $U \cap \left\{ \dfrac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1 \right\}$, $n > 2$ ենթաբազմությունների միավորումն է:

Պնդում 2. Յուրաքանչյուր V_n ենթաբազմությունը բաց և փակ ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Իրոք, քանի որ ամեն մի $\left\{ \dfrac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1 \right\}$ ենթաբազմություն փակ է $\mathbb{R}^2$-ում (հիմնավորել), ուստի V_n-ը փակ է U ենթաբազմությունում ըստ մակածված տոպոլոգիայի սահմանման: Մյուս կողմից V_n-ը կարող է ներկայացվել

$$V_n = U \cap \left\{ (x,y);\ \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

տեսքով, որտեղ $\left\{ (x,y);\ \dfrac{1}{n-1} < x < \dfrac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R} \right\}$ ենթաբազմությունը բաց է $\mathbb{R}^2$-ում որպես երկու՝ $\left\{ (x,0);\ \dfrac{1}{n-1} < x < \dfrac{1}{n+1} \right\}$ և $\{(0;y),\ y \in \mathbb{R}\}$ բաց ենթաբազմությունների ուղիղ արտադրյալ: Հետևաբար V_n-ը նաև բաց ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Վերջապես ապացուցելու համար, որ C-ն գծորեն կապակցված չէ, բավական է ցույց տալ, որ i կետը հնարավոր չէ C-ում ուղիով միացնել B-ի որևէ կետի հետ: Դրա համար ցույց կտանք, որ եթե $f : I \to C$ ուղին այնպիսին է, որ $f(0) = i$, ապա f-ը հաստատուն ուղի է, այսինքն՝ $f(t) = i,\ \forall\, t \in I$ դեպքում: Նախ ապացուցենք:

Պնդում 3. Յանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i) \subset I$ ենթաբազմության համար:

Ապացուցում: Դիտարկենք $f(t_0) = i$ կետի վերը բերված U բաց շրջակայքը C-ում: Քանի որ f-ը անընդհատ է t_0 կետում, ուստի գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, որ $f(t) \in U$, երբ $|t - t_0| < \varepsilon$, այսինքն՝ երբ $t \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$: Ցույց տանք, որ t_0-ի այդ շրջակայքն ընկած է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմությունում: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի $t_1 \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ կետ և $f(t_1) \neq i$: Նշանակում է $f(t_1) \in U \cap B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, ուստի գոյություն ունի $n_1 > 2$ բնական թիվ, որ $f(t_1) \in V_{n_1}$: Քանի որ $[0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ենթաբազմությունը հետևյալ երեք՝ $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$,

$[0; t_0+\varepsilon)$ և $(t_0-\varepsilon, 1]$ ենթաբազմություններից որևէ մեկն է, ուստի այն կապակցված ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Հետևաբար $W = f([0,1] \cap (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)) \subset U$ ենթաբազմությունը կապակցված է շնորհիվ f-ի անընդհատության: Քանի որ $W \subset U$, իսկ V_{n_1}-ը համաձայն պնդում 2-ի բաց և փակ ենթաբազմություն է U-ում, ուստի $V_{n_1} \cap W$-ն բաց և փակ է W-ում (ըստ U-ից W-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի սահմանման): Բացի այդ $f(t_1) \in V_{n_1} \cap W$, և ուրեմն $V_{n_1} \cap W \neq \varnothing$: Այժմ W-ի կապակցվածությունից հետևում է, որ $W = V_{n_1} \cap W$, ուստի $W \subset V_{n_1}$: Բայց դա անհնարին է, քանի որ մի կողմից $i = f(t_0) \in W \subset V_{n_1}$, իսկ մյուս կողմից $i \notin V_{n_1}$: Հետևաբար $[0,1] \cap (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset f^{-1}(i)$, և ուրեմն ցանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմության համար: ■

Այժմ պատրաստ ենք ավարտելու թեորեմ 7-ի ապացուցումը:

Նախ, որպես հետևանք պնդում 3-ից ստանում ենք, որ $f^{-1}(i)$-ն ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Մյուս կողմից, $\{i\}$-ն փակ ենթաբազմություն է C-ում, ուստի $f^{-1}(i)$-ն փակ ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում շնորհիվ f-ի անընդհատության: Հետևաբար $f^{-1}(i) = [0,1]$ շնորհիվ $[0,1]$-ի կապակցվածության: ■

Տոպոլոգիական տարածության կապակցվածության բաղադրիչ հասկացության ընդհանրացումն սահմանենք:

Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչ

[illegible]

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչ կոչվում է նրա ամեն մի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն, որը չի պարունակվում իրենից տարբեր որևէ գծորեն կապակցված ենթաբազմությունում:

Թվարկենք կապակցվածության բաղադրիչների հատկությունները, գծային կապակցվածության բաղադրիչները նույնպես օժտված են նմանատիպ հատկություններով:

Հ1. Տարածության ամեն մի կետ պատկանում է գծային կապակցվածության որևէ բաղադրիչի,

Հ2. Գծային կապակցվածության ցանկացած երկու բաղադրիչ կամ չեն հատվում, կամ համընկնում են,

Հ3. Տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչների քանակը (հզորությունը) տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

Այդուհանդերձ կապակցված ենթաբազմությունների և կապակցվածության բաղադրիչների ոչ բոլոր հատկություններն են տարածվում գծորեն կապակցված ենթաբազմությունների և գծային կապակցվածության բաղադրիչների վրա:

Մասնավորապես գծորեն կապակցված ենթաբազմության փակումը կարող է չլինել գծորեն կապակցված ենթաբազմություն:

Որպես օրինակ դիտարկենք վերը քննարկված $\mathbb{R}^2$-ի $C = A \cup B$ ենթաբազմության B գծորեն կապակցված ենթաբազմությունը: Նրա $\overline{B} = C$ փակումը գծորեն կապակցված չէ ըստ թեորեմ 7-ի:

Այժմ բերենք մի բավարար պայման, որի դեպքում փարածության կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են:

Թեորեմ 8: Դիցուք X փարածության յուրաքանչյուր կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կապակցված փարածություն է, դիտարկենք նրա գծային կապակցվածության որևէ U բաղադրիչ (այդպիսին գոյություն ունի շնորհիվ Հ1 հատկության): Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\forall x \in U$ կետի համար գոյություն ունի x-ի V գծորեն կապակցված շրջակայք: Թեորեմ 3-ից հետևում է, որ $V \cup U$-ն X-ի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն է, ուստի $V \subset U$: Այսպիսով U-ն շրջակայք է իր կամայական կետի համար, ուստի U-ն X-ի բաց ենթաբազմություն է: Ըստ Հ2-ի՝ $X \setminus U$-ն X-ի մյուս բոլոր գծային կապակցվածության բաղադրիչների միավորումն է: Ուստի $X \setminus U$-ն բաց ենթաբազմություն է որպես բաց ենթաբազմությունների միավորում: Քանի որ U-ն և $(X \setminus U)$-ն բաց են, նրանք նաև փակ ենթաբազմություններ են: Այսպիսով U-ն X կապակցված փարածության ոչ դատարկ, բաց և փակ ենթաբազմություն է, ուստի $X = U$: Հետևաբար X-ը գծորեն կապակցված է: ■

Հակառակ պնդումը հետևում է թեորեմ 6-ից:

Թեորեմ 8-ից սփանում ենք:

Հեփևանք 1: Եթե X փարածության ամեն մի կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք, ապա նրա ամեն մի գծային կապակցվածության բաղադրիչ X-ի բաց ենթաբազմություն է:

Հեփևանք 2 Էվկլիդյան $\mathbb{R}^2$ փարածության բաց ենթաբազմությունների համար կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են:

Սա հետևում է նրանից, որ $\mathbb{R}^n$-ի ամեն մի կետի գնդային շրջակայք իր մեջ պարունակում է այդ կետի բաց գնդային շրջակայք, որն իսկապես գծորեն կապակցված է ըստ թեորեմ 4-ի (հիմնավորել):

Խնդիրներ և վարժություններ բաժին 16-ի վերաբերյալ

16.1. Ճիշտ՞ է արդյոք. Կապակցված ենթաբազմության տոպոլոգիական փակումը կապակցված է:

16.2. Ապացուցել. կապակցված տարածության X կապակցված տարածության X/R ֆակտոր-տարածության կապակցված է:

16.3. Ճիշտ՞ է արդյոք. եթե ճանապարհային կապակցված տարածությունների $X\times Y$ արտադրյալը կապակցված է, ապա X-ը և Y-ը կապակցված են:

Ցուցում: Դիտարկել $X\times Y$ արտադրյալի p_X և p_Y պրոյեկցիաները X-ի և Y-ի վրա և օգտվել թեորեմ 5-ի ապացույցից:

16.4. Ապացուցել հետևյալ թեորեմը. $X\times Y$ արտադրյալը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ կապակցված են X-ը և Y-ը:

Ցուցում: Ճանապարհային կապակցվածությունը ապացուցելու համար վերցնել $X\times Y$-ի երկու կետեր (x_1, y_1) և (x_2, y_2) կետերը: Դիցուք $f_1: I\longrightarrow X$ ուղին միացնում է x_1 կետը x_2 կետին, իսկ $f_2: I\longrightarrow Y$ ուղին միացնում է y_1 կետը y_2 կետին: Օգտվելով բաժին 14-ում թեորեմ 3-ից դիտարկել $(f_1, f_2): I\longrightarrow X\times Y$; $(f_1,f_2)(t)=(f_1(t), f_2(t))$ արտապատկերումը:

16.5. Դիցուք X-ը և Y-ը հոմեոմորֆ տարածություններ են: Ապացուցել. X-ը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ կապակցված է Y-ը:

16.6. Ապացուցել. R^n էվկլիդեսյան տարածության $B^n=\{x; \|x\|\le 1\}$ միավոր գունդը կապակցված ենթատարածություն է:

Ցուցում: Օգտվել, որ B^n-ը ուռուցիկ ենթատարածություն է:

16.7. Ապացուցել, որ R^{n+1} էվկլիդեսյան տարածության S^n_+ և S^n_- միավոր կիսասֆերաները, որտեղ

$S^n_+=\{x\in R^{n+1}; \|x\|=1, x_{n+1}\ge 0\}$, $S^n_-=\{x\in R^{n+1}; \|x\|=1, x_{n+1}\le 0\}$

կապակցված ենթատարածություններ են:

Ցուցում: Ապացուցելով, որ R^{n+1}-ի արտապատկերումը R^n-ի վրա սահմանված $p(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բանաձևով որոշվող S^n_+ և S^n_- կիսասֆերաները հոմեոմորֆ են B^n գնդին, օգտվել նախորդ երկու խնդիրներից:

16.8. Ապացուցել. R^{n+1} էվկլիդեսյան տարածության $S^n=\{x; \|x\|=1\}$

միավոր սֆերան գծորեն կապակցված տարածություն է:
Ցուցում: Ներկայացնելով S^n-ը որպես S^n_+ և S^n_- կիսասֆերաների միավորում, օգտվել նախորդ խնդրից և թեորեմ 3-ից:

16.9. Ապացուցել, $n \geq 0$ չափանի RP^n պրոյեկտիվ տարածությունը գծորեն կապակցված է:
Ցուցում: Եթե $n=0$, RP^0-ն բաղկացած է մի կետից: Եթե $n>0$, ներկայացնել RP^n-ը որպես S^n սֆերայի, կամ S^n_+ կիսասֆերայի ֆակտորտարածություն և օգտվել նախորդ խնդիրներից:

16.10. Դիտարկենք R^2 հարթության $A=\{(x,y);\ x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\}$ և $B=\{(0,y);\ -1 \leq y \leq 1\}$ ենթաբազմությունները: Ապացուցել, $A \cup B$ միավորումը կապակցված է, բայց գծորեն կապակցված չէ:
Ցուցում: Թեորեմ 7-ի եզրակացությունից ցույց տալ, որ B-ի ոչ մի կետ ճանապարհով չի կարող միացվել A-ի որևէ կետի հետ: