Թեմա 14

Տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալը, օրինակներ, ~~Ուղիղ արտադրյալի~~ հատկությունները: Ենթաբազմությունների փակույթը ուղիղ արտադրյալում: Ուղիղ արտադրյալի ժառանգական հատկություններ: Որոշ երկրաչափական հասկացություններ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածություններում:

Դիցուք ունենք (X, τ) և (Y, σ) տոպ. տարածություններ: Մեր խնդիրն է, որպես ելակետ ընդունելով τ և σ տոպոլոգիաները, սահմանել տոպոլոգիա $X \times Y$ դեկարտյան արտադրյալի համար: Նշանակվում է այն $\tau \times \sigma$: Բնական կլինի $X \times Y$-ում բաց բազմություններ հայտարարել նրա $U \times V$ տեսքի ենթաբազմությունները, որտեղ U-ն և V-ն բաց ենթաբազմություններ են համապատասխանաբար X-ում և Y-ում: Ստուգենք տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները:

1. Պարզ է, որ $\varnothing \times \varnothing = \varnothing \in \tau \times \sigma$, և $X \times Y \in \tau \times \sigma$ (քանի որ $X \in \tau, \ Y \in \sigma$):

2. Միավորման աքսիոմը տեղի չունի, քանի որ ընդհանուր դեպքում $U_i \times V_j$ և $U_k \times V_l$ տեսքերի ենթաբազմությունների միավորումը կարող է չունենալ նույնպիսի տեսք (տես թեորեմ 1-ը թեմա 2-ում):

Այսպիսով $U \times V, \ U \in \tau, \ V \in \sigma$ ենթաբազմությունները չեն կազմում տոպոլոգիա $X \times Y$-ի համար: Բայց կազմում են տոպոլոգիայի բազա: Իրոք, բավարարվում են թեմա 5-ում թեորեմ 2-ի 1-2 պայմանները

1. $\bigcup\limits_{i,j}(U_i \times V_j) = X \times Y;$

2. $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) = (U_i \cap U_k) \times (V_j \cap V_l)$:

Այդ բազայով ծնված $\tau \times \sigma$ տոպոլոգիան կոչվում է $X \times Y$ **ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիա**, իսկ $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ զույգը կոչվում է (X, τ) և (Y, σ) **տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալ**: Այսպիսով $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ տարածությունում բաց բազմություններ են համարվում բոլոր $U \times V$, ~~որտեղ~~ $U \in \tau, \ V \in \sigma$ ենթաբազմություններն ու նրանց բոլոր հնարավոր միավորումները:

Նման ձևով սահմանվում է տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալ կամայական վերջավոր քանակով $(X_1, \tau_1), \ (X_2, \tau_2), \ldots, (X_n, \tau_n)$ տարածությունների դեպքում: Ստացվող $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_n)$ տարածության տոպոլոգիայի բազա են կազմում բոլոր $U_1 \times \ U_2 \times \cdots \times \ U_n, \ U_i \in \tau_i$ տեսքի ենթաբազմությունները:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը սովորական մետրիկական տոպոլոգիայով՝ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$, և $(\mathbb{R}, \text{սովոր.}) \times (\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ ուղիղ արտադրյալը: Այս տարածությունը

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ հարթությունն է, որի սովոր. $\times$ սովոր. տոպոլոգիայի համար բազա է ծառայում բոլոր $(a, b) \times (c, d)$ տեսքի անեզր ուղղանկյունների բազմությունը:

Մյուս կողմից՝ $\mathbb{R}^2$ հարթության համար ունենք նաև սովորական մետր[illegible] տոպոլոգիա, որի համար բազա է ծառայում բոլոր անեզր $\mathcal{D}(x, \mathbb{R})$ շրջանների բազմությունը:

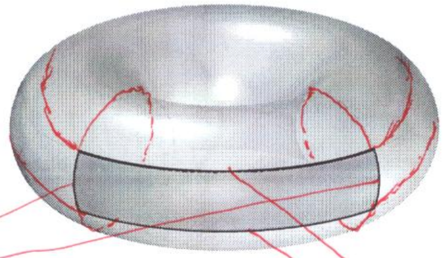
Ցույց տանք, որ այս երկու բազաները որոշում են $\mathbb{R}^2$ հարթության միևնույն տոպոլոգիան, և հետևաբար ($\mathbb{R}^2$, սովոր. $\times$ սովոր.) և ($\mathbb{R}^2$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունները նույնն են: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ ամեն մի անեզր ուղղանկյուն կարելի է ներկայացնել որպես անեզր շրջանների միավորում, և հակառակը՝ ամեն մի անեզր շրջան կարելի է ներկայացնել որպես անեզր ուղղանկյունների միավորում:

Իրոք, (տե՛ս գծագիրը) անեզր ուղղանկյան ամեն մի x կետի համար կարելի է ընտրել $r > 0$ թիվ այնպես, որ $\mathcal{D}(x, r)$ շրջանն ամբողջությամբ պարունակվի ուղղանկյան ներսում: Նաև հակառակը՝ անեզր շրջանի ամեն մի y կետի համար գոյություն ունի y կենտրոնով անեզր ուղղանկյուն, որն ամբողջությամբ գտնվում է շրջանի ներսում:

Այս օրինակը ընդհանրացվում է. $(\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ հատ}}; \underbrace{\text{սովոր.} \times \text{սովոր.} \times \cdots \times \text{սովոր.}}_{n \text{ հատ}})$ տարածությունը նույնն է, ինչ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունը, վերցված սովորական մետր[illegible] տոպոլոգիայով:

Օրինակ 2: Դիցուք S-ը շրջանագիծ է $\mathbb{R}^2$ հարթությունում՝ օժտված $\mathbb{R}^2$-ի սովորական մետր[illegible] տոպոլոգիայից մակածված τ տոպոլոգիայով: Դիտարկենք $S \times S$ [illegible] [illegible] ~~տորը (տես օրինակ 3-ը թեմա 2-ում)~~ $\tau \times \tau$ տոպոլոգիայով: տոպոլոգիայի համար բազա է ծառայում տորի ~~(որպես մակերևույթի)~~ վրա բոլոր կորագիծ անեզր ուղղանկյունների բազմությունը, որոնք սահմանափակված են որևէ երկու միջօրեականներով և որևէ երկու զուգահեռականներով (տես գծագիրը):

[illegible] 2-ում [illegible] է $S \times S$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] է $\mathbb{R}^3$-ում [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] է [illegible], որ $\tau \times \tau$ տոպոլոգիայի [illegible]----



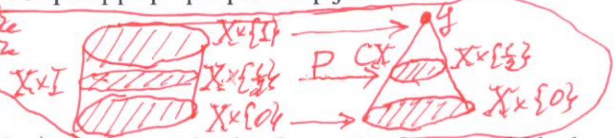
Ինչպես օրինակ 1-ում, նույնանման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ տորի $\tau \times \tau$ տոպոլոգիան և $\mathbb{R}^3$-ի սովորական մետրիկական տոպոլոգիայից տորի վրա մակածված տոպոլոգիան նույնն են:

Սահմանում: Դիցուք (X, τ)-ն որևէ տոպոլոգիական տարածություն է, իսկ I-ն $[0, 1]$ հատվածն է $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Ապա $(X \times I, \tau \times \tau)$ տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է X **հիմքով գլան**: Հիշեցնենք, որ $X \times I$ արտադրյալը որպես բազմություն քննարկվել է թեմա 2-ում (տես օրինակ 5-ը): Այժմ մենք $X \times I$-ն վերածեցինք տոպոլոգիական տարածության:

Սահմանվում է նաև ***X* հիմքով և *y* գագաթով *CX* կոնը**՝ որպես $X \times I$ գլանի ֆակտոր տարածություն ըստ հետևյալ համարժեքության հարաբերության. $(x, t) \sim (x, t)$, երբ $1 > t \geq 0$, իսկ $x \in X$ կամայական կետ է, և $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում:

Պատկերավոր ասած, $X \times I$ գլանի վերին $X \times \{1\}$ հիմքի բոլոր $(x, 1)$ կետերը «սոսնձվում են» միմյանց հետ՝ առաջացնելով CX կոնի y գագաթը:

Որպես օգտակար խնդիր՝ ընթերցողին առաջարկում ենք նկարագրել կոնի y գագաթի բաց շրջակայքերը $CX = {}^{X \times I}/_{\sim}$ ֆակտոր տարածությունում:



Ուղիղ արտադրյալի հատկություններ

Թեորեմ 1: Կամայական (X, τ) և (Y, σ) տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ ուղիղ արտադրյալի

$$P_X : X \times Y \to X, \ P_X(x, y) = x \quad \text{և} \quad P_Y : X \times Y \to Y, \ P_Y(x, y) = y$$

կանոնական պրոյեկցիաները բաց արտապատկերումներ են: Բացի այդ $\tau \times \sigma$-ն ամենաթույլ տոպոլոգիան է $X \times Y$ բազմության վրա, որի դեպքում P_X և P_Y պրոյեկցիաները անընդհատ են:

Ապացուցում: Եթե $U \in \tau$, $V \in \sigma$, ապա պարզ է, որ $P_X^{-1}(U) = U \times Y$ և $P_Y^{-1}(V) = X \times V$ ենթաբազմությունները բաց են $X \times Y$-ում, ուստի P_X-ը և P_Y-ը անընդհատ են: Այժմ դիտարկենք կամայական $U = \bigcup_{i,j}(U_i \times V_j)$, $U_i \in \tau$, $V_j \in \sigma$ բաց բազմություն

$X \times Y$-ում: Ունենք՝

$$P_X(U) = P_X\left(\bigcup_{i,j} U_i \times V_j\right) = \bigcup_{i,j} P_X(U_i \times V_j) = \bigcup_i U_i \in \tau$$

$$P_Y(U) = P_Y\left(\bigcup_{i,j} U_i \times V_j\right) = \bigcup_{i,j} P_Y(U_i \times V_j) = \bigcup_j V_j \in \sigma$$

ուստի P_X-ը և P_Y-ը բաց արտապատկերումներ են:

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք $\varkappa$-ն որևէ այնպիսի տոպոլոգիա է $X \times Y$ բազմության վրա, որ P_X և P_Y կանոնական պրոյեկցիաները անընդհատ են: Նշանակում է՝ կամայական $U \in \tau$ և $V \in \sigma$ ենթաբազմությունների $P_X^{-1}(U) = U \times Y$ և $P_Y^{-1}(V) = X \times V$ նախակերպարները պատկանում են $\varkappa$ տոպոլոգիային: Ուստի $\varkappa$ տոպոլոգիային է պատկանում նաև նրանց $P_X^{-1}(U) \cap P_Y^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ հատումը: Հետևաբար $\varkappa$ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակում է $\tau \times \sigma$ տոպոլոգիան: Ուստի $\tau \times \sigma$-ն ամենաթույլ տոպոլոգիան է $X \times Y$ բազմության վրա, որի դեպքում P_X-ը և P_Y-ը անընդհատ են: ■

Հետևանք թեորեմ 1-ից: $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ փարածությունում $U \times V$ տեսքի ենթաբազմությունը բաց է այն և միայն այն դեպքում, երբ U-ն բաց է X-ում և V-ն բաց է Y-ում (հիմնավորել):

Թեորեմ 2: Դիցուք ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա նրանց $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ արտադրյալ արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը:

Ապացուցում: ա) Դիցուք $f_1 \times f_2$-ը անընդհատ է: Դիտարկենք հետևյալ կոմուտատիվ դիագրամը (տես թեմա 2-ում): Դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանակում է, որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_1 \circ P_{X_1}$ համադրույթները նույն $X_1 \times X_2 \to Y_1$ արտապատկերումն են: Քանի որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$-ը անընդհատ է, ուստի $f_1 \circ P_{X_1}$ անընդհատ է: Մյուս կողմից՝ ըստ թեորեմ 1-ի P_{X_1}-ը այսուրյեկտիվ բաց արտապատկերում է, ուստի f_1-ը անընդհատ է համաձայն թեմա 11-ի թեորեմ 4-ի: Նման ձևով ապացուցվում է f_2-ի անընդհատությունը:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_1}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_1}"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1
\end{tikzcd}$$

բ) Դիցուք այժմ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը: Ցույց տանք, որ $Y_1 \times Y_2$-ում բաց կամայական ենթաբազմության նախակերպարը $f_1 \times f_2$ արտապատկերման դեպքում բաց ենթաբազմություն է $X_1 \times X_2$-ում: Բավական է դա ցույց տալ $Y_1 \times Y_2$ տարածության տոպոլոգիայի բազային $V_1 \times V_2$ տարրերի համար : Քանի որ $(f_1 \times f_2)^{-1}(V_1 \times V_2) = f_1^{-1}(V_1) \times f_2^{-1}(V_2)$, ուստի $(f_1 \times f_2)^{-1}(V_1 \times V_2)$ ենթաբազմությունը բաց է $X_1 \times X_2$-ում: ■

Թեորեմ 3: Ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա նրանցով որոշված (տես թեմա 2-ում)

$$(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2, \quad (f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad x \in X$$

անկյունագծային արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը:

(տես թեորեմ 3-ից հետևանք 1-ը թեմա 10-ում):

Ապացուցում: ա) Դիցուք (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: Դիտարկենք $P_{Y_1} \circ (f_1, f_2) : X \to Y_1$ համադրույթը: կամայական $x \in X$ կետի դեպքում ունենք՝

$$P_{Y_1} \circ (f_1, f_2)(x) = P_{Y_1}((f_1, f_2)(x)) = P_{Y_1}(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x)$$

Նշանակում է $P_{Y_1} \circ (f_1, f_2) = f_1$, և նման ձևով $P_{Y_2} \circ (f_1, f_2) = f_2$: Ուստի f_1-ը և f_2-ը անընդհատ են, որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթներ:

բ) Դիցուք անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը: Ցույց տանք, որ (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: Բավական է ցույց տալ, որ $\forall V_1 \times V_2 \subset Y_1 \times Y_2$ բաց ենթաբազմության $(f_1, f_2)^{-1}(V_1 \times V_2)$-ը բաց է X-ում: Ունենք՝

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)^{-1}(V_1 \times V_2) &= (f_1, f_2)^{-1}((V_1 \times Y_2) \cap (Y_1 \times V_2)) = (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_1}^{-1}(V_1) \cap P_{Y_2}^{-1}(V_2)) \\ &= (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_1}^{-1}(V_1)) \cap (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_2}^{-1}(V_2)) \\ &= (P_{Y_1} \circ (f_1, f_2))^{-1}(V_1) \cap (P_{Y_2} \circ (f_1, f_2))^{-1}(V_2) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2),\end{aligned}$$

որը բաց է որպես X-ում բաց ենթաբազմությունների հատում:

Ուստի (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: ■

Թեորեմ 6: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ, նրանցում $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմություններ: Դիտարկենք $A \times B \subset X \times Y$ ենթաբազմությունը: Ապա

1. $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$,
2. $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}\, A \times \mathrm{int}\, B$:

Ապացուցում: Նկատենք, որ 1-ում միևնույն գծիկով մենք նշանակել ենք գործողությունը երեք տարբեր X, Y, $X \times Y$ տարածություններում: Նույնը int սիմվոլին 2-ում: Նախ ապացուցենք 1-ը: Դիցուք $(x_0, y_0) \in \overline{A \times B}$: Կիրառելով թեմա 10-ի թեորեմ 5-ը $P_X : X \times Y \to X$ (անընդհատ) պրոյեկցիայի և $A \times B \subset X \times Y$ ենթաբազմության նկատմամբ, կունենանք՝

$$P_X(\overline{A \times B}) \subset \overline{P_X(A \times B)} = \bar{A} \;\Rightarrow\; P_X(x_0, y_0) \in \bar{A} \;\Rightarrow\; x_0 \in \bar{A}:$$

Նման ձևով $y_0 \in \bar{B} \;\Rightarrow\; (x_0, y_0) \in \bar{A} \times \bar{B}$: Ուստի $\overline{A \times B} \subset \bar{A} \times \bar{B}$: Այժմ հակառակը. դիցուք $(x_0, y_0) \in \bar{A} \times \bar{B}$: Ցույց տանք, որ (x_0, y_0)-ն հպման կետ է $A \times B$-ի համար: Դիտարկենք (x_0, y_0)-ի որևէ $W \subset X \times Y$ շրջակայք: Գոյություն ունի (x_0, y_0)-ի $U \times V$ տեսքի բաց շրջակայք, որ $(x_0, y_0) \in U \times V \subset W$: Քանի որ $x_0 \in \bar{A}$ և $x_0 \in U$, ուստի $U \cap A \neq \varnothing$: Նման ձևով՝ $V \cap B \neq \varnothing$: Հետևաբար՝ $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; W \cap (A \times B) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; (x_0, y_0) \in \overline{A \times B} \;\Rightarrow\; \bar{A} \times \bar{B} \subset \overline{(A \times B)}$:

Ապացուցենք 2-ը: Ունենք՝ $\mathrm{int}(A \times B) \subset A \times B \Rightarrow P_X(\mathrm{int}(A \times B)) \subset P_X(A \times B) = A$: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $P_X(\mathrm{int}(A \times B))$-ն բաց է X-ում, ուստի $P_X(\mathrm{int}(A \times B)) \subset \mathrm{int}\, A \;\Rightarrow\; \mathrm{int}(A \times B) \subset P_X^{-1}(\mathrm{int}\, A) = (\mathrm{int}\, A) \times Y$: Նման ձևով $\mathrm{int}(A \times B) \subset P_Y^{-1}(\mathrm{int}\, B) = X \times (\mathrm{int}\, B)$: Հետևաբար $\mathrm{int}(A \times B) \subset ((\mathrm{int}\, A) \times Y) \cap (X \times (\mathrm{int}\, B)) = \mathrm{int}\, A \times \mathrm{int}\, B$: Հակառակ պնդումը՝ $\mathrm{int}\, A \times \mathrm{int}\, B \subset \mathrm{int}(A \times B)$ ապացուցվում է հեշտությամբ և թողնվում է ընթերցողին: ■

Հետևանքներ թեորեմ 6-ից: 1. $A \times B$-ն փակ ենթաբազմություն է $X \times Y$-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն փակ է X-ում և B-ն փակ է Y-ում:

2. $A \times B$-ն բաց ենթաբազմություն է $X \times Y$-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն բաց է X-ում և B-ն բաց է Y-ում (սա մենք արդեն ստացել էինք նաև որպես հետևանք թեորեմ 1-ից):

Գոյություն ունեն մի շարք տոպոլոգիական հատկություններ, որ եթե X և Y տարածություններն օժտված են դրանցից մեկով, ապա նրանց $X \times Y$ արտադրյալը նույնպես բավարարում է այդ հատկությանը և հակառակը: Այդպիսի հատկություններ են օրինակ, անջատելիության $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ աքսիոմները, կապակցվածությունը, կոմպակտությունը: Ապացուցենք մի այդպիսի թեորեմ:

Թեորեմ 7: $X \times Y$ տարածությունը հաուսդորֆյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ հաուսդորֆյան տարածություններ են X-ը և Y-ը:

Ապացուցում: Ենթադրենք $X \times Y$-ը հաուսդորֆյան է և ցույց տանք, որ X-ը (նման ձևով՝ Y-ը) հաուսդորֆյան է: Դիցուք $x_1, x_2 \in X$ և $x_1 \neq x_2$: Սևեռենք որևէ $y_0 \in Y$ կետ և դիտարկենք (x_1, y_0) և (x_2, y_0) կետերը $X \times Y$-ում: Ըստ պայմանի, քանի որ $(x_1, y_0) \neq (x_2, y_0)$, գոյություն ունեն այդ կետերի չհատվող, բաց W_1, W_2 շրջակայքեր $X \times Y$-ում՝ $(x_1, y_0) \in W_1$, $(x_2, y_0) \in W_2$: Համաձայն ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայի սահմանման, գոյություն ունեն այդ կետերի համապատասխանաբար $U_1 \times V_1$ և $U_2 \times V_2$ բաց շրջակայքեր $X \times Y$-ում, որ $(x_1, y_0) \in U_1 \times V_1 \subset W_1$, $(x_2, y_0) \in U_2 \times V_2 \subset W_2$: Քանի որ $y_0 \in V_1$ և $y_0 \in V_2$, ուստի $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$: Ըստ պայմանի $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, որից հետևում է, որ նաև $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \varnothing$: Դրանից էլ հետևում է, որ $U_1 \cap U_2 = \varnothing$: Այսպիսով՝ X-ի կամայական $x_1 \neq x_2$ կետեր ունեն U_1, U_2 չհատվող շրջակայքեր $\Rightarrow$ X-ը հաուսդորֆյան է: Նման ձևով ապացուցվում է, որ Y-ը ևս հաուսդորֆյան է:

Այժմ հակառակը. ենթադրենք՝ X-ը և Y-ը հաուդորֆյան տարածություններ են, ցույց տանք, որ $X \times Y$-ը հաուսդորֆյան է: Դիցուք (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$ և $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$: Որոշակիության համար ենթադրենք $x_1 \neq x_2$: Ըստ պայմանի X-ում գոյություն ունեն x_1, x_2 կետերի չհատվող, բաց U_1, U_2 շրջակայքեր՝ $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$: Պարզ է, որ $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$, իսկ $U_1 \times Y$-ը և $U_2 \times Y$-ը այդ կետերի չհատվող բաց շրջակայքեր են $X \times Y$-ում: ■

ընդհանրացումները

Դիտողություն: Վերը բերված 1-5 թեորեմներն ունեն իրենց ~~անալոգները~~ կամայական վերջավոր քանակով $X_1, X_2, \ldots, X_n$ տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում (ձևակերպումներն ու ապացուցումները թողնում ենք ընթերցողին):

Այժմ քննարկենք հետևյալ հարցը. կարելի՞ է արդյոք X (կամ Y) տարածությունը ինչ-որ իմաստով դիտարկել որպես $X \times Y$ տարածության ենթատարածություն:

Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ: Սևեռենք որևէ $y_0 \in Y$ կետ և դիտարկենք $X \times Y$-ի $X \times y_0$ ենթատարածությունը:

Թեորեմ 8 : $X \times \{y_0\}$ ենթատարածությունը հոմեոմորֆ է X-ին:

Ապացուցում: Սահմանենք $h : X \to X \times \{y_0\}$ արտապատկերում՝ $h(x) = (x, y_0)$, $x \in X$ բանաձևով: Ցույց տանք, որ h-ը հոմեոմորֆիզմ է: Պարզ է, որ h-ը բիյեկտիվ արտապատկերում է, ուստի համաձայն թեմա 11-ում թեորեմ 6-ի բավական է ցույց տալ, որ h-ը բաց արտապատկերում է: Այդ նպատակով նախ նկարագրենք $X \times \{y_0\}$ տարածության տոպոլոգիան: Դիտարկենք որևէ $U \times V$ բաց ենթաբազմություն $X \times Y$-ում (U-ն բաց է X-ում, V-ն՝ Y-ում) և նրա հատումը $X \times \{y_0\}$-ի հետ (հիշենք, որ $X \times Y$-ից $X \times \{y_0\}$-ի վրա մակածված տոպոլոգիայում բաց են միայն $(U \times V) \cap (X \times \{y_0\})$ տեսքի ենթաբազմությունները և նրանց միավորումները): Ունենք՝

$$(U \times V) \cap (X \times \{y_0\}) = (U \cap X) \times (V \cap \{y_0\}) = \begin{cases} \varnothing, & \text{երբ } y_0 \notin V, \\ U \times \{y_0\}, & \text{երբ } y_0 \in V: \end{cases}$$

Ուրեմն $X \times \{y_0\}$ տարածությունում բաց են $U \times \{y_0\}$ տեսքի ենթաբազմությունները, որտեղ U-ն կամայական բաց բազմություն է X-ում: Այսպիսով ստացանք. եթե U-ն բաց է X-ում, ապա $h(U) = U \times \{y_0\}$ ենթաբազմությունը բաց բազմություն է $X \times \{y_0\}$ տարածությունում:

Բացի այդ h-ը անընդհատ է, քանի որ $h^{-1}(U \times \{y_0\}) = U$ բաց է X-ում: ■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ սևեռված $x_0 \in X$ կետի դեպքում $X \times Y$-ի $X \times \{y_0\}$ ենթատարածությունը հոմեոմորֆ է Y-ին:

Որոշ երկրաչափական հասկացություններ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածություն

Սորրև n չափականության $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ էվկլիդյան տարածությունը կդիտարկվի ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայով (յուրաքանչյուր $\mathbb{R}$ արտադրիչը թվային ուղիղն է սովորական տոպոլոգիայով):

Սահմանում: Երկու՝ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ և $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ կետերով անցնող **ուղիղ $\mathbb{R}^n$ տարածությունում** կոչվում է $\{(1-t)A + tB,\ t \in \mathbb{R}\}$ կետերի բազմությունը:

Դիտարկելով այս ուղղի $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ փոփոխական կետ՝ ստանում ենք ուղղի այսպես կոչված պարամետրական հավասարումները՝

$$x_i = (1-t)a_i + tb_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Սահմանափակելով t պարամետրի որոշման տիրույթը $[0, 1]$ հատվածով՝ ստանում ենք ուղղի մաս, որը կոչվում է A և B ծայրակետերով **հատված $\mathbb{R}^n$-ում** (կնշանակենք $[A, B]$):

Մասնավոր՝ $n = 1$ դեպքում ունենք $A = (a)$, $B = (b)$ կետեր $\mathbb{R}$-ում, իսկ $[A, B]$ հատվածը կարող է նույնացվել թվային ուղղի $(1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$ ենթաբազմության հետ: Կարճ կնշանակենք այն $[a, b]$: Այսպիսով ունենք $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ներդրում (f-ը $[a, b]$-ի նույնական հոմեոմորֆիզմն է իր կերպարի վրա):

Դիցուք այժմ ունենք $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ հատվածներ $\mathbb{R}$-ում, դիտարկենք $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ ներդրումները և դրանց $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ ուղիղ արտադրյալը:

Սահմանում: **Ուղղանկյունանիստ $\mathbb{R}^n$-ում** կոչվում է $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots, \times [a_n, b_n]$ ուղիղ արտադրյալի կերպարը $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots, \times [a_n, b_n] \to$

$\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}=\mathbb{R}^n$ արտապատկերման դեպքում:

$A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ և $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ կետերը կանվանենք ուղղանկյունանիստի **հակադիր գագաթներ**, իսկ $[A,B]$ հատվածը՝ ուղղանկյունանիստի **անկյունագիծ**:

Այս սահմանումը կարիք ունի լրացման: Այդ նպատակով նկատենք, որ թվային ուղղի $[a,b]$ հատված սահմանելիս մենք չենք պահանջել, որ անպայման $a<b$: Նկատենք նաև, որ $[a,b]$ և $[b,a]$ հատվածները նույնն են: Ուստի, $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ արտադրյալում մի քանի $[a_i,b_i]$ արտադրիչներ փոխարինելով $[b_i,a_i]$ արտադրիչներով և կիրառելով ուղղանկյունանիստի սահմանումը, ստանում ենք, որ նոր և հին ուղղանկյունանիստերը նույնն են (հիմնավորել): Այստեղից հետևում է, որ ուղղանկյունանիստն ունի 2^n հատ գագաթ և 2^{n-1} հատ անկյունագիծ: Պարզաբանելու համար, թե որոնք են այդ գագաթներն ու անկյունագծերը, դիտարկենք սիմվոլիկ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ հաջորդականություն և նրանում որոշ x_i սիմվոլներ փոխարինենք a_i-ներով, իսկ մնացածները՝ b_i-ներով: Ստացված հաջորդականությունը որոշում է ուղղանկյունանիստի գագաթ: Իսկ եթե փոխարինումները կատարենք հակառակ կարգով, կստանանք նախկինին հակադիր գագաթ և դրանց միացնող անկյունագիծ: Այստեղից հետևում է, որ ուղղանկյունանիստի բոլոր անկյունագծերն ունեն միևնույն՝ $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$ երկարությունը: Բացի այդ $M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\ldots,\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ կետը պատկանում է բոլոր անկյունագծերին: Այսպիսով, ուղղանկյունիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n])$ ուղղանկյունանիստը պարունակվում է M կենտրոնով և $R=\max\limits_{1\le i\le n}\frac{a_i+b_i}{2}$ շառավղով $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\max\limits_{1\le i\le n}\frac{a_i+b_i}{2}\right)^2\le R^2$ եզրով գնդում, ինչպես նաև

$$(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)\big((a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)\big)=f_1(a_1,b_1)\times f_2(a_2,b_2)\times\cdots\times f_n(a_n,b_n)$$

բաց բազմությունը պարունակվում է $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\max\limits_{1\le i\le n}\frac{a_i+b_i}{2}\right)^2<R^2$ անեզր գնդում: Ճիշտ է նաև հակառակը. յուրաքանչյուր $N(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ կենտրոնով և R շառավղով $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c_i)^2\le R^2$ եզրով գունդ պարունակվում է $f_1([c_1-R,c_1+R])\times f_2([c_2-R,c_2+R])\times$ $\times\cdots\times f_n([c_n-R,c_n+R])$ փակ ուղղանկյունանիստում, իսկ $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c_i)^2<R^2$ անեզր գունդը պարունակվում է $f_1((c_1-R,c_1+R))\times f_2((c_2-R,c_2+R))\times f_n((c_n-R,c_n+R))$ բաց ուղղանկյունանիստում:

Այստեղից ստանում ենք մի քանի կարևոր հետևանք:

Թեորեմ 9 : $\mathbb{R}^n$-ի ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիան և մետրիկական տոպոլոգիան նույնն են:

Սահմանում: $\mathbb{R}^n$-ի որևէ ենթաբազմություն կոչվում է **սահմանափակ ենթաբազմություն**, եթե այն պարունակվում է որևէ ուղղանկյունանիստում:

Հետևանք: Ենթաբազմության սահմանափակությունը համարժեք է նրան, որ այն պարունակվի որևէ գնդում:

Սահմանում: $\mathbb{R}^n$-ի ենթաբազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ ենթաբազմություն**, եթե այն իր կամայական երկու կետերի հետ միասին պարունակում է դրանց միացնող հատվածը:

Վերոհիշյալներից հետևում է, որ $\mathbb{R}^n$-ը ինքը ուռուցիկ է (բայց կարող է պարունակել նաև ոչ ուռուցիկ ենթաբազմություններ): Նկատենք նաև, որ ուռուցիկությունը տոպոլոգիական հատկություն չէ (բերե՛լ օրինակ):

տեսնել էջ 98

Թեորեմ 4: Կամայական X, Y, Z տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում ցանկացած $h: Z \longrightarrow X\times Y$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են $f = P_X \circ h$ և $g = P_Y \circ h$ համապատասխանաբար:

Ապացույց: Եթե h-ը անընդհատ է, ապա f-ը և g-ն անընդհատ են որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթներ: Հակառակը. դիցուք f-ը և g-ն անընդհատ են, ցույց տանք h-ի անընդհատությունը: Դիտարկենք $X\times Y$-ի կամայական $U\times V$ տեսքի ենթաբազմություն, որտեղ U-ն բաց է X-ում, իսկ V-ն բաց է Y-ում: Ունենք

$$h^{-1}(U\times V) = h^{-1}((U\times Y)\cap(X\times V)) = h^{-1}(P_X^{-1}(U)\cap(P_Y^{-1}(V)) =$$
$$= h^{-1}(P_X^{-1}(U))\cap h^{-1}(P_Y^{-1}(V)) = f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V):$$

Այստեղից հետևում է, որ $h^{-1}(U\times V)$ ենթաբազմությունը բաց է Z-ում որպես Z-ում բաց $f^{-1}(U)$ և $g^{-1}(V)$ ենթաբազմությունների հատում, ուստի h-ը անընդհատ է: ■

Նկատենք, որ թեորեմ 4-ը ընդհանրացվում է ցանկացած $f: Z \longrightarrow X_1\times X_2\times\dots\times X_n$, $n>1$ տեսքի արտապատկերումների դեպքում:

Թեորեմ 5: Դիցուք $f: Z \longrightarrow X_1\times X_2\times\dots X_n$ արտապատկերումը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են $f_i: Z \longrightarrow X_i$ արտապատկերումները, որտեղ $f_i = P_{X_i}\circ f$, $i=1,2,\dots,n$:

Ապացույցը, որպես [illegible] թեորեմ 4-ի ընդհանրացումը