

## Թեմա 1

**Բազմություններ, գործողությունները դրանց հետ (հարում, միավորում, բարբերություն), բազմությունների ընդանիքներ:**  
**Բազմությունների արդապարկերումներ (ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ արդապարկերումներ):**

Բազմությունների գործության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանդորն է (1845-1918), որը 1878-1884 թվերի միջև իր 6 հիմնարար աշխատանքներով ճանապարհ բացեց մաթեմատիկայի այդ բաժնի համար: Նրան ժամանակակից գրեթե բոլոր նշանավոր մաթեմատիկոսները կամ դրսեւրում էին ցուցադրական անդարբերություն, կամ էլ (հարկադեմ Շվարցը և Կրոնեկերը) բացահայտ թշնամություն Կանդորի նորարարական ջանքերի նկարմամբ: Պաշտոնապես բազմությունների գործության ճանաչումը սկսվեց 1897 թվին, երբ Առաջին միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում Ժ. Վիամարը և Ա. Նուրվիցը մագնանշեցին այդ գործության կարևոր կիրառություններ անալիզում:

Նշենք, որ մաթեմատիկայի այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են ընդհանուր գործության, չափականության և չափի գործությունները, անխօնիորեն կապված են բազմությունների գործության հետ և ի հայտ եկան նրա հետ գրեթե միաժամանակ:

Ուստի ընդհանուր գործությայի դասընթացը սովորաբար սկսվում է բազմությունների գործության մի որոշ, թեև լուսաբանությունը ակնարկու:

Բազմությունների գործության հիմքում ընկած է **բազմություն** հասկացությունը: Ըստ Կանդորի նշանավոր սահմանման՝ բազմություն ասելով՝ մենք հասկանում ենք մեր ինքուիցիայի կամ միքի արդյունքում իրարից լավ բարբերվող զանազան օբյեկտների ամբողջություն: Կանգ չառնելով այսպեսից ծագող հնարավոր թերլըմբոնումների և հակածառումների վրա՝ արձանագրենք միայն, որ այսուհետև մենք «բազմություն», «դաս», «ընդանիք», «համախմբություն», «ամբողջություն» գործմինները գործածելու ենք որպես հոմանիշներ:

Դաշնորդ կարևոր հասկացությունը **բազմության բարբար** է: Բազմությունը կազմված է բարբերից և որոշվում է իր բարբերով. գրում ենք  $x \in X$ , եթե  $x$  օբյեկտը  $X$  բազմության բարբար է: Սովորաբար վերջավոր բազմությունը բարվում է նրա բարբերի թվարկումով՝  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ : Դիմարկվում է նաև դարբարկ բազմություն. նշանակվում է  $\emptyset$  սիմվոլով և չունի բարբեր:

Եթե  $Y$  բազմության ամեն մի բարբ նաև բարբ է  $X$  բազմության համար, ապա  $Y$ -ը կոչվում է  $X$ -ի **ենթաբազմություն**: Ասում են նաև, որ  $Y$ -ը **ընկած է  $X$ -ում**, կամ  $Y$ -ը  $X$ -ի **մաս է**, և գրառում են  $Y \subset X$ : Համարվում է, որ  $\emptyset \subset X$  ցանկացած  $X$ -ի դեպքում:

Հնդունված է  $X$  բազմության  $\emptyset$  և  $X$  ենթաբազմությունները անվանել նրա **ոչ սեփական ենթաբազմություններ**:

Բնականաբար երկու  $X$  և  $Y$  բազմություններ համընկնում են (նույն են) այն և

միայն այն դեպքում, եթե նրանք կազմված են միևնույն փարբերից: Դա գրառվում է  $X = Y$  փեսքով և կարդացվում է ինչպես վերը նշվեց (և ոչ թե  $X$ -ը հավասար է  $Y$ -ին): Եթեմն  $X = Y$  նույնականությունը հասպատելու նպագակով ցույց է փրկում, որ  $X \subset Y$  և  $Y \subset X$ :

Տաճախ  $X$  բազմությունից նրա որևէ  $Y$  ենթաբազմություն առանձնացվում է այսպես կոչված **նկարագրական եղանակով՝** գրառվում է

$$Y = \{x \in X \mid (x \text{ փարբի վերաբերյալ պահանջ})\}$$

Կարդացվում է.  $Y$ -ը կազմված է  $X$ -ի այն բոլոր փարբերից, որոնք բավարարում են նշված պահանջին:

**Օրինակ 1:** Դիցուք  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ  $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$  բոլոր զույգ թվերի բազմությունն է: Պարզ է, որ  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  և  $2\mathbb{Z}$ -ը կարող է գրառվել՝  $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{-ը առանց մնացորդի բաժանվում է } 2\text{-ի վրա}\}$ :

Եթեմն «ավելի ծավալուն» բազմությունը նկարագրվում է (սահմանվում է) «ավելի նվազ ծավալով» բազմության միջոցով:

**Օրինակ 2:**  $\mathbb{R}^2$  կոորդինատային հարթությունը կարող է ներկայացվել  $\mathbb{R}$  թվային ուղղի միջոցով, որպես թվազույգերի բազմություն՝  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ :

Բազմությունների համար սահմանվում են **հարման, միավորման և փարբերության գործողություններ**: Օգրվելով նկարագրական եղանակից՝ երկու բազմությունների հարման, միավորման և փարբերության սահմանումները կարելի է գրառել համառոք՝

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ կամ } x \in B\}, \quad A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}:$$

Այս գործողություններն օժբված են հեփսիյալ հարման միջոցով. ցանկացած  $A, B, C$  բազմությունների դեպքում

- ա)  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$ ,  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- բ)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $A \cup B = B \cup A$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,  
 $A \cap B = B \cap A$ ;
- բ) հարման միջուկը կոչվում են  $\cup$  և  $\cap$  գործողությունների զուգորդականության և փեղափոխականության հարման:
- զ)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;
- զ) հարման միջուկը կոչվում են բաշխական հարման միջուկը համապատասխանաբար միավորման և հարման նկարմամբ:
- դ)  $A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$ ,  $A \setminus (B_1 \cap B_2) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2)$ ;
- դ) նույնությունները կոչվում են դեպքանի բանաձևեր:

**Օրինակ 3:** Ապացուցենք դե Մորգանի առաջին բանաձևը:

Այդ նպարակով ցույց փանք, որ  $A \setminus (B_1 \cup B_2)$  բազմության յուրաքանչյուր փարք պարկանում է  $(A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$  բազմությանը և հակառակ՝

$$x \in A \setminus (B_1 \cup B_2) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \cup B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \text{ և } x \notin B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B_1 \\ x \in A \setminus B_2 \end{cases} \Rightarrow x \in (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$$

Այս օրինակում հակառակը ցույց փալու համար նոր դաստիարակություններ անելու կարիք չկա. բոլոր քայլերը հակադարձվում են վերջից դեպի սկիզբ: Փաստորեն բոլոր  $\Rightarrow$  անցումներն ունեն  $\Leftrightarrow$  համարժեքության բնույթը: ■

Եթե ունենք (վերջավոր քանակով)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  բազմություններ, ապա նրանց հափումը և միավորումը գրառվում են հետևյալ փեսքերով՝

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n &= \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ որքեղ } i = 1, 2, \dots, n\} \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n &= \bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid \text{գոյություն ունի } i, \text{ որ } x \in A_i\} \end{aligned}$$

Այս դեպքում վերը բերված դե Մորգանի բանաձևերը գրառվում են հետևյալ փեսքերով՝

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i),$$

որքեղ  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ -ը կամայական բազմություններ են:

Հաճախ դիմարկվում են բազմություններ, որոնց փարբերը իրենք ևս բազմություններ են: Այդպիսի բազմությունը կոչվում է **բազմությունների ընդունակություն**:

**Օրինակ 4:** Դիմարկենք  $\mathbb{R}^2$  հարթության մեջ գգնվող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Սա բազմությունների ընդունակություն է, որի փարբերը (ուղիղները) իրենք ևս բազմություններ են կազմված  $\mathbb{R}^2$ -ի կետերից:

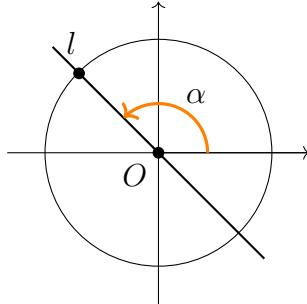
Դիցուք  $I$ -ն բազմություն է, որի ամեն մի  $i \in I$  փարբի համապատասխանեցված է որևէ  $X_i$  բազմություն: Այս  $X_i$  բազմություններից կազմված բազմությունը (բազմությունների ընդունակություն) նշանակվում է  $\{X_i; i \in I\}$  և կոչվում է **բազմությունների ինդեքսավորված ընդունակություն**: Այսպես է ինդեքսավորված ընդունակություն:

Նշենք, որ բազմությունների ընդունակությունը ինդեքսավորելիս սովորաբար որպես ինդեքսավորվող բազմություն ընդունակությունը են արդեն հայփնի և լավ ընկալվող որևէ բազմություն կամ նրա որևէ մասը:

Օրինակ, թվերից կազմված հաջորդականության փարբերը սովորաբար ինդեքսավորում են (համարակալում են) կամ բոլոր բնական թվերով, կամ այդ բազմության որևէ վերջավոր մասով:

**Օրինակ 5:** Ինդեքսավորենք կոորդինատային  $\mathbb{R}^2$  հարթության  $O$  սկզբնակեպով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Նկատենք, որ ամեն մի այդպիսի ուղիղ

միարժեքորեն որոշվում է այն ամենափոքր  $\alpha$  անկյունով, որով պետք է պարփել  $OX$  առանցքը  $O$  կետի շուրջը ժամալարին հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի  $l$  ուղղի հետ:

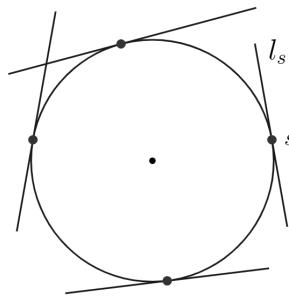


Ուստի փվալ բազմության փարբերը կարելի է ինդեքսավորել  $[0, 2\pi)$  միջակայքի բոլոր թվերով:

Վյագեղից նաև սպանում ենք, որ ցանկացած շրջանագծի կեպերի բազմությունը նույնպես կարելի է ինդեքսավորել  $[0, 2\pi)$  միջակայքի բոլոր թվերով:

**Օրինակ 6:** Դիպարկենք  $\mathbb{R}^2$  հարթության մեջ այն բոլոր ուղիղներից կազմված  $L$  բազմությունը, որոնք գտնվում են կոորդինատների 0 սկզբնակետից 1 միավոր հեռավորության վրա: Ցույց փանք, թե ինչպես կարելի է ինդեքսավորել  $L$ -ը: Նկագինք, որ այդ բազմության ամեն մի փարբ (ուղիղ) ունի ճիշք մի ընդհանուր կեպ  $S = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  շրջանագծի հետ (շոշափման կեպը): Նշանակելով  $l_s$ -ով շրջանագծի  $s \in S$  կեպով փարված շոշափողը, կարող ենք  $L$  բազմությունը ներկայացնել որպես բազմությունների ինդեքսավորված ընդհանիք՝  $L = \{l_s; s \in S\}$ :

Այս օրինակում որպես ինդեքսների բազմություն հանդիս եկավ միավոր շրջանագծի բոլոր կեպերից կազմված  $S$  բազմությունը:



Նկագինք, որ ամեն մի կոնկրետ դեպքում ինդեքսավորող բազմության ընդուրությունը կապարվում է (ոչ միակ եղանակով) ըստ նպարակահարմարության:

Տաշվի առնելով դե Մորգանի բանաձևերի կարևորությունը՝ նշենք, որ դրանք ճիշք են ցանկացած ինդեքսավորված բազմությունների դեպքում. Եթե ունենք որևէ  $\{X_i; i \in I\}$  ինդեքսավորված ընդհանիք և  $X$  բազմություն, ապա

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i), \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \quad (1)$$

Ապացուցենք (1) նույնություններից երկրորդը.

$$\begin{aligned} x \in \left( X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i \right) &\Leftrightarrow \left( x \in X \text{ և } x \notin \bigcap_{i \in I} X_i \right) \Leftrightarrow (x \in X \text{ և գոյություն ունի} \\ i_0 \in I \mid \text{ինդեքս}, \text{ որ } x \notin X_{i_0}) &\Leftrightarrow x \in (X \setminus X_{i_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Եթե  $Y$ -ը  $X$ -ի ենթաբազմություն է, ապա  $X \setminus Y$ -ը կոչվում է  **$Y$ -ի լրացում  $X$ -ում**: Մասնավոր դեպքում, եթե  $\{X_i; i \in I\}$  ընդհանիքի բոլոր  $X$  փարբերը միևնույն  $X$  բազմության ենթաբազմություններ են՝  $X_i \subset X$ , դեռ Մորգանի (1) բանաձևերն ընդունում են միապահման հեշտ ձև: Միավորման լրացումը լրացումների հագումն է, իսկ հագուման լրացումը լրացումների միավորումն է:

Տարբեր բազմություններ միմյանց հետ համեմատելու միջոցը **բազմությունների արգապապկերումներն են**:

Եթե  $X$  բազմության ամեն մի  $x$  փարբի համապատասխանեցված է  $Y$  բազմության որևէ  $y$  փարբ, ապա ասում են, որ փրկած է  $X$  բազմության  $f : X \rightarrow Y$  արգապապկերում  $Y$  բազմության մեջ:

Այս դեպքում  $y$  փարբը կոչվում է  $x$  փարբի կերպար և նշանակվում է  $y = f(x)$ : Ինքը՝  $X$  բազմությունը կոչվում է  $f$  արգապապկերման **որոշման փիրույթ**, իսկ  $Y$ -ը՝  $f$ -ի **արժեքների փիրույթ**: Ամեն մի ոչ դափարկ  $A \subset X$  ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա  $f(A) \subset Y$  կերպարը, որպես  $Y$ -ի ենթաբազմություն՝ կազմված  $Y$ -ի այն բոլոր  $y$  փարբերից, որոնց համար գոյություն ունի  $x \in A$  փարբ, որ  $f(x) = y$ : Այսպիսով՝ եթե  $A \neq \emptyset$ , ապա կրճատ՝  $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ և } f(x) = y\}$ : Իսկ  $A = \emptyset$  դեպքում համարվում է  $f(\emptyset) = \emptyset$ :

Եթե  $Y \subset X$ , ապա դիփարկվում է  $i : Y \rightarrow X$  արգապապկերում՝ սահմանելով  $i(y) = y$ ,  $\forall y \in Y$  փարբի համար: Ընդունված է  $i$  արգապապկերումն անվանել  **$Y$  բազմության ներդրում  $X$  բազմության մեջ**:

Յանկացած  $B \subset Y$  ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա  $f^{-1}(B)$  **նախակերպարը**  $f : X \rightarrow Y$  արգապապկերման դեպքում որպես  $X$ -ի ենթաբազմություն՝ կազմված  $X$ -ի այն բոլոր  $x$  փարբերից, որ  $f(x) \in B$ : Կրճատ՝  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ : Պարզ է, որ  $f^{-1}(Y) = X$ , և համարվում է  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  ցանկացած  $f : X \rightarrow Y$  արգապապկերման դեպքում:

Նշենք նաև, որ ընդունված է  $Y$ -ի մի փարբ պարունակող ամեն մի  $\{y_0\}$  ենթաբազմության  $f^{-1}(\{y_0\})$  նախակերպարը  $X$ -ում գրառել ավելի պարզ՝  $f^{-1}(y_0)$  փեսքով և անվանել  $y_0$  փարբի նախակերպար  $f : X \rightarrow Y$  արգապապկերման դեպքում:

**Օրինակ 7:** Դիցուք  $X$  և  $Y$  բազմությունները կազմված են երկուական փարբերից՝  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$ : Դիփարկենք  $f : X \rightarrow Y$  արգապապկերում՝ սահմանելով  $f(x_1) = f(x_2) = y_2$ :

Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգբակար վարժանք գրնել  $X$ -ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների կերպարները  $Y$ -ում և  $Y$ -ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների նախակերպարները  $X$ -ում:

**Թեորեմ 1:** Ամեն մի  $f : X \rightarrow Y$  արդապարկերման և կամայական  $X_1, X_2 \subset X$  ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), \quad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2), \\ f(X_1) \setminus f(X_2) \subset f(X_1 \setminus X_2):$$

Ապացուցենք, օրինակ, դրանցից երկրորդը՝

$$y \in f(X_1 \cap X_2) \Rightarrow (\exists x \in X_1 \cap X_2 \text{ և } f(x) = y) \Rightarrow (x \in X_1, x \in X_2 \text{ և } f(x) = y) \Rightarrow \\ (y \in f(X_1) \text{ և } y \in f(X_2)) \Rightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2):$$

Դեպքաբար  $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ : ■

Նկատենք, որ լնդիանուր դեպքում  $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$ : Իրոք, օրինակ 7-ում վերցնելով  $X_1 = \{x_1\}$ ,  $X_2 = \{x_2\}$  սպանում ենք  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , ուստի  $f(X_1 \cap X_2) = \emptyset$ , մինչդեռ  $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y_2\} \neq \emptyset$ : Դեպքաբար գեղի չունի  $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$  ներդրում:

Նշենք, որ թեորեմ 1-ում բերված առաջին երկու առնչությունները ճիշդ են  $X$  բազմության ենթաբազմությունների կամայական  $\{X_i; i \in I\}$  ինդեքսավորված լնդրանիքի դեպքում՝

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

**Թեորեմ 2:** Կամայական  $f : X \rightarrow Y$  արդապարկերման և  $Y_1, Y_2 \subset Y$  ենթաբազմությունների դեպքում

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2), \\ f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2):$$

Ապացուցենք դրանցից առաջինը՝

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in Y_1 \\ f(x) \in Y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(Y_1) \\ x \in f^{-1}(Y_2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ  $Y$  բազմության ենթաբազմությունների կամայական  $\{Y_i; i \in I\}$  ինդեքսավորված լնդրանիքի դեպքում

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \quad (2)$$

**Թեորեմ 3:** Կամայական  $f : X \rightarrow Y$  արդապափկերման և  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \quad (3)$$

**Ապացուցում:** Իրոք,  $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B), \text{որ } f(x) = y) \Rightarrow (f(x) \in B) \Rightarrow y \in B$ : Ներկայացնենք  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ : Աման ձևով՝  $x \in A \Rightarrow (f(x) \in f(A)) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ : Ներկայացնենք  $A \subset f^{-1}(f(A))$ : ■

Վերը բերված [օրինակ 7](#)-ում վերցնելով  $A = \{x_1\}$ ,  $B = \{y_1, y_2\}$ ՝ համոզվում ենք, որ ընդհանուր դեպքում (3) բանաձևերում ներդրման  $\subset$  նշանները չեն կարող փոխարինվել համընկնման  $=$  նշանով:

**Սահմանում:**  $f : X \rightarrow Y$  արդապափկերումը կոչվում է **ներդիր** կամ **ինյեկտիվ** արդապափկերում, եթե  $X$ -ի  $\forall x_1 \neq x_2$  գործերի դեպքում  $f(x_1) \neq f(x_2)$ : Այսուհետեւ,  $f : X \rightarrow Y$  արդապափկերումը կոչվում է **վրադիր** կամ **սյուրյեկտիվ** արդապափկերում, եթե  $\forall y \in Y$  գործի համար  $\exists x \in X$  գործը, որ  $f(x) = y$ :

Նշենք, որ արդապափկերման սյուրյեկտիվությունը համարժեք է  $f(X) = Y$  համընկնմանը:

Նկագենք, որ [օրինակ 7](#)-ում բերված  $f$  արդապափկերումը ոչ ինյեկտիվ է և ոչ է սյուրյեկտիվ է:

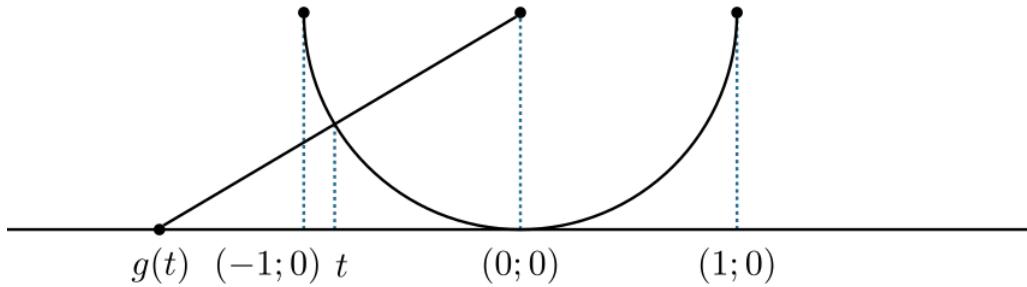
Միաժամանակ ինյեկտիվ և սյուրյեկտիվ արդապափկերումը կոչվում է **բիյեկտիվ** կամ **փոխմիարժեք** արդապափկերում:

Ցանկացած  $X$  բազմության համար  $x \mapsto x$ ,  $x \in X$  համապատասխանությունը որոշում է  $X \rightarrow X$  փոխմիարժեք արդապափկերում: Այն կոչվում է  $X$ -ի **նույնական արդապափկերում** և նշանակվում է  $\text{id}$  կամ  $1_X$  սիմվոլներով:

**Օրինակ 8:** Ամբողջ թվերի  $\mathbb{Z}$  բազմության  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  արդապափկերումը՝ սահմանված  $f(n) = n + 1$  բանաձևով, փոխմիարժեք է ( $h\beta\eta\alpha\eta\beta\eta\beta$ ) և գործերը  $\pm 1_{\mathbb{Z}}$  նույնական արդապափկերումից:

Ամեն մի փոխմիարժեք  $f : X \rightarrow Y$  արդապափկերման համար սահմանվում է նրա **հակադարձ**  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  արդապափկերումը. որպես  $\forall y \in Y$  գործի  $f^{-1}(y)$  կերպար սահմանվում է  $X$ -ի այն  $x$  գործը, որ  $f(x) = y$ :

**Օրինակ 9:** Ցույց գործերի, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք արդապափկերում  $(-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$ : Այն կարող է սահմանվել անալիտիկորեն՝  $f(t) = \tan \frac{\pi}{2}t$ ,  $t \in (-1, 1)$  բանաձևով, կամ երկրաչափորեն՝ սպորտակարգությունը եղանակով: Գծագրում  $(-\infty, \infty)$  թվային ուղիղը պարկերված է որպես  $OX$  կոորդինադային առանցք:



Նիմարկենք  $M(0; 1)$  կենդրոնով և 1 շառավղով կիսաշրջանագիծ առանց իր երկու  $A(-1; 1)$  և  $B(1; 1)$  ծայրակետերի: Այժմ կամայական  $t \in (-1; 1)$  կետի  $g(t)$  կերպարը սպանալու համար  $t$  կետից ուղղահայաց բարձրանում ենք մինչև կիսաշրջանագծի  $T$  կերը և ապա զբնում ենք  $g(t) \in (-\infty, +\infty)$  կերը՝ որպես  $MT$  ճառագայթի հավման կետ  $OX$  առանցքի հետ: Առաջարկում ենք ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ վերը սահմանված  $f, g : (-1; 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  արդապարկերումները փոխմիարժեք են, ինչպես նաև նկարագրել նրանց հակադարձ արդապարկերումները: Նկարենք նաև, որ  $f$ -ը և  $g$ -ն նույնը չեն:

Եթե ունենք  $f : X \rightarrow Y$  և  $g : Y \rightarrow Z$  արդապարկերումներ, ապա սահմանվում է նրանց  $g \circ f : X \rightarrow Z$  **համադրույթ** ( $g \circ f)(x) = g(f(x))$  բանաձևով:

Եթե  $f : X \rightarrow Y$  փոխմիարժեք արդապարկերում է, ապա ինչպես արդեն գիրենք, գոյություն ունի նրա հակադարձ  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  արդապարկերումը և իմաստ ունեն  $f^{-1} \circ f$  և  $f \circ f^{-1}$  համադրույթները: Շեշտ է գետնել, որ

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y:$$

Յանկացած  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $h : Z \rightarrow T$  արդապարկերումների դեպքում իմաստ ունեն  $(h \circ g) \circ f$  և  $h \circ (g \circ f)$  համադրույթները, որոնք որոշում են միևնույն  $X \rightarrow T$  արդապարկերումը՝  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ : Իրոք, նշանակելով  $h \circ g$  և  $g \circ f$  համադրույթները համապարախանաբար  $u$  և  $v$ , ցանկացած  $x \in X$  դարձի համար կունենանք՝

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

$$((h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ v)(x) = h(v(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))):$$

Շերևաբար՝  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ :

## Խնդիրներ և հարցեր թեմա 1-ի վերաբերյալ

- 1.1. Կամայական  $A, B, C$  բազմությունների համար ապացուցեք հետևյալ նույնությունները.
- ա)  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$   
թ)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$   
շ)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$   
զ)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- 1.2. Ցույց փակեք, որ [օրինակ 6](#)-ում ուղիղների  $L$  ընդունիքը կարելի է ուղղակի ինդեքսավորել նաև  $[0, 2\pi)$  միջակայքի թվերով:
- 1.3. Դիպարկենք էվկիլիոյան կոորդինատային  $\mathbb{R}^3$  տարածության սկզբնակեպով անցնող բոլոր հարթությունների ընդունիքը: Այս ընդունիքի համար գտեք որևէ ինդեքսավորող բազմություն:
- 1.4. Ապացուցեք դե Մորգանի ([1](#)) բանաձևերից առաջինը:
- 1.5. [Թեորեմ 1](#)-ի բերված ապացույցը կազմված է որպես 4 հետևյալ հաջորդականություն: “Պարզեք՝ դրանցից ո՞րը չի հակադարձվում:
- 1.6. Օգբայելով [օրինակ 7](#)-ում սահմանված  $f : X \rightarrow Y$  արդապարկերումից և  $X$ -ում ընդունված  $X_1$  և  $X_2$  հարմար ենթաբազմություններ՝ ցույց փակեք, որ ընդհանուր դեպքում [թեորեմ 1](#)-ի  $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$  ներդրումը չի վերածվում աջ և ձախ մասերի համընկման:
- 1.7. Ապացուցեք [թեորեմ 1](#)-ի երեք նույնություններից առաջինը և երրորդը:
- 1.8. Ապացուցեք [թեորեմ 2](#)-ի երկրորդ և երրորդ նույնությունները:
- 1.9. [Թեորեմ 3](#)-ի երկու պնդումների ապացույցներում ո՞ր հետևյալ են, որ չեն հակադարձվում:
- 1.10. Ապացուցեք ([2](#)) նույնությունները:
- 1.11. Դիպարկենք երկու հարց կապված [թեորեմ 3](#)-ի հետ. ինչպիսի՞ն պետք է լինի  $f : X \rightarrow Y$  արդապարկերումը, որ դեղի ունենա
- ա)  $f^{-1}(f(A)) = A$  համընկում ցանկացած  $A \subset X$  ենթաբազմության դեպքում,  
թ)  $f(f^{-1}(B)) = B$  համընկում ցանկացած  $B \subset Y$  ենթաբազմության դեպքում:

Ապացուցեք, որ ա) դեպքում անհրաժեշտ և բավարար պայման է  $f$  արդապարկերման ինյեկտիվությունը, իսկ թ) դեպքում՝  $f$ -ի սյուրյեկտիվությունը:

- 1.12. Նշանակենք  $h$ -ով  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  արդապավկերումների  $g \circ f : X \rightarrow Z$  համադրույթը՝  $h = g \circ f$ : Ապացուցեք, որ ամեն մի  $T \subset Z$  ենթաբազմության դեպքում  $h^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T))$ :
- 1.13. Դիցուք  $f : X \rightarrow Y$  և  $g : Y \rightarrow Z$  արդապավկերումներն այնպիսին են, որ  $g \circ f = \mathbb{1}_X$ : Ապացուցեք, որ  $f$ -ը ներդիր,  $g$ -ն վրադիր արդապավկերումներ են:
- 1.14. Դիցուք  $f : X \rightarrow Y$  և  $g : Y \rightarrow X$  արդապավկերումներն այնպիսին են, որ  $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ ,  $g \circ f = \mathbb{1}_X$ : Ապացուցեք, որ  $f$ -ը և  $g$ -ն փոխմիարժեք, մեկը մյուսին հակադարձ արդապավկերումներ են: