Թեմա 10

Հաջորդականությունների զուգամիտությունը տոպոլոգիական տարածություններում: Տարածության տոպոլոգիայի նկարագրումը զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով:

Մաթեմատիկական անալիզի հիմնական շատ հասկացություններ սերտորեն կապված են թվային հաջորդականություն, ենթահաջորդականություն, թվային հաջորդականության սահման հասկացությունների հետ: Սկզբունքորեն հաջորդականությունների զուգամիտության տեսություն կարելի է զարգացնել ոչ միայն թվային ուղղի վրա, և ոչ միայն մետրիկական, այլև կամայական տոպոլոգիական տարածությունում:

Եթե ունենք որևէ X բազմություն, ապա **հաջորդականություն X-ում** կոչվում է (բնական թվերով համարակալված) ամեն մի $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմություն:

Համարժեք սահմանում. հաջորդականություն X-ում կոչվում է ցանկացած $f : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերում: Իրոք, ամեն մի $n \in \mathbb{N}$ թվի համար նշանակելով $f(n) \in X$ կետը x_n-ով, կստանանք $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ հաջորդականություն նախկին իմաստով և հակառակը:

Երբեմն հաջորդականության նշանակման համար կօգտագործենք համառոտ գրառում՝ $\{x_n\}$:

Դիցուք ունենք երկու՝ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականություններ X բազմությունում, այսինքն $f : \mathbb{N} \to X$ և $g : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերումներ, ~~որ~~ և $x_n = f(n)$, $y_n = g(n)$, $n \in \mathbb{Z}$:

Սահմանում: Ասում են, որ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը $\{x_n\}$ **հաջորդականության ենթահաջորդականություն** է, եթե գոյություն ունի $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ արտապատկերում, որ $h(i) > h(j)$ ցանկացած $i > j$ դեպքում և $g = f \circ h$:

Սահմանումից հետևում է. $y_n = g(n) = (f \circ h)(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$, այսինքն $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության յուրաքանչյուր y_n անդամ $\{x_n\}$ հաջորդականության որևէ անդամ է:

Սահմանում: X բազմության $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է ստացիոնար հաջորդականություն, եթե ինչ-որ $m \in \mathbb{N}$ համարից սկսած նրա բոլոր անդամները նույնն են՝ $x_m = x_{m+1} = \cdots$

Սահմանում: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականություն: Ասում են, որ այն զուգամիտում է $a \in X$ կետին (գրառվում է $\lim \{x_n\} = a$), եթե a կետի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի $n_0 \in \mathbb{N}$ թիվ, որ $x_n \in U$ ցանկացած $n > n_0$ թվի դեպքում: Այս դեպքում ինքը՝ հաջորդականությունը կոչվում է **զուգամետ հաջորդականություն**, իսկ a-ն կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման:

Նկատենք, որ հաջորդականությունը կարող է զուգամետ լինել կամ չլինել (սահման ունենալ, կամ չունենալ), ինչպես նաև՝ զուգամետ հաջորդականության սահմանը կարող է միակը չլինել:

Օրինակ 1: ա) Ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում ամեն մի ստացիոնար հաջորդականություն զուգամետ հաջորդականություն է (հիմնավորել):

բ) $(X,$ դիսկր.$)$ տարածությունում զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները, ընդ որում սահմանը միակն է (հիմնավորել):

գ) $(X,$ անտիդիսկր.$)$-ում ցանկացած հաջորդականություն զուգամիտում է X-ի ցանկացած կետի (հիմնավորել):

դ) Դիտարկենք որևէ $(X,$ հաշվ. լր.$)$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Այստեղ ևս զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Իրոք, ենթադրենք $\{x_n\}$-ը ստացիոնար չէ և գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$: Սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով a կետից տարբեր անդամներ: Դիտարկենք a կետի $U = X \setminus \{x_n \mid x_n \neq a,\ n \in \mathbb{N}\}$ բաց շրջակայքը: Ըստ մեր ենթադրության գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in U$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $x_n = a$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում (ինչո՞ւ): Ստացանք հակասություն:

Թվարկենք զուգամիտության մի քանի պարզ հատկություններ:

Ցանկացած $\{x_n\} \subset X$

1. զուգամետ հաջորդականության ամեն մի $\{y_n\}$ ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամետ հաջորդականություն է և ունի նույն սահմանը (սահմանները), ինչ որ ունի $\{x_n\}$-ը (հիմնավորել):

2. Եթե $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունը ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահման, ապա $a \in \overline{\{x_n\}}$ (հիմնավորել):

3. Ցանկացած T_2-տարածությունում ամեն մի զուգամետ հաջորդականություն ունի միակ սահման:

Իրոք, ենթադրենք որևէ X T_2-տարածությունում ինչ-որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունի $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$, $a \neq b$ սահմաններ: Դիտարկենք a և b կետերի չհատվող U և V շրջակայքեր (զուգամիտության պայմանը):

Թեորեմ 1: Կամայական X մետրիկական տարածության ամեն մի $\{x_n\} \subset X$ և $a \in X$ կետի հաջորդականության համար հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.

ա) գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահման,

բ) ցանկացած $\mathcal{D}(a,r)$ բաց գնդի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a,r)$ երբ $n > n_0$:

Ապացուցում: Անցումը ա)-ից բ)-ին ակնհայտ է: Ցույց տանք բ) $\Rightarrow$ ա) անցումը: Դիցուք U-ն a կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման, գոյություն ունի a կետի V բաց շրջակայք, որ $a \in V \subset U$: Համաձայն նախորդ թեմայի թեորեմ 3-ի, գոյություն ունի a կենտրոնով $\mathcal{D}(a,r)$ բաց գունդ, որ ~~$a \in$~~ $\mathcal{D}(a,r) \subset V$: Ըստ պայմանի, գոյություն ունի n_0 թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a,r)$, երբ $n > n_0$: Հետևաբար $x_n \in U$, երբ $n > n_0$, որտեղից $\lim\{x_n\} = a$: ■

Քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպես են միմյանց հետ կապված փարածության տոպոլոգիան (այսինքն բաց և փակ ենթաբազմությունները) և տվյալ փարածությունում զուգամետ հաջորդականությունները: Սկսենք բաց ենթաբազմություններից:

Թեորեմ 2: Դիցուք X տոպ. փարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին: Ապա X-ի A ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում ամեն մի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է A-ի որևէ կետի, ընկած է A-ի մեջ սկսած ինչ-որ անդամից:

Նախ ապացուցենք մի օժանդակ պնդում:

Լեմմա: Եթե X տոպոլոգիական փարածությունը բավարարում է հաշվելիության աքսիոմին, ապա նրա ամեն մի x կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա ~~այնպես~~, որ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$

Ապացուցում: Դիտարկենք x կետի շրջակայքերի որևէ $\{V_i(x)\}$ հաշվելի բազա և x-ի շրջակայքերի նոր՝ $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա, $U_1(x) = V_1(x)$ և $U_i(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k(x)$ ամեն մի i ինդեքսի համար: Պարզ է, որ միշտ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$: ■

Թեորեմ 2-ի ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը անմիջապես հետևում է հաջորդականության զուգամիտության սահմանումից: Ցույց տանք պայմանի բավարարությունը հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք որևէ A ենթաբազմության համար նշված պայմանը տեղի ունի, բայց A-ն բաց չէ: Նշանակում է՝ գոյություն ունի $s \in A$ կետ, որը ներքին կետ չէ A-ի համար: Ըստ լեմմայի, գոյություն ունի s կետի շրջակայքերի $\{U_i(s);\, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա, որ $U_i(s) \supset U_{i+1}(s)$ ամեն մի $i,\, i+1 \in I$ դեպքում: Քանի որ $s \notin \operatorname{int} A$, ուստի ամեն մի $U_n(s)$-ում կարող ենք ընտրել x_n կետ, որ $x_n \notin A$: Պարզ է, որ ստացված $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է s կետին, և ըստ թեորեմի պայմանի՝ նրա անդամները ինչ-որ համարից սկսած պետք է պատկանեն A-ին: Բայց դա հակասում է նրան, որ $\{x_n\} \cap A = \varnothing$: ■

Այժմ քննարկենք փակ ենթաբազմությունների դեպքը: Այդ նպատակով վերադառնանք վերը բերված եթե գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = s$ սահման, ապա $s \in \overline{\{x_n\}}$: Այս հատկությունը հետևյալ դիցուք ունենք $A \subset X$ որևէ ենթաբազմություն և $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն: Եթե գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման, ապա $s \in \bar{A}$: Այսինքն A ենթաբազմության մեջ պարունակվող զուգամետ հաջորդականության սահման հպման կետ է A-ի համար

Թեորեմ 3: Դիցուք X փարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին: Ապա X-ի կամայական ոչ դատարկ A ենթաբազմություն փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A ենթաբազմությունում պարունակվող ամեն մի զուգամետ հաջորդականության $\forall$ սահման հպման կետ է A-ի համար:

Պայմանի անհրաժեշտությունն [illegible] արդեն [illegible] ենք: Իսկ բավարարությունը ապացուցվում է ինչպես [illegible]-ում՝ դարձյալ լեմմայի օգնությամբ (մանրամասները թողնում ենք ընթերցողին):

Հաջորդ հիմնական հարցը հետևյալն է՝ կարելի՞ է արդյոք փարածության փոպոլոգիան նկարագրել զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով: Նախ հսփակեցնենք հարցադրումը:

Դիցուք ունենք ինչ-որ X բազմություն, դիփարկենք [illegible] M բազմություն, որի փարրերը $(\{x_n\}, s)$ փեսքի որոշ զույգեր են, որփեղ $\{x_n\}$-ը որևէ հաջորդականություն է X-ում, իսկ s-ը X-ի որևէ կեփ է: Պահանջենք, որ M-ը բավարարի հեփևյալ երկու պայմաններին՝

ա) Եթե $(\{x_n\}, s) \in M$, ապա $\{x_n\}$-ի ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության դեպքում [illegible] $(\{y_n\}, s) \in M$:

բ) ցանկացած $\{x_n\}$ սփացիոնար հաջորդականության դեպքում, եթե ինչ-որ անդամից սկսած $x_m = x_{m+1} = \cdots = s$, ապա $(\{x_n\}, s) \in M$:

Հարց 1: Տվյալ X և M բազմությունների դեպքում գոյություն ունի՞ արդյոք [illegible] այնպիսի τ փոպոլոգիա X-ում, որ $(\{x_n\}, s) \in M$ այն և միայն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման (X, τ) փարածությունում:

Այս հարցի դրական պափասխանի դեպքում կասենք, որ X-ի τ փոպոլոգիան որոշվում է M բազմությունով:

Հարց 2 (հարց 1-ի հակառակը)**:** Ճի՞շփ է արդյոք, որ X բազմության կամայական τ փոպոլոգիայի համար գոյություն ունի վերը նկարագրված $(\{x_n\}, s)$ զույգերի M բազմություն այնպես, որ M-ով որոշվող X-ի փոպոլոգիան համընկնում է τ-ի հեփ:

1 և 2 հարցերի դրական պափասխանների դեպքում կունենանք, որ փվյալ X բազմության բոլոր փոպոլոգիաները կարող են լիովին նկարագրվել X-ում զուգամետ հաջորդականությունների փերմիններով:

Այժմ քննարկենք այդ հարցերը փակման գործողության փեսանկյունից: Դիցուք A-ն X փարածության սևեռված ենթաբազմություն է: Նշանակենք $\widetilde{A}$ բոլոր A-ի մեջ պարունակվող զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմությունը: Պարզ է, որ $\widetilde{A} \subset \overline{A}$: Ենթադրենք, որ իր հերթին $\overline{A} \subset \widetilde{A}$, և հեփևաբար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Սա նշանակում է, որ $\overline{A}$ փակումը համընկնում է A ենթաբազմությունում պարունակվող բոլոր զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմության հեփ: Եթե ասվածը փեղի ունենա X-ի ցանկացած A ենթաբազմության դեպքում, ապա X փարածությունում ենթաբազմությունների փակման գործողությունը, ուսփի և X-ի փոպոլոգիան լիովին կորոշվի X-ում զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով (ևս մի հնարավորություն բազմության վրա փոպոլոգիա սահմանելու համար): Այն, որ դա հնարավոր է որոշ փարածությունների դեպքում, նախապես ցույց փանք հասարակ օրինակով:

Վերցնենք որևէ X բազմություն և նրանում զուգամետ հաջորդականություններ հայտարարենք միայն և միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Եթե $\{x_n\}$-ը մի այդպիսի հաջորդականություն է $x_m = x_{m+1} = \cdots = s$, ապա սահմանենք $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $\forall A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $\widetilde{A} = A$: ստանում ենք ~~X-ում~~ $A \mapsto \mathrm{cl}\, A$ գործողություն $\mathrm{cl}\, A = \widetilde{A}$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այն Կուրատովսկու փակման գործողություն է (բավարարվում են K1-K4 աքսիոմները) և ստացված տոպոլոգիայում $\overline{A} = \widetilde{A} = A$: ստաց-ված X-ի դիսկրետ տոպոլոգիան:

Հարց: Տեղի ունի՞ արդյոք նույնը ցանկացած տոպոլոգիական տարածության դեպքում: Պատասխանը բացասական է

Օրինակ 2: Դիտարկենք որևէ $(X, \text{հաշվ. լրաց.})$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Սևեռենք որևէ $a \in X$ կետ և դիտարկենք X-ի $A = X \setminus \{a\}$ ենթաբազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ $a \in \overline{A}$: Ցույց տանք, որ գոյություն չունի $\{x_n\} \subset A$ զուգամետ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն որ $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $U = X \setminus \{x_n\}$ ենթաբազմությունը a կետի բաց շրջակայք է: Բայց $U \cap \{x_n\} = \varnothing$, ինչը հակասում է $\lim\{x_n\} = a$ պայմանին:

Այս «անհաջողության» պատճառն այն է, որ հաջորդականությունները հաշվելի բազմություններ են, ինչը թույլ չի տալիս ընդհանուր (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում, հայտնաբերել ենթաբազմության բոլոր հպման կետերը սահման տեսքով

Այնուամենայնիվ ընդհանուր տոպոլոգիայում զարգացվում է զուգամիտության տեսություն այնպես, որ ցանկացած տոպոլոգիա լիովին նկարագրվում է զուգամիտության տերմիններով: Արվում է դա երկու համարժեք եղանակով, ընդհանրացնելով հաջորդականություն և հաջորդականության սահման հասկացությունները: Մի դեպքում ներմուծվում են **ֆիլտր** և **զուգամետ ֆիլտր** հասկացություններ, իսկ մյուս դեպքում **ուղղվածություն** և **զուգամետ ուղղվածություն** հասկացություններ (մանրամասնությունները տե՛ս [ ] գրքում):

Որոշ դասի տարածությունների համար վերոհիշյալ հարցի պատասխանը դրական է նաև սովորական հաջորդականությունների դեպքում: Իրոք, տեղի ունի.

Թեորեմ 4: Եթե X տոպ. տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին (մասնավորապես՝ մետրիկական տարածություն է), ապա ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության համար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\overline{A} \subset \widetilde{A}$: Դիցուք $a \in \overline{A}$, ցույց տանք գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ըստ լեմմայի՝ a կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ բազա, որ $U_{n+1} \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$:

Քանի որ $U_n \cap A \neq \varnothing$, կարող ենք յուրաքանչյուր U_n-ում ընտրել որևէ $x_n \in A$ կետ: Ստանում ենք $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, և ակնհայտ է, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ուստի $a \in \widetilde{A}$: ■

Խնդիրներ և հանձնարարություններ գլուխ 10-ի վերաբերյալ:

10.1. Գտնել բոլոր զուգամետ հաջորդականությունները կապակցված կետային տարածությունում՝ $X=\{x_1,x_2\}$, $\tau=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$:

10.2. Դիցուք X-ի տոպոլոգիան բաղկացած է վերջավոր բազմությունների լրացումներից: Ապացուցել, որ ցանկացած $\{x_n\}\subset X$ հաջորդականություն կազմված X-ի զույգ առ զույգ տարբեր կետերից զուգամիտում է X-ի ցանկացած կետի:

10.3. Սորգենֆրեյի կոչվող աջակողմյան կիսաբաց տոպոլոգիայով
5' $(\mathbb{R},$ աջից$)$-ում մոնոտոն աճող, վերևից սահմանափակված ամեն մի հաջորդականություն ունի միակ սահման: Ապացուցել, որ այդպիսի հաջորդականությունները զուգամետ չեն $(\mathbb{R},\longmapsto)$ տարածությունում:

10.4. Դիտարկենք որևէ հաշվելի $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ բազմություն: Սահմանենք X-ի համար այնպիսի τ տոպոլոգիա, որ (X,τ) տարածությունում բոլոր զուգամետ հաջորդականությունները ունենան միակ սահման:

Ցուցում: Դիտարկել $\{\varnothing, X, \{x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\dots\}$ ընտանիքը:

10.5. Դիտարկենք որևէ $(X,$ հաշվ. լր.$)$ տարածություն և դիցուք A-ն X-ի որևէ ոչ հաշվելի ենթաբազմություն է: Ապացուցել՝ ա) ցանկացած $b\in X\setminus A$ կետ հանդիսանում է A-ի հպման կետ; բ) գոյություն չունի $\{a_n\}\subset A$ հաջորդականություն, որ $\lim a_n=b$:

10.6. Ապացուցել, եթե $\{x_n\}\subset X$ հաջորդականությունը ունի $\lim x_n=a$ սահման, ապա a-ն պատկանում է $\overline{\{x_n\}}$ փակմանը:

10.7. Ապացուցել, ցանկացած $\{x_n\}\subset X$ զուգամետ հաջորդականության ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականություն ունի նույն սահմանը (սահմանները), ինչ որ ունի $\{x_n\}$-ը:

10.8. Հաջորդականության ենթահաջորդականության սահմանման մեջ փոխարինենք $h:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ արտապատկերման գոյությունը, որը պետք է բավարարի $h(i)>h(j)$ պայմանին, երբ $i>j$:

Նշում: Թվում է, թե ենթահաջորդականության սահմանման մեջ պահանջելով $h(i)\geq h(j)$, երբ $i>j$ ավելի քիչ արդյունք կստանանք:

հաջորդ երկու բազմությունների հավասարությունից է հետևում:

10.9. Ինչո՞ւ է ասվում, որ ցանկացած արտապատկերում հաջորդականության ամեն մի ենթահաջորդականություն նույնպես արտապատկերում հաջորդականություն է:

10.10. Ինչպե՞ս ապացուցել հետևյալ պնդումը. $\{x_n\}\subset X$ զուգամետ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն ա) նույնպես զուգամետ է, բ) ունի նույն սահմանակետերը, ինչ որ ունի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը:

10.11. Նշանակենք $\{\lim x_n\}$ սիմվոլով $\{x_n\}\subset X$ հաջորդականության բոլոր սահմանակետերի բազմությունը (այն կարող է լինել նաև $\varnothing$ բազմությունը): Ինչո՞ւ է ապացուցել պնդումը. $\{x_n\}$ հաջորդականության ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության համար տեղի ունի $\{\lim y_n\}\subset\{x_n\}$ ներառումը: