Թեմա 1

Մետրիկ բազմության վրա և մետրիկ տարածություն հասկացությունները, օրինակներ: Մետրիկ տարածության տոպոլոգիան, մետրիկային տարածություններ, օրինակներ: Ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը և փակույթը մետրիկային տարածություններում:

Մետրիկ տարածությունները սահմանվել են ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Մ. Ֆրեշեի կողմից 1906 թվին: Նպատակն է՝ կամայական բազմություններում ներմուծելով կետերի միջև հեռավորության, հետևաբար և՝ կետերի մոտիկության հասկացություն, զարգացնել անալիզին և երկրաչափությանը բնորոշ ամենաընդհանուր հատկություններով տեսություն:

Այնուհետև, մետրիկ տարածության հիմքով, արդեն տոպոլոգիայում ներմուծվեցին մետրիկային տարածությունները որպես տոպոլոգիական տարածություններ: Այժմ հաջորդաբար քննարկենք այդ երկու հասկացությունները:

Մետրիկ տարածության հիմքում ընկած է բազմության վրա մետրիկ հասկացությունը: Դիցուք X-ը որևէ բազմություն է, $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է:

Սահմանում: Որևէ $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ որևէ արտապատկերում կոչվում է **մետրիկ X բազմության վրա**, եթե կամայական $x, y, z \in X$ տարրերի դեպքում բավարարվում են հետևյալ երեք պայմանները.

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (նույնականացման աքսիոմ),
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (համաչափության աքսիոմ),
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (եռանկյան աքսիոմ):

Հետևանք աքսիոմներից: Վերցնելով 3-ում $z = x$ ստանում ենք՝ $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ տարրերի դեպքում: Այժմ տեսնում ենք, որ բազմության վրա մետրիկը տարրական երկրաչափությունից հայտնի կետերի միջև հեռավորության ընդհանրացումն է կամայական բազմությունների դեպքում:

Սահմանում: (X, ρ) զույգը (այսինքն X բազմությունը՝ իր վրա տրված ρ մետրիկի հետ միասին) կոչվում է **մետրիկ տարածություն**, իսկ $\rho(x, y)$ թիվը՝ x և y **կետերի միջև հեռավորություն** տվյալ մետրիկ տարածությունում:

Օրինակ 1: Յանկացած X բազմություն կարելի է վերածել մետրիկ տարածության առնվազն մի եղանակով՝ $\rho(x, y) = 1$, երբ $x \neq y$ և $\rho(x, y) = 0$, երբ $x = y$: Այս մետրիկ տարածությունը կոչվում է **դիսկրետ մետրիկ տարածություն** (անվանումը կպարզաբանվի մի փոքր ուշ):

Օրինակ 2: $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա սահմանենք մետրիկ՝ $\rho(x,y) = |x-y|$ բանաձևով: Այն կոչվում է թվային ուղղի **սովորական** կամ **էվկլիդյան մետրիկ**, իսկ $(\mathbb{R},\rho)$ զույգը կոչվում է էվկլիդյան թվային ուղիղ:

1-3 աքսիոմների ստուգումը օրինակներ 1, 2-ում թողնվում է ընթերցողին՝ որպես հեշտ, բայց օգտակար խնդիր: Հաջորդ կարևոր օրինակը ընդհանրացնում է օրինակ 2-ի էվկլիդյան մետրիկը:

Օրինակ 3: Դիտարկենք n չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային տարածությունը և սահմանենք $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ տարրերի միջև հեռավորություն $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ բանաձևով: Մետրիկի 1-2 աքսիոմները ակնհայտորեն բավարարվում են, իսկ 3-րդ աքսիոմը (սովորաբար դժվարություն է այս աքսիոմի ստուգումը) հետևում է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունից՝

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

որն արդարացի է թվերի կամայական $a_1,a_2,\ldots,a_n$ և $b_1,b_2,\ldots,b_n$ հաջորդականությունների դեպքում:

Իրոք, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$ տարրերի համար 3-րդ աքսիոմն ընդունում է

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}$$

տեսքը: Նշանակելով $x_k-y_k=a_k,\ y_k-z_k=b_k$ ստանում ենք՝ $x_k-z_k=a_k+b_k$, և 3-րդ աքսիոմն ընդունում է նոր՝ $\sqrt{\sum\limits_k (a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} + \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ տեսք: Այն համարժեք է $\sum\limits_k a_k \cdot b_k \le \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ անհավասարությանը: Այսպիսով մնում է ապացուցել Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը:

Նկատենք, որ կամայական $t \in \mathbb{R}$ թվի դեպքում ունենք $\sum\limits_k (a_k - t\cdot b_k)^2 \ge 0$ հավասարի անհավասարություն, որը կարելի է գրել $\left(\sum\limits_k b_k^2\right)t^2 - 2\left(\sum\limits_k a_k b_k\right)t + \left(\sum\limits_k a_k^2\right) \ge 0$ տեսքով: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $\left(\sum\limits_k a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum\limits_k a_k^2\right) \cdot \left(\sum\limits_k b_k^2\right)$ անհավասարությունը, որից էլ ստանում ենք $\sum\limits_k a_k b_k \le \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$: ■

Օրինակ 4: Եթե ρ-ն մետրիկ է X բազմության վրա, ապա ցանկացած $c>0$ թվի դեպքում $c\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը (սահմանվում է $(c\rho)(x,y) = c\cdot\rho(x,y)$ բանաձևով) ակնհայտորեն նույնպես մետրիկ է X-ի վրա: Մետրիկ է նաև $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $\bar{\rho}(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ բանաձևով: Ստուգենք 3-րդ աքսիոմը $\bar{\rho}$-ի համար: Նախ նկատենք, որ

$$\bar{\rho}(x,z) = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} \leq \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

(ստուգվում է անմիջականորեն՝ ազատվելով հայտարարներից): Այնուհետև

$$\bar{\rho}(x,z) \leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} \leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} =$$
$$= \bar{\rho}(x,y) + \bar{\rho}(y,z)$$

■

Նշենք, որ ստացված $(X,\bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունում $\bar{\rho}(x,y) < 1, \ \forall\, x,y \in X$ կետերի դեպքում:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան կոորդինատային տարածության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Այն վերածվում է մետրիկ տարածության՝ սահմանելով նրա վրա այսպես կոչված **անկյունային մետրիկ:**

Պարզության նկատառումով բոլոր անհրաժեշտ դատողությունները կկատարենք $n=2$ մասնավոր դեպքում:

Նախ $\mathbb{R}^3$-ի O կետով անցնող յուրաքանչյուր l ուղղի վրա ընտրենք մի որոշակի L կետ այնպես, որ $\overrightarrow{OL}$ վեկտորն ունենա միավոր երկարություն՝ $|\overrightarrow{OL}| = 1$:

Այժմ սահմանենք կամայական երկու l_1 և l_2 ուղիղների միջև հեռավորություն $d(l_1,l_2) = \arccos|(\overrightarrow{OL_1},\overrightarrow{OL_2})|$ բանաձևով (այստեղ $(\overrightarrow{OL_1},\overrightarrow{OL_2})$-ը $\overrightarrow{OL_1}$ և $\overrightarrow{OL_2}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է, իսկ $d(l_1,l_2)$-ը անկյուն է $[0^\circ, 90^\circ]$ միջակայքից):

Պարզ է, որ $d(l_1,l_2)$-ը բավարարում է մետրիկի 1-2 աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ այն բավարարում է նաև երրորդ աքսիոմին՝

$$d(l_1,l_2) + d(l_2,l_3) \geq d(l_1,l_3) \qquad (*)$$

ցանկացած երեք l_1, l_2, l_3 ուղիղների դեպքում: Նկատենք, որ եթե այդ ուղիղներից որևէ երկուսը նույնն են, ապա $(*)$-ը բավարարվում է:

Այժմ դիտարկենք որևէ երեք ոչ համահարթ l_1, l_2, l_3 ուղիղներ: Այս դեպքում OL_1, OL_2, OL_3 ճառագայթները կազմում են O գագաթով եռանիստ անկյուն: Հետագա հիմնավորումներում օգտվելու ենք տարրական տարածաչափությունից հայտնի հետևյալ թեորեմից. կամայական $(O; OL_1, OL_2, OL_3)$ եռանիստ անկյան երեք՝ $\alpha = \angle L_1OL_2$, $\beta = \angle L_2OL_3$, $\gamma = \angle L_1OL_3$ հարթ անկյուններից ցանկացած երկուսի գումարը մեծ է երրորդից (նշենք, որ դրանց մեծությունները գտնվում են $(0^\circ, 180^\circ)$ միջակայքում):

Կախված l_i ուղիղների վրա L_i, $i = 1,2,3$ կետերի դիրքերից՝ հնարավոր են հետևյալ չորս դեպքերը.

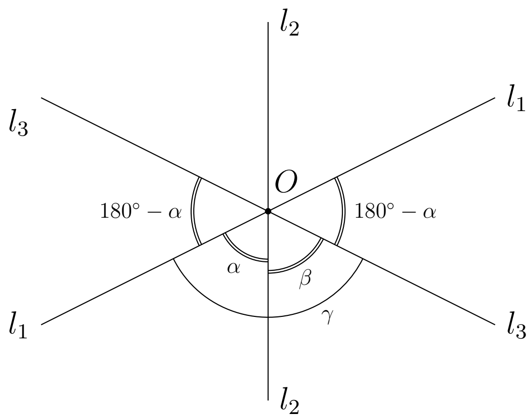
1. եթե α, β, γ անկյունները սուր են, ապա $d(l_1,l_2) = \alpha, \ d(l_2,l_3) = \beta, \ d(l_1,l_3) = \gamma$,

2. եթե α, β, γ անկյունները բութ են, ապա $d(l_1, l_2) = 180° - \alpha,\ d(l_2, l_3) = 180° - \beta,\ d(l_1, l_3) = 180° - \gamma$,

3. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն բութ են, իսկ երրորդը՝ γ-ն սուր է, ապա $d(l_1, l_2) = 180° - \alpha,\ d(l_2, l_3) = 180° - \beta,\ d(l_1, l_3) = \gamma$,

4. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն սուր են, իսկ երրորդը՝ γ-ն բութ է, ապա $d(l_1, l_2) = \alpha,\ d(l_2, l_3) = \beta,\ d(l_1, l_3) = 180° - \gamma$:

Հասարակ գծագրի միջոցով կարելի է տեսնել, որ 1-3 դեպքերից յուրաքանչյուրում $d(l_1, l_2),\ d(l_2, l_3),\ d(l_1, l_3)$ անկյունները O գագաթով որոշակի եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ են, ուստի $(*)$-ը տեղի ունի ըստ վերը բերված թեորեմի: Իսկ 4-րդ դեպքում այդ երեք անկյունները չեն հանդիսանում որևէ եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ: Ուստի այս դեպքում $(*)$-ը կապացուցենք իր բոլոր ա), բ), գ) պարբերակներով՝ օգտվելով ստորև բերվող սխեմատիկ գծագրից, որտեղ մի աղեղով նշված է γ բութ անկյունը, իսկ երկուական աղեղներով՝ սուր անկյունները:



Քանի որ

ա) $\alpha + \beta > \gamma > 180° - \gamma$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_2, l_3) > d(l_1, l_3)$,

բ) $\beta + (180° - \gamma) > 180° - \alpha > \alpha$, ուստի $d(l_2, l_3) + d(l_1, l_3) > d(l_1, l_2)$,

գ) $\alpha + (180° - \gamma) > 180° - \beta > \beta$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_1, l_3) > d(l_2, l_3)$:

Մյուս դեպքում, երբ l_1, l_2, l_3 ուղիղները համահարթ են, $(*)$-ը բավարարվում է ակնհայտորեն: ■

Օրինակ 5-ի մետրիկ տարածությունը ընդհանուր դեպքում կոչվում է **n-չափականության իրական պրոյեկտիվ տարածություն** և նշանակվում է $\mathbb{RP}^n$, կամ պարզապես $\mathbb{P}^n$: Մասնավոր, $n = 2$ դեպքում $\mathbb{RP}^2$ տարածությունը կոչվում է նաև **իրական պրոյեկտիվ հարթություն**: Այդ տարածությունները կարևոր դեր են կատարում դասական երկրաչափությունում և տոպոլոգիայում:

Սահմանում: Երկու (X_1, ρ_1) և (X_2, ρ_2) մետրիկ պարածություններ կոչվում են **իզոմետրիկ պարածություններ**, եթե գոյություն ունի $\varphi : X_1 \to X_2$ բիյեկտիվ արտապատկերում, որ $\rho_1(x, y) = \rho_2(\varphi(x), \varphi(y)),\ \forall\, x, y \in X$ կետերի դեպքում:

Հեշտ է տեսնել, որ $X = \mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա օրինակներ 1-ում և 2-ում սահմանված մետրիկներից ստացվող մետրիկ պարածությունները իզոմետրիկ պարածություններ չեն (ինչո՞ւ):

Իզոմետրիկ չեն նաև (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ պարածությունները, եթե թեկուզ մի զույգ $x, y \in X$ կետերի դեպքում $\rho(x, y) \geq 1$:

Իսկ օրինակ 1-ում վերցնելով մի դեպքում $X = \mathbb{Q}$, իսկ մյուս դեպքում՝ $X = \mathbb{Z}$, ստանում ենք իզոմետրիկ պարածություններ (հիմնավորե՛ք):

Սահմանում: Դիցուք (X, ρ)-ն որևէ մետրիկ պարածություն է, $a \in X$, $r > 0$: Հետևյալ ենթաբազմությունները՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\},$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\},$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\},$$

կոչվում են (X, ρ) մետրիկ պարածության համապատասխանաբար a կենտրոնով և r շառավղով **անեզր գունդ, եզրով գունդ** և **սֆերա**:

Այս անվանումները մեկնաբանելու համար նշենք, որ $\mathcal{B}(a, r)$ և $\mathcal{D}(a, r)$ գնդերի համար եզր է համարվում $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերան: Այսպիսով $\mathcal{B}(a, r)$ գունդը պարունակում է իր եզրը, իսկ $\mathcal{D}(a, r)$ գունդը՝ ոչ:

Օրինակ 6: Դիսկրետ (X, ρ) մետրիկ պարածությունում ունենք.
եթե $r < 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = \{a\}$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
եթե $r > 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = X$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
իսկ $r = 1$ դեպքում՝ $\mathcal{D}(a, 1) = \{a\},\ \mathcal{B}(a, 1) = X,\ \mathcal{S}(a, 1) = X \setminus \{a\}$:

Օրինակ 7: Պարզաբանենք՝ ինչ են $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան մետրիկ պարածության անեզր և եզրով գնդերն ու սֆերաները $n = 1,\ 2,\ 3$ դեպքերում:

$n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r),$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r],$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}:$$

Դրանք էվկլիդյան $\mathbb{R}$ թվային ուղղի բաց ինտերվալները, փակ հատվածներն ու կետազույգերն են:

$n = 2$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\},$$
$$\mathcal{B}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \le r^2\},$$
$$\mathcal{S}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 = r^2\}:$$

Դրանք $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության բաց և փակ շրջաններն են ու շրջանագծերը:

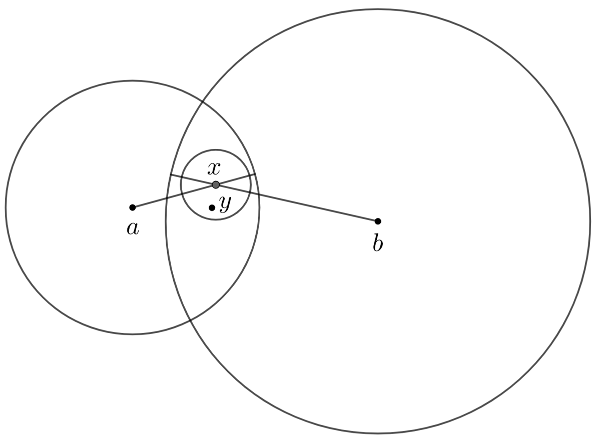
$n = 3$ դեպքում՝ դրանք $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան պարածության անեզր և եզրով գնդերն են ու գնդային մակերևույթները (այդ տերմինների սովորական իմաստով):

Թեորեմ 1: (X,ρ) մետրիկ պարածության բոլոր $\mathcal{D}(x,r)$ անեզր գնդերի բազմությունը հանդիսանում է բազա X-ի ինչ-որ տոպոլոգիայի համար (այդ տոպոլոգիան կոչվում է X-ի **մետրիկային տոպոլոգիա**, իսկ $B = \{\mathcal{D}(x,r)\}$ ընտանիքը՝ նրա կանոնական բազա:

Ապացուցման հիմքում ընկած է թեմա 5-ի թեորեմ 2-ը, ըստ որի՝ պետք է ստուգենք երկու պայման:

1. $\bigcup \mathcal{D}(x,r) = X$ (հետևում է նրանից, որ միշտ $x \in \mathcal{D}(x,r)$):

2. Ամեն մի ոչ դատարկ $\mathcal{D}(a,r_1)\cap\mathcal{D}(b,r_2)$ հատում ներկայացվում է որպես անեզր գնդերի միավորում: Բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $x \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$ կետի համար գոյություն ունի $\mathcal{D}(x,r)$ գունդ, որ $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: Այդ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշելու համար դիտարկենք մասնավոր դեպք. որպես (X,ρ) մետրիկ պարածություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ հարթությունը սովորական էվկլիդյան մետրիկով (տե՛ս գծագիրը):



Ունենք՝ $\rho(a,x) < r_1, \rho(b,x) < r_2$: Գծագրից երևում է. եթե r-ը այնպիսին է, որ

$$\begin{cases} \mathcal{D}(x,r) \subset D(a,r_1) \\ \mathcal{D}(x,r) \subset D(b,r_2) \end{cases}, \text{ ապա } \begin{cases} \rho(a,x) + r \le r_1 \\ \rho(b,x) + r \le r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \le r_1 - \rho(a,x) \\ r \le r_2 - \rho(b,x) \end{cases}$$

Ուստի, ընդհանուր դեպքում որպես $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի որոնելի շառավիղ վերցնենք $r=\min(r_1-\rho(a,x), r_2-\rho(b,x))$ թիվը: Այժմ դիտարկենք $\forall\, y\in\mathcal{D}(x,r)$ կետ և ցույց տանք, որ $y\in\mathcal{D}(a,r_1)\cap\mathcal{D}(b,r_2)$: Դրանից կհետևի, որ $x\in\mathcal{D}(x,r)\subset\mathcal{D}(a,r_1)\cap\mathcal{D}(b,r_2)$:

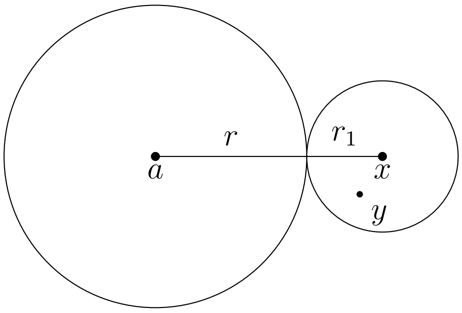
Կարող ենք գնահատել՝

$$\rho(a,y)\le\rho(a,x)+\rho(x,y)<\rho(a,x)+r\le\rho(a,x)+r_1-\rho(a,x)=r_1,$$

ուստի $y\in\mathcal{D}(a,r_1)$: Նման ձևով ստանում ենք $y\in\mathcal{D}(b,r_2)$, ուստի $y\in\mathcal{D}(a,r_1)\cap\mathcal{D}(b,r_2)$: ■

Դիտողություն: Ապացույցի ընթացքում $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշվեց փեսողաբար՝ $\mathbb{R}^2$ հարթության մասնավոր օրինակի միջոցով: Անդրադառնալով ապացույցի մանրամասներին՝ նշենք, որ ամենասկզբում օգտվեցինք հետևյալ գծագրային հուշումից. եթե $\mathcal{D}(x,r)\subset\mathcal{D}(a,r_1)$, ապա $\rho(a,x)+r\le r_1$: Այլ, ավելի ընդհանուր ձևակերպումով դա հնչում է այսպես. եթե կամայական մետրիկ տարածությունում մի գունդ ընկած է մեկ այլ գնդի մեջ, ապա առաջին գնդի շառավիղը փոքր կամ հավասար է երկրորդ գնդի շառավղից: Բոլոր փորձերը այս պնդումը դարձնել թեորեմ (դուրս բերել մետրիկի 1-3 աքսիոմներից) դատապարտված են անհաջողության, քանի որ իրողությունն այլ է. գոյություն ունեն մետրիկ տարածություններ, որոնցում փոքր շառավղով գունդն իր մեջ ներառում է ավելի մեծ շառավղով գունդ՝ չհամընկնելով նրա հետ (ընթերցողը կարող է ծանոթանալ այդպիսի օրինակի հետ Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, "Контрпримеры в анализе", 1967 գրքում): Արժեզրկվո՞ւմ է արդյոք սրանով թեորեմ 1-ի վերը բերված ապացույցը: Սկզբունքորեն՝ ոչ, քանի որ ձևականորեն բերված ապացույցն անթերի է: Բայց հոգեբանորեն ինչ-որ տեղ՝ գուցե: Թերևս սա է պատճառը, որ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, "Элементы теории функции и функционального анализа" դասագրքի երկրորդ գլխում հեղինակները գերադասել են մետրիկ տարածություններում մետրիկային տոպոլոգիա սահմանել համարժեք, բայց այլ եղանակով՝ դրանով իսկ խուսափելով $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի շառավղի մեծության վերոհիշյալ ընտրությունից: Այդ եղանակը հիմնված է Կուրատովսկու փակման գործողության վրա: Կարծում ենք՝ ընթերցողին հետաքրքիր և օգտակար կլինի ծանոթանալ նաև այդ եղանակի հետ:

Որպես հետևանք թեորեմ 1-ից ստանում ենք, որ անեզր գնդերը բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **բաց գնդեր**): Ցույց տանք նաև, որ $\mathcal{B}(a,r)$ եզրով գնդերը փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **փակ գնդեր**):

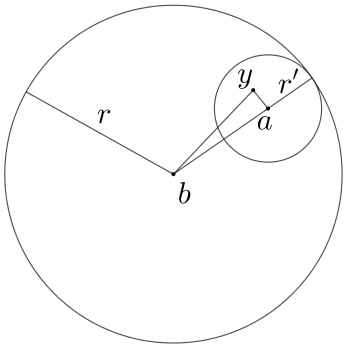


Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $X \setminus \mathcal{B}(a,r)$ լրացումը շրջակայք է իր կամայական x կետի համար, և հետևաբար բաց բազմություն է: Սա հետևում է նրանից, որ $\mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r)$, որտեղ $r_1 = \rho(a,x) - r$: Իրոք, $\forall\, y \in \mathcal{D}(x,r_1)$ կետի համար ունենք՝

$$\rho(a,y) \geq \rho(a,x) - \rho(y,x) > \rho(a,x) - r_1 = r, \text{ ուստի } \mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r):$$

Նման ձևով ապացուցվում է, որ $\mathcal{S}(a,r)$ սֆերաները փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 2: (X,ρ) մետրիկային տարածության $A \subset X$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում այն և միայն այն դեպքում, երբ իր կամայական a կետի հետ միասին պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:



Ապացուցում: Ինչպես արդեն գիտենք, եթե A-ն (X,ρ)-ի որևէ բաց բազմություն է, ապա այն բաց գնդերի միավորում է (ըստ թեորեմ 1-ի): Մնում է ցույց տալ, որ եթե $a \in A$ կետը պատկանում է որևէ $\mathcal{D}(b,r)$ բաց գնդի, ապա $\mathcal{D}(b,r)$-ն իր մեջ պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:

Վերցնենք $r' = r - \rho(a,b)$ և ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Եթե $y \in \mathcal{D}(a,r')$, ապա $\rho(y,b) \leq \rho(y,a) + \rho(a,b) < r' + \rho(a,b) = r$ գնահատումից հետևում է, որ $y \in \mathcal{D}(b,r)$, ուստի $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Թեորեմի հակառակ պնդումն ակնհայտ է: ■

Օրինակ 8: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 2-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի էվկլիդյան մետրիկից սրացվող մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 9: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 3-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի համար կանոնական բազա են կազմում բոլոր անեզր (բաց) շրջանները, իսկ $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության համար՝ բոլոր սովորական անեզր (բաց) գնդերը (կամայական կենտրոններով և շառավիղներով):

Մետրիկային տարածություններն օժտված են կարևոր հատկությամբ՝ բավարարում են անջատելիության T_2 աքսիոմին: Իրոք, եթե $x_1,\ x_2 \in X$ և $x_1 \neq x_2$, ապա $\rho(x_1, x_2) \neq 0$, ուստի $D(x_1, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ և $D(x_2, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ բաց գնդերը x_1 և x_2 կետերի չհատվող շրջակայքեր են: Դա ցույց տալու համար ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի նրանց պատկանող որևէ y կետ: Ըստ եռանկյան աքսիոմի՝ $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y) + \rho(x_2, y) < \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$, հակասություն:

Սահմանում: Միևնույն X բազմության վրա տրված երկու մետրիկ կոչվում են **համարժեք**, եթե նրանցով ծնված մետրիկային տոպոլոգիաները նույնն են:

Օրինակ 10: Ցույց տանք, որ նույն X-ի վրա ρ և $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ մետրիկները համարժեք են (չնայած, որ ընդհանուր դեպքում (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունները իզոմետրիկ չեն): Իրոք, (X, ρ) տարածության ամեն մի $\mathcal{D}(a, r) \subset X$ բաց գունդ կարող է դիտարկվել որպես $(X, \bar{\rho})$ տարածության $\overline{\mathcal{D}}(a, R) \subset X$ բաց գունդ, որտեղ $R = \dfrac{r}{1+r}$, և հակառակը՝ $(X, \bar{\rho})$ տարածության ամեն մի $\overline{\mathcal{D}}(a, R)$ գունդ, եթե $R < 1$, կարող է դիտարկվել որպես (X, ρ) տարածության $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ, որտեղ $r = \dfrac{R}{1-R}$: Պարզունակ ստուգումը թողնվում է ընթերցողին:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **մետրիկացվող տարածություն**, եթե X բազմության վրա գոյություն ունի որևէ ρ մետրիկ այնպես, որ X մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է X-ի τ տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 11: Ցանկացած $(X, \text{դիսկր.})$ տարածություն մետրիկացվող տարածություն է, քանի որ նրա տոպոլոգիան համընկնում է X-ի վրա $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x = y \\ 1, & \text{երբ } x \neq y \end{cases}$ դիսկրետ մետրիկով ծնված տոպոլոգիայի հետ:

Իրոք, ըստ օրինակ 6-ի և թեորեմ 1-ի՝ X-ում ամեն մի $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ $r < 1$ դեպքերում X-ի մի կետանոց $\{a\}$ բաց ենթաբազմությունն է: Հետևաբար X-ի բոլոր ենթաբազմությունները բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում:

Բերենք նաև չմետրիկացվող տարածության օրինակ. մեկից ավելի կետեր պարունակող ամեն մի $(X, \text{անտիդ.})$ տարածություն չի կարող մետրիկացվել, քանի որ այն չի բավարարում անջատելիության T_2 աքսիոմին:

Վերջում, անդրադառնալով մետրիկ տարածություններին՝ նշենք, որ բազմության վրա տրված մետրիկը թույլ է տալիս սահմանել հեռավորության հասկացություն ոչ միայն երկու կետերի միջև, այլև՝ կետի և ենթաբազմության, ինչպես նաև երկու ենթաբազմությունների միջև:

Սահմանում: (X, ρ) մետրիկ տարածության որևէ b կետի հեռավորություն X-ի որևէ A ենթաբազմությունից կոչվում է $\inf\{\rho(b, a);\ a \in A\}$ թիվը (նշանակվում է՝ $\rho(b, A)$):

Թեորեմ 3: $x \in X$ կետը պատկանում է (X, ρ) մետրիկային տարածության $A \subset X$ ենթաբազմության $\overline{A}$ փակույթին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x, A) = 0$:

Ապացուցում: Եթե $x \in \overline{A}$, ապա ըստ ենթաբազմության փակույթի սահմանման՝ ամեն մի $\mathcal{D}(x, r_n)$, $r_n = \frac{1}{n}$ բաց գնդում գոյություն ունի A ենթաբազմության որևէ a_n կետ, ուստի $\rho(x, A) = 0$:

Այժմ հակառակը. դիցուք ինչ-որ $x \in X$ կետի դեպքում $\rho(x, A) = 0$: Դիտարկենք այդ կետի կամայական U շրջակայք և ցույց տանք, որ $U \cap A \neq \varnothing$ (դրանից կհետևի, որ $x \in \overline{A}$): Ըստ մետրիկային տոպոլոգիայի սահմանման և թեորեմ 2-ի՝ գոյություն ունի x կետի $\mathcal{D}(x, r)$ բաց գնդային շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x, r) \subset U$: Այժմ $\rho(x, A)$ հեռավորության սահմանումից և $\rho(x, A) = 0$ պայմանից հետևում է. գոյություն ունի որևէ $a \in A$ կետ, որ $\rho(x, a) < \varepsilon$: Քանի որ $a \in \mathcal{D}(x, r) \subset U$, ուստի $a \in U \cap A$: Ուրեմն $U \cap A \neq \varnothing$: ■

Թեորեմ 4: (X, ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A \subset X$ ենթաբազմության արտաքին կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x, A) > 0$:

Ապացուցում: Դիցուք $x \in \operatorname{ext} A$: Ըստ ենթաբազմության արտաքին կետի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի որևէ U շրջակայք, որ $U \subset X \setminus A$: Հետևաբար գոյություն ունի նաև x-ի բաց գնդային $\mathcal{D}(x, r)$ շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x, r) \subset U$: Ուստի $\mathcal{D}(x, r) \subset X \setminus A$, և ուրեմն $\mathcal{D}(x, r) \cap A = \varnothing$: Այժմ, ենթադրելով, որ $\rho(x, A)$ թիվը դրական չէ, ստանում ենք $\rho(x, A) = 0$, որից (ըստ նախորդ թեորեմի) հետևում է $x \in \overline{A}$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x, r) \cap A \neq \varnothing$ (հակասություն):

Ապացուցենք նաև հակառակ պնդումը. դիցուք $\rho(x, A) = r > 0$: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(x, r) \subset X \setminus A$ (դրանից կհետևի, որ $x \in \operatorname{ext} A$): Ցանկացած $y \in \mathcal{D}(x, r)$ կետի դեպքում ըստ մետրիկի եռանկյան աքսիոմի ունենք՝ $\rho(x, y) + \rho(y, a) \geq \rho(x, a)$, որտեղ a-ն կամայական կետ է A-ից: Քանի որ $\rho(x, a) > r$ և $\rho(x, y) = r$, ուստի $\rho(y, a) > 0$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x, r) \subset X \setminus A$: ■

Թեորեմ 5: (X, ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A \subset X$ ենթաբազմության եզրային կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x, A) = \rho(x, X \setminus A) = 0$:

Ապացույցը որպես հեշտ խնդիր թողնվում է ընթերցողին:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 7-ի վերաբերյալ

1.1. Ապացուցեք, որ

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = (x - y)^2$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա:

1.2. Ցույց տվեք, որ $n > 1$ դեպքերում

$$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = \min_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}^n$-ում:

1.3. Ապացուցեք. X բազմության վրա մետրիկի 1-3 աքսիոմները համարժեք են հետևյալ երկու աքսիոմներին՝

1. $\rho(x, y) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = y$,
2. $\rho(x, y) \le \rho(z, x) + \rho(z, y)$ բոլոր $x, y, z \in X$ փարրերի դեպքում:

1.4. Ապացուցեք. եթե ρ-ն որևէ մետրիկ է X բազմության վրա, ապա

$$\tilde{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\rho}(x, y) = \min\left(1, \rho(x, y)\right)$$

արտապատկերումը նույնպես մետրիկ է X-ի վրա:

1.5. Ցույց տվեք, որ X բազմության վրա նախորդ խնդրում դիտարկված ρ և $\tilde{\rho}$ մետրիկները համարժեք են (որոշում են X-ի միևնույն տոպոլոգիան):

1.6. Գտեք այնպիսի մետրիկային տարածություն և նրանում երկու այնպիսի փակ գնդեր, որ դրանցից ավելի մեծ շառավղով գունդը պարունակվի ավելի փոքր շառավղով գնդի մեջ՝ չհամընկնելով նրա հետ:

1.7. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և

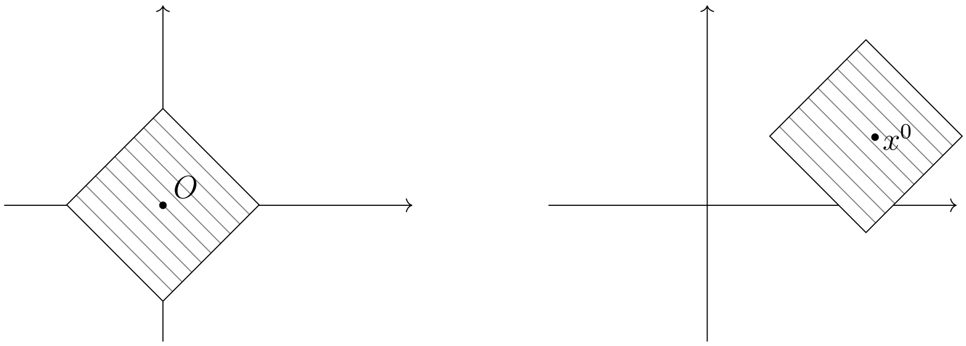
$$\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

արտապատկերումը:

ա) Ապացուցեք, որ σ-ն որոշում է մետրիկ $\mathbb{R}^2$-ի վրա:

բ) Նկարագրեք ստացվող մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազան:

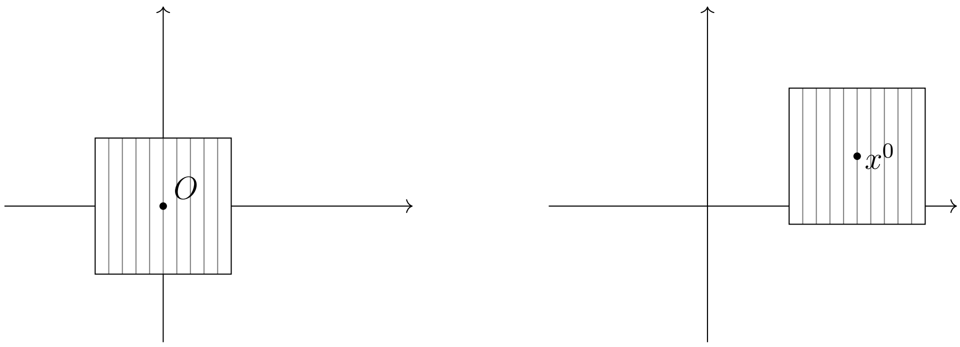
Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում՝ $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1^0 - y_1| + |x_2^0 - y_2| < r\}$: Մասնավորապես $x^0 = O = (0, 0)$ կետի դեպքում $\mathcal{D}(0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| < r\}$ բաց շրջանը անեզր քառակուսի է, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ $2r$ երկարությամբ անկյունագծերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա: Ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում $\mathcal{D}(x^0, r)$ շրջանը ստացվում է $\mathcal{D}(O, r)$ քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ:



1.8. Լուծեք նախորդ խնդիրը

$$\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mu(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\} = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$$

արտապատկերման դեպքում, որտեղ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$:



Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Ցույց տվեք, որ սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում x^0 կենտրոնով, r շառավղով $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \mu(x^0, y) < r\}$ բաց շրջանը ստացվում է $O = (0, 0)$ կենտրոնով և $2r$ կողմով $\mathcal{D}(O, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < r, \ |y_2| < r\}$ անեզր քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ:

1.9. Ապացուցեք, որ 7.7 և 7.8 խնդիրներում սահմանված σ և μ մետրիկները համարժեք են (որոշում են $\mathbb{R}^2$-ի նույն տոպոլոգիան):

1.10. Երկրաչափորեն նկարագրեք՝ ինչ են պրոյեկտիվ հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազայի տարրերը:

Ցուցում. Սևեռելով $\mathbb{R}^3$-ում O սկզբնակետով անցնող որևէ l^0 ուղիղ և որևէ α սուր անկյուն՝ դիտարկեք O կետով անցնող բոլոր l ուղիղների բազմությունը, որոնք l^0 ուղղի հետ կազմում են α-ն չգերազանցող անկյուն: Պարզեք, թե այդ անեզր գնդի համար երկրորդ կարգի ո՞ր մակերևույթն է հանդիսանում եզրային սֆերա:

1.11. Դիտարկենք $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ կոորդինատային տարածությունը օրինակ 3-ում սահմանված $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ մետրիկով: Ապացուցեք, որ այդ մետրիկային տարածությունում ամեն մի $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերա հանդիսանում է փվյալ $\mathcal{D}(a, r)$ գնդի եզր՝ ըստ թեմա 6-ում սահմանված ենթաբազմության եզր հասկացության: