Թեմա 8

Հաշվելիության աքսիոմները, կապը նրանց միջև, Լինդելյոֆի թեորեմը: Սեպարաբել տարածություններ, կապը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմի և սեպարաբելության միջև:

Մետրիկական տարածություններն օժտված են ևս մի կարևոր հատկությամբ՝ բավարարում են այսպես կոչված հաշվելիության աքսիոմին:

Սահմանում: Դիցուք x-ը X տոպոլոգիական տարածության որևէ սևեռված կետ է, իսկ β_x-ը այդ կետի որոշ շրջակայքերի համախմբություն է: Ասում են, որ β_x-ը x կետի **շրջակայքերի բազա** է, եթե x-ի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի $V \in \beta_x$ շրջակայք, որ $V \subset U$:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության աքսիոմին**, եթե նրա ցանկացած կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի բազա:

Հետաքրքիր է պնդումը, որ ցանկացած

Օրինակ 3: $(X,$ դիսկր.$)$ և $(X,$ անտիդ.$)$ տարածություններ բավարարում են հաշվելիության աքսիոմին (ինչո՞ւ):

Թեորեմ 1: Ցանկացած մետրիկական (X,ρ) տարածություն բավարարում է հաշվելիության աքսիոմին:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ կամայական $x \in X$ կետի համար բոլոր $\mathcal{D}(x,r)$, $r \in \mathbb{Q}$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի U բաց շրջակայք, որ $x \in U \subset V$: Համաձայն թեմա 6-ում թեորեմ 3-ի՝ գոյություն ունի x կենտրոնով $\mathcal{D}(x,R)$ բաց գունդ, որ $x \in \mathcal{D}(x,R) \subset U$.

Վերցնենք որևէ ռացիոնալ r թիվ, որ $R > r > 0$: Ունենք $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(x,R) \subset U \subset V$, որից հետևում է՝ $x \in \mathcal{D}(x,r) \subset V$, ուստի ռացիոնալ շառավիղներով $\mathcal{D}(x,r)$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: ■

Պետք է բերենք տոպոլոգիական կոնստրուկցիայի օրինակ, որը չի բավարարում հաշվելիության աքսիոմին:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $(\mathbb{R},$ վերջ. լր.$)$ տարածությունը: Ըստ սահմանման՝ նրանում բաց բազմություններ են համարվում վերջավոր ենթաբազմությունների լրացումները: Ցույց տանք, որ $0 \in \mathbb{R}$ կետի համար գոյություն չունի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Ենթադրենք հակառակը՝ 0 կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի $\beta = \{U_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա: Նախ ցույց տանք, որ $\bigcap_i U_i = \{0\}$: Հետևաբար, որ ամեն մի $r \neq 0$ թվի դեպքում $V(r) = \mathbb{R} \setminus \{r\}$ ենթաբազմությունը 0 կետի բաց շրջակայք է, հետևաբար գոյություն ունի 0-ի $U(r) \in \beta$ շրջակայք, որ $0 \in U(r) \subset V(r)$: Քանի որ $r \notin V(r)$, ուստի $\bigcap_r V(r) = \{0\}$: Հետևաբար $\bigcap_r U(r) = \{0\}$, ուրեմն $\bigcap_i U_i = \{0\}$, որտեղ $i \in I$: Պարզվեց, որ $\mathbb{R} \setminus \bigcap_i U_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է: Բայց մյուս կողմից, սակայն դե մոգության էմպիրիկ բանաձևով $\mathbb{R} \setminus \bigcap_i U_i = \bigcup_i (\mathbb{R} \setminus U_i)$ բազմությունը հաշվելի բազմություն է՝ որպես հաշվելի քանակով վերջավոր բազմությունների միավորում: Ստացանք հակասություն:

Ուստի $(\mathbb{R}, \text{վերջ.-փ.})$ տարածությունը չի բավարարում հաշվելիության առաջին սահմանին:
Միևնույն ժամանակ, դրանում հաշվելի հեռավոր ենթաբազմություն է. $(\mathbb{R}, \text{վերջ.-փ.})$ տարածությունը չի կարող մետրիկացվել:

Երկրաչափական որոշ բարդ պատկերներ (օրինակ՝ ողորկ բազմաձևությունները) սահմանվում են ավելի պարզ պատկերների սոսնձումներով: Այդպիսի կառուցումները էապես հեշտանում են, եթե նախապես պահանջում են, որ կառուցվող տարածությունը (բազմաձևությունը) բավարարի այսպես կոչված հաշվելիության աքսիոմին:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին**, եթե նրա տոպոլոգիայի համար գոյություն ունի որևէ հաշվելի բազա: ✓

Օրինակ 3: Հեշտությամբ գիտենք, որ ստանդարտ մետրիկայով բերված (x_1, x_2) թվերի զույգերի տարածությունը հաշվելի բազա է $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի համար: Ուստի $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ սահմանին:

Թեորեմ 2: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն բավարարում է նաև հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապացուցում: Դիցուք (X, τ) տարածության համար $B = \{U_i\}$ համախմբությունը τ տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: Կամայական $x \in X$ կետի համար դիտարկենք B-ի B_x ենթաբազմությունը՝ կազմված B-ի այն բոլոր տարրերից, որոնք պարունակում են x կետը: Պարզ է, որ B_x-ը հաշվելի բազմություն է: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա գոյություն ունի $U \in \tau$ բաց բազմություն, որ $x \in U \subset V$: Ըստ պայմանի՝ U-ն ներկայացվում է $U = \bigcup U_j$ տեսքով, որտեղ $U_j \in B$: Նշանակում է՝ x-ը պատկանում է դրանցից որևէ մեկին՝ $x \in U_{j_0}$, $j_0 \in J$: Ուստի $U_{j_0} \in B_x$, և $x \in U_{j_0} \subset V$: ■

Հաշվելիության առաջին աքսիոմին բավարարող տարածությունը կարող է չբավարարել հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Որպես պարզ օրինակ վերցնենք որևէ ոչ հաշվելի բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով: Ինչպես գիտենք, նրա ցանկացած B բազա իր մեջ պարունակում է բոլոր մի կետանոց ենթաբազմությունները: Ուստի B-ն ոչ հաշվելի բազա է:

Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունների մյուս կարևոր հատկությունը կապված է բաղադրյալ ծածկույթ, ենթածածկույթ հասկացությունների հետ: ✓

Սահմանում: Դիցուք ունենք X բազմությունը A ենթաբազմություն և X-ի ենթաբազմությունների հետևություն $U_i \subset X$, $i \in I$ ընտանիք: Ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը ***A* ենթաբազմության ծածկույթ է**, եթե $A \subset \bigcup_i U_i$: Մասնավորապես, $A = X$ դեպքում $\{U_i,\ i \in I\}$ ընտանիքը X-ի ծածկույթ է, եթե $X = \bigcup_i U_i$: Ծածկույթը կոչվում է **բաց ծածկույթ**, եթե նրա տարրերը X տարածության բաց ենթաբազմություններ են: Ծածկույթը կոչվում է ~~վերջավոր~~ **հաշվելի** ծածկույթ, եթե ինդեքսների I բազմությունը ~~վերջավոր~~ հաշվելի բազմություն է:

Դիցուք ունենք $A \subset X$ ենթաբազմության երկու՝ $\{U_i;\ i \in I\}$ և $\{V_j;\ j \in J\}$ ծածկույթներ: Եթե ամեն մի $i \in I$ փարրի համար գոյություն ունի $j \in J$ փարր այնպես, որ $U_i = V_j$, ապա ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ծածկույթը $\{V_j;\ j \in J\}$ ծածկույթի ենթածածկույթ է:

Օրինակ 4: ($\mathbb{R}$, սովոր.) փարածության համար $U_i = (i-1; i+1)$, $i \in I = \mathbb{R}$ ինտերվալները կազմում են նրա բաց ծածկույթ, իսկ $V_j = (j-1; j+1)$, $j \in J = \mathbb{Z}$ ինտերվալները կազմում են այդ ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ:

Սահմանում: Տոպոլոգիական փարածությունը կոչվում է **լինդելյոֆյան փարածություն**, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի հաշվելի ենթածածկույթ:

Թեորեմ 3: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի փարածություն լինդելյոֆյան փարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք $\{U_i,\ i \in I\}$-ն (X, τ) փարածության որևէ բաց ծածկույթ է, իսկ B-ն τ փոպոլոգիայի որևէ հաշվելի բազա է: Ունենք $X = \bigcup\limits_i U_i$: Ամեն մի $x \in X$ կետի համար ընտրենք որևէ U_i, որ $x \in U_i$: Այդ U_i-ն վերանշանակենք U_x (նկատենք, որ փարբեր $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում հնարավոր է $U_{x_1} = U_{x_2}$ համընկում): Գոյություն ունի B-ին պատկանող V_x փարր, որ $x \in V_x \subset U_x$: Պարզ է, որ $\{V_x;\ x \in X\}$ համախմբությունը հաշվելի է որպես հաշվելի B բազմության ենթաբազմություն: Այժմ յուրաքանչյուր V_x-ի համար ընտրենք մի U_x, որ $V_x \subset U_x$: Քանի որ $X = \bigcup\limits_x V_x$, ուստի և $X = \bigcup\limits_x U_x$: Ուրեմն $\{U_x\}$-ը $\{U_i,\ i \in I\}$ բաց ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ է: ■

Հաշվելիությունը երկրորդ սահմանումը բավարարող փարածությունները կոչվում են ավելի թույլ 3-ի խնամքով: Դրան հետևում կանգնած է հետևյալ հանգամանքը՝ բավարարում է սարքյալ գնալ փարածությունը հաշվելիությունը երկրորդ սահմանումը: Դրանց դեպքերում այդ հետևյալ դրությունը կամ ֆունկցիոնալ սահմանումներ ունի սահմանվել են սահմանների խիտ ենթաբազմությունը և տեղադրվել փարածությունը հատկացվածների գերծիսներում:

Սահմանում: Ասում են, որ $A \subset X$ **ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է** (X, τ) փոպոլոգիական փարածությունում, եթե A-ի փակումը X-ն է՝ $\overline{A} = X$: Այդպիսիք են, օրինակ ա) X-ը կամայական (X, τ) փարածությունում, բ) ռացիոնալ թվերի և իռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունները ($\mathbb{R}$, սովոր.)-ում, գ) ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն (X, վերջ. լր.)-ում: Սրանք հեշտ հիմնավորվում են շնորհիվ հետևյալի:

Թեորեմ 4: X փարածությունում A ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն ունի ոչ դատարկ հատում X-ի ցանկացած բաց, ոչ դատարկ ենթաբազմության հետ:

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք $\overline{A} = X$, $U \in \tau$, $U \neq \varnothing$: Եթե $U \cap A = \varnothing$, ապա U-ի ոչ մի կետ հպման կետ չէ A-ի համար, ուստի $\overline{A} \neq X$ (հակասություն):

Բավարարությունը: Վերցնենք $\forall x_0 \in X$ կետ և ցույց տանք, որ $x_0 \in \overline{A}$: Դիցուք V-ն x_0 կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x_0-ի U բաց շրջակայք, որ $x_0 \in U \subset V$: Համաձայն պայմանի՝
$U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x_0 \in \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = X$: ■

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **սեպարաբել տարածություն, եթե** ունի ամենաշատ հաշվելի խիտ ենթաբազմություն:

Սեպարաբել տարածությունների օրինակներ: ա) ցանկացած (X, τ) տարածություն, որտեղ X-ը հաշվելի բազմություն է, բ) $(\mathbb{R}$, սովոր.$)$-ը, գ) $(\mathbb{R}, \rightarrow)$ և $(\mathbb{R}, \leftarrow)$ տարածությունները, դ) $\mathbb{R}^n$-ը սովորական մետրիկայի տոպոլոգիայով, ե) ցանկացած $(X$, անտիդ.$)$ տարածություն: Իսկ $(X$, դիսկր.$)$-ը սեպարաբել չէ, եթե X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Թեորեմ 5: Բոլոր $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ եվկլիդյան ~~մետրիկաները~~ տարածությունները սեպարաբել տարածություններ են:

Հիպոթեզա: Ինչպես գիտենք ռացիոնալ կոորդինատներով բոլոր $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{Q}$ կետերի $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$ ենթաբազմությունը հաշվելի է (տես հեղինակ. 3.5-ը թեմա 3-ում): Ցույց տանք, որ այն ունի ոչ դատարկ հատում ամեն մի $B(x, r)$ գնդի հետ, որտեղ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $r > 0$: Յուրաքանչյուր $i = 1, 2, \dots, n$ ինտերվալի համար վերցնենք որևէ q_i ռացիոնալ թիվ $\left(x_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_i + \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ ինտերվալից: Ունենանք՝

$$x_i - \frac{r}{\sqrt{n}} < q_i < x_i + \frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow -\frac{r}{\sqrt{n}} < q_i - x_i < \frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow |q_i - x_i| < \frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} |q_i - x_i|^2 < n \cdot \frac{r^2}{n} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (q_i - x_i)^2 < r^2 \Longrightarrow (q_1, q_2, \dots, q_n) \in B(x, r) \Longrightarrow$$

$$\mathbb{Q}^n \cap B(x, r) \neq \emptyset:$$

Հետևանք այն $B(x, r)$ գնդերը կազմում են բացը $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկայի համար, ուստի $\mathbb{Q}^n$-ի հատումը դատարկ չէ $\mathbb{R}^n$-ի յուրաքանչյուր բաց ենթաբազմության հետ: Հետևաբար $\mathbb{Q}^n$-ը ամենաշատ խիտ է $\mathbb{R}^n$-ում ըստ թեորեմ 4-ի: Հիպոթեզով $\mathbb{Q}^n$-ը հաշվելի, ամենաշատ խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, ուստի $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Թեորեմ 6: Հաշվելիության աքսիոմին բավարարող ցանկացած (X, τ) տարածություն սեպարաբել տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք B-ն τ տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: Յուրաքանչյուր $U_n \in B$ ենթաբազմությունում ընտրենք որևէ a_n կետ: Ստացված հաշվելի $A = \{a_n\}$ բազմությունը բավարարում է թեորեմ 4-ի պայմանին (ինչո՞ւ): Հետևաբար $\overline{A} = X$, ուստի X-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Հակառակը ճիշտ չէ. սեպարաբել տարածությունը կարող է չունենալ հաշվելի բազա: Բերենք երկու օրինակ:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $(\mathbb{R}$, վերջ. լր.$)$ տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է: Իրոք, ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի ոչ դատարկ

հատում ցանկացած ոչ դատարկ բաց ենթաբազմության հետ, ուստի այն հաշվելի ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}$-ում: Բայց ($\mathbb{R}$, վերջ. լր.) տարածությունը չունի հաշվելի բազա, քանի որ ունենալու դեպքում կբավարարվեր հաշվելիության աքսիոմը համաձայն թեորեմ 2-ի: Մինչդեռ թեմայի սկզբում ցույց ենք տվել, որ այդ տարածությունը չի բավարարում հաշվելիության աքսիոմին:

Օրինակ 3: Դիտարկենք ($\mathbb{R}$, աջից կիս. ինտ.) տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է, քանի որ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (ինչո՞ւ): Այժմ ենթադրենք, որ նրա համար գոյություն ունի հաշվելի B բազա: Նշանակում է ցանկացած $a \in \mathbb{R}$ կետի $[a, b)$ բաց շրջակայքի համար պետք է գոյություն ունենա $U \in B$ տարր, որ $a \in U \subset [a, b)$: Այսինքն $U \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի փոքրագույն տարր ի դեմս a-ի: Բայց $a \in \mathbb{R}$ կետերի բազմությունը (այսինքն $\mathbb{R}$-ը) ոչ հաշվելի բազմություն է, B-ն հաշվելի բազմություն չէ (հակասություն):

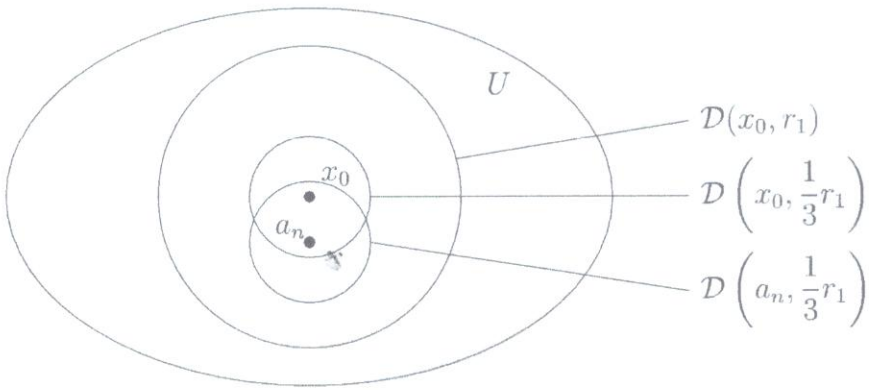
Մետրիկական տարածությունների դեպքում սեպարաբելությունը համարժեք է հաշվելիության աքսիոմին:

Թեորեմ 7: Մետրիկական տարածություն սեպարաբել է այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարում է հաշվելիության աքսիոմին:

Ապացուցում: Դիտարկենք բավարարումը հետևանքը թեորեմ 5-ից, ուստի մնում է ապացուցել պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք (X, ρ) մետրիկական տարածությունը սեպարաբել տարածություն է, և $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում: Ցույց տանք, որ բաց գնդերի $B = \{\mathcal{D}(a_n, r) \mid a_n \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը հաշվելի բազա է (X, ρ)-ի համար: Նախ պարզ է, որ B-ն հաշվելի է, քանի որ հաշվելի է (a_n, r) զույգերի բազմությունը. հետևաբար թեորեմ 3-ից թեորեմ 3-ի:

Այժմ վերցնենք որևէ $x_0 \in X$ կետ և նրա որևէ U շրջակայք: Բավական է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{D}(a_n, r) \in B$ գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$: Դրանից կհետևի, որ (X, ρ)-ն բավարարում է հաշվելիության աքսիոմին (ինչո՞ւ):

Ըստ կետի շրջակայքի և մետրիկական տոպոլոգիայի սահմանումների, գոյություն ունի $\mathcal{D}(x_0, r_1)$, $r_1 \in \mathbb{R}$ բաց գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(x_0, r_1) \subset U$: Ըստ թեորեմ 1-ի ապացույցում բերված դատողության կարող ենք համարել, որ $r_1 \in \mathbb{Q}$: Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(x_0, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը, պարզ է, որ $\mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Քանի որ $\overline{A} = X$, ուստի (համաձայն թեորեմ 4-ի) գոյություն ունի $a_n \in A$ կետ, որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$:



Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(a_n, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Իրոք, եթե $x \in \mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1)$, ապա $\rho(x, a_n) < \frac{1}{3}r_1 \Rightarrow \rho(x, x_0) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, x_0) < \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_1 < r_1$: Հետևաբար $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset U$: Մյուս կողմից, քանի որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$, ուստի $\rho(x_0, a_n) < \frac{1}{3}r_1$: Այսպիսով $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$, որտեղ $r = \frac{1}{3}r_1 \in \mathbb{Q}$: Նշանակում է $\{\mathcal{D}(a_n, r) \mid a_n \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը (X, ρ) տարածության տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: ■

Թեորեմ 8 : Բազար $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան ~~[illegible]~~ տարածությունները

ա) բավարարում են հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին

բ) լինդելյոֆյան տարածություններ են:

Հետևություն: Ունենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է համաձայն թեորեմ 5-ի: Հիմա թեորեմ 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^n$-ը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին, ուստի այն լինդելյոֆյան տարածություն է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Հետևանք: Յուրաքանչյուր $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան մետրիկային տարածություն ունեն մի քանի հատկություններ կարելի անվանակոչել հաշվելի ենթաբազմություն:

Խնդիրներ և հարցեր գլուխ 8-ի վերաբերյալ

8.1. Ուղղագծային. $(\mathbb{R}, \mapsto)$ փարածությունը բաժանարար է հաղորդակցության տարածություն:

Լուծում: Պարզենք կամայական $a \in \mathbb{R}$ կետ, ցույց տանք որ ունենք կամայական հեռավորություններ $\{[a,x);\ x>a,\ x\in\mathbb{Q}\}$ բազմաթիվ a կետի շրջակայքերի հանրության բազա է:

8.2. Ճիշտ է արդյոք, որ ցանկացած $(X, \text{վերջ. փ.})$ փարածությունը, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է, էլ բաժանարար է հաղորդակցության տարածություն:

Լուծում: Օգտվենք օրինակ 2-ում բերված տարածությունից վերցնենք:

8.3. Ուղղագծային. $(\mathbb{Z}, \text{վերջ. փ.})$ փարածությունը, որտեղ $\mathbb{Z}$-ը ամբողջ թվերի բազմությունն է, բաժանարար է հաղորդակցության տարածություն:

Լուծում: Օգտվելով գլուխ 3-ի 3.8 խնդրից նշենք ցույց տանք, որ $(\mathbb{Z}, \text{վերջ. փ.})$ փարածությունը բաժանարար է հաղորդակցության երկրորդ տարածություն:

8.4. Ճիշտ է արդյոք, որ $(\mathbb{R}, \text{հաշվ. փ.})$ փարածությունը բաժանարար է հաղորդակցության տարածություն:

Լուծում: Ստանա օրինակ 2-ը:

8.5. Գտնել մետրիկացիա փարածություն, որը էլ բաժանարար է հաղորդակցության երկրորդ տարածություն:

8.6. Ճիշտ է արդյոք որ զանազան անդամ ունեցող հարթության X քանակությունը փարածությունը, որի յուրաքանչյուր միակետանոց ենթաբազմությունը ուժեղաբար խիտ է X-ում:

8.7. Ուղղագծային. արդյոք X փարածությունը քանակությունը դիսկրետ քանակություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում զանազան անդամ միայն մի ուժեղաբար խիտ ենթաբազմություն կա՝ դատարկը X-ն է:

8.8. Ճիշտ է արդյոք, որ կամայական քանակությունը փարածությունում կամայական երկու ուժեղաբար խիտ ենթաբազմություններ ունեցող ա) միավորումը, բ) հատումը ուժեղաբար խիտ է:

8.9. Դիցուք A ենթաբազմությունը ուժեղաբար խիտ է X-ում: Ուղղագծային. կամայական $U \subset X$ բաց ենթաբազմության դեպքում $A \cap U$ ենթաբազմությունը փակումը X-ում հանդիսանում է U-ի փակումը հետևյալ $\overline{A \cap U} = \overline{U}$:

Լուծում: Դիցուք կամայական $x \in \overline{U}$ կետ և այդ կետի

ամենուրեք V բաց շրջակայք: Հետևաբար ստացանք 4-ի դրա
կոչ պրոբ, որ $V \cap (A \cap \mathcal{U}) \neq \emptyset$ (գրանցեք ինքներդ, որ $\overline{\mathcal{U}} \subset \overline{A \cap \mathcal{U}}$):
8.10. Ներդրումային ամենուրեքության գաղափարները գործնական
դրսևորվում են հետևյալ ասերտիվ հերթ բաց ենթաբազաներ
ունեցող հիպերտիպ հոլոմորֆ ասերտիվ հերթ բաց ենթաբազաներ
ունեցող f:
Սահմանում: Դիցուք $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset X$ ենթաբազաներ ունեցող ասերտիվ
հերթ տեղ X-ում: Ցանկացած հերթի 8.9-ի, դիտարկենք $A = \mathcal{U}_1$,
$\mathcal{U} = \mathcal{U}_2$: