Թեմա 12

Ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան և նրա հատկությունները: Տոպոլոգիական փարածության ենթատարածության հասկացությունը, Օրինակներ: Որոշ տոպոլոգիաներ $\mathbb{R}^{\infty}$-ում:

Դիցուք ունենք (X,τ) տոպոլոգիական տարածություն և $A \subset X$ ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Այդ ենթաբազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության, որի τ_A տոպոլոգիան կազմվում է A-ի այն բոլոր ենթաբազմություններով, որոնք ստացվում են A-ի հետ X-ում բաց բոլոր U_i ենթաբազմությունների հատումներից՝
$\tau_A = \{U_i \cap A \mid U_i \in \tau\}$:

Այսպիսով, **ըստ սահմանման**, A բազմությունում բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ում բաց բազմությունների հատումները A-ի հետ:

Ցույց տանք, որ τ_A-ի համար տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները բավարարվում են: Իրոք,

1. $\varnothing \cap A = \varnothing,\ X \cap A = A$, ուստի $\varnothing$-ը և A-ն պատկանում են τ_A-ին:
2. Քանի որ $\bigcup\limits_i (U_i \cap A) = \left(\bigcup\limits_i U_i\right) \cap A$, ուստի τ_A-ի ցանկացած քանակով $U_i \cap A$ տարրերի միավորումը (որտեղ $U_i \in \tau$) նույնպես պատկանում է τ_A-ին:
3. Քանի որ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap A) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \cap A$, ուստի հատման աքսիոմը ևս տեղի ունի:

Սահմանում: τ_A տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայից **մակածված տոպոլոգիա** A ենթաբազմության վրա: Իսկ ինքը՝ (A,τ_A) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է (X,τ) **տոպ.** տոպոլոգիական **տարածության ենթատարածություն**:

Մասնավոր $A = X$ դեպքում $\tau_A = \tau$, և ունենք $(A,\tau_A) = (X,\tau)$ նույնացում:

Սահմանումից հետևում է, որ (A,τ_A) տարածության փակ ենթաբազմությունները համապատասխանաբար ստացվում են A-ի հետ X-ում փակ ենթաբազմությունների հատումներով:

Մակածված տոպոլոգիայի հատկություններ:

Հատկություն 1: Ունենք (X,τ) տոպ. տարածություն, $A \subset B \subset X$ ենթաբազմություններ: A ենթաբազմության վրա կարելի է մակածել երկու տոպոլոգիա՝ τ_A (անմիջականորեն τ-ից A-ի վրա) և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիաներ (նախ τ-ից մակածվում է τ_B տոպոլոգիա B-ի վրա, ապա τ_B-ից մակածվում է տոպոլոգիա A-ի վրա՝ $(\tau_B)_A$): Հետևյալ ակնհայտ $U \cap A = (U \cap B) \cap A$ համընկման շնորհիվ τ_A և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիաները նույնն են:

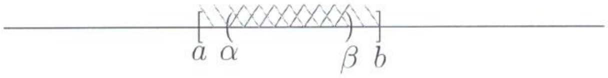
Հատկություն 2: Եթե $\{V_i;\ i\in I\}$ ընտանիքը բազա է τ տոպոլոգիայի համար, ապա $\{V_i \cap A;\ i\in I\}$ ընտանիքը բազա է τ_A-ի համար (ապացուցել):

Հետք Եթե $\{U_j(x);\ j \in J\}$ ընտանիքը $x \in A$ կետի շրջակայքերի բազա է (X,τ) տարածությունում, ապա $\{U_j(x) \cap A;\ j \in J\}$ ընտանիքը x կետի շրջակայքերի բազա է (A,τ_A) տարածությունում (ապացուցել):

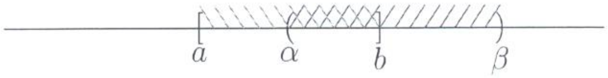
Օրինակ 1: $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ փարածության $A = [a, b]$ ենթաբազմության τ_A փոպոլոգիայի համար բազա են կազմում հետևյալ երեք փեսքերի ենթաբազմությունները, որոնք գոյանում են ինտերվալների $(\alpha, \beta) \cap A$ հատումներով.

ա) $[a, \beta)$, որտեղ $a < \beta \leq b$

բ) (α, β), որտեղ $a \leq \alpha < \beta \leq b$



գ) $(\alpha, b]$, որտեղ $a \leq \alpha < b$



Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ ենթափարածության բաց բազմությունները կարող են բաց չլինել ընդգրկող փարածությունում: Նկատենք նաև, որ տվյալ (A, τ_A) ենթափարածությունում փակ են $[a, b]$-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնք փակ են նաև $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ ընդգրկող փարածությունում:

Օրինակ 2: $B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ փոպոլոգիական փարածությունում (որպես $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ փարածության ենթափարածություն) բաց են բոլոր (α, β), $0 \leq a < \beta \leq 1$ տեսքի ինտերվալներն ու նրանց միավորումները (այսինքն տվյալ ենթափարածության բաց բազմությունները բաց են նաև ընդգրկող փարածությունում): Նկատենք նաև, որ $(0, 1)$-ում փակ են $(0, \beta]$, $0 < \beta < 1$; $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 1$; $[\alpha, 1)$, $0<\alpha<1$ տեսքերի ենթաբազմությունները ու նրանց վերջավոր միավորումները: Ուստի $(0, 1)$-ում փակ որոշ ենթաբազմություններ փակ չեն ընդգրկող $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ փարածությունում:

Ընդհանուր դեպքում, ենթափարածությունում բաց որևէ ենթաբազմություն կարող է չլինել բաց ենթաբազմություն ընդգրկող փարածությունում և ենթափարածությունում փակ որևէ ենթաբազմություն կարող է փակ չլինել ընդգրկող փարածությունում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք քննարկել (նկարագրել) բաց և փակ ենթաբազմություններ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ փարածության $[0, 1)$ և $(0, 1]$ ենթափարածություններում:

Թեորեմ 1: Ունենք (X, τ) տոպ. փարածություն և $A \subset X$ ենթաբազմություն: Ապա հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են միմյանց.

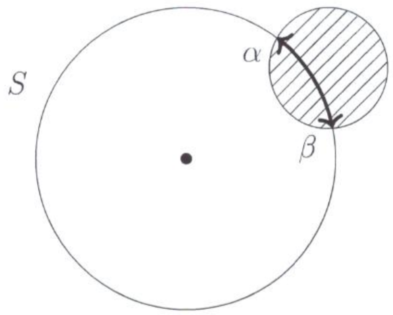
1. (A, τ_A) ենթափարածության կամայական բաց ենթաբազմություն, բաց ենթաբազմություն է նաև (X, τ) ընդգրկող փարածությունում:

2. A-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Նշենք, որ նմանակ պնդում տեղի ունի նաև փակ ենթաբազմությունների դեպքում. հարկավոր է թեորեմ 1-ի ձևակերպման մեջ ամենուրեք «բաց ենթաբազմություն» բառակապակցությունը փոխարինել «փակ ենթաբազմություն»-ով:

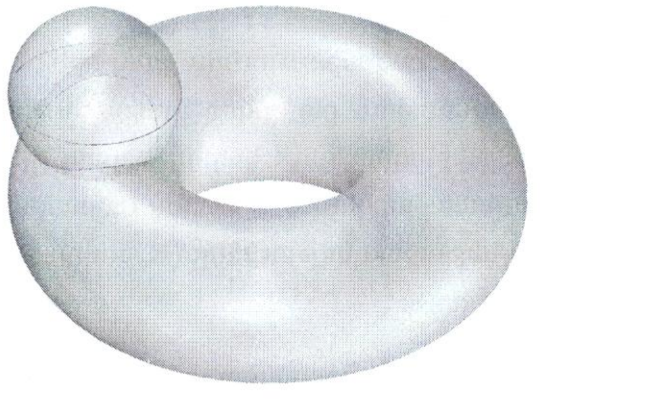
Ապացուցում: Ցույց տանք $1 \Rightarrow 2$ անցումը: Քանի որ A-ն բաց ենթաբազմություն է (A, τ_A) փարածությունում, ուստի 1-ից հետևում է, որ A-ն բաց ենթաբազմություն է նաև X-ում: Այժմ հակառակը. դիցուք A-ն բաց է ենթաբազմության X-ում: Դիտարկենք կամայական V բաց բազմություն A-ում: Ըստ τ_A-ի սահմանման $\exists U \in \tau$, որ $V = U \cap A$: Ուստի V-ն բաց է X-ում՝ որպես X-ում բաց երկու ենթաբազմությունների հատում: ■

Օրինակ 3: Դիտարկենք որևէ S շրջանագիծ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում:



Քանի որ $\mathbb{R}^2$-ի մետր. տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում անեզր շրջանները, ուստի (համաձայն հատկություն 1-ի) S-ի մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում շրջանագծի բոլոր անեզր $\alpha\beta$ աղեղները:

Օրինակ 4: $(\mathbb{R}^3,$ սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունում դիտարկենք T^2 տորը (մակերևույթ, որն առաջանում է շրջանագիծն իրեն չհատող ուղղի շուրջ տարածության մեջ պտտումով (տե՛ս նաև թեմա 2-ում): Այս մակերևույթի $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում նրա հատումները անեզր գնդերի հետ:



Օրինակ 5: Դիտարկենք $(\mathbb{R}^{n+1},$ սովոր. մետր. տոպ.) տարածության $S^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ ենթաբազմությունը (այն կոչվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության n-չափականության սֆերա): Կարելի է S^n-ի վրա մակածել տոպոլոգիա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետր. տոպոլոգիայից. նրա համար բազա են կազմում S^n-ի հատումները $\mathbb{R}^{n+1}$-ի $n+1$ չափականության անեզր գնդերի հետ: Այս օրինակը կարելի է դիտել որպես օրինակ 3-ի ընդհանրացում:

Օրինակ 6: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դիտել որպես $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության ենթատարածություն կազմված բոլոր $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ կետերից: Ուստի $\mathbb{R}^n$-ի մետր. տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^n$-ի վրա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետր. տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայի հետ: Նկատենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը փակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^{n+1}$-ում (ինչո՞ւ): Ուստի (համաձայն փակ ենթաբազմության վերաբերյալ թեորեմ 1-ի նմանակ թեորեմի), $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմությունները փակ են նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Մինչդեռ $\mathbb{R}^n$-ում բաց ենթաբազմություն կարող է բաց լինել նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում ~~միայն այն դեպքում, երբ այդ ենթաբազմությունը դատարկ է~~: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես խնդիր ապացուցել այդ պնդումը,

$n = 1, 2$

էջ 83-C

Լեմմա: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն $A \subset X$ ենթաբազմություն, դիտարկենք $i : A \to X$, $i(a) = a$ ներդրումը: Այս $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $U \in \tau$, ապա $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$: ■

Նկատենք, որ τ_A-ն այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է A-ի վրա, որի դեպքում i-ն անընդհատ է:

Եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$ ենթաբազմություն, ապա $f_A : A \to Y$, $f_A(a) = f(a)$, $a \in A$ արտապատկերումը կոչվում է f **արտապատկերման սահմանափակում** A ենթաբազմության վրա: Նկատենք, որ $f_A = f \circ i$, որտեղ $i : A \to X$ արտապատկերումը A ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ՝ $i(a) = a$, $\forall\, a \in A$:

Թեորեմ 2: Եթե տոպոլոգիական տարածությունների $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ արտապատկերումը անընդհատ է, ապա $\forall\, A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում f արտապատկերման $f_A : (A, \tau_A) \to (Y, \sigma)$ սահմանափակումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Շնորհիվ լեմմայի f_A-ն անընդհատ է որպես i և f անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: ■

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում տրված երկու անընդհատ արտապատկերումներից «կարել» կամ «սոսնձել» մի երրորդ անընդհատ արտապատկերում: Բերենք ~~մի~~ այդպիսի հնարավորության օրինակ:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X = A \cup B$, որտեղ A-ն և B-ն փակ ենթաբազմություններ են X-ում: Դիցուք $f : A \to Y$ և $g : B \to Y$ անընդհատ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f(x) = g(x)$ ցանկացած $x \in A \cap B$ կետում: Դիտարկենք $h : X \to Y$ արտապատկերումը, որտեղ $h(x) = f(x)$, երբ $x \in A$ և $h(x) = g(x)$, երբ $x \in B$: Այս h արտապատկերումն անընդհատ է:

Ապացուցում: Նախ նկատենք, որ h-ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք F-ը փակ բազմություն է Y-ում: Ունենք՝

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F):$$

էջ 83

Քանի որ F-ը փակ է Y-ում և f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(F)$-ը փակ է A-ում: Հետևաբար $f^{-1}(F)$-ը փակ է նաև X-ում (այստեղ օգտվեցինք թեորեմ 1-ի նմանակից՝

հաշվի առնելով, որ A-ն փակ է X-ում): Նույնանման դատողություններով, $g^{-1}(F)$-ը ևս փակ է X-ում: Հետևաբար $h^{-1}(F)$-ը փակ է X-ում $\Rightarrow$ h-ն անընդհատ է: ■

Վերջում կանգ առնենք տոպոլոգիական տարածությունների այսպես կոչված ժառանգական հատկության հասկացության վրա: Ըստ սահմանման, տոպոլոգիական տարածության P հատկությունը կոչվում է **ժառանգական**, եթե այդ հատկությամբ օժտված ամեն մի տոպոլոգիական տարածության ցանկացած ենթատարածություն նույնպես օժտված է այդ հատկությամբ:

Տոպոլոգիական տարածությունների մեզ արդեն ծանոթ հատկություններից ժառանգական են անջատելիության $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ աքսիոմները, հաշվելիության I և II աքսիոմները, տարածության մետրացումը (հիմնավորումները, որպես խնդիրներ, թողնվում են ընթերցողին):

Ոչ ժառանգական հատկություններ են սեպարաբելությունը, լինդելյոֆությունը, կապակցվածությունը, գծային կապակցվածությունը, կոմպակտությունը: Վերջին երեք հասկացությունների հետ կծանոթանանք հաջորդ թեմաներում:

այս էջը պետք է ձեռագրի 83-րդ էջի [illegible] հաջորդ էջում

Նկատենք, որ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունների փակ ենթաբազմությունների օրինակ 6-ում բերված հաջորդականության մեջ է գտնվում առանձնացված $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը և նրա վրա հաջորդ տոպոլոգիան: Առանձնացնենք $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը որպես $\mathbb{R}^1\cup\mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}^3\cup\cdots$ բազմության ֆակտոր-բազմություն կազմավորված նրա կետերի

$(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=(x_1,x_2,\dots,x_n,0,0)=\dots$

կետերի նույնացումներով ամեն մի ընտրված n թվի և իրական թվերի ամեն մի $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ հաջորդականության համար: Այդ կազմով մեզ որոշ ամբողջականություն կարող ենք համարել, որ $\mathbb{R}^\infty$-ի բոլոր կետերը կազմված բոլոր անվերջ $(x_1,x_2,\dots)$ հաջորդականությունների բազմությունն է, որոնց անդամները սկսած որոշ տեղից զրոներ են: Արտահայտությունը ներկայացնում $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածված է անվերջ չափանիությունների իրական թվերի հաջորդականությունների տարածության և բոլոր բազմությունների ընդհանուր տարածության հատվածները: Առանձնացնենք տոպոլոգիան $\mathbb{R}^\infty$-ի վրա համարելով փակ այն $F\subset\mathbb{R}^\infty$ ենթաբազմությունը այն և միայն այն դեպքում, երբ ամեն մի n-ի դեպքում փակ է $F\cap\mathbb{R}^n$ հատումը: Տոպոլոգիայի F1—F3 աքսիոմները ստուգվում են անմիջականորեն:

$\mathbb{R}^\infty$-ում կարելի է առանձնացնել տոպոլոգիա երկրորդ եղանակով՝ օժտելով $\mathbb{R}^\infty$-ը մետրիկական տարածությամբ $(\rho(x,y))^2=\sum_{i\ge1}(x_i-y_i)^2$ մետրիկով:

Ցույց տանք, որ $\mathbb{R}^\infty$-ի այս երկու տոպոլոգիաները համարժեք չեն, քանի որ, օրինակ

$A=\{(1,0,0,\dots),(0,\frac{1}{2},0,0,\dots),(0,0,\frac{1}{3},0,0,\dots),\dots\}$

ենթաբազմությունը առաջին տոպոլոգիայում փակ է $\mathbb{R}^\infty$-ի առաջին տոպոլոգիայում, բայց փակ չէ երկրորդ տոպոլոգիայում: Իրոք, $0=(0,0,\dots)$ կետի կենտրոնով ε-շրջակայքը ունի ոչ դատարկ հատում A-ի հետ, բայց 0-ն չի պատկանում A-ին (հիմնավորել):

Առանձնացված է $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը և նրա վրա տոպոլոգիան ևս մի եղանակով. այս դեպքում $\mathbb{R}^\infty$-ի կետերը են համարվում բոլոր $(x_1,x_2,\dots)$ իրական հաջորդականությունները, պահանջելով որ զուգամիտում է $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ շարքը: Այս դեպքում նույնացված $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է մետրիկական տարածության, որը նշանակվում է l_2-ով և կոչվում է հիլբերտյան տարածություն (մանրամասները տես [ ]-ում):

Այժմ ներկայացնենք մասնավորված տոպոլոգիա և ենթատարածությունների հասկացությունները մի քանի օրինակ և համապատասխան կիրառելի [illegible]