

Թեմա 1

Բազմություններ, գործողությունները դրանց հետ (հատում, միավորում, տարբերություն), բազմությունների ընդհանրություն:

Բազմությունների արտապարկերումներ (ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ արտապարկերումներ):

Բազմությունների տեսության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորն է (1845-1918), որը 1878-1884 թվերի միջև իր 6 հիմնարար աշխատանքներով ճանապարհի բացեց մաթեմատիկայի այդ բաժնի համար: Նրան ժամանակակից գրեթե բոլոր նշանավոր մաթեմատիկոսները կան դրսևորում էին ցուցադրական անտարբերություն, կան էլ (հարկապես Շվարցը և Կրոնեկերը) բացահայտ թշնամություն Կանտորի նորարարական ջանքերի նկատմամբ: Պաշտոնապես բազմությունների տեսության ճանաչումը սկսվեց 1897 թվին, երբ Առաջին միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում Ժ. Ադամարը և Ա. Նուրվիցը մարմանչեցին այդ տեսության կարևոր կիրառություններ անալիզում:

Նշենք, որ մաթեմատիկայի այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են ընդհանուր տոպոլոգիան, չափականության և չափի տեսությունները, անխզելիորեն կապված են բազմությունների տեսության հետ և ի հայտ եկան նրա հետ գրեթե միաժամանակ:

Ուստի ընդհանուր տոպոլոգիայի դասընթացը սովորաբար սկսվում է բազմությունների տեսության մի որոշ, թեկուզև շար համառոտ ակնարկով:

Բազմությունների տեսության հիմքում ընկած է **բազմություն** հասկացությունը: Ըստ Կանտորի նշանավոր սահմանման՝ բազմություն ասելով՝ մենք հասկանում ենք մեր ինտուիցիայի կամ մտքի արդյունքում իրարից լավ տարբերվող զանազան օբյեկտների ամբողջություն: Կանգ չառնելով այսպեղից ծագող հնարավոր թեր-ըմբռնումների և հակաճառումների վրա՝ արձանագրենք միայն, որ այսուհետք մենք «բազմություն», «դաս», «ընդհանր», «համախմբություն», «ամբողջություն» տերմինները գործածելու ենք որպես հոմանիշներ:

Նաջորդ կարևոր հասկացությունը **բազմության տարրն** է: Բազմությունը կազմված է տարրերից և որոշվում է իր տարրերով. գրում ենք $x \in X$, եթե x օբյեկտը X բազմության տարր է: Սովորաբար վերջավոր բազմությունը տրվում է նրա տարրերի թվարկումով՝ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: Դիտարկվում է նաև դատարկ բազմություն. նշանակվում է \emptyset սիմվոլով և չունի տարրեր:

Եթե Y բազմության ամեն մի տարր նաև տարր է X բազմության համար, ապա Y -ը կոչվում է X -ի **ենթաբազմություն**: Ասում են նաև, որ Y -ը **ընկած է** X -ում, կամ Y -ը X -ի **մաս է**, և գրառում են $Y \subset X$: Նամարվում է, որ $\emptyset \subset X$ ցանկացած X -ի դեպքում:

Ընդունված է X բազմության \emptyset և X ենթաբազմությունները անվանել նրա **ոչ սեփական ենթաբազմություններ**:

Բնականաբար երկու X և Y բազմություններ համընկնում են (նույնն են) այն և

միայն այն դեպքում, երբ նրանք կազմված են միևնույն փարբերից: Դա գրառվում է $X = Y$ փեսքով և կարդացվում է ինչպես վերը նշվեց (և ոչ թե X -ը հավասար է Y -ին): Երբեմն $X = Y$ նույնականությունը հասարակելու նպատակով ցույց է փրվում, որ $X \subset Y$ և $Y \subset X$:

Նաճախ X բազմությունից նրա որևէ Y ենթաբազմություն առանձնացվում է այսպես կոչված **նկարագրական եղանակով**՝ գրառվում է

$$Y = \{x \in X \mid (x \text{ փարբի վերաբերյալ պահանջ})\}$$

Կարդացվում է. Y -ը կազմված է X -ի այն բոլոր փարբերից, որոնք բավարարում են նշված պահանջին:

Օրինակ 1: Դիցուք $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ բոլոր զույգ թվերի բազմությունն է: Պարզ է, որ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ և $2\mathbb{Z}$ -ը կարող է գրառվել՝ $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 2-ի վրա}\}$:

Երբեմն «ավելի ծավալուն» բազմությունը նկարագրվում է (սահմանվում է) «ավելի նվազ ծավալով» բազմության միջոցով:

Օրինակ 2: \mathbb{R}^2 կոորդինատային հարթությունը կարող է ներկայացվել \mathbb{R} թվային ուղղի միջոցով, որպես թվագույգերի բազմություն՝ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$:

Բազմությունների համար սահմանվում են **հատման, միավորման և փարբերության գործողություններ**: Օգտվելով նկարագրական եղանակից՝ երկու բազմությունների հատման, միավորման և փարբերության սահմանումները կարելի է գրառել համառոտ՝

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ կամ } x \in B\}, \quad A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}:$$

Այս գործողություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով. ցանկացած A, B, C բազմությունների դեպքում՝

ա) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$

բ) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad A \cup B = B \cup A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
 $A \cap B = B \cap A;$

բ) հատկությունները կոչվում են \cup և \cap գործողությունների զուգորդականության և փոխադասականության հատկություններ:

գ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$

գ) հատկությունները կոչվում են բաշխական հատկություններ համապատասխանաբար միավորման և հատման նկատմամբ:

դ) $A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2), \quad A \setminus (B_1 \cap B_2) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2):$

դ) նույնությունները կոչվում են դե Մորգանի բանաձևեր:

Օրինակ 3: Ապացուցենք դե Մորգանի առաջին բանաձևը:

Այդ նպատակով ցույց տանք, որ $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ բազմության յուրաքանչյուր տարր պարկանում է $(A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$ բազմությանը և հակառակը՝

$$x \in A \setminus (B_1 \cup B_2) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \cup B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \text{ և } x \notin B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B_1 \\ x \in A \setminus B_2 \end{cases} \Rightarrow x \in (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$$

Այս օրինակում հակառակը ցույց տալու համար նոր դափողություններ անելու կարիք չկա. բոլոր քայլերը հակադարձվում են վերջից դեպի սկիզբ: Փաստորեն բոլոր \Rightarrow անցումներն ունեն \Leftrightarrow համարժեքության բնույթ: ■

Եթե ունենք (վերջավոր քանակով) A_1, A_2, \dots, A_n բազմություններ, ապա նրանց հատումը և միավորումը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ որտեղ } i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid \text{գոյություն ունի } i, \text{ որ } x \in A_i\}$$

Այս դեպքում վերը բերված դե Մորգանի բանաձևերը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i),$$

որտեղ A, B_1, B_2, \dots, B_n -ը կամայական բազմություններ են:

Նաճախ դիտարկվում են բազմություններ, որոնց տարրերը իրենք ևս բազմություններ են: Այդպիսի բազմությունը կոչվում է **բազմությունների ընդամենը**:

Օրինակ 4: Դիտարկենք \mathbb{R}^2 հարթության մեջ գտնվող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Սա բազմությունների ընդամենի է, որի տարրերը (ուղիղները) իրենք ևս բազմություններ են կազմված \mathbb{R}^2 -ի կետերից:

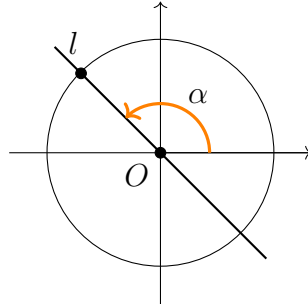
Դիցուք I -ն բազմություն է, որի ամեն մի $i \in I$ տարրի համապատասխանեցված է որևէ X_i բազմություն: Այս X_i բազմություններից կազմված բազմությունը (բազմությունների ընդամենիքը) նշանակվում է $\{X_i; i \in I\}$ և կոչվում է **բազմությունների ինդեքսավորված ընդամենիք**: Այսպես I -ն կոչվում է **ինդեքսների բազմություն**:

Նշենք, որ բազմությունների ընդամենիքը ինդեքսավորելիս սովորաբար որպես ինդեքսավորվող բազմություն ընտրում են արդեն հայտնի և լավ ընկալվող որևէ բազմություն կամ նրա որևէ մասը:

Օրինակ, թվերից կազմված հաջորդականության տարրերը սովորաբար ինդեքսավորում են (համարակալում են) կամ բոլոր բնական թվերով, կամ այդ բազմության որևէ վերջավոր մասով:

Օրինակ 5: Ինդեքսավորենք կոորդինատային \mathbb{R}^2 հարթության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Նկատենք, որ ամեն մի այդպիսի ուղիղ

միարժեքորեն որոշվում է այն ամենափոքր α անկյունով, որով պետք է պտտել OX առանցքը O կենտրոնի շուրջը ժամսլացին հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի l ուղղի հետ:

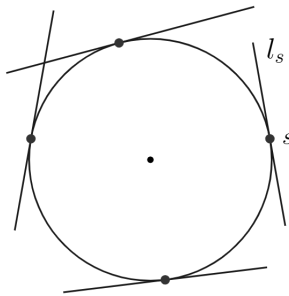


Ուստի ավյալ բազմության փարերը կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Այսպեղից նաև ստանում ենք, որ ցանկացած շրջանագծի կետերի բազմությունը նույնպես կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Օրինակ 6: Դիտարկենք \mathbb{R}^2 հարթության մեջ այն բոլոր ուղիղներից կազմված L բազմությունը, որոնք գտնվում են կոորդինատների 0 սկզբնակետից 1 միավոր հեռավորության վրա: Ցույց փանք, թե ինչպես կարելի է ինդեքսավորել L -ը: Նկատենք, որ այդ բազմության ամեն մի փարը (ուղիղ) ունի ճիշտ մի ընդհանուր կետ $S = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ շրջանագծի հետ (շոշափման կետը): Նշանակելով l_s -ով շրջանագծի $s \in S$ կետով փարված շոշափողը, կարող ենք L բազմությունը ներկայացնել որպես բազմությունների ինդեքսավորված ընդամիք՝ $L = \{l_s; s \in S\}$:

Այս օրինակում որպես ինդեքսների բազմություն հանդես եկավ միավոր շրջանագծի բոլոր կետերից կազմված S բազմությունը:



Նկատենք, որ ամեն մի կոնկրետ դեպքում ինդեքսավորող բազմության ընտրությունը կատարվում է (ոչ միակ եղանակով) ըստ նպատակահարմարության:

Նաշվի առնելով դե Մորգանի բանաձևերի կարևորությունը՝ նշենք, որ դրանք ճիշտ են ցանկացած ինդեքսավորված բազմությունների դեպքում. եթե ունենք որևէ $\{X_i; i \in I\}$ ինդեքսավորված ընդամիք և X բազմություն, ապա

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i), \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \quad (1)$$

Ապացուցենք (1) նույնություններից երկրորդը.

$$x \in \left(X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i \right) \Leftrightarrow \left(x \in X \text{ և } x \notin \bigcap_{i \in I} X_i \right) \Leftrightarrow (x \in X \text{ և գոյություն ունի } i_0 \in I \text{ ինդեքս, որ } x \notin X_{i_0}) \Leftrightarrow x \in (X \setminus X_{i_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \quad \blacksquare$$

Եթե Y -ը X -ի ենթաբազմություն է, ապա $X \setminus Y$ -ը կոչվում է **Y -ի լրացում X -ում**: Մասնավոր դեպքում, երբ $\{X_i; i \in I\}$ ընդհանրի բոլոր X փաթեթները միևնույն X բազմության ենթաբազմություններ են՝ $X_i \subset X$, դե Մորգանի (1) բանաձևերն ընդունում են սփառահաման հեշտ ձև. միավորման լրացումը լրացումների հափումն է, իսկ հափման լրացումը լրացումների միավորումն է:

Տարբեր բազմություններ միմյանց հետ համեմատելու միջոցը **բազմությունների արտապատկերումներն** են:

Եթե X բազմության ամեն մի x փաթեթի համապատասխանեցված է Y բազմության որևէ y փաթեթ, ապա ասում են, որ փրված է X բազմության $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերում Y բազմության մեջ:

Այս դեպքում y փաթեթը կոչվում է x փաթեթի կերպար և նշանակվում է $y = f(x)$: Ինքը՝ X բազմությունը կոչվում է f արտապատկերման **որոշման փիրույթ**, իսկ Y -ը՝ f -ի **արժեքների փիրույթ**: Ամեն մի ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f(A) \subset Y$ կերպարը, որպես Y -ի ենթաբազմություն՝ կազմված Y -ի այն բոլոր y փաթեթներից, որոնց համար գոյություն ունի $x \in X$ փաթեթ, որ $f(x) = y$: Այսպիսով՝ եթե $A \neq \emptyset$, ապա կրճատ՝ $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ և } f(x) = y\}$: Իսկ $A = \emptyset$ դեպքում համարվում է $f(\emptyset) = \emptyset$:

Եթե $Y \subset X$, ապա դիտարկվում է $i : Y \rightarrow X$ արտապատկերում՝ սահմանելով $i(y) = y, \forall y \in Y$ փաթեթի համար: Ընդունված է i արտապատկերումն անվանել **Y բազմության ներդրում X բազմության մեջ**:

Ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f^{-1}(B)$ **նախակերպարը** $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերման դեպքում որպես X -ի ենթաբազմություն՝ կազմված X -ի այն բոլոր x փաթեթներից, որ $f(x) \in B$: Կրճատ՝ $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$: Պարզ է, որ $f^{-1}(Y) = X$, և համարվում է $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ցանկացած $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերման դեպքում:

Նշենք նաև, որ ընդունված է Y -ի մի փաթեթ պարունակող ամեն մի $\{y_0\}$ ենթաբազմության $f^{-1}(\{y_0\})$ նախակերպարը X -ում գրառել ավելի պարզ՝ $f^{-1}(y_0)$ տեսքով և անվանել y_0 փաթեթի նախակերպար $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերման դեպքում:

Օրինակ 7: Դիցուք X և Y բազմությունները կազմված են երկուական փաթեթներից՝ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$: Դիտարկենք $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $f(x_1) = f(x_2) = y_2$:

Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք գրնել X -ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների կերպարները Y -ում և Y -ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների նախակերպարները X -ում:

Թեորեմ 1: Ամեն մի $f : X \rightarrow Y$ արտապարկերման և կամայական $X_1, X_2 \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), \quad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2), \\ f(X_1) \setminus f(X_2) \subset f(X_1 \setminus X_2):$$

Ապացուցենք, օրինակ, դրանցից երկրորդը՝

$$y \in f(X_1 \cap X_2) \Rightarrow (\exists x \in X_1 \cap X_2 \text{ և } f(x) = y) \Rightarrow (x \in X_1, x \in X_2 \text{ և } f(x) = y) \Rightarrow \\ (y \in f(X_1) \text{ և } y \in f(X_2)) \Rightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2):$$

Ներկաբար $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$: ■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$: Իրոք, օրինակ 7-ում վերցնելով $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$ ստանում ենք $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, ուստի $f(X_1 \cap X_2) = \emptyset$, մինչդեռ $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y_2\} \neq \emptyset$: Ներկաբար արեղի չունի $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ ներդրում:

Նշենք, որ [թեորեմ 1](#)-ում բերված առաջին երկու առնչությունները ճիշտ են X բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{X_i; i \in I\}$ ինդեքսավորված ընդամիքի դեպքում՝

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

Թեորեմ 2: Կամայական $f : X \rightarrow Y$ արտապարկերման և $Y_1, Y_2 \subset Y$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2), \\ f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2):$$

Ապացուցենք դրանցից առաջինը՝

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in Y_1 \\ f(x) \in Y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(Y_1) \\ x \in f^{-1}(Y_2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ Y բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{Y_i; i \in I\}$ ինդեքսավորված ընդամիքի դեպքում

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \quad (2)$$

Թեորեմ 3: Կամայական $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերման և $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \quad (3)$$

Ապացուցում: Իրոք, $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B), \text{ որ } f(x) = y) \Rightarrow (f(x) \in B) \Rightarrow y \in B$: Ներկայացնենք $f(f^{-1}(B)) \subset B$: Նման ձևով՝ $x \in A \Rightarrow (f(x) \in f(A)) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$: Ներկայացնենք $A \subset f^{-1}(f(A))$: ■

Վերը բերված **օրինակ 7**-ում վերցնելով $A = \{x_1\}$, $B = \{y_1, y_2\}$ ՝ համոզվում ենք, որ ընդհանուր դեպքում (3) բանաձևերում ներդրման \subset նշանները չեն կարող փոխարինվել համընկնման $=$ նշանով:

Սահմանում: $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերումը կոչվում է **ներդիր** կամ **ինյեկտիվ** արտապատկերում, եթե X -ի $\forall x_1 \neq x_2$ տարրերի դեպքում $f(x_1) \neq f(x_2)$: Այնուհետև, $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերումը կոչվում է **վրադիր** կամ **սյուրյեկտիվ** արտապատկերում, եթե $\forall y \in Y$ տարրի համար $\exists x \in X$ տարր, որ $f(x) = y$:

Նշենք, որ արտապատկերման սյուրյեկտիվությունը համարժեք է $f(X) = Y$ համընկնմանը:

Նկատենք, որ **օրինակ 7**-ում բերված f արտապատկերումը ոչ ինյեկտիվ է և ոչ էլ սյուրյեկտիվ է:

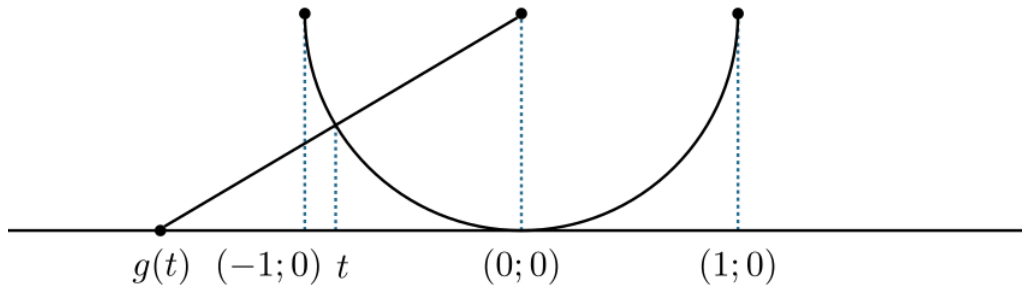
Միաժամանակ ինյեկտիվ և սյուրյեկտիվ արտապատկերումը կոչվում է **բիյեկտիվ** կամ **փոխմիարժեք** արտապատկերում:

Ցանկացած X բազմության համար $x \mapsto x$, $x \in X$ համապատասխանությունը որոշում է $X \rightarrow X$ փոխմիարժեք արտապատկերում: Այն կոչվում է X -ի **նույնական արտապատկերում** և նշանակվում է id կամ 1_X սիմվոլներով:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի \mathbb{Z} բազմության $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $f(n) = n + 1$ բանաձևով, փոխմիարժեք է (հիմնավորե՛ք) և տարբեր է $1_{\mathbb{Z}}$ նույնական արտապատկերումից:

Ամեն մի փոխմիարժեք $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերման համար սահմանվում է նրա **հակադարձ** $f^{-1} : Y \rightarrow X$ արտապատկերումը. որպես $\forall y \in Y$ տարրի $f^{-1}(y)$ կերպար սահմանվում է X -ի այն x տարրը, որ $f(x) = y$:

Օրինակ 9: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք արտապատկերում $(-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$: Այն կարող է սահմանվել անալիտիկորեն՝ $f(t) = \text{tg} \frac{\pi}{2} t$, $t \in (-1, 1)$ բանաձևով, կամ երկրաչափորեն՝ ստորև նկարագրվող եղանակով: Գծագրում $(-\infty, \infty)$ թվային ուղիղը պատկերված է որպես OX կոորդինատային առանցք:



Դիտարկենք $M(0; 1)$ կենտրոնով և 1 շառավղով կիսաշրջանագիծ առանց իր երկու $A(-1; 1)$ և $B(1; 1)$ ծայրակետերի: Այժմ կամայական $t \in (-1; 1)$ կետի $g(t)$ կերպարը սրանալու համար t կետից ուղղահայաց բարձրանում ենք մինչև կիսաշրջանագծի T կետը և ապա գտնում ենք $g(t) \in (-\infty, +\infty)$ կետը՝ որպես MT ճառագայթի հապման կետ OX առանցքի հետ: Առաջարկում ենք ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ վերը սահմանված $f, g : (-1; 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ արտապատկերումները փոխմիարժեք են, ինչպես նաև նկարագրել նրանց հակադարձ արտապատկերումները: Նկատենք նաև, որ f -ը և g -ն նույնը չեն:

Եթե ունենք $f : X \rightarrow Y$ և $g : Y \rightarrow Z$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է նրանց $g \circ f : X \rightarrow Z$ **համադրույթ** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ բանաձևով:

Եթե $f : X \rightarrow Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում է, ապա ինչպես արդեն գիտենք, գոյություն ունի նրա հակադարձ $f^{-1} : Y \rightarrow X$ արտապատկերումը և իմաստ ունեն $f^{-1} \circ f$ և $f \circ f^{-1}$ համադրույթները: Նեշտ է տեսնել, որ

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y:$$

Ցանկացած $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow T$ արտապատկերումների դեպքում իմաստ ունեն $(h \circ g) \circ f$ և $h \circ (g \circ f)$ համադրույթները, որոնք որոշում են միևնույն $X \rightarrow T$ արտապատկերումը՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: Իրոք, նշանակելով $h \circ g$ և $g \circ f$ համադրույթները համապատասխանաբար u և v , ցանկացած $x \in X$ տարրի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (u \circ f)(x) = u(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \\ ((h \circ (g \circ f))(x) &= (h \circ v)(x) = h(v(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) : \end{aligned}$$

Ներկաբար՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 1-ի վերաբերյալ

1.1. Կամայական A, B, C բազմությունների համար ապացուցեք հետևյալ նույնությունները.

ա) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

բ) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

գ) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

դ) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

1.2. Ցույց տվեք, որ [օրինակ 6](#)-ում ուղիղների L ընդամենը կարելի է ուղղակի ինդեքսավորել նաև $[0, 2\pi)$ միջակայքի թվերով:

1.3. Դիտարկենք \mathbb{R}^3 տարածության սկզբնակետով անցնող բոլոր հարթությունների ընդամենը: Այս ընդամենի համար գտեք որևէ ինդեքսավորող բազմություն:

1.4. Ապացուցեք դե Մորգանի (1) բանաձևերից առաջինը:

1.5. [Թեորեմ 1](#)-ի բերված ապացույցը կազմված է որպես 4 հետևությունների հաջորդականություն: Պարզե՞ք դրանցից ո՞րը չի հակադարձվում:

1.6. Օգտվելով [օրինակ 7](#)-ում սահմանված $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերումից և X -ում ընտրելով X_1 և X_2 հարմար ենթաբազմություններ՝ ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում [թեորեմ 1](#)-ի $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ ներդրումը չի վերաժվում աջ և ձախ մասերի համընկման:

1.7. Ապացուցեք [թեորեմ 1](#)-ի երեք նույնություններից առաջինը և երրորդը:

1.8. Ապացուցեք [թեորեմ 2](#)-ի երկրորդ և երրորդ նույնությունները:

1.9. [Թեորեմ 3](#)-ի երկու պնդումների ապացույցներում ո՞ր հետևումներն են, որ չեն հակադարձվում:

1.10. Ապացուցեք (2) նույնությունները:

1.11. Դիտարկենք երկու հարց կապված [թեորեմ 3](#)-ի հետ. ինչպիսի՞ն պետք է լինի $f : X \rightarrow Y$ արտապատկերումը, որ փեղի ունենա

ա) $f^{-1}(f(A)) = A$ համընկում ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում,

բ) $f(f^{-1}(B)) = B$ համընկում ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության դեպքում:

Ապացուցեք, որ ա) դեպքում անհրաժեշտ և բավարար պայման է f արտապատկերման ինյեկտիվությունը, իսկ բ) դեպքում՝ f -ի սյուրյեկտիվությունը:

- 1.12. Նշանակենք h -ով $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ արտապատկերումների $g \circ f : X \rightarrow Z$ համադրույթը՝ $h = g \circ f$: Ապացուցեք, որ ամեն մի $T \subset Z$ ենթաբազմության դեպքում $h^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T))$:
- 1.13. Դիցուք $f : X \rightarrow Y$ և $g : Y \rightarrow Z$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $g \circ f = 1_X$: Ապացուցեք, որ f -ը ներդիր, g -ն վրադիր արտապատկերումներ են:
- 1.14. Դիցուք $f : X \rightarrow Y$ և $g : Y \rightarrow X$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f \circ g = 1_Y, g \circ f = 1_X$: Ապացուցեք, որ f -ը և g -ն փոխմիարժեք, մեկը մյուսին հակադարձ արտապատկերումներ են: