Թեմա 2

Բազմությունների դեկարտյան (ուղիղ) արտադրյալ, արտապատկերումների ուղիղ արտադրյալ, անկյունագծային արտապատկերում: Համարժեքության հարաբերություն բազմության վրա, ֆակտոր-բազմություն:

Գոյություն ունի տրված բազմության կամ մի քանի բազմությունների միջոցով նոր բազմություն կառուցելու երեք հիմնական եղանակ: Դրանք են՝

ա) բազմությունից ենթաբազմության առանձնացումը,

բ) բազմությունների ուղիղ (դեկարտյան) բազմապատկումը,

գ) տվյալ բազմության ֆակտոր-բազմության կառուցումը:

Սրանցից առաջինը քննարկվեց թեմա 1-ում: Այժմ մյուս երկուսը:

Երկու՝ A և B ոչ դատարկ **բազմությունների դեկարտյան** կամ **ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է այն բազմությունը (նշանակվում է $A \times B$), որի տարրերը բոլոր (a, b) կարգավորված զույգերն են, որտեղ $a \in A$, $b \in B$:

Մի քանի $A_1, \ldots, A_n$ ոչ դատարկ **բազմությունների ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է $\{(a_1, \ldots a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ բազմությունը և նշանակվում է $A_1 \times \cdots \times A_n$ կամ $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$: Այստեղ $(a_1, \ldots, a_n)$-ը $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից մեկական վերցրած տարրերի հաջորդականություն է: Մասնավոր դեպքում, երբ $A_1 = \cdots = A_n = A$, նրանց ուղիղ արտադրյալը նշանակվում է A^n: Եթե $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից որևէ մեկը դատարկ բազմություն է, ապա նրանց արտադրյալ է համարվում $\varnothing$ դատարկ բազմությունը:

Թեորեմ 1: Կամայական A, B, C, D-ն ոչ դատարկ բազմությունների համար տեղի ունեն հետևյալ համարժեքությունները.

ա) $(A \times C = B \times D) \Leftrightarrow A = B$ և $C = D$

բ) $(A \times C \subset B \times D) \Leftrightarrow A \subset B$ և $C \subset D$:

Երկու պնդումներն անմիջականորեն հետևում են սահմանումներից:

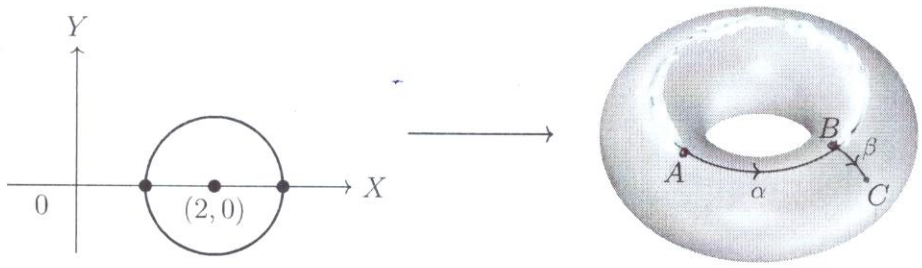
Դիտարկենք

Օրինակ 1: $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ արտադրյալը (որտեղ $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է) կազմված է իրական թվերի բոլոր $(r_1, \ldots, r_n)$ հաջորդականություններից: Կարող է նույնացվել n-չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային գծային տարածության վեկտորների բազմության հետ:

Որպեսզի պարզ լինի հաջորդ օրինակը, դիտարկենք այն մակերևույթը, որն առաջանում է, երբ որևէ շրջանագիծ, օրինակ՝ $(2, 0)$ կենտրոնով և 1 շառավղով

$(x-2)^2+y^2=1$ շրջանագիծը, պտտվում է նրան չհատող OY առանցքի շուրջը $\mathbb{R}^3$ տարածության մեջ՝ կատարելով մեկ լրիվ պտույտ: Այսպիսի մակերևույթները կոչվում են **տոր** և ունեն փրկարար օղակի տեսք: Պարզ է, որ շրջանագծի ամեն մի (x,y) կետ պտույտի ընթացքում գծում է շրջանագիծ: Այն կոչվում է **տորի զուգահեռական**: Տորն ամբողջովին ծածկված է իր զուգահեռականներով: Պարզ է նաև, որ OY առանցքով անցնող ամեն մի հարթություն հատում է տորը շրջանագծով: Դրանք նույնպես ամբողջովին ծածկում են տորը և կոչվում են **տորի միջօրեականներ**:

Նկատենք, որ տորի որևէ սևեռված A կետից կարելի է տեղափոխվել տորի ցանկացած այլ կետ՝ կատարելով տարածության մեջ երկու պտույտ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$ անկյուններով: Ստորև նկարում α և β անկյունները պատկերված են տորի զուգահեռականների և միջօրեականների AB և BC աղեղների տեսքով: Ընդ որում, աղեղները հաշվարկվում են սևեռված A կետից, սևեռված ուղղություններով և սևեռված հաջորդականությամբ: Այժմ տորի C կետ տեղափոխվելու համար նախ A կետից անջատվում է α աղեղ զուգահեռականով, այնուհետև B կետից՝ β աղեղ միջօրեականով: Այսպիսով կամայական տորի ցանկացած կետ միարժեքորեն ինդեքսավորվում է (α,β) թվազույգով, որտեղ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$:

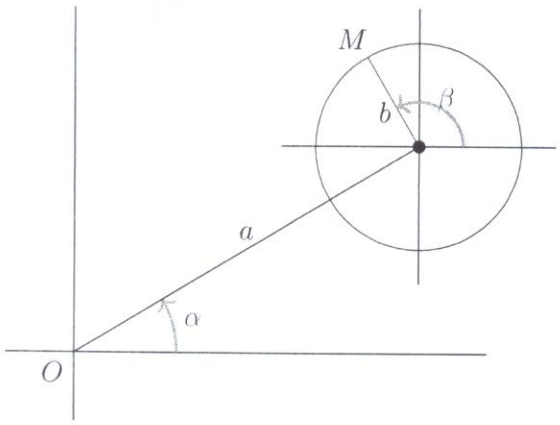


Օրինակ 2: Դիտարկենք $S\times S$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ S-ը որևէ սևեռված շրջանագծի բոլոր կետերի բազմությունն է: Այն կոչվում է **վերացական տոր**: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $S\times S$ վերացական տորի բոլոր կետերի և կամայական տորի (որպես մակերևույթի) բոլոր կետերի միջև:

Թեմա 1-ի օրինակ 4-ից գիտենք, որ կամայական S շրջանագծի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր $[0,2\pi)$ անկյուններով: Հետևաբար $S\times S$-ի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր (α,β) թվազույգերով, որտեղ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$: Բայց ինչպես տեսանք, կամայական տորի կետերը նույնպես ինդեքսավորվում են այդպիսի թվազույգերով: Ուստի ցանկացած տոր կարող է դիտվել որպես $S\times S$ վերացական տորի երկրաչափական մոդել:

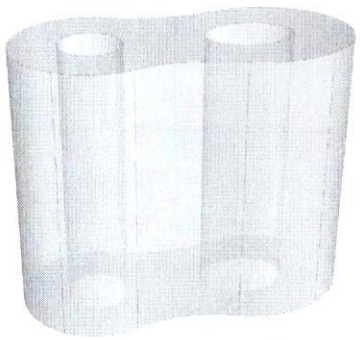
Օրինակ 3: Կրկնակի ճոճանակ կոչվում է միմյանց հետ շարժական ձևով միացված a և b ձողերից կազմված սարքը: Դրանցից a-ն ազատ պտտվում է իր O անշարժ ծայրակետի շուրջը, իսկ b-ն՝ a-ի հետ միացման շարժական կետի շուրջը: Հեշտ է տեսնել, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն կրկնակի

ճոճանակի բոլոր $M(\alpha, \beta)$ դիրքերի բազմության և փորի բոլոր կետերի բազմության միջև:



Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, իսկ I-ն $[0,1]$ հատվածն է: $X \times I$ արտադրյալը կոչվում է **գլան X հիմքով**: Նրա $X \times \{0\}$ և $X \times \{1\}$ ենթաբազմությունները կոչվում են **գլանի ստորին** և **վերին հիմքեր**: Մասնավոր դեպքում, երբ X-ը որևէ հարթ պատկեր է, $X \times I$ բազմությունը երկրաչափորեն կարող է պատկերվել որպես գլանաձև մարմին $\mathbb{R}^3$-ում:

Օրինակ 4: Ստորև պատկերված է $X \times I$ գլանի մասերի $\mathbb{R}^3$-ում: Երբ X հիմքը սահմանի հարթության շրջանաձև փիրույթի տեսք, որից հեռացված են երկու ավելի փոքր շրջանաձև փիրույթներ:



$X \times \{1\}$

$X \times I$

$X \times \{0\}$

Թեորեմ 2: Ցանկացած A, B, C, D բազմությունների դեպքում

ա) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

բ) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$,

գ) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

դ) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ մյուսները թողնելով ընթերցողին.

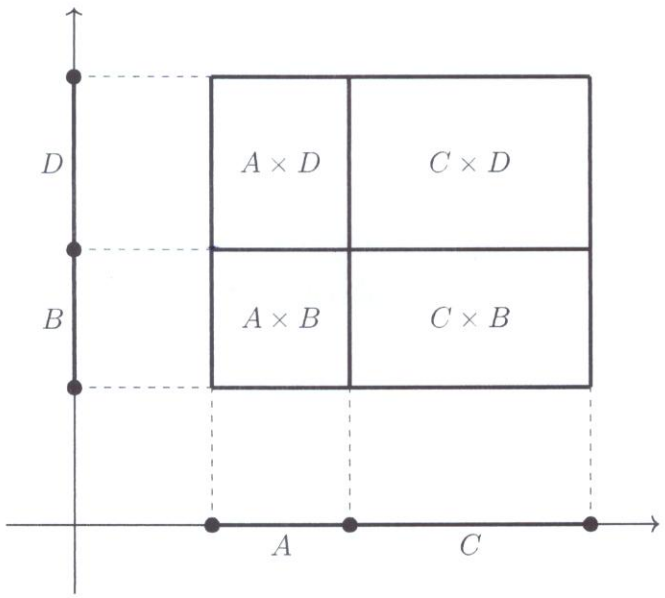
$$x \in (A \times B) \cup (C \times D) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in A \times B \\ x \in C \times D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \exists\, a \in A \text{ և } b \in B, \text{ որ } x = (a,b) \\ \exists\, c \in C, \text{ և } d \in D, \text{ որ } x = (c,d) \end{array}\right. \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \cup C \text{ և } b \in B \cup D \\ c \in A \cup C \text{ և } d \in B \cup D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} (a,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \\ (c,d) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (A \cup C) \times (B \cup D) \;\Leftrightarrow\; ((A \times B) \cup (C \times D)) \subset ((A \cup C) \times (B \cup D))$$

■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$: Դա ցույց տալու համար բերենք օրինակ:



Գծագրում A, B, C, D-ն թվային ուղղի հատվածներ են, բ)-ի ձախ մասը $A \times B$ և $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, աջ մասը՝ $A \times B$, $A \times D$, $C \times B$, $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, և դրանք նույնը չեն: ■

Բազմությունների $X \times Y$ արտադրյալի համար սահմանվում են $P_X : X \times Y \to X$ և $P_Y : X \times Y \to Y$ արտապատկերումներ $P_X(x,y) = x$ և $P_Y(x,y) = y$, $(x,y) \in X \times Y$ բանաձևերով: Դրանք կոչվում են $X \times Y$-ի **կանոնական պրոյեկցիաներ** համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ արտադրիչների վրա:

Այժմ քննարկենք երկու **արտապատկերումների արտադրյալ** հասկացությունը. եթե ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1$ և $f_2 : X_2 \to Y_2$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում՝ $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ բանաձևով (կոչվում է f_1-ի և f_2-ի արտադրյալ): Այս f_1, f_2, $f_1 \times f_2$ արտապատկերումների կանոնական պրոյեկցիաները տրվում են երկու կոմուտատիվ դիագրամով՝

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_1}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_1}"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_2}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_2}"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Առաջին դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանակում է, որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_1 \circ P_{X_1}$ համադրությունները որոշում են միևնույն $X_1 \times X_2 \to Y_1$ արտապատկերումը, իսկ երկրորդ դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանակում է, որ նույնն են $P_{Y_2} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_2 \circ P_{X_2}$ համադրությունները:

Ցույց տանք առաջինի կոմուտատիվությունը. կամայական $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ զույգի համար մի կողմից ունենք

$$(P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2))(x_1, x_2) = P_{Y_1} \circ ((f_1 \times f_2)(x_1, x_2)) = P_{Y_1}(f_1(x_1), f_2(x_2)) = f_1(x_1),$$

իսկ մյուս կողմից ունենք

$$(f_1 \circ P_{X_1})(x_1, x_2) = f_1(P_{X_1}(x_1, x_2)) = f_1(x_1):$$

Ուստի $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ P_{X_1}$: ■

Սահմանվում է բազմությունների ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X_i \to Y_i$ արտապատկերումների

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$$

արտադրյալը՝

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)), \quad \text{որտեղ } x_i \in X_i$$

բանաձևով:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1,\ f_2 : X_2 \to Y_2$ կամայական արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A_1 \subset X_1,\ A_2 \subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում
$(f_1 \times f_2)(A_1 \times A_2) = f_1(A_1) \times f_2(A_2)$,

բ) ցանկացած $B_1 \subset Y_1$ և $B_2 \subset Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում
$(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ թողնելով ա)-ի ապացուցումը ընթերցողին. $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \Rightarrow (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \Rightarrow (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2 \Rightarrow f_1(x_1) \in B_2$ և $f_2(x_2) \in B_2 \Rightarrow x_1 \in f_1^{-1}(B_1)$ և $x_2 \in f_2^{-1}(B_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \in f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Այսպիսով ստացանք, որ $(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \subset f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Հակառակ ներդրումը հետևում է նրանից, որ իրականում բոլոր $\Rightarrow$ անցումները համարժեքություններ են: ■

Այժմ դիտարկենք արտապատկերումների ևս մի կառույց: Եթե ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ, որոնց որոշման տիրույթները նույն X բազմությունն է, ապա սահմանվում է $X \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ համադրումով:

Այդ արտապատկերումը նշանակվում է $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ և կոչվում է f_1-ով և f_2-ով ծնված **անկյունագծային արտապատկերում**: Այսպիսով $(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$:

Անկյունագծային արտապատկերում անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ մասնավոր $X = Y_1 = Y_2 = [a, b]$, $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_{[a,b]}$ դեպքում $[a, b]$ հատվածի կերպարը (f_1, f_2) արտապատկերման դեպքում $[a, b] \times [a, b]$ քառակուսու $\{(x, x) \mid x \in [a, b]\}$ անկյունագիծն է:

Նման ձևով սահմանվում է ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X \to Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ արտապատկերումներով ծնված անկյունագծային $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ արտապատկերումը՝ $(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ բանաձևով:

Թեորեմ 4: Ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $(f_1, f_2)(A) \subset f_1(A) \times f_2(A)$,

բ) ցանկացած $B_1 \in Y_1$ և $B_2 \in Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում $(f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն:

$$x \in (f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \Leftrightarrow (f_1, f_2)(x) \in B_1 \times B_2 \Leftrightarrow (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2$$
$$\Leftrightarrow f_1(x) \in B_1 \text{ և } f_2(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(B_1) \text{ և } x \in f_2^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2):$$

■

Այժմ [illegible]
ֆակտոր-բազմություն հասկացությունը:

Դիցուք՝ X բազմությունը ներկայացված է իր մի քանի զույգ առ զույգ չհատվող, ոչ դատարկ X_i ենթաբազմությունների միավորման տեսքով՝ $X = \cup X_i$: Այսպիսով $X_i \subset X$, $X_i \neq \varnothing$ ցանկացած $i \in I$ ինդեքսի դեպքում և $X_i \cap X_j = \varnothing$ ցանկացած $i \neq j$ դեպքում:

Այս դեպքում ասում են, որ ունենք X **բազմության տրոհում** $\{X_i\}$, $i \in I$ ենթաբազմությունների:

Դիտարկենք նոր՝ $F(X)$ բազմություն (բազմությունների ընտանիք), որի տարրերը X-ի X_i ենթաբազմություններն են: Այն կոչվում է X բազմության **ֆակտոր-բազմություն** ծնված X-ի տվյալ տրոհումով:

Օրինակ 5: Դիցուք X-ը ԵՊՀ բոլոր ուսանողների բազմությունն է, իսկ X_1, X_2, $\ldots$, X_{20}-ը նրա ենթաբազմություններն են ըստ ֆակուլտետների (համարենք, որ տվյալ պահին ֆակուլտետների քանակը 20 է): Այս դեպքում $F(X) = \{X_1, X_2, \ldots, X_{20}\}$:

Պատկերավորության համար թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն՝ կարող ենք $F(X)$-ը նույնացնել ԵՊՀ-ի բոլոր ֆակուլտետների բազմության հետ:

Նկատենք, որ նույն X բազմությունից կարելի է ստանալ նաև այլ ֆակտոր-բազմություններ: Դիտարկելով ԵՊՀ ուսանողների բազմության տրոհումը ըստ կուրսերի (1-ին, 2-րդ, 3-րդ, 4-րդ կուրսեր բակալավրիատում և 5-րդ, 6-րդ կուրսեր մագիստրատուրայում)՝ կստանանք մի նոր ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը կարելի է ինդեքսավորել բնական թվերի բազմության $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ենթաբազմության տարրերով:

Քննարկված երկու դեպքերից յուրաքանչյուրում, ելնելով պատկերավորության նկատառումներից՝ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացրինք **մոդելի** միջոցով: Մոդելի ընտրությունը նպատակահարմարության կամ ճաշակի հարց է: Բայց պարտադիր է, որ հաստատված լինի որոշակի փոխմիարժեք համապատասխանություն իրական ֆակտոր-բազմության և տվյալ մոդելի տարրերի միջև:

Դիցուք ունենք X բազմություն, նրա որևէ $\{X_i, i \in I\}$ տրոհում, և $F(X)$-ը X-ի ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանվում է $P : X \to F(X)$ կանոնական արտապատկերում, որպես $x \in X$ կետի $P(x)$ կերպար վերցվում է $F(X)$-ի այն X_i տարրը, որ $x \in X_i$: Պարզ է, որ P-ն սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և $F(X)$-ի տարրերի նախակերպարները որոշում են X-ի $\{X_i\}$ տրոհումը: Այսպիսով՝ X-ի յուրաքանչյուր $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն Ֆեռամ է որոշվել $P : X \to F(X)$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում:

Գոյություն ունի բազմությունից ֆակտոր-բազմություն կազմելու մեկ ուրիշ (վերը բերվածին համարժեք) եղանակ: Այն հիմնված է համարժեքության հարաբերություն հասկացության վրա: Համարժեքության հարաբերությունը երկտեղ հարաբերության տեսակ է: Պարզաբանենք այս բոլորը:

Դիցուք X բազմության $x_1, x_2, \ldots$ տարրերից կազմված զույգերի համար սահմանված է մի որոշակի հարաբերություն: Եթե տվյալ (x_i, x_j) զույգի համար այդ հարաբերությունը տեղի ունի, ապա դա արձանագրում են $x_i R x_j$ գրառումով (R-ը Relation բառի կրճատն է) և կարդում են՝ X-ի x_i և x_j տարրերը գտնվում են տվյալ R երկտեղ հարաբերության մեջ: Այս դեպքում ասում են, որ ունենք R երկտեղ հարաբերություն X բազմության վրա:

Օրինակ 6: Դիտարկենք իրական թվերի բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու իրական թվեր կամ հավասար են, կամ նրանցից մեկը մեծ է մյուսից» ասույթը: Սա երկտեղ հարաբերություն է, և $r_1 R r_2$-ը տեղի ունի իրական թվերի ցանկացած (r_1, r_2) զույգի դեպքում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու ամբողջ թվերից մեծը առանց մնացորդի բաժանվում է

Հանգամանքը հետևյալն է՝ ամեն մի $f: X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերված դրվում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը Y բազմության տարրերի նախակերպարներն են X-ում:

փոքրի վրա» ասույթը: Պարզ է, որ $6R2$, $2R6$, $-3R6$, $0R(-1)$ հարաբերությունները տեղի ունեն, իսկ $5R2$, $3R0$, $4R4$ հարաբերությունները՝ ոչ:

Այսպիսով՝ ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ R երկտեղ հարաբերությունը տեղի ունենա ցանկացած (x_i, x_j) զույգի համար: Ընդհանուր դեպքում երկտեղ հարաբերության գաղափարը տեղի սահմանումն իր մեջ պարունակում է անորոշություն. չի հստակեցվում՝ ինչ հասկանալ ասելով «հարաբերություն բազմության x_1, x_2 տարրերի միջև»: Երկտեղ հարաբերության խիստ սահմանումը հետևյալն է:

Սահմանում: X բազմության վրա երկտեղ հարաբերություն կոչվում է $X \times X$ ուղիղ արտադրյալի ցանկացած M ենթաբազմություն:

Ըստ այս սահմանման հաստատված է, որ x_iRx_j-ը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_i, x_j) \in M$:

Այսուհետև մեզ համար կարևոր են լինելու երկտեղ հարաբերությունների հետևյալ հատկությունները: Ասում են, որ X-ի վրա տրված R երկտեղ հարաբերությունը (այսինքն՝ $X \times X$-ի M ենթաբազմությունը) օժտված է

1. **ինքնահամալուծության** հատկությամբ, եթե $\forall x \in X$ տարրի համար xRx-ը տեղի ունի (այսինքն՝ $(x, x) \in M$ ցանկացած $x \in X$ տարրի համար),

2. **համաչափության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ x_1Rx_2-ը տեղի ունի, հետևում է, որ x_2Rx_1-ը ևս տեղի ունի (այսինքն $(x_1, x_2) \in M \Rightarrow (x_2, x_1) \in M$),

3. **փոխանցականության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ տեղի ունեն x_1Rx_2 և x_2Rx_3, հետևում է, որ տեղի ունի x_1Rx_3-ը (այսինքն եթե $(x_1, x_2) \in M$, $(x_2, x_3) \in M \Rightarrow (x_1, x_3) \in M$):

Հասկանալի է, որ երկտեղ հարաբերությունը կարող է բավարարել կամ չբավարարել 1-3 հատկություններին, կամ դրանց մի մասին:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության վրա դիտարկենք չորս՝ R_1, R_2, R_3, R_4 երկտեղ հարաբերություններ, սահմանելով՝

ա) $xR_1y \Leftrightarrow (x > 0$ և $y > 0)$,

բ) $xR_2y \Leftrightarrow x$-ը բաժանվում է y-ի վրա առանց մնացորդի,

գ) $xR_3y \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$,

դ) $xR_4y \Leftrightarrow (x - y)$-ը բաժանվում է 5-ի վրա առանց մնացորդի:

Սրանցից առաջինում տեղի չունի ինքնահամալուծություն հատկությունը՝ $(-1)R_1(-1)$-ը տեղի չունի: Երկրորդում տեղի չունի համաչափության հատկությունը՝ $6R_22$-ը տեղի ունի, բայց $2R_26$-ը տեղի չունի: Երրորդում տեղի չունի փոխանցականության հատկությունը: Իրոք, $(-4R_30)$ և $0R_32$-ը տեղի ունեն, բայց $(-4)R_32$-ը տեղի չունի: Չորրորդ օրինակում բավարարվում են բոլոր երեք հատկությունները:

Սահմանում: Բազմության վրա տրված երկտեղ հարաբերությունը կոչվում է **համարժեքության հարաբերություն**, եթե այն օժտված է վերը բերված 1-3 հատկություններով:

Այսպիսով, օրինակ 8-ում բերված չորս երկտեղ հարաբերություններից համարժեքության հարաբերություն է միայն R_4-ը:

Դիցուք ունենք R համարժեքության հարաբերություն X բազմության վրա:

Սահմանում: Որևէ $x \in X$ տարրի **համարժեքության դաս** կվյալ համարժեքության հարաբերության նկատմամբ (նշանակվում է $[x]$), կոչվում է X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունը, որոնք գտնվում են R հարաբերության մեջ x տարրի հետ՝ $[x] = \{x' \in X \mid x'Rx\}$:

Այն դեպքում, երբ R համարժեքության հարաբերության նկատմամբ տեղի ունի x_1Rx_2-ը, ապա ասում են, որ $x_1, x_2 \in X$ տարրերը **համարժեք են միմյանց** կվյալ՝ R հարաբերության նկատմամբ: Ուստի վերը բերված սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես. $x \in X$ տարրի համարժեքության դասը X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունն է, որոնք համարժեք են x-ին R-ի նկատմամբ:

Թեորեմ 5: Դիցուք R-ը որևէ համարժեքության հարաբերություն է X-ի վրա: Ապա համարժեքության դասերն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1. ցանկացած համարժեքության դաս X-ի ոչ դատարկ ենթաբազմություն է,
2. ցանկացած երկու համարժեքության դասեր կամ ունեն դատարկ հատում, կամ էլ համընկնում են,
3. X-ի բոլոր համարժեքության դասերի միավորումը X-ն է:

Ապացուցում: 1-ը և 3-ը հետևում են նրանից, որ $x \in [x]$ կամայական x-ի դեպքում:

Ապացուցենք 2-ը: Եթե $[x_1] \cap [x_2] \neq \varnothing$, ապա գոյություն ունի $x_3 \in [x_1] \cap [x_2]$: Ունենք՝ $x_3 \in [x_1]$ և $x_3 \in [x_2] \Rightarrow (x_3Rx_1$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow (x_1Rx_3$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow x_1Rx_2$: Ցույց տանք, որ $[x_1] \subset [x_2]$: Դիտարկենք կամայական $x \in [x_1]$ տարր: Ունենք՝

$$xRx_1 \text{ և } x_1Rx_2 \Rightarrow xRx_2 \Rightarrow x \in [x_2] \Rightarrow [x_1] \subset [x_2]$$

Նման ձևով ստանում ենք $[x_2] \subset [x_1]$, ուստի $[x_1] = [x_2]$: ■

Հետևանքներ թեորեմ 5-ից: X բազմության վրա տրված R համարժեքությունը որոշում է X-ի որոշակի տրոհում՝ կազմված զույգ առ զույգ չհատվող $[x]$ համարժեքության դասերից: Իր հերթին այդ տրոհումը որոշում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որը նշանակվում է X/R (կարդացվում է՝ X բազմություն ֆակտոր-բազմություն՝ որոշված R համարժեքության հարաբերությունով):

Որպես օրինակ դիտարկենք R_4 համարժեքության հարաբերությունը օրինակ 8-ում: Այս դեպքում երկու ամբողջ թվեր համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանք 5-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: Ուստի ունենք միմյանց հետ չհատվող հինգ համարժեքության դաս, որոնք ներկայացվում են $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ տեսքերի թվերով:

Հետևաբար տվյալ ֆակտոր-բազմությունը կարող ենք ներկայացնել, օրինակ, $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ մոդելի տեսքով:

Անդրադառնալով ֆակտոր-բազմության սահմանմանը՝ նկատենք, որ իրականում ցանկացած $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն կարող է ներկայացվել որպես $X/_R$ տեսքի ֆակտոր-բազմություն, ինչ-որ R համարժեքության հարաբերության միջոցով: Իրոք, դիցուք ունենք X բազմության ինչ-որ $\{X_i,\ i \in I\}$ տրոհում և $F(X)$-ը այդ տրոհումով որոշված ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանենք X-ի վրա R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ x_1 և x_2 տարրերի համար տեղի ունի $x_1 R x_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $i \in I$, որ $x_1, x_2 \in X_i$: Հեշտ է ստուգել, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է, ընդ որում համարժեքության դասերը X_i ենթաբազմություններն են: Հետևաբար $F(X)$ ֆակտոր-բազմությունը համընկնում է $X/_R$ ֆակտոր-բազմության հետ:

Բերենք ֆակտոր-բազմությունների ևս մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 9: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը: Կհամարենք, որ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ տարրերը (թվերը) գտնվում են R հարաբերության մեջ, եթե $(x_1 - x_2)$ տարբերությունը ամբողջ թիվ է: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է և որոշում է ֆակտոր-բազմություն: Որո՞նք են համարժեքության դասերը: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի թիվ $[0, 1)$ հատվածից, և հակառակը՝ $[0, 1)$ հատվածի յուրաքանչյուր կետ (թիվ) պարունակվում է համարժեքության որևէ դասում: Այսպիսով՝ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $\mathbb{R}/_R$ ֆակտոր-բազմության բոլոր տարրերի և $[0, 1)$ միջակայքի կետերի միջև: Ուստի կարող ենք տվյալ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացնելու համար որպես մոդել վերցնել $[0, 1)$, կամ $(-1, 0]$, կամ $\left[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, և ընդհանրապես ցանկացած $[a, b)$ կամ $(a, b]$ տեսքի միջակայք, պայմանով, որ $b - a = 1$:

Համեմատելով $[0, 1)$ և $(0, 1]$ մոդելները՝ նկատենք, որ դրանցից առաջինում 0 թվին համապատասխանող տարրը ֆակտոր-բազմությունում նույնն է, ինչ երկրորդ մոդելում 1 թվին համապատասխանող տարրը նույն ֆակտոր-բազմությունում: Ուստի ավելի բնական է թվում այն տարբերակը, երբ որպես ֆակտոր-բազմության մոդել վերցնենք օրինակ $[0, 1]$ փակ հատվածը, բայց միմյանց հետ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0, 1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը: Այսպիսի նույնացումը մեզ բերում է մի նոր մոդելի, որը բնական է ներկայացնել օվալի կամ շրջանագծի տեսքով: Այսպիսով՝ որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել, օրինակ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը:

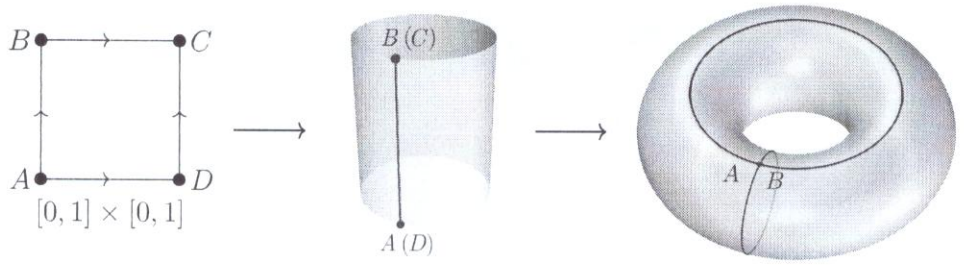
Օրինակ 10: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և սահմանենք R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ տեղի ունի $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_1 - x_2)$-ը և $(y_1 - y_2)$-ը ամբողջ թվեր են: Սա համարժեքության հարաբերություն է (1-3 հատկությունների ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին): Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի կետ $[0, 1) \times [0, 1)$ ուղիղ արտադրյալից: Այդ բազմությունը 1 միավոր կողմով կիսափակ քառակուսի է (նրա եզրագծում բացակայում են $(1, y)$ կետերը, որտեղ $1 \geq y \geq 0$ և $(x, 1)$ կետերը, որտեղ $1 \geq x \geq 0$): Այսպիսով, որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել այդ քառակուսին:

Մեկ ուրիշ, ավելի պատկերավոր մոդել կստացվի, եթե վերցնենք 1 միավոր կողմով փակ $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսին՝ կատարելով նրա եզրագծի կետերի որոշ նույնացումներ: Քանի որ ամեն մի $y \in (0, 1)$ դեպքում տեղի ունի $(0, y)R(1, y)$ համարժեքություն, ուստի $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսու եզրագծի $(0, y)$ և $(1, y)$ կետերը որոշում են մի համարժեքության դաս: Նույն դատողությամբ՝ քառակուսու $(x, 0)$ և $(x, 1)$ կետերը ամեն մի $x \in (0, 1)$ դեպքում նույնպես որոշում են մի համարժեքության դաս: Բացի այդ, մի համարժեքության դաս են որոշում քառակուսու A, B, C, D չորս գագաթները: Ինչ վերաբերում է քառակուսու ներքին կետերին, ապա դրանցից յուրաքանչյուրը (ինչպես նախորդ մոդելի դեպքում) համարժեք է միայն ինքն իրեն և որոշում է մի կետանոց համարժեքության դաս:

Այժմ ստացված ֆակտոր-բազմության համար կառուցենք երկրաչափական մոդել:

Վերացական ֆակտոր-բազմությունից իրական մոդելի անցնելիս հարմար է յուրաքանչյուր համարժեքության դասի բոլոր տարրերը (կետերը) պատկերացնել միմյանց հետ ֆիզիկապես նույնացված: Որոշ հարթ պատկերների դեպքում (այդպիսին է $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսին) համարժեք կետերի ֆիզիկական նույնացումը կարելի է իրականացնել սովորական սոսնձումով:

Այժմ, նախ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսու AB և CD կողմերը (ըստ գծագրում նշված ուղղությունների)՝ ստանում ենք գլանաձև մակերևույթ կամ գլան: Այնուհետև սոսնձելով իրար գլանի ստորին և վերին հիմքերը ըստ AD-ի վրա նշված ուղղությունների՝ ստանում ենք տոր:



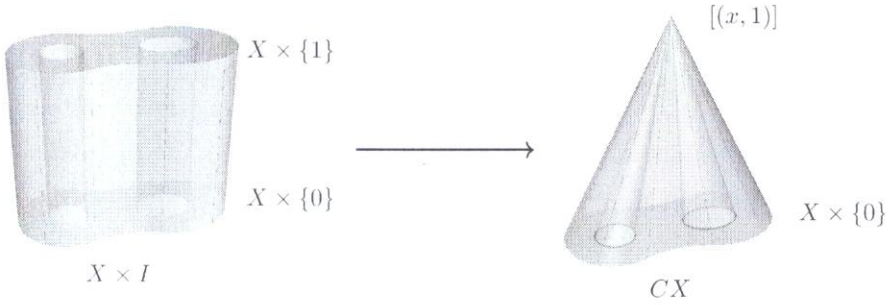
Այսպիսով, տվյալ ֆակտոր-բազմության համար որպես մոդել կարող է ծառայել նաև տորը: Նկատենք, որ քառակուսու A, B, C, D գագաթները նույնացվեցին իրար հետ՝ վերածվելով տորի մի կետի: Բացի այդ, AB-ի և BC-ի նույնացումով ստացվեց

փորի այդ կետով անցնող զուգահեռական, իսկ AD-ի և BC-ի նույնացումով՝ փորի միջօրեական:

Դիտողություն: Թե՛ օրինակ 9-ում և թե՛ օրինակ 10-ում միևնույն ֆակտոր-բազմության համար մենք կառուցեցինք տեսքով միմյանցից էապես տարբերվող մի քանի մոդելներ: Հարց է առաջանում. այդ օրինակներից յուրաքանչյուրի դեպքում ո՞ր մոդելն է գերադասելի և ո՞ր հիմքով: Այս հարցի պատասխանը կտրվի դասընթացի շարունակությունում, երբ կծանոթանանք տոպոլոգիական տարածություն, հոմեոմորֆ կամ միատեսակ տոպոլոգիական տարածություններ և տոպոլոգիական տարածության ֆակտոր-տարածություն հասկացություններին:

Օրինակ 11: Դիտարկենք $X \times I$ գլանը (տե՛ս օրինակ 4-ը), որտեղ I-ն $[0,1]$ հատվածն է, իսկ X-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է: Սահմանենք համարժեքության հարաբերություն գլանի կետերի բազմության համար:

Կհամարենք, որ գլանի ամեն մի (x,t) կետ, որտեղ $0 \leq t < 1$, համարժեք է իրեն և միայն իրեն: Բացի այդ կհամարենք, որ գլանի վերին $X \times \{1\}$ հիմքի ցանկացած երկու $(x_1,1)$ և $(x_2,1)$ կետեր համարժեք են միմյանց: Սա իրոք համարժեքության հարաբերություն է (սպուգումը թողնվում է ընթերցողին): Համարժեքության դասերը մի կետանոց $\{(x,t)\}$, $t \neq 1$ ենթաբազմություններն են, ինչպես նաև գլանի վերին հիմքի բոլոր կետերից կազմված $\{(x,1) \mid x \in X\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ֆակտոր-բազմությունը կոչվում է X **հիմքով կոն** և նշանակվում է CX: Այդ կոնի համար գագաթ է ծառայում $[(x,1)]$ դասը, որտեղ x-ը որևէ կետ է X-ից: Մասնավոր դեպքում, երբ $X = S$ շրջանագիծ է, CS-ի համար որպես մոդել կարող է ծառայել տարրական երկրաչափությունից հայտնի կոնը:



Խնդիրներ և հարցեր թեմա 2-ի վերաբերյալ

2.1. Ո՞ր դեպքերում է հնարավոր

ա) $A \times B = B \times A$ նույնություն,

բ) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ նույնություն:

2.2. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $[a,b]\times[c,d]$, $[a,b]^2$, $[a,b]^3$, $[a,b]\times[c,d]^2$ ուղիղ արտադրյալները, որտեղ $[a,b]$-ն և $[c,d]$-ն թվային ուղղի հատվածներ են:

2.3. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $A\times[0,1]$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ A-ն $\mathbb{R}^2$ հարթության

ա) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ շրջանագիծն է,

բ) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ շրջանն է:

2.4. Ապացուցեք թեորեմ 2-ի ա), գ), դ) նույնությունները:

2.5. Դիցուք X_1, X_2-ը որևէ բազմություններ են: Ապացուցեք, որ ցանկացած $A\subset X_1$, $B\subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$P_{X_1}^{-1}(A)=A\times X_2,\quad P_{X_2}^{-1}(B)=X_1\times B,\quad P_{X_1}^{-1}(A)\cap P_{X_2}^{-1}(B)=A\times B,$$

որտեղ P_{X_1}-ը և P_{X_2}-ը $X_1\times X_2\to X_1$, $X_1\times X_2\to X_2$ կանոնական պրոյեկցիաներն են:

2.6. Ապացուցեք թեորեմ 3-ի ա) նույնությունը:

2.7. Սահմանեք $S\times S$ վերացական տորի համար զուգահեռականի և միջօրեականի հասկացություններ՝ որպես $S\times S$ ուղիղ արտադրյալի ենթաբազմություններ:

2.8. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցեք,

$$h: S\times S\to S\times S,\quad h(s_1,s_2)=(s_2,s_1),\quad s_1,s_2\in S$$ արտապատկերումը

ա) $S\times S$ վերացական տորը փոխմիարժեք արտապատկերում է ինքն իր վրա,

բ) վերացական տորի զուգահեռականները արտապատկերում է նրա միջօրեականների, իսկ միջօրեականները՝ զուգահեռականների:

2.9. Ապացուցեք, որ օրինակ 6-ի երկտեղ հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է: Նկարագրեք դրանով որոշվող ֆակտոր-բազմությունը:

2.10. $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր ուղիղներով կազմված (l_1,l_2) զույգերի համար սահմանված է ա) R' երկտեղ հարաբերություն «տեղի ունի $l_1R'l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1-ը և l_2-ը զուգահեռ են» ասույթով, և բ) R'' երկտեղ հարաբերություն «տեղի ունի $l_1R''l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1 և l_2 ուղիղները կամ նույնն են, կամ զուգահեռ են» ասույթով:

Պարզեք, թե այս երկուսից որն է համարժեքության հարաբերություն, և որը՝ ոչ: Առաջին դեպքում նկարագրեք համարժեքության դասերը և ֆակտոր-բազմության համար կառուցեք որևէ երկրաչափական մոդել:

2.11. Թղթի թերթից կտրեք $A(-10,-1)$, $B(-10,1)$, $C(10,1)$, $D(10,-1)$ գագաթներով երկու ուղղանկյուն (մասշտաբը՝ 1 սմ): Մի դեպքում առանց ոլորելու՝ ստացված $ABCD$ ուղղանկյան AB կողմը սոսնձեք DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, D գագաթները և B, C գագաթները, իսկ մյուս դեպքում՝ կատարելով թղթի շերտի **մի** ոլորում՝ նորից սոսնձեք AB կողմը DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, C գագաթները և B, D գագաթները:

Համոզվեք, որ առաջին դեպքում կստացվի **գլանաձև մակերևույթ**, իսկ երկրորդ դեպքում կստացվի **ոչ գլանաձև մակերևույթ**, որը կոչվում է Մյոբիուսի թերթ: Նաև համոզվեք, որ առաջին մակերևույթի եզրագիծը կազմված է **երկու անջատ օվալից**, իսկ երկրորդի եզրագիծը՝ **մի օվալից**:

Հահմանեք կոորդինատային բացահայտ տեսքով $ABCD$ ուղղանկյան կետերի համար երկու (երկտեղ) համարժեքության հարաբերություն այնպես, որ արդյունքում ստացվող ֆակտոր-բազմություններից մեկը լինի գլանաձև, իսկ մյուսը՝ Մյոբիուսի թերթը:

2.12. Ի՞նչ կարող եք ասել մակերևույթների մասին (տե՛ս նախորդ խնդիրը), որոնք ստացվում են, երբ մինչև սոսնձումը կատարվում է թղթի շերտի 2 ոլորում, 3 ոլորում, և այլն: