Թեմա 8

Հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, կապը նրանց միջև, Լինդելյոֆի թեորեմը: Սեպարաբել տարածություններ, կապը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմի և սեպարաբելության միջև:

Մետրիկական տարածություններն օժտված են ևս մի կարևոր հատկությամբ՝ բավարարում են այսպես կոչված հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Սահմանում: Դիցուք x-ը X տոպոլոգիական տարածության որևէ սևեռված կետ է, իսկ β_x-ը այդ կետի որոշ շրջակայքերի համախմբություն է: Ասում են, որ β_x-ը x կետի **շրջակայքերի բազա** է, եթե x-ի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի $V \in \beta_x$ շրջակայք, որ $V \subset U$:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության առաջին աքսիոմին**, եթե նրա ցանկացած կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի բազա:

Օրինակ 1: $(X,$ դիսկր.$)$ և $(X,$ անտիդ.$)$ տարածություններ բավարարում են հաշվելիության առաջին աքսիոմին (ինչո՞ւ):

Թեորեմ 1: Ցանկացած մետրիկական (X, δ) տարածություն բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ կամայական $x \in X$ կետի համար բոլոր $\mathcal{D}(x,r),\ r \in \mathbb{Q}$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի U բաց շրջակայք, որ $x \in U \subset V$: Համաձայն թեմա 6-ում թեորեմ 3-ի՝ գոյություն ունի x կենտրոնով $\mathcal{D}(x,R)$ բաց գունդ, որ $x \in \mathcal{D}(x,R) \subset U$:

Վերցնենք որևէ ռացիոնալ r թիվ, որ $R > r > 0$: Ունենք $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(x,R) \subset U \subset V$, որից հետևում է՝ $x \in \mathcal{D}(x,r) \subset V$, ուստի ռացիոնալ շառավիղներով $\mathcal{D}(x,r)$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: ■

Նշենք բերենք տոպոլոգիական տարածության օրինակ, որը չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $(\mathbb{R},$ վերջ. լր.$)$ տարածությունը: Ըստ սահմանման՝ նրանում բաց բազմություններ են համարվում վերջավոր ենթաբազմությունների լրացումները: Ցույց տանք, որ $0 \in \mathbb{R}$ կետի համար գոյություն չունի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք 0 կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի $\beta = \{U_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա: Նախ ցույց տանք, որ $\bigcap_i U_i = \{0\}$: Համոզվենք, որ ամեն մի $r \neq 0$ թվի դեպքում $V(r) = \mathbb{R} \setminus \{r\}$ ենթաբազմությունը 0 կետի բաց շրջակայք է, հետևաբար գոյություն ունի 0-ի $U(r) \in \beta$ շրջակայք, որ $0 \in U(r) \subset V(r)$: Քանի որ $r \notin V(r)$, ուստի $\bigcap_r V(r) = \{0\}$: Հետևաբար $\bigcap_r U(r) = \{0\}$, և նաև $\bigcap_i U_i = \{0\}$, որտեղ $i \in I$: Այսպիսով ստացանք, որ $\mathbb{R} \setminus \bigcap_i U_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է: Բայց մյուս կողմից, քանի որ $\mathbb{R} \setminus \bigcap_i U_i = \bigcup_i (\mathbb{R} \setminus U_i)$ բազմությունը հաշվելի բազմություն է՝ որպես հաշվելի քանակով վերջավոր բազմությունների միավորում: Ստացանք հակասություն:

Ուստի (ℝ, վերջ. լր.) տարածությունը չի բավարարում հաշվե-
լիության առաջին աքսիոմին:
Նկատենք, որ [illegible] (ℝ, վերջ. լր.)
տարածությունը չի կարող մետրիկացվել:

Երկրաչափական որոշ բարդ պատկերներ (օրինակ՝ ողորկ բազմաձևությունները) սահմանվում են ավելի պարզ պատկերների սոսնձումներով: Այդպիսի կառուցումները էապես հեշտանում են, եթե նախապես պահանջում են, որ կառուցվող տարածությունը (բազմաձևությունը) բավարարի այսպես կոչված հաշվելիության աքսիոմին:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության** երկրորդ **աքսիոմին**, եթե նրա տոպոլոգիայի համար գոյություն ունի որևէ հաշվելի բազա:

Օրինակ 3: Ինչպես գիտենք, ռացիոնալ ծայրակետերով բաց (q_1, q_2) միջակայքերի ընտանիքը հաշվելի բազա է ℝ բնական տոպոլոգիայի համար: Ուստի (ℝ, սովոր.) տարածությունը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Թեորեմ 2: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն բավարարում է նաև հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապացուցում: Դիցուք (X, τ) տարածության համար $B = \{U_i\}$ համախմբությունը τ տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: Կամայական $x \in X$ կետի համար դիտարկենք B-ի B_x ենթաբազմությունը՝ կազմված B-ի այն բոլոր տարրերից, որոնք պարունակում են x կետը: Պարզ է, որ B_x-ը հաշվելի բազմություն է: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա գոյություն ունի $U \in \tau$ բաց բազմություն, որ $x \in U \subset V$: Ըստ պայմանի՝ U-ն ներկայացվում է $U = \bigcup U_j$ տեսքով, որտեղ $U_j \in B$: Նշանակում է՝ x-ը պատկանում է դրանցից որևէ մեկին՝ $x \in U_{j_0},\ j_0 \in J$: Ուստի $U_{j_0} \in B_x$, և $x \in U_{j_0} \subset V$: ■

Հաշվելիության առաջին աքսիոմին բավարարող տարածությունը կարող է չբավարարել հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Որպես պարզ օրինակ վերցնենք որևէ ոչ հաշվելի բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով: Ինչպես գիտենք, նրա ցանկացած B բազա իր մեջ պարունակում է բոլոր մի կետանոց ենթաբազմությունները: Ուստի B-ն ոչ հաշվելի բազա է:

Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունների մյուս կարևոր հատկությունը կապված է բազմության ծածկույթ, ենթածածկույթ հասկացությունների հետ:

Սահմանում: Դիցուք ունենք X բազմության A ենթաբազմություն և X-ի ինչ-որ ենթաբազմությունների $U_i \subset X,\ i \in I$ ընտանիք: Ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը ***A* ենթաբազմության ծածկույթ է**, եթե $A \subset \bigcup_i U_i$: Մասնավորապես, $A = X$ դեպքում $\{U_i,\ i \in I\}$ ընտանիքը X-ի ծածկույթ է, եթե $X = \bigcup_i U_i$: Ծածկույթը կոչվում է **բաց ծածկույթ**, եթե նրա տարրերը X տարածության բաց ենթաբազմություններ են: Ծածկույթը կոչվում է ~~**վերջավոր**~~ **հաշվելի** ծածկույթ, եթե ինդեքսների I բազմությունը ~~վերջավոր~~ հաշվելի բազմություն է:

Դիցուք ունենք $A \subset X$ ենթաբազմության երկու՝ $\{U_i;\ i \in I\}$ և $\{V_j;\ j \in J\}$ ծածկույթներ: Եթե ամեն մի $i \in I$ փարրի համար գոյություն ունի $j \in J$ փարր այնպես, որ $U_i = V_j$, ապա ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ծածկույթը $\{V_j;\ j \in J\}$ ծածկույթի ենթածածկույթ է:

Օրինակ 4: $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ փարածության համար $U_i = (i-1; i+1),\ i \in I = \mathbb{R}$ ինփերվալները կազմում են նրա բաց ծածկույթ, իսկ $V_j = (j-1; j+1),\ j \in J = \mathbb{Z}$ ինփերվալները կազմում են այդ ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ:

Սահմանում: Տոպոլոգիական փարածությունը կոչվում է **լինդելյոֆյան փարածություն**, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի հաշվելի ենթածածկույթ:

Թեորեմ 3: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի փարածություն լինդելյոֆյան փարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք $\{U_i,\ i \in I\}$-ն (X, τ) փարածության որևէ բաց ծածկույթ է, իսկ B-ն τ փոպոլոգիայի որևէ հաշվելի բազա է: Ունենք $X = \bigcup\limits_i U_i$: Ամեն մի $x \in X$ կեփի համար ընփրենք որևէ U_i, որ $x \in U_i$: Այդ U_i-ն վերանշանակենք U_x (նկափենք, որ փարբեր $x_1, x_2 \in X$ կեփերի դեպքում հնարավոր է $U_{x_1} = U_{x_2}$ համընկում): Գոյություն ունի B-ին պափկանող V_x փարր, որ $x \in V_x \subset U_x$: Պարզ է, որ $\{V_x;\ x \in X\}$ համախմբությունը հաշվելի է որպես հաշվելի B բազմության ենթաբազմություն: Այժմ յուրաքանչյուր V_x-ի համար ընփրենք մի U_x, որ $V_x \subset U_x$: Քանի որ $X = \bigcup\limits_x V_x$, ուսփի և $X = \bigcup\limits_x U_x$: Ուրեմն $\{U_x\}$-ը $\{U_i,\ i \in I\}$ բաց ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ է: ■

Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունները [illegible] թեորեմ 3-ի հիման վրա: Այս հետ կապված առաջանում է [illegible] բավարարում է արդյոք [illegible] տարածությունը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին: Որոշ դեպքերում այդ հարցի [illegible] [illegible] ենթաբազմության և [illegible] տարածության [illegible]:

Սահմանում: Ասում են, որ $A \subset X$ **ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է** (X,τ) տոպոլոգիական տարածությունում, եթե A-ի փակումը X-ն է՝ $\bar{A} = X$: Այդպիսիք են, օրինակ ա) X-ը կամայական (X,τ) տարածությունում, բ) ռացիոնալ թվերի և իռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունները $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ում, գ) ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն $(X, \text{վերջ. լր.})$-ում: Սրանք հեշտ հիմնավորվում են շնորհիվ հետևյալի:

Թեորեմ 4: X տարածության A ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն ունի ոչ դատարկ հատում X-ի ցանկացած բաց, ոչ դատարկ ենթաբազմության հետ:

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք $\bar{A} = X,\ U \in \tau,\ U \neq \varnothing$: Եթե $U \cap A = \varnothing$, ապա U-ի ոչ մի կետ հպման կետ չէ A-ի համար, ուստի $\bar{A} \neq X$ (հակասություն):

Բավարարությունը: Վերցնենք $\forall x_0 \in X$ կետ և ցույց տանք, որ $x_0 \in \bar{A}$: Դիցուք V-ն x_0 կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x_0-ի U բաց շրջակայք, որ $x_0 \in U \subset V$: Համաձայն պայմանի՝
$U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x_0 \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = X$: ■

Սահմանում: Տ տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **սեպարաբել տարածություն**, եթե այն ունի որևէ ամենուրեք խիտ հաշվելի ենթաբազմություն:

Սեպարաբել տարածությունների օրինակներ: ա) ցանկացած (X,τ) տարածություն, որտեղ X-ը հաշվելի բազմություն է, բ) $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ը, գ) $(\mathbb{R},\to)$ և $(\mathbb{R},\leftarrow)$ տարածությունները, դ) $\mathbb{R}^n$-ը սովորական մետրիկայով տոպոլոգիայով, ե) ցանկացած $(X, \text{անփոփ.})$ տարածություն: Իսկ $(X, \text{դիսկր.})$-ը սեպարաբել չէ, եթե X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Թեորեմ 5: Բոլոր $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան ~~մետրիկական~~ տարածությունները սեպարաբել տարածություններ են:

Ապացույց: Դիտարկենք ռացիոնալ կոորդինատներով բոլոր $(q_1,q_2,\dots,q_n)$, $q_i\in\mathbb{Q}$ կետերի $\mathbb{Q}^n=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\dots\times\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}^n$ ենթաբազմությունը հաշվելի է (տես հետևանք 3.5-ը թեմա 3-ում): Ցույց տանք, որ այն ունի ոչ դատարկ հատում ամեն մի $D(x,r)$ բաց գնդի հետ, որտեղ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $r>0$: Յուրաքանչյուր $i=1,2,\dots,n$ ինդեքսի համար վերցնենք որևէ q_i ռացիոնալ թիվ $\left(x_i-\frac{r}{\sqrt{n}},\ x_i+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ միջակայքից: Ունենք

$$x_i-\frac{r}{\sqrt{n}}<q_i<x_i+\frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow -\frac{r}{\sqrt{n}}<q_i-x_i<\frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow |q_i-x_i|<\frac{r}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}|q_i-x_i|^2<n\cdot\frac{r^2}{n} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(q_i-x_i)^2<r^2 \Longrightarrow (q_1,q_2,\dots,q_n)\in D(x,r) \Longrightarrow$$

$$\mathbb{Q}^n\cap D(x,r)\neq\emptyset:$$

Քանի որ $D(x,r)$ գնդերը կազմում են բազա $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկական տոպոլոգիայի համար, ուստի $\mathbb{Q}^n$-ի հատումը դատարկ չէ կամա $\mathbb{R}^n$-ի կամայական ոչ դատարկ բաց բազմության հետ: Հետևաբար $\mathbb{Q}^n$-ը ամենուրեք խիտ է $\mathbb{R}^n$-ում ըստ թեորեմ 4-ի: Այսպիսով $\mathbb{Q}^n$-ը հաշվելի, ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, ուստի $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Թեորեմ 6: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ցանկացած (X,τ) տարածություն սեպարաբել տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք B-ն τ տոպոլոգիայի որևէ հաշվելի բազա է: Յուրաքանչյուր $U_n\in B$ ենթաբազմությունում ընտրենք որևէ a_n կետ: Ստացված հաշվելի $A=\{a_n\}$ բազմությունը բավարարում է թեորեմ 4-ի պայմանին (ինչո՞ւ): Հետևաբար $\overline{A}=X$, ուստի X-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Հակառակը ճիշտ չէ. սեպարաբել տարածությունը կարող է չունենալ հաշվելի բազա: Բերենք երկու օրինակ:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է: Իրոք, ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի ոչ դատարկ հարում ցանկացած ոչ դատարկ բաց ենթաբազմության հետ, ուստի այն հաշվելի ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}$-ում: Բայց $(\mathbb{R}$, վերջ. լր.$)$ տարածությունը չունի հաշվելի բազա, քանի որ ունենալու դեպքում կբավարարվեր հաշվելիության աքսիոմը համաձայն թեորեմ 2-ի: Մինչդեռ թեմայի սկզբում ցույց ենք տվել, որ այդ տարածությունը չի բավարարում հաշվելիության աքսիոմին:

Օրինակ 3: Դիտարկենք $(\mathbb{R}$, աջից կիս. ինտ.$)$ տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է, քանի որ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (ինչո՞ւ): Այժմ ենթադրենք, որ նրա համար գոյություն ունի հաշվելի B բազա: Նշանակում է ցանկացած $a \in \mathbb{R}$ կետի $[a,b)$ բաց շրջակայքի համար պետք է գոյություն ունենա $U \in B$ տարր, որ $a \in U \subset [a,b)$: Այսինքն $U \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի փոքրագույն տարր ի դեմս a-ի: Բայց $a \in \mathbb{R}$ կետերի բազմությունը (այսինքն $\mathbb{R}$-ը) ոչ հաշվելի բազմություն է, B-ն հաշվելի բազմություն չէ (հակասություն):

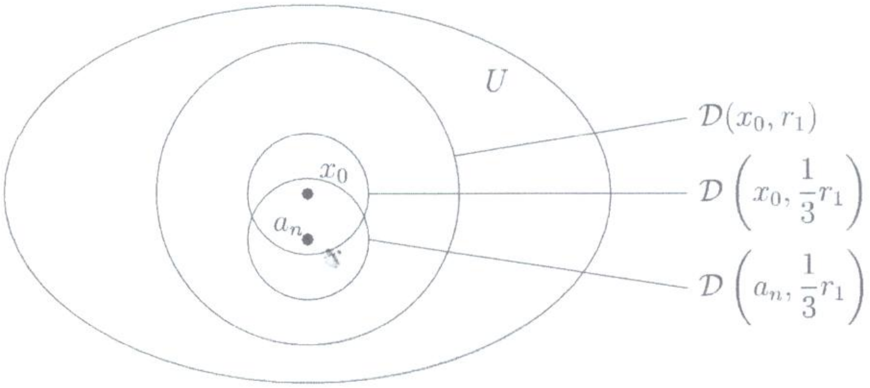
Մետրիկական տարածությունների դեպքում սեպարաբելությունը համարժեք է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Թեորեմ 7: Մետրիկական տարածությունը սեպարաբել է այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Ապացույց: Թեորեմ 5-ից հետևում մնում է ապացուցել պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք (X,ρ) մետրիկական տարածությունը սեպարաբել տարածություն է, և $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում: Ցույց տանք, որ բաց գնդերի $B = \{\mathcal{D}(a_n, r) \mid a_n \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը հաշվելի բազա է (X,ρ)-ի համար: Նախ պարզ է, որ B-ն հաշվելի է, քանի որ հաշվելի է (a_n, r) զույգերի բազմությունը համաձայն թեորեմ 3-ի:

Այժմ վերցնենք որևէ $x_0 \in X$ կետ և նրա որևէ U շրջակայք: Բավական է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{D}(a_n, r) \in B$ գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$: Դրանից կհետևի, որ (X,ρ)-ն բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին (ինչո՞ւ):

Ըստ կետի շրջակայքի և մետրիկական տոպոլոգիայի սահմանումների, գոյություն ունի $\mathcal{D}(x_0, r_1)$, $r_1 \in \mathbb{R}$ բաց գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(x_0, r_1) \subset U$: Ըստ թեորեմ 1-ի ապացույցում բերված դատողության կարող ենք համարել, որ $r_1 \in \mathbb{Q}$: Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(x_0, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը, պարզ է, որ $\mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Քանի որ $\bar{A} = X$, ուստի (համաձայն թեորեմ 4-ի) գոյություն ունի $a_n \in A$ կետ, որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$:



Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(a_n, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Իրոք, եթե $x \in \mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1)$, ապա $\rho(x, a_n) < \frac{1}{3}r_1 \Rightarrow \rho(x, x_0) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, x_0) < \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_1 < r_1$: Հետևաբար $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset U$: Մյուս կողմից, քանի որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$, ուստի $\rho(x_0, a_n) < \frac{1}{3}r_1$: Այսպիսով $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$, որտեղ $r = \frac{1}{3}r_1 \in \mathbb{Q}$: Նշանակում է $\{\mathcal{D}(a_n, r) \mid a_n \in A,\, r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը (X, ρ) տարածության տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: ■

Թեորեմ 8 : բոլոր $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան ~~[illegible]~~ տարածությունները

ա) բավարարում են հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին

բ) Լինդելյոֆյան տարածություններ են:

Ապացույց: Ունենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է համաձայն թեորեմ 5-ի: Ըստ թեորեմ 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^n$-ը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին, ուստի այն Լինդելյոֆյան տարածություն է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Հետևանք: Ցանկացած $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան մետրիկական տարածության ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել հաշվելի ենթածածկույթ:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 8-ի վերաբերյալ

8.1. Ապացուցել. $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Լուծում: Դիտարկելով կամայական $a\in\mathbb{R}$ կետը, ցույց տալ որ այդ կիսաբաց միջակայքերի $\{[a,x);\ x>a,\ x\in\mathbb{Q}\}$ ընտանիքը a կետի շրջակայքերի հենքն է:

8.2. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական $(X$, վերջ. լր.$)$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է, չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Լուծում: Օգտվել օրինակ 2-ում բերված դատողություններից:

8.3. Ապացուցել. $(\mathbb{Z}$, վերջ. լր.$)$ տարածությունը, որտեղ $\mathbb{Z}$-ը ամբողջ թվերի բազմությունն է, բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Լուծում: Օգտվելով թեմա 3-ի 3.8 խնդրից նախ ցույց տալ, որ $(\mathbb{Z}$, վերջ. լր.$)$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

8.4. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $(\mathbb{R}$, հաշվ. լր.$)$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Լուծում: Տես օրինակ 2-ը:

8.5. Բերել մետրիկական տարածություն, որը չի բավարարում հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

8.6. Ճի՞շտ է արդյոք որ գոյություն ունի կամայական հզորության X տոպոլոգիական տարածություն, որի յուրաքանչյուր միակետանոց ենթաբազմություն ամենուրեք խիտ է X-ում:

8.7. Ապացուցել. որ X տարածության տոպոլոգիան դիսկրետ տոպոլոգիան է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում գոյություն ունի միայն մի ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն և դա հենց X-ն է:

8.8. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական տոպոլոգիական տարածության կամայական երկու ամենուրեք խիտ ենթաբազմությունների ա) միավորումը, բ) հատումը ամենուրեք խիտ է:

8.9. Դիցուք A ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում: Ապացուցել. կամայական $U\subset X$ բաց ենթաբազմության դեպքում $A\cap U$ ենթաբազմության փակումը X-ում համընկնում է U-ի փակման հետ՝ $\overline{A\cap U}=\overline{U}$:

Լուծում: Դիտարկել կամայական $x\in\overline{U}$ կետ և այդ կետի պարունակող V բաց շրջակայք: Կիրառելով թեորեմ 4-ի մյուս [illegible] ստանք, որ $V \cap (A \cap \mathcal{U}) \neq \emptyset$ (դրանից կհետևեր, որ $\overline{\mathcal{U}} \subseteq A \cap \mathcal{U}$):

8.10. Ապացուցել, որ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] է:

Ցուցում: Դիցուք $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset X$ [illegible] [illegible] [illegible] են X-ում: Կիրառենք խնդիր 8.9-ը, վերցնելով $A = \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_2$: