Թեմա 7

Մետրիկ բազմության վրա և մետրիկ տարածություն հասկացությունները, օրինակներ: Մետրիկ տարածության տոպոլոգիան, մետրիկային տարածություններ, օրինակներ: Ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը և փակույթը մետրիկային տարածություններում:

Մետրիկ տարածությունները սահմանվել են ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Մ. Ֆրեշեի կողմից 1906 թվին: Նպատակն է՝ կամայական բազմություններում ներմուծելով կետերի միջև հեռավորության, հետևաբար և՝ կետերի մոտիկության հասկացություն, զարգացնել անալիզին և երկրաչափությանը բնորոշ ամենաընդհանուր հատկություններով տեսություն:

Այնուհետև, մետրիկ տարածության հիմքով, արդեն տոպոլոգիայում ներմուծվեցին մետրիկային տարածությունները որպես տոպոլոգիական տարածություններ: Այժմ հաջորդաբար քննարկենք այդ երկու հասկացությունները:

Մետրիկ տարածության հիմքում ընկած է բազմության վրա մետրիկ հասկացությունը: Դիցուք X-ը որևէ բազմություն է, $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է:

V **Սահմանում:** Որևէ $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ ~~որևէ~~ արտապատկերում կոչվում է **մետրիկ X բազմության վրա**, եթե կամայական $x, y, z \in X$ փարրերի դեպքում բավարարվում են հետևյալ երեք պայմանները.

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (նույնականացման աքսիոմ),
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (համաչափության աքսիոմ),
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (եռանկյան աքսիոմ):

Հետևանք աքսիոմներից: Վերցնելով 3-ում $z = x$ ստանում ենք՝ $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ փարրերի դեպքում: Այժմ տեսնում ենք, որ բազմության վրա մետրիկը տարրական երկրաչափությունից հայտնի կետերի միջև հեռավորության ընդհանրացումն է կամայական բազմությունների դեպքում:

Սահմանում: (X, ρ) զույգը (այսինքն X բազմությունը՝ իր վրա տրված ρ մետրիկի հետ միասին) կոչվում է **մետրիկ տարածություն**, իսկ $\rho(x, y)$ թիվը՝ x և y **կետերի միջև հեռավորություն** տվյալ մետրիկ տարածությունում:

բերել էջ 71-ից →

Օրինակ 1: Յանկացած X բազմություն կարելի է վերածել մետրիկ տարածության առնվազն մի եղանակով՝ $\rho(x, y) = 1$, երբ $x \neq y$ և $\rho(x, y) = 0$, երբ $x = y$: Այս մետրիկ տարածությունը կոչվում է **դիսկրետ մետրիկ տարածություն** (անվանումը կպարզաբանվի մի փոքր ուշ):

Օրինակ 2: $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա սահմանենք մետրիկ՝ $\rho(x,y) = |x-y|$ բանաձևով: Այն կոչվում է թվային ուղղի **սովորական** կամ **էվկլիդյան մետրիկ**, իսկ $(\mathbb{R}, \rho)$ զույգը կոչվում է էվկլիդյան թվային ուղիղ:

1-3 աքսիոմների ստուգումը օրինակներ 1, 2-ում թողնվում է ընթերցողին՝ որպես հեշտ, բայց օգտակար խնդիր: Հաջորդ կարևոր օրինակը ընդհանրացնում է օրինակ 2-ի էվկլիդյան մետրիկը:

Օրինակ 3: Դիտարկենք n չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային տարածությունը և սահմանենք $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ տարրերի միջև հեռավորություն $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$ բանաձևով: Մետրիկի 1-2 աքսիոմները ակնհայտորեն բավարարվում են, իսկ 3-րդ աքսիոմը (սովորաբար դժվարություն է այս աքսիոմի ստուգումը) հետևում է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունից՝

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

որն արդարացի է թվերի կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ և $b_1, b_2, \ldots, b_n$ հաջորդականությունների դեպքում:

Իրոք, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ տարրերի համար 3-րդ աքսիոմն ընդունում է

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2}$$

տեսքը: Նշանակելով $x_k - y_k = a_k$, $y_k - z_k = b_k$ ստանում ենք՝ $x_k - z_k = a_k + b_k$, և 3-րդ աքսիոմն ընդունում է նոր՝ $\sqrt{\sum\limits_k (a_k+b_k)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} + \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ տեսք: Այն համարժեք է $\sum\limits_k a_k \cdot b_k \leq \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ անհավասարությանը: Այսպիսով մնում է ապացուցել Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը:

Նկատենք, որ կամայական $t \in \mathbb{R}$ թվի դեպքում ունենք $\sum\limits_k (a_k - t \cdot b_k)^2 \geq 0$ հավասարի անհավասարություն, որը կարելի է գրել $\left(\sum\limits_k b_k^2\right) t^2 - 2\left(\sum\limits_k a_k b_k\right) t + \left(\sum\limits_k a_k^2\right) \geq 0$ տեսքով: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $\left(\sum\limits_k a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum\limits_k a_k^2\right) \cdot \left(\sum\limits_k b_k^2\right)$ անհավասարությունը, որից էլ ստանում ենք $\sum\limits_k a_k b_k \leq \sqrt{\sum\limits_k a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$: ■

Օրինակ 4: Եթե ρ-ն մետրիկ է X բազմության վրա, ապա ցանկացած $c > 0$ թվի դեպքում $c\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը (սահմանվում է $(c\rho)(x,y) = c \cdot \rho(x,y)$ բանաձևով) ակնհայտորեն նույնպես մետրիկ է X-ի վրա: Մետրիկ է նաև $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $\bar{\rho}(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{\ }$ բանաձևով: Ստուգենք 3-րդ աքսիոմը $\bar{\rho}$-ի համար: Նախ նկատենք, որ

$$\bar{\rho}(x,z)=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}\leq\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

(ստուգվում է անմիջականորեն՝ ազատվելով հայտարարներից): Այնուհետև

$$\bar{\rho}(x,z)\leq\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}\leq\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=$$
$$=\bar{\rho}(x,y)+\bar{\rho}(y,z)$$

■

Նշենք, որ ստացված $(X,\bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունում $\bar{\rho}(x,y)<1,\ \forall x,y\in X$ կետերի դեպքում:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան կոորդինատային տարածության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Այն վերածվում է մետրիկ տարածության՝ սահմանելով նրա վրա այսպես կոչված **անկյունային մետրիկ:**

Պարզության նկատառումով բոլոր անհրաժեշտ դատողությունները կկատարենք $n=2$ մասնավոր դեպքում:

Նախ $\mathbb{R}^3$-ի O կետով անցնող յուրաքանչյուր l ուղղի վրա ընտրենք մի որոշակի L կետ այնպես, որ $\overrightarrow{OL}$ վեկտորն ունենա միավոր երկարություն՝ $|\overrightarrow{OL}|=1$:

Այժմ սահմանենք կամայական երկու l_1 և l_2 ուղիղների միջև հեռավորություն $d(l_1,l_2)=\arccos|(\overrightarrow{OL_1},\overrightarrow{OL_2})|$ բանաձևով (այստեղ $(\overrightarrow{OL_1},\overrightarrow{OL_2})$-ը $\overrightarrow{OL_1}$ և $\overrightarrow{OL_2}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է, իսկ $d(l_1,l_2)$-ը անկյուն է $[0^\circ,90^\circ]$ միջակայքից):

Պարզ է, որ $d(l_1,l_2)$-ը բավարարում է մետրիկի 1-2 աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ այն բավարարում է նաև երրորդ աքսիոմին՝

$$d(l_1,l_2)+d(l_2,l_3)\geq d(l_1,l_3)\qquad(*)$$

ցանկացած երեք l_1,l_2,l_3 ուղիղների դեպքում: Նկատենք, որ եթե այդ ուղիղներից որևէ երկուսը նույնն են, ապա $(*)$-ը բավարարվում է:

Այժմ դիտարկենք որևէ երեք ոչ համահարթ $l_1,\ l_2,\ l_3$ ուղիղներ: Այս դեպքում OL_1,OL_2,OL_3 ճառագայթները կազմում են O գագաթով եռանիստ անկյուն: Հետագա հիմնավորումներում օգտվելու ենք տարրական տարածաչափությունից հայտնի հետևյալ թեորեմից. կամայական $(O;OL_1,OL_2,OL_3)$ եռանիստ անկյան երեք $\alpha=\angle L_1OL_2,\ \beta=\angle L_2OL_3,\ \gamma=\angle L_1OL_3$ հարթ անկյուններից ցանկացած երկուսի գումարը մեծ է երրորդից (նշենք, որ դրանց մեծությունները գտնվում են $(0^\circ,180^\circ)$ միջակայքում):

Կախված l_i ուղիղների վրա $L_i,\ i=1,2,3$ կետերի դիրքերից՝ հնարավոր են հետևյալ չորս դեպքերը.

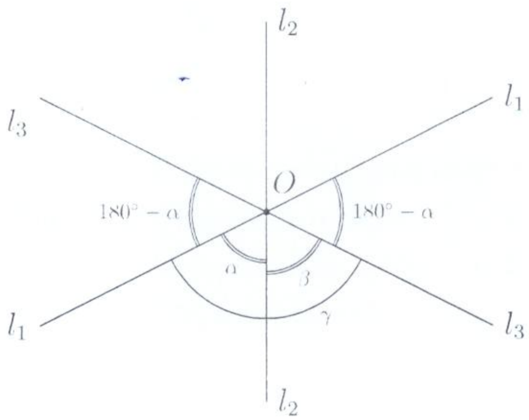
1. եթե α,β,γ անկյունները սուր են, ապա $d(l_1,l_2)=\alpha,\ d(l_2,l_3)=\beta,\ d(l_1,l_3)=\gamma,$

2. եթե α, β, γ անկյունները բութ են, ապա $d(l_1, l_2) = 180° - \alpha$, $d(l_2, l_3) = 180° - \beta$, $d(l_1, l_3) = 180° - \gamma$,

3. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն բութ են, իսկ երրորդը՝ γ-ն սուր է, ապա $d(l_1, l_2) = 180° - \alpha$, $d(l_2, l_3) = 180° - \beta$, $d(l_1, l_3) = \gamma$,

4. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն սուր են, իսկ երրորդը՝ γ-ն բութ է, ապա $d(l_1, l_2) = \alpha$, $d(l_2, l_3) = \beta$, $d(l_1, l_3) = 180° - \gamma$:

Հասարակ գծագրի միջոցով կարելի է տեսնել, որ 1-3 դեպքերից յուրաքանչյուրում $d(l_1, l_2)$, $d(l_2, l_3)$, $d(l_1, l_3)$ անկյունները O գագաթով որոշակի եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ են, ուստի $(*)$-ը տեղի ունի ըստ վերը բերված թեորեմի: Իսկ 4-րդ դեպքում այդ երեք անկյունները չեն հանդիսանում որևէ եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ: Ուստի այս դեպքում $(*)$-ը կապացուցենք իր բոլոր ա), բ), գ) տարբերակներով՝ օգտվելով ստորև բերվող սխեմատիկ գծագրից, որտեղ մի աղեղով նշված է γ բութ անկյունը, իսկ երկուական աղեղներով՝ սուր անկյունները:



Քանի որ

ա) $\alpha + \beta > \gamma > 180° - \gamma$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_2, l_3) > d(l_1, l_3)$,

բ) $\beta + (180° - \gamma) > 180° - \alpha > \alpha$, ուստի $d(l_2, l_3) + d(l_1, l_3) > d(l_1, l_2)$,

գ) $\alpha + (180° - \gamma) > 180° - \beta > \beta$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_1, l_3) > d(l_2, l_3)$:

Մյուս դեպքում, երբ l_1, l_2, l_3 ուղիղները համահարթ են, $(*)$-ը բավարարվում է ակնհայտորեն: ■

Օրինակ 5-ի մետրիկ տարածությունը ընդհանուր դեպքում կոչվում է n-**չափականության իրական պրոյեկտիվ տարածություն** և նշանակվում է $\mathbb{RP}^n$, կամ պարզապես $\mathbb{P}^n$: Մասնավոր, $n = 2$ դեպքում $\mathbb{RP}^2$ տարածությունը, կոչվում է նաև **իրական պրոյեկտիվ հարթություն**: Այդ տարածությունները կարևոր դեր են կատարում դասական երկրաչափությունում և տոպոլոգիայում:

Սահմանում: Երկու (X_1, ρ_1) և (X_2, ρ_2) մետրիկ տարածություններ կոչվում են **իզոմետրիկ տարածություններ**, եթե գոյություն ունի $\varphi : X_1 \to X_2$ բիյեկտիվ արտապատկերում, որ $\rho_1(x, y) = \rho_2(\varphi(x), \varphi(y))$, $\forall x, y \in X$ կետերի դեպքում:

Հեշտ է տեսնել, որ $X = \mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա օրինակներ 1-ում և 2-ում սահմանված մետրիկներից ստացվող մետրիկ տարածությունները իզոմետրիկ տարածություններ չեն (ինչո՞ւ): V

Իզոմետրիկ չեն նաև (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունները, եթե թեկուզ մի զույգ $x, y \in X$ կետերի դեպքում $\rho(x, y) \geq 1$:

Իսկ օրինակ 1-ում վերցնելով մի դեպքում $X = \mathbb{Q}$, իսկ մյուս դեպքում՝ $X = \mathbb{Z}$, ստանում ենք իզոմետրիկ տարածություններ (հիմնավորե՛ք): V

Սահմանում: Դիցուք (X, ρ)-ն որևէ մետրիկ տարածություն է, $a \in X$, $r > 0$: Հետևյալ ենթաբազմությունները՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\},$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\},$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\},$$

կոչվում են (X, ρ) մետրիկ տարածության համապատասխանաբար a կենտրոնով և r շառավղով **անեզր գունդ, եզրով գունդ** և **սֆերա**:

Այս անվանումները մեկնաբանելու համար նշենք, որ $\mathcal{B}(a, r)$ և $\mathcal{D}(a, r)$ գնդերի համար եզր է համարվում $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերան: Այսպիսով $\mathcal{B}(a, r)$ գունդը պարունակում է իր եզրը, իսկ $\mathcal{D}(a, r)$ գունդը՝ ոչ:

Օրինակ 6: Դիսկրետ (X, ρ) մետրիկ տարածությունում ունենք.
եթե $r < 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = \{a\}$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
եթե $r > 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = X$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
իսկ $r = 1$ դեպքում՝ $\mathcal{D}(a, 1) = \{a\}$, $\mathcal{B}(a, 1) = X$, $\mathcal{S}(a, 1) = X \setminus \{a\}$:

Օրինակ 7: Պարզաբանենք՝ ինչ են $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան մետրիկ տարածության անեզր և եզրով գնդերն ու սֆերաները $n = 1, 2, 3$ դեպքերում:

$n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r),$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r],$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}:$$

Դրանք էվկլիդյան $\mathbb{R}$ թվային ուղղի բաց ինտերվալները, փակ հատվածներն ու կետազույգերն են:

$n = 2$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\},$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\},$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}:$$

Դրանք $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության բաց և փակ շրջաններն են ու շրջանագծերը:

$n = 3$ դեպքում՝ դրանք $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան փարածության անեզր և եզրով գնդերն են ու գնդային մակերևույթները (այդ փերմինների սովորական իմասփով):

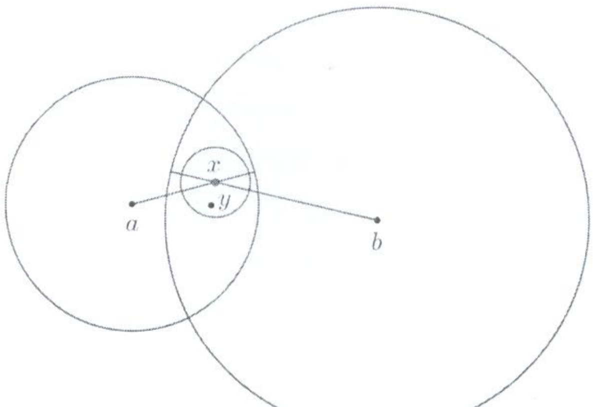
Թեորեմ 1: (X, ρ) մեփրիկ փարածության բոլոր $\mathcal{D}(x, r)$ անեզր գնդերի բազմությունը հանդիսանում է բազա X-ի ինչ-որ փոպոլոգիայի համար: Այդ փոպոլոգիան կոչվում է X-ի **մեփրիկային փոպոլոգիա**, իսկ $B = \{\mathcal{D}(x, r)\}$ ընփանիքը՝ նրա կանոնական բազա:

Երբեմն մետրիկական տոպոլոգիան կարճ նշանակենք $\tau[\rho]$:

Ապացուցման հիմքում ընկած է թեմա 5-ի թեորեմ 2-ը, ըսփ որի՝ պեփք է սփուգենք երկու պայման:

1. $\bigcup \mathcal{D}(x, r) = X$ (հեփևում է նրանից, որ միշփ $x \in \mathcal{D}(x, r)$):

2. Ամեն մի ոչ դափարկ $\mathcal{D}(a, r_1) \cap \mathcal{D}(b, r_2)$ հափում ներկայացվում է որպես անեզր գնդերի միավորում: Բավական է ցույց փալ, որ ցանկացած $x \in \mathcal{D}(a, r_1) \cap \mathcal{D}(b, r_2)$ կեփի համար գոյություն ունի $\mathcal{D}(x, r)$ գունդ, որ $\mathcal{D}(x, r) \subset \mathcal{D}(a, r_1) \cap \mathcal{D}(b, r_2)$: Այդ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշելու համար դիփարկենք մասնավոր դեպք. որպես (X, ρ) մեփրիկ փարածություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ հարթությունը սովորական էվկլիդյան մեփրիկով (փե՛ս գծագիրը):



Ունենք՝ $\rho(a, x) < r_1$, $\rho(b, x) < r_2$: Գծագրից երևում է. եթե r-ը այնպիսին է, որ

$$\begin{cases} \mathcal{D}(x, r) \subset D(a, r_1) \\ \mathcal{D}(x, r) \subset D(b, r_2) \end{cases}, \text{ ապա } \begin{cases} \rho(a, x) + r \leq r_1 \\ \rho(b, x) + r \leq r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \leq r_1 - \rho(a, x) \\ r \leq r_2 - \rho(b, x) \end{cases}$$

Ուստի, ընդհանուր դեպքում որպես $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի որոնելի շառավիղ վերցնենք $r = \min(r_1 - \rho(a,x), r_2 - \rho(b,x))$ թիվը: Այժմ դիտարկենք $\forall\, y \in \mathcal{D}(x,r)$ կետ և ցույց տանք, որ $y \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: Դրանից կհետևի, որ $x \in \mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$:

Կարող ենք գնահատել՝

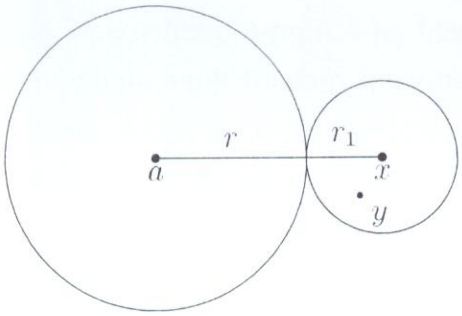
$$\rho(a,y) \le \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + r \le \rho(a,x) + r_1 - \rho(a,x) = r_1,$$

ուստի $y \in \mathcal{D}(a,r_1)$: Նման ձևով ստանում ենք $y \in \mathcal{D}(b,r_2)$, ուստի $y \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: ■

Դիտողություն: Ապացույցի ընթացքում $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշվեց փեստղաբար՝ $\mathbb{R}^2$ հարթության մասնավոր օրինակի միջոցով: Անդրադառնալով ապացույցի մանրամասներին՝ նշենք, որ ամենասկզբում օգտվեցինք հետևյալ գծագրային հուշումից. եթե $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1)$, ապա $\rho(a,x) + r \le r_1$: Այլ, ավելի ընդհանուր ձևակերպումով դա հնչում է այսպես. եթե կամայական մետրիկ տարածությունում մի գունդ ընկած է մեկ այլ գնդի մեջ, ապա առաջին գնդի շառավիղը փոքր կամ հավասար է երկրորդ գնդի շառավղից: Բոլոր փորձերը այս պնդումը դարձնել թեորեմ (դուրս բերել մետրիկի 1-3 աքսիոմներից) դատապարտված են անհաջողության, քանի որ իրողությունն այլ է. գոյություն ունեն մետրիկ տարածություններ, որոնցում փոքր շառավղով գունդն իր մեջ ներառում է ավելի մեծ շառավղով գունդ՝ չհամընկնելով նրա հետ (ընթերցողը կարող է ծանոթանալ այդպիսի օրինակի հետ Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, "Контрпримеры в анализе", 1967 գրքում): Արժեզրկվո՞ւմ է արդյոք սրանով թեորեմ 1-ի վերը բերված ապացույցը: Սկզբունքորեն՝ ոչ, քանի որ ձևականորեն բերված ապացույցն անթերի է: Բայց հոգեբանորեն ինչ-որ տեղ՝ գուցե: Թերևս սա է պատճառը, որ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, "Элементы теории функции и функционального анализа" դասագրքի երկրորդ գլխում հեղինակները գերադասել են մետրիկ տարածություններում մետրիկային տոպոլոգիա սահմանել համարժեք, բայց այլ եղանակով՝ դրանով իսկ խուսափելով $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի շառավղի մեծության վերոհիշյալ ընտրությունից: Այդ եղանակը հիմնված է Կուրատովսկու փակման գործողության վրա: Կարծում ենք՝ ընթերցողին հետաքրքիր և օգտակար կլինի ծանոթանալ նաև այդ եղանակի հետ:

Որպես հետևանք թեորեմ 1-ից ստանում ենք, որ անեզր գնդերը բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **բաց գնդեր**): Ցույց տանք նաև, որ $\mathcal{B}(a,r)$ եզրով գնդերը փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **փակ գնդեր**):

Դիցուք (X,ρ)-ն մետրիկ տարածություն է, A-ն X-ի որևէ ոչ դատարկ ենթաբազմություն է: Սահմանենք $\rho' : A \times A \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը $\rho'(a_1,a_2) = \rho(a_1,a_2)$, $a_1,a_2 \in A$ բանաձևով: Ակնհայտ է, որ ρ'-ը մետրիկ է A բազմության վրա: Այն կոչվում է ρ մետրիկի սահմանափակում A-ի վրա և նշանակվում է $\rho|_A$, իսկ $(A,\rho|_A)$ զույգը կոչվում է (X,ρ) մետրիկ տարածության մետրիկ ենթատարածություն:

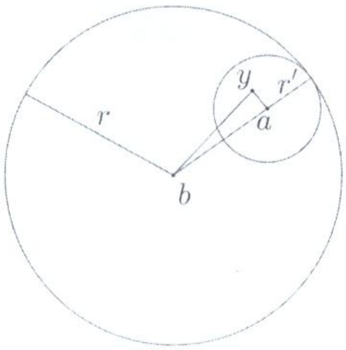


Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $X \setminus \mathcal{B}(a,r)$ լրացումը շրջակայք է իր կամայական x կետի համար, և հետևաբար բաց բազմություն է: Սա հետևում է նրանից, որ $\mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r)$, որտեղ $r_1 = \rho(a,x) - r$: Իրոք, $\forall y \in \mathcal{D}(x,r_1)$ կետի համար ունենք՝

$$\rho(a,y) \geq \rho(a,x) - \rho(y,x) > \rho(a,x) - r_1 = r, \text{ ուստի } \mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r):$$

Նման ձևով ապացուցվում է, որ $\mathcal{S}(a,r)$ սֆերաները փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 2: (X,ρ) մետրիկային տարածության $A \subset X$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է փվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում այն և միայն այն դեպքում, երբ իր կամայական a կետի հետ միասին պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:



Ապացուցում: Ինչպես արդեն գիտենք, եթե A-ն (X,ρ)-ի որևէ բաց բազմություն է, ապա այն բաց գնդերի միավորում է (ըստ թեորեմ 1-ի): Մնում է ցույց տալ, որ եթե $a \in A$ կետը պատկանում է որևէ $\mathcal{D}(b,r)$ բաց գնդի, ապա $\mathcal{D}(b,r)$-ն իր մեջ պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:

Վերցնենք $r' = r - \rho(a,b)$ և ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Եթե $y \in \mathcal{D}(a,r')$, ապա $\rho(y,b) \leq \rho(y,a) + \rho(a,b) < r' + \rho(a,b) = r$ գնահատումից հետևում է, որ $y \in \mathcal{D}(b,r)$, ուստի $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Թեորեմի հակառակ պնդումն ակնհայտ է: ■

Օրինակ 8: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 2-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի էվկլիդյան մետրիկից ստացվող մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 9: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 3-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի համար կանոնական բազա են կազմում բոլոր անեզր (բաց) շրջանները, իսկ $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության համար` բոլոր սովորական անեզր (բաց) գնդերը (կամայական կենտրոններով և շառավիղներով):

Մետրիկային տարածություններն օժտված են կարևոր հատկությամբ` բավարարում են անջատելիության T_2 աքսիոմին: Իրոք, եթե $x_1, x_2 \in X$ և $x_1 \neq x_2$, ապա $\rho(x_1, x_2) \neq 0$, ուստի $D(x_1, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ և $D(x_2, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ բաց գնդերը x_1 և x_2 կետերի չհատվող շրջակայքեր են: Դա ցույց տալու համար ենթադրենք հակառակը` գոյություն ունի նրանց պատկանող որևէ $y$ կետ: Ըստ եռանկյան աքսիոմի` $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y) + \rho(x_2, y) < \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$, հակասություն:

Սահմանում: Միևնույն X բազմության վրա տրված երկու մետրիկ կոչվում են **համարժեք**, եթե նրանցով ծնված մետրիկային տոպոլոգիաները նույնն են:

Օրինակ 10: Ցույց տանք, որ նույն X-ի վրա ρ և $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ մետրիկները համարժեք են (չնայած, որ ընդհանուր դեպքում (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունները իզոմետրիկ չեն): Իրոք, (X, ρ) տարածության ամեն մի $\mathcal{D}(a, r) \subset X$ բաց գունդ կարող է դիտարկվել որպես $(X, \bar{\rho})$ տարածության $\overline{\mathcal{D}}(a, R) \subset X$ բաց գունդ, որտեղ $R = \dfrac{r}{1+r}$, և հակառակը` $(X, \bar{\rho})$ տարածության ամեն մի $\overline{\mathcal{D}}(a, R)$ գունդ, եթե $R < 1$, կարող է դիտարկվել որպես (X, ρ) տարածության $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ, որտեղ $r = \dfrac{R}{1-R}$: Պարզունակ ստուգումը թողնվում է ընթերցողին:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **մետրիկացվող տարածություն**, եթե X բազմության վրա գոյություն ունի որևէ ρ մետրիկ այնպես, որ X մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է X-ի τ տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 11: Ցանկացած $(X, \text{դիսկր.})$ տարածություն մետրիկացվող տարածություն է, քանի որ նրա տոպոլոգիան համընկնում է X-ի վրա $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x = y \\ 1, & \text{երբ } x \neq y \end{cases}$ դիսկրետ մետրիկով ծնված տոպոլոգիայի հետ:

Իրոք, ըստ օրինակ 6-ի և թեորեմ 1-ի` X-ում ամեն մի $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ $r < 1$ դեպքերում X-ի մի կետանոց $\{a\}$ բաց ենթաբազմությունն է: Հետևաբար X-ի բոլոր ենթաբազմությունները բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում:

Բերենք նաև չմետրիկացվող տարածության օրինակ. մեկից ավելի կետեր պարունակող ամեն մի $(X, \text{անտիդ.})$ տարածություն չի կարող մետրիկացվել, քանի որ այն չի բավարարում անջատելիության T_2 աքսիոմին:

Անդրադառնալով մետրիկ տարածություններին` նշենք, որ բազմության վրա տրված մետրիկը թույլ է տալիս սահմանել հեռավորության հասկացություն ոչ միայն երկու կետերի միջև, այլև` կետի և ենթաբազմության, ինչպես նաև երկու

Սահմանում: (X,ρ) մետրիկ տարածության որևէ b կետի հեռավորություն X-ի որևէ A ենթաբազմությունից կոչվում է $\inf\{\rho(b,a):\ a\in A\}$ թիվը (նշանակվում է՝ $\rho(b,A)$):

Թեորեմ 3: $x\in X$ կետը պատկանում է (X,ρ) մետրիկային տարածության $A\subset X$ ենթաբազմության $\overline{A}$ փակույթին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)=0$:

Ապացուցում: Եթե $x\in\overline{A}$, ապա ըստ ենթաբազմության փակույթի սահմանման՝ ամեն մի $\mathcal{D}(x,r_n)$, $r_n=\frac{1}{n}$ բաց գնդում գոյություն ունի A ենթաբազմության որևէ a_n կետ, ուստի $\rho(x,A)=0$:

Այժմ հակառակը. դիցուք ինչ-որ $x\in X$ կետի դեպքում $\rho(x,A)=0$: Դիտարկենք այդ կետի կամայական U շրջակայք և ցույց տանք, որ $U\cap A\neq\varnothing$ (դրանից կհետևի, որ $x\in\overline{A}$): Ըստ մետրիկային տոպոլոգիայի սահմանման և թեորեմ 2-ի՝ գոյություն ունի x կետի $\mathcal{D}(x,r)$ բաց գնդային շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset U$: Այժմ $\rho(x,A)$ հեռավորության սահմանումից և $\rho(x,A)=0$ պայմանից հետևում է, գոյություն ունի որևէ $a\in A$ կետ, որ $\rho(x,a)<\varepsilon$: Քանի որ $a\in\mathcal{D}(x,r)\subset U$, ուստի $a\in U\cap A$: Ուրեմն $U\cap A\neq\varnothing$: ■

Թեորեմ 4: (X,ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A\subset X$ ենթաբազմության արտաքին կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)>0$:

Ապացուցում: Դիցուք $x\in\operatorname{ext}A$: Ըստ ենթաբազմության արտաքին կետի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի որևէ U շրջակայք, որ $U\subset X\setminus A$: Հետևաբար գոյություն ունի նաև x-ի բաց գնդային $\mathcal{D}(x,r)$ շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset U$: Ուստի $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$, և ուրեմն $\mathcal{D}(x,r)\cap A=\varnothing$: Այժմ, ենթադրելով, որ $\rho(x,A)$ թիվը դրական չէ, ստանում ենք $\rho(x,A)=0$, որից (ըստ նախորդ թեորեմի) հետևում է $x\in\bar{A}$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x,r)\cap A\neq\varnothing$ (հակասություն):

Ապացուցենք նաև հակառակ պնդումը. դիցուք $\rho(x,A)=r>0$: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$ (դրանից կհետևի, որ $x\in\operatorname{ext}A$): Ցանկացած $y\in\mathcal{D}(x,r)$ կետի դեպքում ըստ մետրիկի եռանկյան աքսիոմի ունենք՝ $\rho(x,y)+\rho(y,a)\geq\rho(x,a)$, որտեղ a-ն կամայական կետ է A-ից: Քանի որ $\rho(x,a)>r$ և $\rho(x,y)=r$, ուստի $\rho(y,a)>0$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$: ■

Թեորեմ 5: (X,ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A\subset X$ ենթաբազմության եզրային կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)=\rho(x,X\setminus A)=0$:

Ապացույցը որպես հեշտ խնդիր թողնվում է ընթերցողին:

Դիտարկենք [illegible] [illegible] մետրիկական տարածության
[illegible] մի կարևոր հատկություն:
Թեորեմ 6: [illegible] մի (X,ρ) մետրիկական տարածության [illegible]

տարածություն է:

Ապացույց: Քանի որ մետրիկական տարածությունները T_2, հետևաբար նաև T_1 տարածություններ են, ապա մնում է ցույց տալ, որ X-ի կամայական F_1 և F_2 չհատվող, փակ ենթաբազմություններն ունեն չհատվող բաց շրջակայքեր:

Ամեն մի $x \in F_1$ կետի համար դիտարկենք $\rho(x, F_2) = \rho_x$, և ամեն մի $y \in F_2$ կետի համար՝ $\rho(y, F_1) = \rho_y$ հեռավորությունները: Ըստ թեորեմ 3-ի $\rho_x > 0$, $\rho_y > 0$: Պարզ է որ $U_1 = \bigcup_{x \in F_1} B(x, \frac{1}{2}\rho_x)$, $U_2 = \bigcup_{y \in F_2} B(y, \frac{1}{2}\rho_y)$ միավորումները բաց բազմություններ են և $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$: Ցույց տանք, որ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $z_0 \in U_1 \cap U_2$ կետ: Հետևաբար գոյություն ունեն $x_0 \in F_1$ և $y_0 \in U_2$ կետեր, որ $z_0 \in B(x_0, \frac{1}{2}\rho_{x_0})$ և $z_0 \in B(y_0, \frac{1}{2}\rho_{y_0})$: Ըստ եռանկյան անհավասարության ունենք՝

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z_0) + \rho(z_0, y_0) < \frac{1}{2}\rho_{x_0} + \frac{1}{2}\rho_{y_0}$$

Որոշակիության համար համարենք $\rho_{x_0} \geq \rho_{y_0}$, որից հետևում է՝ $\rho(x_0, y_0) < \rho_{x_0}$: Բայց մյուս կողմից ունենք $\rho(x_0, y_0) \geq \inf \rho(x_0, F_2) = \rho_{x_0}$ (հակասություն): Ուրեմն $U_1 \cap U_2 = \emptyset$: ■

74+

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 7-ի վերաբերյալ

V 7.1. Ապացուցեք, որ

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = (x - y)^2$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա:

V 7.2. Ցույց տվեք, որ $n > 1$ դեպքերում

$$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = \min_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}^n$-ում:

V 7.3. Ապացուցեք. X բազմության վրա մետրիկի 1-3 աքսիոմները համարժեք են հետևյալ երկու աքսիոմներին՝

1. $\rho(x, y) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = y$,
2. $\rho(x, y) \le \rho(z, x) + \rho(z, y)$ բոլոր $x, y, z \in X$ տարրերի դեպքում:

V 7.4. Ապացուցեք. եթե ρ-ն որևէ մետրիկ է X բազմության վրա, ապա

$$\tilde{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\rho}(x, y) = \min\left(1, \rho(x, y)\right)$$

արտապատկերումը նույնպես մետրիկ է X-ի վրա:

7.5. Ցույց տվեք, որ X բազմության վրա նախորդ խնդրում դիտարկված ρ և $\tilde{\rho}$ մետրիկները համարժեք են (որոշում են X-ի միևնույն տոպոլոգիան):

7.6. Գտեք այնպիսի մետրիկային տարածություն և նրանում երկու այնպիսի փակ գնդեր, որ դրանցից ավելի մեծ շառավղով գունդը պարունակվի ավելի փոքր շառավղով գնդի մեջ՝ չհամընկնելով նրա հետ:

7.7. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և

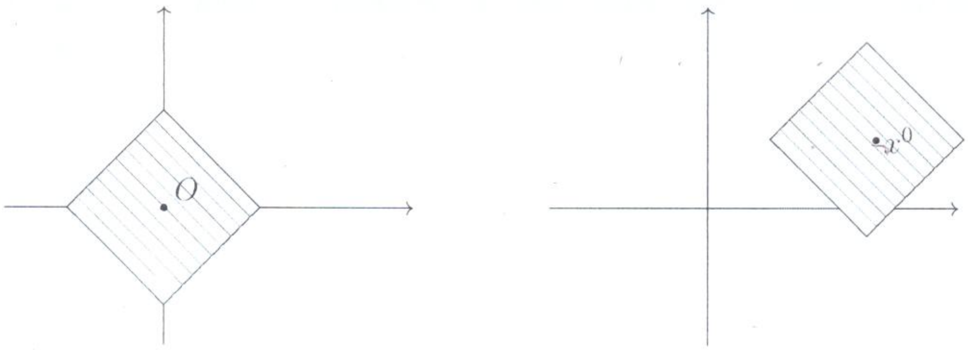
$$\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

արտապատկերումը:

ա) Ապացուցեք, որ σ-ն որոշում է մետրիկ $\mathbb{R}^2$-ի վրա:

բ) Նկարագրեք ստացվող մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազան:

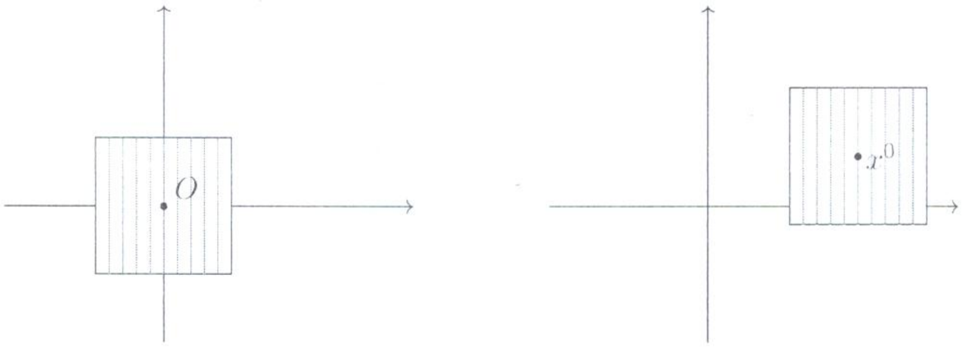
Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում՝ $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1^0 - y_1| + |x_2^0 - y_2| < r\}$: Մասնավորապես $x^0 = O = (0, 0)$ կետի դեպքում $\mathcal{D}(0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| < r\}$ բաց շրջանը անեզր քառակուսի անկյունագծերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա: Ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում $\mathcal{D}(x^0, r)$ շրջանը ստացվում է $\mathcal{D}(O, r)$ քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ:



7.8. Լուծեք նախորդ խնդիրը

$$\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mu(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\} = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$$

արտապատկերման դեպքում, որտեղ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$:



Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Ցույց տվեք, որ սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում x^0 կենտրոնով, r շառավղով $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \mu(x^0, y) < r\}$ բաց շրջանը ստացվում է $O = (0, 0)$ կենտրոնով և $2r$ կողմով $\mathcal{D}(O, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < r, \ |y_2| < r\}$ անեզր քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ:

7.9. Ապացուցեք, որ 7.7 և 7.8 խնդիրներում սահմանված σ և μ մետրիկները համարժեք են (որոշում են $\mathbb{R}^2$-ի նույն տոպոլոգիան):

7.10. Երկրաչափորեն նկարագրեք՝ ինչ են պրոյեկտիվ հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազայի տարրերը:

Ցուցում. Սևեռելով $\mathbb{R}^3$-ում O սկզբնակետով անցնող որևէ l^0 ուղիղ և որևէ α սուր անկյուն՝ դիտարկեք O կետով անցնող բոլոր l ուղիղների բազմությունը, որոնք l^0 ուղղի հետ կազմում են α-ն չգերազանցող անկյուն: Պարզեք, թե այդ անեզր գնդի համար երկրորդ կարգի ո՞ր մակերևույթն է հանդիսանում

1.11. Դիտարկենք $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ կոորդինատային տարածությունը օրինակ 3-ում սահմանված $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ մետրիկով: Ապացուցեք, որ այդ մետրիկային տարածությունում ամեն մի $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերա հանդիսանում է փակ $\mathcal{D}(a, r)$ գնդի եզր՝ ըստ թեմա 6-ում սահմանված ենթաբազմության եզր հասկացության:

77