Թեմա 9

Տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերումներ, թեորեմ մետրիկական տարածությունների արտապատկերման անընդհատության մասին: Անընդհատության հայտանիշներ՝ բաց (փակ) ենթաբազմությունների տերմիններով, ենթաբազմությունների փակման և ներքնամասի տերմիններով:

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք տոպոլոգիական տարածություններն առանձին-առանձին, միմյանցից անկախ: Այժմ զբաղվելու ենք դրանց համեմատմամբ: Այդ նպատակով ներմուծվում է տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերման հասկացությունը, որը երկրորդ կարևորագույն հասկացությունն է տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունից հետո:

Սահմանում: Դիցուք ունենք (X,τ), (Y,σ) տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը կոչվում է **անընդհատ $x_0 \in X$ կետում**, եթե Y տարածության $f(x_0) = y_0$ կետի ամեն մի V շրջակայքի համար գոյություն ունի X տարածության x_0 կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$:

Հետևյալ պնդումը երբեմն հեշտացնում է անընդհատության պայմանի ստուգումը:

Թեորեմ 1: Ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f : X \to Y$ արտապատկերում, $f(x_0) = y_0$, իսկ $\beta_{x_0} = \{U_i(x_0),\ i \in I\}$ և $\beta_{y_0} = \{V_j(y_0),\ j \in J\}$ ընտանիքները համապատասխանաբար x_0 և y_0 կետերի շրջակայքերի որևէ բազաներ են X և Y տարածություններում: Ապա f-ը անընդհատ է x_0 կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall\, V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$ շրջակայքի համար գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$ շրջակայք, որ $f(U_i(x_0)) \subset V_j(y_0)$:

Ապացուցում: Դիցուք f-ը անընդհատ է x_0 կետում, և ունենք որևէ $V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$: Ըստ կետում անընդհատության սահմանման, գոյություն ունի x_0 կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V_j(y_0)$: Համաձայն կետի շրջակայքերի բազայի սահմանման, գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$, որ $U_i(x_0) \subset U$: Այժմ ստանում ենք՝ $f(U_i(x_0)) \subset f(U) \subset V_j(y_0)$:

Հիմա հակառակը. դիցուք V-ն y_0 կետի որևէ շրջակայք է: Գոյություն ունի $V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$, որ $V_j(y_0) \subset V$: Ըստ պայմանի, գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$, որ $f(U_i(x_0)) \subset V_j(y_0) \subset V$: Տվյալ V շրջակայքի համար որպես U շրջակայք վերցնելով $U_i(x_0)$-ն ստանում ենք $f(U) \subset V$: Ուստի f-ը անընդհատ է x_0 կետում: ■

Կիրառենք այս թեորեմը մասնավոր դեպքում, երբ տոպոլոգիական տարածությունները մետրիկական են՝ (X, ρ) և (Y, ρ'):

Ինչպես գիտենք, այդ տարածություններում բոլոր $\{B(x, r)\}$ և $\{D(y, r)\}$ անեզր գնդերի ընտանիքները կազմում են բազա համապատասխանաբար x_0 և y_0 կետերի շրջակայքերի համար (տե՛ս թեորեմ 2-ը թեմա 7-ում): Այստեղից և թեորեմ 1-ից ստանում ենք.

Հետևանք: Մետր մետրիկական տարածությունների $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում այն և միայն դեպքում, երբ Y-ում ամեն մի $\mathcal{D}(y_0, r')$ գնդի համար, որտեղ $y_0 = f(x_0)$, գոյություն ունի X-ում $\mathcal{D}(x_0, r)$ գունդ, որ $f(\mathcal{D}(x_0, r)) \subset \mathcal{D}(y_0, r')$:

Սահմանում: Ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ և որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը կոչվում է **անընդհատ արտապատկերում**, եթե այն անընդհատ է X-ի բոլոր կետերում:

Սկզբի համար բերենք անընդհատ արտապատկերումների երկու պարզ օրինակ:

ա) Ցանկացած տոպ տոպոլոգիական տարածության նույնական արտապատկերումը ինքն իր վրա անընդհատ արտապատկերում է: Իրոք, $f = \mathbb{1}_X : X \to X$, $f(x) = x$ արտապատկերման դեպքում $y_0 = f(x_0) = x_0$ կետի V շրջակայքի համար որպես x_0 կետի U շրջակայք վերցնելով V-ն, կստանանք $f(U) = V \subset V$:

բ) Դիցուք (X, τ)-ն և (Y, σ)-ն կամայական տոպոլոգիական տարածություններ են, $y_0 \in Y$ սևեռված կետ է: Ընդունված է $c : X \to Y$, $c(x) = y_0$, $\forall x \in X$ արտապատկերումն անվանել X-ի **հաստատուն արտապատկերում** Y-ի y_0 կետի վրա: Այն անընդհատ արտապատկերում է: Իրոք, քանի որ $c^{-1}(y_0) = X$, ուստի y_0-ի $\forall\, V$ շրջակայքի համար որպես $\forall\, x_0 \in X$ կետի U շրջակայք վերցնելով X-ը, կունենանք $f(U) \subset V$:

Թեորեմ 2: Ունենք (X, ρ) և (Y, ρ') մետր մետրիկական ~~տոպոլոգիական~~ տարածություններ: Ապա $f : X \to Y$ արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $x_0 \in X$ կետի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ թիվ, որ եթե $\rho(x, x_0) < \delta$, ապա $\rho'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$:

Ապացուցումը անմիջականորեն հետևում է անընդհատության սահմանումից և թեորեմ 1-ի հետևանքից:

Թեորեմ 3: Ունենք X և Y տոպոլոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության նախակերպարը բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցում: ա) Սկզբից ապացուցենք պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիտարկենք որևէ $x_0 \in f^{-1}(V)$ կետ: Քանի որ $f(x_0) \in V$, ուստի x_0 կետում f-ի անընդհատությունից հետևում է, որ գոյություն ունի x_0-ի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$:

Ունենք՝ $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$, որից հետևում է, որ $f^{-1}(V)$-ի ցանկացած x_0 կետ ներքին կետ է նրա համար, ուստի $f^{-1}(V)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

բ) Այժմ ապացուցենք պայմանի բավարարությունը: Դրա համար ցույց տանք, որ f-ը անընդհատ է ցանկացած $x_0 \in X$ կետում: Դիցուք V-ն $y_0 = f(x_0)$ կետի որևէ շրջակայք է: Գոյություն ունի y_0-ի W բաց շրջակայք, որ $W \subset V$: Ըստ պայմանի $f^{-1}(W)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում: Ուրեմն $U = f^{-1}(W)$-ն (բաց) շրջակայք է x_0-ի համար: Ունենք՝ $f(U) = f(f^{-1}(W)) \subset W \subset V$, ուստի f-ը անընդհատ է x_0 կետում:

Նշենք, որ թեորեմն ապացուցելիս մենք օգտվեցինք հետևյալ ներդրումներից (տես թեորեմ 3-ը թեմա 1-ում). եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում, $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմությունների համար, ապա

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)):$$

Հետևանք 1: Եթե հայտնի է Y տարածության տոպոլոգիայի որևէ բազա, ապա $f:X\to Y$ արտապատկերման անընդհատության համար բավական է ստուգել, որ X-ում բաց լինեն այդ բազայի բոլոր տարրերի նախապատկերները (հիմնավորել):

Հետևանք 2: Եթե $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումները անընդհատ են, ապա նրանց $g \circ f$ համադրույթը նույնպես անընդհատ է (հիմնավորել):

Թեորեմ 4 (անընդհատության հայտանիշ փակ ենթաբազմությունների տերմիններով)**:** Ունենք X և Y տոպ. տոպոլոգիական տարածություններ: Ապա որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ում փակ ցանկացած ենթաբազմության նախակերպարը փակ ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցելիս կօգտվենք $f^{-1}(Y \setminus Z) = X \setminus f^{-1}(Z)$ նույնությունից, որտեղ $Z \subset Y$:

ա) Ենթադրելով, որ f-ը անընդհատ է, կունենանք. եթե F-ը փակ է Y-ում, ապա $(Y \setminus F)$-ը բաց է Y-ում, և հետևաբար $f^{-1}(Y \setminus F)$-ը բաց է ըստ թեորեմ 3-ի X-ում: Ուստի $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ ենթաբազմությունը փակ է X-ում:

բ) Հակառակը. եթե V-ն բաց է Y-ում $\Rightarrow$ $(Y \setminus V)$-ն փակ է Y-ում $\Rightarrow$ $f^{-1}(Y \setminus V)$-ն փակ է X-ում $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ ենթաբազմությունը բաց է X-ում: Ուստի f-ը անընդհատ է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Այժմ բերենք արտապատկերումների անընդհատության մի քանի հայտանիշ ենթաբազմությունների փակման գործողության տերմիններով:

Ենթագիտակցաբար, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը մենք պատկերացնում ենք որպես այնպիսի արտապատկերում, որը X-ի ցանկացած երկու «բավականաչափ մոտիկ» (X-ի տոպոլոգիայի իմաստով) x_1 և x_2 կետերի համապատասխանեցնում է Y-ի «բավականաչափ մոտիկ» $f(x_1)$ և $f(x_2)$ կետեր (Y-ի տոպոլոգիայի իմաստով):

Մյուս կողմից, ենթաբազմության հպման կետը մենք պատկերացնում ենք որպես այդ ենթաբազմությանը «շատ մոտիկ», կամ նույնն է՝ կպած կետ այն իմաստով, որ կարելի հնարավոր չէ անջատել ենթաբազմությունից մի որևէ բաց շրջակայքով: Ուստի՝ բնական է սպասել հետևյալ պնդումը. եթե $x\in X$ կետը հպման կետ է $A\subset X$ ենթաբազմության համար, ապա $f(x)$ կետը հպման կետ է $f(A)\subset Y$ ենթաբազմության համար:

Թեորեմ 5 (անընդհատության հայտանիշ փակման գործողության տերմիններով)**:** $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք f-ը անընդհատ է: Վերցնենք կամայական $y \in f(\bar{A})$ կետ և ցույց տանք, որ $y \in \overline{f(A)}$: Իրոք, գոյություն ունի $x \in \bar{A}$ կետ, որ $f(x) = y$: Դիտարկենք y կետի կամայական V շրջակայք: Ըստ x կետում f-ի անընդհատության, գոյություն ունի x-ի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Քանի որ $U \cap A \neq \varnothing$, ուստի $f(U) \cap f(A) \neq \varnothing \Rightarrow V \cap f(A) \neq \varnothing \Rightarrow y_0 \in \overline{f(A)}$: Այսպիսով՝ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Պայմանի բավարարությունը: Դիտարկենք կամայական $B \subset Y$ փակ ենթաբազմություն՝ $B = \overline{B}$ և ապացուցենք, որ $A = f^{-1}(B)$ ենթաբազմությունը փակ է X-ում (դրանից կհետևի, որ f-ը անընդհատ է ըստ թեորեմ 4-ի):

Դրա համար ցույց տանք, որ A-ն պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը: Եթե $x \in \overline{A}$, ապա ըստ պայմանի $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$: ուստի $x \in f^{-1}(B) = A$, որից էլ ստացվում

Եվ $\overline{A} = A$: որտեղից A-ն փակ է X-ում: ■

Գոյություն ունի նաև արտապատկերման անընդհատության հայտանիշ ենթաբազմության ներքին տերմիններով:

Թեորեմ 6: $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ կամայական $B \subset Y$ ենթաբազմության համար $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(f^{-1}(B))$:

Ապացույց: ա) Ենթադրենք f-ը անընդհատ է: Վերցնենք կամայական $x \in f^{-1}(\operatorname{int} B)$ կետ և ցույց տանք, որ $x \in \operatorname{int}(f^{-1}(B))$: Ունենք՝ $f(x) \in \operatorname{int} B \subset B$, որտեղից $x \in f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset f^{-1}(B)$: Քանի որ, ըստ թեորեմ 3-ի, $f^{-1}(\operatorname{int} B)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում, ուստի x կետը ներքին կետ է $f^{-1}(B)$-ի համար $\Rightarrow x \in \operatorname{int}(f^{-1}(B))$:

բ) Հակառակ պնդումը ապացուցելու համար վերցնենք $\forall V \subset Y$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում: Շարունակությունը թողնում ենք ընթերցողին: ■

Սահմանում: Արտապատկերումը կոչվում է **խզվող**, եթե այն անընդհատ չէ: Բերենք խզվող արտապատկերումների օրինակներ՝ հիմնավորումները կատարելով թեորեմ 5-ում բերված հայտանիշի միջոցով:

Օրինակ 1: Դիտարկենք ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունը և $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը, որտեղ $f(x)$-ը $x \in \mathbb{R}$ թվի ամբողջ մասն է: Ըստ սահմանման, եթե $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, ապա $f(x) = n$: Մասնավորապես $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$: Վերցնելով $A = [n-1, n)$՝ կունենանք $f(A) = \{n-1\}$ և $\overline{A} = [n-1; n]$: Բացի այդ $n \in \overline{A} \Rightarrow f(n) \in f(\overline{A})$: Ենթադրելով, որ f-ը անընդհատ է $n \in Z$ կետում, կստանանք՝ $f(n) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{n-1\}} = \{n-1\}$: Ստացանք $f(n) = n - 1$ (հակասություն): Հետևաբար f-ը խզվող է, անընդհատ չէ $\mathbb{R}$-ի $n \in \mathbb{Z}$ կետերում:

Օրինակ 2: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում բերվում է թվային ֆունկցիայի օրինակ (Դիրիխլեի ֆունկցիան), որն անընդհատ չէ $\mathbb{R}$-ի բոլոր կետերում: Այն սահմանվում է որպես $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ արտապատկերում, որտեղ $f(x) = 0$, երբ x-ը ռացիոնալ է $x \in \mathbb{Q}$ և $f(x) = 1$, երբ x-ը իռացիոնալ է.

I_r

$x \in I_r$ Նկատենք, որ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I_r$, $\mathbb{Q} \cap I_r = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{I_r} = \mathbb{R}$: Այդ արտապատկերումը ընդհանրացվում է հետևյալ տեսքով:

Դիցուք X-ը տոպոլոգիական տարածություն է, ընդ որում գոյություն ունեն X-ի այնպիսի A և B ենթաբազմություններ, որ $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A} = \overline{B} = X$: Ապա $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը, որտեղ $f(x) = 0$, երբ $x \in A$ և $f(x) = 1$, երբ $x \in B$, անընդհատ չէ X-ի բոլոր կետերում: Ապացուցելու համար վերցնենք որևէ $x_0 \in A$ կետ: Ունենք $f(x_0) = 0$: Մյուս կողմից, քանի որ $X = \overline{B}$, ստանում ենք՝

$x_0 \in \overline{B}$, որից հետևում է $f(x_0) \in f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} = \overline{\{1\}} = \{1\}$: Հետևաբար $f(x_0) = 1$ (հակասություն): Նման ձևով ապացուցվում է, որ f-ը անընդհատ չէ նաև B-ի բոլոր կետերում:

Հարցեր և խնդիրներ թեմա 9-ի վերաբերյալ:

9.5 Դիցուք $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության վրա $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ արտապատկերման կամայական $x_1, x_2\in\mathbb{R}^2$ կետերի զույգերի համար բավարարված է $\rho(f(x_1), f(x_2)) = r\cdot\rho(x_1, x_2)$ առնչությունը, որտեղ r-ը անփոփոխ դրական թիվ է: Ապացուցել, որ f-ը անընդհատ արտապատկերում է:

9.6 Դիտենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը ... $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ անընդհատ արտապատկերում: Հայտնի է, որ $g(x)$-ը ռացիոնալ թիվ է կամայական $x\in\mathbb{R}$ կետի համար: Ապացուցել, որ g-ն հաստատուն արտապատկերում է:

9.7 Ապացուցել, որ կամայական $f:[a,b]\to[a,b]$ անընդհատ արտապատկերում ունի անշարժ կետ (այսինքն $f(x)=x$ գոնե մի $x\in[a,b]$ կետի դեպքում):

Ցուցում: Դիտարկել $g(x)=f(x)-x$ արտապատկերումը:

9.8 Ճշմարիտ է արդյոք, որ կամայական անընդհատ ա) $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ տեսքի, բ) $(a,b)\to[a,b]$ տեսքի արտապատկերում ունի անշարժ կետ: Պատասխանները հիմնավորել համապատասխան օրինակներով:

9.9 Դիցուք դիտենք երկու անընդհատ $f,g:X\to Y$ արտապատկերումներ, որտեղ Y-ը հաուսդորֆյան տարածություն է: Դիտարկենք $F\subset X$ ենթաբազմությունը կազմված այն բոլոր x կետերից, որ $f(x)=g(x)$: Ապացուցել, որ F-ը փակ ենթաբազմություն է X-ում:

9.10 Դիցուք $f,g:X\to Y$ արտապատկերումներ, Y տարածություն և $F\subset X$ ենթաբազմություն ...: Ապացուցել, եթե F-ը խիտ ամենուրեք է X-ում, ապա f և g արտապատկերումները համընկնում են X-ի բոլոր կետերում:

Ցուցում: Ցույց տալ, որ F-ը պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը:

9.11 Դիտենք $f:X\to\mathbb{R}$ անընդհատ արտապատկերում, որտեղ X-ը կամայական տոպոլոգիական տարածություն է և $a\in\mathbb{R}$ անփոփոխ թիվ: Ապացուցել, որ $g:X\to\mathbb{R}$ արտապատկերումը սահմանված $g(x)=af(x)$, $x\in X$ բանաձևով նույնպես անընդհատ է:

Ցուցում: Ներկայացնել g-ն որպես f և $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(r)=ar$, $r\in\mathbb{R}$ արտապատկերումների համադրույթ:

Ցուցում: Որպես Y վերցնել X բազմությունը դիսկրետ տոպոլոգիայով:

9.1. Դիցուք X տոպոլոգիական տարածությունը օժտված է հետևյալ հատկությամբ. ցանկացած Y տոպոլոգիական տարածության և ցանկացած $f: X \to Y$ արտապատկերման դեպքում f-ը անընդհատ է: Ապացուցել, որ X-ի տոպոլոգիան դիսկրետ է:

9.2 Դիցուք Y տոպոլոգիական տարածությունը օժտված է հետևյալ հատկությամբ. ցանկացած X տոպոլոգիական տարածության և ցանկացած $f: X \to Y$ արտապատկերման դեպքում f-ը անընդհատ է: Ապացուցել, որ Y-ի տոպոլոգիան անտիդիսկրետ է:

Ցուցում: Որպես X վերցնել Y բազմությունը անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով:

9.3 Դիցուք $f: X \to Y$ արտապատկերումը այնպիսին է, որ X-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության կերպարը բաց ենթաբազմություն է Y-ում: Ապացուցել, որ այդպիսի արտապատկերումը կարող է անընդհատ չլինել:

Ցուցում: Դիտարկել որևէ X բազմության τ և σ տոպոլոգիաներ, որոնք $\tau < \sigma$, և $X \to X$ նույնական արտապատկերումը:

9.4 Բերել X, Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f: X \to Y$ բիեկտիվ անընդհատ արտապատկերման օրինակ, որ f^{-1} հակադարձ արտապատկերումը չլինի անընդհատ:

Ցուցում: Օգտվել նախորդ խնդրի ցուցումից: