Բովանդակություն

Թեմա 0. Տոպոլոգիան առաջին հայացքից. տոպոլոգիական հատկություններ և տոպոլոգիական ինվարիանտներ, տոպոլոգիան որպես աքսիոմատիկ տեսություն: Տարբեր հարթաչափական երկրաչափություններ. պատկերների հավասարությո՞ւն, թե՞ համարժեքություն: Երկրաչափությունները և դրանց հիմքում ընկած ձևափոխությունների խմբերը, տոպոլոգիան որպես սահմանային երկրաչափություն: 5

Թեմա 1. Բազմություններ, գործողությունները դրանց հետ (հատում, միավորում, տարբերություն), բազմությունների ընտանիքներ: Բազմությունների արտապատկերումներ (ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ արտապատկերումներ): 18

Թեմա 2. Բազմությունների դեկարտյան (ուղիղ) արտադրյալ, արտապատկերումների ուղիղ արտադրյալ, անկյունագծային արտապատկերում: Համարժեքության հարաբերություն բազմության վրա, ֆակտոր-բազմություն: 28

Թեմա 3. Վերջավոր և անվերջ բազմություններ, բազմությունների քանակական համեմատումը, թեորեմներ հաշվելի բազմությունների վերաբերյալ: Բազմության հզորության հասկացությունը, Կանտորի թեորեմը: Պարադոքսները բազմությունների նաիվ տեսությունում: 42

Թեմա 4. Թվային ուղիղը որպես տոպոլոգիական տարածության նախատիպ: Տոպոլոգիա բազմության վրա, տոպոլոգիական տարածության հասկացությունը, տոպոլոգիաների համեմատումը: Տոպոլոգիական տարածության այլընտրանքային սահմանում հիմնված կետի շրջակայք հասկացության վրա: 56

Թեմա 5. Տոպոլոգիայի բազա, բազայի հայտանիշ, տոպոլոգիայի տրում բազայի միջոցով: Տոպոլոգիական տարածության փակ ենթաբազմությունները, տոպոլոգիայի այլընտրանքային սահմանում: Անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները, ռեգուլյար և նորմալ տարածություններ 68

Թեմա 6. Կետի դիրքը ենթաբազմության նկատմամբ. ենթաբազմության ներքին և արտաքին կետեր, ենթաբազմության ներքինն ու արտաքինը, ենթաբազմության եզրային կետեր և ենթաբազմության եզր: Փակման գործողություն բազմության վրա, Կուրատովսկու թեորեմը: 77

Թեմա 7. Մետրիկ բազմության վրա և մետրիկ տարածություն հասկացությունները, օրինակներ: Մետրիկ տարածության տոպոլոգիան, մետրիկային տարածություններ, օրինակներ: Ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը և փակույթը մետրիկային տարածություններում: 85

Թեմա 8. Հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, կապը նրանց միջև, Լինդելյոֆի թեորեմը: Սեպարաբել տարածություններ, կապը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմի և սեպարաբելության միջև: 98

Թեմա 9. Տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերումներ, թեորեմ մետրիկային տարածությունների արտապատկերումների անընդհատության մասին, անընդհատության հայտանիշներ: Հոմեոմորֆիզմ և հոմեոմորֆ տարածություններ, տոպոլոգիական տիպ և տոպոլոգիական հատկություններ: Բաց, փակ արտապատկերումներ: 106

Թեմա 10. Հաջորդականությունների զուգամիտությունը տոպոլոգիական տարածություններում: Տարածության տոպոլոգիայի նկարագրումը զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով: Կապը արտապատկերման անընդհատության և հաջորդականություններ

զուգամիտության միջև: 118

Թեմա 12. Ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան և նրա հատկությունները: Տոպոլոգիական տարածության ենթատարածության հասկացությունը, օրինակներ: Անվերջ չափականության մետրիկային տարածություններ: 128

Թեմա 13. Ֆակտոր-տոպոլոգիա, ֆակտոր-տարածություն, օրինակներ: Տոպոլոգիական տարածություններում «սոսնձման» (նույնացման) գործողությունը, օրինակներ: Միակողմանի, կողմնորոշելի և ոչ կողմնորոշելի մակերևույթներ: 138

Թեմա 14. Տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալը, օրինակներ, հատկությունները: Ենթաբազմությունների փակույթն ու ներքինը ուղիղ արտադրյալում: Ուղիղ արտադրյալի ժառանգական հատկություններ: Որոշ երկրաչափական հասկացություններ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածություններում: 153

Թեմա 15. Կապակցված տարածություն, կապակցված ենթաբազմություն: Թեորեմներ կապակցված ենթաբազմությունների միավորման և կապակցված ենթաբազմության փակման մասին: Կապակցվածության բաղադրիչ, ոչ հոմեոմորֆ տարածությունների օրինակներ: 165

Թեմա 16. Գծորեն կապակցված տարածություններ, գծային կապակցվածությունը որպես տոպոլոգիական հատկություն: Կապը կապակցվածություն և գծային կապակցվածություն հասկացությունների միջև: Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչները: 173

Թեմա 17. Կոմպակտ տարածություն, կոմպակտ ենթաբազմություն, օրինակներ: Թեորեմ տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալի կոմպակտության մասին: Թեորեմ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածության կոմպակտ ենթաբազմությունների մասին: 181

Նախաբան

Սույն մեթոդական ձեռնարկը նախատեսված է մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի երկրորդ կուրսեցիների համար և նպատակ ունի դյուրացնելու «Տոպոլոգիա» ուսումնական դասընթացի յուրացումը:

Ձեռնարկում շարադրված նյութը պայմանականորեն բաժանել ենք 17 թեմաների (ըստ 1 կիսամյակում դասախոսությունների հնարավոր առավելագույն քանակի):

Առաջին երեք թեմաները նվիրված են բազմությունների նաիվ (կանտորյան) տեսությանը: Այստեղ, բացի քիչ թե շատ հեշտ յուրացվող՝ բազմությունների ուղիղ արտադրյալ, ֆակտոր-բազմություն, բազմությունների արտապատկերումներ հասկացություններից՝ քննարկվում է նաև անվերջության հասկացությունը վերջավոր և անվերջ բազմությունների հակադրման տեսքով, ինչպես նաև բազմությունների քանակական համեմատումը և բազմության տարրերի քանակություն հասկացությունը ընդհանուր դեպքում:

Հաջորդ վեց թեմաներում քննարկվում է բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ֆունդամենտալ խնդիրը. դիտարկվում են տոպոլոգիայի և տոպոլոգիական տարածության տարբեր (բայց համարժեք) սահմանումներ բաց (փակ) ենթաբազմությունների, կետերի շրջակայքերի, փակման գործողության, հաջորդականությունների զուգամիտության տերմիններով: Այստեղ ներմուծվում են նաև մետրական տարածություն և մետրական տոպոլոգիա կարևոր հասկացությունները, անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները, հաշվելիության I և II աքսիոմները, սեպարաբել տարածության հասկացությունը:

Հաջորդ՝ 10-րդ և 11-րդ թեմաները նվիրված են տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերումներին, այդ թվում՝ հոմեոմորֆիզմ, հոմեոմորֆ տարածություններ, տոպոլոգիական ինվարիանտ ֆունդամենտալ հասկացություններին:

Հաջորդ՝ 12, 13, 14 թեմաներում սահմանվում և պարզաբանվում են տոպոլոգիական տարածությունների երեք հիմնական կառույցներ՝ ենթատարածություն, ֆակտոր-տարածություն, տարածությունների ուղիղ արտադրյալ հասկացությունները:

Նախավերջին 15-րդ և 16-րդ թեմաները նվիրված են տոպոլոգիական տարածությունների երկու կարևոր դասերի՝ կապակցված և գծորեն կապակցված տարածություններին: Վերջին՝ 17-րդ թեման նվիրված է կոմպակտ տարածություններին, դասընթացն ավարտվում է էվկլիդյան $\mathbb{R}^n$ տարածությունների կոմպակտ ենթաբազմությունների նկարագրումով:

Ընդհանուր տոպոլոգիան իր խիստ վերացականության պատճառով վատ է յուրացվում (հաճախ պարզապես չի յուրացվում) հատկապես հարակից ուսումնական առարկաների նախնական վատ պատրաստվածություն ունեցող ուսանողների կողմից: Հաշվի առնելով սա՝ փորձել ենք որքան հնարավոր է ընդգծել տոպոլոգիայի բնույթը՝ որպես երկրաչափության բաժին, ինչպես նաև նրա կապերը մաթեմատիկական անալիզի հետ:

Քանի որ բացի շաբաթական մի դասախոսությունից՝ նախատեսված է նաև մի գործնական պարապմունք, հարմար գտանք դասընթացի սույն տեքստում խուսափել հատուկ ընտրված խնդիրներ հանձնարարելուց՝ նպատակ դնելով օրինակների քննարկման և հարցերի միջոցով հասնել հիմնական հասկացությունների ըմբռնմանը և յուրացմանը: Դրան նպաստելու համար շատ դեպքերում ուսանողին առաջարկում ենք ինքնուրույն պատասխանել փոքր դեպքերի վերաբերյալ տեքստում առկա «ինչո՞ւ» կամ «հիմնավորե՛լ» հարցադրումներին:

Նշենք նաև, որ թեորեմներն ու օրինակները համարակալված են ըստ թեմաների: Քանի որ հղումները շատ չեն, խուսափել ենք թեորեմների և օրինակների կրկնակի համարակալումից:

Ձեռնարկի վերջում բերված է գրականության ոչ մեծաթիվ ցանկ, որի միջոցով ընթերցողը կարող է լրացնել իր գիտելիքը և խորանալ տոպոլոգիայի առանձին բաժինների մեջ:

Թեմա 0

Տոպոլոգիան առաջին հայացքից. տոպոլոգիական հատկություններ և տոպոլոգիական ինվարիանտներ, տոպոլոգիան որպես աքսիոմատիկ տեսություն: Տարբեր հարթաչափական երկրաչափություններ. պատկերների հավասարությո՞ւն, թե՞ համարժեքություն: Երկրաչափությունները և դրանց հիմքում ընկած ձևափոխությունների խմբերը, տոպոլոգիան որպես սահմանային երկրաչափություն:

Տոպոլոգիան երկրաչափության բաժին է, որն ուսումնասիրում է պատկերների այն հատկությունները, որոնք պահպանվում են պատկերների անընդհատ ձևափոխությունների դեպքում: Այդպիսի հատկությունները կոչվում են պատկերների տոպոլոգիական հատկություններ:

Երբ ասում են, որ X երկրաչափական պատկերը ստացվում է Y երկրաչափական պատկերի անընդհատ ձևափոխությունով, ապա ենթադրվում է, որ

1. հաստատվում է որոշակի h փոխմիարժեք (մեկը մեկին) համապատասխանություն X և Y պատկերների միջև (մասնավորապես սա նշանակում է, որ X և Y պատկերների կետերի քանակությունները պիտի լինեն նույնը);

2. եթե X պատկերի որևէ երկու x_1 և x_2 կետեր բավականաչափ մոտիկ են միմյանց X-ում, ապա h-ի միջոցով նրանց համապատասխանեցված y_1 և y_2 կետերը նույնպես պետք է լինեն բավականաչափ մոտիկ Y-ում և հակառակը:

Տոպոլոգիայում երկրաչափական պատկերները կոչվում են տոպոլոգիական տարածություններ, իսկ 1-2 պայմաններին բավարարող տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են միմյանց տոպոլոգորեն համարժեք կամ հոմեոմորֆ տարածություններ: Այս դեպքում h փոխմիարժեք համապատասխանությունը կոչվում է հոմեոմորֆիզմ X-ի և Y-ի միջև:

Բերենք հոմեոմորֆիզմների, հոմեոմորֆ և ոչ հոմեոմորֆ տարածությունների մի քանի հասարակ օրինակներ:

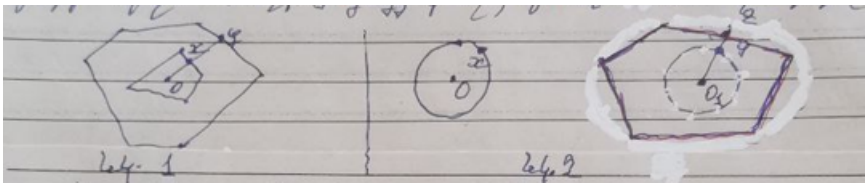
Օրինակ 1: Պարզ է, որ մի կետից կազմված որևէ $\{x\}$ պատկեր չի կարող լինել հոմեոմորֆ որևէ $[a;b]$ հատվածի, քանի որ վերջինս կազմված է անթիվ քանակով կետերից:

Հարց է առաջանում. իսկ հոմեոմո՞րֆ են արդյոք որևէ երկու $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածներ: Մասնավոր դեպքում, երբ օրինակ $[a,b]=[1;3]$, $[c;d]=[1;5]$, ունենք $[1;3]\subset[1;5]$ ներդրում, որից կարելի է եզրակացնել, որ $[1;3]$ հատվածում կետերն ավելի քիչ են $[1;5]$ ինտերվալի կետերից, ուստի դրանք հոմեոմորֆ չեն: Բայց մյուս կողմից

հեշտ է տեսնել, որ $h(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ գծային ֆունկցիան փոխմիարժեք և անընդհատ $[a;b]$ հատվածը ձևափոխում է $[c;d]$ հատվածին: Հետևաբար $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածները հոմեոմորֆ են:

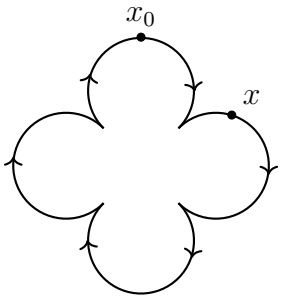
Այս օրինակը ուսանելի է նրանով, որ ցույց է տալիս. բազմության կետերի քանակություն հասկացությունը կարիք ունի հստակեցման:

Օրինակ 2: Ցանկացած երկու ուռուցիկ բազմանկյուն հոմեոմորֆ են միմյանց: Իրոք, նկար 1-ում պատկերված քառանկյուն և վեցանկյուն բազմանկյունների դեպքում O կետից դուրս եկող ճառագայթները որոշում են $x \mapsto y$ և $y \mapsto x$ փոխմիարժեք անընդհատ համապատասխանություններ այդ բազմանկյունների կետերի միջև: Հեշտ է նաև ցույց տալ, որ հոմեոմորֆ են նկար 2-ում պատկերված

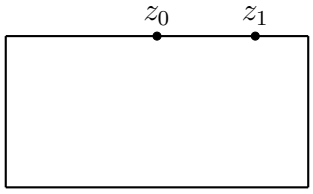


շրջանագիծն ու հնգանկյուն բազմանկյունը: Այս դեպքում կարելի է օրինակ հոմեոմորֆիզմ կառուցել երկու քայլով. նախ շրջանագծի x կետին համապատասխանեցնենք օժանդակ շրջանագծի (որն ստացվում է շրջանագծի զուգահեռ տեղափոխումով) y կետը և այնուհետև y կետին համապատասխանեցնենք O_1y ճառագայթի հատման z կետը բազմանկյան հետ: Արդյունքում ստանում ենք պահանջվող $x \mapsto z$ փոխմիարժեք անընդհատ համապատասխանություն:

Օրինակ 3: Դիտարկենք ստորև նկ. 3-ում պատկերված երկու L_1 և L_2 գծապատկերներ.



L_1



L_2

Դրանք նույնպես հոմեոմորֆ են: Բայց այս դեպքում հազիվ թե հնարավոր է կառուցել հոմեոմորֆիզմ նախորդ օրինակներում բերված եղանակներով:

Նկարագրենք այսօրինակ գծապատկերների միջև հոմեոմորֆիզմ կառուցելու մի ավելի ընդհանուր մեթոդ: Այդ նպատակով ընտրենք մեկական x_0, y_0 կետեր L_1-ի, L_2-ի վրա և շրջապտույտի մեկական ուղղություններ L_1 և L_2 գծերի վրա:

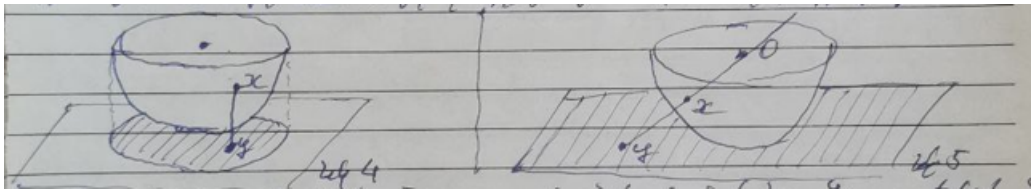
Նշենք որ գիծն, իր վրա ընտրված շրջապտույտի ուղղության հետ միասին կոչվում է **կողմնորոշված գիծ**: Յուրաքանչյուր գիծ կարելի է կողմնորոշել երկու եղանակով՝ ընտրելով երկայնքով շարժվելու երկու ուղղություններից մեկնումեկը:

Նշանակենք L_1 և L_2 գծերի երկարությունները l' և l'': Կամայական $x \in L_1$ կետի համար նշանակենք l'_x-ով L_1 գծի այն ամենակարճ «աղեղի» երկարությունը, որով

պետք է շարժվել x_0 կետից L_1-ի երկայնքով ըստ ընտրված ուղղության, որպեսզի հայտնվենք x կետում: Նույնպիսի՝ l''_y նշանակում կատարենք նաև L_2 գծի կամայական y կետի համար: Այժմ L_1-ի ամեն մի x կետի համապատասխանեցնենք L_2 գծի այն միակ y կետը, որի դեպքում $l''_y = \frac{l''}{l'} \cdot l'_x$: Ակնհայտ է, որ $x \mapsto y$ համապատասխանությունը որոշում է հոմեոմորֆիզմ L_1-ի և L_2-ի միջև:

Բերենք նաև տարածական պատկերների հոմեոմորֆության օրինակներ:

Օրինակ 4: Նկար 4-ում պատկերված կիսասֆերան շոշափում է հարթության մաս կազմող նույն շառավղով շրջանին նրա կենտրոնում: Դրանք հոմեոմորֆ պատկերներ են. կիսասֆերայի



յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցվում է նրա y պրոյեկցիան հարթության վրա և հակառակը՝ շրջանի յուրաքանչյուր y կետի համապատասխանեցվում է կիսասֆերայի այն միակ x կետը, որի պրոյեկցիան y-ն է: Այս համապատասխանությունները որոշում են հոմեոմորֆիզմ նշված պատկերների միջև (նշենք, որ երկու պատկերներն էլ դիտարկվում են կամ իրենց եզրային կետերի հետ միասին, կամ առանց եզրակետերի):

Պարզվում է, որ այդ նույն կիսասֆերան (բայց առանց եզրակետերի) հոմեոմորֆ է հարթությանը: Այս դեպքում (տես նկ. 5-ը) կիսասֆերայի յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով Ox ուղղի հատման y կետը հարթության հետ, ստանում ենք պահանջվող հոմեոմորֆիզմը:

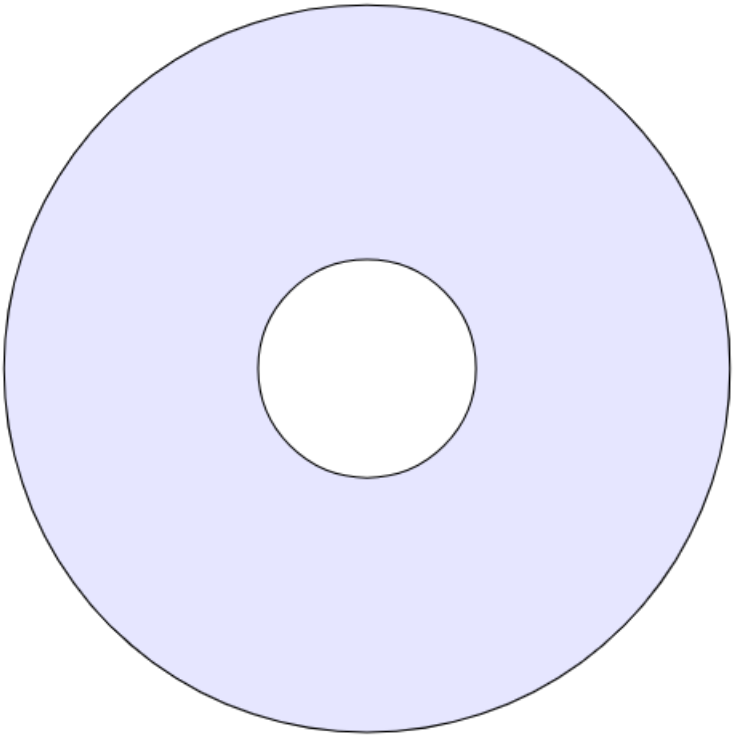
Ավարտելով օրինակների քննարկումը, այժմ լուսաբանենք տոպոլոգիական տոպոլոգիական հատկություն, տոպոլոգիական ինվարիանտ հասկացությունները:

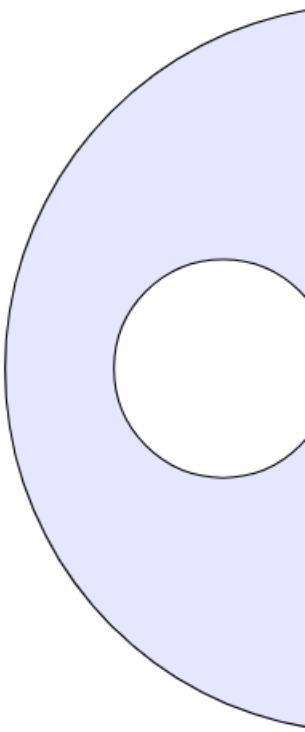
Երկրաչափական պատկերների որևէ հատկություն, կամ պատկերների հետ առնչվող որևէ թվային մեծություն կոչվում է տոպոլոգիական հատկություն կամ տոպոլոգիական ինվարիանտ մեծություն, եթե այն բանից, որ ինչ-որ պատկեր օժտված է այդ հատկությամբ կամ այդ մեծությամբ հետևում է, որ այդ հատկությամբ օժտված են նաև նրան հոմեոմորֆ բոլոր պատկերները:

Վերը քննարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ մեզ ծանոթ երկրաչափական հատկությունների և մեծություններից՝ պատկերի ուղղագծություն, պատկերի ուռուցիկություն, պատկերի սահմանափակություն կամ անսահմանափակություն, գծի երկարություն, պատկերի մակերես, և ոչ մեկը տոպոլոգիական հատկություն կամ տոպոլոգիական մեծություն չէ. դրանք չեն պահպանվում պատկերների անընդհատ ձևափոխությունների դեպքում:

Ընթերցողի մոտ կարող է հարց առաջանալ. իսկ կա՞ն արդյոք պատկերների տոպոլոգիական հատկություններ կամ տոպոլոգիական մեծություններ, որո՞նք են և որքա՞ն են դրանք: Այդպիսիք իհարկե կան, և դրանցից որոշների հետ ընթերցողը

կծանոթանա դասընթացում: Այս պահին սահմանափակվենք մի օրինակով. ստորև նկարում





ցուցադրված են պատկերներ, որոնք ստացվում են շրջանից հեռացնելով մեկ, երկու և երեք շրջանակներ: Դրանցից ոչ մի երկուսը միմյանց հոմեոմորֆ չեն. պարզվում է, որ պատկերի անցքերի քանակությունը տոպոլոգիական (անփոփոխ) մեծություն է: Այս, գրեթե ակնհայտ թվացող պնդումը իհարկե կարիք ունի խիստ ապացուցման:

Անցնենք հաջորդ հարցին. ինչպիսի՞ ներքին կամ արտաքին նմանություններ ունեն տոպոլոգիան և դպրոցական դասընթացից մեզ ծանոթ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը:

Ինչպես գիտենք, և՛ հարթաչափությունը, և՛ տարածաչափությունը կառուցվում են աքսիոմատիկ եղանակով: Էվկլիդեսյան երկրաչափության հիմքում ընկած են կետ, ուղիղ, հարթություն, կետերի միջև հեռավորություն չսահմանվող հասկացությունները: Փոխարենը սահմանվում են նրանց միջև փոխհարաբերություններ աքսիոմների տեսքով: Հիշեցնենք հարթաչափության մի քանի այդպիսի աքսիոմներ:

1. Յուրաքանչյուր ուղղի պատկանում են առնվազն երկու կետեր:

2. Գոյություն ունեն առնվազն երեք կետեր, որոնք չեն գտնվում մի ուղղի վրա:

3. Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ և այն էլ միայն մեկը:

Աքսիոմներով են ներմուծվում՝ «կետերիկ միջև», ճառագայթ, կիսահարթություն հասկացությունները և այլն:

Այնուհետև սահմանվում են նոր երկրաչափական հասկացություններ, ձևակերպվում և դեդուկտիվ եղանակով ապացուցվում են թեորեմներ, որոնք բացահայտում են այդ հասկացությունների զանազան հատկություններ:

Տոպոլոգիան որպես երկրաչափության բաժին նույնպես կառուցվում է աքսիոմատիկ եղանակով: Տոպոլոգիան հիմնված է բազմությունների տեսության վրա: Այն նույնպես ունի աքսիոմատիկ կառուցվածք, որի հիմքում ընկած է **բազմության** հասկացությունը:

Նշենք, որ բազմություն և բազմության տարր հասկացությունները նախնական, չսահմանվող հասկացություններ են: Բերենք այդ տեսության մի քանի աքսիոմներ:

1. **Ծավալման աքսիոմ.** եթե A և B բազմությունները կազմված են միևնույն տարրերից, ապա նրանքք համընկնում են:

2. **Գումարի աքսիոմ.** բազմությունների ամեն մի A ընտանիքի համար գոյություն ունի S բազմություն կազմված այն և միայն այն տարրերից, որոնք պատկանում են A ընտանիքի որևէ X բազմությանը:

   Մեկնաբանելով բազմությունների ընտանիք հասկացությունը նշենք, որ բազմությունների ընտանիքը նույնպես բազմություն է, որի տարրերը բազմություններ են:

3. **Դատարկ բազմության գոյության աքսիոմ.** գոյություն ունի այնպիսի բազմություն (նշանակվում է $\varnothing$), որ նրան ոչ մի x տարր չի պարունակում:

4. **Ընտրության աքսիոմ.** ոչ դատարկ, չհատվող բազմությունների ամեն մի A ընտանիքի համար գոյություն ունի B բազմություն, որն ունի ճիշտ մի ընդհանուր տարր A-ին պատկանող ամեն մի X բազմության հետ:

   Այս աքսիոմի անհրաժեշտությունը մեկնաբանելու նպատակով նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի ժամանակի և տարածության մեջ տեղավորվող որևէ իրական գործնական եղանակ, որով հնարավոր լինի կազմավորել աքսիոմում նշված B բազմությունը:

Վերադառնալով տոպոլոգիայի աքսիոմատիկային՝ նշենք, որ նրա հիմքում ընկած է **տոպոլոգիական տարածության** հասկացությունը: Տոպոլոգիական տարածությունը բազմություն է, որի համար, նույնպես աքսիոմներով, սահմանվում է այդ բազմության որոշակի ներքին կառուցվածք: Այդ կառուցվածքը կոչվում է տվյալ բազմության տոպոլոգիա կամ տոպոլոգիա տվյալ բազմության վրա: Այսպիսով տոպոլոգիա տերմինը գործածվում է երկու իմաստով. որպես տվյալ բազմության ներքին կառուցվածք և որպես մաթեմատիկայի բաժին:

Ամփոփելով նշենք, որ Տոպոլոգիայի (որպես բաժին) աքսիոմների լրիվ համակարգը կազմված է բազմությունների տեսության աքսիոմներից և տոպոլոգիայի (որպես բազմության ներքին կառուցվածքի) աքսիոմներից:

Պատահական չէ, որ բազմությունների տեսության ստեղծման հենց սկզբից նրա հեղինակն ու հետևորդները՝ Գ. Կանտոր, Ֆ. Հաուսդորֆ, Մ. Ֆրեշե, Կ. Կուրատովսկի,

Պ. Ալեքսանդրով և այլոք, ձեռնարկեցին բազմության տոպոլոգիական կառուցվածքի մշակումը: Եղան տարբեր մոտեցումներ:

1. Բազմության տոպոլոգիայի հիմքում դրվեց կետի շրջակայք հասկացությունը իր համապատասխան աքսիոմներով: Սկզբում տոպոլոգիական տարածությունները այդպես էլ կոչվում էին՝ **շրջակայքային տարածություններ**:

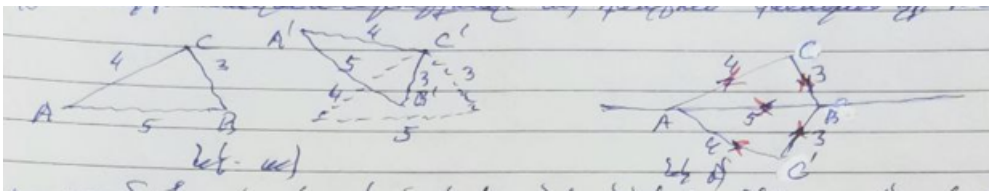
2. Մյուս դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում դրվեցին ենթաբազմության հպման կետ, ենթաբազմության փակում հասկացությունները (Կուրատովսկու աքսիոմատիկա):

3. Երրորդ դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում դրվեց բազմության կետերի միջև հեռավորության հասկացությունը՝ մետրիկան: Այսպիսի տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են մետրական տարածություններ:

4. Բազմության վրա տոպոլոգիա կարելի է սահմանել նաև ներմուծելով բաց (փակ) ենթաբազմություն հասկացությունը (դարձյալ աքսիոմներով)

Կան նաև այլ մոտեցումներ: Յուրաքանչյուր դեպքում, ըստ ճաշակի և նպատակահարմարության, ընտրվել և վերացարկվել է սովորական երկրաչափական պատկերների այս կամ այլ հատկությունը: Ընդ որում, ընդգրկված բոլոր հատկություններն ունեն անմիջական կապ երկրաչափական պատկերների արտապատկերումների անընդհատության հետ: Նկատենք նաև, որ բոլոր մոտեցումները համարժեք են այն իմաստով, որ բերում են միևնույն արդյունքներին իրենց գործադրությունների տիրույթների ընդհանուր մասերում:

Այժմ բացահայտենք էվկլիդեսյան, ինչպես նաև որոշ այլ երկրաչափությունների և տոպոլոգիայի ներքին նմանությունները: Մասնավորապես պարզաբանենք, թե ինչ տեղ է գրավում տոպոլոգիան այդ երկրաչափությունների շարքում: Հարթության էվկլիդեսյան երկրաչափությունում երկու պատկերները (օրինակ եռանկյունները), կոչվում են հավասար, եթե դրանցից մեկը վերադրումով կարելի է համընկեցնել մյուսի հետ: Ընդ որում համարվում է, որ վերադրման ողջ ընթացքում տեղափոխվող պատկերի ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը մնում է անփոփոխ: Ստորև պատկերված ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունը ա) դեպքում կասկած չի հարուցում:



Նախ կարելի է եռանկյուններից մեկը, օրինակ ABC-ն ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխելով, նրա C գագաթը համընկեցնել $A'B'C'$ եռանկյան C' գագաթի հետ: Այնուհետև, կատարելով պտույտ C' գագաթի շուրջ որոշ անկյունով համընկեցվում են նաև մյուս երկու գագաթները՝ A-ն A'-ի հետ, B-ն B'-ի հետ: Քանի որ այս գործողությունների ընթացքում ABC եռանկյան ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունները

չեն փոխվում, արդյունքում եռանկյուն ABC-ն համադրվում է $A'B'C'$ եռանկյան վրա: Մյուս՝ բ) տարբերակում, առանց հարթությունից դուրս գալու այդպիսի վերադրում իրականացնել հնարավոր չէ: Այս դեպքում ունենք երկու հնարավորություն. կա՛մ պատկերված ABC և ABC' եռանկյունները պետք է համարենք ոչ հավասար, կա՛մ էլ կարող ենք համարել հավասար, եթե մեզ թույլ տանք վերադրելիս դուրս գալ հարթությունից դեպի տարածություն, կատարելով պտույտ AB ուղղի շուրջ $180°$ անկյունով:

Միանգամից ասենք, որ երկու մոտեցումն էլ սկզբունքորեն ընդունելի են, բայց առաջին տարբերակի դեպքում ստացվում են երկու **տարբեր երկրաչափություններ**: Դրանցից առաջինում, երբ ABC և ABC' եռանկյունները համարվում են ոչ հավասար, տեղի չունի եռանկյունների հավասարության հայտանիշը ըստ երեք կողմերի: Այնուամենայնիվ նման հայտանիշ կարելի է ձևակերպել նոր տեսքով. համապատասխանաբար հավասար կողմերով և **միապեսակ կողմնորոշված** եռանկյունները միմյանց հավասար են: Նկատենք, որ բ) նկարում պատկերված ABC և ABC' եռանկյուններն ունեն տարբեր կողմնորոշումներ, այսինքն վազանցումները նրանց պարագծերով (պահելը գագաթների համապատասխանությունը) կատարվում են տարբեր ուղղություններով. ABC եռանկյան դեպքում՝ ժամ. սլաքին հակառակ ուղղությամբ, իսկ ABC' եռանկյան դեպքում ժամ. սլաքի ուղղությամբ:

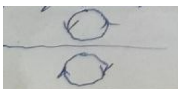
Ամփոփելով վերը շարադրվածը կատարենք երկու դիտողություն:

1. Կախված նրանից, թե ինչպիսի ձևափոխություններ են թույլատրվում պատկերների հավասարություն սահմանելիս, կարող են գոյանալ տարբեր երկրաչափություններ: Հենց նոր տեսանք, որ գոյություն ունի հարթության առնվազն երկու երկրաչափություն՝ կողմնորոշված պատկերների հարթաչափություն և չկողմնորոշված պատկերների հարթաչափություն (սովորական էվկլիդեսյան հարթաչափություն):

2. Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում ABC և ABC' եռանկյունների հավասարությունը վերադրումով հիմնավորելու համար ստիպված եղանք դուրս գալ հարթությունից: Մինչդեռ ցանկալի է, որ հարթաչափությունը լինի ինքնաբավ, այսինքն ձևավորվի սեփական տիրույթում առանց դիմելու տարածության օգնությանը: Դա կարելի է անել ներմուծելով պատկերների իզոմետրիկ ձևափոխություն հասկացությունը:

Դիցուք ունենք X և Y երկու պատկերներ, որոնք կետերի միջև հաստատված է փոխմիարժեք $x \mapsto y$ համապատասխանություն այնպես, որ պահպանվում են կետերի միջև հեռավորությունները. այսինքն կամայական $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում, եթե $x_1 \mapsto y_1$, $x_2 \mapsto y_2$, որտեղ $y_1, y_2 \in Y$, ապա x_1 և x_2 կետերի միջև $\rho(x_1, x_2)$ հեռավորությունը հավասար է y_1 և y_2 կետերի միջև $\rho(y_1, y_2)$ հեռավորությանը: Ամեն մի այդպիսի ձևափոխություն կոչվում է հարթության իզոմետրիկ ձևափոխություն:

Իզոմետրիկ ձևափոխություններ են հարթության զուգահեռ տեղափոխությունները, կետերի շուրջ պտույտները, ուղիղների նկատմամբ համաչափությունները: Տեղի է նկատել, որ ի տարբերություն զուգահեռ տեղափոխությունների և պտույտների, ուղղի նկատմամբ համաչափությունը փոխում է պատկերը կողմնորոշումը:



Պարզվում է, որ թվարկված ձևափոխություններով սպառվում են հարթության մեջ բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները հետևյալ իմաստով. հարթության ամեն մի իզոմետրիկ ձևափոխություն կամ զուգահեռ տեղափոխություն է ինչ-որ վեկտորով, կամ պտույտ է ինչ-որ կետի շուրջ ինչ-որ անկյունով, կամ համաչափություն է ինչ-որ ուղղի նկատմամբ և կամ էլ մի քանի այդպիսի ձևափոխությունների համադրույթ է (այսինք ձևափոխությունների հաջորդական կիրառման արդյունք է):

Իզոմետրիկ ձևափոխությունները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկություններով:

1. Ցանկացած պատկերի նույնական ձևափոխությունը իզոմետրիկ ձևափոխություն է: Նույնական կոչվում է այն ձևափոխությունը, որը յուրաքանչյուր կետի համապատասխանեցն է այդ նույն կետը $x \Longrightarrow x$:

2. Ցանկացած պատկերի (այդ թվում հարթության) ցանկացած քանակով իզոմետրիկ ձևափոխությունների համադրույթը իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

3. Յուրաքանչյուր իզոմետրիկ h ձևափոխության համար գոյություն ունի նրան հակադարձ h^{-1} ձևափոխություն որը նույնպես իզոմետրիկ ձևափոխություն է (ըստ սահմանման, $x \to y$ ձևափոխության հակադարձ կոչվում է $y \to x$ ձևափոխությունը):

Իրոք, $\overrightarrow{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխության հակադարձը $-\overrightarrow{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունն է: O կետի շուրջ ϕ անկյունով պտույտի հակադարձը O կետի շուրջ $-\phi$ անկյունով (այսինքն հակառակ ուղղությամբ բայց նույն մեծությամբ անկյունով) պտույտն է: Որևէ ուղղի նկատմամբ համաչափության հակադարձը այդ նույն համաչափությունն է: Վերջապես, եթե h_1, h_2-ը իզոմետրիկ ձևափոխություններ են, ապա նախ կատարելով h_1 ձևափոխությունը և ապա h_2 ձևափոխությունը ստանում ենք իզոմետրիկ ձևափոխություն (նշանակվում է $h1 \circ h_2$), որի հակադարձը $h1^{-1} \circ h_2^{-1}$ իզոմետրիկ ձևափոխությունն է:

Եթե ինչ-որ պատկերի (մասնավորապես հարթության կամ տարածության) որոշ ձևափոխություններից կազմված G բազմության տարրերը բավարարում են 1-3 պայմաններին, ապա ասում են որ G-ն տվյալ պատկերի ձևափոխությունների խումբ է:

Այսպիսով հարթության բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները կազմում են խումբ, որն ընդունված է նշանակել $O(2)$:

Համեմատության համար քննարկենք մյուս՝ հարթության կողմնորոշված պատկերների երկրաչափությունը: Այս երկրաչափության հիմքում ընկած են պատկերների (մասնավորապես հարթության) այդ բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները, որոնք պահպանում են դրանց կողմորոշումը: Դրանք են՝ զուգահեռ տեղափոխությունները, կետերի շուրջ պտույտները և դրանց բոլոր համաչափությունները: Սրանք նույնպես կազմում են ձևափոխությունների խումբ: Այդ խումբը կոչվում է հարթության հատուկ (կամ առաջին

սեռի) իզոմետրիկ ձևափոխությունների խումբ և նշանակվում է $SO(2)$: Այս խումբը կոչվում է $O(2)$ խմբի մաս (ենթախումբ): Նրանում բացակայում են համաչափությունները ուղիղների նկատմամբ: Որպես հետևանք առաջանում են որոշ տարբերություններ $SO(2)$ և $O(2)$ խմբերի երկրաչափությունների միջը: I. $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում երկրաչափական պատկերների տեսականին ավելի հարուստ է: Իրոք, այն դեպքում երբ ABC և ABC' եռանկյունները նույնն են (հավասար են) $O(2)$ խմբի երկրաչափությունում, դրանք տարբեր են (հավասար չեն) $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում: Բացի այդ, եթե $O(2)$ խմբի դեպքում անկյունը միարժեքորեն որոշվում է կետով և նրանից դուրս եկով երկու a և b ճառագայթներով, ապա $SO(2)$ խմբի դեպքում մենք ունենք երկու տարբեր անկյուններ՝ a-ից մինչև b ընկած անկյուն և b-ից մինչև a ընկած անկյուն, որոնք որպես պատկերներ նույնը չեն: Փոխելով շեշտադրումը նույն միտքը կարող ենք ձևակերպել նաև այսպես. տվյալ երկրաչափության ձևափոխություն-ների խումբն ընդլայնելիս առաջանում է նոր երկրաչափություն, բայց երկրաչափական պատկերների ավելի աղքատիկ տեսականիով:

II. Ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս որոշ չափով քչանում են (նախկինի համեմատ) նաև երկրաչափական հատկությունները: Տվյալ դեպքում խոսքը պատկերի կողմնորոշման մասին է: Պատկերը կողմնորոշելու հնարավորությունը (կամ դրա անհնարությունը) իրականում շատ կարևոր երկրաչափական հատկություններ են (օրինակ մարդիկ թե ներքին թե արտաքին կառուցվածքով ունեն որոշակի աջ կամ ձախ կողմնորոշում): Քանի որ հարթության մեջ ուղղի նկատմամը, իսկ տարածության մեջ հարթության նկատմամբ համաչափությունները փոխում են պատկերի կողմորոշումը, ուստի $O(2)$ խմբի երկրաչափությունում այդ դադարում է լինել երկրաչափական հատկություն:

Այժմ կարող ենք սահմանել Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում պատկերի հավասարություն, առանց այդ պատկերները հարթությունից դուրս բերելու. երկու X և Y պատկերներ կոչվում են հավասար, եթե գոյություն ունի հարթության իզոմետրիկ ձևափոխություն, որը X պատկերը ձևափոխում է Y պատկերին: Մի փոքր այլ ձևակերպումով դա հնչում է այսպես. X և Y պատկերները հավասար են եթե գոյություն ունի $O(2)$ խմբի h տարր, որ $h(X) = Y$:

Այս սահմանումից և իզոմետրիկ ձևափոխությունների 1-3 հատկություններից ստացվում են պատկերների հավասարության հետևյալ հատկությունները.

1'. ամեն մի պատկերը հավասար է ինքն իրեն

2'. Եթե X պատկերը հավասար է Y պատկերին, իսկ Y պատկերը հավասար է Z պատկերին, ապա X-ը հավասար է Z-ին:

3'. Եթե X պատկերը հավասար է Y պատկերին, ապա Y-ը հավասար է X-ին:

Այնուհետև, պատկերների որևէ հատկություն (պատկերների հետ առնչվող որևէ թվային մեծություն) կոչվում է երկրաչափական հատկություն (երկրաչափական մեծություն) Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում, եթե այն բանից որ այդ հատկությամբ (մեծությամբ)

օժտված է որևէ X պատկեր, հետևում է, որ այդ հատկությամբ (մեծությամբ) օժտված են X-ին հավասար բոլոր պատկերները:

Այլ կերպ ասած երկրաչափական են այն հատկություններն ու մեծությունները, որոնք կայուն են, չեն փոխվում երբ պատկերը ենթարկվում է իզոմետրիկ ձևափոխությունների: Այսպիսով Էվկլիդեսյան երկրաչափությունում իզոմետրիկ ձևափոխությունները որոշիչ դեր են խաղում: Այս հանգամանքը ի նկատի ունենալով, հաճախ Էվկլիդեսյան երկրաչափությունը անվանում են ձևափոխությունների $O(2)$ խմբի երկրաչափություն: Այս երկրաչափությունում երկրաչափական հատկություններ են պատկերի ուղղագծությունը (ի նկատի ունենք որ պատկերի կետերը շարված են որևէ ուղղի վրա); ուղիղներով կազմած անկյունը, գծերի, հատվածների երկարությունները, պատկերների մակերեսները, անկյան մեծությունը, բազմանկյան կողմերի քանակը և այլն:

Որպեսզի ավելի ակնառու լինի երկրաչափական պատկերների և երկրաչափական հատկություններո դինամիկան կապված ձևափոխությունների խմբի փոփոխության հետ, քննարկենք ձևափոխությունների ևս մի խմբի և նրանով որոշված երկրաչափության օրինակ:

Այդ երկրաչափությունը սահմանային տեսքով (առանց այդ մասին հատուկ պարզաբանումների) դիտարկվում է միջնակարգ դպրոցի երկրաչափության դասընթացում, որպես օգտակար մեթոդ ստանալու համար, օրինակ որոշ չափական առընչություններ ուղղանկյուն եռանկյան էջերի, ներքնաձիգի, ներքնաձիգին տարված բարձրության և ներքնաձիգի հատվածների միջը: Դա այսպես կոչված նմանության հատկությունն է:

Այս երկրաչափության հիմքում ընկած է հարթության նմանության ձևափոխությունների խումբը: Հարթության ձևափոխությունը կոչվում է $k > 0$ գործակցով նմանության ձևափոխություն, եթե կամայական x_1, x_2 կետերի և նրանց y_1, y_2 կերպարների դեպքում տեղի ունի $\rho(y_1, y_2) = k{\cdot}\rho(x_1, x_2)$ հավասարություն: Մասնավոր դեպքում, երբ $k = 1$ ստացվում է $\rho(x_1, x_2) = \rho(y_1, y_2)$ այսինքն հարթության իզոմետրիկ ձևափոխությունները նմանության ձևափոխություններ են: Հարթության ամեն մի O կետի և $k > 0$ թվի համար սահմանվում է մի հատուկ նմանության ձևափոխություն: Այն կոչվում է հարթության հոմոտետիա O կենտրոնով և k գործակցով, նշանակվում է H_k^o և սահմանվում է որպես $\overrightarrow{Ox'} = R \cdot \overrightarrow{Ox}$ որտեղ x-ը հարթության կամայական կետ է, իսկ x'-ը՝ նրա կերպարը: Հեշտությամբ ցույց է տրվում որ.

1. ցանկացած H_k^o հոմոտետիա նմանության ձևափոխություն է k գործակցով;

2. ցանկացած k գործակցով նմանության ձևափոխություն կարող է ներկայացվել որպես որևէ իզոմետրիկ ձևափոխության և որևէ H_k^o հոմոտետիայի համադրույթ;

3. ցանկացած երկու k_1 և k_2 գործակիցներով նմանության ձևափոխությունների համադրույթը նմանության ձևափոխություն է k_2k_1 գործակցով;

4. ցանկացած k գործակցով նմանության ձևափոխության համար գոյություն ունի նրան հակադարձ ձևափոխություն. որը նմանության ձևափոխություն է $\frac{1}{k}$ գործակցով

Վերջապես, քանի որ հարթության նույնական ձևափոխությունը նույնպես ձևափոխություն է ($k = 1$ գործակցով), ուստի հարթության բոլոր նմանության ձևափոխությունները կազմում են ձևափոխությունների խումբ, որը նշանակվում է $H(2)$: Այն իր մեջ ընդգրկում է իզոմետրիկ ձևափոխությունների $O(2)$ խումբը որպես ենթախումբ: Այսպիսով ունենք խմբերի և նրանց ներդրումների այսպիսի շղթա $SO(2) \in O(2) \in H(2)$

նմանության երկրաչափությունում երկու M և N պատկերներ համարվում են վերադրումով համատեղվող (կամ պարզապես նման), եթե գոյություն ունի նմանության ձևափոխություն որը M-ը ձևափոխում է (արտապատկերում է) N-ին: Այս դեպքում նպատակահարմար չէ համատեղվող պատկերները համարել հավասար, քանի որ $k \neq 1$ դեպքում նմանության ձևափոխությունը փոխում է պատկերի չափսերը, մեծացնելով կամ փոքրացնելով դրանք k անգամ:

Ուստի նպատակահարմար է համատեղվող պատկերներ համար գործածել համարժեք կամ կոնգուենտ տերմինները, իսկ պատկերի հավասարության տերմինը գործածել այն դեպքում երբ դրանք նույնն են:

Այսպիսով $H2$ խմբի երկրաչափությունում երկու պատկերներ միմյանց համարժեք են այն և միայն այն դեպքում երբ նրանք նման պատկերներ են: Այս իմաստով միմյանց համարժեք են բոլոր (a, b) ինտերվալները, բոլոր $[a, b]$ հատվածները, բոլոր կանոնավոր եռանկյունները, բոլոր քառակուսիները, բոլոր շրջանագծերը և այլն:

Ստացվում է այդպես, որ բոլոր, օրինակ շրջանագծերը, միասին վերցրած հանդես են գալիս որպես մի նորագայություն, որպես մի նոր տեսակի երկրաչափական պատկեր $H(2)$ խմբի երկրաչափությունում: Այդ պատկերն ընդունված է անվանել շրջանագծերը համարժեքության դաս: Նույնը տեղի է ունենում բոլոր կանոնավոր եռանկյունների, բոլոր քառակուսիների, և ընդհանրապես՝ բոլոր միմյանց նման պատկերների դեպքում: Սա նման է նրան, երբ մի քանի պետություններ, ելնելով որոշ ընդհանրություններից և շահերից միավորվում են դաշինքների կամ ընդհանուր պետության մեջ,

չձուլվելով միմյանց:

Այն բանից հետո, երբ հստակվեցին հավասար և համարժեք պատկերների հատկությունները (հավասարները նաև համարժեք են, բայց համարժեքները կարող են հավասար չլինել), անդրադառնալով I և II դիտողություններին, տեսնում ենք որ դրանցում պետք է կատարել ճշգրտումներ:

I': ABC և ABC' եռանկյունները ոչ միայն տարբեր են, այլ նաև համարժեք չեն $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում:

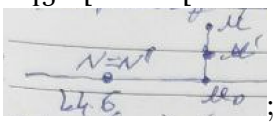
II': Ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս նախկին երկրաչափական պատկերներն ու երկրաչափական հատկությունները չեն քչանում: Դրանք ինչպես կային, այդպես էլ մնում են: Պարզապես գոյանում է նոր երկրաչափություն նոր պատկերներով, որոնք ձևավորվում են հին պատկերներից համարժեքության դասերի տեսքով: Նոր պատկերների երկրաչափական հատկությունները նույնպես ձևավորվում են հինգ պատկերների երկրաչափական հատկություններից: Դրանք այդ հատկություններն

են որոնք չեն փոխվում նաև ավելացվող ձևափոխությունների դեպքում:

Մասնավորապես ձևափոխությունների $H(2)$ խմբի երկրաչափությունում անիմաստ է խոսել շրջանագծերի դասի շառավղի մասին, շրջնանների դասի մակերեսի մասին, էլիպսների որևէ դասի կիսառանցքների մասին, քանի որ դրանք չեն պահպանվում նմանության բոլոր ձևափոխությունների դեպքում: Բայց կարելի է խոսել նման էլիպսների ցանկացած դասի էքսցենտրիսիտետի մասին, քանի որ միմյանց նման բոլոր էլիպսները ունեն միևնույն էքսցենտրիսիտետը:

Նշենք, որ երկրաչափությունների հաջորդականությունը չի ավարտվում քննարկված երեք երկրաչափություններով: Սովորավար վերլուծական երկրաչափության քիչ թե շատ լիարժեք դասընթացում դիտարկվում է ևս մի երկրաչափություն՝ աֆինական երկրաչափությունը:

Աֆինական երկրաչափության հիմքում ընկած է հարթության աֆինական ձևափոխությունների խումբը, որն իր մեջ որպես ենթախումբ ընդգրկում է նմանության ձևափոխությունների $H(2)$ խումբը: Ձևափոխությունների խմբի ընդլայնումը տեղի է ունենում այսպես կոչված՝ ուղիղների նկատմամբ սեղմումների:

Հարթության սեղմում $k > 0$ գործակցով սևեռված l ուղղի նկատմամբ կոչվում է այն ձևափոխությունը, որի դեպքում 

;

ա) l ուղղի կետերը մնում են անշարժ, բ) կամայական M կետի M' կերպարը որոշվում է $\overrightarrow{M_0M'} = k \cdot \overrightarrow{M_0M}$ պայմանով, որտեղ M_0-ն M կետի պրոյեկցիան է l ուղղի վրա (նկ. 6-ում պատկերված է $k = \frac{1}{2}$ դեպքը):

Հարթության աֆինական ձևափոխությունները գոյանում են նմանության ձևափոխություններից, ուղիղների նկատմամբ սեղմումներից և դրանց համադրույթներից:

Նշենք, որ աֆինական երկրաչափությունում բոլոր էլիպսները, անկախ նրանց կիսառանցքների երկարություններից, համարժեք են միմյանց և կազմում են մի համարժեքության դաս՝ էլիպսների դաս: Այս նոր երկրաչափական պատկերի համար, հասկանալի պատճառով, իմաստազրկվում է էքսցենտրիսիտետ հասկացությունը:

Ամփոփենք. որքան ավելի է ընդլայնվում ձևափոխությունների խումբը, այնքան ավելի են շատանում միմյանց համարժեք երկրաչափական պատկերները համարժեքության դասերում: Դրա հետ կապված՝ նույնքան դժվարանում է համարժեքության նոր դասերի համար երկրաչափական հատկությունների որոնումը:

Ի վերջո առաջանում է երկու հարց. 1. Գոյություն ունի՞ արդյոք մի վերջին, այսպես կոչված սահմանային երկրաչափություն, որով ավարտվում է երկրաչափությունների այս հաջորդականությունը 2. Պատկերների ո՞ր երկրաչափական հատկություններն են բնորոշ սահմանային երկարության պատկերներին (համարժեքության դասերին):

Արդեն իսկ դիտարկված ձևափոխությունների հատկությունների համեմատումը ցույց է տալիս, որ ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս 1. ավելացող (նոր) ձևափոխություններն ավելի «լիբերալ են» նախորդներից, այսինք ավելի թույլ պահանջներ են դնում պատկերների համարժեքության համար:

2. Բոլոր հին և նոր ձևափոխությունները ունեն մի ընդհանուր հատկություն՝

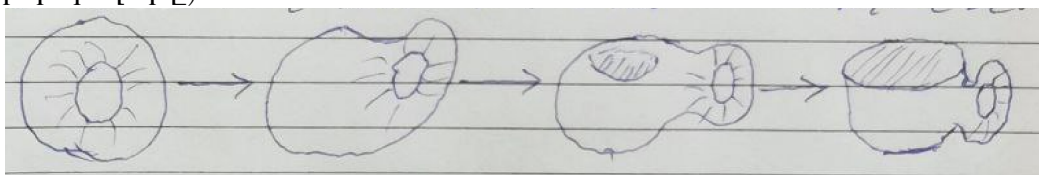
փոխմիարժեք և անընդհատ են

Ուստի բնական կլինի սահմանային երկրաչափական ձևափոխություններից միայն պահանջել, որ նրանք լինեն փոխմիարժեք և անընդհատ:

Այժմ վերադառնալով թեմայի սկզբին պարզ է դառնում, որ ստացվող սահմանային երկրաչափությունը տոպոլոգիա է: Տեսնում ենք նաև, որ 1-3 նկարներում պատկերված գծապատկերները, ինչպես նաև 5 նկարում պատկերները, տոպոլոգորեն համարժեք են. դրանցից ցանկացած երկուսը կարող են ստացվել մեկը մյուսից ենթարկելով անընդհատ ձևափոխությունների:

Երբեմն, պատկերավորության համար ասում են, որ տոպոլոգիայում երկու պատկերները համարժեք են, եթե նրանցից մեկը կարող է ստացվել մյուսից ձգելով, սեղմելով, ծռելով, բայց առանց պոկելու, ջարդելու կամ կտրելու:

Երբեմն, ավելի հեռուն են գնում հայտարարելով, որ տոպոլոգի համար (տոպոլոգ անվանում են տոպոլոգիայով զվաղվողներին) նույնն են տոպոլոգորեն համարժեք պատկերները (մասնավորապես նույնն են ստորև պատկերված թխվածքաբլիթն ու սուրճի գավաթը):



Այս նույն տրամաբանությամբ ասում են նաև, որ տոպոլոգիան ռետինային կամ էլաստիկ երկրաչափություն է:

Վերջին հարց, արդյո՞ք տոպոլոգիայով վերջանում են երկրաչափությունները: Բնավ ոչ. ընդհանուր կամ տեսաբազմական տոպոլոգիային հաջորդեց հոմոտոպիական տոպոլոգիան: Այս տոպոլոգիայում հոմեոմորֆիզմների դեր կատարում են այսպես կոչված հոմոտոպիական համարժեքությունները: Ի տարբերություն հոմեոմորֆիզմների, համատոպիական համարժեքությունները որպես արտապատկերումներ կարող են չլինել փոխմիարժեք համապատասխանություններ:

Նշենք, որ կան նաև երկրաչափություններ, որոնք չեն սահմանվում աքսիոմատիկ եղանակով, օրինակ՝ դիֆերենցիալ, ռիմանյան, հանրահաշվական երկրաչափությունները

Թեմա 1

Բազմություններ, գործողությունները դրանց հետ (հատում, միավորում, տարբերություն), բազմությունների ընտանիքներ: Բազմությունների արտապատկերումներ (ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ արտապատկերումներ):

Բազմությունների տեսության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորն է (1845-1918), որը 1878-1884 թվերի միջև իր 6 հիմնարար աշխատանքներով ճանապարհ բացեց մաթեմատիկայի այդ բաժնի համար: Նրան ժամանակակից գրեթե բոլոր նշանավոր մաթեմատիկոսները կա՛մ դրսևորում էին ցուցադրական անտարբերություն, կա՛մ էլ (հատկապես Շվարցը և Կրոնեկերը) բացահայտ թշնամություն Կանտորի նորարարական ջանքերի նկատմամբ: Պաշտոնապես բազմությունների տեսության ճանաչումը սկսվեց 1897 թվին, երբ Առաջին միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում Ժ. Ադամարը և Ա. Հուրվիցը մատնանշեցին այդ տեսության կարևոր կիրառություններ անալիզում:

Նշենք, որ մաթեմատիկայի այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են ընդհանուր տոպոլոգիան, չափականության և չափի տեսությունները, անխզելիորեն կապված են բազմությունների տեսության հետ և ի հայտ եկան նրա հետ գրեթե միաժամանակ:

Ուստի ընդհանուր տոպոլոգիայի դասընթացը սովորաբար սկսվում է բազմությունների տեսության մի որոշ, թեկուզև շատ համառոտ ակնարկով:

Բազմությունների տեսության հիմքում ընկած է **բազմություն** հասկացությունը: Ըստ Կանտորի նշանավոր սահմանման՝ բազմություն ասելով՝ մենք հասկանում ենք մեր ինտուիցիայի կամ մտքի արդյունքում իրարից լավ տարբերվող զանազան օբյեկտների ամբողջություն: Կանգ չառնելով այստեղից ծագող հնարավոր թերըմբռնումների և հակաճառումների վրա՝ արձանագրենք միայն, որ այսուհետև մենք «բազմություն», «դաս», «ընտանիք», «համախմբություն», «ամբողջություն» տերմինները գործածելու ենք որպես հոմանիշներ:

Հաջորդ կարևոր հասկացությունը **բազմության տարրն** է: Բազմությունը կազմված է տարրերից և որոշվում է իր տարրերով. գրում ենք $x \in X$, եթե x օբյեկտը X բազմության տարր է: Սովորաբար վերջավոր բազմությունը տրվում է նրա տարրերի թվարկումով՝ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$: Դիտարկվում է նաև դատարկ բազմություն. նշանակվում է $\varnothing$ սիմվոլով և չունի տարրեր:

Եթե Y բազմության ամեն մի տարր նաև տարր է X բազմության համար, ապա Y-ը կոչվում է X-ի **ենթաբազմություն**: Ասում են նաև, որ Y-ը **ընկած է** X-ում, կամ Y-ը X-ի **մաս է**, և գրառում են $Y \subset X$: Համարվում է, որ $\varnothing \subset X$ ցանկացած X-ի դեպքում:

Ընդունված է X բազմության $\varnothing$ և X ենթաբազմությունները անվանել նրա **ոչ սեփական ենթաբազմություններ:**

Բնականաբար երկու X և Y բազմություններ համընկնում են (նույնն են) այն և

միայն այն դեպքում, երբ նրանք կազմված են միևնույն տարրերից: Դա գրառվում է $X = Y$ տեսքով և կարդացվում է ինչպես վերը նշվեց (և ոչ թե X-ը հավասար է Y-ին): Երբեմն $X = Y$ նույնականությունը հաստատելու նպատակով ցույց է տրվում, որ $X \subset Y$ և $Y \subset X$:

Հաճախ X բազմությունից նրա որևէ Y ենթաբազմություն առանձնացվում է այսպես կոչված **նկարագրական եղանակով՝** գրառվում է

$$Y = \{x \in X \mid (x \text{ տարրի վերաբերյալ պահանջ})\}$$

Կարդացվում է. Y-ը կազմված է X-ի այն բոլոր տարրերից, որոնք բավարարում են նշված պահանջին:

Օրինակ 1: Դիցուք $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունն է, իսկ $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ բոլոր զույգ թվերի բազմությունն է: Պարզ է, որ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ և $2\mathbb{Z}$-ը կարող է գրառվել՝ $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 2-ի վրա}\}$:

Երբեմն «ավելի ծավալուն» բազմությունը նկարագրվում է (սահմանվում է) «ավելի նվազ ծավալով» բազմության միջոցով:

Օրինակ 2: $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը կարող է ներկայացվել $\mathbb{R}$ թվային ուղղի միջոցով, որպես թվազույգերի բազմություն՝ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$:

Բազմությունների համար սահմանվում են **հատման**, **միավորման** և **տարբերության գործողություններ**: Օգտվելով նկարագրական եղանակից՝ երկու բազմությունների հատման, միավորման և տարբերության սահմանումները կարելի է գրառել համառոտ՝

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \in B\}\,,\ A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ կամ } x \in B\}\,,\ A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}:$$

Այս գործողություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով. ցանկացած A, B, C բազմությունների դեպքում՝

ա) $A \cup A = A,\ A \cap A = A,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$;

բ) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ A \cup B = B \cup A,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$ $A \cap B = B \cap A$;

բ) հատկությունները կոչվում են $\cup$ և $\cap$ գործողությունների զուգորդականության և տեղափոխականության հատկություններ:

գ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

գ) հատկությունները կոչվում են բաշխական հատկություններ համապատասխանաբար միավորման և հատման նկատմամբ:

դ) $A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2),\ A \setminus (B_1 \cap B_2) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2)$:

դ) նույնությունները կոչվում են դե Մորգանի բանաձևեր:

Օրինակ 3: Ապացուցենք դե Մորգանի առաջին բանաձևը:

Այդ նպատակով ցույց տանք, որ $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է $(A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$ բազմությանը և հակառակը՝

$$x \in A \setminus (B_1 \cup B_2) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \cup B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_1 \text{ և } x \notin B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B_1 \\ x \in A \setminus B_2 \end{cases} \Rightarrow x \in (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$$

Այս օրինակում հակառակը ցույց տալու համար նոր դատողություններ անելու կարիք չկա. բոլոր քայլերը հակադարձվում են վերջից դեպի սկիզբ: Փաստորեն բոլոր $\Rightarrow$ անցումներն ունեն $\Leftrightarrow$ համարժեքության բնույթ: ■

Եթե ունենք (վերջավոր քանակով) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ բազմություններ, ապա նրանց հատումը և միավորումը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ որտեղ } i = 1, 2, \ldots, n\}$$
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{գոյություն ունի } i, \text{ որ } x \in A_i\}$$

Այս դեպքում վերը բերված դե Մորգանի բանաձևերը գրառվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i),$$

որտեղ $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$-ը կամայական բազմություններ են:

Հաճախ դիտարկվում են բազմություններ, որոնց տարրերը իրենք ևս բազմություններ են: Այդպիսի բազմությունը կոչվում է **բազմությունների ընտանիք**:

Օրինակ 4: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության մեջ գտնվող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Սա բազմությունների ընտանիք է, որի տարրերը (ուղիղները) իրենք ևս բազմություններ են կազմված $\mathbb{R}^2$-ի կետերից:

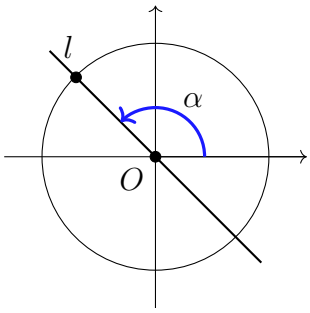
Դիցուք I-ն բազմություն է, որի ամեն մի $i \in I$ տարրի համապատասխանեցված է որևէ X_i բազմություն: Այս X_i բազմություններից կազմված բազմությունը (բազմությունների ընտանիքը) նշանակվում է $\{X_i;\, i \in I\}$ և կոչվում է **բազմությունների ինդեքսավորված ընտանիք**: Այստեղ I-ն կոչվում է **ինդեքսների բազմություն**:

Նշենք, որ բազմությունների ընտանիքը ինդեքսավորելիս սովորաբար որպես ինդեքսավորվող բազմություն ընտրում են արդեն հայտնի և լավ ընկալվող որևէ բազմություն կամ նրա որևէ մասը:

Օրինակ, թվերից կազմված հաջորդականության տարրերը սովորաբար ինդեքսավորում են (համարակալում են) կամ բոլոր բնական թվերով, կամ այդ բազմության որևէ վերջավոր մասով:

Օրինակ 5: Ինդեքսավորենք կոորդինատային $\mathbb{R}^2$ հարթության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Նկատենք, որ ամեն մի այդպիսի ուղիղ

միարժեքորեն որոշվում է այն ամենափոքր α անկյունով, որով պետք է պտտել OX առանցքը O կետի շուրջը ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի l ուղղի հետ:

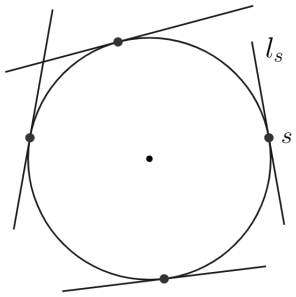


Ուսպի տվյալ բազմության տարրերը կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Այստեղից նաև ստանում ենք, որ ցանկացած շրջանագծի կետերի բազմությունը նույնպես կարելի է ինդեքսավորել $[0, 2\pi)$ միջակայքի բոլոր թվերով:

Օրինակ 6: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության մեջ այն բոլոր ուղիղներից կազմված L բազմությունը, որոնք գտնվում են կոորդինատների 0 սկզբնակետից 1 միավոր հեռավորության վրա: Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է ինդեքսավորել L-ը: Նկատենք, որ այդ բազմության ամեն մի տարր (ուղիղ) ունի ճիշտ մի ընդհանուր կետ $S = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ շրջանագծի հետ (շոշափման կետը): Նշանակելով l_s-ով շրջանագծի $s \in S$ կետով տարված շոշափողը, կարող ենք L բազմությունը ներկայացնել որպես բազմությունների ինդեքսավորված ընտանիք՝ $L = \{l_s;\ s \in S\}$:

Այս օրինակում որպես ինդեքսների բազմություն հանդես եկավ միավոր շրջանագծի բոլոր կետերից կազմված S բազմությունը:



Նկատենք, որ ամեն մի կոնկրետ դեպքում ինդեքսավորող բազմության ընտրությունը կատարվում է (ոչ միակ եղանակով) ըստ նպատակահարմարության:

Հաշվի առնելով դե Մորգանի բանաձևերի կարևորությունը՝ նշենք, որ դրանք ճիշտ են ցանկացած ինդեքսավորված բազմությունների դեպքում. եթե ունենք որևէ $\{X_i;\ i \in I\}$ ինդեքսավորված ընտանիք և X բազմություն, ապա

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i), \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \tag{1}$$

Ապացուցենք (1) նույնություններից երկրորդը.

$$x \in \left(X \setminus \bigcap_{i\in I} X_i\right) \;\Leftrightarrow\; \left(x \in X \text{ և } x \notin \bigcap_{i\in I} X_i\right) \;\Leftrightarrow\; \big(x \in X \text{ և գոյություն ունի}$$
$$i_0 \in I \text{ ինդեքս, որ } x \notin X_{i_0}\big) \;\Leftrightarrow\; x \in (X \setminus X_{i_0}) \Leftrightarrow\; x \in \bigcup_{i\in I}(X \setminus X_i) \quad \blacksquare$$

Եթե Y-ը X-ի ենթաբազմություն է, ապա $X \setminus Y$-ը կոչվում է **Y-ի լրացում X-ում**: Մասնավոր դեպքում, երբ $\{X_i;\, i \in I\}$ ընտանիքի բոլոր X տարրերը միևնույն X բազմության ենթաբազմություններ են՝ $X_i \subset X$, դե Մորգանի (1) բանաձևերն ընդունում են մտապահման հեշտ ձև. միավորման լրացումը լրացումների հատումն է, իսկ հատման լրացումը լրացումների միավորումն է:

Տարբեր բազմություններ միմյանց հետ համեմատելու միջոցը **բազմությունների արտապատկերումներն** են:

Եթե X բազմության ամեն մի x տարրի համապատասխանեցված է Y բազմության որևէ y տարր, ապա ասում են, որ տրված է X բազմության $f : X \to Y$ արտապատկերում Y բազմության մեջ:

Այս դեպքում y տարրը կոչվում է x տարրի կերպար և նշանակվում է $y = f(x)$: Ինքը՝ X բազմությունը կոչվում է f արտապատկերման **որոշման տիրույթ**, իսկ Y-ը՝ f-ի **արժեքների տիրույթ**: Ամեն մի ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f(A) \subset Y$ կերպարը, որպես Y-ի ենթաբազմություն՝ կազմված Y-ի այն բոլոր y տարրերից, որոնց համար գոյություն ունի $x \in X$ տարր, որ $f(x) = y$: Այսպիսով՝ եթե $A \neq \varnothing$, ապա կրճատ՝ $f(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ և } f(x) = y\}$: Իսկ $A = \varnothing$ դեպքում համարվում է $f(\varnothing) = \varnothing$:

Եթե $Y \subset X$, ապա դիտարկվում է $i : Y \to X$ արտապատկերում՝ սահմանելով $i(y) = y$, $\forall\, y \in Y$ տարրի համար: Ընդունված է i արտապատկերումն անվանել **Y բազմության ներդրում X բազմության մեջ**:

Ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության համար սահմանվում է նրա $f^{-1}(B)$ **նախակերպարը** $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում որպես X-ի ենթաբազմություն՝ կազմված X-ի այն բոլոր x տարրերից, որ $f(x) \in B$: Կրճատ՝ $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$: Պարզ է, որ $f^{-1}(Y) = X$, և համարվում է $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ ցանկացած $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում:

Նշենք նաև, որ ընդունված է Y-ի մի տարր պարունակող ամեն մի $\{y_0\}$ ենթաբազմության $f^{-1}(\{y_0\})$ նախակերպարը X-ում գրառել ավելի պարզ՝ $f^{-1}(y_0)$ տեսքով և անվանել y_0 տարրի նախակերպար $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում:

Օրինակ 7: Դիցուք X և Y բազմությունները կազմված են երկուական տարրերից՝ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$: Դիտարկենք $f : X \to Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $f(x_1) = f(x_2) = y_2$:

Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք գտնել X-ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների կերպարները Y-ում և Y-ի բոլոր 4 ենթաբազմությունների նախակերպարները X-ում:

Թեորեմ 1: Ամեն մի $f : X \to Y$ արտապատկերման և կամայական $X_1, X_2 \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), \quad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2),$$
$$f(X_1) \setminus f(X_2) \subset f(X_1 \setminus X_2):$$

Ապացուցենք, օրինակ, դրանցից երկրորդը՝

$y \in f(X_1 \cap X_2) \;\Rightarrow\; (\exists\, x \in X_1 \cap X_2$ և $f(x) = y) \;\Rightarrow\; (x \in X_1,\; x \in X_2$ և $f(x) = y) \;\Rightarrow$ $(y \in f(X_1)$ և $y \in f(X_2)) \;\Rightarrow\; y \in f(X_1) \cap f(X_2)$:

Հետևաբար $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$: ■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$: Իրոք, օրինակ 7-ում վերցնելով $X_1 = \{x_1\},\; X_2 = \{x_2\}$ ստանում ենք $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, ուստի $f(X_1 \cap X_2) = \varnothing$, մինչդեռ $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y_2\} \neq \varnothing$: Հետևաբար տեղի չունի $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ ներդրում:

Նշենք, որ թեորեմ 1-ում բերված առաջին երկու առնչությունները ճիշտ են X բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{X_i;\, i \in I\}$ ինդեքսավորված ընտանիքի դեպքում՝

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f\left(X_i\right), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f\left(X_i\right)$$

Թեորեմ 2: Կամայական $f : X \to Y$ արտապատկերման և $Y_1, Y_2 \subset Y$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), \quad f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2),$$
$$f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2):$$

Ապացուցենք դրանցից առաջինը՝

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in Y_1 \\ f(x) \in Y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(Y_1) \\ x \in f^{-1}(Y_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ Y բազմության ենթաբազմությունների կամայական $\{Y_i;\, i \in I\}$ ինդեքսավորված ընտանիքի դեպքում

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \tag{2}$$

Թեորեմ 3: Կամայական $f : X \to Y$ արտապատկերման և $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{3}$$

Ապացուցում: Իրոք, $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists\, x \in f^{-1}(B)$, որ $f(x) = y) \Rightarrow (f(x) \in B)$ $\Rightarrow$ $y \in B$: Հետևաբար $f(f^{-1}(B)) \subset B$: Նման ձևով՝ $x \in A \Rightarrow (f(x) \in f(A)) \Rightarrow$ $x \in f^{-1}(f(A))$: Հետևաբար $A \subset f^{-1}(f(A))$: ■

Վերը բերված օրինակ 7-ում վերցնելով $A = \{x_1\}$, $B = \{y_1, y_2\}$՝ համոզվում ենք, որ ընդհանուր դեպքում (3) բանաձևերում ներդրման $\subset$ նշանները չեն կարող փոխարինվել համընկման $=$ նշանով:

Սահմանում: $f : X \to Y$ արտապատկերումը կոչվում է **ներդիր** կամ **ինյեկտիվ** արտապատկերում, եթե X-ի $\forall\, x_1 \neq x_2$ տարրերի դեպքում $f(x_1) \neq f(x_2)$: Այնուհետև, $f : X \to Y$ արտապատկերումը կոչվում է **վրադիր** կամ **սյուրյեկտիվ** արտապատկերում, եթե $\forall\, y \in Y$ տարրի համար $\exists\, x \in X$ տարր, որ $f(x) = y$:

Նշենք, որ արտապատկերման սյուրյեկտիվությունը համարժեք է $f(X) = Y$ համընկմանը:

Նկատենք, որ օրինակ 7-ում բերված f արտապատկերումը ոչ ինյեկտիվ է և ոչ էլ սյուրյեկտիվ է:

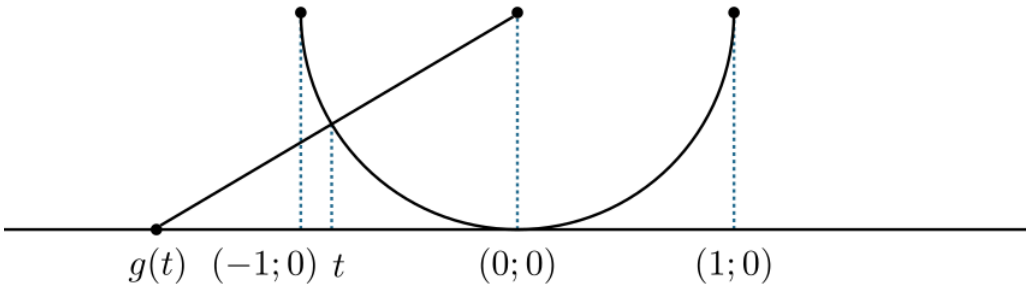
Միաժամանակ ինյեկտիվ և սյուրյեկտիվ արտապատկերումը կոչվում է **բիյեկտիվ** կամ **փոխմիարժեք** արտապատկերում:

Ցանկացած X բազմության համար $x \mapsto x$, $x \in X$ համապատասխանությունը որոշում է $X \to X$ փոխմիարժեք արտապատկերում: Այն կոչվում է X-ի **նույնական արտապատկերում** և նշանակվում է id կամ $\mathbb{1}_X$ սիմվոլներով:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $f(n) = n + 1$ բանաձևով, փոխմիարժեք է (հիմնավորե՛ք) և տարբեր է $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ նույնական արտապատկերումից:

Ամեն մի փոխմիարժեք $f : X \to Y$ արտապատկերման համար սահմանվում է նրա **հակադարձ** $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերումը. որպես $\forall\, y \in Y$ տարրի $f^{-1}(y)$ կերպար սահմանվում է X-ի այն x տարրը, որ $f(x) = y$:

Օրինակ 9: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք արտապատկերում $(-1, 1) \to (-\infty, \infty)$: Այն կարող է սահմանվել անալիտիկորեն՝ $f(t) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} t$, $t \in (-1, 1)$ բանաձևով, կամ երկրաչափորեն՝ ստորև նկարագրվող եղանակով: Գծագրում $(-\infty, \infty)$ թվային ուղիղը պատկերված է որպես OX կոորդինատային առանցք:



Դիտարկենք $M(0;1)$ կենտրոնով և 1 շառավղով կիսաշրջանագիծ առանց իր երկու $A(-1;1)$ և $B(1;1)$ ծայրակետերի: Այժմ կամայական $t \in (-1;1)$ կետի $g(t)$ կերպարը ստանալու համար t կետից ուղղահայաց բարձրանում ենք մինչև կիսաշրջանագծի T կետը և ապա գտնում ենք $g(t) \in (-\infty, +\infty)$ կետը՝ որպես MT ճառագայթի հատման կետ OX առանցքի հետ: Առաջարկում ենք ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ վերը սահմանված $f, g : (-1;1) \to (-\infty, +\infty)$ արտապատկերումները փոխմիարժեք են, ինչպես նաև նկարագրել նրանց հակադարձ արտապատկերումները: Նկատենք նաև, որ f-ը և g-ն նույնը չեն:

Եթե ունենք $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է նրանց $g \circ f : X \to Z$ **համադրույթ** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ բանաձևով:

Եթե $f : X \to Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում է, ապա ինչպես արդեն գիտենք, գոյություն ունի նրա հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերումը և իմաստ ունեն $f^{-1} \circ f$ և $f \circ f^{-1}$ համադրույթները: Հեշտ է տեսնել, որ

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y :$$

Ցանկացած $f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to T$ արտապատկերումների դեպքում իմաստ ունեն $(h \circ g) \circ f$ և $h \circ (g \circ f)$ համադրույթները, որոնք որոշում են միևնույն $X \to T$ արտապատկերումը՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: Իրոք, նշանակելով $h \circ g$ և $g \circ f$ համադրույթները համապատասխանաբար u և v, ցանկացած $x \in X$ տարրի համար կունենանք՝

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$
$$((h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ v)(x) = h(v(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) :$$

Հետևաբար՝ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 1-ի վերաբերյալ

1.1. Կամայական A, B, C բազմությունների համար ապացուցեք հետևյալ նույնությունները.

ա) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

բ) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

գ) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

դ) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

1.2. Ցույց տվեք, որ օրինակ 6-ում ուղիղների L ընտանիքը կարելի է ուղղակի ինդեքսավորել նաև $[0, 2\pi)$ միջակայքի թվերով:

1.3. Դիտարկենք էվկլիդյան կոորդինատային $\mathbb{R}^3$ տարածության սկզբնակետով անցնող բոլոր հարթությունների ընտանիքը: Այս ընտանիքի համար գտեք որևէ ինդեքսավորող բազմություն:

1.4. Ապացուցեք դե Մորգանի (1) բանաձևերից առաջինը:

1.5. Թեորեմ 1-ի բերված ապացույցը կազմված է որպես 4 հետևությունների հաջորդականություն: Պարզեք՝ դրանցից ո՞րը չի հակադարձվում:

1.6. Օգտվելով օրինակ 7-ում սահմանված $f : X \to Y$ արտապատկերումից և X-ում ընտրելով X_1 և X_2 հարմար ենթաբազմություններ՝ ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում թեորեմ 1-ի $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ ներդրումը չի վերածվում աջ և ձախ մասերի համընկման:

1.7. Ապացուցեք թեորեմ 1-ի երեք նույնություններից առաջինը և երրորդը:

1.8. Ապացուցեք թեորեմ 2-ի երկրորդ և երրորդ նույնությունները:

1.9. Թեորեմ 3-ի երկու պնդումների ապացույցներում ո՞ր հետևումներն են, որ չեն հակադարձվում:

1.10. Ապացուցեք (2) նույնությունները:

1.11. Դիտարկենք երկու հարց կապված թեորեմ 3-ի հետ. ինչպիսի՞ն պետք է լինի $f : X \to Y$ արտապատկերումը, որ տեղի ունենա

ա) $f^{-1}(f(A)) = A$ համընկում ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում,

բ) $f(f^{-1}(B)) = B$ համընկում ցանկացած $B \subset Y$ ենթաբազմության դեպքում:

Ապացուցեք, որ ա) դեպքում անհրաժեշտ և բավարար պայման է f արտապատկերման ինյեկտիվությունը, իսկ բ) դեպքում՝ f-ի սյուրյեկտիվությունը:

1.12. Նշանակենք h-ով $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումների $g \circ f : X \to Z$ համադրությունը՝ $h = g \circ f$: Ապացուցեք, որ ամեն մի $T \subset Z$ ենթաբազմության դեպքում $h^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T))$:

1.13. Դիցուք $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ապացուցեք, որ f-ը ներդիր, g-ն վրադիր արտապատկերումներ են:

1.14. Դիցուք $f : X \to Y$ և $g : Y \to X$ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ապացուցեք, որ f-ը և g-ն փոխմիարժեք, մեկը մյուսին հակադարձ արտապատկերումներ են:

Թեմա 2

Բազմությունների դեկարտյան (ուղիղ) արտադրյալ, արտապատկերումների ուղիղ արտադրյալ, անկյունագծային արտապատկերում: Համարժեքության հարաբերություն բազմության վրա, ֆակտոր-բազմություն:

Գոյություն ունի տրված բազմության կամ մի քանի բազմությունների միջոցով նոր բազմություն կառուցելու երեք հիմնական եղանակ: Դրանք են՝

ա) բազմությունից ենթաբազմության առանձնացումը,

բ) բազմությունների ուղիղ (դեկարտյան) բազմապատկումը,

գ) տվյալ բազմության ֆակտոր-բազմության կառուցումը:

Սրանցից առաջինը քննարկվեց թեմա 1-ում: Այժմ մյուս երկուսը:

Երկու՝ A և B ոչ դատարկ **բազմությունների դեկարտյան** կամ **ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է այն բազմությունը (նշանակվում է $A \times B$), որի տարրերը բոլոր (a, b) կարգավորված զույգերն են, որտեղ $a \in A$, $b \in B$:

Մի քանի $A_1, \ldots, A_n$ ոչ դատարկ **բազմությունների ուղիղ արտադրյալ** կոչվում է $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ բազմությունը և նշանակվում է $A_1 \times \cdots \times A_n$ կամ $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$: Այստեղ $(a_1, \ldots, a_n)$-ը $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից մեկական վերցրած տարրերի հաջորդականություն է: Մասնավոր դեպքում, երբ $A_1 = \cdots = A_n = A$, նրանց ուղիղ արտադրյալը նշանակվում է A^n: Եթե $A_1, \ldots, A_n$ բազմություններից որևէ մեկը դատարկ բազմություն է, ապա նրանց արտադրյալ է համարվում $\varnothing$ դատարկ բազմությունը:

Թեորեմ 1: Կամայական A, B, C, D-ն ոչ դատարկ բազմությունների համար տեղի ունեն հետևյալ համարժեքությունները.

ա) $(A \times C = B \times D) \Leftrightarrow A = B$ և $C = D$

բ) $(A \times C \subset B \times D) \Leftrightarrow A \subset B$ և $C \subset D$:

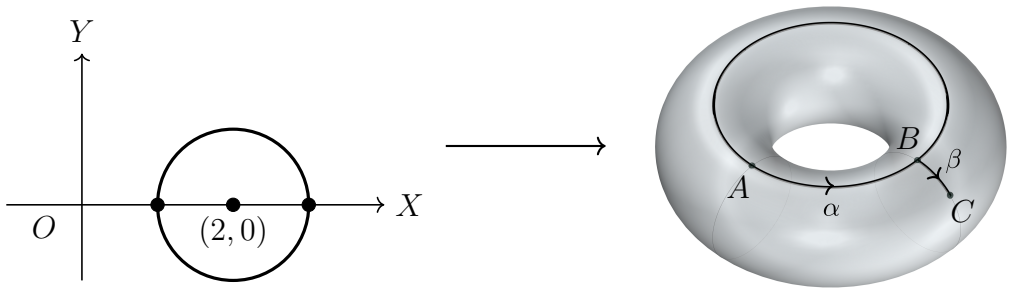
Երկու պնդումներն էլ անմիջականորեն հետևում են սահմանումներից:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ արտադրյալը (որտեղ $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է) կազմված իրական թվերի բոլոր $(r_1, \ldots, r_n)$ հաջորդականություններից: Այն կարող է նույնացվել n-չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային գծային տարածության բոլոր կետերի բազմության հետ:

Որպեսզի պարզ լինի հաջորդ օրինակը, դիտարկենք այն մակերևույթը, որն առաջանում է, երբ որևէ շրջանագիծ, օրինակ՝ $(2, 0)$ կենտրոնով և 1 շառավղով

$(x-2)^2+y^2=1$ շրջանագիծը, պտտվում է նրան չհատող OY առանցքի շուրջը $\mathbb{R}^3$ տարածության մեջ՝ կատարելով մեկ լրիվ պտույտ: Այսպիսի մակերևույթները կոչվում են **տոր** և ունեն փրկարար օղակի տեսք: Պարզ է, որ շրջանագծի ամեն մի (x,y) կետ պտույտի ընթացքում գծում է շրջանագիծ: Այն կոչվում է **տորի զուգահեռական**: Տորն ամբողջովին ծածկված է իր զուգահեռականներով: Պարզ է նաև, որ OY առանցքով անցնող ամեն մի հարթություն հատում է տորը շրջանագծով: Դրանք նույնպես ամբողջովին ծածկում են տորը և կոչվում են **տորի միջօրեականներ**:

Նկատենք, որ տորի որևէ սևեռված A կետից կարելի է տեղափոխվել տորի ցանկացած այլ կետ՝ կատարելով տարածության մեջ երկու պտույտ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$ անկյուններով: Ստորև նկարում α և β անկյունները պատկերված են տորի զուգահեռականների և միջօրեականների AB և BC աղեղների տեսքով: Ընդ որում, աղեղները հաշվարկվում են սևեռված A կետից, սևեռված ուղղություններով և սևեռված հաջորդականությամբ: Այժմ տորի C կետ տեղափոխվելու համար նախ A կետից անջատվում է α աղեղ զուգահեռականով, այնուհետև B կետից՝ β աղեղ միջօրեականով: Այսպիսով կամայական տորի ցանկացած կետ միարժեքորեն ինդեքսավորվում է (α,β) թվազույգով, որտեղ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$:

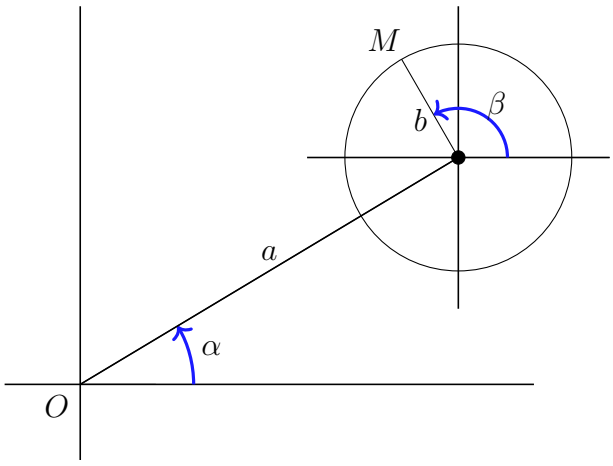


Օրինակ 2: Դիտարկենք $S\times S$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ S-ը որևէ սևեռված շրջանագծի բոլոր կետերի բազմությունն է: Այն կոչվում է **վերացական տոր**: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $S\times S$ վերացական տորի բոլոր կետերի և կամայական տորի (որպես մակերևույթի) բոլոր կետերի միջև:

Թեմա 1-ի օրինակ 4-ից գիտենք, որ կամայական S շրջանագծի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր $[0,2\pi)$ անկյուններով: Հետևաբար $S\times S$-ի կետերը կարելի է ինդեքսավորել բոլոր (α,β) թվազույգերով, որտեղ $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$: Բայց ինչպես տեսանք, կամայական տորի կետերը նույնպես ինդեքսավորվում են այդպիսի թվազույգերով: Ուստի ցանկացած տոր կարող է դիտվել որպես $S\times S$ վերացական տորի **երկրաչափական մոդել**:

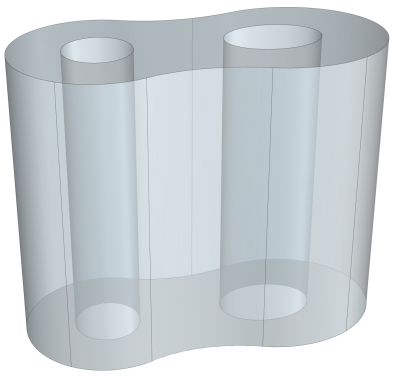
Օրինակ 3: Կրկնակի ճոճանակ կոչվում է միմյանց հետ շարժական ձևով միացված a և b ձողերից կազմված սարքը: Դրանցից a-ն ազատ պտտվում է իր O անշարժ ծայրակետի շուրջը, իսկ b-ն՝ a-ի հետ միացման շարժական կետի շուրջը: Հեշտ է տեսնել, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն կրկնակի

ճոճանակի բոլոր $M(\alpha, \beta)$ դիրքերի բազմության և փորի բոլոր կետերի բազմության միջև:



Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, իսկ I-ն $[0,1]$ հատվածն է: $X \times I$ ուղիղ արտադրյալը կոչվում է **գլան X հիմքով**: Նրա $X \times \{0\}$ և $X \times \{1\}$ ենթաբազմությունները կոչվում են **գլանի ստորին** և **վերին հիմքեր**: Մասնավոր դեպքում, երբ X-ը որևէ հարթ պատկեր է, $X \times I$ բազմությունը երկրաչափորեն կարող է պատկերվել որպես գլանաձև մարմին $\mathbb{R}^3$-ում:

Օրինակ 4: Ստորև պատկերված է $X \times I$ տեսքի մարմին $\mathbb{R}^3$-ում: Նրա X հիմքն ունի հարթության շրջանաձև տիրույթի տեսք, որից հեռացված են երկու ավելի փոքր շրջանաձև տիրույթներ:



$X \times \{1\}$

$X \times I$

$X \times \{0\}$

Թեորեմ 2: Ցանկացած A, B, C, D բազմությունների դեպքում

ա) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

բ) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$,

գ) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

դ) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ մյուսները թողնելով ընթերցողին.

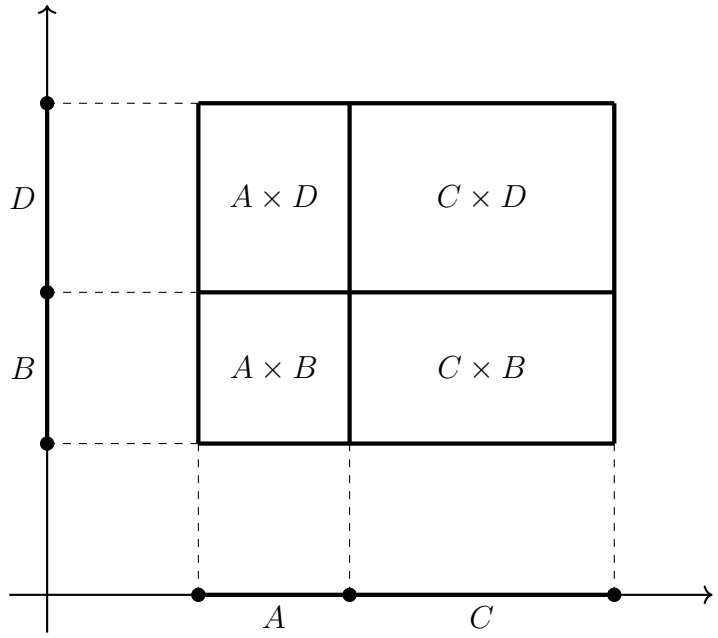
$$x \in (A \times B) \cup (C \times D) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in A \times B \\ x \in C \times D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \exists\, a \in A \text{ և } b \in B,\ \text{որ } x = (a,b) \\ \exists\, c \in C \text{ և } d \in D,\ \text{որ } x = (c,d) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \cup C \text{ և } b \in B \cup D \\ c \in A \cup C \text{ և } d \in B \cup D \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} (a,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \\ (c,d) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (A \cup C) \times (B \cup D) \;\Leftrightarrow\; ((A \times B) \cup (C \times D)) \subset ((A \cup C) \times (B \cup D))$$

■

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$: Դա ցույց տալու համար բերենք օրինակ:



Գծագրում A, B, C, D-ն թվային ուղղի հատվածներ են, բ)-ի ձախ մասը $A \times B$ և $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, աջ մասը՝ $A \times B$, $A \times D$, $C \times B$, $C \times D$ ուղղանկյունների միավորումն է, և դրանք նույնը չեն: ■

Բազմությունների $X \times Y$ արտադրյալի համար սահմանվում են $P_X : X \times Y \to X$ և $P_Y : X \times Y \to Y$ արտապատկերումներ $P_X(x,y) = x$ և $P_Y(x,y) = y$, $(x,y) \in X \times Y$ բանաձևերով: Դրանք կոչվում են $X \times Y$-ի **կանոնական պրոյեկցիաներ** համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ արտադրիչների վրա:

Այժմ քննարկենք երկու **արտապատկերումների արտադրյալ** հասկացությունը. եթե ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1$ և $f_2 : X_2 \to Y_2$ արտապատկերումներ, ապա սահմանվում է $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում՝ $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ բանաձևով (կոչվում է f_1-ի և f_2-ի արտադրյալ): Այս f_1, f_2, $f_1 \times f_2$ արտապատկերումները և կանոնական պրոյեկցիաները միմյանց հետ կապվում են երկու կոմուտատիվ դիագրամով՝

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_1}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_1}"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_2}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_2}"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Առաջին դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանակում է, որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_1 \circ P_{X_1}$ համադրությունները որոշում են միևնույն $X_1 \times X_2 \to Y_1$ արտապատկերումը, իսկ երկրորդ դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանակում է, որ նույնն են $P_{Y_2} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_2 \circ P_{X_2}$ համադրությունները:

Ցույց տանք առաջինի կոմուտատիվությունը. կամայական $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ զույգի համար մի կողմից ունենք

$$(P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2))(x_1, x_2) = P_{Y_1} \circ ((f_1 \times f_2)(x_1, x_2)) = P_{Y_1}(f_1(x_1), f_2(x_2)) = f_1(x_1),$$

իսկ մյուս կողմից ունենք

$$(f_1 \circ P_{X_1})(x_1, x_2) = f_1(P_{X_1}(x_1, x_2)) = f_1(x_1):$$

Ուստի $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ P_{X_1}$: ■

Այնուհետև, $f_1 \times f_2$-ի նմանությամբ սահմանվում է բազմությունների ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X_i \to Y_i$ արտապատկերումների

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$$

արտադրյալը՝

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)), \quad \text{որտեղ } x_i \in X_i$$

բանաձևով:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք $f_1 : X_1 \to Y_1,\ f_2 : X_2 \to Y_2$ կամայական արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A_1 \subset X_1,\ A_2 \subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում
$(f_1 \times f_2)(A_1 \times A_2) = f_1(A_1) \times f_2(A_2)$,

բ) ցանկացած $B_1 \subset Y_1$ և $B_2 \subset Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում
$(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն՝ թողնելով ա)-ի ապացուցումը ընթերցողին. $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \ \Rightarrow\ (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \ \Rightarrow\ (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2 \ \Rightarrow\ f_1(x_1) \in B_2$ և $f_2(x_2) \in B_2 \ \Rightarrow\ x_1 \in f_1^{-1}(B_1)$ և $x_2 \in f_2^{-1}(B_2) \ \Rightarrow\ (x_1, x_2) \in f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Այսպիսով ստացանք, որ $(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \subset f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$: Հակառակ ներդրումը հետևում է նրանից, որ իրականում բոլոր $\Rightarrow$ անցումները համարժեքություններ են: ■

Այժմ դիտարկենք արտապատկերումների ևս մի կառույց: Եթե ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ, որոնց որոշման տիրույթները նույն X բազմությունն է, ապա սահմանվում է $X \to Y_1 \times Y_2$ արտապատկերում $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ համադրումով:

Այդ արտապատկերումը նշանակվում է $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ և կոչվում է f_1-ով և f_2-ով ծնված **անկյունագծային արտապատկերում**: Այսպիսով $(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$:

Անկյունագծային արտապատկերում անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ մասնավոր $X = Y_1 = Y_2 = [a, b]$, $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_{[a,b]}$ դեպքում $[a, b]$ հատվածի կերպարը (f_1, f_2) արտապատկերման դեպքում $[a, b] \times [a, b]$ քառակուսու $\{(x, x) \mid x \in [a, b]\}$ անկյունագիծն է:

Նման ձևով սահմանվում է ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) քանակով $f_i : X \to Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ արտապատկերումներով ծնված անկյունագծային $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ արտապատկերումը՝ $(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ բանաձևով:

Թեորեմ 4: Ունենք $f_1 : X \to Y_1$ և $f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա

ա) ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $(f_1, f_2)(A) \subset f_1(A) \times f_2(A)$,

բ) ցանկացած $B_1 \in Y_1$ և $B_2 \in Y_2$ ենթաբազմությունների դեպքում $(f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$:

Ապացուցում: Ապացուցենք բ)-ն:

$$x \in (f_1, f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) \;\Leftrightarrow\; (f_1, f_2)(x) \in B_1 \times B_2 \;\Leftrightarrow\; (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in B_1 \times B_2$$
$$\Leftrightarrow\; f_1(x) \in B_1 \text{ և } f_2(x) \in B_2 \;\Leftrightarrow\; x \in f_1^{-1}(B_1) \text{ և } x \in f_2^{-1}(B_2) \;\Leftrightarrow\; x \in f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2):$$

■

Այժմ սահմանենք բազմության ֆակտոր-բազմություն հասկացությունը:

Դիցուք՝ X բազմությունը ներկայացված է իր մի քանի զույգ առ զույգ չհատվող, ոչ դատարկ X_i ենթաբազմությունների միավորման տեսքով՝ $X = \cup X_i$: Այսպիսով $X_i \subset X$, $X_i \neq \varnothing$ ցանկացած $i \in I$ ինդեքսի դեպքում և $X_i \cap X_j = \varnothing$ ցանկացած $i \neq j$ դեպքում:

Այս դեպքում ասում են, որ ունենք X **բազմության տրոհում** $\{X_i\}$, $i \in I$ ենթաբազմությունների:

Դիտարկենք նոր՝ $F(X)$ բազմություն (բազմությունների ընտանիք), որի տարրերը X-ի X_i ենթաբազմություններն են: Այն կոչվում է X բազմության **ֆակտոր-բազմություն՝ ծնված X-ի տվյալ տրոհումով**:

Օրինակ 5: Դիցուք X-ը ԵՊՀ բոլոր ուսանողների բազմությունն է, իսկ X_1, X_2, $\ldots$, X_{20}-ը նրա ենթաբազմություններն են ըստ ֆակուլտետների (համարենք, որ տվյալ պահին ֆակուլտետների քանակը 20 է): Այս դեպքում $F(X) = \{X_1, X_2, \ldots, X_{20}\}$:

Պատկերավորության համար թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն՝ կարող ենք $F(X)$-ը նույնացնել ԵՊՀ-ի բոլոր ֆակուլտետների բազմության հետ:

Նկատենք, որ նույն X բազմությունից կարելի է ստանալ նաև այլ ֆակտոր-բազմություններ: Դիտարկելով ԵՊՀ ուսանողների բազմության տրոհումը ըստ կուրսերի (1-ին, 2-րդ, 3-րդ, 4-րդ կուրսեր բակալավրիատում և 5-րդ, 6-րդ կուրսեր մագիստրատուրայում)՝ կստանանք մի նոր ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը կարելի է ինդեքսավորել բնական թվերի բազմության $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ենթաբազմության տարրերով:

Քննարկված երկու դեպքերից յուրաքանչյուրում, ելնելով պատկերավորության նկատառումներից՝ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացրինք **մոդելի** միջոցով: Մոդելի ընտրությունը նպատակահարմարության կամ ճաշակի հարց է: Բայց պարտադիր է, որ հաստատված լինի որոշակի փոխմիարժեք համապատասխանություն իրական ֆակտոր-բազմության և տվյալ մոդելի տարրերի միջև:

Դիցուք ունենք X բազմություն, նրա որևէ $\{X_i,\, i \in I\}$ տրոհում, և $F(X)$-ը X-ի ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանվում է $P : X \to F(X)$ **կանոնական արտապատկերում**. որպես $x \in X$ կետի $P(x)$ կերպար վերցվում է $F(X)$-ի այն X_i տարրը, որ $x \in X_i$: Պարզ է, որ P-ն սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և $F(X)$-ի տարրերի նախակերպարները որոշում են X-ի $\{X_i\}$ տրոհումը: Այսպիսով՝ X-ի յուրաքանչյուր $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն ծնում է որոշակի $P : X \to F(X)$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում:

Հակառակը նույնպես ճիշտ է՝ ամեն մի $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում որոշում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որի տարրերը Y բազմության տարրերի նախակերպարներն են X-ում:

Գոյություն ունի բազմությունից ֆակտոր-բազմություն կազմելու մեկ ուրիշ (վերը բերվածին համարժեք) եղանակ: Այն հիմնված է համարժեքության հարաբերություն հասկացության վրա: Համարժեքության հարաբերությունը երկտեղ հարաբերության տեսակ է: Պարզաբանենք այս բոլորը:

Դիցուք X բազմության $x_1, x_2, \ldots$ տարրերից կազմված զույգերի համար սահմանված է մի որոշակի հարաբերություն: Եթե տվյալ (x_i, x_j) զույգի համար այդ հարաբերությունը տեղի ունի, ապա դա արձանագրում են $x_i R x_j$ գրառումով (R-ը Relation բառի կրճատն է) և կարդում են՝ X-ի x_i և x_j տարրերը գտնվում են տվյալ R երկտեղ հարաբերության մեջ: Այս դեպքում ասում են, որ ունենք R երկտեղ հարաբերություն X բազմության վրա:

Օրինակ 6: Դիտարկենք իրական թվերի բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու իրական թվեր կամ հավասար են, կամ նրանցից մեկը մեծ է մյուսից» ասույթը: Սա երկտեղ հարաբերություն է, և $r_1 R r_2$-ը տեղի ունի իրական թվերի ցանկացած (r_1, r_2) զույգի դեպքում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությունը, իսկ որպես R երկտեղ հարաբերություն՝ «երկու ամբողջ թվերից մեծը առանց մնացորդի բաժանվում է

փոքրի վրա» ասույթը: Պարզ է, որ $6R2$, $2R6$, $-3R6$, $0R(-1)$ հարաբերությունները տեղի ունեն, իսկ $5R2$, $3R0$, $4R4$ հարաբերությունները՝ ոչ:

Այսպիսով՝ ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ R երկտեղ հարաբերությունը տեղի ունենա ցանկացած (x_i, x_j) զույգի համար:

Դիտողություն: Ընդհանուր դեպքում երկտեղ հարաբերության վերը բերված սահմանումն իր մեջ պարունակում է անորոշություն. չի հստակեցվում՝ ինչ հասկանալ ասելով «հարաբերություն բազմության x_1, x_2 տարրերի միջև»: Երկտեղ հարաբերության խիստ սահմանումը հետևյալն է:

Սահմանում: X բազմության վրա երկտեղ հարաբերություն կոչվում է $X \times X$ ուղիղ արտադրյալի ցանկացած M ենթաբազմություն:

Ըստ այս սահմանման՝ համարվում է, որ x_iRx_j-ը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_i, x_j) \in M$:

Այսուհետև մեզ համար կարևոր են լինելու երկտեղ հարաբերությունների հետևյալ հատկությունները: Ասում են, որ X-ի վրա տրված R երկտեղ հարաբերությունը (այսինքն՝ $X \times X$-ի M ենթաբազմությունը) օժտված է

1. **ինքնահամալուծության** հատկությամբ, եթե $\forall x \in X$ տարրի համար xRx-ը տեղի ունի (այսինքն՝ $(x, x) \in M$ ցանկացած $x \in X$ տարրի համար),

2. **համաչափության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ x_1Rx_2-ը տեղի ունի, հետևում է, որ x_2Rx_1-ը ևս տեղի ունի (այսինքն $(x_1, x_2) \in M \;\Rightarrow\; (x_2, x_1) \in M$),

3. **փոխանցականության** հատկությամբ, եթե այն բանից, որ տեղի ունեն x_1Rx_2 և x_2Rx_3, հետևում է, որ տեղի ունի x_1Rx_3-ը (այսինքն եթե $(x_1, x_2) \in M$, $(x_2, x_3) \in M \;\Rightarrow\; (x_1, x_3) \in M$):

Հասկանալի է, որ երկտեղ հարաբերությունը կարող է բավարարել կամ չբավարարել 1-3 հատկություններին, կամ դրանց մի մասին:

Օրինակ 8: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության վրա դիտարկենք չորս՝ R_1, R_2, R_3, R_4 երկտեղ հարաբերություններ, սահմանելով՝

ա) $xR_1y \;\Leftrightarrow\; (x > 0$ և $y > 0)$,

բ) $xR_2y \;\Leftrightarrow\; x$-ը բաժանվում է y-ի վրա առանց մնացորդի,

գ) $xR_3y \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \geq 0$,

դ) $xR_4y \;\Leftrightarrow\; (x - y)$-ը բաժանվում է 5-ի վրա առանց մնացորդի:

Սրանցից առաջինում տեղի չունի ինքնահամալուծություն հատկությունը՝ $(-1)R_1(-1)$-ը տեղի չունի: Երկրորդում տեղի չունի համաչափության հատկությունը՝ $6R_22$-ը տեղի ունի, բայց $2R_26$-ը տեղի չունի: Երրորդում տեղի չունի փոխանցականության հատկությունը: Իրոք, $(-4R_30)$ և $0R_32$-ը տեղի ունեն, բայց $(-4)R_32$-ը տեղի չունի: Չորրորդ օրինակում բավարարվում են բոլոր երեք հատկությունները:

Սահմանում: Բազմության վրա տրված երկտեղ հարաբերությունը կոչվում է **համարժեքության հարաբերություն**, եթե այն օժտված է վերը բերված 1-3 հատկություններով:

Այսպիսով, օրինակ 8-ում բերված չորս երկտեղ հարաբերություններից համարժեքության հարաբերություն է միայն R_4-ը:

Դիցուք ունենք R համարժեքության հարաբերություն X բազմության վրա:

Սահմանում: Որևէ $x \in X$ տարրի **համարժեքության դաս** տվյալ համարժեքության հարաբերության նկատմամբ (նշանակվում է $[x]$), կոչվում է X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունը, որոնք գտնվում են R հարաբերության մեջ x տարրի հետ՝ $[x] = \{x' \in X \mid x'Rx\}$:

Այն դեպքում, երբ R համարժեքության հարաբերության նկատմամբ տեղի ունի x_1Rx_2-ը, ապա ասում են, որ $x_1, x_2 \in X$ տարրերը **համարժեք են միմյանց** տվյալ՝ R հարաբերության նկատմամբ: Ուստի վերը բերված սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես. $x \in X$ տարրի համարժեքության դասը X-ի այն բոլոր տարրերից կազմված ենթաբազմությունն է, որոնք համարժեք են x-ին R-ի նկատմամբ:

Թեորեմ 5: Դիցուք R-ը որևէ համարժեքության հարաբերություն է X-ի վրա: Ապա համարժեքության դասերն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1. ցանկացած համարժեքության դաս X-ի ոչ դատարկ ենթաբազմություն է,
2. ցանկացած երկու համարժեքության դասեր կամ ունեն դատարկ հատում, կամ էլ համընկնում են,
3. X-ի բոլոր համարժեքության դասերի միավորումը X-ն է:

Ապացուցում: 1-ը և 3-ը հետևում են նրանից, որ $x \in [x]$ կամայական x-ի դեպքում:

Ապացուցենք 2-ը: Եթե $[x_1] \cap [x_2] \neq \varnothing$, ապա գոյություն ունի $x_3 \in [x_1] \cap [x_2]$: Ունենք՝ $x_3 \in [x_1]$ և $x_3 \in [x_2] \Rightarrow (x_3Rx_1$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow (x_1Rx_3$ և $x_3Rx_2) \Rightarrow x_1Rx_2$: Ցույց տանք, որ $[x_1] \subset [x_2]$: Դիտարկենք կամայական $x \in [x_1]$ տարր: Ունենք՝

$$xRx_1 \text{ և } x_1Rx_2 \Rightarrow xRx_2 \Rightarrow x \in [x_2] \Rightarrow [x_1] \subset [x_2]$$

Նման ձևով ստանում ենք $[x_2] \subset [x_1]$, ուստի $[x_1] = [x_2]$: ■

Հետևանքներ թեորեմ 5-ից: X բազմության վրա տրված R համարժեքության հարաբերությունը որոշում է X-ի որոշակի տրոհում՝ կազմված զույգ առ զույգ չհատվող $[x]$ համարժեքության դասերից: Իր հերթին այդ տրոհումը որոշում է X-ի ֆակտոր-բազմություն, որը նշանակվում է X/R (կարդացվում է՝ X բազմություն ֆակտոր-բազմություն՝ որոշված R համարժեքության հարաբերությունով):

Որպես օրինակ դիտարկենք R_4 համարժեքության հարաբերությունը օրինակ 8-ում: Այս դեպքում երկու ամբողջ թվեր համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանք 5-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: Ուստի ունենք միմյանց հետ չհատվող հինգ համարժեքության դաս, որոնք ներկայացվում են $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ տեսքերի թվերով:

Հետևաբար տվյալ ֆակտոր-բազմությունը կարող ենք ներկայացնել, օրինակ, $\{0;1;2;3;4\}$ մոդելի տեսքով:

Անդրադառնալով ֆակտոր-բազմության առաջին սահմանմանը՝ նկատենք, որ իրականում ցանկացած $F(X)$ ֆակտոր-բազմություն կարող է ներկայացվել որպես X/R տեսքի ֆակտոր-բազմություն, ինչ-որ R համարժեքության հարաբերության միջոցով: Իրոք, դիցուք ունենք X բազմության ինչ-որ $\{X_i,\ i \in I\}$ տրոհում և $F(X)$-ը այդ տրոհումով որոշված ֆակտոր-բազմությունն է: Սահմանենք X-ի վրա R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ x_1 և x_2 տարրերի համար տեղի ունի $x_1 R x_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $i \in I$, որ $x_1, x_2 \in X_i$: Հեշտ է ստուգել, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է, ընդ որում համարժեքության դասերը X_i ենթաբազմություններն են: Հետևաբար $F(X)$ ֆակտոր-բազմությունը համընկնում է X/R ֆակտոր-բազմության հետ:

Բերենք ֆակտոր-բազմությունների ևս մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 9: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը: Կհամարենք, որ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ տարրերը (թվերը) գտնվում են R հարաբերության մեջ, եթե $(x_1 - x_2)$ տարբերությունը ամբողջ թիվ է: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ R-ը համարժեքության հարաբերություն է և որոշում է ֆակտոր-բազմություն: Որո՞նք են համարժեքության դասերը: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի թիվ $[0,1)$ հատվածից, և հակառակը՝ $[0,1)$ հատվածի յուրաքանչյուր կետ (թիվ) պարունակվում է համարժեքության որևէ դասում: Այսպիսով՝ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $\mathbb{R}/R$ ֆակտոր-բազմության բոլոր տարրերի և $[0,1)$ միջակայքի կետերի միջև: Ուստի կարող ենք տվյալ ֆակտոր-բազմությունը ներկայացնելու համար որպես մոդել վերցնել $[0,1)$, կամ $(-1,0]$, կամ $\left[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, և ընդհանրապես ցանկացած $[a,b)$ կամ $(a,b]$ տեսքի միջակայք՝ պայմանով, որ $b-a=1$:

Համեմատելով $[0,1)$ և $(0,1]$ մոդելները՝ նկատենք, որ դրանցից առաջինում 0 թվին համապատասխանող տարրը ֆակտոր-բազմությունում նույնն է, ինչ երկրորդ մոդելում 1 թվին համապատասխանող տարրը նույն ֆակտոր-բազմությունում: Ուստի ավելի բնական է թվում այն տարբերակը, երբ որպես ֆակտոր-բազմության մոդել վերցնենք օրինակ $[0,1]$ փակ հատվածը, բայց միմյանց հետ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0,1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը: Այսպիսի նույնացումը մեզ բերում է մի նոր մոդելի, որը բնական է ներկայացնել օվալի կամ շրջանագծի տեսքով: Այսպիսով՝ որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել, օրինակ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը:

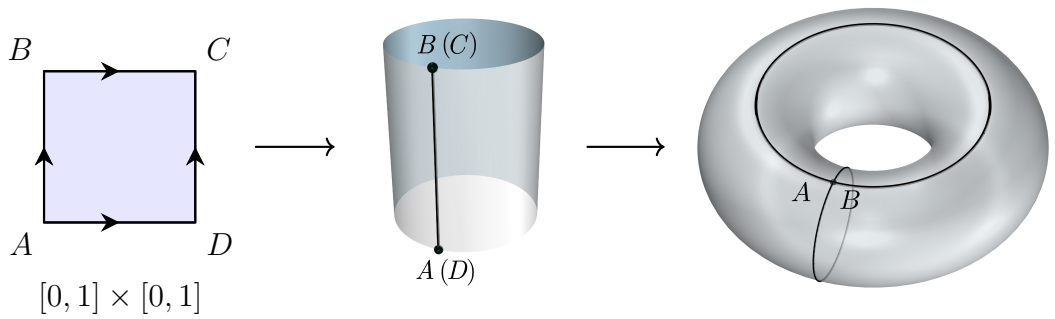
Օրինակ 10: Որպես X բազմություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և սահմանենք R երկտեղ հարաբերություն՝ համարելով, որ տեղի ունի $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $(x_1 - x_2)$-ը և $(y_1 - y_2)$-ը ամբողջ թվեր են: Սա համարժեքության հարաբերություն է (1-3 հատկությունների ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին): Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած համարժեքության դաս պարունակում է ճիշտ մի կետ $[0, 1) \times [0, 1)$ ուղիղ արտադրյալից: Այդ բազմությունը 1 միավոր կողմով կիսափակ քառակուսի է (նրա եզրագծում բացակայում են $(1, y)$ կետերը, որտեղ $1 \geq y \geq 0$ և $(x, 1)$ կետերը, որտեղ $1 \geq x \geq 0$): Այսպիսով, որպես տվյալ ֆակտոր-բազմության մոդել կարելի է վերցնել այդ քառակուսին:

Մեկ ուրիշ, ավելի պատկերավոր մոդել կստացվի, եթե վերցնենք 1 միավոր կողմով փակ $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսին՝ կատարելով նրա եզրագծի կետերի որոշ նույնացումներ: Քանի որ ամեն մի $y \in (0, 1)$ դեպքում տեղի ունի $(0, y)R(1, y)$ համարժեքություն, ուստի $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսու եզրագծի $(0, y)$ և $(1, y)$ կետերը որոշում են մի համարժեքության դաս: Նույն դատողությամբ՝ քառակուսու $(x, 0)$ և $(x, 1)$ կետերը ամեն մի $x \in (0, 1)$ դեպքում նույնպես որոշում են մի համարժեքության դաս: Բացի այդ, մի համարժեքության դաս են որոշում քառակուսու A, B, C, D չորս գագաթները: Ինչ վերաբերում է քառակուսու ներքին կետերին, ապա դրանցից յուրաքանչյուրը (ինչպես նախորդ մոդելի դեպքում) համարժեք է միայն ինքն իրեն և որոշում է միկետանոց համարժեքության դաս:

Այժմ ստացված ֆակտոր-բազմության համար կառուցենք երկրաչափական մոդել:

Վերացական ֆակտոր-բազմությունից իրական մոդելի անցնելիս հարմար է յուրաքանչյուր համարժեքության դասի բոլոր տարրերը (կետերը) պատկերացնել միմյանց հետ ֆիզիկապես նույնացված: Որոշ հարթ պատկերների դեպքում (այդպիսին է $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսին) համարժեք կետերի ֆիզիկական նույնացումը կարելի է իրականացնել սովորական սոսնձումով:

Այժմ, նախ նույնացնելով (սոսնձելով) $[0, 1] \times [0, 1]$ քառակուսու AB և CD կողմերը (ըստ գծագրում նշված ուղղությունների)՝ ստանում ենք գլանաձև մակերևույթ կամ գլան: Այնուհետև սոսնձելով իրար գլանի ստորին և վերին հիմքերը ըստ AD-ի վրա նշված ուղղությունների՝ ստանում ենք տոր:



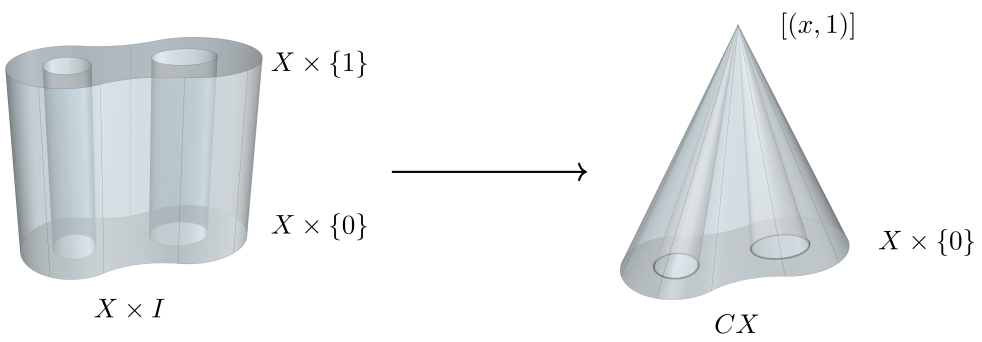
Այսպիսով, տվյալ ֆակտոր-բազմության համար որպես մոդել կարող է ծառայել նաև տորը: Նկատենք, որ քառակուսու A, B, C, D գագաթները նույնացվեցին իրար

հետ՝ վերածվելով փորի մի կետի: Բացի այդ, AB-ի և BC-ի նույնացումով ստացվեց փորի այդ կետով անցնող զուգահեռական, իսկ AD-ի և BC-ի նույնացումով՝ փորի միջօրեական:

Դիտողություն: Թե՛ օրինակ 9-ում և թե՛ օրինակ 10-ում միևնույն ֆակտոր-բազմության համար մենք կառուցեցինք տեսքով միմյանցից էապես տարբերվող մի քանի մոդելներ: Հարց է առաջանում. այդ օրինակներից յուրաքանչյուրի դեպքում ո՞ր մոդելն է գերադասելի և ո՞ր հիմքով: Այս հարցի պատասխանը կտրվի դասընթացի շարունակությունում, երբ կծանոթանանք տոպոլոգիական տարածություն, հոմեոմորֆ կամ միատեսակ տոպոլոգիական տարածություններ և տոպոլոգիական տարածության ֆակտոր-տարածություն հասկացություններին:

Օրինակ 11: Դիտարկենք $X \times I$ գլանը (տե՛ս օրինակ 4-ը), որտեղ I-ն $[0,1]$ հատվածն է, իսկ X-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է: Սահմանենք համարժեքության հարաբերություն գլանի կետերի բազմության համար:

Կհամարենք, որ գլանի ամեն մի (x,t) կետ, որտեղ $0 \le t < 1$, համարժեք է իրեն և միայն իրեն: Բացի այդ կհամարենք, որ գլանի վերին $X \times \{1\}$ հիմքի ցանկացած երկու $(x_1,1)$ և $(x_2,1)$ կետեր համարժեք են միմյանց: Սա իրոք համարժեքության հարաբերություն է (ստուգումը թողնվում է ընթերցողին): Համարժեքության դասերը միկետանոց $\{(x,t)\}$, $t \neq 1$ ենթաբազմություններն են, ինչպես նաև գլանի վերին հիմքի բոլոր կետերից կազմված $\{(x,1) \mid x \in X\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ֆակտոր-բազմությունը կոչվում է ***X* հիմքով կոն** և նշանակվում է CX: Այդ կոնի համար գագաթ է ծառայում $[(x,1)]$ դասը, որտեղ x-ը որևէ կետ է X-ից: Մասնավոր դեպքում, երբ $X = S$ շրջանագիծ է, CS-ի համար որպես մոդել կարող է ծառայել տարրական երկրաչափությունից հայտնի կոնը:



Խնդիրներ և հարցեր թեմա 2-ի վերաբերյալ

2.1. Ո՞ր դեպքերում է հնարավոր

ա) $A \times B = B \times A$ նույնություն,

բ) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ նույնություն:

2.2. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $[a,b] \times [c,d]$, $[a,b]^2$, $[a,b]^3$, $[a,b] \times [c,d]^2$ ուղիղ արտադրյալները, որտեղ $[a,b]$-ն և $[c,d]$-ն թվային ուղղի հատվածներ են:

2.3. Երկրաչափորեն մեկնաբանեք $A \times [0,1]$ ուղիղ արտադրյալը, որտեղ A-ն $\mathbb{R}^2$ հարթության

ա) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ շրջանագիծն է,

բ) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ շրջանն է:

2.4. Ապացուցեք թեորեմ 2-ի ա), գ), դ) նույնությունները:

2.5. Դիցուք X_1, X_2-ը որևէ բազմություններ են: Ապացուցեք, որ ցանկացած $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ ենթաբազմությունների դեպքում

$$P_{X_1}^{-1}(A) = A \times X_2, \quad P_{X_2}^{-1}(B) = X_1 \times B, \quad P_{X_1}^{-1}(A) \cap P_{X_2}^{-1}(B) = A \times B,$$

որտեղ P_{X_1}-ը և P_{X_2}-ը $X_1 \times X_2 \to X_1$, $X_1 \times X_2 \to X_2$ կանոնական պրոյեկցիաներն են:

2.6. Ապացուցեք թեորեմ 3-ի ա) նույնությունը:

2.7. Սահմանեք $S \times S$ վերացական տորի համար զուգահեռականի և միջօրեականի հասկացություններ՝ որպես $S \times S$ ուղիղ արտադրյալի ենթաբազմություններ:

2.8. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցեք.

$$h : S \times S \to S \times S, \quad h(s_1, s_2) = (s_2, s_1), \quad s_1, s_2 \in S$$

արտապատկերումը

ա) $S \times S$ վերացական տորը փոխմիարժեք արտապատկերում է ինքն իր վրա,

բ) h-ը վերացական տորի զուգահեռականները արտապատկերում է նրա միջօրեականների, իսկ միջօրեականները՝ զուգահեռականների:

2.9. Ապացուցեք, որ օրինակ 6-ի երկտեղ հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է: Նկարագրեք նրանով որոշվող ֆակտոր-բազմությունը:

2.10. $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր ուղիղներով կազմված (l_1, l_2) զույգերի համար սահմանված է ա) R' երկտեղ հարաբերություն՝ «տեղի ունի $l_1 R' l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1-ը և l_2-ը զուգահեռ են» ասույթով, և բ) R'' երկտեղ հարաբերություն՝ «տեղի ունի $l_1 R'' l_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ l_1 և l_2 ուղիղները կամ նույնն են, կամ զուգահեռ են» ասույթով:

Պարզեք, թե այս երկուսից որն է համարժեքության հարաբերություն, և որը՝ ոչ: Առաջին դեպքում նկարագրեք համարժեքության դասերը և ֆակտոր-բազմության համար կառուցեք որևէ երկրաչափական մոդել:

2.11. Թղթի թերթից կտրեք $A(-10,-1)$, $B(-10,1)$, $C(10,1)$, $D(10,-1)$ գագաթներով երկու ուղղանկյուն (մասշտաբը՝ 1 սմ): Մի դեպքում առանց ոլորելու՝ ստացված $ABCD$ ուղղանկյան AB կողմը սոսնձեք DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, D գագաթները և B, C գագաթները, իսկ մյուս դեպքում՝ կատարելով թղթի շերտի **մի** ոլորում՝ նորից սոսնձեք AB կողմը DC կողմի հետ այնպես, որ նույնացվեն A, C գագաթները և B, D գագաթները:

Համոզվեք, որ առաջին դեպքում կստացվի **գլանային մակերևույթ**, իսկ երկրորդ դեպքում կստացվի գլանաձև, բայց **ոչ գլանային մակերևույթ**, որը կոչվում է **Մյոբիուսի թերթ**: Նաև համոզվեք, որ առաջին մակերևույթի եզրագիծը կազմված է **երկու անջատ օվալից**, իսկ երկրորդի եզրագիծը՝ **մի օվալից**:

Սահմանեք կոորդինատային բացահայտ տեսքով $ABCD$ ուղղանկյան կետերի համար երկու (երկտեղ) համարժեքության հարաբերություն այնպես, որ արդյունքում ստացվող ֆակտոր-բազմություններից մեկը լինի գլանայինը, իսկ մյուսը՝ Մյոբիուսի թերթը:

2.12. Ի՞նչ կարող եք ասել մակերևույթների մասին (տե՛ս նախորդ խնդիրը), որոնք ստացվում են, երբ մինչև սոսնձումը կատարվում է թղթի շերտի 2 ոլորում, 3 ոլորում, և այլն:

Թեմա 3

Վերջավոր և անվերջ բազմություններ, բազմությունների քանակական համեմատումը, թեորեմներ հաշվելի բազմությունների վերաբերյալ: Բազմության հզորության հասկացությունը, Կանտորի թեորեմը: Պարադոքսները բազմությունների նաիվ տեսությունում:

Դիցուք A-ն որևէ ոչ դատարկ բազմություն է, նրանում ընտրենք որևէ $a_1 \in A$ տարր: Եթե $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$, ապա կարող ենք ընտրել ևս մի $a_2 \in A$ տարր: Եթե $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, ապա կարող ենք ընտրել ևս մի $a_3 \in A$ տարր և այսպես շարունակ: Հնարավոր է երկու դեպք. կա՛մ այս պրոցեսը ինչ-որ n-րդ քայլում կընդհատվի, և ուստի $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$-ը **վերջավոր բազմություն** է, կա՛մ էլ այս պրոցեսը վերջ չունի: Այս երկրորդ դեպքում A-ն կոչվում է **անվերջ բազմություն**:

Օրինակ 1: Վերցնենք 1 թիվը, նրան հաջորդում է $1 + 1 = 2$ թիվը, դրան հաջորդում է $2 + 1 = 3$ թիվը և այլն: Այս պրոցեսն անվերջ է: Ստացվող $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ բազմությունը կոչվում է բնական թվերի բազմություն: Կարո՞ղ ենք այն համարել լիովին կազմավորված ավարտուն բազմություն: Մաթեմատիկայում սա վիճելի հարց է:

Անվերջ բազմությունները լինում են երկու տեսակի, կապված անվերջության ընկալման հետ՝ **պոտենցիալ** (**շարունակական**) **անվերջություն** և **ակտուալ** (**ավարտուն**) **անվերջություն**: Այսօր մաթեմատիկոսների մեծամասնությունը տարբերություն չի դնում այս երկու անվերջությունների միջև՝ համարելով դրանք միատեսակ անվերջություններ: Օրինակ՝ և՛ բնական թվերի բազմությունը (որպես պոտենցիալ անվերջ բազմություն), և՛ կամայական ուղիղ (որպես հարթության կետերից կազմված ավարտուն անվերջ բազմություն) համարվում են պարզապես անվերջ բազմություններ:

Անցնենք բազմությունների քանակական համեմատմանը:

Օրինակ 2: Ենթադրենք ունենք բավականաչափ մեծ երկու քարակույտեր: Խնդիրն է պարզել, թե դրանցից որում ավելի շատ քար կա: Խնդիրը կարող ենք լուծել փորձելով հաշվել կույտերում քարերի քանակները: Այս մեթոդի անհարմարությունը նրանում է, որ մեզ հայտնի (գործածական) թվերը կարող են չբավականացնել: Ուստի վարվենք այսպես. վերցնենք մի քար առաջին կույտից, մի քար էլ երկրորդ կույտից և այս երկուսը դնենք մի կողմ: Այնուհետև նորից վերցնենք մի քար առաջին կույտից, մի քար էլ երկրորդ կույտից և նորից դնենք մի կողմ: Շարունակելով այսպես՝ որոշ քայլերից հետո կպարզվի, որ դրանցից մեկում քարերն ավելի քիչ են, քան մյուսում, կամ երկուսում էլ քարերի քանակները նույնն են:

Այս օրինակը հիմք է ծառայում հետևյալ սահմանման համար. երկու A և B բազմություններ (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում են **քանակապես համարժեք** կամ

հավասարազոր (նշանակվում է $A \sim B$), եթե նրանց տարրերի միջև կարելի է հաստատել մեկը-մեկի կամ փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Օրինակ 3: Չնայած, որ զույգ թվերի բազմությունը կազմում է մաս ամբողջ թվերի բազմության՝ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, դրանք հավասարազոր բազմություններ են: Իրոք, $n \mapsto 2n$ համապատասխանությունը որոշում է բիյեկտիվ (փոխմիարժեք) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ արտապատկերում:

Միմյանց հավասարազոր են նաև կետերի $(-1, 1)$ և $(-\infty, +\infty)$ բազմությունները (հիմնավորումը տե՛ս թեմա 1-ի օրինակ 9-ում)՝ չնայած, որ $(-1, 1)$ ինտերվալը կազմում է թվային ուղղի մաս՝ չհամընկնելով նրա հետ: Ինչպես կտեսնենք հետագայում, այն իրավիճակը, երբ բազմությունը հավասարազոր է իր սեփական մասին (այսինքն՝ իր հետ չհամընկնող ենթաբազմությանը), բնութագրում է բոլոր անվերջ բազմությունները:

Բերենք այդպիսի, ավելի ընդհանուր բնույթի օրինակ:

Թեորեմ: Ցանկացած X անվերջ բազմություն հավասարազոր է իր $X \times X$ քառակուսուն:

Չապացուցելով թեորեմը (ապացույցը բարդ է)՝ բավարարվենք նրա որոշ մեկնաբանությամբ: Սևեռելով որևէ $x_0 \in X$ կետ՝ դիտարկենք $f : X \to X \times X,\ f(x) = (x_0, x)$ արտապատկերումը: Պարզ է, որ f-ը ինյեկտիվ արտապատկերում է և թույլ է տալիս համարել X-ը ներդրված $X \times X$-ում՝ որպես $X \times X$-ի սեփական ենթաբազմություն: Իրոք, $(X \times X) \setminus f(X) \neq \varnothing$, քանի որ (x, x_0)-ն չի պատկանում $f(X)$-ին, եթե $x \neq x_0$: Այսպիսով՝ այս դեպքում ևս ըստ թեորեմի ունենք իրավիճակ, երբ $X \times X$ անվերջ բազմությունը հավասարազոր է իր $f(X)$ սեփական ենթաբազմությանը:

Վերադառնալով երկու բազմությունների հավասարազորության սահմանմանը՝ նկատենք, որ ցանկացած երկու A և B բազմությունների դեպքում տեսականորեն կարող է տեղի ունենալ հետևյալ 5 հնարավորություններից որևէ մեկը:

1. A-ն և B-ն հավասարազոր են: Այս դեպքում ասում են, որ A-ն և B-ն ունեն **հավասար քանակով տարրեր**:

2. A-ն հավասարազոր է B-ի որևէ մասին, բայց B-ն հավասարազոր չէ A-ի որևէ մասին (հետևաբար նաև A-ին): Այս դեպքում ասում են, որ A-ի տարրերի **քանակը քիչ է** B-ի տարրերի քանակից:

3. B-ն հավասարազոր է A-ի որևէ մասին, բայց A-ն հավասարազոր չէ B-ի որևէ մասին (հետևաբար նաև B-ին): Այս դեպքում ասում են նաև, որ A-ի տարրերի **քանակը շատ է** B-ի տարրերի քանակից:

4. A-ն հավասարազոր չէ B-ի որևէ մասի, և B-ն էլ հավասարազոր չէ A-ի որևէ մասի:

Սա իհարկե հնարավոր չէ վերջավոր բազմությունների դեպքում: Ապացուցվում է, որ այն հնարավոր չէ նաև անվերջ բազմությունների դեպքում (Կանտոր-Բերնշտեյնի թեորեմ): Ապացույցը բարդ է, և մենք այն այստեղ չենք բերում:

5. A-ն հավասարազոր է B-ի որևէ մասին, և B-ն էլ հավասարազոր է A-ի որևէ մասին:

   Ապացուցվում է (Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմ), որ այս դեպքում A-ն և B-ն հավասարազոր են (5-րդ դեպքում տեղի ունի 1-ը):

Այսպիսով՝ փաստացի հնարավոր են միայն 1-3 դեպքերը: Իսկ դա նշանակում է, որ **ցանկացած երկու բազմություններ քանակապես համեմատելի են**:

Մինչև վերոհիշյալ՝ 5-րդ դեպքի կիրառության մի օրինակի քննարկումը հիշեցնենք. մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից գիտենք՝ ցանկացած իրական թիվ ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Ընդ որում՝ իռացիոնալ թվերը ներկայացվում են միակ ձևով՝ ոչ պարբերական անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով: Իսկ ռացիոնալ թվերը ներկայացվում են պարբերական կոտորակների տեսքով, ընդ որում՝ որոշ թվերի դեպքում այդպիսի ներկայացումը կարող է միակը չլինել: Օրինակ՝ $\frac{1}{8}$ թվի համար ունենք երկու տարբեր տեսքերի ներկայացումներ՝ $0{,}12499\ldots$ և $0{,}12500\ldots$: Ամեն մի այդպիսի դեպքում որոշակիության համար կդիտարկենք միայն առաջին տեսքի ներկայացումը: Ապացուցվում է. երկու իրական թվեր, գրված տասնորդական կոտորակների տեսքով, հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ հավասար են նրանց ամբողջ մասերը և հավասար են ստորակետից հետո նույն դիրքերում գրված թվանշանները:

Օրինակ 4: Ցույց տանք, որ $(0,1)$ ինտերվալը և նրա $(0,1)\times(0,1)$ քառակուսին հավասարազոր են: Իհարկե, դա հետևում է վերը բերված ընդհանուր թեորեմից, բայց մենք կտանք ուղղակի ապացույց՝ հիմնվելով Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմի վրա:

Վերցնենք որևէ $(r_1,r_2)\in(0,1)\times(0,1)$ թվազույգ, որտեղ $r_1=0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, իսկ $r_2=0{,}\beta_1\beta_2\ldots$ և $(r_1;r_2)$ թվազույգին համադրենք $r=0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$ թիվը $(0,1)$-ից: Գրեթե ակնհայտ է, որ $(r_1;r_2)\mapsto r$ համադրումը որոշում է ինչ-որ $(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$ ինյեկտիվ արտապատկերում (հիմնավորե՛ք): Այսպիսով՝ $(0,1)\times(0,1)$-ը հավասարազոր է $(0,1)$-ի ինչ-որ մասին: Մյուս կողմից էլ ունենք, որ $(0,1)$-ը հավասարազոր է $(0,1)\times(0,1)$-ի որոշ մասին (տե՛ս վերը բերված թեորեմի մեկնաբանությունը): Այժմ Շրյոդեր-Բերնշտեյնի թեորեմից հետևում է, որ $(0,1)$-ը և $(0,1)\times(0,1)$-ը հավասարազոր են:

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք հավասարազոր անվերջ բազմությունների օրինակներ: Հարց է առաջանում. իսկ կա՞ն ոչ հավասարազոր անվերջ բազմություններ: Պատասխանը դրական է և կտրվի ավելի ուշ (թեորեմ 6-ում):

Սահմանում: Բազմությունը, որը հավասարազոր է բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությանը կամ նրա որևէ վերջավոր մասին, կոչվում է **հաշվելի բազմություն**: Այսպիսով՝ հաշվելի բազմությունը կարող է լինել վերջավոր բազմություն կամ անվերջ բազմություն:

Համարժեք սահմանում. բազմությունը կոչվում է հաշվելի բազմություն, եթե նրա բոլոր տարրերը կարելի է ինդեքսավորել (համարակալել) բոլոր բնական թվերով կամ դրա որևէ $\{1, 2, \ldots, n\}$ մասով:

Օրինակ 5: Հաշվելի բազմություններ են բոլոր վերջավոր բազմությունները, ինչպես նաև $\mathbb{N}$-ը, $\mathbb{Z}$-ը, $2\mathbb{Z}$-ը:

Թեորեմ 1: Հաշվելի բազմության ցանկացած ենթաբազմություն հաշվելի բազմություն է՝ վերջավոր կամ հաշվելի անվերջ:

Ապացուցում: Դիցուք A-ն որևէ հաշվելի բազմություն է, և $B \subset A$: Կարող ենք համարել, որ A-ի տարրերը համարակալված են՝ $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$: Դիտարկենք այդ հաջորդականության այն առաջին անդամը, որը պատկանում է B-ին: Դիցուք դա a_{n_1}-ն է: Եթե $B \neq \{a_{n_1}\}$, ապա նշանակենք a_{n_2}-ով a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, $\ldots$ հաջորդականության այն առաջին անդամը, որը պատկանում է B-ին: Շարունակելով այսպես՝ արդյունքում ստանում ենք կա՛մ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}\}$ վերջավոր բազմություն, որի տարրերը համարակալված են n_1, n_2, n_3, $\ldots$, n_k թվերով, կամ որ նույնն է՝ $1, 2, 3, \ldots, k$ բնական թվերով, կա՛մ էլ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$ անվերջ բազմություն, որի տարրերը համարակալվում են $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ բնական թվերով, կամ որ նույնն է՝ բոլոր 1, 2, 3, $\ldots$ բնական թվերով: Ուստի երկրորդ դեպքում B ենթաբազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է:

Որպես հետևանք թեորեմ 12-ից և Էվկլիդեսի թեորեմից՝ ստանում ենք. բոլոր պարզ թվերի բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 2: Ցանկացած X անվերջ բազմություն պարունակում է հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Ընտրենք որևէ $a_1 \in X$ տարր: Քանի որ $X \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$, կարող ենք ընտրել որևէ $a_2 \in X \setminus \{a_1\}$ տարր: Քանի որ $X \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, կարող ենք ընտրել որևէ $a_3 \in X \setminus \{a_1, a_2\}$ տարր և այդպես շարունակ: Այս պրոցեսն անվերջ է, և արդյունքում ստանում ենք X-ի հաշվելի անվերջ $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ենթաբազմություն: ■

Հետևանք: Ցանկացած անվերջ բազմության տարրերի քանակը մեծ կամ հավասար է հաշվելի անվերջ բազմության տարրերի քանակից (այստեղ տեղին է նկատել, որ այդուհանդերձ մենք դեռ չենք սահմանել կամայական բազմության համար նրա տարրերի քանակ հասկացությունը):

Թեորեմ 2-ի հետ կապված առաջանում է հարց. որևէ անվերջ բազմություն իր մեջ որքա՞ն զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ կարող է պարունակել:

Պատասխանը հետևյալն է. ցանկացած անվերջ բազմություն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Բերենք համապատասխան օրինակ, որից և թեորեմ 2-ից հետևում է պատասխանը:

Օրինակ 6: Դիտարկենք բոլոր պարզ թվերի $P = \{2, 3, 5, \dots\}$ հաշվելի անվերջ բազմությունը, և ամեն մի k բնական թվի համար՝ $P_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$ հաշվելի բազմությունը: Պարզ է, որ $P_1 = P$, $P_k \cap P_l = \varnothing$, եթե $k \neq l$ և $\bigcup\limits_k P_k \subset \mathbb{N}$: Այսպիսով՝ բնական թվերի բազմությունն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Այժմ որպես հետևանք օրինակ 6-ից և թեորեմ 2-ից՝ ստանում ենք. ցանկացած անվերջ բազմություն իր մեջ պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ:

Թեորեմ 3: Հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի բազմություն է:

Նկատենք, որ թեորեմի պայմանն իր մեջ պարունակում է 4 հնարավորություն.

ա) վերջավոր թվով վերջավոր բազմությունների միավորում,

բ) վերջավոր թվով հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում,

գ) հաշվելի անվերջ քանակով վերջավոր բազմությունների միավորում,

դ) հաշվելի անվերջ քանակով հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում:

Քննարկենք թեորեմը դ) դեպքում: Դիցուք ունենք հաշվելի անվերջ քանակով $A_1, A_2, \dots$ հաշվելի անվերջ բազմություններ: Պարզության համար ենթադրենք, որ այդ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում: Յուրաքանչյուր A_i բազմության տարրերը համարակալենք բոլոր բնական թվերով՝ $A_i = \{a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots\}$ և դասավորենք դրանք հետևյալ ուղղանկյուն անվերջ աղյուսակի տողերի տեսքով (այստեղ a_j^i սիմվոլում i նշիչը ցույց է տալիս տվյալ տարրի պատկանելիությունը A_i բազմությանը, իսկ j նշիչը՝ տարրի համարն է այդ բազմությունում):

$$
\begin{tikzcd}
a_1^1 \arrow[r] & a_2^1 \arrow[dl] & a_3^1 \arrow[r] & a_4^1 \arrow[dl] & \dots \\
a_1^2 \arrow[d] & a_2^2 \arrow[ur] & a_3^2 \arrow[dl] & a_4^2 \arrow[ur] & \dots \arrow[dl] \\
a_1^3 \arrow[ur] & a_2^3 \arrow[dl] & a_3^3 \arrow[ur] & a_4^3 \arrow[dl] & \dots \\
\dots & \dots \arrow[ur] & \dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}
$$

Այժմ կարող ենք $\bigcup A_i$ միավորման տարրերը համարակալել բոլոր բնական թվերով՝ շարժվելով անկյունագծերով: Արդյունքում ստանում ենք, որ $\bigcup\limits_i A_i = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է, որտեղ $b_1 = a_1^1$, $b_2 = a_2^1$, $b_3 = a_1^2$, $b_4 = a_1^3$, $b_5 = a_2^2$ և այլն (ապացուցման այս եղանակը հայտնի է «Կանտորի նշանավոր անկյունագծային մեթոդ» անվանումով):

Թեորեմ 3-ի ապացուցումը: Դիցուք ունենք հաշվելի (վերջավոր կամ անվերջ) քանակով հաշվելի (վերջավոր կամ անվերջ) A_i, $i \in I$ բազմություններ, որտեղ ինդեքսների I բազմությունը կա՛մ բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությունն է, կա՛մ նրա որևէ վերջավոր $\{1, 2, \dots, n\}$ մասն է: Սկզբում դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ $A_i \cap A_j = \varnothing$, ցանկացած $i \neq j$ ինդեքսների դեպքում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն A_1 բազմության և պարզ թվերի $P_1 = \{2, 3, 5, \dots\}$ բազմության ինչ-որ B_1 ենթաբազմության տարրերի միջև ($B_1 = P_1$ համընկնումը չի բացառվում և տեղի ունի, երբ A_1-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է):

Ասվածը գրառենք կարճ՝ $\exists\, A_1 \leftrightarrow B_1 \subset P_1$ տեսքով: Նույն դատողություններով գոյություն ունեն

$$A_2 \leftrightarrow B_2 \subset P_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, \dots\}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_k \leftrightarrow B_k \subset P_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

փոխմիարժեք համապատասխանություններ:

Արդյունքում ստանում ենք $\bigcup\limits_i A_i \leftrightarrow \bigcup\limits_i B_i$ փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր A_i, $i \in I$ բազմությունների $\bigcup\limits_i A_i$ միավորման և բոլոր B_i բազմությունների $\bigcup\limits_i B_i$ միավորման տարրերի միջև: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $\bigcup\limits_i P_i$-ն հաշվելի բազմություն է որպես բնական թվերի բազմության ենթաբազմություն: Նույն պատճառով $\bigcup\limits_i B_i$-ն հաշվելի բազմություն է որպես $\bigcup\limits_i P_i$ հաշվելի բազմության ենթաբազմություն: Ուստի $\bigcup\limits_i A_i$ բազմությունը հաշվելի բազմություն է:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ որոշ $A_i \cap A_j$, $i \neq j$ հատումներ կարող են դատարկ չլինել: Անցնենք նոր՝ $A'_1, A'_2, \dots$ բազմությունների՝ սահմանելով դրանք (ինդուկտիվ եղանակով) հետևյալ բանաձևերով.

$$A'_1 = A_1,\ A'_2 = A_2 \setminus A'_1,\ A'_3 = A_3 \setminus (A'_1 \cup A'_2),\ \dots,\ A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1}):$$

Պարզ է, որ յուրաքանչյուր A'_i հաշվելի բազմություն է՝ որպես A_i հաշվելի բազմության ենթաբազմություն: Բացի այդ, $A'_i \cap A'_j = \varnothing$, երբ $i \neq j$: Ուստի $\bigcup\limits_i A'_i$-ը հաշվելի բազմություն է՝ համաձայն վերը ապացուցված մասնավոր դեպքի: Ցույց

պանք, որ $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup\limits_i A'_i$, որից էլ կհետևի, որ $\bigcup\limits_i A_i$ հաշվելի բազմություն է:

Քանի որ $A'_i \subset A_i$, ուստի $\bigcup\limits_i A'_i \subset \bigcup\limits_i A_i$: Միավորելով $A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1})$ նույնության երկու կողմերը $A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_{n-1}$ բազմության հետ՝ կստանանք $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i = A_n \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A'_i\right)$: Ուստի $A_n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A'_i$, և ուրեմն $\bigcup\limits_i A_i \subset \bigcup\limits_i A'_i$: Այսպիսով՝ $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup\limits_i A'_i$: ■

Հետևանքներ թեորեմ 3-ից: ա) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է,

բ) ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ բազմությունը հաշվելի անվերջ բազմություն է:

Ապացուցում: ա) Սևեռելով որևէ $a \in \mathbb{Z}$ ամբողջ թիվ՝ դիտարկենք $\{a\} \times \mathbb{Z}$ ենթաբազմությունը $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-ում: Պարզ է, որ այն հաշվելի անվերջ բազմություն է: Այժմ կարող ենք $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-ը ներկայացնել որպես հաշվելի անվերջ թվով, հաշվելի անվերջ բազմությունների միավորում՝ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \bigcup(\{a\} \times \mathbb{Z})$, որտեղ միավորումը կատարվում է ըստ $a \in \mathbb{Z}$ փոփոխականի: Ուստի $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-ը հաշվելի անվերջ բազմություն է՝ ըստ թեորեմ 3-ի:

բ) Ցանկացած $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ ռացիոնալ թիվ կարող է միակ ձևով ներկայացվել որպես չկրճատվող $\dfrac{p}{q}$ կոտորակ, որի q հայտարարը դրական ամբողջ թիվ է, իսկ p համարիչը ամբողջ թիվ է: Կառուցենք ինյեկտիվ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ արտապատկերում $f(r) = (p, q)$, $f(0) = (0, 1)$ բանաձևով: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $f(\mathbb{Q})$-ն հաշվելի անվերջ բազմություն է որպես $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ հաշվելի անվերջ բազմության անվերջ ենթաբազմություն: Հետևաբար $\mathbb{Q}$-ն ևս հաշվելի անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 4: Ցանկացած X անվերջ բազմությունից կարելի է զատել հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն այնպես, որ մնացորդն իր մեջ դարձյալ պարունակի հաշվելի անվերջ ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Ընտրենք որևէ $a_1 \in X$ տարր, իսկ $X \setminus \{a_1\}$-ում ընտրենք որևէ b_1 տարր: Այնուհետև $X \setminus \{a_1, b_1\}$-ում ընտրենք որևէ a_2 տարր, իսկ $X \setminus \{a_1, b_1, a_2\}$-ում ընտրենք որևէ b_2 տարր և այսպես շարունակ: Կստանանք երկու չհատվող $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ և $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ: Նշանակենք $X \setminus (A \cup B) = Y$: Քանի որ $A \cap B = \varnothing$, ուստի $X = A \cup B \cup Y$ և $A \subset X$, $B \subset X \setminus A$: ■

Թեորեմ 5: Բազմությունը անվերջ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն պարունակում է իրեն հավասարազոր, իրենից տարբեր ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Պայմանի **անհրաժեշտությունը**: Դիցուք X-ը անվերջ բազմություն է: Ըստ թեորեմ 4-ի՝ գոյություն ունեն A և B հաշվելի անվերջ ենթաբազմություններ այնպես, որ $X = A \cup B \cup Y$ և $X \setminus A = B \cup Y$: Քանի որ $(A \cup B)$-ն (ըստ թեորեմ 3-ի) և B-ն հաշվելի անվերջ բազմություններ են, ուստի գոյություն ունի $(A \cup B) \leftrightarrow B$

փոխմիարժեք համապատասխանություն նրանց տարրերի միջև: Այդ համապատասխանության երկու կողմերը միավորելով $Y \leftrightarrow Y$ նույնական համապատասխանության հետ՝ կստանանք $X \leftrightarrow (X \setminus A)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն, ընդ որում $(X \setminus A) \subset X$ և $X \setminus A \neq X$:

Պայմանի **բավարարությունը**: Դիցուք X-ը որևէ բազմություն է, $A \subset X,\ A \neq X$, և գոյություն ունի $X \leftrightarrow A$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Պարզ է, որ X-ը վերջավոր բազմություն լինել չի կարող, ուստի այն անվերջ բազմություն է: ■

Թեորեմ 6: Իրական թվերի բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Ապացուցում: Հիշեցնենք, որ տեղի ունի $(-\infty, +\infty) \sim (-1, 1)$ հավասարազորություն (տե՛ս օրինակ 9-ը թեմա 1-ում): Տեղի ունի նաև $(-1, 1) \sim (0, 1)$ հավասարազորություն՝ որոշված $h : (-1, 1) \to (0, 1)$, $h(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)$ արտապատկերումով, ուստի $(-\infty, +\infty)$-ը հավասարազոր է $(0, 1)$ ինտերվալին: Հետևաբար թեորեմի ապացուցման համար բավական է ցույց տալ, որ $(0, 1)$ ինտերվալը ոչ հաշվելի բազմություն է: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք գոյություն ունի $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Սա նույնն է, թե $(0, 1)$ ինտերվալի բոլոր թվերը կարելի է համարակալել բոլոր $1, 2, \ldots$ բնական թվերով: Ներկայացնելով $f(i)$ թիվը միակ $0{,}\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\ldots$ անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով, որտեղ α_{ij}-ն $0, 1, 2, \ldots, 9$ թվանշաններից որևէ մեկն է, կունենանք՝

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0{,}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots \\
f(2) &= 0{,}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(n) &= 0{,}\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Օգտվելով այս շարքից՝ կազմենք մի $b = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ թիվ, որտեղ β_1-ը α_{11} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, β_2-ը α_{22} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, $\ldots$, β_n-ը α_{nn} թվանշանից տարբեր, 1-ից մինչև 8 կամայական թվանշան է, $\ldots$, և այսպես շարունակ:

Պարզ է, որ $b \neq f(n)$ ցանկացած բնական n-ի դեպքում (b և $f(n)$ թվերի n-րդ տասնորդական թվանշանները տարբեր են): Իսկ դա նշանակում է, որ մի կողմից $b \in (0, 1)$, մյուս կողմից b թիվը բացակայում է համարակալված թվերի շարքում, այսինքն՝ $b \notin (0, 1)$: Ստացանք հակասություն: ■

Դիտողություն: Ուշադիր ընթերցողը հավանաբար նկատեց, որ b թիվը կազմելիս նրա թվանշանները ընտրվեցին յուրատեսակ անկյունագծային եղանակով:

Հետևանքներ թեորեմ 6-ից: ա) Բոլոր իռացիոնալ թվերի Ir բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է: Իրոք, $\mathbb{R} = \mathrm{Ir} \cup \mathbb{Q},\ \mathrm{Ir} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$: Եթե Ir-ը լիներ հաշվելի բազմություն, ապա $\mathbb{R}$-ը նույնպես կլիներ հաշվելի բազմություն՝ համաձայն թեորեմ 3-ի, ինչը հակասում է թեորեմ 6-ին:

բ) Իռացիոնալ թվերը քանակապես շատ են ռացիոնալ թվերից: Սա հետևում է թեորեմ 2-ի հետևանքից և թեորեմ 6-ից:

Մինչև այժմ մենք քանակապես համեմատում էինք բազմությունները՝ առանց հստակեցնելու, թե ինչ է **բազմության տարրերի քանակությունը**: Հիշեցնենք, որ երկու X և Y բազմություններ կոչվում են հավասարազոր (նշանակվում է $X \sim Y$), եթե գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն նրանց տարրերի միջև: Սա երկտեղ հարաբերություն է սահմանված և՛ վերջավոր, և՛ անվերջ բազմությունների դեպքում: Ցույց տանք, որ այն համարժեքության հարաբերություն է:

1. $X \sim X$ (իրոք, X-ի նույնական $\mathbb{1}_X : X \to X$ արտապատկերումը ինքն իր վրա փոխմիարժեք է):

2. Եթե $X \sim Y$, ապա $Y \sim X$ (եթե գոյություն ունի $f : X \to Y$ փոխմիարժեք արտապատկերում, ապա գոյություն ունի նաև նրան հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ փոխմիարժեք արտապատկերում):

3. Եթե $X \sim Y$ և $Y \sim Z$, ապա $X \sim Z$ (եթե գոյություն ունեն $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ փոխմիարժեք արտապատկերումներ, ապա պարզ է, որ $g \circ f : X \to Z$ արտապատկերումը նույնպես փոխմիարժեք է):

Հետևաբար դիտարկվող բազմությունները տրոհվում են համարժեքության դասերի՝ ըստ այդ համարժեքության հարաբերության: Ստացված ֆակտոր-բազմության տարրերը կոչվում են **հզորություններ**: Ամեն մի X բազմության համար X-ը պարունակող $[X]$ համարժեքության դասը կոչվում է X-ի հզորություն և նշանակվում է $|X|$: Վերջավոր բազմությունների դեպքում բազմության հզորությունը կարող է նույնացվել նրա տարրերի քանակի հետ:

Ընդհանուր դեպքում բազմությունների հզորությունները կոչվում են **կարդինալ թվեր** կամ պարզապես **կարդինալներ**: Բոլոր հաշվելի անվերջ բազմություններն ունեն նույն հզորությունը կամ նույն կարդինալը, որը նշանակվում է ω: Իրական թվերի բազմության հզորությունը կոչվում է **կոնտինում** և նշանակվում է $\mathfrak{c}$: Ըստ բազմությունների քանակական համեմատման՝ ունենք $\omega < \mathfrak{c}$:

Այսպիսով՝ անվերջ բազմությունների դեպքում առայժմ ունենք որակապես տարբեր երկու հզորություններ՝ ω և $\mathfrak{c}$: Իսկ այդ երկուսից բացի գոյություն ունե՞ն արդյոք այլ հզորություններ: Հարցին պատասխան է տալիս Կանտորի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 7: Ցանկացած X բազմության բոլոր ենթաբազմություններից կազմված $\operatorname{Ens} X$ բազմության հզորությունը մեծ է X-ի հզորությունից:

Ապացուցում: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ X-ը վերջավոր բազմություն է՝ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: Ինչպես գիտենք, այս դեպքում $\operatorname{Ens} X$ բազմության տարրերի քանակը $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ թիվն է, և $2^n > n$, երբ $n \geq 1$: Ուստի $|\operatorname{Ens} X| > |X|$:

Դիցուք՝ այժմ X-ը անվերջ բազմություն է: Համապատասխանեցնելով X-ի ամեն մի x տարրին $\{x\}$ տարրը $\operatorname{Ens} X$-ում՝ ստանում ենք, որ $|X| \leq |\operatorname{Ens} X|$: Ցույց տանք, որ իրականում $|X| < |\operatorname{Ens} X|$:

Կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է՝ $|X| = |\mathrm{Ens}\, X|$, այսինքն գոյություն ունի $f : X \to \mathrm{Ens}\, X$ փոխմիարժեք համապատասխանություն: Ցանկացած $x \in X$ տարրի դեպքում կա՛մ $x \in f(x)$, կա՛մ $x \notin f(x)$: Դիտարկենք X-ի A ենթաբազմությունը կազմված X-ի այն բոլոր a տարրերից, որ $a \notin f(a)$: Կարճ՝ $A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$: Ցույց տանք, որ A-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Իրոք, ըստ ենթադրության, գոյություն ունի $x_0 \in X$ տարր, որ $f(x_0) = \varnothing$ և իհարկե $x_0 \notin f(x_0)$: Ուստի $x_0 \in A$, և ուրեմն $A \neq \varnothing$: Քանի որ $A \in \mathrm{Ens}\, X$, ուստի գոյություն ունի $a_0 \in X$ տարր, որ $f(a_0) = A$ և $a_0 \neq x_0$:

Պարզ է, որ կա՛մ ա) $a_0 \in A$, կա՛մ բ) $a_0 \notin A$: Քննարկենք այս երկու դեպքերն առանձին-առանձին:

ա) Եթե $a_0 \in A$, ապա $a_0 \notin f(a_0)$: Նշանակում է $a_0 \notin A$ (հակասություն):

բ) Եթե $a_0 \notin A$, ապա $a_0 \in f(a_0)$: Նշանակում է $a_0 \in A$ (հակասություն):

Այսպիսով մեր ենթադրությունը, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $X \leftrightarrow \mathrm{Ens}\, X$, բերեց աբսուրդի: Հետևաբար $|X| \neq |\mathrm{Ens}\, X|$, և ուրեմն $|X| < |\mathrm{Ens}\, X|$: ■

Հետևանք թեորեմ 7-ից: Վերցնելով որևէ X անվերջ բազմություն և հաջորդաբար կիրառելով թեորեմ 7-ը՝ կստանանք $|X| < |\mathrm{Ens}\, X| < |\mathrm{Ens}(\mathrm{Ens}\, X)| < \ldots$

Այսինքն՝ գոյություն ունեն անթիվ քանակով միմյանց զույգ առ զույգ ոչ հավասարազոր անվերջ բազմություններ, ուստի և անթիվ քանակով կարդինալ թվեր:

Բազմությունների տեսության պարադոքսների մասին

Բազմությունների այսպես կոչված կանտորյան կամ նաիվ տեսության հետ կապված առաջին պարադոքսները հայտնվեցին դեռ 1897 թվին: Դրանցից մեկը հայտնաբերեց ինքը՝ Կանտորը:

Դիցուք Ω-ն բոլոր հնարավոր բազմությունների բազմությունն է: Ըստ թեորեմ 7-ի՝ $|\Omega| < |\mathrm{Ens}\, \Omega|$: Բայց $\mathrm{Ens}\, \Omega$ ինքը բազմություն է, որի տարրերը (որպես բազմություններ) պարունակվում են Ω-ում: Այսինքն՝ $\mathrm{Ens}\, \Omega \subset \Omega$, և հետևաբար $|\mathrm{Ens}\, \Omega| \leq |\Omega|$: Ստացանք հակասություն:

Բերենք ևս մի պարադոքս (Ռասսելի պարադոքսը): Համարենք, որ բոլոր հնարավոր բազմությունները տրված են միաժամանակ: Նշանակենք Q-ով այն բոլոր բազմությունների բազմությունը, որոնք չեն պարունակում իրենց որպես տարր: Հարց. պարունակո՞ւմ է արդյոք Q-ն իրեն որպես տարր: Եթե ոչ, այսինքն $Q \notin Q$, ապա ըստ Q-ի սահմանման $Q \in Q$ (հակասություն): Իսկ եթե այո, այսինքն՝ $Q \in Q$, ապա նորից ըստ Q-ի սահմանման Q-ն չպետք է լինի տարր իր համար, ուստի $Q \notin Q$ (հակասություն):

Որպես կանոն, այդպիսի պարադոքսների առաջացման պատճառը բազմություն, բազմության տարր հասկացությունների կամայական (ոչ կանոնակարգված) ընկալումն է կամ մեկնաբանումը:

Եղել են տարբեր մոտեցումներ՝ ինչպես խուսափել պարադոքսներից: Հիմնական ելքը բազմությունների տեսության կառուցումն է աքսիոմատիկ եղանակով: Կան մի քանի այդպիսի համակարգեր, որոնցից ամենահայտնին այսպես կոչված Ցերմելո-Ֆրենկելի աքսիոմատիկ համակարգն է (տե՛ս [3]-ում):

Գոյություն ունի մեկ ուրիշ, գործնականում պարզ և հարմար եղանակ՝ խուսափելու պարադոքսներց, այդուհանդերձ մնալով բազմությունների կանտորյան (նաիվ) տեսության շրջանակներում: Այդ մոտեցման հիմքում ընկած են երկու հիմնական սկզբունքներ:

Սկզբունք A. չի կարելի բոլոր հնարավոր բազմությունները համարել տրված միաժամանակ:

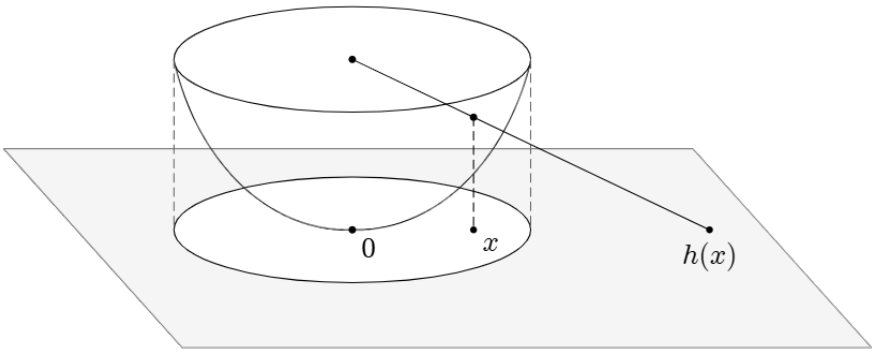
Սկզբունք B. ոչ մի բազմություն չի կարող լինել տարր ինքն իր համար:

Թվում է, թե սկզբունք A-ն ենթադրում է դիտարկվող բազմությունների տեսականին կամ քանակությունը սահմանափակել բազմությունների նախապես տրված մի ինչ-որ M ընտանիքով: Դա այնքան էլ այդպես չէ: Յուրաքանչյուր կոնկրետ մաթեմատիկական հետազոտության դեպքում նպատակահարմար է տվյալ պահին մեր տրամադրության տակ գտնվող բազմությունների M ընտանիքը համարել սահմանափակ: Բայց եթե ընթացքում հարկ է լինում, ըստ նպատակահարմարության, հետազոտության մեջ ներգրավել նոր բազմություններ, այսինքն ընդլայնել M-ը, ապա առաջարկվող համակարգը այդպիսի հնարավորություն տալիս է: Այս և այլ դեպքերի հետ ավելի մանրամասն կարելի է ծանոթանալ [2]-ում:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 3-ի վերաբերյալ

3.1. Թեմա 1-ի օրինակ 9-ի նմանությամբ կառուցեք փոխմիարժեք h արտապատկերում $\{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$ անեզր շրջանի և $\mathbb{R}^2$ հարթության կետերի միջև:

Յուցում. Տեղադրելով 1 շառավղով անեզր կիսասֆերան այնպես, որ շոշափի $\mathbb{R}^2$ հարթությանը O կետում, նախ կառուցեք փոխմիարժեք համապատասխանություն շրջանի և կիսասֆերայի միջև, և ապա՝ կիսասֆերայի և հարթության կետերի միջև, ինչպես ցույց է տրված նկարում:



3.2. Ապացուցեք հետևյալ հավասարազորությունները.

$$(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$$

Ցուցում. Նախ այդ բազմությունները ներկայացրեք որպես միայն ռացիոնալ թվերից և միայն իռացիոնալ թվերից կազմված երկու ենթաբազմությունների միավորում: Օրինակ՝ $(0,1) = \mathbb{Q} \cup \mathrm{Ir}$ և $[0,1] = (\mathbb{Q} \cup \{0,1\}) \cup \mathrm{Ir}$, որտեղ $\mathbb{Q}$-ն և Ir-ը $(0,1)$ ինտերվալի ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմություններն են: Այժմ կարող ենք հաստատել $(0,1) \sim [0,1]$ հավասարազորություն՝ լրացնելով $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q} \cup \{0,1\}$ հավասարազորությունը (որը տեղի ունի ըստ թեորեմ 3-ի) նույնական $\mathrm{Ir} \to \mathrm{Ir}$ արտապատկերումով:

3.3. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի $(-\infty, a), (-\infty, b], (c, +\infty), [d, +\infty], (a, b), [c, d]$, $[m, n), (p, q]$ տեսքի ցանկացած երկու ենթաբազմություն հավասարազոր են:

Ցուցում. Դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումները.

ա) $f_1 : (a, b) \to (0, 1)$, $f_2 : [a, b] \to [0, 1]$, $f_3 : (a, b] \to (0, 1]$, $f_4 : [a, b) \to [0, 1)$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$ համադրումով,

բ) $g_1 : (-\infty, 0) \to (0, 1)$, $g_2 : [-\infty, 0] \to [0, 1]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ համադրումով,

գ) $h_1 : (0, +\infty) \to (0, 1)$, $h_2 : [0, +\infty) \to [0, 1)$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ համադրումով,

դ) $u_1 : (-\infty, a) \to (-\infty, 0)$, $u_2 : (-\infty, a] \to (-\infty, 0]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto x - a$ համադրումով,

ե) $v_1 : (a, +\infty) \to (0, +\infty)$, $v_2 : [a, +\infty] \to [0, +\infty]$, որոնք սահմանվում են $x \mapsto x - a$ համադրումով,

զ) $w : (-\infty, 0) \to (0, +\infty)$, սահմանվում է՝ $w(x) = -x$:

Հիմնավորելով սրանցից յուրաքանչյուրի փոխմիարժեքությունը՝ օգտվեք դրանց համադրույթներից և խնդիր 3.2-ից:

3.4. Ապացուցեք, որ հաշվելի A բազմությունից նրա որևէ B վերջավոր ենթաբազմություն անջատելիս ստացված $A \setminus B$ մնացորդը դարձյալ հաշվելի բազմություն է:

Ցուցում. Դիտարկեք A-ի տարրերի որևէ $a_1, a_2, \ldots$ համարակալում և երկու դեպք՝ A-ն վերջավոր է, A-ն անվերջ է: Երկրորդ դեպքում օգտվեք թեորեմ 1-ից:

3.5. Ապացուցեք. եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n$, որտեղ $n \geq 1$, բազմությունները հաշվելի են, ապա նրանց $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ուղիղ արտադրյալը նույնպես հաշվելի բազմություն է:

Ցուցում. Դիտարկեք $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \bigcup_i A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times \{b_i\}$ ներկայացումը, որտեղ $A_n = \{b_1, b_2, \dots\}$, և օգտվելով թեորեմ 3-ից՝ կիրառեք ինդուկցիա ըստ n-ի:

3.6. Ապացուցեք. հաշվելի բազմության տարրերով կազմված բոլոր վերջավոր հաջորդականությունների բազմությունը հաշվելի է:

Ցուցում. Հաշվելի $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ բազմության տարրերով կազմված n երկարության ամեն մի $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ հաջորդականություն կարելի է դիտել որպես $A \times A \times \cdots \times A$ ուղիղ արտադրյալի տարր և հակառակը: Օգտվելով խնդիր 3.5-ից՝ կիրառեք ինդուկցիա ըստ n-ի:

3.7. Ունենք բազմությունների որևէ $f : A \to B$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում: Ապացուցեք՝ եթե A-ն հաշվելի է, ապա B-ն նույնպես հաշվելի է:

Ցուցում. Ամեն մի $b \in B$ տարրի համար ընտրենք որևէ $a \in f^{-1}(B)$ տարր և սահմանենք $g : B \to A$, $g(b) = a$ արտապատկերում: Ցույց տվեք, որ g-ն ինյեկտիվ արտապատկերում է, և օգտվեք թեորեմ 1-ից:

3.8. Ապացուցեք, որ հաշվելի $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ բազմության բոլոր վերջավոր ենթաբազմությունների բազմությունը հաշվելի է:

Ցուցում. Տարրերի ամեն մի $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ վերջավոր հաջորդականության համադրենք A բազմության $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\}$ ենթաբազմությունը: Արդյունքում ստանում ենք որոշակի f արտապատկերում A բազմության տարրերով կազմված բոլոր վերջավոր հաջորդականությունների բազմությունից A-ի բոլոր վերջավոր ենթաբազմություններով կազմված բազմության մեջ: Ցույց տվեք, որ f-ը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և օգտվեք նախորդ երկու խնդիրներից:

3.9. Ապացուցեք. եթե A-ն անվերջ բազմություն է, իսկ B-ն հաշվելի բազմություն է, ապա $A \cup B$-ն հավասարազոր է A-ին:

Ցուցում. Օգտվեք հետևյալ երկու պնդումներից՝ հիմնավորելով դրանք.

ա) եթե A_1-ը A բազմության որևէ հաշվելի ենթաբազմություն է, ապա տեղի ունի $A_1 \cup B \sim A_1$ հավասարազորություն,

բ) $A \cup B = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A \setminus A_1) \cup A_1 = A_1$:

3.10. Ապացուցեք. եթե A-ն անվերջ և ոչ հաշվելի բազմություն է, իսկ B-ն հաշվելի է, ապա $A \setminus B \sim A$:

Ցուցում. Օգտվեք $A = (A \setminus B) \cup B$ նույնությունից և նախորդ խնդրից:

3.11. Ի՞նչ հզորություն ունի բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմությունը։

Յուցում. Օգտվեք խնդիր 3.9-ից՝ վերցնելով որպես A բոլոր իռացիոնալ թվերի, իսկ որպես B՝ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունները։

3.12. Ճի՞շտ է արդյոք, որ բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմությունը և $(-1, 1)$ ինտերվալի իռացիոնալ թվերի բազմությունը ունեն նույն հզորությունը։

Թեմա 4

Թվային ուղիղը որպես տոպոլոգիական տարածության նախատիպ: Տոպոլոգիա բազմության վրա, տոպոլոգիական տարածության հասկացությունը, տոպոլոգիաների համեմատումը: Տոպոլոգիական տարածության այլընտրանքային սահմանում հիմնված կետի շրջակայք հասկացության վրա:

Տոպոլոգիան երկրաչափության բաժին է, որի հիմքում ընկած են տոպոլոգիական տարածություն և տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերում հասկացությունները: Եթե տարրական երկրաչափությունը ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների այն հատկությունները, որոնք պահպանվում են (ինվարիանտ են) իզոմետրիկ ձևափոխությունների դեպքում (այսինքն այնպիսի ձևափոխությունների դեպքում, որոնք չեն փոխում կետերի միջև հեռավորությունները), ապա տոպոլոգիան ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների այն հատկությունները, որոնք անփոփոխ են այդ պատկերների ցանկացած **անընդհատ** ձևափոխությունների դեպքում: Ձևափոխությունը կոչվում է անընդհատ, եթե այն միմյանց բավականաչափ մոտիկ կետերը արտապատկերում է նորից բավականաչափ մոտիկների:

Մաթեմատիկայում հայտնի են մի շարք տարբեր երկրաչափություններ՝ էվկլիդեսյան, աֆինական, պրոյեկտիվ, ոչ էվկլիդեսյան և այլն: Դրանցից յուրաքանչյուրի հիմքում ընկած է իրեն բնորոշ ձևափոխությունների խումբ: Նկատենք, որ ձևափոխությունների այդ խմբերը, այս կամ այլ իմաստով լինելով իրարից տարբեր, ունեն մի ընդհանուր առանձնահատկություն՝ դրանց տարրերը (ձևափոխությունները) անընդհատ են:

Ուստի կարող ենք ասել, որ տոպոլոգիան բոլոր հնարավոր երկրաչափությունների ընդհանուր մասն է, և այդ իմաստով կարող է դիտվել որպես վերջնական և բոլորի հիմքում ընկած յուրահատուկ երկրաչափություն:

Ընդհանուր տոպոլոգիայում երկրաչափական պատկերները հանդես են գալիս որպես հատուկ կառուցվածքով, վերացական բնույթի կետերի բազմություններ, որոնց անվանում են **տոպոլոգիական տարածություններ**: Տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունը անցել է ձևավորման և կայացման երկար ուղի: Սկզբնական շրջանում (1900-1930 թթ.) այն ունեցել է տարբեր անվանումներ՝ շրջակայքային տարածություն, փակման գործողությունով տարածություն, մետրիկային տարածություն: Դրանց նվիրված էր երկու գլուխ Ֆ. Հաուսդորֆի «Բազմությունների տեսություն» նշանավոր գրքի 1914 և 1927 թվերի հրատարակումներում (որպես բազմությունների տեսության ենթաբաժիններ): Եվ միայն 1930 թվին ամերիկացի մաթեմատիկոս Ս. Լեֆշեցը հրապարակեց գիրք «Տոպոլոգիա» (Topology) անվանումով, որտեղ տոպոլոգիան ներկայացված է որպես երկրաչափություն հիմնված, և հետագայում համընդհանուր հավանության արժանացած, աքսիոմների համակարգի վրա:

Մինչև այդ աքսիոմները ներկայացնելը քննարկենք տոպոլոգիական տարածության մի օրինակ, որը հանդիսացել է նախատիպ՝ տոպոլոգիական տարածություն ընդհանուր հասկացության համար:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում դիտարկվում են թվային ուղղի կետերին և ենթաբազմություններին առնչվող մի շարք հասկացություններ՝ կետի ε-շրջակայք, ենթաբազմության ներքին կետ, հպման կետ, բաց ենթաբազմություն, փակ ենթաբազմություն, զուգամետ հաջորդականություն: Այդ հասկացություններից որևէ մեկը կանվանենք **հիմնային հասկացություն**, եթե մյուսները կարող են սահմանվել դրա միջոցով:

Ցույց տանք, որ **կետի ε-շրջակայքը հիմնային հասկացություն է**: Հիշեցնենք, որ թվային ուղղի x_0 կետի ε-շրջակայք կոչվում է $|x - x_0| < \varepsilon$ (որտեղ ε-ը 0-ից մեծ թիվ է) պայմանին բավարարող բոլոր x թվերի բազմությունը, կամ որ նույնն է՝ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ինտերվալը: Այնուհետև, որևէ $X \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության x_0 կետը կոչվում է X-ի ներքին կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ի որևէ ε-շրջակայք, որն ամբողջությամբ ընկած է X-ում՝ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X$: Օրինակ՝ $X = \{-2\} \cup (1, 3] \cup [5, +\infty)$ ենթաբազմության համար ներքին կետեր են իր բոլոր կետերը՝ բացառությամբ -2, 3, 5 կետերի (ինչո՞ւ):

Ըստ սահմանման՝ թվային ուղղի որևէ ենթաբազմություն կոչվում է բաց ենթաբազմություն, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Օրինակ՝ պարզ է, որ ամեն մի (a, b) ինտերվալ բաց ենթաբազմություն է (հիմնավորե՛ք):

Ենթաբազմության հպման կետ հասկացությունը նույնպես սահմանվում է կետի ε-շրջակայք հասկացությունով. x_0 կետը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության հպման կետ, եթե այդ կետի ցանկացած ε-շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում X-ի հետ: Պարզ է, որ ցանկացած ենթաբազմության բոլոր կետերը հպման կետեր են իր համար: Իսկ օրինակ՝ $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup [2, 4) \cup (5, +\infty)$ ենթաբազմության համար բացի սեփական կետերից հպման կետեր են նաև իրեն չպատկանող $0, 4, 5$ կետերը (հիմնավորե՛ք):

Թվային ուղղի ենթաբազմությունը կոչվում է փակ ենթաբազմություն, եթե այն պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը: Հեշտ է ցույց տալ, որ փակ ենթաբազմություններ են թվային ուղղի բոլոր միկետանոց $\{a\}$, բոլոր $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$ տեսքերի ենթաբազմությունները, ինչպես նաև դրանց բոլոր վերջավոր միավորումները: Ուստի, մեծ հաշվով, փակ ենթաբազմությունը նույնպես սահմանվում է կետի ε-շրջակայք հասկացությունով:

Վերջապես պարզ է նաև, որ զուգամետ հաջորդականություն հասկացությունը ևս սահմանվում է ε-շրջակայք հասկացությունով (հիմնավորե՛ք):

Այսպիսով, կետի ε-շրջակայք հասկացությունը հիմնային հասկացություն է թվային ուղղի համար, և այս փաստը կարձանագրենք կարճ՝ ասելով, որ **կետի ε-շրջակայք հասկացությունը որոշում է տոպոլոգիա թվային ուղղի վրա**:

Այժմ ցույց տանք, որ թվային ուղղի համար **հիմնային հասկացություն է նաև բաց ենթաբազմություն հասկացությունը**: Այդ նպատակով նախ ճշտենք թվային

ուղղի բաց ենթաբազմություն հասկացությունը՝ առանց հիմնվելու կետի ε-շրջակայք հասկացության վրա:

Բաց բազմությունների ինտուիտիվ ընկալվող առաջին օրինակները (a, b) տեսքի ինտերվալներն են: Ի տարբերություն $[a, b], (a, b], [a, b)$ տեսքերի միջակայքերի, որոնք «ցանկապատված են» մի կամ երկու կողմից a, b կետերով, (a, b) ինտերվալները ցանկապատ չունեն և բաց են երկու կողմից: Ուստի բնական կլինի թվային ուղղի որևէ X ենթաբազմություն համարել նրա բաց ենթաբազմություն, եթե X-ի ոչ մի կետ չի հանդիսանում ցանկապատ նրա համար: Իսկ սա նշանակում է՝ գոյություն ունի որևէ (a, b) ինտերվալ, որ $x_0 \in (a, b)$ և (a, b)-ն ընկած է X-ում: Այստեղից որպես հետևանք ստանում ենք. թվային ուղղի որևէ X ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կամ որևէ ինտերվալ է, կամ ներկայացվում է որպես որոշ քանակով ինտերվալների միավորում (հիմնավորե՛ք):

Այժմ կարող ենք ընդլայնել նաև կետի ε-շրջակայք հասկացությունը, ներմուծելով նոր՝ **կետի շրջակայք** հասկացություն. թվային ուղղի կամայական կետի շրջակայք կանվանենք այդ կետը պարունակող ցանկացած բաց ենթաբազմություն: Սա հնարավորություն է տալիս նորովի, բաց ենթաբազմության հիմքով, վերասահմանել նաև ենթաբազմության ներքին կետ, հպման կետ, փակ ենթաբազմություն, զուգամետ հաջորդականություն հասկացությունները. դրա համար բավական է հին սահմանումների ձևակերպումներում ամենուրեք «կետի ε-շրջակայք» բառակապակցությունը փոխարինել «կետի շրջակայք» բառակապակցությունով:

Այսպիսով, թվային ուղղի **բաց ենթաբազմություն հասկացությունը հիմնային է և նույնպես որոշում է տոպոլոգիա այդ ուղղի վրա**:

Նկատենք, որ ի տարբերություն կետի ε-շրջակայք հասկացության՝ թվային ուղղի բաց ենթաբազմություններն օժտված են պարզ ձևակերպվող և հեշտ ապացուցվող հետևյալ երեք հատկություններով՝

1. ինքը՝ թվային ուղիղը բաց ենթաբազմություն է,
2. ցանկացած (վերջավոր կամ անվերջ) քանակով բաց ենթաբազմությունների միավորումը բաց ենթաբազմություն է,
3. վերջավոր քանակով ցանկացած բաց ենթաբազմությունների հատումը կամ դատարկ է, կամ դարձյալ բաց ենթաբազմություն է:

3-րդ հատկությունում ենթաբազմությունների քանակի սահմանափակումը պայմանավորված է նրանով, որ անվերջ քանակով բաց ենթաբազմությունների հատումը կարող է բաց չլինել: Օրինակ՝ ինտերվալների $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ հատումը թվային ուղղի միկետանոց $\{0\}$ ենթաբազմություն է, որը բաց ենթաբազմություն չէ (հիմնավորե՛ք):

Ելնելով որոշ տեխնիկական նկատառումներից՝ նպատակահարմար է դատարկ բազմությունը նույնպես համարել բաց ենթաբազմություն (դրան խոչընդոտող որևէ իրական հանգամանք չկա): Արդյունքում 1-ին և 3-րդ հատկությունները կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ տեսքով.

1. $\mathbb{R}$-ը և $\varnothing$-ը բաց ենթաբազմություններ են,

3. վերջավոր քանակով ցանկացած բաց ենթաբազմությունների հատումը բաց ենթաբազմություն է:

Թվային ուղղի բաց ենթաբազմությունների այս երեք հատկությունները վերածվել են աքսիոմների ընդհանուր դեպքում, այսինքն՝ կամայական բազմություններում, աքսիոմների միջոցով տոպոլոգիա սահմանելու համար:

Դիտողություն 1: Նշենք, որ բաց բազմությունների 1-3 հատկությունները բնորոշ են ոչ միայն թվային ուղղի, այլ նաև հարթության, եռաչափ տարածության և ընդհանրապես n-չափականության $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածությունների բաց ենթաբազմություններին:

Ասվածը պարզաբանենք հարթության օրինակով՝ չխորանալով դետալների մեջ: Այն դերը, որ կատարում են կետերի ε-շրջակայքերը թվային ուղղի բաց ենթաբազմություններ սահմանելիս, հարթության դեպքում կատարում են անեզր շրջանները: Հարթության որևէ X ենթաբազմություն կոչվում է բաց ենթաբազմություն, եթե նրա ամեն մի $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի համար գոյություն ունի x^0 կենտրոնով, $\varepsilon_0 > 0$ շառավղով $\{x = (x_1, x_2);\ (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < \varepsilon_0^2\}$ անեզր շրջան, որն ամբողջովին ընկած է X-ում:

Որպես ամփոփում նշենք. առանձին վերցված ամեն մի դեպքում (ուղիղ, հարթություն և այլն) բաց ենթաբազմությունները սահմանվում են յուրովի: Բայց դրանք բոլորն էլ օժտված են միևնույն վերոհիշյալ 1-3 հատկություններով:

Դիտողություն 2: Ինչպես գիտենք, էվկլիդեսյան երկրաչափության հիմքում ընկած են երեք տիպի օբյեկտներ, որոնք կոչվում են «կետեր», «ուղիղներ», «հարթություններ» և չեն սահմանվում: Փոխարենը աքսիոմների տեսքով ձևակերպվում են փոխհարաբերություններ այդ օբյեկտների միջև. օրինակ՝ ամեն մի երկու տարբեր կետերով անցնում է ուղիղ, և այն միակն է, կամ՝ ուղղով և նրան չպատկանող կետով կարելի է (դրանց հարթության մեջ) տանել ոչ ավելի, քան մի ուղիղ, որը չի հատում տվյալ ուղղին (զուգահեռության աքսիոմ): Այնուհետև զուտ տրամաբանորեն դուրս են բերվում հետևություններ աքսիոմներից, սահմանվում են նոր հասկացություններ՝ բացահայտելով (ապացուցելով) այդ հասկացությունների որոշակի հատկություններ և այլն:

Նշենք, որ տվյալ երկրաչափության համար աքսիոմների համակարգը որպես կանոն միակը չէ: Օրինակ՝ վերլուծական երկրաչափության դասընթացում (կոորդինատային մեթոդի միջոցով) կառուցվում է էվկիլդեսյան երկրաչափությանը համարժեք երկրաչափություն, որի հիմքում ընկած են «կետ» և «վեկտոր» չսահմանվող հասկացությունները: Այս դեպքում արդեն ուղիղն ու հարթությունը սահմանվում են կետ և վեկտոր հասկացություններով:

Նույնը տեղի ունի նաև տոպոլոգիայի դեպքում. բազմության վրա տոպոլոգիա և տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունները կարող են սահմանվել նաև

աքսիոմների այլ համակարգերով՝ հիմքում դնելով ոչ թե բաց ենթաբազմություն (չսահմանվող) հասկացությունը, այլ մեկ ուրիշ (կամ մի քանի) դարձյալ չսահմանվող հասկացություն, օրինակ՝ բազմության **կետի շրջակայք** հասկացությունը: Ընդ որում, մի մոտեցման դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում ընկած չսահմանվող հասկացությունը կարող է արդեն սահմանվել մեկ այլ մոտեցման դեպքում:

Այժմ ընդհանուր դեպքում սահմանենք բազմության վրա տոպոլոգիա և տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունները՝ հիմք ընդունելով բաց բազմություն չսահմանվող հասկացությունը:

Սահմանում: Ասում են, որ կամայական X բազմության վրա տրված է **տոպոլոգիա**, եթե տրված է X-ի որոշ U_i ենթաբազմությունների $\tau = \{U_i,\ i \in I\}$ ընտանիք, որը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին (աքսիոմներին).

1. X-ը և դատարկ բազմությունը պետք է պատկանեն τ-ին,
2. τ-ի ցանկացած քանակով տարրերի միավորումը պետք է պատկանի τ-ին,
3. τ-ի ցանկացած վերջավոր քանակով տարրերի հատումը նույնպես պետք է պատկանի τ-ին:

   Նկատենք, որ 3-րդ պայմանը կարող է փոխարինվել հետևյալ համարժեք պայմանով՝

$3'$. τ-ի ցանկացած երկու տարրերի հատումը նորից պետք է պատկանի τ-ին:

Սահմանում: X բազմությունը նրա վրա տրված $\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ տոպոլոգիայի հետ միասին (այսինքն (X, τ) զույգը) կոչվում է **տոպոլոգիական տարածություն**: X բազմության $x \in X$ տարրերը կոչվում են տոպոլոգիական տարածության **կետեր**, իսկ $U_i \subset X$ ենթաբազմությունները (այսինքն τ տոպոլոգիայի տարրերը) կոչվում են տվյալ տոպոլոգիական տարածության **բաց ենթաբազմություններ**:

Ստորև բերվում են տոպոլոգիաների մի քանի օրինակներ, որոնցից գոյանում են համապատասխան անվանումներով տոպոլոգիական տարածություններ:

Օրինակ 1: Մեկից ավելի տարրեր պարունակող ամեն մի X բազմության վրա կարելի է սահմանել առնվազն երկու տոպոլոգիա.

ա) որպես τ վերցնենք X-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **դիսկրետ տոպոլոգիա** X-ի վրա:

բ) որպես τ վերցնենք միայն X-ից և դատարկ բազմությունից կազմված ընտանիքը՝ $\tau = \{\varnothing, X\}$: Այն կոչվում է **անտիդիսկրետ** տոպոլոգիա X-ի վրա:

   Երկու դեպքում էլ 1-3 պայմանների ստուգումը դժվարություն չի հարուցում:

Այսպիսով, **դիսկրետ տոպոլոգիական տարածությունում** (կնշանակենք $(X;$ **դիսկր.**$)$) բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ի բոլոր ենթաբազմությունները: Իսկ **անտիդիսկրետ տոպոլոգիական տարածությունում** (կնշանակենք $(X;$ **անտ.**$)$) բաց ենթաբազմություններ են միայն X-ը և $\varnothing$-ը:

Օրինակ 2: Դիտարկենք երկու տարր պարունակող որևէ $X = \{x_1, x_2\}$ բազմություն և նրա ենթաբազմությունների $\tau = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ ընտանիքը: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմներին: Ստացված (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կարճ կոչվում է **կապակցված կետազույգ**: Այս տարածությունում բաց ենթաբազմություններ են $\varnothing$-ը, X-ը և $\{x_1\}$-ը, իսկ $\{x_2\}$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն չէ:

Նկատենք, որ $\forall X = \{x_1, x_2\}$ բազմությունից ստացվում է ճիշտ և ճիշտ չորս տոպոլոգիական տարածություն. դրանք են՝ դիսկրետ, անտիդիսկրետ տարածությունները և երկու կապակցված կետազույգերը (հիմնավորե՛ք, որ տվյալ X-ից այլ տոպոլոգիական տարածություն չի գոյանում):

Օրինակ 3: $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա դիտարկենք ենթաբազմությունների τ ընտանիք կազմված $\varnothing$ բազմությունից, բոլոր (a, b) ինտերվալներից և դրանց բոլոր հնարավոր միավորումներից: Առաջին երկու պայմանները բավարարվում են անմիջականորեն, ըստ τ-ի սահմանման: Ստուգենք 3 պայմանը $3'$ տեսքով: Եթե ունենք τ ընտանիքի որևէ երկու $U_1 = \bigcup\limits_j (a_j, b_j),\ j \in J$ և $U_2 = \bigcup\limits_k (c_k, d_k),\ k \in K$ տարրեր (դրանք ինտերվալների միավորումներ են ըստ ինդեքսների J և K բազմությունների), ապա

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_j (a_j; b_j)\right) \cap \left(\bigcup_k (c_k; d_k)\right) = \bigcup_{i,j} \left((a_j; b_j) \cap (c_k; d_k)\right)$$

Պարզ է, որ ինտերվալների $(a_j, b_j) \cap (c_k, d_k)$ հատումը կամ դատարկ է, կամ էլ նորից ինտերվալ է: Ուստի $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ըստ τ-ի սահմանման:

Այս տոպոլոգիան կոչվում է թվային ուղղի **սովորական տոպոլոգիա**:

Թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիան շահեկանորեն առանձնանում է $\mathbb{R}$-ի մյուս բոլոր տոպոլոգիաներից: Այդ տոպոլոգիայի հիմքով է կառուցվում մի փոփոխականի ֆունկցիաների մաթեմատիկական անալիզը: Ստացված տոպոլոգիական տարածությունը կնշանակենք ($\mathbb{R}$; **սովոր.**): Այս տարածությունում բաց ենթաբազմություններ են $\varnothing$-ը, բոլոր (a, b) ինտերվալները և նրանց միավորումները:

Մասնավորապես բաց ենթաբազմություններ են նաև $\mathbb{R}$-ը և $(-\infty, a),\ (b, +\infty)$ տեսքերի ինտերվալները, իսկ մի կետանոց՝ $\{a\}$ տեսքի, նաև $[a, b],\ (a, b],\ [a, b),\ (-\infty, a],\ [b, +\infty)$ տեսքերի ենթաբազմությունները, ինչպես նաև ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$, իռացիոնալ թվերի Ir ենթաբազմությունները բաց ենթաբազմություններ չեն, քանի որ չեն կարող ներկայացվել որպես (a, b) տեսքի ինտերվալների միավորումներ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 4: Դիցուք X-ը որևէ անվերջ բազմություն է: Դիտարկենք նրա ենթաբազմությունների τ ընտանիքը՝ կազմված X-ից, $\varnothing$-ից և այն բոլոր $U \subset X$ ենթաբազմություններից, որոնց $X \backslash U$ լրացումը վերջավոր բազմություն է: Ցույց տանք, որ τ-ն որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա: Ստուգենք 2-րդ պայմանը: Դիցուք $U_j \in \tau,\ j \in J$, որտեղ J-ն ինդեքսների ինչ-որ բազմություն է: Ըստ դե Մորգանի 1-ին բանաձևի՝

$X \setminus \bigcup\limits_j U_j = \bigcap\limits_j (X \setminus U_j)$: Քանի որ $X \setminus U_j$ լրացումները վերջավոր ենթաբազմություններ են, ուստի նրանց հատումը նույնպես X-ի վերջավոր ենթաբազմություն է: Հետևաբար $\bigcup\limits_j U_j \in \tau$: Ստուգենք 3-րդ պայմանը: Դիցուք $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \tau$: Ըստ դե Մորգանի 2-րդ բանաձևի՝ $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ ենթաբազմության $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (X \setminus U_i)$ լրացումը վերջավոր ենթաբազմություն է: Ուստի $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \tau$: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **վերջավոր լրացումների տոպոլոգիա** X-ի վրա:

Օրինակ 5: Դիցուք X-ը ոչ հաշվելի որևէ բազմություն է: Դիտարկենք նրա ենթաբազմությունների τ ընտանիքը կազմված X-ից, $\varnothing$-ից և այն բոլոր V ենթաբազմություններից, որոնց $X \setminus V$ լրացումը հաշվելի բազմություն է: Ապա τ-ն տոպոլոգիա է X-ի վրա (կոչվում է **հաշվելի լրացումների տոպոլոգիա**): Ապացուցումը (թողնվում է ընթերցողին) կատարվում է նախորդ օրինակի նմանությամբ՝ հիմնվելով հաշվելի բազմությունների միավորման և հատման հատկությունների վրա:

Կնշանակենք $(X, \textbf{վերջ. լր.})$ և $(X, \textbf{հաշվ. լր.})$ սիմվոլներով այն տոպոլոգիական տարածությունները, որոնք գոյանում են X բազմության համապատասխանաբար վերջավոր լրացումների և հաշվելի լրացումների տոպոլոգիաներով: Համեմատելով դրանք միմյանց հետ՝ նկատենք, որ իռացիոնալ թվերի բազմությունը բաց բազմություն չէ $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունում, բայց բաց բազմություն է $(\mathbb{R}, \text{հաշվ. լր.})$ տոպոլոգիական տարածությունում (ինչո՞ւ):

Սահմանափակվելով առայժմ 1-5 օրինակներով՝ նկատենք նաև, որ եթե միևնույն X բազմության վրա ունենք որևէ երկու τ_1 և τ_2 տոպոլոգիա, ապա նրանց $\tau_1 \cap \tau_2$ հատումը նորից տոպոլոգիա է X-ի վրա (հիմնավորե՛ք): Իսկ նրանց $\tau_1 \cup \tau_2$ միավորումը կարող է չլինել տոպոլոգիա X-ի վրա (այդպիսի օրինակ կբերվի թեմա 5-ում):

Միևնույն X բազմության վրա տրված տոպոլոգիաների բազմության վրա սահմանվում է մասնակի կարգ՝ «թույլ է», «ուժեղ է» տեսքով:

Սահմանում: Եթե X-ի վրա տրված են երկու՝ τ_1 և τ_2 տոպոլոգիա այնպես, որ $\tau_1 \subset \tau_2$ ապա ասում են, որ τ_1-ը **ուժեղ չէ** τ_2-ից, կամ τ_2-ը **թույլ չէ** τ_1-ից: Եթե $\tau_1 \subset \tau_2$ և $\tau_1 \neq \tau_2$, ապա ասում են, որ τ_1-ը **թույլ է** τ_2-ից (τ_2-ը **ուժեղ է** τ_1-ից):

Միևնույն X բազմության վրա բոլոր տոպոլոգիաներից անտիդիսկրետ տոպոլոգիան ամենաթույլ, իսկ դիսկրետ տոպոլոգիան ամենաուժեղ տոպոլոգիաներն են: Նկատենք, որ նույն X-ի վրա որևէ երկու տոպոլոգիաներ միշտ չէ, որ համեմատելի են:

Օրինակ 6: Եթե $X = \{x_1, x_2\}$, ապա $\tau_1 = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ և $\tau_2 = \{\varnothing, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$ տոպոլոգիաները համեմատելի չեն, քանի որ $\{x_1\} \in \tau_1$, բայց $\{x_1\} \notin \tau_2$, ինչպես նաև $\{x_2\} \in \tau_2$, բայց $\{x_2\} \notin \tau_1$:

Օրինակ 7: Ցույց տանք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիան ուժեղ է $\mathbb{R}$-ի վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից: Պարզ է, որ $(0,1)$ ինտերվալը պատկանում է դրանցից առաջինին և չի պատկանում երկրորդին: Մյուս կողմից, եթե $U \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունը պատկանում է երկրորդին, ապա $\mathbb{R} \setminus U$ լրացումը վերջավոր բազմություն է, ուստի կամ $U = \mathbb{R}$, կամ $\mathbb{R} \setminus U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: Երկրորդ դեպքում, համարելով $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, կունենանք $U = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty)$, և հետևաբար U-ն պատկանում է $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիային (ինչի՞ց է դա հետևում):

Ընթերցողին առաջարկում ենք ցույց տալ (որպես օգտակար խնդիր), որ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան ուժեղ է վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից, բայց համեմատելի չէ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

Այժմ ցույց տանք, որ հնարավոր է ներմուծել **կետի շրջակայք** հասկացություն բոլոր տոպոլոգիական տարածություններում որպես հիմնական այլընտրանքային հասկացություն:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում $x \in X$ կետի **բաց շրջակայք** կոչվում է այդ կետը պարունակող X-ի ցանկացած բաց ենթաբազմություն: Այնուհետև, x **կետի շրջակայք** կոչվում է ցանկացած $V \subset X$ ենթաբազմություն, որն իր մեջ ընդգրկում է x-ի որևէ U բաց շրջակայք:

Այսպիսով, կարճ՝ $V \subset X$ ենթաբազմությունը շրջակայք է x կետի համար, եթե գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Նկատենք նաև, որ ընդհանուր դեպքում կետի շրջակայքը կարող է չլինել այդ կետի բաց շրջակայք:

Օրինակ 8: $(X, \text{դիսկր.})$ տարածությունում x կետը պարունակող X-ի բոլոր ենթաբազմությունները (բաց) շրջակայքեր են x-ի համար: Մասնավորապես, $\forall x \in X$ կետի համար $\{x\}$ ենթաբազմությունը x կետի բաց շրջակայք է: Իսկ $(X, \text{անտ.})$ տարածությունում ցանկացած կետ ունի միայն մի շրջակայք, որը ինքը՝ X-ն է: Այս դեպքում արդեն $\{x\}$ ենթաբազմությունը x կետի շրջակայք չէ, եթե X-ը պարունակում է մեկից ավելի կետեր: Դիտարկենք ևս երկու օրինակ.

Օրինակ 9: $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունում $x = 0{,}5$ կետի համար հետևյալ՝ $(0;1)$, $[0;1)$, $(0;1]$, $[0;1] \cup \{3\}$ ենթաբազմությունները շրջակայքեր են, ընդ որում դրանցից միայն առաջինն է բաց շրջակայք: Իսկ $x = 0, 1, 3$ կետերի համար դրանցից ոչ մեկը շրջակայք չէ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 10: $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունում իռացիոնալ թվերի բազմությունը շրջակայք չէ իր կետերից ոչ մեկի համար: Իսկ $(\mathbb{R}, \text{հաշվ. լր.})$ տարածությունում այն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 1: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում որևէ $W \subset X$ ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար:

Ապացուցում: Եթե W-ն բաց ենթաբազմություն է, ապա այն (բաց) շրջակայք է իր ցանկացած $w \in W$ կետի համար (ըստ կետի շրջակայքի սահմանման): Այժմ հակառակը՝ դիցուք W-ն շրջակայք է իր (ցանկացած) w կետի համար: Նշանակում է՝ գոյություն ունի $U(w) \in \tau$ բաց ենթաբազմություն, որ $w \in U(w) \subset W$: Ուստի W-ն կարող է ներկայացվել որպես բաց ենթաբազմությունների միավորում՝ $W = \bigcup\limits_{w} U(w)$: Հետևաբար W-ն բաց ենթաբազմություն է ըստ տոպոլոգիայի 2-րդ աքսիոմի: ■

Վերը մենք նշեցինք, որ կետի շրջակայք հասկացությունը հիմնային հասկացություն է թվային ուղղի տոպոլոգիայի համար: Պարզվում է, որ այն հիմնային հասկացություն է ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում: Իր նշանակությամբ այն հավասարազոր է բաց բազմություն հասկացությանը (պատմականորեն, տոպոլոգիայի՝ որպես մաթեմատիկայի բաժին ձևավորման առաջին փուլում տոպոլոգիական տարածությունները սահմանվել են կետերի շրջակայքերի միջոցով և կոչվել են **շրջակայքային տարածություններ**):

Սա պարզաբանելու նպատակով նախ թվարկենք շրջակայքերի հիմնական հատկությունները:

Թեորեմ 2: Դիցուք (X, τ)-ն որևէ տոպոլոգիական տարածություն է: Ապա X-ի կետերի շրջակայքերն օժտված են հետևյալ 4 հատկություններով.

1. ամեն մի x կետ պատկանում է իր ցանկացած շրջակայքի,
2. եթե V-ն x կետի շրջակայք է և $V \subset W$, ապա W-ն նույնպես x կետի շրջակայք է,
3. x կետի ցանկացած վերջավոր քանակով շրջակայքերի հատումը նորից x-ի շրջակայք է,
4. x կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի U շրջակայք, որ $U \subset V$, և U-ն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար:

Ապացուցում: Առաջին հատկությունն ակնհայտ է, ցույց տանք երկրորդը: Եթե V-ն x կետի որևէ շրջակայք է, ապա ըստ սահմանման գոյություն ունի x-ի U բաց շրջակայք, որ $x \in U \subset V$: Քանի որ $V \subset W$ և $x \in U \subset W$, ուստի W-ն նույնպես շրջակայք է x կետի համար:

Ապացուցենք 3-ը: Դիցուք V_1-ը և V_2-ը x կետի որևէ երկու շրջակայքեր են: Ըստ սահմանման գոյություն ունեն X-ի U_1 և U_2 բաց ենթաբազմություններ, որ $x \in U_1 \subset V_1$ և $x \in U_2 \subset V_2$: Ըստ տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմի՝ $U_1 \cap U_2$-ը բաց ենթաբազմություն է X-ում, և քանի որ $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$, ուստի $V_1 \cap V_2$-ը x կետի շրջակայք է: Այժմ հատկություն 3-ը ստացվում է պարզ ինդուկցիայով:

Ապացուցենք 4-ը: x կետի կամայական V շրջակայքի համար գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ U-ն շրջակայք է իր ցանկացած y կետի համար: Ուստի $U \in S_y$ կամայական $y \in U$ կետի դեպքում: ■

Այս 1-4 հատկությունները լիովին բնութագրում են կետերի շրջակայքերը տոպոլոգիական տարածություններում այն իմաստով, որ կարող են դիտարկվել որպես աքսիոմներ՝ բազմության վրա տոպոլոգիայի այլընտրանքային սահմանման համար: Նախ (X, τ) տարածության ամեն մի $x \in X$ կետի համար նշանակենք S_x-ով այդ կետի բոլոր շրջակայքերի բազմությունը:

Թեորեմ 3 (շրջակայքերի միջոցով տոպոլոգիայի տրման մասին)**:** Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, և դիցուք ամեն մի $x \in X$ տարրի ինչ-որ եղանակով համադրված է X-ի ենթաբազմությունների մի ինչ-որ $\hat{S}_x$ ընտանիք այնպես, որ տեղի ունեն ստորև բերվող 1^*-4^* հատկությունները (աքսիոմները).

1^*. x-ը պատկանում է $\hat{S}_x$-ի բոլոր տարրերին,

2^*. եթե $V \in \hat{S}_x$ և $V \subset W$, ապա W-ն ևս պատկանում է $\hat{S}_x$-ին,

3^*. $\hat{S}_x$-ի ցանկացած վերջավոր տարրերի հատումը նույնպես պատկանում է $\hat{S}_x$-ին,

4^*. ցանկացած $V \in \hat{S}_x$ տարրի համար գոյություն ունի այնպիսի $U \in \hat{S}_x$ տարր, որ $U \subset V$ և $U \in \hat{S}_y$ ցանկացած $y \in U$ տարրի դեպքում:

Ապա X բազմության վրա գոյություն ունի միակ այնպիսի τ տոպոլոգիա, որ (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում ցանկացած x կետի շրջակայքերի S_x ընտանիքը համընկնում է ենթաբազմությունների $\hat{S}_x$ ընտանիքի հետ:

Ապացուցում: Սահմանենք X-ում ենթաբազմությունների τ ընտանիք կազմված $\varnothing$-ից և այն բոլոր U ենթաբազմություններից, որ U-ն պատկանում է $\hat{S}_x$ ընտանիքին ամեն մի $x \in U$ տարրի դեպքում: Այժմ 1^* և 2^* աքսիոմներից հետևում է, որ ինքը՝ X-ը պատկանում է բոլոր $\hat{S}_x$ ընտանիքներին, ուստի $X \in \tau$: Այսինքն τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի առաջին աքսիոմին:

Ցույց տանք, որ τ-ն բավարարում է նաև տոպոլոգիայի երկրորդ աքսիոմին: Դիցուք $U = \bigcup\limits_i U_i$, որտեղ $U_i \in \tau$, $i \in I$, իսկ I-ն ինդեքսների որևէ բազմություն է: Կամայական $x_0 \in U$ տարրի համար գոյություն ունի U_{i_0}, որ $x_0 \in U_{i_0}$, $i_0 \in I$: Այժմ τ ընտանիքի սահմանումից հետևում է, որ $U_{i_0} \in \hat{S}_{x_0}$, և քանի որ $U_{i_0} \subset U$, ուստի U-ն նույնպես պատկանում է $\hat{S}_{x_0}$ ընտանիքին՝ ըստ 2^* աքսիոմի: Հետևաբար $U \in \tau$ ըստ τ ընտանիքի սահմանման: Այսպիսով τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի երկրորդ աքսիոմին:

Ստուգենք տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմը. դիցուք $U = U_1 \cap U_2$, որտեղ $U_1, U_2 \in \tau$, և ցույց տանք, որ $U \in \tau$: Կամայական $x_0 \in U$ տարրի դեպքում ունենք $x_0 \in U_1$, $x_0 \in U_2$, և ունենք նաև $U_1 \in \hat{S}_{x_0}$, $U_2 \in \hat{S}_{x_0}$ (ըստ τ ընտանիքի սահմանման): Ուստի $U \in \hat{S}_{x_0}$ ըստ 3^* աքսիոմի, հետևաբար $U \in \tau$ (ըստ τ ընտանիքի սահմանման): Ուրեմն τ-ն բավարարում է նաև տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմին:

Այժմ ամեն մի $x \in X$ կետի համար դիտարկենք x-ի բոլոր շրջակայքերի S_x ընտանիքը (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում և ցույց տանք, որ տեղի ունի $S_x = \hat{S}_x$ համընկում:

Եթե $V \in S_x$, այսինքն V-ն x կետի որևէ շրջակայք է (X, τ) տարածությունում, ապա գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Քանի որ $U \in \hat{S}_{x_0}$, ուստի աքսիոմ 2^*-ից ստանում ենք՝ $V \in \hat{S}_{x_0}$, և ուրեմն $S_x \subset \hat{S}_{x_0}$: Հակառակ՝ $\hat{S}_{x_0} \subset S_x$ ներդրումը հաստատելու համար դիտարկենք X-ի կամայական $V \in \hat{S}_{x_0}$ ենթաբազմություն: Ըստ 4^* աքսիոմի՝ գոյություն ունի X-ի $U \in \hat{S}_{x_0}$ ենթաբազմություն, որ $U \subset V$, և U-ն պատկանում է $\hat{S}_y$ ընտանիքին ամեն մի $y \in U$ տարրի դեպքում: Նշանակում է՝ $U \in \tau$ ըստ τ ընտանիքի սահմանման: Այսպիսով ունենք՝ $x \in U \subset V$, ուրեմն V-ն x կետի շրջակայք է τ տոպոլոգիայում, ուստի $U \in S_x$: Հետևաբար $\hat{S}_{x_0} \subset S_x$, և ունենք $S_x = \hat{S}_{x_0}$ համընկում:

Վերջապես նկատենք, որ τ տոպոլոգիայի միակությունը հետևանք է հետևյալ դիտողությունից. եթե X բազմության որևէ երկու տոպոլոգիայում ցանկացած x կետի շրջակայքերը համընկնում են, ապա այդ տոպոլոգիաները նույնական են: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 4-ի վերաբերյալ

4.1. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի ամեն մի ինտերվալ կարող է ներկայացվել որպես $[a, b]$ տեսքի հատվածների միավորում:

4.2. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի վերջավոր քանակով կամայական ինտերվալների հատումը կամ դատարկ է, կամ ինտերվալ է:

4.3. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի անվերջ քանակով կամայական ինտերվալների հատումը կարող է լինել $\varnothing$, $\{a\}$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ տեսքերի ենթաբազմություններից որևէ մեկը: Այդ 6 տեսքերից յուրաքանչյուրի համար կառուցեք այդպիսի հատումների մեկական օրինակ:

4.4. Դիտարկենք երեք տարրից կազմված որևէ $X = \{a, b, c\}$ բազմություն և նրա ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքները.

$$\Phi_1 = \{\varnothing, \{c\}, \{a, b\}, X\},$$
$$\Phi_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\},$$
$$\Phi_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\},$$
$$\Phi_4 = \{\varnothing, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} :$$

ա) Դրանցից որո՞նք են որոշում X բազմության տոպոլոգիա:

բ) Գտեք X-ի վրա իրարից տարբեր բոլոր տոպոլոգիաները:

4.5. Որոշու՞մ է արդյոք տոպոլոգիա բոլոր բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմության վրա ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքը.

ա) $\{\varnothing, \{V_n \mid V_n \subset \mathbb{N},\ n \geq 1\}\}$, որտեղ $V_n = \{n, n+1, \dots\}$,

բ) $\{\mathbb{N}, \{W_n \mid W_n \subset \mathbb{N},\ n \geq 1\}\}$, որտեղ $W_n = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ և $x < n\}$:

4.6. Ճի՞շտ է արդյոք, որ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում ամեն մի ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն կարող է ներկայացվել որպես $[a, b]$ տեսքի հատվածների միավորում:

4.7. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների հետևյալ համախմբություններից ոչ մեկը տոպոլոգիա չէ $\mathbb{R}$-ի համար.

ա) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x]$, որտեղ x-ը կամայական թիվ է $\mathbb{R}$-ում$\}$,

բ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(a, b)$, որտեղ $a, b \in \mathbb{R}$ կամայական են և $a < b\}\}$:

4.8. $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքներից որո՞նք են որոշում տոպոլոգիա $\mathbb{R}$-ի վրա.

ա) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}$ կամայական թիվ է$\}\}$,

բ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{Q}$ կամայական ռացիոնալ թիվ է$\}\}$,

գ) $\{\varnothing,\ \{(-\infty, -x] \cup (x, +\infty) \mid x \geq 0$ կամայական թիվ է$\}\}$,

դ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{[-x, x) \mid x > 0$ կամայական իռացիոնալ թիվ է$\}$:

4.9. Դիցուք X-ը որևէ ոչ հաշվելի բազմություն է: Ապացուցեք, որ օրինակ 5-ում սահմանված ենթաբազմությունների τ ընտանիքը որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա:

4.10. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան ուժեղ է $\mathbb{R}$-ի վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից:

4.11. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան համեմատելի չէ $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

4.12. Հանդիսանու՞մ է արդյոք շրջակայք ուղղի $\sqrt{2}$ կետի համար բոլոր իռացիոնալ թվերից կազմված ենթաբազմությունը

ա) ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում,

բ) ($\mathbb{R}$, վերջ. լր.) տարածությունում,

գ) ($\mathbb{R}$, հաշվ. լր.) տարածությունում:

Թեմա 5

Տոպոլոգիայի բազա, բազայի հայտանիշ, տոպոլոգիայի տրում բազայի միջոցով: Տոպոլոգիական տարածության փակ ենթաբազմությունները, տոպոլոգիայի այլընտրանքային սահմանում: Անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները, ռեգուլյար և նորմալ տարածություններ

Որևէ X բազմության վրա տոպոլոգիա տալու համար պարտադիր չէ հատիկ-հատիկ թվարկել τ-ի բոլոր տարրերը (X-ի բաց բազմությունները): Բավական է տալ կամ նկարագրել դրանց մի մասը՝ պայմանով, որ մյուսները ստացվեն դրանց միավորումներով: Այս կերպ գալիս ենք տոպոլոգիայի բազա հասկացությանը:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածության բաց ենթաբազմությունների $B \subset \tau$ համախմբությունը կոչվում է τ **տոպոլոգիայի բազա**, եթե ցանկացած ոչ դատարկ U բաց ենթաբազմություն ներկայացվում է որպես B-ի որոշ քանակով տարրերի միավորում:

Պարզ է, որ ցանկացած τ տոպոլոգիայի համար ինքը՝ τ-ն բազա է:

Օրինակ 1: ա) Ակնհայտ է, որ $(X, \text{անտիդ.})$ տարածության համար կա տոպոլոգիայի միայն մի բազա՝ $B = \{X\}$, իսկ $(X, \text{դիսկր.})$ տարածության դեպքում տոպոլոգիայի ցանկացած բազա իր մեջ պետք է պարունակի բոլոր մի կետանոց $\{x\} \subset X$ ենթաբազմությունները: Նկատենք նաև, որ $(X, \text{դիսկր.})$-ում իրենք՝ բոլոր մի կետանոց ենթաբազմությունները ևս կազմում են տոպոլոգիայի բազա, և այն որոշակի իմաստով «նվազագույն» բազա է (պարունակվում է ցանկացած այլ բազայում):

բ) $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի համար (ըստ սահմանման) բազա են կազմում բոլոր (a, b) ինտերվալները, նաև դրա մասը կազմող ռացիոնալ ծայրակետերով բոլոր (r_1, r_2), $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ինտերվալները: Սա հիմնավորելու համար նկատենք, որ ցանկացած իրական թիվ կարելի է ցանկացած ճշտությամբ և՛ հավելորդով, և՛ պակասորդով մոտարկել ռացիոնալ թվերով: Դրա շնորհիվ ունենք $(a, b) = \bigcup (r_1, r_2)$ ներկայացում, որտեղ միավորումը տարածվում է ռացիոնալ ծայրակետերով այն բոլոր (r_1, r_2) ինտերվալների վրա, որոնք բավարարում են $a < r_1 < r_2 < b$ պայմանին:

Բերված օրինակներից հետևում է, որ ընդհանուր դեպքում տվյալ տոպոլոգիայի համար բազան կարող է միակը չլինել:

Այժմ բերենք բազայի հայտանիշ կետերի շրջակայքերի տերմիններով (հիշենք, որ կետի շրջակայք հասկացությունը բաց բազմություն հասկացությանը հավասարարժեք հասկացություն է):

Թեորեմ 1: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և X-ի բաց ենթաբազմությունների մի $B \subset \tau$ համախմբություն՝ $B = \{W_j \mid W_j \in \tau,\ j \in J\}$: Ապա

B-ն τ տոպոլոգիայի բազա է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall x \in X$ կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի որևէ $W \in B$ տարր, որ $x \in W \subset V$:

Ապացուցում: ա) Դիցուք B-ն τ տոպոլոգիայի որևէ բազա է, իսկ V-ն $x \in X$ կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի $U \in \tau$ բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Ըստ տոպոլոգիայի բազայի սահմանման ունենք՝ $U = \bigcup\limits_{k \in K} W_k$, որտեղ K-ն ինդեքսների J բազմության ենթաբազմություն է: Ուստի գոյություն ունի $k \in K$ տարր, որ $x \in W_k$: Այսպիսով $x \in W_k \subset V,\ W_k \in B$:

բ) Ապացուցենք հակառակ պնդումը. դիտարկենք կամայական $U \in \tau$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ U-ն կարելի է ներկայացնել որպես B-ի որոշ տարրերի միավորում: Որպես բաց բազմություն՝ U-ն շրջակայք է իր ամեն մի կետի համար (տե՛ս թեորեմ 1-ը թեմա 4-ում): Ըստ պայմանի՝ տվյալ $x \in U$ կետի համար գոյություն ունի $W(x) \in B$ տարր, որ $x \in W(x) \subset U$: Հետևաբար, $U = \bigcup\limits_{x \in U} W(x)$, որից էլ հետևում է, որ B-ն τ տոպոլոգիայի բազա է: ■

Տոպոլոգիայի բազա հասկացությունը հաճախ հեշտացնում կամ պարզեցնում է բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ընթացքը: Այն նաև թույլ է տալիս պարզեցնել շատ թեորեմների ապացույցները, ինչում կհամոզվենք հետագայում:

Թեորեմ 2 (բազայի միջոցով տոպոլոգիայի տրման մասին)**:** Դիցուք տրված է X բազմության որոշ ենթաբազմությունների $B = \{W_i \mid W_i \subset X,\ i \in I\}$ ընտանիք այնպես, որ

1. B-ի բոլոր տարրերի միավորումը X-ն է՝ $\bigcup\limits_{i \in I} W_i = X$,
2. B-ի ցանկացած երկու տարրերի (ոչ դատարկ) հատումը կարող է ներկայացվել որպես B-ի որոշ քանակով տարրերի միավորում:

Ապա X-ի վրա գոյություն ունի, ընդ որում միակ, այնպիսի τ տոպոլոգիա, որի համար B-ն տոպոլոգիայի բազա է:

Ապացուցում: Որպես τ վերցնենք B-ի բոլոր տարրերը, նրանց բոլոր հնարավոր միավորումները և $\varnothing$-ը: Տոպոլոգիայի առաջին երկու աքսիոմները τ-ի համար ստուգվում են հեշտությամբ (հետևում են 1-ից և τ-ի սահմանումից): Մնում է ստուգել 3, կամ նրան համարժեք $3'$ աքսիոմը: Դիցուք $U_1, U_2 \in \tau$, և $U_1 = \bigcup\limits_{k \in K} W_k,\ U_2 = \bigcup\limits_{l \in L} W_l$, որտեղ K-ն և L-ը ինդեքսների I բազմության ենթաբազմություններ են: Ունենք՝

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_k W_k\right) \cap \left(\bigcup_l W_l\right) = \bigcup_{k,l} (W_k \cap W_l):$$

Ըստ թեորեմի 2-րդ պայմանի՝ $W_k \cap W_l \neq \varnothing$ հատումը B-ի որոշ տարրերի միավորում է: Ուստի $U_1 \cap U_2$-ը ևս B-ի որոշ տարրերի միավորում է, հետևաբար $U_1 \cap U_2 \in \tau$: Այսպիսով τ-ն տոպոլոգիա է, որի համար B-ն տոպոլոգիայի բազա է: Ստացված տոպոլոգիայի միակությունը հետևում է նրանից, որ տվյալ բազայով տոպոլոգիա որոշվում է միարժեքորեն (ինչո՞ւ): ■

Այժմ թեորեմ 2-ի կիրառումով սահմանենք ևս մի հետաքրքիր տոպոլոգիա $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա: Նրա համար որպես բազա վերցնենք բոլոր $[a, b)$ տեսքի կիսաբաց ինտերվալները: Դրանք բավարարում են թեորեմի 1-2 պայմաններին, քանի որ մի կողմից $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1) = \mathbb{R}$, և մյուս կողմից էլ $[a, b)$ տեսքի որևէ երկու միջակայքերի հատումը կամ $\varnothing$ է, կամ էլ նույն տեսքի կիսաբաց ինտերվալ է:

Ստացված տոպոլոգիան կոչվում է **աջից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիա**: Ընթերցողին, որպես օգտակար խնդիր, առաջարկում ենք ապացուցել, որ այս տոպոլոգիան ավելի ուժեղ է թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից:

Նման ձևով սահմանվում է **ձախից կիսաբաց** $(a, b]$ **ինտերվալների տոպոլոգիան**: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը, վերցված աջից կամ ձախից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիայով, նշանակվում են համապատասխանաբար $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}, \leftarrow\!\!\shortmid)$: Այդ տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են **Զորգենֆրեյի ուղիղներ**:

Այժմ անդրադառնանք թեմա 4-ում առաջարկված խնդրին. տոպոլո՞գիա է արդյոք երկու տոպոլոգիաների միավորումը: Նախ ճշտենք հարցադրումը. X բազմության վրա տրված երկու τ_1 և τ_2 տոպոլոգիաների միավորում ասելով հասկանալու ենք X-ի ենթաբազմությունների $\tau_1 \cup \tau_2$ ընտանիքը: Հարցը հետևյալն է. ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական բազմության ցանկացած երկու տոպոլոգիաների միավորումը դարձյալ տոպոլոգիա է այդ բազմության համար:

Ցույց տանք, որ թվային ուղղի աջից կիսաբաց τ_1 և ձախից կիսաբաց τ_2 տոպոլոգիաների $\tau_1 \cup \tau_2$ միավորումը տոպոլոգիա չէ այդ ուղղի համար (չի բավարարվում տոպոլոգիայի 2-րդ՝ միավորման աքսիոմը): Իրոք, ունենք՝ $[a, b) \in \tau_1$, $(a, b] \in \tau_2$, բայց նրանց $[a, b) \cup (a, b] = [a, b]$ միավորումը չի պատկանում ո՛չ τ_1-ին, և ո՛չ էլ τ_2-ին (հիմնավորե՛ք):

Վերը թվային ուղղի սովորական և կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիաները սահմանվեցին համապատասխանաբար $\{(a, b)\}, \{[a, b)\}, \{(a, b]\}$ բազաների միջոցով: Դրա հետ կապված առաջանում է հարց. հանդիսանո՞ւմ է արդյոք թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի բազա բոլոր $[a, b]$ փակ հատվածների բազմությունը: Հեշտ է ցույց տալ, որ $\{[a, b]\}$ ընտանիքը, ի տարբերություն նախորդ երեք օրինակների, չի բավարարում թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանին, և ուրեմն չի հանդիսանում բազա թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի համար (հիմնավորե՛ք):

Մյուս կողմից, թվային ուղղի **բոլոր** փակ ենթաբազմությունները (այսինքն այն բոլոր ենթաբազմությունները, որոնք պարունակում են իրենց բոլոր հպման կետերը), օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ. ցանկացած F փակ ենթաբազմության $\mathbb{R} \setminus F$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է: Իրոք, եթե $x \in \mathbb{R} \setminus F$, ապա x-ը հպման կետ չէ F-ի համար, ուստի գոյություն ունի x-ի որևէ $U(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ շրջակայք, որ $U(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus F$: Սրանից հետևում է, որ $R \setminus F = \bigcup\limits_{x} U(x, \varepsilon)$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է $\mathbb{R}$-ում՝ որպես ինտերվալների միավորում: Բնականաբար հակառակը նույնպես ճիշտ է՝ թվային ուղղի բաց ենթաբազմությունների լրացումները փակ ենթաբազմություններ են:

Թվային ուղղի բաց և փակ ենթաբազմությունների այս հատկության հիմքով

ներմուծվում է փակ ենթաբազմության հասկացություն կամայական տոպոլոգիական տարածությունում:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածության **փակ ենթաբազմություն** կոչվում է X-ի ամեն մի F ենթաբազմություն, որի $X \setminus F$ լրացումը բաց ենթաբազմություն է X-ում (այսինքն՝ $(X \setminus F) \in \tau$):

Օրինակ 2: (X, անտիդ.)-ում փակ են միայն $\varnothing$-ը և X-ը, իսկ (X, դիսկր.)-ում փակ են X-ի բոլոր ենթաբազմությունները: Այնուհետև, $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ում փակ են բոլոր $[a, b]$ հատվածները, $(-\infty; a]$ և $[a; +\infty)$ հատվածները, բոլոր միկետանոց $\{a\}$ ենթաբազմությունները, ինչպես նաև դրանց վերջավոր միավորումները:

$(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունում փակ ենթաբազմությունները $\mathbb{R}$-ի վերջավոր ենթաբազմություններն են:

$(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում $[a, b)$ ենթաբազմությունները միաժամանակ և՛ բաց, և՛ փակ ենթաբազմություններ են (ինչո՞ւ): Իսկ (a, b), $(a, b]$, $(a, +\infty)$ ենթաբազմությունները փակ չեն, քանի որ դրանց լրացումները չեն հանդիսանում շրջակայք a կետի համար (հիմնավորե՛ք):

Փակ բազմությունների հիմնական հատկությունները: Ցանկացած (X, τ) տոպ. տարածությունում

F1. $\varnothing$-ը և X-ը փակ ենթաբազմություններ են (ակնհայտ է),

F2. X-ի ցանկացած վերջավոր քանակով փակ ենթաբազմությունների միավորումը փակ ենթաբազմություն է,

(Իրոք, եթե $F_1, F_2, \ldots, F_n$-ը փակ են X-ում, ապա $X \setminus F_1$, $X \setminus F_2$, $\ldots$, $X \setminus F_n$-ը բաց են X-ում: Ուստի բաց է նաև նրանց $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X \setminus F_i)$ հատումը: Այժմ դե Մորգանի առաջին բանաձևից ստանում ենք, որ $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(X \setminus F_i)$ ենթաբազմությունը բաց է X-ում, ուստի $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ միավորումը փակ ենթաբազմություն է X-ում):

F3. X-ի ցանկացած քանակով փակ ենթաբազմությունների հատումը X-ի փակ ենթաբազմություն է (ապացուցվում է նախորդ հատկության նմանությամբ, դե Մորգանի մյուս բանաձևի միջոցով):

Փակ բազմությունների F1-F3 հատկությունները լիովին բնութագրում են (X, τ) տարածության տոպոլոգիան հետևյալ իմաստով:

Թեորեմ 3: Դիցուք տրված է X բազմության ենթաբազմությունների մի որոշ σ համախմբություն այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1*. $\varnothing$-ը և X-ը պատկանում են σ-ին,

2*. σ-ի ցանկացած վերջավոր քանակով փարրերի միավորումը պատկանում է σ-ին,

3*. σ-ի ցանկացած քանակով փարրերի հատումը պատկանում է σ-ին:

Ապա X-ի վրա գոյություն ունի միակ τ տոպոլոգիա, որի նկատմամբ փակ ենթաբազմությունները ճիշտ և ճիշտ σ-ի փարրերն են:

Ապացուցում: Սահմանենք τ տոպոլոգիա X-ի վրա՝ վերցնելով որպես τ-ի փարրեր σ-ի փարրերի լրացումները: Այսինքն X-ում բաց ենթաբազմություններ ենք համարում X-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնց լրացումները պատկանում են σ-ին: Տոպոլոգիայի 1-3 պայմանների ստուգումը կատարվում է 1*-3* աքսիոմների և դե Մորգանի բանաձևերի միջոցով: ■

Այսպիսով թեորեմ 3-ը տալիս է բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ևս մի եղանակ՝ որպես հիմք ընդունելով բազմության փակ ենթաբազմություն չսահմանվող հասկացությունը, իսկ որպես աքսիոմներ՝ 1*, 2*, 3*-ը:

Առայժմ բավարարվելով վերը շարադրվածով՝ մենք արդեն կարող ենք ձեռնարկել տոպոլոգիական տարածությունների որոշ ուսումնասիրություն՝ հիմնվելով դրանց այս կամ այլ կարևոր հատկության վրա:

Որպես առաջին այդպիսի հատկություն կդիտարկենք այսպես կոչված անջատելիության աքսիոմները:

Անջատելիության աքսիոմները լուծում են հետևյալ խնդիրը. եթե տվյալ տոպոլոգիական տարածությունում ունենք երկու կետեր կամ (ընդհանուր դեպքում) երկու ենթաբազմություններ, հնարավո՞ր է արդյոք դրանք մասնակիորեն կամ լիովին տարանջատել միմյանցից չհատվող շրջակայքերով: Ստորև կքննարկենք երկու կետերի տարանջատման խնդիրը երեք տարբերակով (T_0, T_1, T_2 աքսիոմներ):

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **անջատելիության $\mathbf{T}_0$ աքսիոմին** (կարճ՝ X-ը T_0-տարածություն է), եթե X-ի կամայական երկու տարբեր կետերից գոնե մեկն ունի շրջակայք, որը չի պարունակում մյուս կետը:

Նկատենք, որ ոչ բոլոր տարածություններն են բավարարում այդ պայմանին. այդպիսի օրինակ է երկուսից ոչ պակաս կետերով (X, անտիդ.)-ը (հիմնավորե՛ք):

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **անջատելիության $\mathbf{T}_1$ աքսիոմին**, եթե նրա $\forall\, x_1 \neq x_2$ կետերից յուրաքանչյուրն ունի շրջակայք, որը չի պարունակում մյուս կետը:

Պարզ է, որ T_1 աքսիոմին բավարարող տարածությունը բավարարում է նաև T_0 աքսիոմին: Հակառակը ճիշտ չէ. $X = \{x_1, x_2\}$ բազմությունը $\tau_1 = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ տոպոլոգիայով T_0-տարածություն է, բայց T_1-տարածություն չէ (ինչո՞ւ):

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպ. տարածությունը **հաուսդորֆյան** կամ **$\mathbf{T}_2$-տարածություն** է, եթե նրա $\forall\, x_1 \neq x_2$ կետեր ունեն չհատվող շրջակայքեր:

T_2-փարածության պարզագույն օրինակ է որևէ երկկետանոց բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով:

Պարզ է, որ T_2 աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն բավարարում է նաև T_1-ին: Հակառակը ճիշտ չէ. օրինակ կբերենք քիչ հետո: Իսկ հիմա.

Թեորեմ 4: X տոպոլոգիական տարածությունը T_1-տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա յուրաքանչյուր միկետանոց $\{x\}$ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք X-ը T_1-տարածություն է. ցույց տանք, որ $\forall x \in X$ կետի դեպքում $X \setminus \{x\}$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է, որից կհետևի, որ $\{x\}$-ը փակ է: Դիտարկենք $\forall y \in X \setminus \{x\}$ կետ: Ըստ պայմանի՝ գոյություն ունի y կետի U_y շրջակայք, որ $x \notin U_y$: Նշանակում է $U_y \subset X \setminus \{x\}$: Այսպիսով $X \setminus \{x\}$-ը շրջակայք է իր ամեն մի կետի համար $\Rightarrow X \setminus \{x\}$-ը բաց ենթաբազմություն է $\Rightarrow \{x\}$-ը փակ ենթաբազմություն է:

Պայմանի բավարարությունը: Ունենք, որ $\forall \{x\} \subset X$ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է: Կամայական $x_1 \neq x_2$ կետերի համար $X \setminus \{x_2\}$-ը և $X \setminus \{x_1\}$-ը համապատասխանաբար x_1-ի և x_2-ի բաց շրջակայքեր են, ընդ որում՝ $x_1 \notin X \setminus \{x_1\}$ և $x_2 \notin X \setminus \{x_2\}$: ■

Այժմ բերենք T_1-տարածության օրինակ, որը T_2-տարածություն չէ: Դիտարկենք որևէ $(X, \text{վերջ. լր.})$ տարածություն, որտեղ X-ը անվերջ բազմություն է: Սա T_1-տարածություն է (քանի որ ցանկացած միկետանոց ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է), բայց T_2-տարածություն չէ, քանի որ այս տարածությունում ցանկացած երկու բաց ենթաբազմություններ ունեն ոչ դատարկ հատում (հիմնավորե՛ք):

Բացի T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից տոպոլոգիայում դիտարկվում են անջատելիության նաև այլ աքսիոմներ:

Սահմանում: Ասում են, որ (X, τ) տարածությունը բավարարում է T_3 աքսիոմին, եթե նրա կամայական x կետի և այդ կետը չպարունակող կամայական F փակ ենթաբազմության համար գոյություն ունեն U_x և U_F չհատվող բաց ենթաբազմություններ, որ $x \in U_x$, $F \subset U_F$:

Նման ձևով սահմանվում է T_4 աքսիոմը. պահանջվում է, որ X-ի ցանկացած երկու չհատվող F_1 և F_2 փակ ենթաբազմությունների համար գոյություն ունենան X-ի չհատվող U_{F_1} և U_{F_2} բաց ենթաբազմություններ, որ $F_1 \subset U_{F_1}$, $F_2 \subset U_{F_2}$:

Նշենք. եթե T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից յուրաքանչյուր հաջորդը ավելի ուժեղ էր նախորդից, ապա այդ օրինաչափությունը խախտվում է աքսիոմների T_2, T_3, T_4 հաջորդականության դեպքում: Պատճառը կայանում է նրանում, որ T_3 կամ T_4 աքսիոմից չի հետևում ցանկացած միկետանոց $\{x\}$ ենթաբազմության փակությունը X-ում: Բայց եթե լրացուցիչ պահանջենք, որ (X, τ)-ն բավարարի նաև T_1 աքսիոմին, ապա շնորհիվ թեորեմ 4-ի՝ նշված օրինաչափությունը կպահպանվի:

Սահմանում: (X, τ)-ն կոչվում է **ռեգուլյար տարածություն** (կարճ՝ X-ը ռեգուլյար է), եթե բավարարում է T_1 և T_3 աքսիոմներին, և կոչվում է **նորմալ տարածություն**, եթե բավարարում է T_1 և T_4 աքսիոմներին:

Այսպիսով ռեգուլյար տարածությունները հաուսդորֆյան են, իսկ նորմալ տարածությունները ռեգուլյար են (հիմնավորե՛ք):

Հայտնի են հաուսդորֆյան, բայց ոչ ռեգուլյար, և ռեգուլյար, բայց ոչ նորմալ տարածությունների օրինակներ: Դրանց կառուցումը բավական բարդ է, և այստեղ դրանք չենք քննարկի:

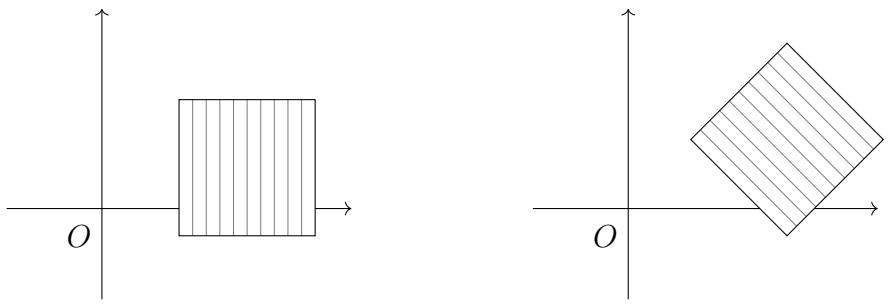
Հետագայում մենք կտեսնենք, որ նորմալ տարածությունների դասը բավական լայն է և գործնականում իր մեջ ընդգրկում է բոլոր «լավ» տարածությունները (տե՛ս թեորեմ 6-ը թեմա 7-ում):

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 5-ի վերաբերյալ

5.1. Հանդիսանո՞ւմ է արդյոք ենթաբազմությունների $\{[a, b];\ a \leq b]\}$ ընտանիքը թվային ուղղի որևէ տոպոլոգիայի բազա:

5.2. Ապացուցեք, որ թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանը կարելի է փոխարինել հետևյալ համարժեք պայմանով. ցանկացած $W_i,\ W_j \in B$ տարրերի և ամեն մի $x \in W_i \cap W_j$ տարրի համար գոյություն ունի $W_k \in B$ տարր, որ $x \in W_k$ և $W_k \subset W_i \cap W_j$:

5.3. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության ենթաբազմությունների Φ_1 և Φ_2 ընտանիքներ կազմված բոլոր այնպիսի անեզր քառակուսիներից (կողմերն ու գագաթները հեռացված են), որ առաջին ընտանիքում քառակուսիների կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին, իսկ երկրորդ ընտանիքում քառակուսիների անկյունագծերն են զուգահեռ կոորդինատային առանցքներին:



Ապացուցեք. Φ_1-ը և Φ_2-ը ծառայում են որպես բազա $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ τ_1 և τ_2 տոպոլոգիաների համար:

Յուցում. Դիտարկելով որևէ երկու հատվող քառակուսի առաջին ընտանիքից և օգտվելով խնդիր 5.2-ից՝ ստուգեք թեորեմ 2-ի երկրորդ պայմանը (առաջին պայմանը բավարարվում է ակնհայտորեն): Երկրորդ ընտանիքի դեպքը բերվում է առաջին ընտանիքի դեպքին՝ կատարելով պտույտ կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը $45°$-ով:

5.4. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր անեզր շրջանների (եզրային շրջանագծերը հեռացված են) Φ_3 ընտանիքը: Ապացուցեք, որ Φ_3-ը բազա է $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ τ_3 տոպոլոգիայի համար:

5.5. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\mathbb{R}^2$ հարթության բոլոր եզրով (փակ) շրջանների ընտանիքը կազմում է բազա $\mathbb{R}^2$-ի ինչ-որ տոպոլոգիայի համար:

5.6. Ապացուցեք, որ 5.3 և 5.4 խնդիրներում նկարագրված Φ_1, Φ_2, Φ_3 բազաները որոշում են թվային ուղղի նույն տոպոլոգիան:

Յուցում. Ցույց տվեք, որ յուրաքանչյուր Φ_i բազայի ($i = 1, 2, 3$) ցանկացած տարր կարող է ներկայացվել որպես Φ_j, $j \neq i$ բազայի անվերջ քանակությամբ որոշ տարրերի միավորում:

5.7. Ապացուցեք, որ բնական թվերից կազմված բոլոր անվերջ թվաբանական պրոգրեսիաների համախմբությունը բոլոր բնական թվերի բազմության ինչ-որ տոպոլոգիայի բազա է:

Յուցում. Դիցուք ունենք բնական թվերից կազմված $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ և $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ երկու անվերջ թվաբանական պրոգրեսիա համապատասխանաբար d_1 և d_2 տարբերություններով: Դիցուք c_1-ը $A \cap B$ բազմության փոքրագույն տարրն է: Ցույց տվեք, որ $C = A \cap B = \{c_1, c_2, \dots\}$ բազմությունը անվերջ թվաբանական պրոգրեսիա է $d_3 = [d_1, d_2]$ տարբերությունով, որտեղ $[d_1, d_2]$-ը d_1 և d_2 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

5.8. Ապացուցեք. ցանկացած T_1-տարածության ամեն մի վերջավոր ենթաբազմություն փակ բազմություն է:

5.9. Ապացուցեք, որ աջից կիսաբաց ինտերվալների $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տոպոլոգիական տարածությունում

ա) ամեն մի $[a, +\infty)$ ենթաբազմություն և բաց է, և փակ է,

բ) ամեն մի $(a, b]$ ենթաբազմություն ոչ բաց է, ոչ էլ փակ է:

5.10. Ապացուցեք. խնդիր 5.4-ում դիտարկված $(\mathbb{R}^2, \tau_3)$ տարածությունը հաուսդորֆյան տարածություն է:

5.11. Պարզեք՝ ստորև բերված պարածություններից որո՞նք են հաուսդորֆյան պարածություն.

ա) դիսկրետ պարածություն,

բ) անտիդիսկրետ պարածություն,

գ) աջից կիսաբաց ինտերվալների պարածություն։

Թեմա 6

Կետի դիրքը ենթաբազմության նկատմամբ. ենթաբազմության ներքին և արտաքին կետեր, ենթաբազմության ներքինն ու արտաքինը, ենթաբազմության եզրային կետեր և ենթաբազմության եզր: Փակման գործողություն բազմության վրա, Կուրատովսկու թեորեմը:

Հիշեցնենք, որ թվային ուղղի X ենթաբազմության x_0 կետը կոչվում է նրա ներքին կետ, եթե գոյություն ունի այդ կետի որևէ $U(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ ε-շրջակայք, որ $U(x_0, \varepsilon) \subset X$: Նույնպիսի հասկացություն, հետևյալ ընդհանուր տեսքով, ներմուծվում է բոլոր տոպոլոգիական տարածություններում:

Դիցուք (X, τ)-ն տոպոլոգիական տարածություն է, A-ն X-ի որևէ ենթաբազմություն է:

Սահմանում: $x \in X$ կետը կոչվում է A **ենթաբազմության ներքին կետ**, եթե գոյություն ունի x-ի որևէ U_x շրջակայք, որ $x \in U_x \subset A$: Տվյալ A ենթաբազմության բոլոր ներքին կետերի բազմությունը կոչվում է A-ի **ներքինը** և նշանակվում է $\operatorname{int} A$:

Նկատենք, որ ներքին կետի սահմանման մեջ կարելի էր պահանջել, որ U_x-ը լինի x կետի բաց շրջակայք: Այն, որ սահմանման այդ երկու տարբերակները համարժեք են միմյանց, հետևում է կետի շրջակայքի սահմանումից (**հիմնավորե՛ք**):

Ենթաբազմության ներքինի հատկությունները.

1. $\operatorname{int} A \subset A$ և $\operatorname{int} A$-ն X-ի բաց ենթաբազմություն է: Իրոք, ըստ ներքին կետի համարժեք սահմանման՝ ամեն մի $x \in \operatorname{int} A$ կետի համար գոյություն ունի U_x բաց շրջակայք, որ $x \in U_x \subset \operatorname{int} A$: Այստեղից ստանում ենք՝ $\operatorname{int} A = \bigcup U_x$, որտեղ միավորումը կատարվում է ըստ բոլոր $x \in \operatorname{int} A$ կետերի: Հետևաբար $\operatorname{int} A$-ն բաց ենթաբազմություն է՝ որպես U_x բաց ենթաբազմությունների միավորում:

2. $\operatorname{int} A$-ն A-ի մեջ պարունակվող բոլոր բաց ենթաբազմություններից ամենամեծն է հետևյալ իմաստով. եթե V-ն A-ի որևէ բաց ենթաբազմություն է, ապա $V \subset \operatorname{int} A$: Իրոք, V-ի բոլոր կետերը ներքին կետեր են V-ի համար, հետևաբար ներքին կետեր են նաև A-ի համար, ուստի $V \subset \operatorname{int} A$:

3. $A \mapsto \operatorname{int} A$ համադրումը գործողություն է որոշված X-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմության վրա: Մասնավորապես $\operatorname{int} \varnothing = \varnothing$, $\operatorname{int} X = X$: Այդ գործողությունը բնութագրում է X-ի բաց ենթաբազմությունները հետևյալ իմաստով. **X-ի որևէ ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն համընկնում է իր ներքինի հետ:** Իրոք, եթե A-ն բաց ենթաբազմություն է, ապա $A = \operatorname{int} A$ ըստ ներքինի սահմանման:

Հակառակը՝ եթե $A = \operatorname{int} A$, ապա A-ն բաց ենթաբազմություն է ըստ հատկություն 1-ի:

Օրինակներ: $(X,$ դիսկր.$)$ տարածությունում ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության ներքինը A-ն է: Իսկ $(X,$ անտիդ.$)$-ում $\operatorname{int} A = X$, երբ $A = X$, և $\operatorname{int} A = \varnothing$, երբ $A \neq X$: Այնուհետև, $(\mathbb{R},$ սովոր.$)$ տարածությունում (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ ենթաբազմությունների ներքինները (a,b)-ն է, իսկ ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$, ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$, իռացիոնալ թվերի Ir բազմությունների ներքինները $\varnothing$ բազմությունն է, $(\mathbb{R},$ հաշվ. լր.$)$ տարածությունում $\operatorname{int}\mathbb{Z} = \operatorname{int}\mathbb{Q} = \varnothing$, իսկ $\operatorname{int}\mathrm{Ir} = \mathrm{Ir}$ (հիմնավորե՛ք):

Ենթաբազմության ներքինի հատկությունները (շարունակություն).

4. Եթե $A \subset B \subset X$, ապա $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$ (հետևում է սահմանումից):

5. Ցանկացած $A, B \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$:

   Ապացուցում: Ունենք՝ $A \cap B \subset A \;\Rightarrow\; \operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A$: Նման ձևով $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} B \;\Rightarrow\; \operatorname{int}(A \cap B) \subset (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B)$: Հակառակը՝

$$x \in (\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B) \Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{int} A \\ x \in \operatorname{int} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, U_x \in \tau, \text{ որ } x \in U_x \subset A \\ \exists\, V_x \in \tau, \text{ որ } x \in V_x \subset B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (U_x \cap V_x) \in \tau \\ x \in (U_x \cap V_x) \subset A \cap B \end{cases} \Rightarrow\; x \in \operatorname{int}(A \cap B):$$

■

6. Ցանկացած $A, B \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$:

   Ապացուցում: Ունենք՝ $A \subset A \cup B,\; B \subset A \cup B \Rightarrow (\operatorname{int} A,\; \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)) \;\Rightarrow\; (\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \;\subset\; \operatorname{int}(A \cup B)$: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \neq \operatorname{int}(A \cup B)$: Որպես օրինակ՝ $(\mathbb{R},$ սովոր.$)$-ում դիտարկենք $A = \mathbb{Q}$ և $B = \mathrm{Ir}$ ենթաբազմությունները: Մի կողմից՝ $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \operatorname{int}\mathrm{Ir} = \varnothing \Rightarrow \operatorname{int}\mathbb{Q} \cup \operatorname{int}\mathrm{Ir} = \varnothing$, իսկ մյուս կողմից $\operatorname{int}(\mathbb{Q} \cup \mathrm{Ir}) = \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$: ■

Ենթաբազմության ներքին կետ, ներքինը հասկացությունների նմանությամբ կամայական տոպոլոգիական տարածությունում ներմուծվում են ենթաբազմության արտաքին կետ, արտաքինը, ինչպես նաև ենթաբազմության եզրային կետ և եզր հասկացությունները:

Որևէ $x \in X$ կետ կոչվում է տվյալ $A \subset X$ ենթաբազմության **արտաքին կետ**, եթե գոյություն ունի x-ի որևէ U_x շրջակայք, որ $U \subset X \setminus A$: Տվյալ A ենթաբազմության

բոլոր արտաքին կետերի բազմությունը կոչվում է A-ի **արտաքինը** և նշանակվում է $\operatorname{ext} A$: Նույն ձևով, ինչպես ներքինի դեպքում, ապացուցվում է, որ ենթաբազմության արտաքինը X-ի բաց ենթաբազմություն է (տե՛ս հատկություն 1-ի ապացույցը):

Որևէ $x \in X$ կետ կոչվում է A ենթաբազմության **եզրային կետ**, եթե նրա ցանկացած շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում A-ի և՛ ներքինի, և՛ արտաքինի հետ: Տվյալ A ենթաբազմության բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է A-ի **եզր** և նշանակվում է ∂A:

Սահմանումներից հետևում է՝

$$\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A \cap \partial A = \operatorname{ext} A \cap \partial A = \varnothing,$$

$$X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$$

Այժմ $\partial A = X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A)$ նույնությունից հետևում է՝ X-ի ցանկացած ենթաբազմության եզրը փակ ենթաբազմություն է:

Օրինակ 1: Դիցուք A-ն հետևյալ $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ ենթաբազմություններից որևէ մեկն է թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում: Ապա $\operatorname{int} A = (0,1)$, $\operatorname{ext} A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $\partial A = \{0,1\}$ (**հիմնավորե՛ք**):

Օրինակ 2: Դիցուք A-ն նախորդ օրինակում բերված ենթաբազմություններից որևէ մեկն է թվային ուղղի աջից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիայում: Դրանցից $A = (0,1)$ դեպքում $\operatorname{int} A = (0,1)$, $\operatorname{ext} A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, $\partial A = \{0\}$, իսկ $A = [0,1]$ դեպքում $\operatorname{int} A = [0,1)$, $\operatorname{ext} A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, $\partial A = \varnothing$:

Մյուս երկու դեպքերը որպես խնդիր թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ անդրադառնանք տոպոլոգիական տարածության փակ ենթաբազմության հասկացությանը:

Նախորդ՝ թեմա 5-ում փակ ենթաբազմությունները սահմանվեցին բաց ենթաբազմությունների միջոցով: Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես են նկարագրվում փակ ենթաբազմությունները կետերի շրջակայքերի տերմիններով:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում $x \in X$ կետը կոչվում է $M \subset X$ **ենթաբազմության հպման կետ**, եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում M-ի հետ:

Դիտողություն: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացներում գործածվում է նաև **ենթաբազմության սահմանային կետ** հասկացությունը:

Այս դեպքում պահանջվում է, որպեսզի x կետի ցանկացած շրջակայք ունենա ոչ դատարկ հատում $M \setminus \{x\}$ ենթաբազմության հետ: Պարզ է, որ ենթաբազմության ամեն մի սահմանային կետ նաև նրա հպման կետ է: Հակառակը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ: Օրինակ՝ $\forall (X, \tau)$ տարածությունում ցանկացած x կետ հպման կետ է $\{x\}$ ենթաբազմության համար, բայց սահմանային կետ չէ նրա համար:

Սահմանում: $M \subset X$ ենթաբազմության բոլոր հպման կետերի բազմությունը կոչվում է այդ **ենթաբազմության փակույթ** և նշանակվում է $\overline{M}$:

Անցումը M ենթաբազմությունից $\overline{M}$-ին, այսինքն $M \mapsto \overline{M}$ համադրումը կոչվում է **փակման գործողություն տոպոլոգիական տարածությունում**:

Օրինակ 3: ա) $(X,$ անտիդ.$)$ տարածությունում X-ի ցանկացած x կետ հպման կետ է ցանկացած $M \subset X,\ M \neq \varnothing$ ենթաբազմության համար, և ուրեմն $\overline{M} = X$:

բ) $(X,$ դիսկր.$)$-ում M ենթաբազմության համար հպման կետեր են միայն և միայն M-ի կետերը: Այսինքն՝ $\overline{M} = M, \forall\, M \subset X$ ենթաբազմության դեպքում:

գ) $(\mathbb{R},$ սովոր.$)$ տարածությունում $(a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ [a,b]$ ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակույթը $[a,b]$-ն է: Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության փակույթը ինքը՝ $\mathbb{Z}$-ն է, իսկ բոլոր ռացիոնալ, կամ բոլոր իռացիոնալ թվերից կազմված ենթաբազմությունների փակույթները $\mathbb{R}$-ն է:

դ) $(\mathbb{R},$ վերջ. լր.$)$ տարածությունում $(a,b],\ [a,b]$ ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակույթը $\mathbb{R}$-ն է: Ընդհանրապես, այս տարածությունում ցանկացած $M \subset \mathbb{R}$ անվերջ ենթաբազմության (օրինակ՝ $\mathbb{Z}$-ի) փակույթը $\mathbb{R}$-ն է (հիմնավորե՛ք):

Փակույթի հատկությունները. Ցանկացած (X,τ) տոպոլոգիական տարածությունում՝

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing,\ \overline{X} = X$;
2. $M \subset \overline{M}$ ցանկացած M ենթաբազմության դեպքում;
3. եթե $M \subset N$, ապա $\overline{M} \subset \overline{N}$;
4. ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (այստեղ $\overline{\overline{M}}$ սիմվոլով նշանակված է $\overline{M}$-ի փակույթը, այսինքն $\overline{M} = \overline{(\overline{M})}$):

Սրանցից 1-ը, 2-ը և 3-ը ակնհայտ են, ապացուցենք 4-ը: Ըստ 2-ի՝ $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$, ուստի մնում է ցույց տալ, որ $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$: Դիտարկենք կամայական $x \in \overline{\overline{M}}$ կետ: Այն հպման կետ է $\overline{M}$-ի համար: Ցույց տանք, որ x-ը հպման կետ է նաև M-ի համար: Եթե U-ն x-ի որևէ բաց շրջակայք է, ապա $U \cap \overline{M} \neq \varnothing$, և հետևաբար գոյություն ունի $y \in X$ կետ, որ $y \in U$ և $y \in \overline{M}$: Ստացվում է, որ y-ը հպման կետ է M-ի համար: Քանի որ U-ն նաև y-ի շրջակայք է, ուստի $U \cap M \neq \varnothing$, և ուրեմն $x \in \overline{M}$: Այսպիսով $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$:

Դիտողություն: Բերված ապացույցում մենք վերցրինք x կետի ոչ թե կամայական U շրջակայք, այլ կամայական U **բաց** շրջակայք: Առաջարկում ենք ընթերցողին նախ պարզել, թե ինչը ստիպեց այդպես վարվել, և ապա հիմնավորել, որ դրանով չի խախտվել ապացույցի լիարժեքությունը:

Թեորեմ 1: X տոպ. տարածության M ենթաբազմությունը փակ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ M-ը պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը:

Ապացուցում: ա) Եթե M-ը փակ է $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ը բաց է $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ում չկան M-ի հպման կետեր $\Rightarrow$ M-ի հպման կետերը M-ում են $\Rightarrow$ $\overline{M} \subset M$:

բ) Եթե $\overline{M} \subset M \;\Rightarrow\; (X \setminus M)$-ում M-ի հպման կետեր չկան $\Rightarrow$ $\forall\, x \in X \setminus M$ կետ հպման կետ չէ M-ի համար $\Rightarrow$ $\forall\, x \in X \setminus M$ կետի համար $\exists\, x$-ի U_x (բաց) շրջակայք, որ $U_x \subset (X \setminus M)$: Այսպիսով $(X \setminus M)$-ը շրջակայք է իր բոլոր կետերի համար $\Rightarrow$ $(X \setminus M)$-ը բաց ենթաբազմություն է $\Rightarrow$ M-ը փակ ենթաբազմություն է: ■

Հետևանք 1: $M \subset X$ ենթաբազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում է իր փակույթի հետ՝ $M = \overline{M}$:

Հետևանք 2: Ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը X-ի փակ ենթաբազմություն է: Իրոք, քանի որ $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ ըստ հատկություն 4-ի, ուստի $\overline{M}$-ը փակ ենթաբազմություն է համաձայն հետևանք 1-ի:

Թեորեմ 2: Ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը համընկնում է M-ը ընդգրկող բոլոր փակ ենթաբազմությունների հատման հետ: Այսինքն $\overline{M} = \bigcap F$, որտեղ հատումը կատարվում է ըստ այն բոլոր $F \subset X$ փակ ենթաբազմությունների, որ $M \subset F$:

Ապացուցում: Մի կողմից՝ եթե F-ը փակ է և $M \subset F$, ապա $\overline{M} \subset \overline{F} = F$, ուստի $\overline{M} \subset \bigcap F$: Մյուս կողմից՝ քանի որ $M \subset \overline{M}$ և $\overline{M}$-ը փակ է, ուստի F փակ ենթաբազմություններից մեկը $\overline{M}$-ն է: Հետևաբար $\bigcap F \subset \overline{M}$, և ուրեմն $\overline{M} = \bigcap F$: ■

Թեորեմ 3: Ցանկացած $M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում տեղի ունի $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ համընկում:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\overline{M \cup N}$ և $\overline{M} \cup \overline{N}$ բազմություններից յուրաքանչյուրը մյուսի ենթաբազմություն է: Իրոք,

$$M \subset \overline{M},\; N \subset \overline{N} \;\Rightarrow\; M \cup N \subset \overline{M} \cup \overline{N} \;\Rightarrow\; \overline{M \cup N} \subset \overline{\overline{M} \cup \overline{N}} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

Այստեղ օգտվեցինք նրանից, որ $\overline{M} \cup \overline{N}$-ը փակ է որպես երկու փակ ենթաբազմությունների միավորում: Մյուս կողմից՝

$$M \subset M \cup N,\; N \subset M \cup N \;\Rightarrow\; \overline{M} \subset \overline{M \cup N},\; \overline{N} \subset \overline{M \cup N} \;\Rightarrow\; \overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N} \qquad ■$$

Ավարտելով փակույթի հատկությունները՝ նկատենք, որ $\forall\, M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում տեղի ունի $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$ ներդրում (**հիմնավորե՛ք** և **բերե՛ք** օրինակ, երբ $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$):

Այս ամենից հետո պատրաստ ենք ծանոթանալու կամայական բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու ևս մի հիմնական եղանակի հետ:

Վերը (X, τ) տոպոլոգիական տարածության ամեն մի $M \subset X$ ենթաբազմության համար սահմանվեց $\overline{M}$ փակ ենթաբազմություն (M-ի փակույթը τ տոպոլոգիայում): Այդ $M \mapsto \overline{M}$ համադրումը կոչվում է **փակման գործողություն տոպոլոգիական տարածությունում**: Այն օժտված է վերը դիտարկված որոշակի հատկություններով:

Այժմ գնալու ենք հակառակ ուղղությամբ. վերացարկելով այդ հատկություններից հիմնականները՝ սահմանվում է գործողություն, որի միջոցով որոշվում է տոպոլոգիա բազմության վրա:

Սահմանում: Դիցուք ինչ-որ եղանակով X բազմության ամեն մի M ենթաբազմության համադրված է X-ի ինչ-որ ենթաբազմություն, որը նշանակվում է $\operatorname{cl} M$ (cl-ն ֆրանսերեն clôture — փակում բառի կրճատն է), այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ 4 պահանջները.

K1. $\operatorname{cl} \varnothing = \varnothing$;

K2. $M \subset \operatorname{cl} M$;

K3. $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} M) = \operatorname{cl} M$;

K4. $\operatorname{cl}(M \cup N) = \operatorname{cl} M \cup \operatorname{cl} N$, ցանկացած $M, N \subset X$ ենթաբազմությունների դեպքում:

Ամեն մի այսպիսի գործողություն կոչվում է Կուրատովսկու **փակման գործողություն բազմության վրա**:

Լեմմա: 1-4 աքսիոմներից հետևում է՝

ա) $\operatorname{cl} X = X$;

բ) եթե $A \subset B \subset X$, ապա $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$:

Ապացուցում: ա) Մի կողմից, ըստ K2-ի $X \subset \operatorname{cl} X$, իսկ մյուս կողմից ակնհայտ է, որ $\operatorname{cl} X \subset X$: Ուստի $\operatorname{cl} X = X$;

բ) $A \subset B \;\Rightarrow\; (B = A \cup (B \setminus A)) \;\Rightarrow\; (\operatorname{cl} B = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl}(B \setminus A)) \;\Rightarrow\; (\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B)$: ■

Թեորեմ 4 (K. Kuratowski, 1922)**:** X բազմության վրա տրված Կուրատովսկու փակման գործողությունը որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա: Ընդ որում՝ ցանկացած $M \subset X$ ենթաբազմության $\overline{M}$ փակույթը այդ տոպոլոգիայում համընկնում է $\operatorname{cl} M$-ի հետ՝ $\overline{M} = \operatorname{cl} M$:

Ապացուցում: Սահմանենք σ տոպոլոգիա X բազմության վրա՝ հիմնվելով փակ ենթաբազմությունների վրա (տե՛ս թեորեմ 3-ը թեմա 5-ում): $M \subset X$ ենթաբազմությունը համարելու ենք փակ σ տոպոլոգիայում, եթե $M = \operatorname{cl} M$: Այսպիսով

$$M \in \sigma \;\Leftrightarrow\; M = \operatorname{cl} M.$$

Ստուգենք σ-ի համար տոպոլոգիայի 1*-3* աքսիոմները (տե՛ս թեորեմ 3-ը թեմա 5-ում): Դրանցից 1*-ը հետևում է K1-ից և լեմմայից: Միավորման 2* աքսիոմը բավարարվում է շնորհիվ K4-ի: Ստուգենք 3*-ը: Դիցուք ունենք փակ ենթաբազմությունների որևէ $\{M_i \subset X, i \in I \mid \operatorname{cl} M_i = M_i\}$ ընտանիք: Ցույց տանք, որ նրանց

$F = \bigcap\limits_{i\in I} M_i$ հատումը պատկանում է σ-ին (դա համարժեք է նրան, որ ցույց տանք $\operatorname{cl} F = F$): Մի կողմից ունենք $F \subset \operatorname{cl} F$ ըստ K2-ի: Մյուս կողմից՝ $F \subset M_i \Rightarrow (\operatorname{cl} F \subset \operatorname{cl} M_i)$, և քանի որ $\operatorname{cl} M_i = M_i$, ուստի $\operatorname{cl} F \subset \bigcap\limits_{i\in I} M_i = F$: Այսպիսով $\operatorname{cl} F = F$, և ուրեմն σ-ն տոպոլոգիա է X բազմության վրա:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը. ցույց տանք, որ $\forall\, M \subset X$ ենթաբազմության համար $\overline{M} = \operatorname{cl} M$: Ըստ թեորեմ 3-ի ունենք՝ $\overline{M} = \bigcap F$, որտեղ հատումը տարվում է ըստ բոլոր այն $F \subset X$ ենթաբազմությունների, որ $\operatorname{cl} F = F$ և $M \subset F$: Նրանից, որ $M \subset F \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset \operatorname{cl} F = F) \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset F) \Rightarrow (\operatorname{cl} M \subset \bigcap F = \overline{M})$: Մյուս կողմից՝ $M \subset \operatorname{cl} M \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{\operatorname{cl} M}$: Քանի որ $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} M) = \operatorname{cl} M$ ըստ K3-ի, ուստի $\operatorname{cl} M \in \sigma$ ըստ τ տոպոլոգիայի սահմանման: Քանի որ $\operatorname{cl} M$-ը փակ ենթաբազմություն է σ տոպոլոգիայում, հետևաբար $\overline{\operatorname{cl} M} = \operatorname{cl} M$, որից հետևում է, որ $\overline{M} = \operatorname{cl} M$: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 6-ի վերաբերյալ

6.1. Իրական թվերի սովորական տոպոլոգիայում գտեք անվերջ քանակով փակ ենթաբազմությունների որևէ ընտանիք, որի տարրերի միավորումը փակ չէ:

6.2. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը. ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում (բացառությամբ դիսկրետ տարածությունների) գոյություն ունի անվերջ քանակով փակ ենթաբազմությունների ընտանիք, որի տարրերի միավորումը փակ չէ:

Ցուցում. Դիտարկեք $\{[x, 1);\ x > 0\}$ ընտանիքը $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում:

6.3. Թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում գտեք A ենթաբազմության փակույթը, եթե

ա) A-ն ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ ենթաբազմությունն է,

բ) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}$,

գ) A-ն բոլոր ռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունն է,

դ) A-ն բոլոր իռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունն է:

6.4. Թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիայում գտեք A ենթաբազմության փակույթը նախորդ խնդրում թվարկված դեպքերում:

6.5. Դիտարկենք $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների Φ ընտանիքը՝ կազմված $\varnothing$, $\mathbb{R}$ և բոլոր $(-r, r)$, $r > 0$ ենթաբազմություններից: Ապացուցեք, որ Φ-ն որոշում է տոպոլոգիա $\mathbb{R}$-ի վրա: Ամեն մի $r \in \mathbb{R}$ դեպքում գտեք $X(r) = (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը, եզրը և փակույթը:

6.6. Դիտարկենք 0 սկզբնակետով $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության ենթաբազմությունների Ψ ընտանիքը՝ կազմված $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$ և 0 կենտրոնով բոլոր $\mathcal{D}(r) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2;\ r > 0\}$ շրջաններից: Ապացուցեք, որ Ψ-ն որոշում է տոպոլոգիա $\mathbb{R}^2$-ի վրա (կոչվում է **համակենտրոն տոպոլոգիա**): Ապացուցեք, որ ամեն մի $r > 0$ դեպքում $A(r) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}(r)$ ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը, եզրը և փակույթը հետևյալն են՝

$$\operatorname{int} A(r) = \varnothing, \quad \operatorname{ext} A(r) = \mathcal{D}(r), \quad \partial A(r) = A(r), \quad \overline{A(r)} = A(r) :$$

6.7. Ապացուցեք, որ X տոպոլոգիական տարածության կամայական A ենթաբազմության և $X \setminus A$ ենթաբազմության եզրերը նույնն են՝ $\partial A = \partial(X \setminus A)$:

6.8. Ապացուցեք, որ տոպոլոգիական տարածության կամայական երկու չհատվող փակ ենթաբազմություններ չունեն որևէ ընդհանուր եզրային կետ:

6.9. Ապացուցեք. եթե X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմությունն այնպիսին է, որ $Y \subset F \subset X$, որտեղ F-ը փակ ենթաբազմություն է, ապա $\overline{Y} \subset F$:

6.10. Ապացուցեք. X տոպոլոգիական տարածության A ենթաբազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\partial A \subset A$:

6.11. Ապացուցեք, որ X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմության ∂Y եզրը դատարկ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ը բաց է և փակ է:

6.12. Ապացուցեք. տոպոլոգիական տարածության կամայական երկու չհատվող բաց ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրի փակումը չի հատվում մյուս ենթաբազմության հետ:

Թեմա 7

Մետրիկ բազմության վրա և մետրիկ տարածություն հասկացությունները, օրինակներ: Մետրիկ տարածության տոպոլոգիան, մետրիկային տարածություններ, օրինակներ: Ենթաբազմության ներքինը, արտաքինը և փակույթը մետրիկային տարածություններում:

Մետրիկ տարածությունները սահմանվել են ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Մ. Ֆրեշեի կողմից 1906 թվին: Նպատակն է՝ կամայական բազմություններում ներմուծելով կետերի միջև հեռավորության, հետևաբար և՝ կետերի մոտիկության հասկացություն, զարգացնել անալիզին և երկրաչափությանը բնորոշ ամենաընդհանուր հատկություններով տեսություն:

Այնուհետև, մետրիկ տարածության հիմքով, արդեն տոպոլոգիայում ներմուծվեցին մետրիկային տարածությունները որպես տոպոլոգիական տարածություններ: Այժմ հաջորդաբար քննարկենք այդ երկու հասկացությունները:

Մետրիկ տարածության հիմքում ընկած է բազմության վրա մետրիկ հասկացությունը: Դիցուք X-ը որևէ բազմություն է, $\mathbb{R}$-ը թվային ուղիղն է:

Սահմանում: Որևէ $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ արտապատկերում կոչվում է **մետրիկ X բազմության վրա**, եթե կամայական $x, y, z \in X$ տարրերի դեպքում բավարարվում են հետևյալ երեք պայմանները.

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (նույնականացման աքսիոմ),
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (համաչափության աքսիոմ),
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (եռանկյան աքսիոմ):

Հետևանք աքսիոմներից: Վերցնելով 3-ում $z = x$ ստանում ենք՝ $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in X$ տարրերի դեպքում: Այժմ տեսնում ենք, որ բազմության վրա մետրիկը տարրական երկրաչափությունից հայտնի կետերի միջև հեռավորության ընդհանրացումն է կամայական բազմությունների դեպքում:

Սահմանում: (X, ρ) զույգը (այսինքն X բազմությունը՝ իր վրա տրված ρ մետրիկի հետ միասին) կոչվում է **մետրիկ տարածություն**, իսկ $\rho(x, y)$ թիվը՝ x և y **կետերի միջև հեռավորություն** տվյալ մետրիկ տարածությունում:

Դիցուք (X, ρ)-ն մետրիկ տարածություն է, A-ն X-ի որևէ ոչ դատարկ ենթաբազմություն է: Սահմանենք $\rho' : A \times A \to \mathbb{R}$ արտապատկերում $\rho'(a_1, a_2) = \rho(a_1, a_2)$; $a_1, a_2 \in A$ բանաձևով: Ակնհայտ է, որ ρ'-ը մետրիկ է A բազմության վրա: Այն կոչվում է ρ մետրիկի սահմանափակում A-ի վրա և նշանակվում է $\rho|_A$, իսկ $(A, \rho|_A)$ զույգը կոչվում է (X, ρ) մետրիկ տարածության մետրիկ ենթատարածություն:

Օրինակ 1: Ցանկացած X բազմություն կարելի է վերածել մետրիկ տարածության առնվազն մի եղանակով՝ $\rho(x,y)=1$, երբ $x\neq y$ և $\rho(x,y)=0$, երբ $x=y$: Այս մետրիկ տարածությունը կոչվում է **դիսկրետ մետրիկ տարածություն** (անվանումը կպարզաբանվի մի փոքր ուշ):

Օրինակ 2: $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա սահմանենք մետրիկ՝ $\rho(x,y)=|x-y|$ բանաձևով: Այն կոչվում է թվային ուղղի **սովորական** կամ **էվկլիդյան մետրիկ**, իսկ $(\mathbb{R},\rho)$ զույգը կոչվում է էվկլիդյան թվային ուղիղ:

1-3 աքսիոմների ստուգումը օրինակներ 1, 2-ում թողնվում է ընթերցողին՝ որպես հեշտ, բայց օգտակար խնդիր: Հաջորդ կարևոր օրինակը ընդհանրացնում է օրինակ 2-ի էվկլիդյան մետրիկը:

Օրինակ 3: Դիտարկենք n չափականության $\mathbb{R}^n$ կոորդինատային տարածությունը և սահմանենք $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ տարրերի միջև հեռավորություն $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$ բանաձևով: Մետրիկի 1-2 աքսիոմները ակնհայտորեն բավարարվում են, իսկ 3-րդ աքսիոմը (սովորաբար դժվարություն է այս աքսիոմի ստուգումը) հետևում է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունից՝

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

որն արդարացի է թվերի կամայական $a_1,a_2,\dots,a_n$ և $b_1,b_2,\dots,b_n$ հաջորդականությունների դեպքում:

Իրոք, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}^n$ տարրերի համար 3-րդ աքսիոմն ընդունում է

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}$$

տեսքը: Նշանակելով $x_k-y_k=a_k,\ y_k-z_k=b_k$ ստանում ենք՝ $x_k-z_k=a_k+b_k$, և 3-րդ աքսիոմն ընդունում է նոր՝ $\sqrt{\sum\limits_k(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum\limits_k a_k^2}+\sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ տեսք: Այն համարժեք է $\sum\limits_k a_k\cdot b_k\leq\sqrt{\sum\limits_k a_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$ անհավասարությանը: Այսպիսով մնում է ապացուցել Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը:

Նկատենք, որ կամայական $t\in\mathbb{R}$ թվի դեպքում ունենք $\sum\limits_k(a_k-t\cdot b_k)^2\geq 0$ հավասարի անհավասարություն, որը կարելի է գրել $\left(\sum\limits_k b_k^2\right)t^2-2\left(\sum\limits_k a_k b_k\right)t+\left(\sum\limits_k a_k^2\right)\geq 0$ տեսքով: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $\left(\sum\limits_k a_k b_k\right)^2\leq\left(\sum\limits_k a_k^2\right)\cdot\left(\sum\limits_k b_k^2\right)$ անհավասարությունը, որից էլ ստանում ենք $\sum\limits_k a_k b_k\leq\sqrt{\sum\limits_k a_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_k b_k^2}$: ■

Օրինակ 4: Եթե ρ-ն մետրիկ է X բազմության վրա, ապա ցանկացած $c > 0$ թվի դեպքում $c\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը (սահմանվում է $(c\rho)(x, y) = c \cdot \rho(x, y)$ բանաձևով) ակնհայտորեն նույնպես մետրիկ է X-ի վրա: Մետրիկ է նաև $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $\bar{\rho}(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ բանաձևով: Ստուգենք 3-րդ աքսիոմը $\bar{\rho}$-ի համար: Նախ նկատենք, որ

$$\bar{\rho}(x, z) = \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} \leq \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)}$$

(ստուգվում է անմիջականորեն՝ ազատվելով հայտարարներից): Այնուհետև

$$\bar{\rho}(x, z) \leq \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} \leq \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(y, z)} =$$
$$= \bar{\rho}(x, y) + \bar{\rho}(y, z)$$

■

Նշենք, որ ստացված $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունում $\bar{\rho}(x, y) < 1, \ \forall\, x, y \in X$ կետերի դեպքում:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան կոորդինատային տարածության O սկզբնակետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը: Այն վերածվում է մետրիկ տարածության՝ սահմանելով նրա վրա այսպես կոչված **անկյունային մետրիկ:**

Պարզության նկատառումով բոլոր անհրաժեշտ դատողությունները կկատարենք $n = 2$ մասնավոր դեպքում:

Նախ $\mathbb{R}^3$-ի O կետով անցնող յուրաքանչյուր l ուղղի վրա ընտրենք մի որոշակի L կետ այնպես, որ $\overrightarrow{OL}$ վեկտորն ունենա միավոր երկարություն՝ $|\overrightarrow{OL}| = 1$:

Այժմ սահմանենք կամայական երկու l_1 և l_2 ուղիղների միջև հեռավորություն $d(l_1, l_2) = \arccos|(\overrightarrow{OL_1}, \overrightarrow{OL_2})|$ բանաձևով (այստեղ $(\overrightarrow{OL_1}, \overrightarrow{OL_2})$-ը $\overrightarrow{OL_1}$ և $\overrightarrow{OL_2}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է, իսկ $d(l_1, l_2)$-ը անկյուն է $[0°, 90°]$ միջակայքից):

Պարզ է, որ $d(l_1, l_2)$-ը բավարարում է մետրիկի 1-2 աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ այն բավարարում է նաև երրորդ աքսիոմին՝

$$d(l_1, l_2) + d(l_2, l_3) \geq d(l_1, l_3) \qquad (*)$$

ցանկացած երեք l_1, l_2, l_3 ուղիղների դեպքում: Նկատենք, որ եթե այդ ուղիղներից որևէ երկուսը նույնն են, ապա $(*)$-ը բավարարվում է:

Այժմ դիտարկենք որևէ երեք ոչ համահարթ l_1, l_2, l_3 ուղիղներ: Այս դեպքում OL_1, OL_2, OL_3 ճառագայթները կազմում են O գագաթով եռանիստ անկյուն: Հետագա հիմնավորումներում օգտվելու ենք տարրական տարածաչափությունից հայտնի հետևյալ թեորեմից. կամայական $(O; OL_1, OL_2, OL_3)$ եռանիստ անկյան երեք՝ $\alpha = \angle L_1OL_2$, $\beta = \angle L_2OL_3$, $\gamma = \angle L_1OL_3$ հարթ անկյուններից ցանկացած երկուսի գումարը մեծ է երրորդից (նշենք, որ դրանց մեծությունները գտնվում են $(0°, 180°)$ միջակայքում):

Կախված l_i ուղիղների վրա L_i, $i = 1, 2, 3$ կետերի դիրքերից՝ հնարավոր են հետևյալ չորս դեպքերը.

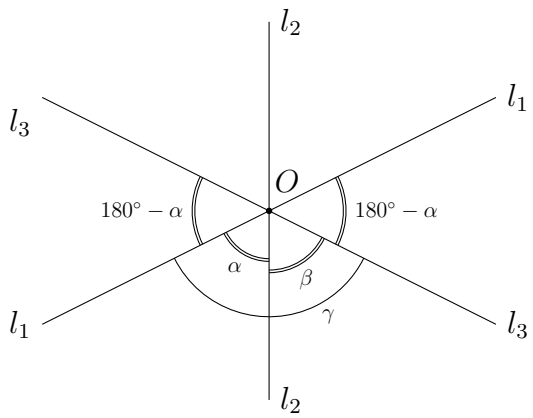
1. եթե α, β, γ անկյունները սուր են, ապա $d(l_1, l_2) = \alpha,\ d(l_2, l_3) = \beta,\ d(l_1, l_3) = \gamma$,

2. եթե α, β, γ անկյունները բութ են, ապա $d(l_1, l_2) = 180^\circ - \alpha,\ d(l_2, l_3) = 180^\circ - \beta,\ d(l_1, l_3) = 180^\circ - \gamma$,

3. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն բութ են, իսկ երրորդը՝ γ-ն սուր է, ապա $d(l_1, l_2) = 180^\circ - \alpha,\ d(l_2, l_3) = 180^\circ - \beta,\ d(l_1, l_3) = \gamma$,

4. եթե α, β, γ անկյուններից որևէ երկուսը, օրինակ՝ α-ն և β-ն սուր են, իսկ երրորդը՝ γ-ն բութ է, ապա $d(l_1, l_2) = \alpha,\ d(l_2, l_3) = \beta,\ d(l_1, l_3) = 180^\circ - \gamma$:

Հասարակ գծագրի միջոցով կարելի է տեսնել, որ 1-3 դեպքերից յուրաքանչյուրում $d(l_1, l_2),\ d(l_2, l_3),\ d(l_1, l_3)$ անկյունները O գագաթով որոշակի եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ են, ուստի $(*)$-ը տեղի ունի ըստ վերը բերված թեորեմի: Իսկ 4-րդ դեպքում այդ երեք անկյունները չեն հանդիսանում որևէ եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ: Ուստի այս դեպքում $(*)$-ը կապացուցենք իր բոլոր ա), բ), գ) տարբերակներով՝ օգտվելով ստորև բերվող սխեմատիկ գծագրից, որտեղ մի աղեղով նշված է γ բութ անկյունը, իսկ երկուական աղեղներով՝ սուր անկյունները:



Քանի որ

ա) $\alpha + \beta > \gamma > 180^\circ - \gamma$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_2, l_3) > d(l_1, l_3)$,

բ) $\beta + (180^\circ - \gamma) > 180^\circ - \alpha > \alpha$, ուստի $d(l_2, l_3) + d(l_1, l_3) > d(l_1, l_2)$,

գ) $\alpha + (180^\circ - \gamma) > 180^\circ - \beta > \beta$, ուստի $d(l_1, l_2) + d(l_1, l_3) > d(l_2, l_3)$:

Մյուս դեպքում, երբ l_1, l_2, l_3 ուղիղները համահարթ են, $(*)$-ը բավարարվում է ակնհայտորեն: ■

Օրինակ 5-ի մետրիկ տարածությունը ընդհանուր դեպքում կոչվում է n**-չափականության իրական պրոյեկտիվ տարածություն** և նշանակվում է $\mathbb{RP}^n$, կամ պարզապես $\mathbb{P}^n$: Մասնավոր, $n = 2$ դեպքում $\mathbb{RP}^2$ տարածությունը, որի տոպոլոգիան վերը

հիմնավորեցինք, կոչվում է նաև **իրական պրոյեկտիվ հարթություն**: Այդ տարածությունները կարևոր դեր են կատարում դասական երկրաչափությունում և տոպոլոգիայում:

Սահմանում: Երկու (X_1, ρ_1) և (X_2, ρ_2) մետրիկ տարածություններ կոչվում են **իզոմետրիկ տարածություններ**, եթե գոյություն ունի $\varphi : X_1 \to X_2$ բիյեկտիվ արտապատկերում, որ $\rho_1(x, y) = \rho_2(\varphi(x), \varphi(y)),\ \forall\, x, y \in X$ կետերի դեպքում:

Հեշտ է տեսնել, որ $X = \mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա օրինակներ 1-ում և 2-ում սահմանված մետրիկներից ստացվող մետրիկ տարածությունները իզոմետրիկ տարածություններ չեն (**ինչո՞ւ**):

Իզոմետրիկ չեն նաև (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունները, եթե թեկուզ մի զույգ $x, y \in X$ կետերի դեպքում $\rho(x, y) \geq 1$:

Իսկ օրինակ 1-ում վերցնելով մի դեպքում $X = \mathbb{Q}$, իսկ մյուս դեպքում՝ $X = \mathbb{Z}$, ստանում ենք իզոմետրիկ տարածություններ (**հիմնավորե՛ք**):

Սահմանում: Դիցուք (X, ρ)-ն որևէ մետրիկ տարածություն է, $a \in X$, $r > 0$: Հետևյալ ենթաբազմությունները՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\},$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\},$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\},$$

կոչվում են (X, ρ) մետրիկ տարածության համապատասխանաբար a կենտրոնով և r շառավղով **անեզր գունդ, եզրով գունդ** և **սֆերա**:

Այս անվանումները մեկնաբանելու համար նշենք, որ $\mathcal{B}(a, r)$ և $\mathcal{D}(a, r)$ գնդերի համար եզր է համարվում $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերան: Այսպիսով $\mathcal{B}(a, r)$ գունդը պարունակում է իր եզրը, իսկ $\mathcal{D}(a, r)$ գունդը՝ ոչ:

Օրինակ 6: Դիսկրետ (X, ρ) մետրիկ տարածությունում ունենք.
եթե $r < 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = \{a\}$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
եթե $r > 1$, ապա $\mathcal{D}(a, r) = \mathcal{B}(a, r) = X$ և $\mathcal{S}(a, r) = \varnothing$;
իսկ $r = 1$ դեպքում՝ $\mathcal{D}(a, 1) = \{a\},\ \mathcal{B}(a, 1) = X,\ \mathcal{S}(a, 1) = X \setminus \{a\}$:

Օրինակ 7: Պարզաբանենք՝ ինչ են $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան մետրիկ տարածության անեզր և եզրով գնդերն ու սֆերաները $n = 1, 2, 3$ դեպքերում:

$n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r),$$
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r],$$
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}:$$

Դրանք էվկլիդյան $\mathbb{R}$ թվային ուղղի բաց ինտերվալները, փակ հատվածներն ու կետազույգերն են:

$n = 2$ դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{D}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\},$$
$$\mathcal{B}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \le r^2\},$$
$$\mathcal{S}(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 = r^2\}:$$

Դրանք $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության բաց և փակ շրջաններն են ու շրջանագծերը:

$n = 3$ դեպքում՝ դրանք $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության անեզր և եզրով գնդերն են ու գնդային մակերևույթները (այդ տերմինների սովորական իմաստով):

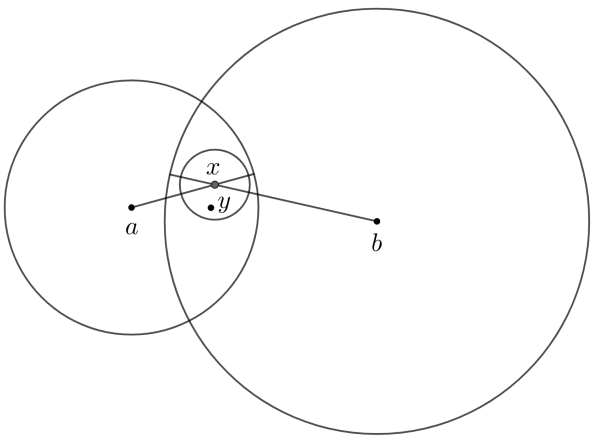
Թեորեմ 1: (X,ρ) մետրիկ տարածության բոլոր $\mathcal{D}(x,r)$ անեզր գնդերի բազմությունը հանդիսանում է բազա X-ի ինչ-որ տոպոլոգիայի համար: Այդ տոպոլոգիան կոչվում է X-ի **մետրիկային տոպոլոգիա**, իսկ $B = \{\mathcal{D}(x,r)\}$ ընտանիքը՝ նրա կանոնական բազա:

Երբեմն մետրիկային տոպոլոգիան կարճ կնշանակենք $\tau[\rho]$:

Ապացուցման հիմքում ընկած է թեմա 5-ի թեորեմ 2-ը, ըստ որի՝ պետք է ստուգենք երկու պայման:

1. $\bigcup \mathcal{D}(x,r) = X$ (հետևում է նրանից, որ միշտ $x \in \mathcal{D}(x,r)$):

2. Ամեն մի ոչ դատարկ $\mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$ հատում ներկայացվում է որպես անեզր գնդերի միավորում: Բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $x \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$ կետի համար գոյություն ունի $\mathcal{D}(x,r)$ գունդ, որ $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: Այդ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշելու համար դիտարկենք մասնավոր դեպք. որպես (X,ρ) մետրիկ տարածություն վերցնենք $\mathbb{R}^2$ հարթությունը սովորական էվկլիդյան մետրիկով (տե՛ս գծագիրը):



Ունենք՝ $\rho(a,x) < r_1$, $\rho(b,x) < r_2$: Գծագրից երևում է. եթե r-ը այնպիսին է, որ

$$\begin{cases} \mathcal{D}(x,r) \subset D(a,r_1) \\ \mathcal{D}(x,r) \subset D(b,r_2) \end{cases}, \quad \text{ապա} \quad \begin{cases} \rho(a,x) + r \le r_1 \\ \rho(b,x) + r \le r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \le r_1 - \rho(a,x) \\ r \le r_2 - \rho(b,x) \end{cases}$$

Ուստի, ընդհանուր դեպքում որպես $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի որոնելի շառավիղ վերցնենք $r = \min(r_1 - \rho(a,x), r_2 - \rho(b,x))$ թիվը: Այժմ դիտարկենք $\forall\, y \in \mathcal{D}(x,r)$ կետ և ցույց տանք, որ $y \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: Դրանից կհետևի, որ $x \in \mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$:

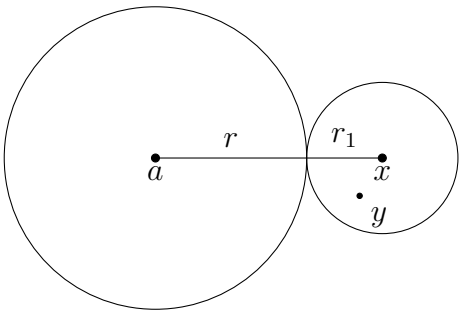
Կարող ենք գնահատել՝

$$\rho(a,y) \le \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + r \le \rho(a,x) + r_1 - \rho(a,x) = r_1,$$

ուստի $y \in \mathcal{D}(a,r_1)$: Նման ձևով ստանում ենք $y \in \mathcal{D}(b,r_2)$, ուստի $y \in \mathcal{D}(a,r_1) \cap \mathcal{D}(b,r_2)$: ■

Դիտողություն: Ապացույցի ընթացքում $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի r շառավղի մեծությունը որոշվեց տեսողաբար՝ $\mathbb{R}^2$ հարթության մասնավոր օրինակի միջոցով: Անդրադառնալով ապացույցի մանրամասներին՝ նշենք, որ ամենասկզբում օգտվեցինք հետևյալ գծագրային հուշումից. եթե $\mathcal{D}(x,r) \subset \mathcal{D}(a,r_1)$, ապա $\rho(a,x) + r \le r_1$: Այլ, ավելի ընդհանուր ձևակերպումով դա հնչում է այսպես. եթե կամայական մետրիկ տարածությունում մի գունդ ընկած է մեկ այլ գնդի մեջ, ապա առաջին գնդի շառավիղը փոքր կամ հավասար է երկրորդ գնդի շառավղից: Բոլոր փորձերը այս պնդումը դարձնել թեորեմ (դուրս բերել մետրիկի 1-3 աքսիոմներից) դատապարտված են անհաջողության, քանի որ իրողությունն այլ է. գոյություն ունեն մետրիկ տարածություններ, որոնցում փոքր շառավղով գունդն իր մեջ ներառում է ավելի մեծ շառավղով գունդ՝ չհամընկնելով նրա հետ (ընթերցողը կարող է ծանոթանալ այդպիսի օրինակի հետ Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, "Контрпримеры в анализе", 1967 գրքում): Արժեզրկվո՞ւմ է արդյոք սրանով թեորեմ 1-ի վերը բերված ապացույցը: Սկզբունքորեն՝ ոչ, քանի որ ձևականորեն բերված ապացույցն անթերի է: Բայց հոգեբանորեն ինչ-որ տեղ՝ գուցե: Թերևս սա է պատճառը, որ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, "Элементы теории функции и функционального анализа" դասագրքի երկրորդ գլխում հեղինակները գերադասել են մետրիկ տարածություններում մետրիկային տոպոլոգիա սահմանել համարժեք, բայց այլ եղանակով՝ դրանով իսկ խուսափելով $\mathcal{D}(x,r)$ գնդի շառավղի մեծության վերոհիշյալ ընտրությունից: Այդ եղանակը հիմնված է Կուրատովսկու փակման գործողության վրա: Կարծում ենք՝ ընթերցողին հետաքրքիր և օգտակար կլինի ծանոթանալ նաև այդ եղանակի հետ:

Որպես հետևանք թեորեմ 1-ից ստանում ենք, որ անեզր գնդերը բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **բաց գնդեր**): Ցույց տանք նաև, որ $\mathcal{B}(a,r)$ եզրով գնդերը փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (այդ պատճառով կոչվում են նաև **փակ գնդեր**):

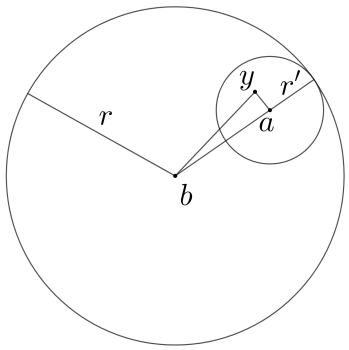


Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $X \setminus \mathcal{B}(a,r)$ լրացումը շրջակայք է իր կամայական x կետի համար, և հետևաբար բաց բազմություն է: Սա հետևում է նրանից, որ $\mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r)$, որտեղ $r_1 = \rho(a,x) - r$: Իրոք, $\forall\, y \in \mathcal{D}(x,r_1)$ կետի համար ունենք՝

$$\rho(a,y) \geq \rho(a,x) - \rho(y,x) > \rho(a,x) - r_1 = r, \text{ ուստի } \mathcal{D}(x,r_1) \subset X \setminus \mathcal{B}(a,r):$$

Նման ձևով ապացուցվում է, որ $\mathcal{S}(a,r)$ սֆերաները փակ բազմություններ են մետրիկային տոպոլոգիայում (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 2: (X,ρ) մետրիկային տարածության $A \subset X$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն է տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում այն և միայն այն դեպքում, երբ իր կամայական a կետի հետ միասին պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:



Ապացուցում: Ինչպես արդեն գիտենք, եթե A-ն (X,ρ)-ի որևէ բաց բազմություն է, ապա այն բաց գնդերի միավորում է (ըստ թեորեմ 1-ի): Մնում է ցույց տալ, որ եթե $a \in A$ կետը պատկանում է որևէ $\mathcal{D}(b,r)$ բաց գնդի, ապա $\mathcal{D}(b,r)$-ն իր մեջ պարունակում է a կենտրոնով որևէ բաց գունդ:

Վերցնենք $r' = r - \rho(a,b)$ և ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Եթե $y \in \mathcal{D}(a,r')$, ապա $\rho(y,b) \leq \rho(y,a) + \rho(a,b) < r' + \rho(a,b) = r$ գնահատումից հետևում է, որ $y \in \mathcal{D}(b,r)$, ուստի $\mathcal{D}(a,r') \subset \mathcal{D}(b,r)$: Թեորեմի հակառակ պնդումն ակնհայտ է: ■

Օրինակ 8: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 2-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի էվկլիդյան մետրիկից ստացվող մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 9: Թեորեմ 1-ից, օրինակներ 3-ից և 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի համար կանոնական բազա են կազմում բոլոր անեզր (բաց) շրջանները, իսկ $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության համար՝ բոլոր սովորական անեզր (բաց) գնդերը (կամայական կենտրոններով և շառավիղներով):

Մետրիկային տարածություններն օժտված են կարևոր հատկությամբ՝ բավարարում են անջատելիության T_2 աքսիոմին: Իրոք, եթե x_1, $x_2 \in X$ և $x_1 \neq x_2$, ապա $\rho(x_1, x_2) \neq 0$, ուստի $D(x_1, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ և $D(x_2, \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2))$ բաց գնդերը x_1 և x_2 կետերի չհատվող շրջակայքեր են: Դա ցույց տալու համար ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի նրանց պատկանող որևէ y կետ: Ըստ եռանկյան աքսիոմի՝ $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y) + \rho(x_2, y) < \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$, հակասություն:

Սահմանում: Միևնույն X բազմության վրա տրված **երկու մետրիկ կոչվում են համարժեք**, եթե նրանցով ծնված մետրիկային տոպոլոգիաները նույնն են:

Օրինակ 10: Ցույց տանք, որ նույն X-ի վրա ρ և $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{1+\rho}$ մետրիկները համարժեք են (չնայած, որ ընդհանուր դեպքում (X, ρ) և $(X, \bar{\rho})$ մետրիկ տարածությունները իզոմետրիկ չեն): Իրոք, (X, ρ) տարածության ամեն մի $\mathcal{D}(a, r) \subset X$ բաց գունդ կարող է դիտարկվել որպես $(X, \bar{\rho})$ տարածության $\overline{\mathcal{D}}(a, R) \subset X$ բաց գունդ, որտեղ $R = \dfrac{r}{1+r}$, և հակառակը՝ $(X, \bar{\rho})$ տարածության ամեն մի $\overline{\mathcal{D}}(a, R)$ գունդ, եթե $R < 1$, կարող է դիտարկվել որպես (X, ρ) տարածության $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ, որտեղ $r = \dfrac{R}{1-R}$: Պարզունակ սպուգումը թողնվում է ընթերցողին:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **մետրիկացվող տարածություն**, եթե X բազմության վրա գոյություն ունի որևէ ρ մետրիկ այնպես, որ X մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է X-ի τ տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 11: Ցանկացած $(X, \text{դիսկր.})$ տարածություն մետրիկացվող տարածություն է, քանի որ նրա տոպոլոգիան համընկնում է X-ի վրա $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x = y \\ 1, & \text{երբ } x \neq y \end{cases}$ դիսկրետ մետրիկով ծնված տոպոլոգիայի հետ:

Իրոք, ըստ օրինակ 6-ի և թեորեմ 1-ի՝ X-ում ամեն մի $\mathcal{D}(a, r)$ գունդ $r < 1$ դեպքերում X-ի մի կետանոց $\{a\}$ բաց ենթաբազմությունն է: Հետևաբար X-ի բոլոր ենթաբազմությունները բաց բազմություններ են տվյալ մետրիկային տոպոլոգիայում:

Բերենք նաև չմետրիկացվող տարածության օրինակ. մեկից ավելի կետեր պարունակող ամեն մի (X, անտիդ.) տարածություն չի կարող մետրիկացվել, քանի որ այն չի բավարարում անջատելիության T_2 աքսիոմին:

Անդրադառնալով մետրիկ տարածություններին՝ նշենք, որ բազմության վրա տրված մետրիկը թույլ է տալիս սահմանել հեռավորության հասկացություն ոչ միայն երկու կետերի միջև, այլև՝ կետի և ենթաբազմության, ինչպես նաև երկու ենթաբազմությունների միջև:

Սահմանում: (X,ρ) մետրիկ տարածության որևէ b կետի հեռավորություն X-ի որևէ A ենթաբազմությունից կոչվում է $\inf\{\rho(b,a);\ a\in A\}$ թիվը (նշանակվում է՝ $\rho(b,A)$):

Թեորեմ 3: $x\in X$ կետը պատկանում է (X,ρ) մետրիկային տարածության $A\subset X$ ենթաբազմության $\bar{A}$ փակույթին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)=0$:

Ապացուցում: Եթե $x\in\bar{A}$, ապա ըստ ենթաբազմության փակույթի սահմանման՝ ամեն մի $\mathcal{D}(x,r_n)$, $r_n=\frac{1}{n}$ բաց գնդում գոյություն ունի A ենթաբազմության որևէ a_n կետ, ուստի $\rho(x,A)=0$:

Այժմ հակառակը. դիցուք ինչ-որ $x\in X$ կետի դեպքում $\rho(x,A)=0$: Դիտարկենք այդ կետի կամայական U շրջակայք և ցույց տանք, որ $U\cap A\neq\varnothing$ (դրանից կհետևի, որ $x\in\bar{A}$): Ըստ մետրիկային տոպոլոգիայի սահմանման և թեորեմ 2-ի՝ գոյություն ունի x կետի $\mathcal{D}(x,r)$ բաց գնդային շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset U$: Այժմ $\rho(x,A)$ հեռավորության սահմանումից և $\rho(x,A)=0$ պայմանից հետևում է. գոյություն ունի որևէ $a\in A$ կետ, որ $\rho(x,a)<r$: Քանի որ $a\in\mathcal{D}(x,r)\subset U$, ուստի $a\in U\cap A$: Ուրեմն $U\cap A\neq\varnothing$: ■

Թեորեմ 4: (X,ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A\subset X$ ենթաբազմության արտաքին կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)>0$:

Ապացուցում: Դիցուք $x\in\operatorname{ext}A$: Ըստ ենթաբազմության արտաքին կետի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի որևէ U շրջակայք, որ $U\subset X\setminus A$: Հետևաբար գոյություն ունի նաև x-ի բաց գնդային $\mathcal{D}(x,r)$ շրջակայք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset U$: Ուստի $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$, և ուրեմն $\mathcal{D}(x,r)\cap A=\varnothing$: Այժմ, ենթադրելով, որ $\rho(x,A)$ թիվը դրական չէ, ստանում ենք $\rho(x,A)=0$, որից (ըստ նախորդ թեորեմի) հետևում է $x\in\bar{A}$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x,r)\cap A\neq\varnothing$ (հակասություն):

Ապացուցենք նաև հակառակ պնդումը. դիցուք $\rho(x,A)=r>0$: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$ (դրանից կհետևի, որ $x\in\operatorname{ext}A$): Ցանկացած $y\in\mathcal{D}(x,r)$ կետի դեպքում ըստ մետրիկի եռանկյան աքսիոմի ունենք՝ $\rho(x,y)+\rho(y,a)\geq\rho(x,a)$, որտեղ a-ն կամայական կետ է A-ից: Քանի որ $\rho(x,a)>r$ և $\rho(x,y)=r$, ուստի $\rho(y,a)>0$: Իսկ դրանից հետևում է՝ $\mathcal{D}(x,r)\subset X\setminus A$: ■

Թեորեմ 5: (X,ρ) մետրիկային տարածության x կետը $A\subset X$ ենթաբազմության եզրային կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,A)=\rho(x,X\setminus A)=0$:

Ապացույցը որպես հեշտ խնդիր թողնվում է ընթերցողին:

Ավարտենք թեման՝ արձանագրելով մետրիկային տարածությունների մի կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 6: Ամեն մի (X,ρ) մետրիկային տարածություն նորմալ տարածություն է:

Ապացուցում: Քանի որ մետրիկական տարածությունները T_2, հետևաբար նաև T_1-տարածություններ են, ուստի մնում է ցույց տալ, որ X-ի ցանկացած F_1 և F_2 չհատվող, փակ ենթաբազմություններ ունեն չհատվող բաց շրջակայքեր:

Ամեն մի $x \in F_1$ կետի համար դիտարկենք $\rho(x, F_2) = \rho_x$, և ամեն մի $y \in F_2$ կետի համար՝ $\rho(y, F_1) = \rho_y$ հեռավորությունները: Ըստ թեորեմ 3-ի՝ $\rho_x > 0$, $\rho_y > 0$: Պարզ է, որ $U_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} \mathcal{D}(x, \frac{1}{2}\rho_x)$, $U_2 = \bigcup\limits_{y \in F_2} \mathcal{D}(y, \frac{1}{2}\rho_y)$ միավորումները բաց ենթաբազմություններ են և $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$: Ցույց տանք, որ $U_1 \cap U_2 = \varnothing$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $z_0 \in U_1 \cap U_2$ կետ: Հետևաբար գոյություն ունեն $x_0 \in F_1$ և $y_0 \in U_2$ կետեր, որ $z_0 \in D(x_0, \frac{1}{2}\rho_{x_0})$ և $z_0 \in D(y_0, \frac{1}{2}\rho_{y_0})$: Ըստ եռանկյան աքսիոմի ունենք՝

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z_0) + \rho(z_0, y_0) < \frac{1}{2}\rho_{x_0} + \frac{1}{2}\rho_{y_0}$$

Դիցուք որոշակիության համար $\rho_{x_0} \geq \rho_{y_0}$, որից հետևում է՝ $\rho(x_0, y_0) < \rho_{x_0}$: Բայց մյուս կողմից ունենք $\rho(x_0, y_0) \geq \inf \rho(x_0, F_2) = \rho_{x_0}$ (հակասություն): Ուստի $U_1 \cap U_2 = \varnothing$: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 7-ի վերաբերյալ

7.1. Ապացուցեք, որ

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = (x - y)^2$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա:

7.2. Ցույց տվեք, որ $n > 1$ դեպքերում

$$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

արտապատկերումը չի որոշում մետրիկ $\mathbb{R}^n$-ում:

7.3. Ապացուցեք. X բազմության վրա մետրիկի 1-3 աքսիոմները համարժեք են հետևյալ երկու աքսիոմներին՝

1. $\rho(x, y) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = y$,
2. $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$ բոլոր $x, y, z \in X$ տարրերի դեպքում:

7.4. Ապացուցեք. եթե ρ-ն որևէ մետրիկ է X բազմության վրա, ապա

$$\tilde{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\rho}(x, y) = \min(1, \rho(x, y))$$

արտապատկերումը նույնպես մետրիկ է X-ի վրա:

7.5. Ցույց տվեք, որ X բազմության վրա նախորդ խնդրում դիտարկված ρ և $\tilde{\rho}$ մետրիկները համարժեք են (որոշում են X-ի միևնույն տոպոլոգիան)։

7.6. Գտեք այնպիսի մետրիկային տարածություն և նրանում երկու այնպիսի փակ գնդեր, որ դրանցից ավելի մեծ շառավղով գունդը պարունակվի ավելի փոքր շառավղով գնդի մեջ՝ չհամընկնելով նրա հետ։

7.7. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը և

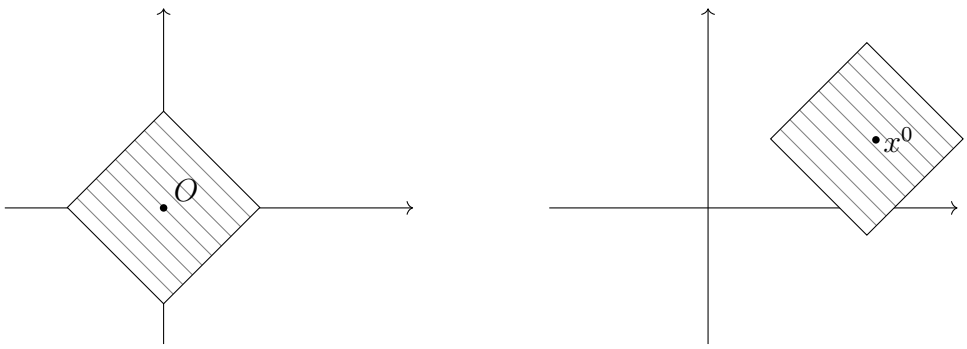
$$\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

արտապատկերումը։

ա) Ապացուցեք, որ σ-ն որոշում է մետրիկ $\mathbb{R}^2$-ի վրա։

բ) Նկարագրեք ստացվող մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազան։

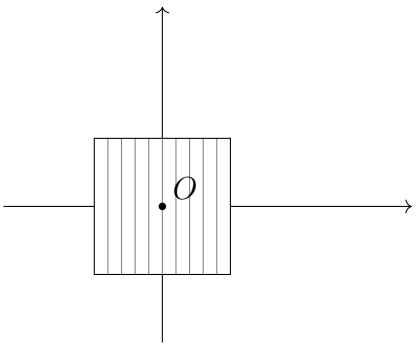
Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում՝ $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1^0 - y_1| + |x_2^0 - y_2| < r\}$։ Մասնավորապես $x^0 = O = (0, 0)$ կետի դեպքում $\mathcal{D}(0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| < r\}$ բաց շրջանը անեզր քառակուսի է, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ $2r$ երկարությամբ անկյունագծերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա։ Ցույց տվեք, որ ընդհանուր դեպքում $\mathcal{D}(x^0, r)$ շրջանը ստացվում է $\mathcal{D}(O, r)$ քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ։

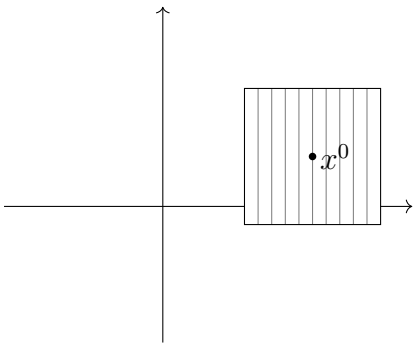


7.8. Լուծեք նախորդ խնդիրը

$$\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mu(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\} = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$$

արտապատկերման դեպքում, որտեղ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$։





Ցուցում բ)-ի վերաբերյալ. Ցույց տվեք, որ սևեռված $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ կետի դեպքում x^0 կենտրոնով, r շառավղով $\mathcal{D}(x^0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \mu(x^0, y) < r\}$ բաց շրջանը ստացվում է $O = (0, 0)$ կենտրոնով և $2r$ կողմով $\mathcal{D}(O, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < r,\ |y_2| < r\}$ անեզր քառակուսուց՝ նրա O կենտրոնի զուգահեռ տեղափոխությունով x^0 կետ:

7.9. Ապացուցեք, որ 7.7 և 7.8 խնդիրներում սահմանված σ և μ մետրիկները համարժեք են (որոշում են $\mathbb{R}^2$-ի նույն տոպոլոգիան):

7.10. Երկրաչափորեն նկարագրեք՝ ինչ են պրոյեկտիվ հարթության մետրիկային տոպոլոգիայի կանոնական բազայի տարրերը:

Ցուցում. Սևեռելով $\mathbb{R}^3$-ում O սկզբնակետով անցնող որևէ l^0 ուղիղ և որևէ α սուր անկյուն՝ դիտարկեք O կետով անցնող բոլոր l ուղիղների բազմությունը, որոնք l^0 ուղղի հետ կազմում են α-ն չգերազանցող անկյուն: Պարզեք, թե այդ անեզր գնդի համար երկրորդ կարգի ո՞ր մակերևույթն է հանդիսանում եզրային սֆերա:

7.11. Դիտարկենք $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ կոորդինատային տարածությունը օրինակ 3-ում սահմանված $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ մետրիկով: Ապացուցեք, որ այդ մետրիկային տարածությունում ամեն մի $\mathcal{S}(a, r)$ սֆերա հանդիսանում է տվյալ $\mathcal{D}(a, r)$ գնդի եզր՝ ըստ թեմա 6-ում սահմանված ենթաբազմության եզր հասկացության:

Թեմա 8

Հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, կապը նրանց միջև, Լինդելյոֆի թեորեմը: Սեպարաբել տարածություններ, կապը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմի և սեպարաբելության միջև:

Մետրիկային տարածություններն օժտված են ևս մի կարևոր հատկությամբ՝ բավարարում են այսպես կոչված հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Սահմանում: Դիցուք x-ը X տոպոլոգիական տարածության որևէ սևեռված կետ է, իսկ β_x-ը այդ կետի որոշ շրջակայքերի համախմբություն է: Ասում են, որ β_x-ը x կետի **շրջակայքերի բազա** է, եթե x-ի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի $V \in \beta_x$ շրջակայք, որ $V \subset U$:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության առաջին աքսիոմին**, եթե նրա ցանկացած կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի բազա:

Օրինակ 1: Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած $(X, \text{դիսկր.})$ և $(X, \text{անտիդ.})$ տարածություններ բավարարում են հաշվելիության առաջին աքսիոմին **(ինչո՞ւ)**:

Թեորեմ 1: Ցանկացած (X, ρ) մետրիկային տարածություն բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ կամայական $x \in X$ կետի համար բոլոր $\mathcal{D}(x, r)$, $r \in \mathbb{Q}$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x-ի U բաց շրջակայք, որ $x \in U \subset V$: Համաձայն թեմա 6-ում թեորեմ 3-ի՝ գոյություն ունի x կենտրոնով $\mathcal{D}(x, R)$ բաց գունդ, որ $x \in \mathcal{D}(x, R) \subset U$:

Վերցնենք որևէ ռացիոնալ r թիվ այնպես, որ $R > r > 0$: Ունենք $\mathcal{D}(x, r) \subset \mathcal{D}(x, R) \subset U \subset V$, որից հետևում է՝ $x \in \mathcal{D}(x, r) \subset V$, ուստի ռացիոնալ շառավիղներով $\mathcal{D}(x, r)$ բաց գնդերը կազմում են x կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա: ■

Այժմ բերենք տոպոլոգիական տարածության օրինակ, որը չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը: Ըստ սահմանման՝ նրանում բաց բազմություններ են համարվում վերջավոր ենթաբազմությունների լրացումները: Ցույց տանք, որ $0 \in \mathbb{R}$ կետի համար գոյություն չունի շրջակայքերի հաշվելի բազա: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք 0 կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի ինչ-որ $\beta = \{U_i,\ i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա: Նախ ցույց տանք, որ $\bigcap\limits_i U_i = \{0\}$: Նկատենք, որ ամեն մի $r \neq 0$ թվի դեպքում $V(r) = \mathbb{R} \setminus \{r\}$ ենթաբազմությունը 0 կետի բաց շրջակայք է, հետևաբար գոյություն ունի 0-ի $U(r) \in \beta$ շրջակայք, որ

$0 \in U(r) \subset V(r)$: Քանի որ $r \notin V(r)$, ուստի $\bigcap\limits_r V(r) = \{0\}$: Հետևաբար $\bigcap\limits_r U(r) = \{0\}$, և ուրեմն նաև $\bigcap\limits_i U_i = \{0\}$, որտեղ $i \in I$: Ստացվում է, որ $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_i U_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ բազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է: Բայց մյուս կողմից, ըստ դե Մորգանի երկրորդ բանաձևի՝ $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_i U_i = \bigcup\limits_i (\mathbb{R} \setminus U_i)$ բազմությունը հաշվելի բազմություն է՝ որպես հաշվելի քանակով վերջավոր բազմությունների միավորում: Ստացանք հակասություն:

Ուստի $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Այստեղից, որպես կողմնակի հետևանք, ստանում ենք. $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը չի կարող մետրիկացվել: ■

Երկրաչափական որոշ բարդ պատկերներ (օրինակ՝ ողորկ բազմաձևությունները) սահմանվում են ավելի պարզ պատկերների սոսնձումներով: Այդպիսի կառուցումները էապես հեշտանում են, եթե նախապես պահանջում են, որ կառուցվող տարածությունը (բազմաձևությունը) բավարարի այսպես կոչված հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Սահմանում: Ասում են, որ X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է **հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին**, եթե նրա տոպոլոգիայի համար գոյություն ունի որևէ հաշվելի բազա:

Օրինակ 3: Ինչպես գիտենք, ռացիոնալ ծայրակետերով բոլոր (r_1, r_2) ինտերվալների ընտանիքը հաշվելի բազա է $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի համար: Ուստի $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Թեորեմ 2: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն բավարարում է նաև հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապացուցում: Դիցուք (X, τ) տարածության համար $B = \{U_i\}$ համախմբությունը τ տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: Կամայական $x \in X$ կետի համար դիտարկենք B-ի B_x ենթաբազմությունը՝ կազմված B-ի այն բոլոր տարրերից, որոնք պարունակում են x կետը: Պարզ է, որ B_x-ը հաշվելի բազմություն է: Եթե V-ն x-ի որևէ շրջակայք է, ապա գոյություն ունի $U \in \tau$ բաց բազմություն, որ $x \in U \subset V$: Ըստ պայմանի՝ U-ն ներկայացվում է $U = \bigcup U_j$ տեսքով, որտեղ $U_j \in B$: Նշանակում է՝ x-ը պատկանում է դրանցից որևէ մեկին՝ $x \in U_{j_0}$, $j_0 \in J$: Ուստի $U_{j_0} \in B_x$, և $x \in U_{j_0} \subset V$: ■

Հաշվելիության առաջին աքսիոմին բավարարող տարածությունը կարող է չբավարարել հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Որպես պարզ օրինակ վերցնենք որևէ ոչ հաշվելի բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով: Ինչպես գիտենք, նրա ցանկացած B բազա իր մեջ պարունակում է բոլոր մի կետանոց ենթաբազմությունները: Ուստի B-ն ոչ հաշվելի բազա է:

Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունների մյուս կարևոր հատկությունը կապված է բազմության ծածկույթ, ենթածածկույթ հասկացությունների հետ:

Սահմանում: Դիցուք ունենք X բազմության A ենթաբազմություն և X-ի ենթաբազմությունների ինչ-որ $U_i \subset X;\ i \in I$ ընտանիք: Ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը ***A* ենթաբազմության ծածկույթ է**, եթե $A \subset \bigcup\limits_i U_i$: Մասնավորապես, $A = X$ դեպքում $\{U_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը X-ի ծածկույթ է, եթե $X = \bigcup\limits_i U_i$: Ծածկույթը կոչվում է **բաց ծածկույթ**, եթե նրա տարրերը X տարածության բաց ենթաբազմություններ են: Ծածկույթը կոչվում է **հաշվելի** ծածկույթ, եթե ինդեքսների I բազմությունը հաշվելի բազմություն է:

Դիցուք ունենք $A \subset X$ ենթաբազմության երկու՝ $\{U_i; i \in I\}$ և $\{V_j; j \in J\}$ ծածկույթներ: Եթե ամեն մի $i \in I$ տարրի համար գոյություն ունի $j \in J$ տարր այնպես, որ $U_i = V_j$, ապա ասում են, որ $\{U_i;\ i \in I\}$ ծածկույթը $\{V_j;\ j \in J\}$ ծածկույթի ենթածածկույթ է:

Օրինակ 4: $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածության համար $U_i = (i-1;\, i+1);\ i \in I = \mathbb{R}$ ինտերվալները կազմում են նրա բաց ծածկույթ, իսկ $V_j = (j-1;\, j+1),\ j \in J = \mathbb{Z}$ ինտերվալները կազմում են այդ ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **լինդելյոֆյան տարածություն**, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի հաշվելի ենթածածկույթ:

Թեորեմ 3: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ամեն մի տարածություն լինդելյոֆյան տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք $\{U_i;\ i \in I\}$-ն (X, τ) տարածության որևէ բաց ծածկույթ է, իսկ B-ն τ տոպոլոգիայի որևէ հաշվելի բազա է: Ունենք $X = \bigcup\limits_i U_i$: Ամեն մի $x \in X$ կետի համար ընտրենք որևէ U_i, որ $x \in U_i$: Այդ U_i-ն վերանշանակենք U_x (նկատենք, որ տարբեր $x_1,\ x_2 \in X$ կետերի դեպքում հնարավոր է $U_{x_1} = U_{x_2}$ համընկում): Գոյություն ունի B-ին պատկանող V_x տարր, որ $x \in V_x \subset U_x$: Պարզ է, որ $\{V_x;\ x \in X\}$ համախմբությունը հաշվելի է որպես հաշվելի B բազմության ենթաբազմություն: Այժմ յուրաքանչյուր V_x-ի համար ընտրենք մի U_x, որ $V_x \subset U_x$: Քանի որ $X = \bigcup\limits_x V_x$, ուստի և $X = \bigcup\limits_x U_x$: Ուրեմն $\{U_x\}$-ը $\{U_i;\ i \in I\}$ բաց ծածկույթի հաշվելի ենթածածկույթ է: ■

Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունները կարևոր են ոչ միայն թեորեմ 3-ի իմաստով: Դրա հետ կապված առաջանում է խնդիր. ինչպե՞ս պարզել՝ բավարարում է արդյոք տվյալ տարածությունը հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին: Որոշ դեպքերում այդ խնդրի դրական կամ բացասական պատասխաններ ստացվում են ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն, սեպարաբել տարածություն հասկացությունների տերմիններով:

Սահմանում: Ասում են, որ $A \subset X$ **ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է** (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում, եթե A-ի փակումը X-ն է՝ $\overline{A} = X$:

Այդպիսիք են, օրինակ՝ ա) X-ը կամայական (X, τ) տարածությունում, բ) ռացիոնալ թվերի և իռացիոնալ թվերի ենթաբազմությունները $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ում, գ) ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն $(X, \text{վերջ. լր.})$-ում: Սրանք հեշտ հիմնավորվում են շնորհիվ հետևյալի:

Թեորեմ 4: X տարածության A ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն ունի ոչ դատարկ հատում X-ի ցանկացած բաց, ոչ դատարկ ենթաբազմության հետ:

Անհրաժեշտությունը: Դիցուք $\overline{A} = X,\ U \in \tau,\ U \neq \varnothing$: Եթե $U \cap A = \varnothing$, ապա U-ի ոչ մի կետ հպման կետ չէ A-ի համար, ուստի $\overline{A} \neq X$ (հակասություն):

Բավարարությունը: Վերցնենք $\forall x_0 \in X$ կետ և ցույց տանք, որ $x_0 \in \overline{A}$: Դիցուք V-ն x_0 կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի x_0-ի U բաց շրջակայք, որ $x_0 \in U \subset V$: Համաձայն պայմանի՝ $U \cap A \neq \varnothing \ \Rightarrow\ V \cap A \neq \varnothing \ \Rightarrow\ x_0 \in \overline{A} \ \Rightarrow\ \overline{A} = X$: ■

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **սեպարաբել տարածություն**, եթե այն ունի որևէ ամենուրեք խիտ հաշվելի ենթաբազմություն:

Սեպարաբել տարածությունների օրինակներ: ա) Ցանկացած (X, τ) տարածություն, որտեղ X-ը հաշվելի բազմություն է, բ) $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ը, գ) $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}, \leftarrow\!\!\!\mapsto)$ տարածությունները, դ) $\mathbb{R}^n$-ը սովորական մետրիկային տոպոլոգիայով, ե) ցանկացած $(X, \text{անտիդ.})$ տարածություն: Իսկ $(X, \text{դիսկր.})$-ը սեպարաբել չէ, եթե X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է:

Թեորեմ 5: Բոլոր $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ էվկլիդյան տարածությունները սեպարաբել տարածություններ են:

Ապացուցում: Ինչպես գիտենք, ռացիոնալ կոորդինատներով բոլոր $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{Q}$ կետերի $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$ ենթաբազմությունը հաշվելի է (տե՛ս խնդիր 3.5-ը թեմա 3-ում): Ցույց տանք, որ այն ունի ոչ դատարկ հատում ամեն մի $\mathcal{D}(x, r)$ գնդի հետ, որտեղ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $r > 0$: Յուրաքանչյուր $i = 1, 2, \ldots, n$ ինդեքսի համար ընտրենք որևէ q_i ռացիոնալ թիվ $(x_i - \frac{r}{\sqrt{n}},\ x_i + \frac{r}{\sqrt{n}})$ ինտերվալից: Ունենք՝

$$
\begin{aligned}
x_i - \frac{r}{\sqrt{n}} < q_i < x_i + \frac{r}{\sqrt{n}} \ &\Rightarrow\ -\frac{r}{\sqrt{n}} < q_i - x_i < \frac{r}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ |q_i - x_i| < \frac{r}{\sqrt{n}} \\
&\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} |q_i - x_i|^2 < n \cdot \frac{r^2}{n} \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} (q_i - x_i)^2 < r^2 \\
&\Rightarrow\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathcal{D}(x, r) \ \Rightarrow\ \mathbb{Q}^n \cap \mathcal{D}(x, r) \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

Քանի որ $\mathcal{D}(x,r)$ գնդերը կազմում են բազա $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկային տոպոլոգիայի համար, ուստի $\mathbb{Q}^n$-ի հատումը դատարկ չէ նաև $\mathbb{R}^n$-ի ցանկացած բաց ենթաբազմության հետ: Հետևաբար $\mathbb{Q}^n$-ը ամենուրեք խիտ է $\mathbb{R}^n$-ում ըստ թեորեմ 4-ի: Այսպիսով $\mathbb{Q}^n$-ը հաշվելի, ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, ուստի $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Թեորեմ 6: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող ցանկացած (X,τ) տարածություն սեպարաբել տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք B-ն τ տոպոլոգիայի որևէ հաշվելի բազա է: Յուրաքանչյուր $U_n \in B$ ենթաբազմությունում ընտրենք որևէ a_n կետ: Ստացված հաշվելի $A = \{a_n\}$ բազմությունը բավարարում է թեորեմ 4-ի պայմանին (ինչո՞ւ): Հետևաբար $\overline{A} = X$, ուստի X-ը սեպարաբել տարածություն է: ■

Հակառակը ճիշտ չէ. սեպարաբել տարածությունը կարող է չունենալ հաշվելի բազա: Բերենք երկու օրինակ:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է: Իրոք, ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի ոչ դատարկ հատում ցանկացած ոչ դատարկ բաց ենթաբազմության հետ, ուստի այն հաշվելի ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}$-ում: Բայց $(\mathbb{R}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը չունի հաշվելի բազա, քանի որ ունենալու դեպքում կբավարարվեր հաշվելիության առաջին աքսիոմը՝ համաձայն թեորեմ 2-ի: Մինչդեռ թեմայի սկզբում ցույց ենք տվել, որ այդ տարածությունը չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Օրինակ 6: Դիտարկենք $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունը: Այն սեպարաբել տարածություն է, քանի որ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (ինչո՞ւ): Այժմ ենթադրենք, որ նրա համար գոյություն ունի հաշվելի B բազա: Նշանակում է՝ ցանկացած սևեռված $a \in \mathbb{R}$ կետի $[a,b)$ բաց շրջակայքի համար պետք է գոյություն ունենա $U \in B$ տարր, որ $a \in U \subset [a,b)$: Այսինքն $U \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունն ունի փոքրագույն տարր ի դեմս a-ի: Բայց բոլոր $a \in \mathbb{R}$ կետերի բազմությունը (այսինքն $\mathbb{R}$-ը) ոչ հաշվելի բազմություն է, ուստի B-ն հաշվելի բազմություն չէ (հակասություն):

Մետրիկային տարածությունների դեպքում սեպարաբելությունը համարժեք է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

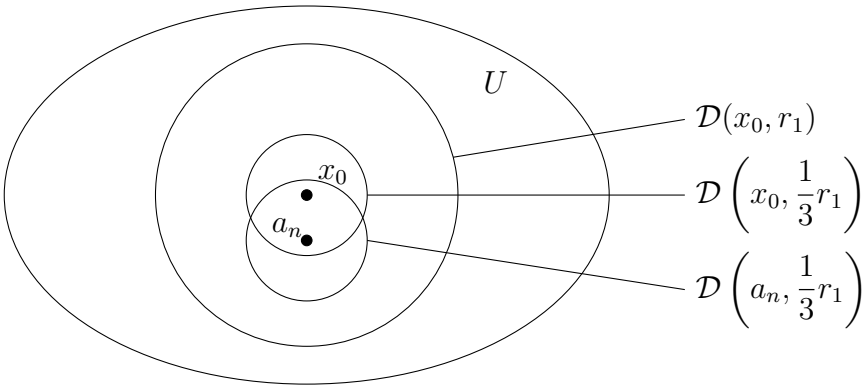
Թեորեմ 7: Որևէ մետրիկային տարածություն սեպարաբել է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Ապացուցում: Պայմանի բավարարությունը հետևում է թեորեմ 5-ից, ուստի մնում է ապացուցել պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք (X,ρ) մետրիկային տարածությունը սեպարաբել տարածություն է, և $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում: Ցույց տանք, որ բաց գնդերի $B = \{\mathcal{D}(a_n,r) \mid a_n \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը հաշվելի բազա է (X,ρ)-ի համար: Նախ պարզ է, որ

B-ն հաշվելի է, քանի որ հաշվելի է (a_n, r) զույգերի բազմությունը՝ համաձայն թեմա 3-ում թեորեմ 3-ի:

Այժմ վերցնենք որևէ $x_0 \in X$ կետ և նրա որևէ U շրջակայք: Բավական է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{D}(a_n, r) \in B$ գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$: Դրանից կհետևի, որ (X, ρ)-ն բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին (**ինչո՞ւ**):

Ըստ կետի շրջակայքի և մետրիկային տոպոլոգիայի սահմանումների՝ գոյություն ունի $\mathcal{D}(x_0, r_1)$, $r_1 \in \mathbb{R}$ բաց գունդ, որ $x_0 \in \mathcal{D}(x_0, r_1) \subset U$: Ըստ թեորեմ 1-ի ապացուցում բերված դատողության կարող ենք համարել, որ $r_1 \in \mathbb{Q}$: Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(x_0, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը. պարզ է, որ $\mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Քանի որ $\bar{A} = X$, ուստի (համաձայն թեորեմ 4-ի) գոյություն ունի $a_n \in A$ կետ, որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$:



Դիտարկենք $\mathcal{D}\left(a_n, \frac{1}{3}r_1\right)$ գունդը: Ցույց տանք, որ $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset \mathcal{D}(x_0, r_1)$: Իրոք, եթե $x \in \mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1)$, ապա $\rho(x, a_n) < \frac{1}{3}r_1 \Rightarrow \rho(x, x_0) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, x_0) < \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{3}r_1 < r_1$: Հետևաբար $\mathcal{D}(a_n, \frac{1}{3}r_1) \subset U$: Մյուս կողմից, քանի որ $a_n \in \mathcal{D}(x_0, \frac{1}{3}r_1)$, ուստի $\rho(x_0, a_n) < \frac{1}{3}r_1$: Այսպիսով $x_0 \in \mathcal{D}(a_n, r) \subset U$, որտեղ $r = \frac{1}{3}r_1 \in \mathbb{Q}$: Նշանակում է $\{\mathcal{D}(a_n, r) \mid a_n \in A,\ r \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը (X, ρ) տարածության տոպոլոգիայի հաշվելի բազա է: ■

Թեորեմ 8: Բոլոր $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան տարածությունները

ա) բավարարում են հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին,

բ) լինդելյոֆյան տարածություններ են:

Ապացուցում: Ունենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը սեպարաբել տարածություն է համաձայն թեորեմ 5-ի: Այժմ թեորեմ 7-ից հետևում է, որ $\mathbb{R}^n$-ը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին, ուստի այն լինդելյոֆյան տարածություն է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Հետևանք: Ցանկացած $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ էվկլիդյան մետրիկային տարածության ամեն մի բաց ծածկույթից կարելի է անջատել հաշվելի ենթածածկույթ:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 8-ի վերաբերյալ

8.1. Ապացուցեք. $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Յուցում. Դիտարկելով կամայական $a \in \mathbb{R}$ կետ՝ ցույց տվեք, որ աջից կիսափակ ինտերվալների $\{[a, x);\ x > a,\ x \in \mathbb{Q}\}$ ընտանիքը a կետի շրջակայքերի հաշվելի բազա է:

8.2. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ցանկացած $(X, \text{վերջ. լր.})$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է, չի բավարարում հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Յուցում. Օգտվեք օրինակ 2-ում բերված ապացուցման ընթացքից:

8.3. Ապացուցեք. $(\mathbb{Z}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը, որտեղ $\mathbb{Z}$-ը ամբողջ թվերի բազմությունն է, բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Յուցում. Օգտվելով թեմա 3-ի 3.8 խնդրից՝ նախ ցույց տվեք, որ $(\mathbb{Z}, \text{վերջ. լր.})$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

8.4. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $(\mathbb{R}, \text{հաշվ. լր.})$ տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Յուցում. Տե՛ս օրինակ 2-ը:

8.5. Գտեք մետրիկային տարածություն, որը չի բավարարում հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

8.6. Ճի՞շտ է արդյոք, որ գոյություն ունի ցանկացած հզորության X տոպոլոգիական տարածություն, որի յուրաքանչյուր միկետանոց ենթաբազմություն ամենուրեք խիտ է X-ում:

8.7. Ապացուցեք. որևէ X տարածության տոպոլոգիան դիսկրետ տոպոլոգիա է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում գոյություն ունի միայն մի ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն, և դա ինքը՝ X-ն է:

8.8. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական տոպոլոգիական տարածությունում ցանկացած երկու ամենուրեք խիտ ենթաբազմությունների ա) միավորումը, բ) հատումը ամենուրեք խիտ է:

8.9. Դիցուք A ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է X-ում: Ապացուցեք. ցանկացած $U \subset X$ բաց ենթաբազմության դեպքում $A \cap U$ ենթաբազմության փակումը X-ում համընկնում է U-ի փակման հետ՝ $\overline{A \cap U} = \overline{U}$:

Յուցում. Դիտարկեք կամայական $x \in \overline{U}$ կետ և այդ կետի ցանկացած V բաց շրջակայք: Հիմնվելով թեորեմ 4-ի վրա՝ ցույց տվեք, որ $V \cap (A \cap U) \neq \varnothing$ (դրանից կհետևի, որ $\overline{U} \subset \overline{A \cap U}$):

8.10. Ապացուցեք. կամայական տոպոլոգիական տարածության վերջավոր քանակով ամենուրեք խիտ բաց ենթաբազմությունների հատումը նույնպես ամենուրեք խիտ բաց ենթաբազմություն է:

Յուցում. Դիցուք $U_1, U_2 \subset X$ ենթաբազմություններն ամենուրեք խիտ են X-ում: Կիրառեք խնդիր 8.9-ը՝ վերցնելով $A = U_1$, $U = U_2$:

Թեմա 9

Տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերումներ, թեորեմ մետրիկային տարածությունների արտապատկերումների անընդհատության մասին, անընդհատության հայտանիշներ: Հոմեոմորֆիզմ և հոմեոմորֆ տարածություններ, տոպոլոգիական տիպ և տոպոլոգիական հատկություններ: Բաց, փակ արտապատկերումներ:

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք տոպոլոգիական տարածություններն առանձին-առանձին, միմյանցից անկախ: Այժմ զբաղվելու ենք դրանց համեմատմամբ: Այդ նպատակով ներմուծվում է տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերման հասկացությունը, որը երկրորդ կարևորագույն հասկացությունն է տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունից հետո:

Սահմանում: Դիցուք ունենք (X,τ), (Y,σ) տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը կոչվում է **անընդհատ $x_0 \in X$ կետում**, եթե Y տարածությունում $f(x_0) = y_0$ կետի ամեն մի V շրջակայքի համար գոյություն ունի X տարածությունում x_0 կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$:

Հետևյալ պնդումը երբեմն հեշտացնում է անընդհատության պայմանի ստուգումը:

Թեորեմ 1: Ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f : X \to Y$ արտապատկերում, $f(x_0) = y_0$, իսկ $\beta_{x_0} = \{U_i(x_0);\ i \in I\}$ և $\beta_{y_0} = \{V_j(y_0);\ j \in J\}$ ընտանիքները համապատասխանաբար x_0 և y_0 կետերի շրջակայքերի որևէ բազաներ են X և Y տարածություններում: Ապա f-ը անընդհատ է x_0 կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall\ V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$ շրջակայքի համար գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$ շրջակայք, որ $f(U_i(x_0)) \subset V_j(y_0)$:

Ապացուցում: Դիցուք f-ը անընդհատ է x_0 կետում, և ունենք որևէ $V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$: Ըստ կետում անընդհատության սահմանման, գոյություն ունի x_0 կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V_j(y_0)$: Համաձայն կետի շրջակայքերի բազայի սահմանման՝ գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$, որ $U_i(x_0) \subset U$: Այժմ ստանում ենք՝ $f(U_i(x_0)) \subset f(U) \subset V_j(y_0)$:

Հիմա հակառակը. դիցուք V-ն y_0 կետի որևէ շրջակայք է: Գոյություն ունի $V_j(y_0) \in \beta_{y_0}$, որ $V_j(y_0) \subset V$: Ըստ պայմանի, գոյություն ունի $U_i(x_0) \in \beta_{x_0}$, որ $f(U_i(x_0)) \subset V_j(y_0) \subset V$: Տվյալ V շրջակայքի համար որպես U շրջակայք վերցնելով $U_i(x_0)$-ն ստանում ենք $f(U) \subset V$: Ուստի f-ը անընդհատ է x_0 կետում: ■

Կիրառենք այս թեորեմը մասնավոր դեպքում, երբ տոպոլոգիական տարածությունները մետրիկային են՝ (X,ρ) և (Y,ρ'):

Ինչպես գիտենք, այդ տարածություններում բոլոր $\{\mathcal{D}(x,r)\}$ և $\{\mathcal{D}(y,r)\}$ անեզր գնդերի ընտանիքները կազմում են բազա համապատասխանաբար x և y կետերի

շրջակայքերի համար (տե՛ս թեորեմ 2-ը թեմա 7-ում): Այսպեղից և թեորեմ 1-ից ստանում ենք.

Հետևանք: Մետրիկային տարածությունների $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում այն և միայն դեպքում, երբ Y-ում ամեն մի $\mathcal{D}(y_0, r')$ գնդի համար, որտեղ $y_0 = f(x_0)$, գոյություն ունի X-ում $\mathcal{D}(x_0, r)$ գունդ, որ $f(\mathcal{D}(x_0, r)) \subset \mathcal{D}(y_0, r')$:

Սահմանում: Ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը կոչվում է **անընդհատ արտապատկերում**, եթե այն անընդհատ է X-ի բոլոր կետերում:

Սկզբի համար բերենք անընդհատ արտապատկերումների երկու պարզ օրինակ:

ա) Ցանկացած տոպոլոգիական տարածության նույնական արտապատկերումը ինքն իր վրա անընդհատ արտապատկերում է: Իրոք, $f = \mathbb{1}_X : X \to X,\ f(x) = x$ արտապատկերման դեպքում $y_0 = f(x_0) = x_0$ կետի V շրջակայքի համար որպես x_0 կետի U շրջակայք վերցնելով V-ն, կստանանք $f(U) = V \subset V$:

բ) Դիցուք (X, τ)-ն և (Y, σ)-ն կամայական տոպոլոգիական տարածություններ են, $y_0 \in Y$ սևեռված կետ է: Ընդունված է $c : X \to Y,\ c(x) = y_0,\ \forall x \in X$ արտապատկերումն անվանել X-ի **հաստատուն արտապատկերում** Y-ի y_0 կետի վրա: Այն անընդհատ արտապատկերում է: Իրոք, քանի որ $c^{-1}(y_0) = X$, ուստի y_0-ի $\forall\, V$ շրջակայքի համար որպես $\forall\, x_0 \in X$ կետի U շրջակայք վերցնելով X-ը, կունենանք $f(U) \subset V$:

Թեորեմ 2: Ունենք (X, ρ) և (Y, ρ') մետրիկային տարածություններ: Ապա $f : X \to Y$ արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $x_0 \in X$ կետի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ թիվ, որ եթե $\rho(x, x_0) < \delta$, ապա $\rho'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$:

Ապացուցումը անմիջականորեն հետևում է անընդհատության սահմանումից և թեորեմ 1-ի հետևանքից:

Թեորեմ 3: Ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության նախակերպարը բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցում: ա) Ցույց տանք պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիտարկենք որևէ $x_0 \in f^{-1}(V)$ կետ: Քանի որ $f(x_0) \in V$, ուստի x_0 կետում f-ի անընդհատությունից հետևում է, որ գոյություն ունի x_0-ի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$:

Ունենք՝ $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$, որից հետևում է, որ $f^{-1}(V)$-ի ցանկացած x_0 կետ ներքին կետ է նրա համար, ուստի $f^{-1}(V)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

բ) Այժմ ապացուցենք պայմանի բավարարությունը: Դրա համար ցույց տանք, որ f-ը անընդհատ է ցանկացած $x_0 \in X$ կետում: Դիցուք V-ն $y_0 = f(x_0)$ կետի որևէ շրջակայք է: Գոյություն ունի y_0-ի W բաց շրջակայք, որ $W \subset V$: Ըստ պայմանի

$f^{-1}(W)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում: Ուրեմն $U = f^{-1}(W)$-ն (բաց) շրջակայք է x_0-ի համար: Ունենք՝ $f(U) = f(f^{-1}(W)) \subset W \subset V$, ուստի f-ը անընդհատ է x_0 կետում: ■

Նշենք, որ թեորեմն ապացուցելիս մենք օգտվեցինք հետևյալ ներդրումներից (տե՛ս թեորեմ 3-ը թեմա 1-ում). եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում, $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմություններ, ապա $f(f^{-1}(B)) \subset B$, $A \subset f^{-1}(f(A))$:

Հետևանք 3: Եթե հայտնի է Y տարածության տոպոլոգիայի որևէ բազա, ապա $f : X \to Y$ արտապատկերման անընդհատության համար բավական է պահանջել, որ X-ում բաց լինեն տվյալ բազայի բոլոր տարրերի նախակերպարները (հիմնավորե՛ք):

Հետևանք 4: Եթե $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումները անընդհատ են, ապա նրանց $g \circ f$ համադրույթը նույնպես անընդհատ է (**հիմնավորե՛ք**):

Թեորեմ 4 (անընդհատության հայտանիշ փակ ենթաբազմությունների տերմիններով)**:** Ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ: Ապա որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y-ում փակ ցանկացած ենթաբազմության նախակերպարը փակ ենթաբազմություն է X-ում:

Ապացուցելիս կօգտվենք $f^{-1}(Y \setminus Z) = X \setminus f^{-1}(Z)$ նույնությունից, որտեղ $Z \subset Y$:

ա) Ենթադրելով, որ f-ը անընդհատ է, կունենանք. եթե F-ը փակ է Y-ում, ապա $(Y \setminus F)$-ը բաց է Y-ում, և ուրեմն $f^{-1}(Y \setminus F)$-ը բաց է X-ում՝ ըստ թեորեմ 3-ի: Ուստի $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ ենթաբազմությունը փակ է X-ում:

բ) Հակառակը. եթե V-ն բաց է Y-ում $\Rightarrow$ $(Y \setminus V)$-ն փակ է Y-ում $\Rightarrow$ $f^{-1}(Y \setminus V)$-ն փակ է X-ում $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ ենթաբազմությունը բաց է X-ում: Ուստի f-ը անընդհատ է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Այժմ բերենք արտապատկերումների անընդհատության մի քանի հայտանիշ ենթաբազմությունների փակման գործողության տերմիններով:

Ենթագիտակցաբար, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը մենք պատկերացնում ենք որպես այնպիսի արտապատկերում, որը X-ի ցանկացած երկու «բավականաչափ մոտիկ» (X-ի տոպոլոգիայի իմաստով) x_1 և x_2 կետերի համապատասխանեցնում է Y-ի «բավականաչափ մոտիկ» $f(x_1)$ և $f(x_2)$ կետեր (Y-ի տոպոլոգիայի իմաստով): Մյուս կողմից, ենթաբազմության հպման կետը մենք պատկերացնում ենք որպես այդ ենթաբազմությանը «շատ մոտիկ», կամ նրան կպած կետ այն իմաստով, որ նրան հնարավոր չէ անջատել ենթաբազմությունից մի որևէ բաց շրջակայքով: Ուստի ճշմարիտ է թվում հետևյալ պնդումը. եթե $x \in X$ կետը հպման կետ է $A \subset X$ ենթաբազմության համար, ապա $f(x)$ կետը հպման կետ է $f(A) \subset Y$ ենթաբազմության համար:

Թեորեմ 5 (անընդհատության հայտանիշ փակման գործողության տերմիններով)**:** $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք f-ը անընդհատ է: Վերցնենք կամայական $y \in f(\bar{A})$ կետ և ցույց տանք, որ $y \in \overline{f(A)}$: Իրոք, գոյություն ունի $x \in \bar{A}$ կետ, որ $f(x) = y$: Դիտարկենք y կետի կամայական V շրջակայք: Ըստ x կետում f-ի անընդհատության՝ գոյություն ունի x-ի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Քանի որ $U \cap A \neq \varnothing$, ուստի $f(U) \cap f(A) \neq \varnothing \Rightarrow V \cap f(A) \neq \varnothing \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$: Այսպիսով՝ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$:

Պայմանի բավարարությունը: Դիտարկենք կամայական $B \subset Y$ փակ ենթաբազմություն՝ $B = \bar{B}$ և ապացուցենք, որ $A = f^{-1}(B)$ ենթաբազմությունը փակ է X-ում (դրանից կհետևի, որ f-ը անընդհատ է ըստ թեորեմ 4-ի):

Դրա համար ցույց տանք, որ A-ն պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը: Եթե $x \in \bar{A}$, ապա ըստ պայմանի՝ $f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B$: Ուստի $x \in f^{-1}(B) = A$, որից էլ ստանում ենք $\bar{A} = A$: Ուրեմն A-ն փակ է X-ում: ■

Գոյություն ունի նաև արտապատկերման անընդհատության հայտանիշ ենթաբազմության ներքինի տերմիններով:

Թեորեմ 6: $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ կամայական $B \subset Y$ ենթաբազմության համար $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(f^{-1}(B))$:

Ապացուցում: ա) Ենթադրենք f-ը անընդհատ է: Վերցնենք կամայական $x \in f^{-1}(\operatorname{int} B)$ կետ և ցույց տանք, որ $x \in \operatorname{int}(f^{-1}(B))$: Ունենք՝ $f(x) \in \operatorname{int} B \subset B$, ուրեմն $x \in f^{-1}(\operatorname{int} B) \subset f^{-1}(B)$: Քանի որ, ըստ թեորեմ 3-ի, $f^{-1}(\operatorname{int} B)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում, ուստի x կետը ներքին կետ է $f^{-1}(B)$-ի համար $\Rightarrow$ $x \in \operatorname{int}(f^{-1}(B))$:

բ) Հակառակ պնդումը ապացուցելու համար վերցնենք $\forall V \subset Y$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում: Ճարունակությունը թողնում ենք ընթերցողին: ■

Սահմանում: Արտապատկերումը կոչվում է **խզվող**, եթե այն անընդհատ չէ:

Բերենք խզվող արտապատկերումների օրինակներ՝ հիմնավորումները կատարելով թեորեմ 5-ում բերված հայտանիշի միջոցով:

Օրինակ 1: Դիտարկենք ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունը և $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը, որտեղ $f(x)$-ը $x \in \mathbb{R}$ թվի ամբողջ մասն է: Ըստ սահմանման՝ եթե $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, ապա $f(x) = n$: Մասնավորապես $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$: Վերցնելով $A = [n-1, n)$՝ կունենանք $f(A) = \{n-1\}$ և $\bar{A} = [n-1, n]$: Բացի այդ $n \in \bar{A} \Rightarrow f(n) \in f(\bar{A})$: Ենթադրելով, որ f-ը անընդհատ է $n \in Z$ կետում, կստանանք՝ $f(n) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{n-1\}} = \{n-1\}$: Ստացանք $f(n) = n-1$ (հակասություն): Հետևաբար f-ը խզվող է, անընդհատ չէ $\mathbb{R}$-ի $n \in \mathbb{Z}$ կետերում:

Օրինակ 2: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում բերվում է թվային ֆունկցիայի օրինակ (Դիրիխլեի ֆունկցիան), որն անընդհատ չէ $\mathbb{R}$-ի բոլոր կետերում: Այն սահմանվում է որպես $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ արտապատկերում, որտեղ $f(x) = 0$, երբ

x-ը ռացիոնալ է՝ $x \in \mathbb{Q}$, և $f(x) = 1$, երբ x-ը իռացիոնալ է՝ $x \in \mathrm{Ir}$: Նկատենք, որ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{Ir}$, $\mathbb{Q} \cap \mathrm{Ir} = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathrm{Ir}} = \mathbb{R}$: Այդ արտապատկերումը ընդհանրացվում է հետևյալ տեսքով:

Դիցուք X-ը տոպոլոգիական տարածություն է, ընդ որում գոյություն ունեն X-ի այնպիսի A և B ենթաբազմություններ, որ $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A} = \overline{B} = X$: Ապա $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը, որտեղ $f(x) = 0$, երբ $x \in A$ և $f(x) = 1$, երբ $x \in B$, անընդհատ չէ X-ի բոլոր կետերում: Ապացուցելու համար վերցնենք որևէ $x_0 \in A$ կետ: Ունենք $f(x_0) = 0$: Մյուս կողմից, քանի որ $X = \overline{B}$, սպանում ենք՝ $x_0 \in \overline{B}$, որից հետևում է $f(x_0) \in f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} = \overline{\{1\}} = \{1\}$: Սպացանք $f(x_0) = 1$ (հակասություն): Նման ձևով ապացուցվում է, որ f-ը անընդհատ չէ նաև B-ի բոլոր կետերում:

Այժմ պատրաստ ենք ներմուծել մի կարևորագույն հասկացություն: Նկատենք, որ ցանկացած հանրահաշվական կամ երկրաչափական տեսություն կառուցելիս, որի նպատակը ուսումնասիրվող օբյեկտների (լինեն դրանք խմբեր, օղակներ, գծ. տարածություններ, երկրաչափական պատկերներ և այլն) դասակարգումն է, հստակեցվում է հետևյալ հարցը. ե՞րբ են տվյալ տեսության մեջ ուսումնասիրվող երկու օբյեկտներ համարվում նույնը կամ նույնականացվող: Օրինակ՝ խմբերի տեսությունում երկու G_1 և G_2 խմբեր համարվում են նույնը, եթե նրանք իզոմորֆ են: Դա համարժեք է նրան, որ գոյություն ունենան $\varphi_1 : G_1 \to G_2$ և $\varphi_2 : G_2 \to G_1$ հոմոմորֆիզմներ այնպես, որ $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathbb{1}_{G_1}$ և $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathbb{1}_{G_2}$: Տոպոլոգիայում հոմոմորֆիզմների դերը կատարում են հոմեոմորֆիզմները: Այդ երկու անվանումները գրեթե համահնչուն են, բայց ունեն միանգամայն տարբեր իմաստ և գործածելիս պետք է չշփոթել:

Ինչպես գիտենք (տե՛ս թեմա 1-ում), ամեն մի փոխմիարժեք $f : X \to Y$ արտապատկերման համար գոյություն ունի նրան հակադարձ $f^{-1} : Y \to X$ արտապատկերում, ընդ որում $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$ և $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$: Այս դեպքում ասում են նաև, որ f արտապատկերումը հակադարձելի է: Բերենք հակադարձելիությանը համարժեք պայման (հայտանիշ):

Որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $g : Y \to X$ արտապատկերում, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$:

Իրոք, եթե f-ը հակադարձելի է, ապա որպես $g : Y \to X$ արտապատկերում կարելի է վերցնել f^{-1}-ը: Հակառակը. դիցուք f-ի համար $\exists\, g : Y \to X$, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Ցույց տանք, որ f-ը փոխմիարժեք է: Ենթադրենք $f(x_1) = f(x_2)$: Ունենք՝ $x_1 = \mathbb{1}_X(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1))$, նման ձևով $x_2 = g(f(x_2))$, ուստի $x_1 = x_2$, այսինքն f-ը ինյեկտիվ է: Կամայական $y \in Y$ կետի համար ունենք՝ $y = \mathbb{1}_Y(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$: Նշանակելով $g(y) = x \in X$, սպանում ենք $f(x) = y$, այսինքն f-ը սյուրյեկտիվ է: Ուստի f-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է: ■

Սահմանում: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ: Ապա $f : X \to Y$ հակադարձելի արտապատկերումը կոչվում է **հոմեոմորֆիզմ**, եթե f-ը և նրա հակադարձ $f^{-1} : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ են: Ասում են նաև, որ

X տարածությունը **հոմեոմորֆ** է Y տարածությանը, եթե գոյություն ունի որևէ $f : X \to Y$ հոմեոմորֆիզմ:

Սահմանումից հետևում է.

1) Ցանկացած X տոպոլոգիական տարածության համար $\mathbb{1}_X : X \to X$ նույնական արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է: Հետևաբար ամեն մի տոպոլոգիական տարածություն հոմեոմորֆ է ինքն իրեն:

2) Եթե f-ը հոմեոմորֆիզմ է, ապա f^{-1}-ը ևս հոմեոմորֆիզմ է:
Ուստի, եթե X-ը հոմեոմորֆ է Y-ին, ապա իր հերթին Y-ը հոմեոմորֆ է X-ին:

Վերը շարադրվածից նաև հետևում է. X և Y տոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $f : X \to Y$ և $g : Y \to X$ անընդհատ արտապատկերումներ, որ $f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$:

Թեորեմ 7: Տոպոլոգիական տարածությունների հոմեոմորֆության հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է:

Ապացուցման համար մնացել է ստուգել տրանզիտիվության (փոխանցականության) հատկությունը: Դիցուք X-ը հոմեոմորֆ է Y-ին, և Y-ը հոմեոմորֆ է Z-ին: Նշանակում է գոյություն ունեն $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ հոմեոմորֆիզմներ: Պարզ է, որ $g \circ f : X \to Z$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է որպես փոխմիարժեք արտապատկերումների համադրույթ: Ուստի այն հակադարձելի է: Այն նաև անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: Բացի այդ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ արտապատկերումը Z-ից X անընդհատ է նույն հիմքով: Հետևաբար $g \circ f$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է: Ուստի X-ը հոմեոմորֆ է Z-ին: ■

Տոպոլոգիական տարածությունների համարժեքության (ըստ հոմեոմորֆության) ամեն մի դաս կոչվում է **տոպոլոգիական տիպ**: Ընդհանուր տոպոլոգիայում տվյալ տոպոլոգիական տիպը ներկայացնող բոլոր տարածությունները (միմյանց հոմեոմորֆ տարածությունները) համարվում են միատեսակ (նույնը կամ նույնականացվող):

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության որևէ հատկություն կոչվում է **տոպոլոգիական հատկություն** կամ **տոպոլոգիական ինվարիանտ**, եթե այդ հատկությամբ օժտված են միմյանց հոմեոմորֆ տվյալ պահին դիտարկվող բոլոր տոպոլոգիական տարածությունները:

Այժմ հարցին, թե ի վերջո ինչ է տոպոլոգիան, կարելի է պատասխանել այսպես: Տոպոլոգիան գիտություն է տոպոլոգիական տարածությունների (երկրաչափական պատկերների) և այդ տարածությունների անընդհատ արտապատկերումների (երկրաչափական պատկերների անընդհատ ձևափոխությունների) տոպոլոգիական հատկությունների մասին:

Վերոհիշյալից հետևում է, որ երկու տոպոլոգիական տարածություն հոմեոմորֆ չեն այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի տոպոլոգիական հատկություն, որով օժտված է այդ տարածություններից մեկը, բայց օժտված չէ մյուսը:

Ընդհանուր տոպոլոգիայի հիմնական խնդիրը կարելի է կարճ ձևակերպել այսպես. կառուցել տոպոլոգիական ինվարիանտների լրիվ համակարգ տվյալ պահին դիտարկվող բոլոր տոպոլոգիական տարածությունների համար:

Տոպոլոգիական հատկությունների օրինակներ են անջատելիության աքսիոմները, հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, սեպարաբելությունը և այլն (հիմնավորե՛ք):

Հոմեոմորֆ (ոչ հոմեոմորֆ) տարածությունների երկրաչափական բնույթի օրինակներ, ինչպես նաև տոպոլոգիական այլ ինվարիանտների օրինակներ կբերենք խնդիրների բաժնում և հաջորդ թեմաներում: Իսկ հիմա, որպես օրինակ ցույց տանք, որ սեպարաբելությունը տոպոլոգիական հատկություն է: Այդ նպատակով նախ ապացուցենք՝

Թեորեմ 8: Եթե X և Y տարածություններից X-ը սեպարաբել է և գոյություն ունի անընդհատ, սյուրյեկտիվ $f : X \to Y$ արտապատկերում, ապա Y-ը ևս սեպարաբել է:

Ապացուցում: Ըստ պայմանի՝ X-ում գոյություն ունի հաշվելի, ամենուրեք խիտ $\{x_n\}$ ենթաբազմություն: Ապացուցենք, որ $\{f(x_n)\}$ հաշվելի ենթաբազմությունը ամենուրեք խիտ է Y-ում: Դիտարկենք կամայական $V \subset Y$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $\{f(x_n)\} \cap V \neq \varnothing$ (դրանից կհետևի Y-ի սեպարաբելությունը ըստ թեմա 8-ում թեորեմ 4-ի): Քանի որ f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(V)$-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում: Այժմ X-ի սեպարաբելությունից հետևում է $\{x_n\} \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, և ուրեմն նաև $f(\{x_n\}) \cap f(f^{-1}(V)) \neq \varnothing$: Քանի որ $f(f^{-1}(V)) = V$ (հետևում է f-ի սյուրյեկտիվությունից՝ $f(X) = Y$), ուստի $f(\{x_n\}) \cap V \neq \varnothing$: ■

Հետևանք թեորեմ 8-ից: Եթե միմյանց հոմեոմորֆ երկու տարածություններից մեկը սեպարաբել է, ապա մյուսը նույնպես սեպարաբել է: Իրոք, դիցուք X-ը սեպարաբել տարածություն է և հոմեոմորֆ է Y-ին: Ուստի գոյություն ունի $f : X \to Y$ հոմեոմորֆիզմ: Հոմեոմորֆիզմի վերը բերված սահմանումից մասնավորապես հետևում է, որ f-ը անընդհատ, սյուրյեկտիվ արտապատկերում է, և ուրեմն Y-ը սեպարաբել է համաձայն թեորեմ 8-ի:

Ինչպես գիտենք, եթե $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում Y-ում բաց բոլոր ենթաբազմությունների նախակերպարները բաց ենթաբազմություններ են X-ում, ապա f-ը անընդհատ է:

Իսկ ի՞նչ կարելի է ասել այն արտապատկերումների մասին, որոնք հակառակը՝ X-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում են Y-ում բաց ենթաբազմությունների: Հետևյալ հասարակ օրինակը ցույց է տալիս, որ այդպիսի արտապատկերումը կարող է անընդհատ չլինել: Դիտարկենք $f : (X, \text{անտ.}) \to (X, \text{դիսկր.})$

արտապատկերումը, որտեղ X-ը պարունակում է մեկից ավելի կետեր, իսկ f-ը X-ի նույնական արտապատկերումն է: Պարզ է, որ f-ը անընդհատ չէ (ինչո՞ւ), չնայած որ այն X-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է Y-ում բաց ենթաբազմությունների: Այնուամենայնիվ, նշված հատկության և անընդհատության համակցումը բերում է բաց (փակ) արտապատկերումներ հասկացություններին, որոնք օգտակար են և հարմար որոշ իրավիճակներում:

Սահմանում: $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը կոչվում է **բաց արտապատկերում**, եթե X-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության կերպարը բաց ենթաբազմություն է Y-ում:

Նման ձևով սահմանվում է **փակ արտապատկերումը՝** նախորդ սահմանման մեջ ամենուրեք «բաց» բառը փոխարինելով «փակ» բառով:

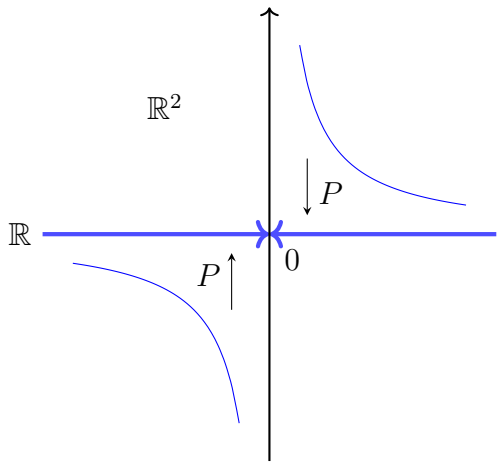
Նկատենք, որ վերը բերված օրինակում $\mathbb{1}_X : (X, \text{անտիդ.}) \to (X, \text{դիսկր.})$-ը և՛ բաց, և՛ փակ արտապատկերում է, իսկ $\mathbb{1}_X : (X, \text{դիսկր.}) \to (X, \text{անտիդ.})$ արտապատկերումը ոչ բաց և ոչ էլ փակ արտապատկերում է:

Օրինակ 3: Հետևյալ՝ $c : (\mathbb{R}, \text{սովոր.}) \to (\mathbb{R}, \text{սովոր.}),\ c(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ հաստատուն արտապատկերումը 0 կետի վրա, փակ արտապատկերում է, բայց բաց արտապատկերում չէ (հետևում է նրանից, որ $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունը փակ, բայց ոչ բաց ենթաբազմություն է):

Օրինակ 4: Ցույց տանք, որ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x_1, x_2) = x_1$ պրոյեկցիան բաց, բայց ոչ փակ արտապատկերում է: Իրոք, $\mathbb{R}^2$-ի մետրիկային տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում բոլոր անեզր շրջանները, իսկ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ի համար՝ բոլոր անեզր (a, b) ինտերվալները:

Քանի որ անեզր շրջանի պրոյեկցիան անեզր ինտերվալ է, ուստի P-ն $\mathbb{R}^2$-ում բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է $\mathbb{R}$-ում բաց ենթաբազմությունների: Բացի այդ, P-ն անընդհատ է, քանի որ $P^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \times (a, b)$ ենթաբազմությունները բաց են $\mathbb{R}^2$-ում: Այսպիսով P-ն բաց արտապատկերում է: Ցույց տանք, որ P-ն փակ արտապատկերում չէ:

Դիտարկենք $A = \left\{ \left(x; \dfrac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ ենթաբազմությունը $\mathbb{R}^2$-ում ($y = \dfrac{1}{x}$ հիպերբոլի գրաֆիկը): Այն փակ ենթաբազմություն է, քանի որ $\mathbb{R}^2 \setminus A$ լրացումը բաց է (հիմնավորե՛ք): Բայց նրա $P(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ կերպարը փակ չէ $\mathbb{R}$-ում (**ինչո՞ւ**): Ուստի՝ P-ն փակ արտապատկերում չէ: ■



Ինչպես գիտենք, եթե $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներն անընդհատ են, ապա նրանց $g \circ f : Y \to Z$ համադրույթը անընդհատ է: Քննարկենք հակառակ խնդիրը. դիցուք հայտնի է, որ $g \circ f$ համադրույթը անընդհատ է, նաև անընդհատ է f կամ g արտապատկերումներից մեկը: Կլինի՞ անընդհատ մյուսը: Հետևյալ օրինակները ցույց են տալիս, որ ընդհանուր դեպքում հարցի պատասխանը բացասական է:

Օրինակ 5: Դիտարկենք որևէ $f : X \to Y$ ոչ անընդհատ արտապատկերում և $g : Y \to \mathbb{R}$, $g(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$ հաստատուն արտապատկերումը: Պարզ է, որ $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ համադրույթը նույնպես հաստատուն արտապատկերում է, և հետևաբար այն անընդհատ է: Այսպիսով՝ $g \circ f$ –ը և g-ն անընդհատ են, բայց f-ը անընդհատ չէ:

Ընթերցողին առաջարկում ենք բերել նման օրինակ, երբ անընդհատ են $f : X \to Y$ և $f \circ g : X \to Z$ արտապատկերումները, բայց անընդհատ չէ $g : Y \to Z$ արտապատկերումը:

Հետևյալ երկու հատուկ դեպքերում f, g արտապատկերումներից մեկի և նրանց $g \circ f$ համադրույթի անընդհատությունից հետևում է նաև մյուսի անընդհատությունը:

Թեորեմ 9: Ունենք $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ արտապատկերումներ, ընդ որում $g \circ f$-ը անընդհատ է.

ա) եթե g-ն ինյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա f-ը անընդհատ է,

բ) եթե f-ը սյուրյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա g-ն անընդհատ է:

Ապացուցենք ա)-ն: Դիցուք $V \subset Y$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում, ցույց տանք, որ $f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում: Ըստ պայմանի $g(V)$-ն բաց է Z-ում: Հետևաբար $(g \circ f)^{-1}(g(V))$-ն բաց է X-ում: Ունենք՝ $(g \circ f)^{-1}(g(V)) = f^{-1}\big(g^{-1}(g(V))\big) = f^{-1}(V)$ $\Rightarrow f^{-1}(V)$-ն բաց է X-ում $\Rightarrow f$-ը անընդհատ է: ■

Նման ձևով ապացուցվում է բ)-ն (ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին):

Բերենք նաև հոմեոմորֆիզմի հայտանիշ բաց (փակ) արտապատկերումների տերմիններով:

Թեորեմ 10: Տոպոլոգիական տարածությունների որևէ $f : X \to Y$ արտապատկերում հոմեոմորֆիզմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը բաց (կամ փակ) բիյեկտիվ արտապատկերում է:

Ապացուցում: Դիցուք f-ը հոմեոմորֆիզմ է: Նշանակում է f-ը անընդհատ է, փոխմիարժեք է և նրա $g : Y \to X$ հակադարձ արտապատկերումը նույնպես անընդհատ է: Եթե U-ն որևէ բաց ենթաբազմություն է X-ում, ապա f-ի բիյեկտիվությունից և g-ի անընդհատությունից հետևում է, որ $f(U) = g^{-1}(U)$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում, ուստի f-ը բաց արտապատկերում է: f-ի բիյեկտիվությունից հետևում է, որ f-ը նաև փակ արտապատկերում է:

Այժմ հակառակը. դիցուք f-ը բաց, բիյեկտիվ արտապատկերում է: Նշանակում է f-ը անընդհատ է, և գոյություն ունի նրա հակադարձ $g : Y \to X$ արտապատկերում: Մնում է ցույց տալ, որ g արտապատկերումը անընդհատ է: Եթե U-ն որևէ բաց ենթաբազմություն է X-ում, ապա $g^{-1}(U) = f(U)$ ենթաբազմությունը բաց է Y-ում ըստ պայմանի: Ուստի g-ն անընդհատ է ըստ թեորեմ 3-ի: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 9-ի վերաբերյալ

9.1. Դիցուք ունենք կամայական $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. ամեն մի $x_0 \in X$ կետի ցանկացած U շրջակայքի $f(U)$ կերպարը շրջակայք է $f(x_0) \in Y$ կետի համար:

Ցուցում. Դիտարկեք որևէ $f : X \to Y$ հաստատուն արտապատկերում, որտեղ Y-ը օժտված է անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով և պարունակում է մեկից ավելի թվով տարրեր:

9.2. Դիցուք X տոպոլոգիական տարածությունը օժտված է հետևյալ հատկությամբ. ցանկացած Y տոպոլոգիական տարածության և ցանկացած $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում f-ը անընդհատ է: Ապացուցեք, որ X-ի տոպոլոգիան դիսկրետն է:

Ցուցում. Որպես Y վերցրեք X բազմությունը դիսկրետ տոպոլոգիայով:

9.3. Դիցուք Y տոպոլոգիական տարածությունը օժտված է հետևյալ հատկությամբ. ցանկացած X տոպոլոգիական տարածության և ցանկացած $f : X \to Y$ արտապատկերման դեպքում f-ը անընդհատ է: Ապացուցեք, որ Y-ի տոպոլոգիան անտիդիսկրետն է:

Յուցում. Որպես X վերցրեք Y բազմությունը անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով:

9.4. Դիցուք $f : X \to Y$ արտապատկերումն այնպիսին է, որ X-ում բաց ցանկացած ենթաբազմության կերպարը բաց ենթաբազմություն է Y-ում: Ապացուցեք, որ այդպիսի արտապատկերումը կարող է անընդհատ չլինել:

Յուցում. Դիտարկեք որևէ X բազմություն τ և σ տոպոլոգիաներով, որտեղ $\tau \subset \sigma$, իսկ որպես f վերցրեք $\mathbb{1}_X$ նույնական արտապատկերումը:

9.5. Բերեք X, Y տոպոլոգիական տարածությունների և $f : X \to Y$ բիյեկտիվ անընդհատ արտապատկերման օրինակ, որ f^{-1} հակադարձ արտապատկերումը չլինի անընդհատ:

Յուցում. Օգտվեք նախորդ խնդրի ցուցումից:

9.6. Դիցուք $\mathbb{R}^2$ էվկլիդեսյան հարթության ինչ-որ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ արտապատկերում բավարարում է $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) = r \cdot \rho(x_1, x_2)$ պայմանին $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ կետերի դեպքում, որտեղ r-ը սևեռված իրական դրական թիվ է: Ապացուցեք, որ f-ը անընդհատ արտապատկերում է:

9.7. Ունենք $\mathbb{R}$ թվային ուղղի $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ անընդհատ արտապատկերում: Հայտնի է, որ $g(x)$-ը ամբողջ թիվ է ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ կետի դեպքում: Ապացուցեք, որ g-ն հաստատուն արտապատկերում է:

9.8. Ունենք $f : X \to \mathbb{R}$ անընդհատ արտապատկերում, որտեղ X-ը կամայական տոպոլոգիական տարածություն է, և $a \in \mathbb{R}$ սևեռված թիվ: Ապացուցեք, որ $g : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումը՝ սահմանված $g(x) = af(x),\ x \in X$ բանաձևով, նույնպես անընդհատ է:

Յուցում. Ներկայացրեք g-ն որպես f և $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(r) = ar,\ r \in \mathbb{R}$ արտապատկերումների համադրույթ:

9.9. Ունենք X բազմության որևէ երկու τ և σ տոպոլոգիա: Ապացուցեք. $X \to X$ նույնական արտապատկերումը (X, τ) և (X, σ) տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ τ-ն և σ-ն նույնն են:

9.10. Դիցուք $f : X \to Y$ արտապատկերումը (X, τ) և (Y, σ) տոպոլոգիական տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է: Ապացուցեք. եթե որևէ $U \subset X$ ենթաբազմություն շրջակայք է որևէ $x_0 \in X$ կետի համար, ապա $f(U) \subset Y$ ենթաբազմությունը շրջակայք է $f(x_0)$ կետի համար:

9.11. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. վերջավոր թվով տարրերից կազմված տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում տարրերի քանակությունը տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

9.12. Ընտրեք անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմներից որևէ մեկը և ապացուցեք, որ այն տոպոլոգիական հատկություն է:

9.13. Բերեք տոպոլոգիական տարածությունների որևէ $f : X \to Y$ փակ, բայց ոչ բաց արտապատկերման օրինակ:

Յուցում. Դիտարկեք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը և $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը սովորական (էվկլիդյան) մետրիկային տոպոլոգիաներով: Ապացուցեք, որ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, 0),\ x \in \mathbb{R}$ արտապատկերումը փակ, բայց ոչ բաց արտապատկերում է:

9.14. Ունենք $f : X \to Y$ և $g : Y \to Z$ արտապատկերումներ, ընդ որում $g \circ f : X \to Z$ համադրույթը անընդհատ է: Ապացուցեք. եթե f-ը սյուրյեկտիվ բաց (կամ փակ) արտապատկերում է, ապա g-ն անընդհատ արտապատկերում է:

9.15. Ճի՞շտ է արդյոք, որ թվային ուղղի $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ նույնական արտապատկերումը որոշում է տոպոլոգիական տարածությունների $(\mathbb{R}, \hookleftarrow) \to (\mathbb{R}, \mapsto)$ հոմեոմորֆիզմ, որտեղ $\hookleftarrow$ և $\mapsto$ սիմվոլները թվային ուղղի ձախից կիսաբաց և աջից կիսաբաց ինտերվալների տոպոլոգիաներն են:

9.16. Ապացուցեք. $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}, \hookleftarrow)$ տոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ են:

Յուցում. Դիտարկեք $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x$ արտապատկերումը և օգտվեք թեորեմ 10-ից:

9.17. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $(\mathbb{R}, \mapsto)$ և $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությունները հոմեոմորֆ են:

Յուցում. Ապացուցեք, որ $[a, b)$ տեսքի ենթաբազմությունները միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություններ են $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում, և օգտվեք թեորեմ 10-ից:

Թեմա 10

Հաջորդականությունների զուգամիտությունը տոպոլոգիական տարածություններում: Տարածության տոպոլոգիայի նկարագրումը զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով: Կապը արտապատկերման անընդհատության և հաջորդականությունների զուգամիտության միջև:

Մաթեմատիկական անալիզի հիմնական շատ հասկացություններ սերտորեն կապված են թվային հաջորդականություն, ենթահաջորդականություն, թվային հաջորդականության սահման հասկացությունների հետ: Սկզբունքորեն հաջորդականությունների զուգամիտության տեսություն կարելի է զարգացնել ոչ միայն թվային ուղղի վրա, և ոչ միայն մետրիկային, այլև կամայական տոպոլոգիական տարածությունում:

Եթե ունենք որևէ X բազմություն, ապա **հաջորդականություն X-ում** կոչվում է նրա տարրերի (բնական թվերով համարակալված) ամեն մի $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ենթաբազմություն:

Համարժեք սահմանում. հաջորդականություն X-ում կոչվում է ցանկացած $f : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերում: Իրոք, ամեն մի $n \in \mathbb{N}$ թվի համար նշանակելով $f(n) \in X$ կետը x_n-ով՝ կստանանք $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ հաջորդականություն նախկին իմաստով, և հակառակը:

Երբեմն հաջորդականության նշանակման համար կօգտագործենք համառոտ գրառում՝ $\{x_n\}$:

Դիցուք ունենք երկու՝ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականություններ X բազմությունում, այսինքն $f : \mathbb{N} \to X$ և $g : \mathbb{N} \to X$ արտապատկերումներ, և $x_n = f(n)$, $y_n = g(n)$, $n \in \mathbb{Z}$:

Սահմանում: Ասում են, որ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը $\{x_n\}$ **հաջորդականության ենթահաջորդականություն** է, եթե գոյություն ունի $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ արտապատկերում, որ $h(i) > h(j)$ ցանկացած $i > j$ դեպքում և $g = f \circ h$:

Սահմանումից հետևում է. $y_n = g(n) = (f \circ h)(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$, այսինքն $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության յուրաքանչյուր y_n անդամ $\{x_n\}$ հաջորդականության որևէ անդամ է:

Սահմանում: X բազմության $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է **ստացիոնար հաջորդականություն**, եթե ինչ-որ $m \in \mathbb{N}$ համարից սկսած նրա բոլոր անդամները նույնն են՝ $x_m = x_{m+1} = \cdots$

Սահմանում: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականություն: Ասում են, որ այն զուգամիտում է $a \in X$ կետին (գրառվում է՝ $\lim \{x_n\} = a$), եթե a կետի ցանկացած U շրջակայքի համար գոյություն ունի

$n_0 \in \mathbb{N}$ թիվ, որ $x_n \in U$ ցանկացած $n > n_0$ թվի դեպքում: Այս դեպքում ինքը՝ հաջորդականությունը կոչվում է **զուգամետ հաջորդականություն**, իսկ a-ն կոչվում է $\{x_n\}$ **հաջորդականության սահման**:

Նկատենք, որ հաջորդականությունը կարող է զուգամետ լինել կամ չլինել (սահման ունենալ, կամ չունենալ), ինչպես նաև՝ զուգամետ հաջորդականության սահմանը կարող է միակը չլինել:

Օրինակ 1: ա) Ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում ամեն մի ստացիոնար հաջորդականություն զուգամետ հաջորդականություն է (հիմնավորե՛ք):

բ) $(X,$ դիսկր.$)$ տարածությունում զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները, ընդ որում սահմանը միակն է (հիմնավորե՛ք):

գ) $(X,$ անտիդիսկր.$)$-ում ցանկացած հաջորդականություն զուգամիտում է X-ի ցանկացած կետի (հիմնավորե՛ք):

դ) Դիտարկենք որևէ $(X,$ հաշվ. լր.$)$ տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Այստեղ ևս զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Իրոք, ենթադրենք $\{x_n\}$-ը ստացիոնար չէ և գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$: Սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է հաշվելի անվերջ թվով a կետից տարբեր անդամներ: Դիտարկենք a կետի $U = X \setminus \{x_n \mid x_n \neq a,\ n \in \mathbb{N}\}$ բաց շրջակայքը: Ըստ մեր ենթադրության՝ գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in U$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $x_n = a$ բոլոր $n > n_0$ համարների դեպքում (ինչո՞ւ): Ստացանք հակասություն:

Թվարկենք զուգամիտության մի քանի պարզ հատկություններ:

1. Ցանկացած $\{x_n\} \subset X$ զուգամետ հաջորդականության ամեն մի $\{y_n\}$ ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամետ հաջորդականություն է և ունի նույն սահմանը (սահմանները), ինչը որ ունի $\{x_n\}$-ը (հիմնավորե՛ք):

2. Եթե $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունը ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահման, ապա $a \in \overline{\{x_n\}}$ (հիմնավորե՛ք):

3. Ցանկացած T_2-տարածությունում ամեն մի զուգամետ հաջորդականություն ունի միակ սահման:

Իրոք, ենթադրենք որևէ X T_2-տարածությունում ինչ-որ $\{x_n\}$ հաջորդականություն ունի $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$, $a \neq b$ սահմաններ: Դիտարկենք a և b կետերի չհատվող որևէ U և V շրջակայքեր (**շարունակեք ապացուցումը**):

Թեորեմ 1: Կամայական X մետրիկային տարածության ամեն մի $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականության և $a \in X$ կետի համար հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.

ա) գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = a$ սահման,

բ) ցանկացած $\mathcal{D}(a, r)$ բաց գնդի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a, r)$ երբ $n > n_0$:

Ապացուցում: Անցումը ա)-ից բ)-ին ակնհայտ է: Ցույց տանք բ) $\Rightarrow$ ա) անցումը: Դիցուք U-ն a կետի որևէ շրջակայք է: Ըստ կետի շրջակայքի սահմանման՝ գոյություն ունի a կետի V բաց շրջակայք, որ $a \in V \subset U$: Համաձայն նախորդ թեմայի թեորեմ 3-ի՝ գոյություն ունի a կենտրոնով $\mathcal{D}(a,r)$ բաց գունդ, որ $\mathcal{D}(a,r) \subset V$: Ըստ պայմանի՝ գոյություն ունի n_0 թիվ, որ $x_n \in \mathcal{D}(a,r)$, երբ $n > n_0$: Հետևաբար $x_n \in U$, երբ $n > n_0$, ուրեմն $\lim\{x_n\} = a$: ■

Քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպես են միմյանց հետ կապված տարածության տոպոլոգիան (այսինքն բաց և փակ ենթաբազմությունները) և տվյալ տարածությունում զուգամետ հաջորդականությունները: Սկսենք բաց ենթաբազմություններից:

Թեորեմ 2: Դիցուք X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին: Ապա X-ի որևէ A ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ում ամեն մի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է A-ի որևէ կետի, ընկած է A-ի մեջ սկսած ինչ-որ անդամից:

Նախ ապացուցենք մի օժանդակ պնդում:

Լեմմա: Եթե X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին, ապա նրա ամեն մի x կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի այնպիսի $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա, որ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$ ցանկացած i բնական թվի դեպքում:

Ապացուցում: Դիտարկենք x կետի շրջակայքերի որևէ $\{V_i(x)\}$ հաշվելի բազա և կազմենք x-ի շրջակայքերի նոր՝ $\{U_i(x)\}$ հաշվելի բազա, սահմանելով $U_1(x) = V_1(x)$ և $U_i(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k(x)$ ամեն մի i ինդեքսի համար: Պարզ է, որ միշտ $U_{i+1}(x) \subset U_i(x)$: ■

Թեորեմ 2-ի ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը անմիջապես հետևվում է հաջորդականության զուգամիտության սահմանումից: Ցույց տանք պայմանի բավարարությունը հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք որևէ A ենթաբազմության համար նշված պայմանը տեղի ունի, բայց A-ն բաց չէ: Նշանակում է՝ գոյություն ունի $s \in A$ կետ, որը ներքին կետ չէ A-ի համար: Ըստ լեմմայի՝ գոյություն ունի s կետի շրջակայքերի $\{U_i(s);\, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ հաշվելի բազա, որ $U_i(s) \supset U_{i+1}(s)$ ամեն մի i, $i+1 \in I$ դեպքում: Քանի որ $s \notin \operatorname{int} A$, ուստի ամեն մի $U_n(s)$-ում կարող ենք ընտրել x_n կետ, որ $x_n \notin A$: Պարզ է, որ ստացված $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է s կետին, և ըստ թեորեմի պայմանի՝ նրա անդամները ինչ-որ համարից սկսած պետք է պատկանեն A-ին: Բայց դա հակասում է նրան, որ $\{x_n\} \cap A = \varnothing$: ■

Այժմ քննարկենք փակ ենթաբազմությունների դեպքը: Այդ նպատակով վերադառնանք վերը բերված հատկություն 2-ին՝ եթե գոյություն ունի $\lim\{x_n\} = s$ սահման, ապա $s \in \overline{\{x_n\}}$:

Այս հատկությունը ճիշտ է նաև հետևյալ ավելի ընդհանուր տեսքով. դիցուք ունենք $A \subset X$ որևէ ենթաբազմություն և $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն: Եթե գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման, ապա $s \in \bar{A}$: Այսինքն A ենթաբազմության մեջ պարունակվող ցանկացած զուգամետ հաջորդականության ամեն մի սահման հպման կետ է A-ի համար (պարզունակ, սահմանումների մակարդակով կատարվող **ապացույցը թողնվում է ընթերցողին**):

Թեորեմ 3: Դիցուք X տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին: Ապա X-ի կամայական ոչ դատարկ A ենթաբազմություն փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A ենթաբազմությունում պարունակվող ամեն մի զուգամետ հաջորդականության $\forall$ սահման հպման կետ է A-ի համար:

Պայմանի անհրաժեշտության մասին արդեն խոսել ենք: Իսկ բավարարությունը ապացուցվում է ինչպես թեորեմ 2-ում՝ դարձյալ լեմմայի օգնությամբ (**մանրամասները թողնում ենք ընթերցողին**):

Հաջորդ հիմնական հարցը հետևյալն է՝ կարելի՞ է արդյոք տարածության տոպոլոգիան նկարագրել զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով: Նախ հստակեցնենք հարցադրումը:

Դիցուք ունենք ինչ-որ X բազմություն. դիտարկենք մի M բազմություն, որի տարրերը $(\{x_n\}, s)$ տեսքի որոշ զույգեր են, որտեղ $\{x_n\}$-ը որևէ հաջորդականություն է X-ում, իսկ s-ը X-ի որևէ կետ է: Պահանջենք, որ M-ը բավարարի հետևյալ երկու պայմաններին՝

ա) Եթե $(\{x_n\}, s) \in M$, ապա $\{x_n\}$-ի ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության դեպքում նաև $(\{y_n\}, s) \in M$:

բ) ցանկացած $\{x_n\}$ ստացիոնար հաջորդականության դեպքում, եթե ինչ-որ անդամից սկսած $x_m = x_{m+1} = \cdots = s$, ապա $(\{x_n\}, s) \in M$:

Հարց 1: Տվյալ X և M բազմությունների դեպքում գոյություն ունի՞ արդյոք միակ այնպիսի τ տոպոլոգիա X-ում, որ $(\{x_n\}, s) \in M$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\lim x_n = s$ սահման (X, τ) տարածությունում:

Այս հարցի դրական պատասխանի դեպքում կասենք, որ X-ի τ տոպոլոգիան որոշվում է M բազմությունով:

Հարց 2 (հարց 1-ի հակառակը)**:** Ճի՞շտ է արդյոք, որ X բազմության կամայական τ տոպոլոգիայի համար գոյություն ունի վերը նկարագրված $(\{x_n\}, s)$ զույգերի M բազմություն այնպես, որ M-ով որոշվող X-ի տոպոլոգիան համընկնում է τ-ի հետ:

1 և 2 հարցերի դրական պատասխանների դեպքում կունենանք, որ տվյալ X բազմության բոլոր տոպոլոգիաները կարող են լիովին նկարագրվել X-ում զուգամետ հաջորդականությունների տերմիններով:

Այժմ քննարկենք այդ հարցերը փակման գործողության տեսանկյունից: Դիցուք A-ն X տարածության սևեռված ենթաբազմություն է: Նշանակենք $\widetilde{A}$-ով բոլոր A-ի

մեջ պարունակվող զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմությունը: Պարզ է, որ $\widetilde{A} \subset \overline{A}$: Ենթադրենք, որ իր հերթին $\overline{A} \subset \widetilde{A}$, և հետևաբար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Սա նշանակում է, որ $\overline{A}$ փակումը համընկնում է A ենթաբազմությունում պարունակվող բոլոր զուգամետ հաջորդականությունների սահմանների բազմության հետ: Եթե ասվածը տեղի ունենա X-ի ցանկացած A ենթաբազմության դեպքում, ապա X տարածությունում ենթաբազմությունների փակման գործողությունը, ուստի և X-ի տոպոլոգիան լիովին կորոշվի X-ում զուգամետ հաջորդականությունների և նրանց սահմանների միջոցով (ևս մի հնարավորություն բազմության վրա տոպոլոգիա սահմանելու համար): Այն, որ դա հնարավոր է որոշ տարածությունների դեպքում, նախապես ցույց տանք հասարակ օրինակով:

Վերցնենք որևէ X բազմություն և նրանում զուգամետ հաջորդականություններ հայտարարենք միայն և միայն ստացիոնար հաջորդականությունները: Եթե $\{x_n\}$-ը մի այդպիսի հաջորդականություն է՝ $x_m = x_{m+1} = \cdots = s$, որոշ m համարից սկսած, ապա սահմանենք $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $\forall\, A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում $\widetilde{A} = A$: Արդյունքում ստանում ենք $A \mapsto \operatorname{cl} A$ գործողություն X-ում, որտեղ $\operatorname{cl} A = \widetilde{A}$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ այն Կուրատովսկու փակման գործողություն է (բավարարվում են K1-K4 աքսիոմները), և ստացված տոպոլոգիայում $\overline{A} = \widetilde{A} = A$: Նկատենք, որ ստացվածը X-ի դիսկրետ տոպոլոգիան է (**հիմնավորե՛ք**):

Հարց 3: Տեղի ունի՞ արդյոք նույնը ցանկացած տոպոլոգիական տարածության դեպքում: Պատասխանը բացասական է, ցույց տանք օրինակով:

Օրինակ 2: Դիտարկենք որևէ (X, հաշվ. լր.) տարածություն, որտեղ X-ը ոչ հաշվելի բազմություն է: Սևեռենք որևէ $a \in X$ կետ և դիտարկենք X-ի $A = X \setminus \{a\}$ ենթաբազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ $a \in \overline{A}$: Ցույց տանք, որ գոյություն չունի $\{x_n\} \subset A$ զուգամետ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն որ $\lim\{x_n\} = a$: Պարզ է, որ $U = X \setminus \{x_n\}$ ենթաբազմությունը a կետի բաց շրջակայք է: Բայց $U \cap \{x_n\} = \varnothing$, ինչը հակասում է $\lim\{x_n\} = a$ պայմանին:

Այս «անհաջողության» պատճառն այն է, որ հաջորդականությունները հաշվելի բազմություններ են, ինչը թույլ չի տալիս ընդհանուր (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում հայտնաբերել ենթաբազմության բոլոր հպման կետերը հաջորդականությունների սահմանների տեսքով:

Այնուամենայնիվ ընդհանուր տոպոլոգիայում զարգացվում է զուգամիտության տեսություն այնպես, որ ցանկացած տոպոլոգիա լիովին նկարագրվում է զուգամիտության տերմիններով: Արվում է դա երկու համարժեք եղանակով, ընդհանրացնելով հաջորդականություն և հաջորդականության սահման հասկացությունները: Մի դեպքում ներմուծվում են **ֆիլտր** և **զուգամետ ֆիլտր** հասկացություններ, իսկ մյուս դեպքում՝ **ուղղվածություն** և **զուգամետ ուղղվածություն** հասկացություններ (մանրամասնությունները տե՛ս [9] գրքում):

Դիտողություն: Որոշ դասի տարածությունների համար վերոհիշյալ հարց 3-ի պատասխանը դրական է նաև սովորական հաջորդականությունների դեպքում: Իրոք, տեղի ունի.

Թեորեմ 4: Եթե X տոպոլոգիական տարածությունը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին (մասնավորապես՝ մետրիկային տարածություն է), ապա ցանկացած $A \subset X$ ենթաբազմության համար $\widetilde{A} = \overline{A}$:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\overline{A} \subset \widetilde{A}$: Դիցուք $a \in \overline{A}$, ցույց տանք, որ գոյություն ունի $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ըստ լեմմայի՝ a կետի համար գոյություն ունի շրջակայքերի հաշվելի $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ բազա, որ $U_{n+1} \subset U_n,\ n \in \mathbb{N}$:

Քանի որ $U_n \cap A \neq \varnothing$, կարող ենք յուրաքանչյուր U_n-ում ընտրել որևէ $x_n \in A$ կետ: Ստանում ենք $\{x_n\} \subset A$ հաջորդականություն, և ակնհայտ է, որ $\lim\{x_n\} = a$: Ուստի $a \in \widetilde{A}$: ■

Այժմ քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպե՞ս են իրար հետ կապված անընդհատ արտապատկերում և զուգամետ հաջորդականություն հասկացությունները:

Դիցուք ունենք X և Y բազմություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ամեն մի $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականության կարող ենք համադրել $\{y_n\} \subset Y$ հաջորդականություն, որտեղ $y_n = f(x_n)$: Այս $\{f(x_n)\}$ հաջորդականությունը կոչվում է $\{x_n\}$ **հաջորդականության կերպար** f արտապատկերման դեպքում:

Այսուհետև պարզության համար $\lim\{x_n\}$ և $\lim\{f(x_n)\}$ նշանակումների փոխարեն կօգտագործենք $\lim x_n$ և $\lim f(x_n)$ գրառումները:

Թեորեմ 5: Եթե $f : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է $a \in X$ կետում, իսկ $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունը զուգամիտում է a կետին՝ $\lim x_n = a$, ապա նրա կերպար $\{f(x_n)\} \subset Y$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $f(a) \in Y$ կետին՝ $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$:

Ապացուցում: Վերցնենք $f(a)$ կետի որևէ V շրջակայք: a կետում f-ի անընդհատությունից հետևում է՝ գոյություն ունի a կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Այն բանից, որ $\lim x_n = a$, հետևում է՝ գոյություն ունի n_0 թիվ, որ $x_n \in U$, երբ $n > n_0$: Ուստի $f(x_n) \in V$, երբ $n > n_0$, որից էլ հետևում է՝ $\lim f(x_n) = f(a)$: ■

Հակառակ պնդումը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ. գոյություն ունեն X և Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում, որ X-ում զուգամետ ամեն մի $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{f(x_n)\}$ կերպարը զուգամետ է Y-ում և $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, բայց f-ը անընդհատ չէ:

Օրինակ 3: Դիցուք X-ը ոչ հաշվելի որևէ բազմություն է, դիտարկենք $(X, \text{հաշվ. լր.})$ և $(X, \text{դիսկր.})$ տարածությունները: Ինչպես գիտենք, այս տարածություններում զուգամիտում են միայն ստացիոնար հաջորդականությունները (տե՛ս օրինակ 1-ը): Դիտարկենք $f : (X, \text{հաշվ. լր.}) \to (X, \text{դիսկր.})$ արտապատկերումը, որտեղ f-ը X-ի $\mathbb{1}_X$ նույնական արտապատկերումն է:

Պարզ է, որ եթե գոյություն ունի $\lim x_n = a$ սահման, ապա գոյություն ունի նաև $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$ սահման: Ցույց տանք, որ f-ը անընդհատ չէ X-ի և ոչ մի կետում: Իրոք, դիտարկելով $f(x_0) = x_0$ կետի $V = \{x_0\}$ շրջակայքը (X, դիսկր.)-ում՝ տեսնում ենք, որ գոյություն ունի x_0 կետը պարունակող միակ՝ $U = \{x_0\}$ ենթաբազմություն, որ $f(U) \subset V$: Բայց այդ U-ն բաց չէ (X, հաշվ. լր.)-ում, քանի որ $X \setminus U = X \setminus \{x_0\}$ ենթաբազմությունը ոչ հաշվելի բազմություն է (հակասություն):

Այնուամենայնիվ, որոշ դեպքերում արտապատկերման անընդհատությունը կարող է նկարագրվել հաջորդականությունների զուգամիտության տերմիններով:

Թեորեմ 6: Դիցուք X, Y տոպոլոգիական տարածությունները և $f : X \to Y$ արտապատկերումն այնպիսին են, որ

ա) X-ում զուգամետ ամեն մի $\{x_n\}$ հաջորդականության համար $\{f(x_n)\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է Y-ում և $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$,

բ) X-ը բավարարում է հաշվելիության առաջին աքսիոմին:

Ապա f-ը անընդհատ արտապատկերում է:

Ապացուցում: Ենթադրենք f-ը անընդհատ չէ X-ի ինչ-որ a կետում: Այդ կետի համար դիտարկենք շրջակայքերի որևէ $\{U_n\}$ հաշվելի բազա: Կարող ենք համարել, որ $U_{n+1} \subset U_n$ (տե՛ս լեմման): Քանի որ f-ը անընդհատ չէ a կետում, գոյություն ունի $f(a)$ կետի V շրջակայք, որի համար գոյություն չունի a կետի U շրջակայք, որ $f(U) \subset V$: Մասնավորապես սա նշանակում է, որ ամեն մի U_n-ում գոյություն ունի $x_n \in U_n$ կետ, որ $f(x_n) \notin V$: Պարզ է, որ ստացված $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի $\lim x_n = a$ սահման: Հետևաբար, համաձայն թեորեմի առաջին պայմանի՝ գոյություն ունի նաև $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$ սահման: Բայց $\{f(x_n)\}$ հաջորդականության բոլոր կետերը դուրս են $f(a)$-ի V շրջակայքից (հակասություն): ■

Դիտողություն: Քանի որ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան մետրիկային տարածությունները, մասնավորապես $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը և $\mathbb{R}^2$ հարթությունը բավարարում են հաշվելիության առաջին աքսիոմին, ուստի թեորեմ 6-ի շնորհիվ հնարավոր է դառնում մաթեմատիկական անալիզի դասընթացներում ֆունկցիաների անընդհատության հետ կապված շատ ապացուցումներ փոխադրել հաջորդականությունների զուգամիտության լեզվով կատարվող հիմնավորումների:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 10-ի վերաբերյալ

10.1. Նկարագրեք բոլոր զուգամետ հաջորդականությունները կապակցված կետազույգ տարածությունում՝ $X = \{x_1, x_2\}$, $\tau = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$:

10.2. Դիցուք X-ը անվերջ բազմություն է վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայով: Ապացուցեք, որ ցանկացած $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականություն՝ կազմված X-ի տարբեր կետերից, զուգամիտում է X-ի ցանկացած կետի:

10.3. Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում ապացուցվում է՝ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$-ում մոնոտոն աճող, վերևից սահմանափակ ամեն մի հաջորդականություն ունի միակ սահման: Ապացուցեք, որ այսպիսի հաջորդականությունները զուգամետ չեն $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում:

10.4. Դիտարկենք որևէ հաշվելի $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ բազմություն: Սահմանեք X-ի համար այնպիսի τ տոպոլոգիա, որ (X, τ) տարածությունում բոլոր զուգամետ հաջորդականություններն ունենան միևնույն սահմանը:

Յուցում. Քննարկեք $\{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \dots\}$ ընտանիքը:

10.5. Դիտարկենք որևէ $(X, \text{հաշվ. լր.})$ տարածություն, և դիցուք A-ն X-ի որևէ ոչ հաշվելի ենթաբազմություն է: Ապացուցեք՝

ա) ցանկացած $b \in X \setminus A$ կետ հպման կետ է A-ի համար,

բ) գոյություն չունի $\{a_n\} \subset A$ հաջորդականություն, որ $\lim a_n = b$:

10.6. Ապացուցեք. եթե $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականությունն ունի $\lim x_n = a$ սահման, ապա a-ն պատկանում է $\overline{\{x_n\}}$ փակմանը:

10.7. Ապացուցեք. ցանկացած $\{x_n\} \subset X$ զուգամետ հաջորդականության ամեն մի $\{y_n\}$ ենթահաջորդականություն ունի նույն սահմանը (սահմանները), ինչը որ ունի $\{x_n\}$-ը:

10.8. Հաջորդականության ենթահաջորդականություն սահմանելիս պահանջեցինք $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ արտապատկերման գոյություն, որը պետք է բավարարի $h(i) > h(j)$ պայմանին ամեն անգամ, երբ $i > j$:

Հարց: Ինչպիսի՞ էֆեկտներ կարող են առաջանալ, եթե սահմանման մեջ վերոհիշյալ պայմանը փոխարինենք $h(i) \geq h(j)$, երբ $i > j$ ավելի թույլ պայմանով:

Հաջորդ երեք խնդիրներում հստակեցվում է հարցադրումը:

10.9. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ցանկացած սպացիոնար հաջորդականության ամեն մի ենթահաջորդականություն նույնպես սպացիոնար հաջորդականություն է:

10.10. Կմնա՞ արդյոք ճիշտ պնդումը. $\{x_n\} \subset X$ զուգամետ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն

ա) նույնպես զուգամետ է,

բ) ունի նույն սահմանները, ինչը որ ունի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը:

10.11. Նշանակենք $\{\lim x_n\}$ սիմվոլով $\{x_n\} \subset X$ հաջորդականության բոլոր սահմանների բազմությունը (այն կարող է լինել նաև $\varnothing$ բազմություն): Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. $\{x_n\}$ հաջորդականության ցանկացած $\{y_n\}$ ենթահաջորդականության դեպքում տեղի ունի $\{\lim y_n\} \subset \overline{\{x_n\}}$ ներդրում:

Թեմա 11

Կապը արտապատկերման անընդհատության և հաջորդականությունների զուգամիտության միջև: Հոմեոմորֆիզմ, հոմեոմորֆ տարածություններ, տոպոլոգիական հատկություն: Բաց (փակ) արտապատկերումներ, հոմեոմորֆիզմի հայտանիշ բաց (փակ) արտապատկերումների տերմիններով:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 11-ի վերաբերյալ

11.1. Ապացուցեք, որ ցանկացած $f : [a, b] \to [a, b]$ անընդհատ արտապատկերում ունի անշարժ կետ (այսինքն $f(x) = x$ գոնե մի $x \in [a, b]$ կետի դեպքում):

Ցուցում. Դիտարկեք $g(x) = f(x) - x$ արտապատկերումը:

11.2. Կարելի՞ է պնդել, որ ցանկացած անընդհատ ա) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ տեսքի, բ) $[a, b) \to [a, b)$ տեսքի արտապատկերում ունի անշարժ կետ: Պատասխանը հիմնավորեք դատողություններով կամ օրինակներով:

11.3. Դիցուք ունենք երկու անընդհատ $f, g : X \to Y$ արտապատկերումներ, որտեղ Y-ը հաուսդորֆյան տարածություն է: Դիտարկենք $F \subset X$ ենթաբազմությունը կազմված այն բոլոր x կետերից, որ $f(x) = g(x)$: Ապացուցեք, որ F-ը փակ ենթաբազմություն է X-ում:

Ցուցում. Ցույց տվեք, որ F-ը պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը:

11.4. Դիցուք $f, g : X \to Y$ արտապատկերումները, Y տարածությունը և $F \subset X$ ենթաբազմությունը այնպիսին են, ինչպես նախորդ խնդրում: Ապացուցեք. եթե F-ը նաև ամենուրեք խիտ է X-ում, ապա f և g արտապատկերումները համընկնում են X-ի բոլոր կետերում:

Թեմա 12

Ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան և նրա հատկությունները: Տոպոլոգիական տարածության ենթատարածության հասկացությունը, օրինակներ: Անվերջ չափականության մետրիկային տարածություններ:

Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $A \subset X$ ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Այդ ենթաբազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության, որի τ_A տոպոլոգիան կազմվում է A-ի այն բոլոր ենթաբազմություններով, որոնք ստացվում են A-ի հետ X-ում բաց բոլոր U_i ենթաբազմությունների հատումներից՝ $\tau_A = \{U_i \cap A \mid U_i \in \tau\}$:

Այսպիսով, **ըստ սահմանման**, A բազմությունում բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ում բաց բազմությունների հատումները A-ի հետ:

Ցույց տանք, որ τ_A-ի համար տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները բավարարվում են: Իրոք,

1. $\varnothing \cap A = \varnothing,\ X \cap A = A$, ուստի $\varnothing$-ը և A-ն պատկանում են τ_A-ին:
2. Քանի որ $\bigcup\limits_i (U_i \cap A) = \left(\bigcup\limits_i U_i\right) \cap A$, ուստի τ_A-ի ցանկացած քանակով $U_i \cap A$ տարրերի միավորումը (որտեղ $U_i \in \tau$) նույնպես պատկանում է τ_A-ին:
3. Քանի որ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap A) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \cap A$, ուստի հատման աքսիոմը ևս տեղի ունի:

Սահմանում: τ_A տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայից **մակածված տոպոլոգիա** A ենթաբազմության վրա: Իսկ ինքը՝ (A, τ_A) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է (X, τ) **տոպոլոգիական տարածության ենթատարածություն**:

Մասնավոր $A = X$ դեպքում $\tau_A = \tau$, և ունենք $(A, \tau_A) = (X, \tau)$ նույնացում:

Սահմանումից հետևում է, որ (A, τ_A) տարածության փակ ենթաբազմությունները նույնպես ստացվում են A-ի հետ X-ում փակ ենթաբազմությունների հատումներով:

Մակածված տոպոլոգիայի հատկություններ:

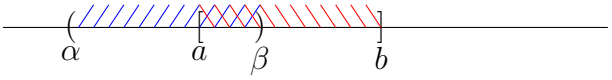
Հատկություն 1: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն, $A \subset B \subset X$ ենթաբազմություններ: A ենթաբազմության վրա կարելի է մակածել երկու տոպոլոգիա՝ τ_A (անմիջականորեն τ-ից A-ի վրա) և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիա (նախ τ-ից մակածվում է τ_B տոպոլոգիա B-ի վրա, ապա τ_B-ից մակածվում է տոպոլոգիա A-ի վրա՝ $(\tau_B)_A$): Հետևյալ ակնհայտ $U \cap A = (U \cap B) \cap A$ համընկման շնորհիվ τ_A և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիաները նույնն են:

Հատկություն 2: Եթե $\{V_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ տոպոլոգիայի համար, ապա $\{V_i \cap A;\ i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ_A-ի համար (**հիմնավորե՛ք**):

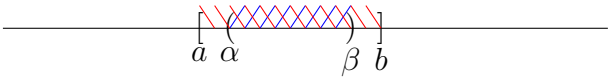
Իսկ եթե $\{U_j(x);\ j \in J\}$ ընտանիքը $x \in A$ կետի շրջակայքերի բազա է (X, τ) տարածությունում, ապա $\{U_j(x) \cap A;\ j \in J\}$ ընտանիքը x կետի շրջակայքերի բազա է (A, τ_A) տարածությունում (**հիմնավորե՛ք**):

Օրինակ 1: ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության $A = [a, b]$ ենթաբազմության τ_A տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում հետևյալ երեք տեսքերի ենթաբազմությունները, որոնք գոյանում են ինտերվալների $(\alpha, \beta) \cap A$ հատումներով.

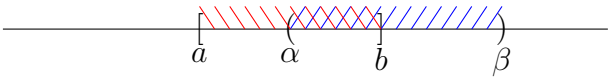
ա) $[a, \beta)$, որտեղ $a < \beta \leq b$



բ) (α, β), որտեղ $a \leq \alpha < \beta \leq b$



գ) $(\alpha, b]$, որտեղ $a \leq \alpha < b$



Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ ենթատարածության բաց բազմությունները կարող են բաց չլինել ընդգրկող տարածությունում: Նկատենք նաև, որ տվյալ (A, τ_A) ենթատարածությունում փակ են $[a, b]$-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնք փակ են նաև ($\mathbb{R}$, սովոր.) ընդգրկող տարածությունում:

Օրինակ 2: $B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ տոպոլոգիական տարածությունում (որպես ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության ենթատարածություն) բաց են բոլոր (α, β), $0 \leq a < \beta \leq 1$ տեսքի ինտերվալներն ու նրանց միավորումները (այսինքն տվյալ ենթատարածության բաց բազմությունները բաց են նաև ընդգրկող տարածությունում): Նկատենք նաև, որ $(0, 1)$-ում փակ են $(0, \beta]$, $0 < \beta < 1$; $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 1$; $[\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$ տեսքերի ենթաբազմություններն ու նրանց վերջավոր միավորումները: Ուստի $(0, 1)$-ում փակ որոշ ենթաբազմություններ փակ չեն ընդգրկող ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում:

Ընդհանուր դեպքում, ենթատարածությունում բաց որևէ ենթաբազմություն կարող է չլինել բաց ենթաբազմություն ընդգրկող տարածությունում և ենթատարածությունում փակ որևէ ենթաբազմություն կարող է փակ չլինել ընդգրկող տարածությունում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք քննարկել (նկարագրել) բաց և փակ ենթաբազմությունները ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության $[0, 1)$ և $(0, 1]$ ենթատարածություններում:

Թեորեմ 1: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն և $A \subset X$ ենթաբազմություն: Ապա հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են միմյանց.

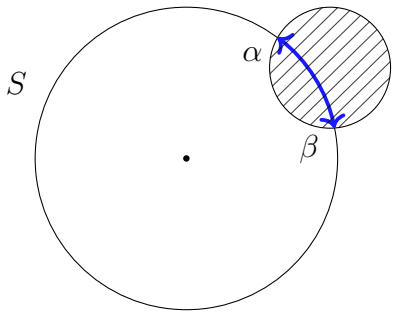
1. (A, τ_A) ենթատարածության կամայական բաց ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է նաև (X, τ) ընդգրկող տարածությունում:

2. A-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Նշենք, որ նմանակ պնդում տեղի ունի նաև փակ ենթաբազմությունների դեպքում. հարկավոր է թեորեմ 1-ի ձևակերպման մեջ ամենուրեք «բաց ենթաբազմություն» բառակապակցությունը փոխարինել «փակ ենթաբազմություն»-ով:

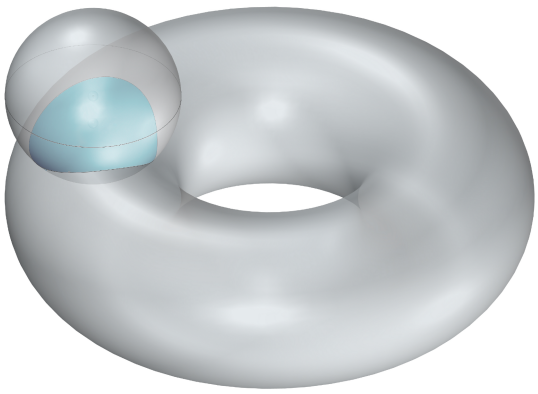
Ապացուցում: Ցույց տանք $1 \Rightarrow 2$ անցումը: Քանի որ A-ն բաց ենթաբազմություն է (A, τ_A) տարածությունում, ուստի 1-ից հետևում է, որ A-ն բաց ենթաբազմություն է նաև X-ում: Այժմ հակառակը. դիցուք A-ն բաց է ենթաբազմության X-ում: Դիտարկենք կամայական V բաց բազմություն A-ում: Ըստ τ_A-ի սահմանման $\exists U \in \tau$, որ $V = U \cap A$: Ուստի V-ն բաց է X-ում՝ որպես X-ում բաց երկու ենթաբազմությունների հատում: ■

Օրինակ 3: Դիտարկենք որևէ S շրջանագիծ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում:



Քանի որ $\mathbb{R}^2$-ի մետրիկային տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում անեզր շրջանները, ուստի (համաձայն հատկություն 1-ի) S-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում շրջանագծի բոլոր անեզր α, β ծայրակետերով աղեղները:

Օրինակ 4: ($\mathbb{R}^3$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունում դիտարկենք T^2 տորը (մակերևույթ, որն առաջանում է շրջանագիծն իրեն չհատող ուղղի շուրջ տարածության մեջ պտտումով, տե՛ս նաև թեմա 2-ում): Այս մակերևույթի վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում նրա հատումները անեզր գնդերի հետ:



Օրինակ 5: Դիտարկենք ($\mathbb{R}^{n+1}$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածության

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

ենթաբազմությունը (այն կոչվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության n-չափականության սֆերա): Կարելի է S^n-ի վրա մակածել տոպոլոգիա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից. նրա համար բազա են կազմում S^n-ի հատումները $\mathbb{R}^{n+1}$-ի $(n+1)$-չափականության անեզր գնդերի հետ: Այս օրինակը կարելի է դիտել որպես օրինակ 3-ի ընդհանրացում:

Օրինակ 6: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դիտել որպես $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության ենթատարածություն կազմված բոլոր $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ կետերից: Ուստի $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^n$-ի վրա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայի հետ: Նկատենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը փակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^{n+1}$-ում (ինչո՞ւ): Ուստի (համաձայն փակ ենթաբազմության վերաբերյալ թեորեմ 1-ի նմանակ թեորեմի), $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմությունները փակ են նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Մինչդեռ $\mathbb{R}^n$-ում բաց, ոչ դատարկ որևէ ենթաբազմություն չի կարող լինել բաց ենթաբազմություն նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես խնդիր ապացուցել այդ պնդումը՝ պարզության համար սկսելով $n = 1, 2$ տեսանելի դեպքերից:

Դիտողություն: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունների փակ ենթատարածությունների՝ օրինակ 6-ում բերված հատկությունը թույլ է տալիս սահմանել $\mathbb{R}^\infty$ բազմություն և նրա վրա հատուկ տոպոլոգիա: Սահմանենք $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը որպես $\mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \dots$ բազմության ֆակտոր-բազմություն՝ կատարելով նրա տարրերի

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0) = \dots$$

տեսքի նույնացումներ ամեն մի բնական n թվի և իրական թվերի ամեն մի $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ հաջորդականության համար: Թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն՝ կարող ենք համարել, որ $\mathbb{R}^\infty$-ը իրական թվերից կազմված բոլոր անվերջ $(x_1, x_2, \dots)$ հաջորդականությունների բազմությունն է, որոնց անդամները սկսած որոշ տեղից զրոներ են: Սպանդարտ եղանակով $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է անվերջ չափականության իրական գծային տարածության՝ հաջորդականությունների անդամ առ անդամ գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով: Սահմանենք տոպոլոգիա $\mathbb{R}^\infty$-ի վրա՝ համարելով փակ ամեն մի $F \subset \mathbb{R}^\infty$ ենթաբազմություն այն և միայն այն դեպքում, երբ ամեն մի n-ի դեպքում փակ է $F \cap \mathbb{R}^n$ հատումը: Տոպոլոգիայի F1-F3 աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ:

$\mathbb{R}^\infty$-ում կարելի է սահմանել տոպոլոգիա ուրիշ եղանակով՝ վերածելով $\mathbb{R}^\infty$-ը մետրիկային տարածության $\big(\rho(x, y)\big)^2 = \sum\limits_{i \geq 1} (x_i - y_i)^2$ մետրիկով:

Նշենք, որ $\mathbb{R}^\infty$-ի այս երկու տոպոլոգիաները համարժեք չեն, քանի որ օրինակ՝

$$A = \left\{ \Big(1, 0, 0, \dots\Big),\ \Big(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\Big),\ \Big(0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots\Big),\ \dots \right\}$$

ենթաբազմությունը ակնհայտորեն փակ է $\mathbb{R}^\infty$-ի առաջին տոպոլոգիայում, բայց փակ չէ երկրորդ տոպոլոգիայում: Իրոք, $0 = (0, 0, 0, \dots)$ կետի ցանկացած ε-շրջակայք

ունի ոչ դատարկ հատում A-ի հետ, բայց 0-ն չի պատկանում A-ին (**հիմնավորե՛ք**):

Սահմանվում է $\mathbb{R}^\infty$ բազմություն և նրա վրա տոպոլոգիա ևս մի եղանակով. այս դեպքում $\mathbb{R}^\infty$-ի տարրեր են համարվում բոլոր $(x_1, x_2, \dots)$ տեսքի հաջորդականությունները՝ պայմանով, որ զուգամիտում է $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ շարքը: Այս դեպքում նույնպես $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է մետրիկային տարածության, որը նշանակվում է ℓ_2-ով և կոչվում է հիլբերտյան տարածություն (մանրամասները տե՛ս [ ]-ում):

Այժմ ներկայացնենք մակածված տոպոլոգիա և ենթատարածություն հասկացություններին առնչվող մի քանի պարզ և հաճախ կիրառվող փաստեր:

Լեմմա: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և որևէ ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմություն: Դիտարկենք $i : A \to X,\ i(a) = a$ ներդրումը: Ապա $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $U \in \tau$, ապա $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$: ■

Նկատենք, որ τ_A-ն այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է A-ի վրա, որի դեպքում i արտապատկերումը անընդհատ է (**հիմնավորե՛ք**):

Եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$ ենթաբազմություն, ապա $f_A : A \to Y,\ f_A(a) = f(a),\ a \in A$ արտապատկերումը կոչվում է f **արտապատկերման սահմանափակում** A ենթաբազմության վրա: Նկատենք, որ $f_A = f \circ i$, որտեղ $i : A \to X$, արտապատկերումը A ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ՝ $i(a) = a$, $\forall\, a \in A$:

Թեորեմ 2: Եթե տոպոլոգիական տարածությունների $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ արտապատկերումը անընդհատ է, ապա $\forall\, A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում f արտապատկերման $f_A : (A, \tau_A) \to (Y, \sigma)$ սահմանափակումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Շնորհիվ լեմմայի՝ f_A-ն անընդհատ է որպես i և f անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: ■

Հաճախ դիտարկվում է նաև հակառակ խնդիրը. պահանջվում է X-ի A ենթաբազմության վրա տրված $g : A \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը շարունակել մինչև $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը լուծում չունի (անընդհատ շարունակում կարող է գոյություն չունենալ):

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում տրված երկու անընդհատ արտապատկերումներից «կարել» կամ «սոսնձել» մի երրորդ անընդհատ արտապատկերում: Բերենք այդպիսի հնարավորության օրինակ:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X = A \cup B$, որտեղ A-ն և B-ն փակ ենթաբազմություններ են X-ում: Դիցուք $f : A \to Y$ և $g : B \to Y$ անընդհատ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f(x) = g(x)$ ցանկացած $x \in A \cap B$ կետում: Դիտարկենք $h : X \to Y$ արտապատկերումը, որտեղ $h(x) = f(x)$, երբ $x \in A$ և $h(x) = g(x)$, երբ $x \in B$: Ապա h արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Նախ պարզ է, որ h-ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք F-ը կամայական փակ բազմություն է Y-ում: Ունենք՝

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F):$$

Քանի որ F-ը փակ է Y-ում և f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(F)$-ը փակ է A-ում: Հետևաբար $f^{-1}(F)$-ը փակ է նաև X-ում (այստեղ օգտվեցինք թեորեմ 1-ի նմանակից՝ հաշվի առնելով, որ A-ն փակ է X-ում): Նույնանման դատողություններով, $g^{-1}(F)$-ը ևս փակ է X-ում: Հետևաբար $h^{-1}(F)$-ը փակ է X-ում, ուստի h-ը անընդհատ է ըստ թեմա 9-ում թեորեմ 4-ի: ■

Վերը բերված 1-6 օրինակները ցույց են տալիս, որ տոպոլոգիական տարածության ենթատարածություն հասկացությունը հնարավորություն է տալիս արդեն հայտնի տարածություններից ստանալ բազմաթիվ նոր տարածություններ՝ դրանց ենթատարածությունների տեսքով:

Վերլուծական երկրաչափության դասընթացում կատարվում է 2-րդ կարգի կորերի և 2-րդ կարգի մակերևույթների մետրիկային և աֆինական դասակարգումներ:

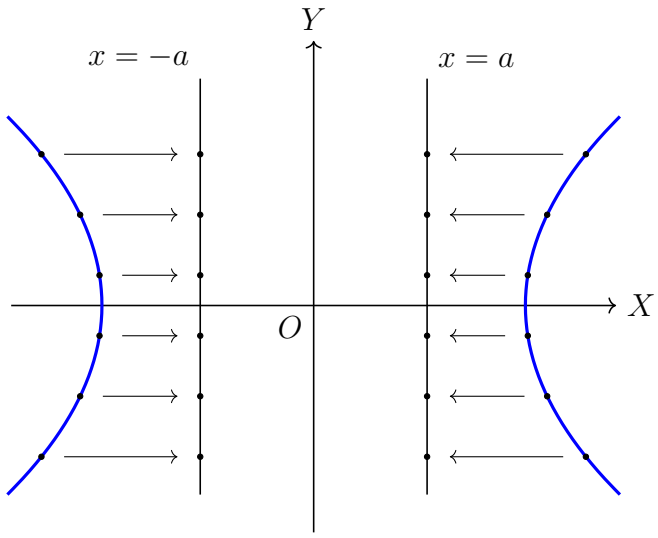
Յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի կոր կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն, հարթության սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից կորի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա արված է օրինակ 3-ում շրջանագծի դեպքում: Իսկ յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի մակերևույթ կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության տոպոլոգիայից մակերևույթի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա նկարագրված է օրինակ 4-ում տորի դեպքում:

Առաջանում է խնդիր. կատարել 2-րդ կարգի կորերի և 2-րդ կարգի մակերևույթների **տոպոլոգիական դասակարգումներ**:

Քանի որ իզոմետրիկ և աֆինական ձևափոխությունները փոխմիարժեք և անընդհատ արտապատկերումներ են, ուստի միմյանց մետրիկորեն կամ աֆինորեն համարժեք ցանկացած երկու 2-րդ կարգի կոր կամ մակերևույթ նաև տոպոլոգորեն համարժեք են, այսինքն հոմեոմորֆ են:

Նկատենք, որ աֆինորեն ոչ համարժեք երկու կոր կամ մակերևույթ կարող են լինել տոպոլոգորեն համարժեք: Օրինակ՝ ցանկացած հիպերբոլ հոմեոմորֆ է զուգահեռ իրական ուղիղների զույգի:

Իրոք, տեղադրելով հիպերբոլն ու ուղիղների զույգը միմյանց նկատմամբ հարմար դիրքով՝ կարող ենք զուգահեռ պրոյեկտել դրանցից մեկը մյուսի վրա, ինչպես ցույց է տրված ստորև գծագրում:



Կորերի և մակերևույթների լիարժեք տոպոլոգիական դասակարգումը ենթադրում է ոչ միայն հաստատել, որ տվյալ երկու կորը կամ մակերևույթը հոմեոմորֆ են, այլ նաև ցանկացած երկու կորի կամ մակերևույթի դեպքում հիմնավորել նրանց ոչ հոմեոմորֆությունը, եթե չի հաջողվում կառուցել հոմեոմորֆիզմ նրանց միջև: Օրինակ՝ ինչպես գիտենք, որևէ էլիպս աֆինորեն համարժեք չէ որևէ հիպերբոլի, քանի որ աֆինական ձևափոխությունները սահմանափակ պատկերները արտապատկերում են սահմանափակ պատկերների (էլիպսը սահմանափակ պատկեր է, հիպերբոլը՝ ոչ):

Աֆինական ձևափոխությունների այս հատկությունը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես՝ պատկերի սահմանափակությունը (ինչպես նաև անսահմանափակությունը) **աֆինական հատկություն** է: Բայց (ինչպես դա հետևում է ստորև 12.6 խնդրից) պատկերի սահմանափակությունը չի հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություն: Ուստի հիմնավորելու համար, որ էլիպսը և հիպերբոլը տոպոլոգորեն համարժեք չեն (հոմեոմորֆ չեն) անհրաժեշտ է գտնել պատկերների որևէ տոպոլոգիական հատկություն, որով օժտված լինի այդ պատկերներից միայն մեկը: Այդպիսի որոշ տոպոլոգիական հատկություններ կկառուցվեն հաջորդ թեմաներում:

Իսկ մենք այստեղ սահմանափակվենք նշելով, որ այնպիսի երկրաչափական պատկերներ կամ մեծություններ, որպիսիք են՝ անկյուն, հատված, բազմանկյուն, երկարություն, մակերես, ծավալ, չեն հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություններ կամ տոպոլոգիական ինվարիանտներ:

Վերջում կանգ առնենք տոպոլոգիական տարածությունների այսպես կոչված ժառանգական հատկություն հասկացության վրա: Ըստ սահմանման՝ տոպոլոգիական տարածության P հատկությունը կոչվում է **ժառանգական**, եթե այդ հատկությամբ օժտված ամեն մի տոպոլոգիական տարածության ցանկացած ենթատարածություն նույնպես օժտված է այդ հատկությամբ:

Տոպոլոգիական տարածությունների մեզ արդեն ծանոթ հատկություններից ժառանգական են անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները, հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, տարածության մետրիկացումը (հիմնավորումները, որպես

խնդիրներ, թողնվում են ընթերցողին)։

Ոչ ժառանգական հատկություններ են սեպարաբելությունը, լինդելյոֆությունը, կապակցվածությունը, գծային կապակցվածությունը, կոմպակտությունը։ Վերջին երեք հասկացությունների հետ կծանոթանանք հաջորդ թեմաներում։

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 12-ի վերաբերյալ

12.1. Եթե ունենք (X, ρ) մետրիկային տարածություն, ապա ամեն մի ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմության վրա կարելի է սահմանել տոպոլոգիա երկու եղանակով։

Առաջին դեպքում դիտարկենք ρ մետրիկի $\rho|_A$ սահմանափակումը A-ի վրա և վերցնենք $\rho|_A$ մետրիկով որոշված $\tau[\rho|_A]$ մետրիկային տոպոլոգիան։

Երկրորդ դեպքում դիտարկենք X-ի $\tau[\rho]$ մետրիկային տոպոլոգիան և վերցնենք նրանով մակածված $\tau[\rho]_A$ տոպոլոգիան A-ի վրա։

Հարց. Նու՞յնն են արդյոք միշտ $\tau[\rho|_A]$ և $\tau[\rho]_A$ տոպոլոգիաները։

Ցուցում. Պատասխանը գրեթե ակնհայտ դրական է, իսկ ստուգումը կատարվում է զուտ սահմանումների մակարդակով։

12.2. Նկարագրեք թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան։

12.3. Ապացուցեք. թվային ուղղի ցանկացած երկու

ա) (a, b) և (c, d) տեսքի միջակայքեր սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիաներով հոմեոմորֆ տարածություններ են,

բ) նույնը $[a, b]$ և $[c, d]$ տեսքի միջակայքերի դեպքում,

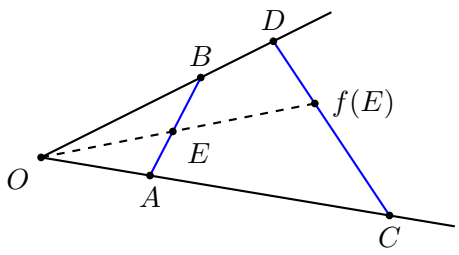
գ) եթե միջակայքերը տարբեր տեսքերի են՝ մեկը բաց է կամ փակ է, իսկ մյուսը կիսաբաց է, կամ մեկը բաց է, իսկ մյուսը փակ է, ապա ստացված տոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ չեն։

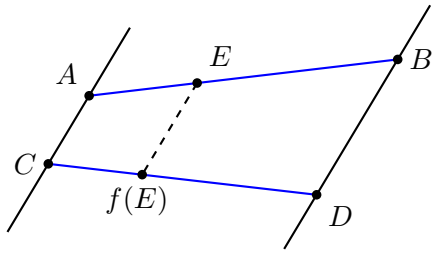
Ցուցում. Դիտարկեք $f : (a, b) \to (c, d),\ f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$ անընդհատ արտապատկերումը և, օգտվելով 1, 2 օրինակներից, կիրառեք թեորեմ 10-ը թեմա 9-ում։

12.4. Դիցուք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում ունենք երկու AB և CD հատվածներ։ Դիտարկելով այդ հատվածները որպես $\mathbb{R}^2$ տարածության ենթատարածություններ $\mathbb{R}^2$-ից նրանց վրա մակածված տոպոլոգիաներով՝ կառուցեք որևէ $f : AB \to CD$ հոմեոմորֆիզմ։

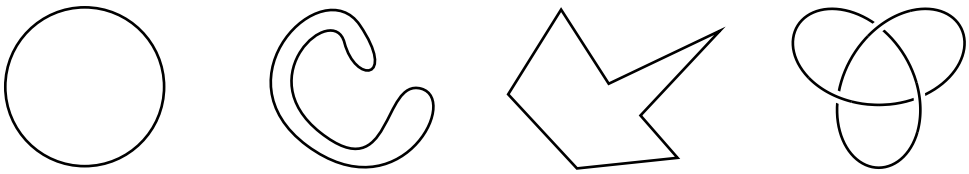
Յուցում. Ներմուծելով $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ կոորդինատներ՝ կազմեք AB և CD ուղիղների պարամետրական հավասարումներ նույն $t \in [0, 1]$ փիրույթով և կատարեք պարամետրի արտաքսում:

Որոշ դեպքերում պահանջվող հոմեոմորֆիզմը կարելի է կառուցել երկրաչափորեն՝ կենտրոնային կամ զուգահեռ պրոյեկտումով, ինչպես ցույց է տրված ստորև օրինակներում:





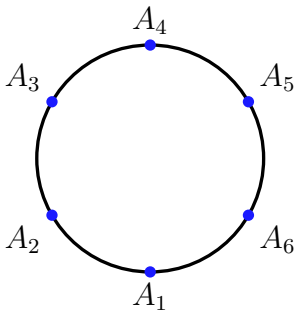
12.5. Ստորև պատկերված են ա) շրջանագիծ, բ) օվալ (ինքն իրեն չհատող փակ գիծ), գ) բազմանկյուն՝ որպես էվկլիդյան հարթության ենթատարածություններ, և ինքն իրեն չհատող երեքնուկաձև փակ գիծը՝ որպես եռաչափ տարածության ենթատարածություն:

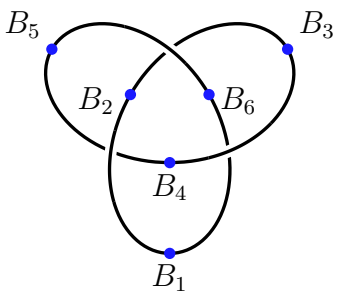


(ա) (բ) (գ) (դ)

Ապացուցեք, որ դրանք հոմեոմորֆ են իրար:

Յուցում. Շրջանագծի վրա վերցրեք A_1, A_2, …, A_6 կետեր, «երեքնուկի» վրա՝ B_1, B_2, …, B_6 կետեր:





Ընտրելով $f_i : A_iA_{i+1} \to B_iB_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, 5$ և $f_6 : A_6A_1 \to B_6B_1$ հոմեոմորֆիզմներ՝ կառուցեք հոմեոմորֆիզմ շրջանագծի և «երեքնուկի» միջև օգտվելով թեորեմ 3-ից:

12.6. Դիտարկենք թվային ուղղի $(-1, 1)$ ենթաբազմությունը նրա վրա սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Ապացուցեք, որ այդ տարածությունը հոմեոմորֆ է $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածությանը:

Յուցում. Օգտվեք թեմա 1-ի օրինակ 9-ում բերված արտապատկերումից:

Ստորև 12.7-12.10 խնդիրներում կորերը և մակերևույթները դիտարկվում են համապատասխանաբար $(\mathbb{R}^2, \text{սովոր.})$ և $(\mathbb{R}^3, \text{սովոր.})$ տարածություններից մակածված տոպոլոգիաներով: Ապացուցեք.

12.7. ցանկացած պարաբոլ հոմեոմորֆ է ուղղի;

12.8. ցանկացած միախոռոչ հիպերբոլոիդ հոմեոմորֆ է ուղիղ շրջանային գլանի;

12.9. ցանկացած երկխոռոչ հիպերբոլոիդ հոմեոմորֆ է հարթությունների զույգի;

12.10. ցանկացած էլիպսական պարաբոլոիդ հոմեոմորֆ է հարթության:

12.11. Ապացուցեք. հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները ժառանգական հատկություններ են: Այսինքն՝ եթե որևէ տարածություն բավարարում է առաջին (երկրորդ) աքսիոմին, ապա նրա ցանկացած ենթատարածություն նույնպես բավարարում է այդ նույն աքսիոմին:

Թեմա 13

Ֆակտոր-տոպոլոգիա, ֆակտոր-տարածություն, օրինակներ: Տոպոլոգիական տարածություններում «սոսնձման» (նույնացման) գործողությունը, օրինակներ: Միակողմանի, կողմնորոշելի և ոչ կողմնորոշելի մակերևույթներ:

Նախորդ թեմայում (X, τ) տոպոլոգիական տարածության $A \subset X$ ենթաբազմության վրա սահմանվեց մակածված տոպոլոգիա՝ որպես A բազմության ամենաթույլ տոպոլոգիա, որի դեպքում $i : A \to X$ ներդրումը անընդհատ է:

Այժմ դիտարկենք այդ նույն խնդիրը ավելի ընդհանրացված տեսքով: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն, A բազմություն (որը կարող է և չլինել X-ի ենթաբազմություն) և $f : A \to X$ արտապատկերում: Ինչպե՞ս սահմանել տոպոլոգիա A բազմության վրա, որպեսզի f արտապատկերումը լինի անընդհատ: Կարելի է, օրինակ, A-ն օժտել ամենաուժեղ՝ դիսկրետ տոպոլոգիայով, և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ: Ավելի հետաքրքիր խնդիր է՝ գտնել A-ի այն ամենաթույլ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Հասկանալի է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակելու է բոլոր $f^{-1}(V)$ ենթաբազմությունները, որտեղ $V \in \tau$: Հեշտ է տեսնել, որ այդ պայմանը, լինելով անհրաժեշտ, նաև բավարար պայման է, քանի որ A բազմության ենթաբազմությունների $\{f^{-1}(V) \mid V \in \tau\}$ ընտանիքը, շնորհիվ

$$f^{-1}\left(\bigcup_i V_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(V_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_i V_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(V)$$

նույնացումների, բավարարում է տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմներին: Այդ տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայի նախակերպար կամ ինիցիալ տոպոլոգիա A ենթաբազմության վրա՝ որոշված f արտապատկերումով:

Մասնավոր դեպքում, երբ $A \subset X$, իսկ f-ը $A \to X$ ներդրումն է, այս տոպոլոգիան համընկնում է A ենթաբազմության վրա մակածված τ_A տոպոլոգիայի հետ:

Հիմա քննարկենք մեկ այլ, այս խնդրին նման խնդիր: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն, ինչ-որ B բազմություն և $f : X \to B$ արտապատկերում: Ի՞նչ տոպոլոգիա վերցնենք B-ի վրա, որպեսզի f-ը լինի անընդհատ արտապատկերում: Կարելի է օրինակ B-ն օժտել անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով, և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ: Այս դեպքում նույնպես առաջանում է խնդիր՝ գտնել B-ի համար այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Պարզ է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակելու է B-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց ենթաբազմություններ են X-ում: Դարձյալ վերը բերված երկու նույնացումներից հետևում է, որ այդքանը ոչ միայն անհրաժեշտ է, այլ նաև բավարար է: Այսինքն B բազմության ենթաբազմությունների $\{V \in B \mid f^{-1}(V) \in \tau\}$ ընտանիքը բավարարում է տոպոլոգիայի բոլոր 1-3 աքսիոմներին:

Ամփոփենք. եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում, որտեղ X-ը տոպոլոգիա-

կան տարածություն է, իսկ Y-ը բազմություն է, ապա Y-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են X-ում, կազմում են Y-ի տոպոլոգիա: Ընդ որում, դա այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան է Y-ի վրա, որի դեպքում f-ը անընդհատ է: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **ֆինալ տոպոլոգիա** Y-ի վրա՝ որոշված f արտապատկերումով:

Մասնավոր դեպքում, երբ f-ը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է (այսինքն $f(X) = Y$), այդ տոպոլոգիան կոչվում է ***f* արտապատկերումով ծնված ֆակտոր-տոպոլոգիա** Y բազմության վրա, իսկ Y բազմությունը, օժտված այդ ֆակտոր-տոպոլոգիայով, կոչվում է ***X* տարածության ֆակտոր-տարածություն որոշված *f* արտապատկերումով**:

Պարզաբանենք այս անվանումները: Եթե X բազմության վրա ունենք R համարժեքության հարաբերություն (տե՛ս թեմա 2-ում), ապա X/R ֆակտոր-բազմության համար ունենք $P : X \to X/R$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում (**կանոնական պրոյեկցիա**), որը $\forall x \in X$ կետի համապատասխանեցնում է նրա $P(x) = [x]$ համարժեքության դասը: Եթե X-ը նաև տոպոլոգիական տարածություն է, ապա վերը նկարագրված եղանակով X/R ֆակտոր-բազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության (ֆակտոր-տարածության)՝ օժտված P արտապատկերումով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Մյուս կողմից՝ ամեն մի $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում որոշում է R համարժեքության հարաբերություն X-ի վրա, ըստ որի $x_1, x_2 \in X$ տարրեր համարվում են համարժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x_1) = f(x_2)$: Դիտարկենք $h : X/R \to Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $h([x]) = f(x)$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ h-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է և

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

դիագրամը կոմուտատիվ է, այսինքն $f = h \circ P$: Համեմատելով X/R և Y բազմությունների վրա P և f արտապատկերումներով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիաները՝ տեսնում ենք, որ h-ը (ինչպես նաև h^{-1}-ը) բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է բաց ենթաբազմությունների: Ուստի h-ը հոմեոմորֆիզմ է: Այն տոպոլոգորեն նույնացնում է X/R և Y տարածությունները, ինչպես նաև P և f արտապատկերումները:

Ամփոփենք. ֆակտոր-տարածություն կարելի է սահմանել երկու համարժեք եղանակով՝ որպես ելակետ վերցնելով կամ

ա) X տոպ. տարածություն, Y բազմություն և որևէ $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, կամ էլ

բ) X տոպոլոգիական տարածություն և X բազմության վրա տրված որևէ R համարժեքության հարաբերություն (այսինքն X բազմության որևէ տրոհում):

Օրինակ 1: Վերցնենք $X = [0,1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Դիտարկենք երեք՝ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ տարրերից կազմված որևէ $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ բազմություն և $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, սահմանելով $f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta$ և $f(x) = \gamma,\ \forall\, x \in (0,1)$: Ըստ ֆակտոր-տոպոլոգիայի սահմանման՝ Y-ում բաց են համարվում նրա այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են $[0,1]$-ում: Դիտարկելով Y-ի բոլոր $2^3 = 8$ ենթաբազմությունները և դրանց նախակերպարները՝ ստանում ենք.

$$f^{-1}\varnothing = \varnothing,\ \ f^{-1}\{\alpha\} = \{0\},\ \ f^{-1}\{\beta\} = \{1\},\ \ f^{-1}\{\gamma\} = (0,1),$$
$$f^{-1}\{\alpha,\beta\} = \{0;1\},\ \ f^{-1}\{\alpha,\gamma\} = [0,1),\ \ f^{-1}\{\gamma,\beta\} = (0,1],\ \ f^{-1}\{\alpha,\beta,\gamma\} = [0,1]:$$

Այս ութ ենթաբազմություններից միայն հինգն են բավարարում վերոհիշյալ պայմանին: Ուստի X-ի ֆակտոր-տարածությունը երեք տարրից կազմված $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ բազմություն է՝ օժտված $\tau = \{\varnothing, \{\gamma\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$ ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Այժմ այս նույն օրինակը քննարկենք մյուս՝ երկրորդ ելակետային մոտեցումով. սահմանենք $\sim$ երկտեղ հարաբերություն $X = [0,1]$ հատվածի կետերի համար, ըստ որի համարելու ենք $0 \sim 0,\ 1 \sim 1$, և $x_1 \sim x_2,\ \forall\, x_1, x_2 \in (0,1)$ կետերի դեպքում (այս և ստորև օրինակներում xRy հարաբերությունը գրառելու ենք $x \sim y$ տեսքով):

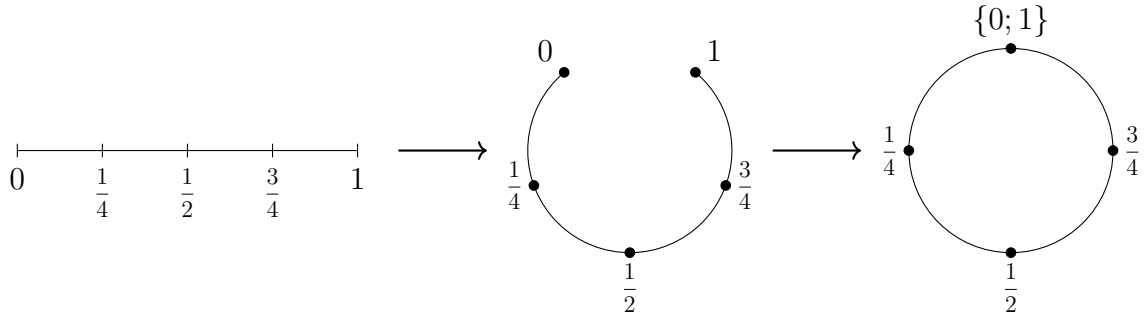
Սա համարժեքության հարաբերություն է, ուստի այն որոշում է $[0,1]$ հատվածի ֆակտոր-բազմություն, կազմված համարժեքության երեք դասերից՝ $[0]$, $[1]$, $\left[\frac{1}{2}\right]$ (այս վերջին համարժեքության դասը կարող է ներկայացվել իր ցանկացած $t \in (0,1)$ ներկայացուցչով՝ $[t]$): Նշանակելով $\alpha = [0],\ \beta = [1],\ \gamma = \left[\frac{1}{2}\right]$, կունենանք ${}^{[0,1]}\!/_{\sim} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ նույնացում և կանոնական $P : [0,1] \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$ պրոյեկցիա՝ $P(x) = [x]$, $x \in [0,1]$:

Ինչ վերաբերում է $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ֆակտոր-բազմության ֆակտոր-տոպոլոգիային, ապա այն որոշվում է ինչպես նախորդ դեպքում և բերում է նույն արդյունքին: Նկատենք, որ այս դեպքում f արտապատկերման դերը կատարում է P պրոյեկցիան:

Դիտողություն: ${}^{X}\!/_{R}$ ֆակտոր-տարածությունը կարող է չժառանգել X տարածության որոշ տոպոլոգիական հատկություններ: Քիչ առաջ դիտարկված օրինակում $[0,1]$-ը հաուսդորֆյան տարածություն է, մինչդեռ նրա ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$ ֆակտոր-տարածությունը հաուսդորֆյան չէ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 2: Նորից դիտարկենք $X = [0,1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով և սահմանենք համարժեքության մեկ ուրիշ հարաբերություն $[0,1]$-ի վրա՝ համարելով $x \sim x,\ \forall\, x \in [0,1]$ կետի դեպքում, և բացի այդ $0 \sim 1$: Այս օրինակում համարժեքության դասերն անթիվ են. դրանք $[0,1]$ հատվածի միկետանոց $\{x\},\ x \in (0,1)$ ենթաբազմություններն են և երկկետանոց $\{0,1\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$ ֆակտոր-բազմությունը կարելի է նույնացնել, օրինակ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծի կետերի բազմության հետ (տե՛ս օրինակ 9-ը թեմա 2-ում):

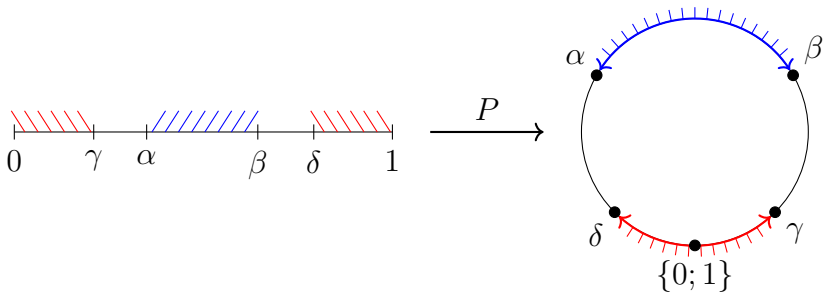
Անցումը $[0,1]$-ից շրջանագծի կարելի է պատկերացնել հետևյալ գծագրի օգնությամբ. մենք պարզապես ծռելով նույնացնում (սոսնձում) ենք $[0,1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը՝ հատվածին տալով, օրինակ, շրջանագծի տեսք:



Հասկանալի է, որ այս պահին շրջանագիծը մենք դիտարկեցինք որպես $[0,1]$ հատվածի ֆակտոր-բազմության մի մոդել: Այժմ կհիմնավորենք, որ մոդելի այս ընտրությունը պատահականություն չէ, և որոշակի իմաստով համապատասխանում է իրականությանը:

Այդ նպատակով համեմատենք հարթությունից շրջանագծի վրա մակածված տոպոլոգիան ֆակտոր-տոպոլոգիայի հետ:

Նկատենք, որ շրջանագծի ամեն մի անեզր $\alpha\beta$ աղեղ, որը չի պարունակում ֆակտոր-բազմության $\{0;1\}$ կետը (համարժեքության դասը), հանդիսանում է բաց ենթաբազմություն (պատկանում է ֆակտոր-տոպոլոգիային), քանի որ նրա նախակերպարը P պրոյեկցիայի դեպքում (α,β), $0<\alpha<\beta<1$ տեսքի ինտերվալ է $[0,1]$ հատվածում: Իսկ եթե շրջանագծի որևէ $\delta\gamma$ անեզր աղեղ պարունակում է $\{0;1\}$ կետը, ապա նրա $P^{-1}(\delta\gamma)$ նախակերպարը $[0,\gamma)\cup(\delta,1]$ միավորումն է, որը բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Ուստի $\delta\gamma$ աղեղը նույնպես բաց բազմություն է շրջանագծի ֆակտոր-տոպոլոգիայում:



Արդյունքում շրջանագծի (որպես ֆակտոր-բազմության մոդելի) ֆակտոր-տոպոլոգիան կազմված է նրա բոլոր անեզր աղեղներից և դրանց միավորումներից, և ակնհայտորեն համընկնում է $\mathbb{R}^2$ հարթության սովորական տոպոլոգիայից շրջանագծի վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ: Հետևաբար $[0,1]$ հատվածի տվյալ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

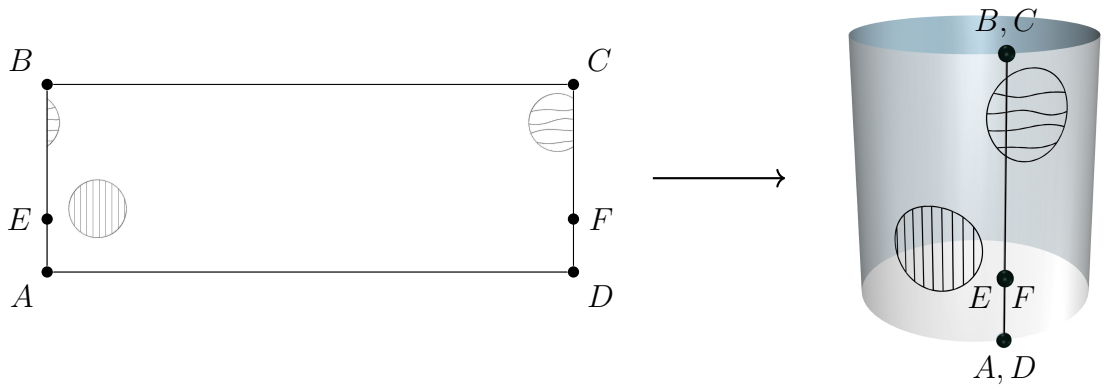
Դիտողություն: Ընթերցողի մոտ կարող է հարց առաջանալ. արդյո՞ք պարտադիր էր օրինակ 2-ում որպես ֆակտոր-բազմություն վերցնել 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը: Այս մասին խոսվել է թեմա 2-ում. ֆակտոր-բազմության մոդելի ընտրության հարցում մենք ունենք ազատություն: Կարելի է շրջանագծի փոխարեն վերցնել ցանկացած էլիպս կամ բազմանկյուն կամ օվալ (տե՛ս 12.5 խնդիրը նախորդ թեմայում):

Այս բոլոր մոդելները՝ հարթությունից մակածված տոպոլոգիայով, միմյանց հոմեոմորֆ տոպոլոգիական տարածություններ են և կարող են դիտարկվել որպես $[0,1]/\sim$ ֆակտոր-տարածության տարբեր դրսևորումներ (կրկնօրինակներ):

Օրինակ 2-ի իմաստով $X/\sim$ ֆակտոր-տարածության մասին հաճախ ասում են, որ այն ստացվում է X-ից նրա որոշ տարրերի **սոսնձումներով** կամ **նույնացումներով**:

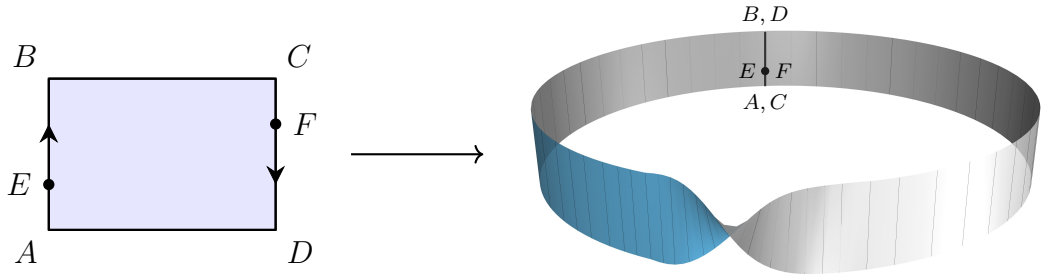
Ստորև բերվող ֆակտոր-տարածությունների օրինակներում մենք կբավարարվենք նշելով միայն իրար հետ նույնացվող (սոսնձվող) տարբեր տարրերը՝ պատկերելով ստացվող տարածությունները մակերևույթների տեսքով $\mathbb{R}^3$-ում:

Օրինակ 3: Վերցնենք թղթի շերտ $ABCD$ ուղղանկյան տեսքով և նույնացնենք AB և DC կողմերի կետերը զույգ առ զույգ, պահպանելով նշված ուղղությունները. A-ն D-ի հետ, B-ն C-ի հետ, E-ն F-ի հետ և այլն:



Արդյունքում ստանում ենք գլան: Նրա եզրը կազմված է երկու շրջանագծերից: Որպես վարժանք ընթերցողին առաջարկում ենք. $ABCD$ ուղղանկյան կետերի տվյալ նույնացումները ներկայացնել որպես համարժեքության հարաբերության դասեր: Ընթերցողին առաջարկում ենք ցույց տալ, որ գլանի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^3$-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 4: Նորից վերցնենք $ABCD$ ուղղանկյունը, բայց այս անգամ նույնացնենք AB և CD ուղղորդված հատվածների կետերը՝ պահպանելով դրանց ուղղությունները. A-ն C-ի հետ, B-ն D-ի հետ, E-ն F-ի հետ և այլն:



Ստացված ֆակտոր-տարածությունը կոչվում է **Մյոբիուսի թերթ**: Այն կարող է պատկերվել որպես $\mathbb{R}^3$-ում ներդրված մակերևույթ: Հեշտ է տեսնել, որ Մյոբիուսի թերթի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^3$-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Մյոբիուսի թերթի մասին ասում են, որ այն միակողմանի մակերևույթ է $\mathbb{R}^3$-ում:

Պարզաբանենք՝ ինչ է նշանակում **միակողմանի մակերևույթ** $\mathbb{R}^3$-ում: Սովորաբար դա ներկայացնում են այսպես. գլանը կամ սֆերան կարելի է ներկել երկու գույնով՝ դրսից մի գույնով (օրինակ՝ կարմիր), իսկ ներսից այլ գույնով (օրինակ՝ կապույտ): Մինչդեռ Մյոբիուսի թերթի դեպքում սկսելով այն ներկել ինչ-որ տեղից, ասենք կանաչ գույնով, անընդհատ շարժվելով մակերևույթով, կպարզվի, որ մակերևույթը թե՛ «ներսից» և թե՛ «դրսից» ներկվել է մի՝ կանաչ գույնով: Այսինքն՝ այս մակերևույթի համար իմաստ չունեն ներս, դուրս հասկացությունները, ուստի այն ունի մի երես (չնայած, որ յուրաքանչյուր կետի բավականաչափ փոքր շրջակայք ունի երկու երես, որոնք կարելի է ներկել տարբեր գույներով):

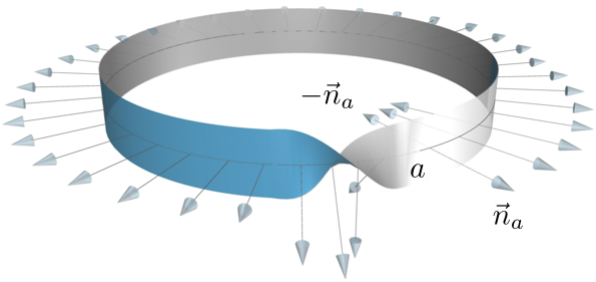
Սկզբունքորեն սա ընդունելի է, եթե մենք համարում ենք, որ մակերևույթն ունի **հաստություն**: Մինչդեռ մաթեմատիկայում մակերևույթները չունեն հաստություն, և անիմաստ է երկու երես հասկացությունը:

Մյուս կողմից՝ եթե պատկերացնենք, որ դիտորդը կանգնած է մակերևույթի վրա, ապա նա անընդհատ տեղաշարժվելով կարող է հայտնվել մակերևույթի նկատմամբ կամ մի, կամ մյուս կողմում: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս ներմուծել կողմնորոշելի, ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ հասկացությունները:

Դիցուք ողորկ մակերևույթի որևէ a կետում ընտրված է մակերևույթի երկու նորմալ միավոր վեկտորներից մեկը՝ $\vec{n}_a$: Դիտարկենք մակերևույթի վրա a կետով անցնող որևէ օվալ և շարժվելով a կետից օվալի երկայնքով՝ անընդհատ տեղափոխենք $\vec{n}_a$ վեկտորն այնպես, որ այն շարունակ մնա ուղղահայաց մակերևույթին: Ապա a կետ վերադառնալիս հնարավոր է երկու դեպք՝ ա) նորմալ վեկտորը հայտնվում է նախկին դիրքում, բ) նորմալ վեկտորը փոխել է իր ուղղությունը (այսինքն համընկել է $-\vec{n}_a$ վեկտորի հետ): Եթե տեղի ունի ա)-ն շրջանցի բոլոր հնարավոր օվալների դեպքում, ապա ասում են, որ մակերևույթը **կողմնորոշելի մակե-**

ռևույթ է, իսկ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի գոնե մի օվալ, որ տեղի ունի բ)-ն, ապա մակերևույթը կոչվում է **ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ**:

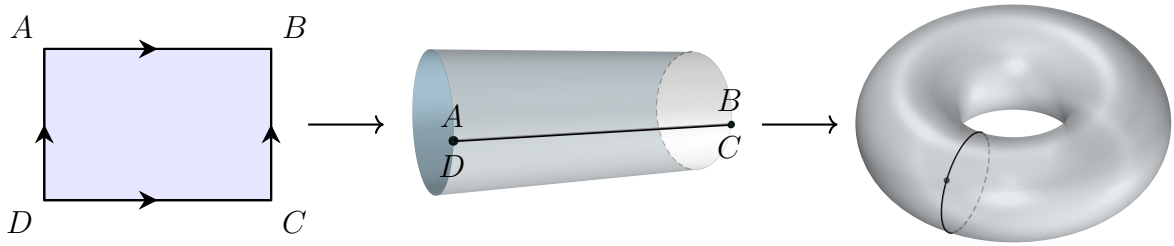
Մյոբիուսի թերթի դեպքում հետևյալ գծագիրը ցույց է տալիս, որ միջին գծի երկայնքով մի պտույտ կատարելիս մակերևույթի նորմալը փոխում է իր ուղղությունը, ուստի Մյոբիուսի թերթը ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ է $\mathbb{R}^3$-ում:



Նկատենք նաև, որ եթե որևէ մակերևույթ իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ, ապա այն ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ է:

Մի քանի կարևոր, առանց եզր մակերևույթներ ստացվում են ուղղանկյան կամ քառակուսու կողմերի զույգ առ զույգ նույնացումներով:

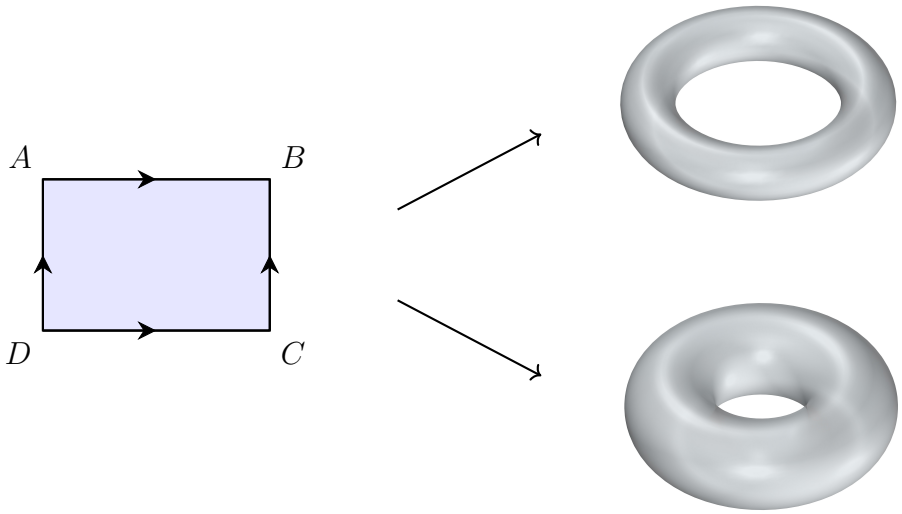
Օրինակ 5: Նախ նույնացնելով $ABCD$ քառակուսու AB կողմը DC կողմի հետ և այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը՝ պահպանելով նշված ուղղությունները, ստացվում է տոր:



Փորձեք ցույց տալ, որ այս դեպքում ևս տորի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է նրա վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի հետ:

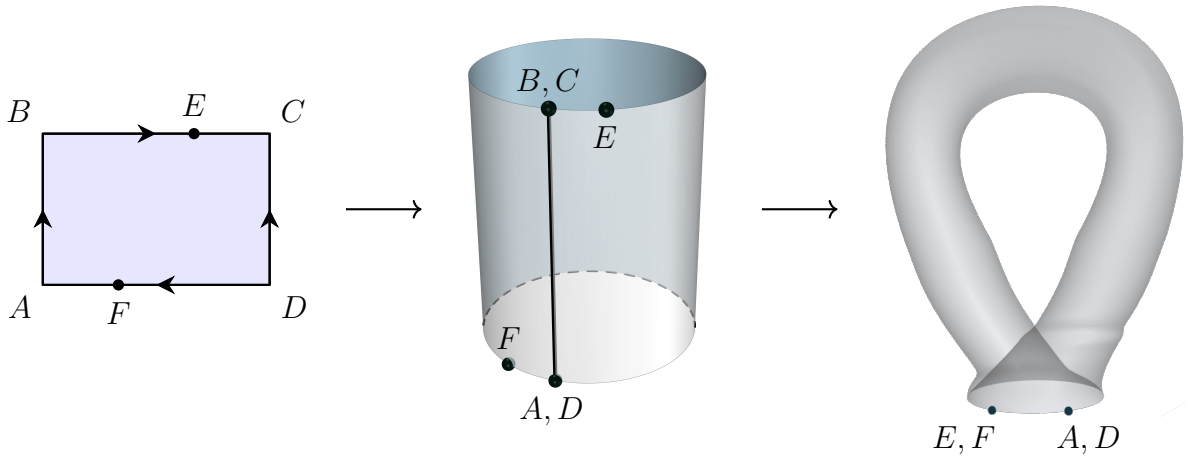
Նկատենք, որ տորը որպես ֆակտոր-տարածություն կարող է ստացվել նաև $\mathbb{R}^2$ հարթությունից (տե՛ս օրինակ 9-ը թեմա 2-ում):

Դիտողություն: Տոր կարելի է ստանալ $ABCD$ ուղղանկյունուց՝ փոխելով կողմերի նույնացումների հաջորդականությունը. նախ սոսնձելով DA և CB կողմերը և ապա սոսնձելով AB և DC կողմերը: Արդյունքում կստանանք տորի մեկ ուրիշ իրացում $\mathbb{R}^3$-ում:



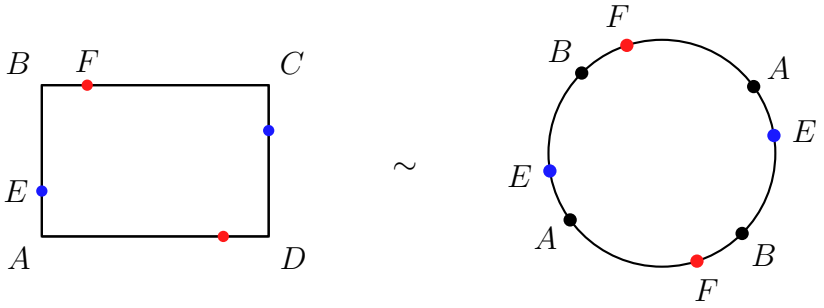
Ընթերցողին առաջարկում ենք կառուցել կանոնական հոմեոմորֆիզմ դրանց միջև այնպես, որ մի իրացման զուգահեռականներն ու միջօրեականները փոխակերպվեն համապատասխանաբար մյուս իրացման միջօրեականների ու զուգահեռականների:

Օրինակ 6: Նորից դիտարկենք $ABCD$ ուղղանկյուն, բայց կողմերի այլ կողմնորոշումներով:

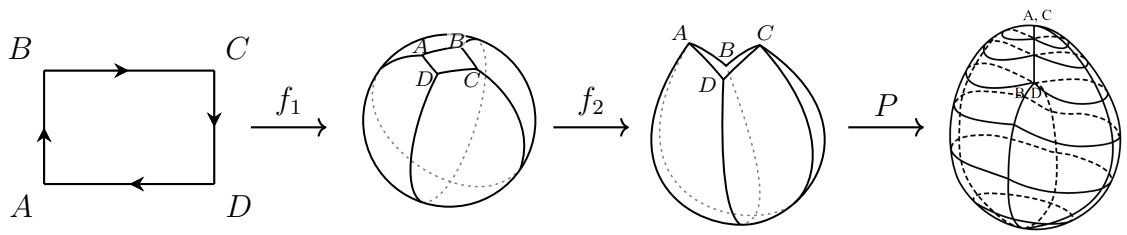


Նույնացնելով AB-ն DC-ի հետ, այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը ըստ նշված ուղղությունների՝ ստացվում է անեզր մակերևույթ, որը կոչվում է **Կլեյնի շիշ**: Այն իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ (հիմնավորե՛ք) և այդ պատճառով նույնպես ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ է: Կլեյնի շիշը հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների պատկերել եռաչափ տարածության մեջ: Առանց ինքնահատումների այն իրացվում է քառաչափ տարածությունում:

Օրինակ 7: Գոյություն ունի ուղղանկյան կողմերի զույգ առ զույգ նույնացման ևս մի եղանակ (տե՛ս գծագիրը). այժմ AB-ն նույնացվում է CD-ի հետ, իսկ BC-ն՝ DA-ի հետ:



Ստացվող մակերևույթը կոչվում է **պրոյեկտիվ հարթություն**: Այն համարժեք ձևով կարող է ստացվել շրջանից, եթե նույնացնենք շրջանի եզրագծի (շրջանագծի) յուրաքանչյուր կետ տրամագծորեն իրեն հակադիր կետի հետ (գծագրում նույնացվող կետերը նշված են նույն տառերով): Այս մակերևույթը նույնպես իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ (հիմնավորե՛ք) և նույնպես ոչ կողմնորոշելի մակերևույթ է: Այն հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների իրացնել $\mathbb{R}^3$-ում, բայց հնարավոր է դա անել $\mathbb{R}^4$-ում (այդ մասին տե՛ս Д. Гильберт, С. Кон–Фоссен, "Наглядная геометрия" գրքում): Ցույց տանք, թե ինչպես է հնարավոր պրոյեկտիվ հարթությունը պատկերել $\mathbb{R}^3$-ում (ինքնահատումով):



Այստեղ f_1-ը և f_2-ը հոմեոմորֆիզմներ են, իսկ P-ն նույնացնում է («սոսնձում» է) DA-ն BC-ի հետ և AB-ն CD-ի հետ:

Դիտողություն: Պրոյեկտիվ հարթության հետ մենք արդեն ծանոթացել ենք թեմա 7-ում, որտեղ այն սահմանվեց որպես եռաչափ տարածության սևեռված O կետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմություն՝ օժտված անկյունային մետրիկային տոպոլոգիայով: Ըստ այդ սահմանման՝ որևէ l_0 ուղղի ε-շրջակայք կազմում են այն բոլոր l ուղիղները, որոնց կազմած φ սուր անկյունները l_0-ի հետ բավարարում են $\varphi < \varepsilon$ պայմանին, որտեղ $\varepsilon \in [0°, 90°]$:

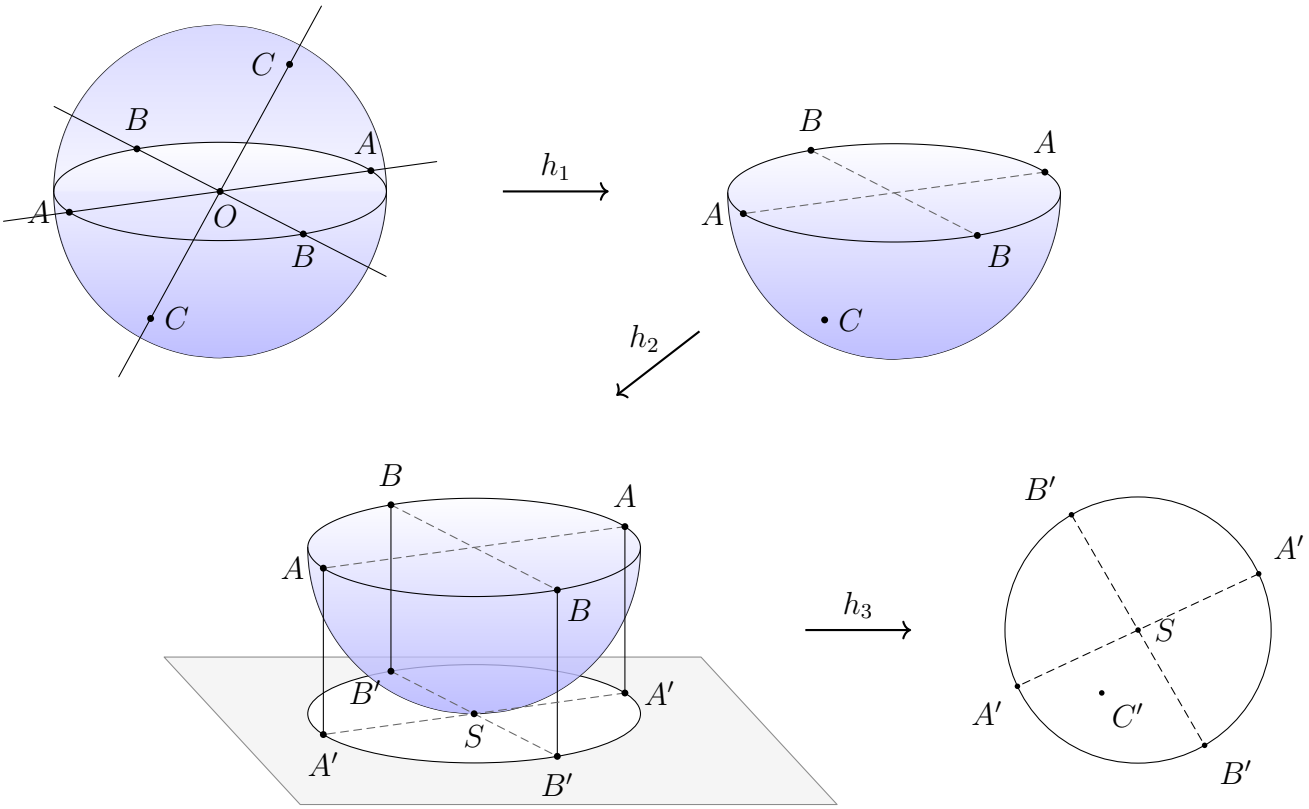
Ցույց տանք, որ պրոյեկտիվ հարթության այս երկու (հին և նոր) սահմանումները համարժեք են միմյանց (այսինքն բերում են միևնույն արդյունքին)՝ կառուցելով հոմեոմորֆիզմներ պրոյեկտիվ հարթության տարբեր մոդելների միջև մի քանի քայլով:

1. O կետով անցնող յուրաքանչյուր ուղիղ հատում է միավոր շառավղով սֆերան տրամագծորեն հակադիր երկու կետերում: Ուստի պրոյեկտիվ հարթությունը (ըստ հին սահմանման) հոմեոմորֆ է միավոր սֆերայի ֆակտոր-տարածությանը, որն ստացվում է սֆերայի տրոհումից որպես տրամագծորեն հակադիր բոլոր կետազույգերի բազմություն:

2. Հեռացնելով վերին (հյուսիսային) բաց կիսասֆերան կարող ենք պրոյեկտիվ հարթությունը ներկայացնել որպես ստորին (հարավային) փակ կիսասֆերայի ֆակտոր-տարածություն՝ զույգ առ զույգ նույնացնելով հասարակածային շրջանագծի տրամագծորեն հակադիր կետերը:

3. Պրոյեկտելով հարավային կիսասֆերան S բևեռում նրան շոշափող հարթության վրա, ստանում ենք՝ պրոյեկտիվ հարթությունը հոմեոմորֆ է միավոր շառավղով փակ շրջանին, որտեղ զույգ առ զույգ նույնացված են եզրային շրջանագծի տրամագծորեն հակադիր կետերը:

Ստորև գծագրում պատկերված են այդ անցումները h_1, h_2, h_3 հոմեոմորֆիզմների տեսքերով:



128-րդ էջը բացակայում է:

Ավարտելով օրինակները՝ կանգ առնենք ֆակտոր-տարածությունների որոշ հատկությունների վրա: Դրանցից առաջինը $P : X \to X/R$ կանոնական պրոյեկցիայի այսպես կոչված ունիվերսալության հատկությունն է:

Թեորեմ 1: Դիցուք Y-ը X տարածության ֆակտոր-տարածություն է՝ $Y = X/R$ ըստ համարժեքության ինչ-որ R հարաբերության, իսկ $P : X \to Y$ արտապատկերումը կանոնական պրոյեկցիան է: Ապա որևէ $g : Y \to Z$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ է $g \circ P : X \to Z$ համադրությունը:

Ապացուցում: Եթե g-ն անընդհատ է, ապա $g \circ P$-ն անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: Այժմ հակառակը. դիցուք $g \circ P$-ն անընդհատ է: Ցույց տանք, որ g-ն անընդհատ է (նկատենք, որ g-ի անընդհատությունը չի կարող դուրս բերվել թեմա 9-ի թեորեմ 9-ից, քանի որ ընդհանուր դեպքում $P : X \to X/R$ կանոնական պրոյեկցիան չի հանդիսանում բաց կամ փակ արտապատկերում): Վերցնենք որևէ $U \in Z$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $g^{-1}(U)$-ն բաց է Y-ում: Ունենք՝ $(g \circ P)^{-1}(U) = P^{-1}(g^{-1}(U))$, որը բաց է X-ում ըստ պայմանի: Ուստի $g^{-1}(U)$-ն բաց է Y-ում ըստ ֆակտոր-տոպոլոգիայի սահմանման: ■

Դիցուք X-ը և Y-ը որևէ բազմություններ են, իսկ R-ը և S-ը համարժեքության հարաբերություններ են համապատասխանաբար X-ի և Y-ի վրա: Դիցուք $f : X \to Y$ արտապատկերումն այնպիսին է, որ X-ում տարրերի միջև $x_1 R x_2$ հարաբերություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի տարրերի $f(x_1) S f(x_2)$ հարաբերություն Y-ում:

Այս պայմաններում սահմանվում է ֆակտոր-բազմությունների $X/R \to Y/S$ արտապատկերում համարժեքության դասերի $[x] \mapsto [f(x)]$ համադրումով (այստեղ պարզության համար համարժեքության դասերը X-ում և Y-ում նշանակված են միևնույն $[\ \ ]$ սիմվոլով): Այդ արտապատկերումը կոչվում է f արտապատկերման **ֆակտոր-արտապատկերում** և նշանակվում է $f_{(R,S)}$: Այսպիսով ըստ սահմանման՝ $f_{(R,S)}([x]) = [f(x)]$:

Թեորեմ 2: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Եթե f-ը անընդհատ է, ապա նրա ցանկացած $f_{(R,S)}$ ֆակտոր-արտապատկերում անընդհատ է: Եթե f-ը հոմեոմորֆիզմ է, ապա $f_{(R,S)}$-ը նույնպես հոմեոմորֆիզմ է:

Ապացուցում: Դիտարկենք $P_X : X \to X/R$, $P_X(x) = [x]$ և $P_Y : Y \to Y/S$, $P_Y(y) = [y]$ կանոնական պրոյեկցիաները: Ցույց տանք, որ

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P_X"'] & Y \arrow[d, "P_Y"] \\ X/R \arrow[r, "f_{(R,S)}"] & Y/S \end{tikzcd}$$

դիագրամը կոմուտատիվ է՝ $P_Y \circ f = f_{(R,S)} \circ P_X$:

Իրոք, մի կողմից $\big(P_Y \circ f\big)(x) = P_Y\big(f(x)\big) = [f(x)]$, իսկ մյուս կողմից՝

$$\big(f_{(R,S)} \circ P_X\big)(x) = f_{(R,S)}\big(P_X(x)\big) = f_{(R,S)}\big([x]\big) = [f(x)]:$$

Եթե f-ը անընդհատ է, ապա $P_Y \circ f$-ը անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ, ուստի անընդհատ է $f_{(R,S)} \circ P_X$-ը: Այժմ $f_{(R,S)}$ արտապատկերման անընդհատությունը հետևում է P_X կանոնական պրոյեկցիայի ունիվերսալության հատկությունից ըստ թեորեմ 1-ի:

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ պնդումը: Դիցուք f-ը հոմեոմորֆիզմ է. ցույց տանք, որ $f_{(R,S)}$-ը հակադարձելի արտապատկերում է: Եթե $f_{(R,S)}([x_1]) = f_{(R,S)}([x_2])$, ապա $[f(x_1)] = [f(x_2)]$, ուստի տեղի ունի $f(x_1)Sf(x_2)$ հարաբերությունը: Սրանից հետևում է, որ տեղի ունի x_1Rx_2 հարաբերությունը, ուրեմն $[x_1] = [x_2]$: Այսպիսով $f_{(R,S)}$-ը ինյեկտիվ արտապատկերում է, իսկ նրա սյուրյեկտիվությունը հետևում է f-ի սյուրյեկտիվությունից: Հետևաբար գոյություն ունի ${f_{(R,S)}}^{-1}$ հակադարձ արտապատկերում: Այդ արտապատկերման անընդհատությունը հետևում է $P_X \circ f^{-1} = {f_{(R,S)}}^{-1} \circ P_Y$ հավասարությունից՝ շնորհիվ P_Y կանոնական պրոյեկցիայի ունիվերսալության հատկության: ■

Դիտարկենք թեորեմ 2-ի մի կիրառության օրինակի տեսքով: Որպես X վերցնենք դրական թվերի $(0, +\infty)$ բազմությունը $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով, որպես Y վերցնենք $\mathbb{R}$-ը, իսկ որպես $f : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ հոմեոմորֆիզմ՝ $f(x) = \lg x$ ֆունկցիան: Այժմ սահմանենք R և S համարժեքության հարաբերություններ X-ի և Y-ի վրա:

Կհամարենք, որ $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ տարրերը բավարարում են R հարաբերությանը, եթե x_1, x_2 թվերից որևէ մեկը ստացվում է մյուսի բազմապատկումով որևէ 10^n, $n \geq 0$ թվով: Ինչպես գիտենք (տե՛ս թեմա 2-ում), ցանկացած իրական թիվ միակ ձևով ներկայացվում է անվերջ դասնորդական կոտորակի տեսքով: Ուստի «տեղի ունի x_1Rx_2 հարաբերություն» նույնն է ինչ՝ կամ $r_1 = r_2$, կամ այդ թվերից մեծը ստացվում է փոքրից՝ կոտորակում ստորակետը n նիշ դեպի աջ տեղափոխումով (օրինակ՝ այդպիսիք են 0,31051...; 3,1051...; 31,051...; և այլն թվերը):

Կհամարենք, որ տեղի ունի r_1Sr_2, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ հարաբերություն, եթե $(r_1 - r_2)$-ը ամբողջ թիվ է: Այս համարժեքության հարաբերությունը քննարկվել է թեմա 2-ում (տե՛ս օրինակ 9-ը), նաև այս թեմայում (տե՛ս օրինակ 2-ը): Արդյունքում ստացել ենք, որ $\mathbb{R}/S$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Եթե $x_1 = 10^n \cdot x_2$, ապա $\lg x_1 - \lg x_2 = n$: Ուստի x_1Rx_2 տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $f(x_1)Sf(x_2)$: Այժմ թեորեմ 2-ից ստանում ենք, որ $f_{(R,S)} : X/R \to Y/S$ ֆակտոր-արտապատկերումը ֆակտոր-տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է: Այստեղից որպես հետևանք ստանում ենք, որ X/R ֆակտոր-տարածությունը նույնպես հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Իհարկե, ստացված արդյունքը մեծ չէ, և դրան կարելի էր հասնել ավելի արագ և

անմիջականորեն: Բայց մենք գերադասեցինք այս ուղին ցուցադրելու համար թեորեմ 2-ը որպես մեթոդ, որը կարող է լինել օգտակար այլ, ավելի բարդ իրավիճակներում:

Նախորդ թեմայում խոսք գնաց տոպոլոգիական տարածությունների այն հատկությունների մասին, որոնք ժառանգաբար անցնում են նրանց ենթատարածություններին:

Նման հարցադրում տեղի ունի նաև տարածությունների ֆակտորիզացիայի դեպքում: Ասում են, որ տոպոլոգիական տարածություններին առնչվող որևէ P հատկություն ժառանգական է տարածությունների ֆակտորիզացիայի դեպքում, եթե ամեն անգամ, երբ որևէ X տարածություն օժտված է P հատկությամբ, նրա ցանկացած X/R ֆակտոր-տարածություն նույնպես օժտված է P հատկությամբ:

Օրինակ 1-ում մենք տեսանք, որ անջատելիության T_2 աքսիոմը չի հանդիսանում ժառանգական հատկություն ֆակտորիզացիայի դեպքում: Այժմ բերենք ժառանգական հատկության մի օրինակ:

Թեորեմ 3: Սեպարաբել տարածության ցանկացած ֆակտոր-տարածություն սեպարաբել տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը սեպարաբել տարածություն է. դիտարկենք նրա որևէ X/R ֆակտոր-տարածություն և $P : X \to X/R$ կանոնական պրոյեկցիան: Ինչպես գիտենք, P-ն անընդհատ և սյուրյեկտիվ արտապատկերում է:

Ըստ պայմանի՝ X-ում գոյություն ունի ամենուրեք խիտ հաշվելի $A \subset X$ ենթաբազմություն՝ $\overline{A} = X$: Ըստ թեմա 9-ում թեորեմ 5-ի՝ $P(\overline{A}) \subset \overline{P(A)}$: Քանի որ $P(\overline{A}) = P(X) = X/R$, ուստի $\overline{P(A)} = X/R$: Այսպիսով $P(A)$-ն ամենուրեք խիտ հաշվելի ենթաբազմություն է X/R-ում, ուրեմն X/R ֆակտոր-տարածությունը սեպարաբել է: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 13-ի վերաբերյալ

13.1. Ապացուցեք. ($\mathbb{R}$, սովոր.) թվային ուղղի $(-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ տրոհումից ստացվող ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է կապակցված կետազույգ տարածությանը (սահմանումը տե՛ս թեմա 4-ում):

13.2. Դիտարկենք ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության կետերի միջև R երկտեղ հարաբերություն, ըստ որի $x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)$-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցեք.

ա) R-ը համարժեքության հարաբերություն է,

բ) $\mathbb{R}/R$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության շրջանագծի:

Ցուցում. Օգտվեք թեմա 2-ում օրինակ 9-ից և այս թեմայի օրինակ 2-ից:

13.3. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը սովորական տոպոլոգիայով և R երկտեղ հարաբերություն նրա կետերի միջև, ըստ որի $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow$ $x_1 - x_2$ և $y_1 - y_2$ թվերը ամբողջ են: Ապացուցեք.

ա) R-ը համարժեքության հարաբերություն է,

բ) ${\mathbb{R}^2}/_R$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է տորի:

Յուցում. Օգտվեք թեմա 2-ում օրինակ 10-ից:

13.4. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. եթե ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f : X \to Y$ անընդհատ, սյուրյեկտիվ արտապատկերում, ապա Y-ը X-ի ֆակտոր-տարածությունն է որոշված f արտապատկերումով:

Յուցում. Դիտարկեք, օրինակ, $(X, \text{դիսկր.})$, $(Y, \text{անտիդ.})$ տարածությունները, որտեղ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, և $f : X \to Y$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ արտապատկերումը: Ցույց տվեք, որ Y բազմության տվյալ տոպոլոգիան չի համընկնում f արտապատկերումով որոշվող Y-ի ֆակտոր-տոպոլոգիայի հետ:

13.5. Ապացուցեք, որ $\mathbb{RP}^1$ պրոյեկտիվ ուղիղը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Յուցում. Ներկայացրեք $\mathbb{RP}^1$-ը որպես փակ կիսաշրջանագծի ֆակտոր-տարածություն:

13.6. Ստուգեք. արդյո՞ք բաց (փակ) արտապատկերում է օրինակ 1-ում $P : X \to {X}/_R$ կանոնական պրոյեկցիան:

13.7. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. ցանկացած ${X}/_R$ ֆակտոր-տարածության դեպքում $P : X \to {X}/_R$ կանոնական պրոյեկցիան բաց արտապատկերում է:

Յուցում. Դիտարկեք օրինակ 2-ում $[0, \frac{1}{2}) \subset [0, 1]$ ենթաբազմության կերպարը կանոնական պրոյեկցիայի դեպքում:

13.8. Ապացուցեք. կամայական ${X}/_R$ ֆակտոր-տարածության դեպքում $P : X \to {X}/_R$ կանոնական պրոյեկցիան բաց (փակ) արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի ցանկացած U բաց ենթաբազմության դեպքում $P^{-1}\big(P(U)\big)$ ենթաբազմությունը բաց է (փակ է) X-ում:

Մինչև հաջորդ խնդիրներին անցնելը տանք մի սահմանում:

Դիցուք X-ը տոպոլոգիական տարածություն է, իսկ A-ն X-ի որևէ ենթաբազմություն է: Դիտարկենք R համարժեքության հարաբերություն X-ի վրա համարելով՝

ա) տեղի ունի $a_1 R a_2$ հարաբերություն A-ի ցանկացած երկու a_1, a_2 տարրերի դեպքում,

բ) եթե $x_1, x_2 \in X \setminus A$, կամ $x_1 \in A$ և $x_2 \in X \setminus A$, ապա տեղի ունի $x_1 R x_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2$:

Այսպիսով համարժեքության դասերը X-ի միկեպանոց ենթաբազմություններն են և A-ն:

Այս դեպքում X/R ֆակտոր-տարածության մասին ասում են, որ այն ստացվում է X-ից՝ **սեղմելով մի կետի** A-ի բոլոր կետերը: Նշանակենք այդ տարածությունը X/A սիմվոլով:

13.9. Դիցուք X-ը $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության $\mathcal{B}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ միավոր շրջանն է, իսկ A-ն նրա եզրային $\mathcal{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ միավոր շրջանագիծն է: Ապացուցեք, որ X/A ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ սֆերային: Պատկերավոր ասած՝ շրջանի եզրը կետի սեղմելիս ստացվում է սֆերա:

Ցուցում. Նախ կառուցեք հոմեոմորֆիզմ $\mathcal{B}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ անեզր շրջանի և առանց մի կետ $\mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ շրջանի միջև:

13.10. Դիցուք X-ը $x^2 + y^2 = 1$ ուղիղ շրջանային գլանն է $\mathbb{R}^3$-ում, իսկ A-ն $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ շրջանագիծն է: Ապացուցեք, որ X/A ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է $Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ կոնական մակերևույթին: Պատկերավոր ասած՝ գլանում մի շրջանագիծ կետի սեղմելիս ստացվում է կոնական մակերևույթ:

Ցուցում. Նախ ցույց տվեք, որ $(x, y, z) \mapsto (xz, yz, z)$ համադրումը որոշում է հոմեոմորֆիզմ $X \setminus A$ և $Y \setminus \{(0, 0, 0)\}$ տարածությունների միջև:

Թեմա 14

Տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալը, օրինակներ, հատկությունները: Ենթաբազմությունների փակույթն ու ներքինը ուղիղ արտադրյալում: Ուղիղ արտադրյալի ժառանգական հատկություններ: Որոշ երկրաչափական հասկացություններ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածություններում:

Դիցուք ունենք (X, τ) և (Y, σ) տոպոլոգիական տարածություններ: Մեր խնդիրն է որպես ելակետ ընդունելով τ և σ տոպոլոգիաները՝ սահմանել տոպոլոգիա բազմությունների $X \times Y$ դեկարտյան արտադրյալի համար: Նշանակվում է այն $\tau \times \sigma$: Բնական կլինի $X \times Y$-ում բաց բազմություններ հայտարարել նրա բոլոր $U \times V$ տեսքի ենթաբազմությունները, որտեղ U-ն և V-ն կամայական բաց ենթաբազմություններ են համապատասխանաբար X-ում և Y-ում: Ստուգենք տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները:

1. Պարզ է, որ $\varnothing \times \varnothing = \varnothing \in \tau \times \sigma$, և $X \times Y \in \tau \times \sigma$ (քանի որ $X \in \tau,\ Y \in \sigma$):

2. Միավորման աքսիոմը տեղի չունի, քանի որ ընդհանուր դեպքում $U_i \times V_j$ և $U_k \times V_l$ տեսքերի ենթաբազմությունների միավորումը կարող է չունենալ նույնպիսի տեսք (տե՛ս թեորեմ 1-ը թեմա 2-ում):

Այսպիսով $U \times V,\ U \in \tau,\ V \in \sigma$ ենթաբազմությունները չեն կազմում տոպոլոգիա $X \times Y$-ի համար: Բայց կազմում են տոպոլոգիայի բազա: Իրոք, բավարարվում են թեմա 5-ում թեորեմ 2-ի 1-2 պայմանները, քանի որ

1. $\bigcup\limits_{i,j}(U_i \times V_j) = X \times Y$;

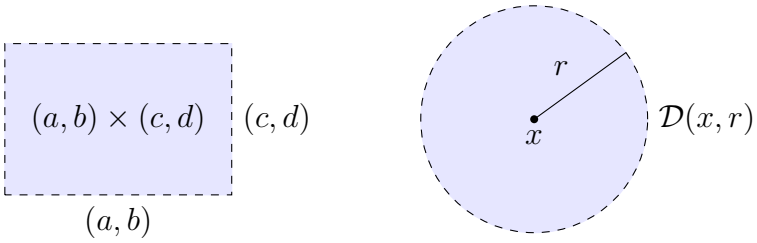
2. $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) = (U_i \cap U_k) \times (V_j \cap V_l)$:

Այդ բազայով ծնված $\tau \times \sigma$ տոպոլոգիան կոչվում է $X \times Y$ **ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիա**, իսկ $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ զույգը կոչվում է (X, τ) և (Y, σ) **տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալ**: Այսպիսով $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ տոպոլոգիական տարածությունում բաց բազմություններ են համարվում բոլոր $U \times V$, $U \in \tau,\ V \in \sigma$ տեսքի ենթաբազմություններն ու նրանց բոլոր հնարավոր միավորումները:

Նման ձևով սահմանվում է տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալ կամայական վերջավոր քանակով (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), $\ldots$, (X_n, τ_n) տարածությունների դեպքում: Ստացվող $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,\ \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_n)$ տարածության տոպոլոգիայի բազա են կազմում բոլոր $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n,\ U_i \in \tau_i$ տեսքի ենթաբազմությունները:

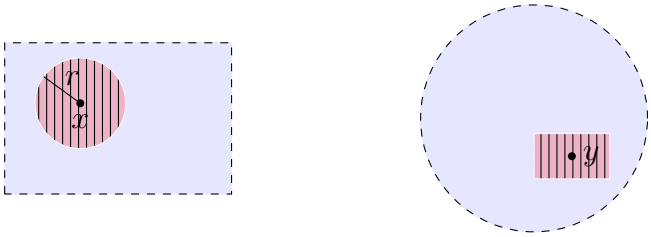
Օրինակ 1: Դիտարկենք $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը սովորական մետրիկային տոպոլոգիայով՝ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$, և $(\mathbb{R}, \text{սովոր.}) \times (\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ ուղիղ արտադրյալը: Այս տարածությունը $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունն է, որի սովոր. $\times$ սովոր.

տոպոլոգիայի համար բազա է ծառայում բոլոր $(a,b)\times(c,d)$ տեսքի անեզր ուղղանկյունների բազմությունը:



Մյուս կողմից՝ $\mathbb{R}^2$ հարթության համար ունենք նաև սովորական մետրիկային տոպոլոգիա, որի համար բազա է ծառայում բոլոր անեզր $\mathcal{D}(x,r)$ շրջանների բազմությունը:

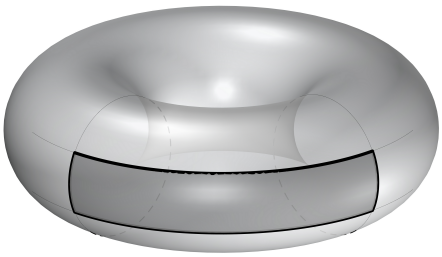
Ցույց տանք, որ այս երկու բազաները որոշում են $\mathbb{R}^2$ հարթության միևնույն տոպոլոգիան, և հետևաբար ($\mathbb{R}^2$, սովոր.$\times$սովոր.) և ($\mathbb{R}^2$, սովոր. մետր. տոպ.) տոպոլոգիական տարածությունները նույնն են: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ ամեն մի անեզր ուղղանկյուն կարելի է ներկայացնել որպես անեզր շրջանների միավորում, և հակառակը՝ ամեն մի անեզր շրջան կարելի է ներկայացնել որպես անեզր ուղղանկյունների միավորում:



Իրոք, (տե՛ս գծագիրը) անեզր ուղղանկյան ամեն մի x կետի համար կարելի է ընտրել $r>0$ թիվ այնպես, որ $\mathcal{D}(x,r)$ շրջանն ամբողջությամբ պարունակվի ուղղանկյան ներսում: Նաև հակառակը՝ անեզր շրջանի ամեն մի y կետի համար գոյություն ունի y կենտրոնով անեզր ուղղանկյուն, որն ամբողջությամբ գտնվում է շրջանի ներսում:

Այս օրինակը ընդհանրացվում է. ($\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ հատ}}$; $\underbrace{\text{սովոր.}\times\text{սովոր.}\times\cdots\times\text{սովոր.}}_{n\text{ հատ}}$) տարածությունը նույնն է, ինչ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածությունը՝ վերցված սովորական մետրիկային տոպոլոգիայով:

Օրինակ 2: Դիցուք S-ը շրջանագիծ է $\mathbb{R}^2$ հարթությունում՝ օժտված $\mathbb{R}^2$-ի սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված τ տոպոլոգիայով: Դիտարկենք $S\times S$ տարածությունը $\tau\times\tau$ տոպոլոգիայով: Թեմա 2-ում կառուցվել է $S\times S$ բազմության մոդել տորի տեսքով (մակերևույթ, որն առաջանում է $\mathbb{R}^3$-ում շրջանագծի պտտումով իրեն չհատող ուղղի շուրջ): Այժմ հեշտ է տեսնել, որ $\tau\times\tau$ տոպոլոգիայի համար բազա է ծառայում տորի վրա բոլոր կորագիծ անեզր ուղղանկյունների բազմությունը, որոնք սահմանափակված են որևէ երկու միջօրեականներով և որևէ երկու զուգահեռականներով (տե՛ս գծագիրը):



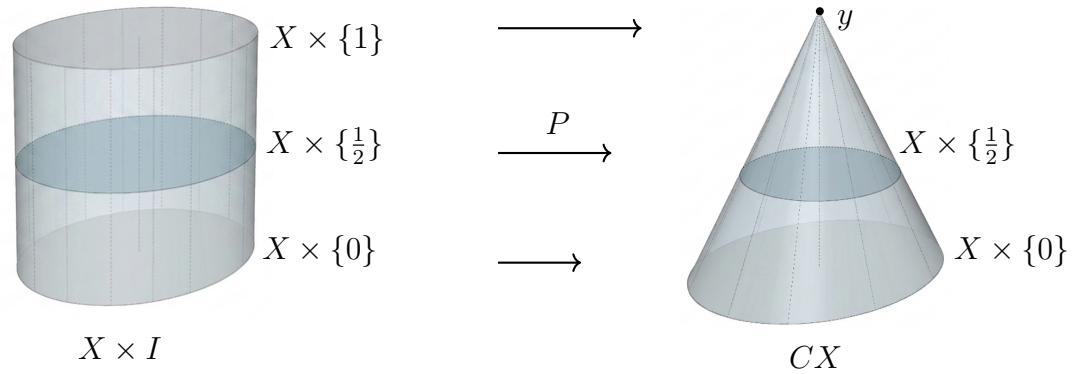
Այնուհետև, ինչպես օրինակ 1-ում, նույնանման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ տորի $\tau\times\tau$ տոպոլոգիան և $\mathbb{R}^3$-ի սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից տորի վրա մակածված տոպոլոգիան նույնն են:

Սահմանում: Դիցուք (X,τ)-ն որևէ տոպոլոգիական տարածություն է, իսկ I-ն $[0,1]$ հատվածն է $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Ապա $(X\times I,\ \tau\times$ սովոր.$)$ տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է ***X* հիմքով գլան**: Հիշեցնենք, որ $X\times I$ արտադրյալը որպես բազմություն քննարկվել է թեմա 2-ում (տե՛ս օրինակ 4-ը): Այժմ մենք $X\times I$-ն վերածեցինք տոպոլոգիական տարածության:

Սահմանվում է նաև ***X* հիմքով և *y* գագաթով *CX* կոնը՝** որպես $X\times I$ գլանի ֆակտոր-տարածություն ըստ հետևյալ համարժեքության հարաբերության. $(x,t)\sim(x,t)$, երբ $1>t\geq 0$, իսկ $x\in X$ կամայական կետ է, և $(x_1,1)\sim(x_2,1)$ ցանկացած $x_1,x_2\in X$ կետերի դեպքում:

Պատկերավոր ասած՝ $X\times I$ գլանի վերին $X\times\{1\}$ հիմքի բոլոր $(x,1)$ կետերը սեղմվում են մի կետի՝ առաջացնելով CX կոնի y գագաթը:

Ստորև պատկերված է $P:X\times I\to CX$ կանոնական պրոյեկցիան.



Որպես օգտակար խնդիր՝ ընթերցողին առաջարկում ենք նկարագրել կոնի y գագաթի բաց շրջակայքերը $CX={}^{X\times I}\!/_{\sim}$ ֆակտոր-տարածությունում:

Ուղիղ արտադրյալի հատկություններ

Թեորեմ 1: Կամայական (X,τ) և (Y,σ) տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում $(X\times Y,\tau\times\sigma)$ ուղիղ արտադրյալի

$$P_X : X\times Y\to X,\ P_X(x,y)=x \qquad \text{և} \qquad P_Y : X\times Y\to Y,\ P_Y(x,y)=y$$

կանոնական պրոյեկցիաները բաց արտապատկերումներ են: Բացի այդ, $\tau\times\sigma$-ն ամենաթույլ տոպոլոգիան է $X\times Y$ բազմության վրա, որի դեպքում P_X և P_Y պրոյեկցիաները անընդհատ են:

Ապացուցում: Եթե $U\in\tau$, $V\in\sigma$, ապա պարզ է, որ $P_X^{-1}(U)=U\times Y$ և $P_Y^{-1}(V)=X\times V$ ենթաբազմությունները բաց են $X\times Y$-ում, ուստի P_X-ը և P_Y-ը անընդհատ են: Այժմ դիտարկենք կամայական $U=\bigcup\limits_{i,j}(U_i\times V_j),\ U_i\in\tau,\ V_j\in\sigma$ բաց ենթաբազմություն $X\times Y$-ում: Ունենք՝

$$P_X(U)=P_X\left(\bigcup_{i,j}U_i\times V_j\right)=\bigcup_{i,j}P_X(U_i\times V_j)=\bigcup_i U_i\in\tau$$
$$P_Y(U)=P_Y\left(\bigcup_{i,j}U_i\times V_j\right)=\bigcup_{i,j}P_Y(U_i\times V_j)=\bigcup_j V_j\in\sigma$$

ուստի P_X-ը և P_Y-ը բաց արտապատկերումներ են:

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք $\varkappa$-ն որևէ այնպիսի տոպոլոգիա է $X\times Y$ բազմության վրա, որ P_X և P_Y կանոնական պրոյեկցիաները անընդհատ են: Նշանակում է՝ կամայական $U\in\tau$ և $V\in\sigma$ ենթաբազմությունների $P_X^{-1}(U)=U\times Y$ և $P_Y^{-1}(V)=X\times V$ նախակերպարները պատկանում են $\varkappa$ տոպոլոգիային: Ուստի $\varkappa$ տոպոլոգիային է պատկանում նաև նրանց $P_X^{-1}(U)\cap P_Y^{-1}(V)=(U\times Y)\cap(X\times V)=U\times V$ հատումը: Հետևաբար $\varkappa$ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակում է $\tau\times\sigma$ տոպոլոգիան: Ուստի $\tau\times\sigma$-ն ամենաթույլ տոպոլոգիան է $X\times Y$ բազմության վրա, որի դեպքում P_X-ը և P_Y-ը անընդհատ են: ■

Հետևանք թեորեմ 1-ից: $(X\times Y,\tau\times\sigma)$ տարածությունում $U\times V$ տեսքի ենթաբազմությունը բաց է այն և միայն այն դեպքում, երբ U-ն բաց է X-ում և V-ն բաց է Y-ում (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 2: Դիցուք ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f_1 : X_1\to Y_1$, $f_2 : X_2\to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա նրանց

$$f_1\times f_2 : X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2,$$
$$(f_1\times f_2)(x_1,x_2)=(f_1(x_1),f_2(x_2))$$

արտադրյալ արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը:

Ապացուցում: ա) Դիցուք $f_1\times f_2$-ը անընդհատ է: Դիտարկենք հետևյալ կոմուտատիվ դիագրամը (տե՛ս թեմա 2-ում): Դիագրամի կոմուտատիվությունը նշանա-

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "P_{X_1}"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "P_{Y_1}"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

կում է, որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$ և $f_1 \circ P_{X_1}$ համադրությունները նույն $X_1 \times X_2 \to Y_1$ արտապատկերումն են: Քանի որ $P_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2)$-ը անընդհատ է, ուստի $f_1 \circ P_{X_1}$-ն անընդհատ է: Մյուս կողմից, ըստ թեորեմ 1-ի՝ P_{X_1}-ը սյուրյեկտիվ բաց արտապատկերում է, ուստի f_1-ը անընդհատ է համաձայն թեմա 9-ի թեորեմ 8-ի: Նման ձևով ապացուցվում է f_2-ի անընդհատությունը:

բ) Դիցուք այժմ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը: Ցույց տանք, որ $Y_1 \times Y_2$-ում բաց կամայական ենթաբազմության նախակերպարը $f_1 \times f_2$ արտապատկերման դեպքում բաց ենթաբազմություն է $X_1 \times X_2$-ում: Բավական է դա ցույց տալ $Y_1 \times Y_2$ տարածության տոպոլոգիայի բազային $V_1 \times V_2$ տարրերի համար (տե՛ս թեորեմ 3-ից հետևանք 2-ը թեմա 9-ում): Քանի որ $(f_1 \times f_2)^{-1}(V_1 \times V_2) = f_1^{-1}(V_1) \times f_2^{-1}(V_2)$, ուստի $(f_1 \times f_2)^{-1}(V_1 \times V_2)$ ենթաբազմությունը բաց է $X_1 \times X_2$-ում: ■

Թեորեմ 3: Ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f_1 : X \to Y_1,\ f_2 : X \to Y_2$ արտապատկերումներ: Ապա նրանցով որոշված (տե՛ս թեմա 2-ում)

$$(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2, \quad (f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad x \in X$$

անկյունագծային արտապատկերումն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը:

Ապացուցում: ա) Դիցուք (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: Դիտարկենք $P_{Y_1} \circ (f_1, f_2) : X \to Y_1$ համադրությունը: Կամայական $x \in X$ կետի դեպքում ունենք՝

$$P_{Y_1} \circ (f_1, f_2)(x) = P_{Y_1}((f_1, f_2)(x)) = P_{Y_1}(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x), \quad \forall x \in X:$$

Նշանակում է՝ $P_{Y_1} \circ (f_1, f_2) = f_1$, և նման ձևով $P_{Y_2} \circ (f_1, f_2) = f_2$: Ուստի f_1-ը և f_2-ը անընդհատ են՝ որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրություններ:

բ) Դիցուք անընդհատ են f_1-ը և f_2-ը: Ցույց տանք, որ (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: Բավական է ցույց տալ, որ $\forall V_1 \times V_2 \subset Y_1 \times Y_2$ բաց ենթաբազմության դեպքում $(f_1, f_2)^{-1}(V_1 \times V_2)$-ը բաց է X-ում: Ունենք՝

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)^{-1}(V_1 \times V_2) &= (f_1, f_2)^{-1}((V_1 \times Y_2) \cap (Y_1 \times V_2)) = (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_1}^{-1}(V_1) \cap P_{Y_2}^{-1}(V_2)) \\ &= (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_1}^{-1}(V_1)) \cap (f_1, f_2)^{-1}(P_{Y_2}^{-1}(V_2)) \\ &= (P_{Y_1} \circ (f_1, f_2))^{-1}(V_1) \cap (P_{Y_2} \circ (f_1, f_2))^{-1}(V_2) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2), \end{aligned}$$

որը բաց է որպես X-ում բաց ենթաբազմությունների հատում:

Ուստի (f_1, f_2)-ը անընդհատ է: ■

Թեորեմ 4: Կամայական X, Y, Z տարածությունների դեպքում ցանկացած $h : Z \to X \times Y$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են $f = P_X \circ h$ և $g = P_Y \circ h$ համադրությունները:

Ապացուցում: Եթե h-ը անընդհատ է, ապա f-ը և g-ն անընդհատ են որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրություններ: Այժմ հակառակը. դիցուք f-ը

և g-ն անընդհատ են, ցույց տանք h-ի անընդհատությունը: Դիտարկենք $X \times Y$-ի կամայական $U \times V$ տեսքի ենթաբազմություն, որտեղ U-ն բաց է X-ում, իսկ V-ն բաց է Y-ում: Ունենք՝

$$\begin{aligned} h^{-1}(U \times V) &= h^{-1}\big((U \times Y) \cap (X \times V)\big) \\ &= h^{-1}\big(P_X^{-1}(U) \cap P_Y^{-1}(V)\big) \\ &= h^{-1}\big(P_X^{-1}(U)\big) \cap h^{-1}\big(P_Y^{-1}(V)\big) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) : \end{aligned}$$

Սրանից հետևում է, որ $h^{-1}(U \times V)$ ենթաբազմությունը բաց է Z-ում՝ որպես Z-ում բաց $f^{-1}(U)$ և $g^{-1}(V)$ ենթաբազմությունների հատում, ուստի h-ը անընդհատ է: ■

Նկատենք, որ թեորեմ 4-ը ընդհանրացվում է ցանկացած $f : Z \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, $n > 1$ տեսքի արտապատկերումների դեպքում:

Թեորեմ 5: Որևէ $f : Z \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ են $f_i : Z \to X_i$ արտապատկերումները, որտեղ $f_i = P_{X_i} \circ f,\ i = 1, 2, \ldots, n$:

Ապացուցումը, որպես օգտակար խնդիր, **թողնվում է ընթերցողին**:

Թեորեմ 6: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ, նրանցում $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմություններ: Դիտարկենք $A \times B \subset X \times Y$ ենթաբազմությունը: Ապա

1. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$,

2. $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$:

Ապացուցում: Ավելորդ չէ նկատել, որ 1-ում միևնույն գծիկով մենք նշանակել ենք ենթաբազմության փակույթ գործողությունը երեք տարբեր X, Y, $X \times Y$ տարածություններում: Նույնը վերաբերում է ենթաբազմության ներքինի int սիմվոլին 2-ում: Նախ ապացուցենք 1-ը: Դիցուք $(x_0, y_0) \in \overline{A \times B}$: Կիրառելով թեմա 9-ի թեորեմ 5-ը $P_X : X \times Y \to X$ (անընդհատ) պրոյեկցիայի և $A \times B \subset X \times Y$ ենթաբազմության նկատմամբ, կունենանք՝

$$P_X(\overline{A \times B}) \subset \overline{P_X(A \times B)} = \overline{A} \quad \Rightarrow \quad P_X(x_0, y_0) \in \overline{A} \quad \Rightarrow \quad x_0 \in \overline{A}:$$

Նման ձևով $y_0 \in \overline{B} \ \Rightarrow\ (x_0, y_0) \in \overline{A} \times \overline{B}$: Ուստի $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$: Այժմ հակառակը. դիցուք $(x_0, y_0) \in \overline{A} \times \overline{B}$: Ցույց տանք, որ (x_0, y_0)-ն հպման կետ է $A \times B$-ի համար: Դիտարկենք (x_0, y_0)-ի որևէ $W \subset X \times Y$ շրջակայք: Գոյություն ունի (x_0, y_0)-ի $U \times V$ տեսքի բաց շրջակայք, որ $(x_0, y_0) \in U \times V \subset W$: Քանի որ $x_0 \in \overline{A}$ և $x_0 \in U$, ուստի $U \cap A \neq \varnothing$: Նման ձևով՝ $V \cap B \neq \varnothing$: Հետևաբար՝ $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing \ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ W \cap (A \times B) \neq \varnothing \ \Rightarrow\ (x_0, y_0) \in A \times B \ \Rightarrow\ \overline{A} \times \overline{B} \subset \overline{(A \times B)}$:

Ապացուցենք 2-ը: Ունենք՝ $\operatorname{int}(A \times B) \subset A \times B \Rightarrow P_X(\operatorname{int}(A \times B)) \subset P_X(A \times B) = A$: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $P_X(\operatorname{int}(A \times B))$-ն բաց է X-ում, ուստի $P_X(\operatorname{int}(A \times B)) \subset \operatorname{int} A \ \Rightarrow$

$\operatorname{int}(A \times B) \subset P_X^{-1}(\operatorname{int} A) = (\operatorname{int} A) \times Y$: Նման ձևով $\operatorname{int}(A \times B) \subset P_Y^{-1}(\operatorname{int} B) = X \times (\operatorname{int} B)$: Հետևաբար $\operatorname{int}(A \times B) \subset ((\operatorname{int} A) \times Y) \cap (X \times (\operatorname{int} B)) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$: Հակառակ պնդումը՝ $\operatorname{int} A \times \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \times B)$ ապացուցվում է հեշտությամբ և **թողնվում է ընթերցողին**: ■

Հետևանքներ թեորեմ 6-ից: 1. $A \times B$-ն փակ ենթաբազմություն է $X \times Y$-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն փակ է X-ում և B-ն փակ է Y-ում:

2. $A \times B$-ն բաց ենթաբազմություն է $X \times Y$-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն բաց է X-ում և B-ն բաց է Y-ում (սա մենք արդեն ստացել էինք նաև որպես հետևանք թեորեմ 1-ից):

Գոյություն ունեն մի շարք տոպոլոգիական հատկություններ, որ եթե X և Y տարածություններն օժտված են դրանցից մեկով, ապա նրանց $X \times Y$ արտադրյալը նույնպես բավարարում է այդ հատկությանը, և հակառակը: Այդպիսի հատկություններ են օրինակ՝ անջատելիության $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ աքսիոմները, կապակցվածությունը, կոմպակտությունը: Ապացուցենք մի այդպիսի թեորեմ:

Թեորեմ 7: $X \times Y$ տարածությունը հաուսդորֆյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ հաուսդորֆյան տարածություններ են X-ը և Y-ը:

Ապացուցում: Ենթադրենք $X \times Y$-ը հաուսդորֆյան է և ցույց տանք, որ X-ը (նման ձևով՝ Y-ը) հաուսդորֆյան է: Դիցուք $x_1, x_2 \in X$ և $x_1 \neq x_2$: Սևեռենք որևէ $y_0 \in Y$ կետ և դիտարկենք (x_1, y_0) և (x_2, y_0) կետերը $X \times Y$-ում: Ըստ պայմանի, քանի որ $(x_1, y_0) \neq (x_2, y_0)$, գոյություն ունեն այդ կետերի չհատվող, բաց W_1, W_2 շրջակայքեր $X \times Y$-ում՝ $(x_1, y_0) \in W_1$, $(x_2, y_0) \in W_2$: Համաձայն ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայի սահմանման՝ գոյություն ունեն այդ կետերի համապատասխանաբար $U_1 \times V_1$ և $U_2 \times V_2$ բաց շրջակայքեր $X \times Y$-ում, որ $(x_1, y_0) \in U_1 \times V_1 \subset W_1$, $(x_2, y_0) \in U_2 \times V_2 \subset W_2$: Քանի որ $y_0 \in V_1$ և $y_0 \in V_2$, ուստի $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$: Ըստ պայմանի՝ $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, որից հետևում է, որ նաև $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \varnothing$: Դրանից էլ հետևում է, որ $U_1 \cap U_2 = \varnothing$: Այսպիսով՝ X-ի կամայական $x_1 \neq x_2$ կետեր ունեն U_1, U_2 չհատվող շրջակայքեր $\Rightarrow$ X-ը հաուսդորֆյան է: Նման ձևով ապացուցվում է, որ Y-ը ևս հաուսդորֆյան է:

Այժմ հակառակը. ենթադրենք՝ X-ը և Y-ը հաուսդորֆյան տարածություններ են, ցույց տանք, որ $X \times Y$-ը հաուսդորֆյան է: Դիցուք (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$ և $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$: Որոշակիության համար ենթադրենք $x_1 \neq x_2$: Ըստ պայմանի՝ X-ում գոյություն ունեն x_1, x_2 կետերի չհատվող, բաց U_1, U_2 շրջակայքեր՝ $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$: Պարզ է, որ $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$, իսկ $U_1 \times Y$-ը և $U_2 \times Y$-ը այդ կետերի չհատվող բաց շրջակայքեր են $X \times Y$-ում: ■

Դիտողություն: Վերը բերված 1-7 թեորեմներն ունեն իրենց նմանակները կամայական վերջավոր քանակով $X_1, X_2, \ldots, X_n$ տոպոլոգիական տարածությունների դեպքում (ձևակերպումներն ու ապացուցումները թողնում ենք ընթերցողին):

Այժմ քննարկենք հետևյալ հարցը. կարելի՞ է արդյոք X (կամ Y) տարածությունը ինչ-որ իմաստով դիտարկել որպես $X \times Y$ տարածության ենթատարածություն:

Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ: Սևեռենք որևէ $y_0 \in Y$ կետ և դիտարկենք $X \times Y$-ի $X \times \{y_0\}$ ենթատարածությունը:

Թեորեմ 8: $X \times \{y_0\}$ ենթատարածությունը հոմեոմորֆ է X-ին:

Ապացուցում: Սահմանենք $h : X \to X \times \{y_0\}$ արտապատկերում՝ $h(x) = (x, y_0)$, $x \in X$ բանաձևով: Ցույց տանք, որ h-ը հոմեոմորֆիզմ է: Պարզ է, որ h-ը բիյեկտիվ արտապատկերում է, ուստի համաձայն թեմա 9-ում թեորեմ 10-ի՝ բավական է ցույց տալ, որ h-ը բաց արտապատկերում է: Այդ նպատակով նախ նկարագրենք $X \times \{y_0\}$ տարածության տոպոլոգիան: Դիտարկենք որևէ $U \times V$ բաց ենթաբազմություն $X \times Y$-ում (U-ն բաց է X-ում, V-ն՝ Y-ում) և նրա հատումը $X \times \{y_0\}$-ի հետ (հիշենք, որ $X \times Y$-ից $X \times \{y_0\}$-ի վրա մակածված տոպոլոգիայում բաց են միայն $(U \times V) \cap (X \times \{y_0\})$ տեսքի ենթաբազմությունները և նրանց միավորումները): Ունենք՝

$$(U \times V) \cap (X \times \{y_0\}) = (U \cap X) \times (V \cap \{y_0\}) = \begin{cases} \varnothing, \text{ երբ } y_0 \notin V, \\ U \times \{y_0\}, \text{ երբ } y_0 \in V: \end{cases}$$

Ուստի $X \times \{y_0\}$ տարածությունում բաց են $U \times \{y_0\}$ տեսքի ենթաբազմությունները, որտեղ U-ն կամայական բաց բազմություն է X-ում: Այստեղից ստանում ենք. եթե U-ն բաց է X-ում, ապա $h(U) = U \times \{y_0\}$ ենթաբազմությունը բաց բազմություն է $X \times \{y_0\}$ տարածությունում:

Բացի այդ h-ը անընդհատ է, քանի որ $h^{-1}(U \times \{y_0\}) = U$ բաց է X-ում: ■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ սևեռված $x_0 \in X$ կետի դեպքում $X \times Y$-ի $X \times \{y_0\}$ ենթատարածությունը հոմեոմորֆ է Y-ին:

Որոշ երկրաչափական հասկացություններ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածություններում

Ստորև n չափականության $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ էվկլիդեսյան տարածությունը կդիտարկվի ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայով (յուրաքանչյուր $\mathbb{R}$ արտադրիչը թվային ուղիղն է սովորական տոպոլոգիայով):

Սահմանում: Երկու՝ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ և $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ կետերով անցնող **ուղիղ** $\mathbb{R}^n$ **տարածությունում** կոչվում է $\{(1-t)A + tB,\ t \in \mathbb{R}\}$ կետերի բազմությունը:

Դիտարկելով այս ուղղի $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ փոփոխական կետ՝ ստանում ենք ուղղի այսպես կոչված պարամետրական հավասարումները՝

$$x_i = (1-t)a_i + tb_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Սահմանափակելով t պարամետրի որոշման տիրույթը $[0, 1]$ հատվածով՝ ստանում ենք ուղղի մաս, որը կոչվում է $\boldsymbol{A}$ **և** $\boldsymbol{B}$ **ծայրակետերով հատված** $\mathbb{R}^n$**-ում** (կնշանակենք $[A, B]$):

Մասնավոր՝ $n = 1$ դեպքում ունենք $A = (a),\ B = (b)$ կետեր $\mathbb{R}$-ում, իսկ $[A, B]$ հատվածը կարող է նույնացվել թվային ուղղի $(1-t)a + tb,\ t \in [0, 1]$ ենթաբազմության հետ: Կարճ կնշանակենք այն $[a, b]$: Այսպիսով ունենք $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ներդրում (f-ը $[a, b]$-ի նույնական հոմեոմորֆիզմն է իր կերպարի վրա):

Դիցուք այժմ ունենք $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$, $[a_n, b_n]$ հատվածներ $\mathbb{R}$-ում, դիտարկենք $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ ներդրումները և դրանց $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ ուղիղ արտադրյալը:

Սահմանում: Ուղղանկյունանիստ $\mathbb{R}^n$-ում կոչվում է $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots, \times [a_n, b_n]$ ուղիղ արտադրյալի կերպարը $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots, \times [a_n, b_n] \to \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$ արտապատկերման դեպքում:

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ և $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ կետերը կանվանենք ուղղանկյունանիստի **հակադիր գագաթներ**, իսկ $[A, B]$ հատվածը՝ ուղղանկյունանիստի **անկյունագիծ**:

Այս սահմանումը կարիք ունի լրացման: Այդ նպատակով նկատենք, որ թվային ուղղի $[a, b]$ հատված սահմանելիս մենք չենք պահանջել, որ անպայման $a < b$: Նկատենք նաև, որ $[a, b]$ և $[b, a]$ հատվածները նույնն են: Ուստի, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ արտադրյալում մի քանի $[a_i, b_i]$ արտադրիչներ փոխարինելով $[b_i, a_i]$ արտադրիչներով և կիրառելով ուղղանկյունանիստի սահմանումը՝ ստանում ենք, որ նոր և հին ուղղանկյունանիստերը նույնն են (հիմնավորե՛ք): Այստեղից հետևում է, որ ուղղանկյունանիստն ունի 2^n հատ գագաթ և 2^{n-1} հատ անկյունագիծ: Պարզաբանելու համար, թե որոնք են այդ գագաթներն ու անկյունագծերը, դիտարկենք սիմվոլիկ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ հաջորդականություն և նրանում որոշ x_i սիմվոլներ փոխարինենք a_i-ներով, իսկ մնացածները՝ b_i-ներով: Ստացված հաջորդականությունը որոշում է ուղղանկյունանիստի գագաթ: Իսկ եթե փոխարինումները կատարենք հակառակ կարգով, կստանանք նախկինին հակադիր գագաթ և դրանց միացնող անկյունագիծ: Այստեղից հետևում է, որ ուղղանկյունանիստի բոլոր անկյունագծերն ունեն միևնույն՝ $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$ երկարությունը: Բացի այդ, $M = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}, \ldots, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ կետը պատկանում է բոլոր անկյունագծերին: Այսպիսով, ուղղանկյունիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ $(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)\big([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]\big)$ ուղղանկյունանիստը պարունակվում է M կենտրոնով և $R = \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{a_i + b_i}{2}$ շառավղով $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{a_i + b_i}{2}\right)^2 \le R^2$ եզրով գնդում, ինչպես նաև

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)\big((a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)\big) = f_1(a_1, b_1) \times f_2(a_2, b_2) \times \cdots \times f_n(a_n, b_n)$$

բաց բազմությունը պարունակվում է $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{a_i + b_i}{2}\right)^2 < R^2$ անեզր գնդում: Ճիշտ է նաև հակառակը. յուրաքանչյուր $N(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ կենտրոնով և R շառավղով $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2 \le R^2$ եզրով գունդ պարունակվում է $f_1([c_1 - R, c_1 + R]) \times f_2([c_2 - R, c_2 + R]) \times$

$\times \cdots \times f_n([c_n - R, c_n + R])$ փակ ուղղանկյունանիստում, իսկ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2 < R^2$ անեզր գունդը պարունակվում է $f_1\big((c_1 - R, c_1 + R)\big) \times f_2\big((c_2 - R, c_2 + R)\big) \times f_n\big((c_n - R, c_n + R)\big)$ բաց ուղղանկյունանիստում:

Այստեղից ստանում ենք մի քանի կարևոր հետևանք:

Թեորեմ 9: $\mathbb{R}^n$-ի ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիան և մետրիկային տոպոլոգիան նույնն են:

Սահմանում: $\mathbb{R}^n$-ի որևէ ենթաբազմություն կոչվում է **սահմանափակ ենթաբազմություն**, եթե այն պարունակվում է որևէ ուղղանկյունանիստում:

Հետևանք: Ենթաբազմության սահմանափակությունը համարժեք է նրան, որ այն պարունակվի որևէ գնդում:

Սահմանում: $\mathbb{R}^n$-ի ենթաբազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ ենթաբազմություն**, եթե այն իր կամայական երկու կետերի հետ միասին պարունակում է դրանց միացնող հատվածը:

Վերոհիշյալներից հետևում է, որ $\mathbb{R}^n$-ը ինքը ուռուցիկ է (բայց կարող է պարունակել նաև ոչ ուռուցիկ ենթաբազմություններ): Նկատենք նաև, որ ուռուցիկությունը տոպոլոգիական հատկություն չէ (բերե՛ք օրինակ):

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 14-ի վերաբերյալ

14.1. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական X և Y տարածությունների դեպքում $P_X : X \times Y \to X$ կանոնական պրոյեկցիան փակ արտապատկերում է:

Ցուցում. Տե՛ս օրինակ 3-ը թեմա 13-ում:

14.2. Ապացուցեք. կամայական X և Y տարածությունների դեպքում $X \times Y$-ը հոմեոմորֆ է $Y \times X$-ին:

Ցուցում. Հիմնավորեք, որ $f : X \times Y \to Y \times X$, $f(x, y) = (y, x)$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է:

14.3. Ապացուցեք. կամայական X, Y, Z տարածությունների դեպքում $(X \times Y) \times Z$-ը հոմեոմորֆ է $X \times (Y \times Z)$-ին:

Ցուցում. Հիմնավորեք, որ $g : (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$, $g\big((x, y), z\big) = \big(x, (y, z)\big)$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է:

14.4. Գոյություն ունի՞ (X, τ) տարածություն, որը հոմեոմորֆ է իր $(X \times X, \tau \times \tau)$ քառակուսուն:

Յուցում. Հիմնավորելով, որ X-ը պետք է լինի անվերջ բազմություն՝ դիտարկեք, օրինակ, բնական թվերի բազմությունը դիսկրետ տոպոլոգիայով:

14.5. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կամայական X անվերջ բազմություն դիսկրետ տոպոլոգիայով հոմեոմորֆ է իր ($X \times X$, դիսկր. $\times$ դիսկր.) քառակուսուն:

14.6. Դիտարկենք $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ քառակուսին $\mathbb{R}^2$ հարթությունում և նրան ներգծված $B = \{(x_1, x_2);\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ շրջանը: Ապացուցեք, որ դրանք հոմեոմորֆ տարածություններ են:

Յուցում. Նախ համոզվեք, որ A-ի եզրագծի ամեն մի (x_1, x_2) կետի դեպքում կամ $|x_1| = 1, |x_2| \leq 1$, կամ $|x_2| = 1, |x_1| \leq 1$: Հիմնվելով դրա վրա՝ ապացուցեք.

$$h : A \to B, \qquad h(x_1, x_2) = \frac{\max\{|x_1|, |x_2|\}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2)$$

արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է:

14.7. Ապացուցեք. $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան մետրիկային տարածության $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ենթատարածությունը հոմեոմորֆ է $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ արտադրյալին, որտեղ 0-ն $\mathbb{R}^n$-ի սկզբնակետն է, իսկ S^{n-1}-ը $\left\{x = (x_1, \ldots, x_n);\ \|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$ սֆերան է:

Յուցում. Հիմնավորեք, որ

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1} \times \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(\frac{1}{\|x\|}(x_1, \ldots, x_n),\ \lg \|x\|\right)$$

արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է:

14.8. Կամայական $f : X \to Y$ արտապատկերման համար սահմանվում է նրա գրաֆիկը որպես $X \times Y$ արտադրյալի $\Gamma_f = \{(x, y);\ y = f(x)\}$ ենթաբազմություն: Ապացուցեք.

ա) եթե f-ը անընդհատ է, ապա Γ_f-ը որպես $X \times Y$-ի ենթատարածություն հոմեոմորֆ է X-ին;

բ) եթե X-ը հաուսդորֆյան տարածություն է, ապա Γ_f-ը փակ ենթաբազմություն է $X \times Y$-ում:

14.9. Ապացուցեք. X-ը հաուսդորֆյան տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $X \times X$-ի $\Delta = \{(x, x);\ x \in X\}$ անկյունագիծը փակ ենթաբազմություն է $X \times X$-ում:

Յուցում. Օգտվեք նախորդ խնդրի բ) պնդումից՝ որպես f վերցնելով X-ի նույնական արտապատկերումը:

Մինչև հաջորդ խնդիրներին անցնելը փանք մի սահմանում: Ասում են, որ տոպոլոգիական տարածություններին առնչվող փվյալ **հատկությունը պահպանվում է ուղիղ արտադրյալի դեպքում**, եթե ամեն անգամ, երբ որևէ երկու տարածություններ բավարարում են այդ հատկությանը, նրանց ուղիղ արտադրյալը նույնպես բավարարում է այդ հատկությանը:

Օրինակ՝ թեորեմ 7-ից հետևում է, որ անջատելիության T_2 աքսիոմը պահպանվում է ուղիղ արտադրյալի դեպքում: Մյուս կողմից որպես տեղեկություն նշենք, որ նորմալությունը (որպես անջատելիության աքսիոմ) չի պահպանվում ուղիղ արտադրյալի դեպքում:

14.10. Ապացուցեք, որ T_0, T_1 աքսիոմները պահպանվում են ուղիղ արտադրյալի դեպքում:

14.11. Ապացուցեք, որ սեպարաբելությունը պահպանվում է ուղիղ արտադրյալի դեպքում:

14.12. Դիցուք $B_1 = \{U_i;\, i \in I\}$ և $B_2 = \{V_j;\, j \in J\}$ ընտանիքները տոպոլոգիայի բազա են համապատասխանաբար (X, τ) և (Y, σ) տարածությունների համար: Ապացուցեք. $B = \{U_i \times V_j;\, i \in I, j \in J\}$ ընտանիքը $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ տարածության տոպոլոգիայի բազա է:

14.13. Ապացուցեք. հաշվելիության երկրորդ աքսիոմը պահպանվում է ուղիղ արտադրյալի դեպքում:

14.14. Ապացուցեք. հաշվելիության առաջին աքսիոմը պահպանվում է ուղիղ արտադրյալի դեպքում:

Յուցում. Նախ ձևակերպեք և ապացուցեք 14.12 խնդրին նմանակ պնդում կետի շրջակայքերի բազա տերմինով:

Թեմա 15

Կապակցված տարածություն, կապակցված ենթաբազմություն: Թեորեմներ կապակցված ենթաբազմությունների միավորման և կապակցված ենթաբազմության փակման մասին: Կապակցվածության բաղադրիչ, ոչ հոմեոմորֆ տարածությունների օրինակներ:

Եթե ունենք (X, τ) և (Y, σ) տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X \cap Y = \varnothing$, ապա $X \cup Y$ բազմությունը կարելի է վերածել տոպոլոգիական տարածության՝ համարելով $X \cup Y$-ում բաց ենթաբազմություններ նրա այն բոլոր U ենթաբազմությունները, երբ $U \cap X$ և $U \cap Y$ ենթաբազմությունները բաց են համապատասխանաբար X-ում և Y-ում: Տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները սպուգվում են հեշտությամբ: Նկատենք, որ ստացված տոպոլոգիական տարածությունում X և Y ենթաբազմությունները ոչ դատարկ, չհատվող, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություններ են: Այս տարածությունը կոչվում է X և Y տարածությունների **չկապակցված միավորում**:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **կապակցված տարածություն**, եթե այն չի կարող ներկայացվել որպես իր երկու ոչ դատարկ, չհատվող, բաց ենթաբազմությունների միավորման տեսքով:

Համարժեք ձևակերպում. տարածությունը կապակցված է, եթե այն չի կարող ներկայացվել որպես իր երկու ոչ դատարկ, չհատվող փակ ենթաբազմությունների միավորման տեսքով:

Եվս մի համարժեք ձևակերպում. X տոպոլոգիական տարածությունը կապակցված է, եթե X-ում գոյություն ունի միայն մի ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն՝ ինքը X-ը:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածության Y ենթաբազմությունը կոչվում է **X-ի կապակցված ենթաբազմություն**, եթե Y-ը կապակցված տարածություն է X-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայով:

Օրինակ 1: ա) Ցանկացած անտիդիսկրետ տարածություն կապակցված տարածություն է: բ) Մեկից ավելի կետեր պարունակող ամեն մի դիսկրետ տարածություն կապակցված չէ: գ) $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ թվային ուղղի $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $(0, 1) \cup (1, 2)$ և $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ենթաբազմությունները կապակցված չեն (**ինչո՞ւ**):

Թեորեմ 1: Թվային ուղղի $[a, b]$ հատվածը կապակցված տարածություն է ($\mathbb{R}$-ի սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով):

Ապացուցում: Դիցուք $[a, b] = U \cup V$, որտեղ U-ն և V-ն չհատվող, ոչ դատարկ, բաց (հետևաբար նաև փակ) ենթաբազմություններ են: Որոշակիության համար ենթադրենք $a \in U$ և դիտարկենք U-ի ենթաբազմությունը կազմված U-ի այն բոլոր

տարրերից, որոնք փոքր են V-ի բոլոր տարրերից՝ $W = \{u \in U \mid u < v, \forall v \in V\}$: Քանի որ $a \in W$, ուստի $W \neq \varnothing$: Նշանակենք h-ով W ենթաբազմության ճշգրիտ վերին եզրը՝ $h = \sup W$: Քանի որ h-ը հպման կետ է W-ի համար, և $W \subset U$, ուստի h-ը հպման կետ է նաև U-ի համար: Հետևաբար $h \in \overline{U} = U$, ուրեմն $h \in W$ (ինչո՞ւ): Մյուս կողմից՝ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար $(h - \varepsilon, h + \varepsilon) \cap V \neq \varnothing$: Հակառակ դեպքում, եթե $(h - \varepsilon_0, h + \varepsilon_0) \cap V = \varnothing$ որևէ ε_0-ի համար, ապա կունենանք, որ V-ի բոլոր տարրերը մեծ կամ հավասար են $h + \varepsilon_0$ թվից: Իսկ դրանից կհետևի, որ օրինակ $h + \dfrac{\varepsilon_0}{2} \in W$, և ուրեմն $h \neq \sup W$:

Նշանակում է՝ h-ը հպման կետ է նաև V-ի համար, ուստի $h \in \overline{V} = V$: Այսպիսով ստացանք $h \in U \cap V$ (հակասություն): ■

Թեորեմ 2: Կապակցված տարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում կապակցված տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կապակցված է, $f : X \to Y$ անընդհատ է և $f(X) = Y$: Ենթադրենք $Y = U \cup V$, որտեղ U-ն և V-ն ոչ դատարկ, չհատվող, բաց ենթաբազմություններ են Y-ում: Պարզ է, որ $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$-ն ոչ դատարկ, բաց ենթաբազմություններ են X-ում և $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$: Ստացվեց, որ X-ը կապակցված չէ (հակասություն): ■

Հետևանք: Կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է (**հիմնավորե՛ք**):

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X տարածության $Y_i \subset X$, $i \in I$ կապակցված ենթաբազմություններ: Եթե նրանց հատումը դատարկ չէ, ապա նրանց $Y = \bigcup\limits_i Y_i$ միավորումը նույնպես X-ի կապակցված ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք U-ն կամայական ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է Y-ում: Ցույց տանք, որ այն համընկնում է Y-ի հետ (դրանից կհետևի, որ Y-ը կապակցված է): Գոյություն ունի $i_0 \in I$, որ $U \cap Y_{i_0} \neq \varnothing$: Պարզ է, որ $U \cap Y_{i_0}$-ն ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է Y_{i_0}-ում, ուստի $U \cap Y_{i_0} = Y_{i_0}$ (շնորհիվ Y_{i_0}-ի կապակցվածության): Նշանակում է՝ $Y_{i_0} \subset U$: Կամայական $i \neq i_0$ ինդեքսի դեպքում, քանի որ $Y_{i_0} \cap Y_i \neq \varnothing$, ուստի $U \cap Y_i \neq \varnothing$: Այժմ, կատարելով վերը բերված դատողությունները արդեն Y_i և U ենթաբազմությունների համար, ստանում ենք, որ $Y_i \subset U$: Հետևաբար $\bigcup\limits_i Y_i \subset U$, և ուրեմն $U = Y$: ■

Հետևանք: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը կապակցված է, քանի որ $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-n; n]$ և $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [-n; n] \neq \varnothing$, իսկ $[-n; n]$, $n \in \mathbb{N}$ հատվածները կապակցված են ըստ թեորեմ 1-ի:

Թեորեմ 4: Տոպոլոգիական տարածությունների $X \times Y$ արտադրյալը կապակցված տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը և Y-ը կապակցված տարածություններ են:

Ապացուցում: ա) Ենթադրենք $X\times Y$-ը կապակցված է: Քանի որ $P_1 : X \times Y \to X$, $P_2 : X \times Y \to Y$ կանոնական պրոյեկցիաները անընդհատ և սյուրյեկտիվ արտապատկերումներ են, ուստի X-ը և Y-ը կապակցված են համաձայն թեորեմ 2-ի:

բ) Դիցուք X-ը և Y-ը կապակցված են: Կամայական $(x, y) \in X \times Y$ կետի դեպքում $\{x\} \times Y$ և $X \times \{y\}$ տարածությունները, ըստ թեմա 14-ում թեորեմ 6-ի՝ հոմեոմորֆ են համապատասխանաբար Y և X տարածություններին: Ուստի նրանք կապակցված տարածություններ են՝ ըստ թեորեմ 2-ի հետևանքի:

Այնուհետև, քանի որ $(x, y) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\})$, ուստի $(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ միավորումը կապակցված է համաձայն թեորեմ 3-ի: Այժմ, սևեռելով որևէ $y_0 \in Y$ կետ, ամեն մի $x \in X$ կետի համար դիտարկենք $Z_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ ենթաբազմությունը $X \times Y$-ում: Քանի որ $X \times \{y_0\} \subset Z_x$, ուստի $\bigcap\limits_x Z_x$ հատումը դատարկ չէ: Սրանից հետևում է, որ $\bigcup\limits_x Z_x$ -ը կապակցված է համաձայն թեորեմ 3-ի: Մյուս կողմից պարզ է, որ $\bigcup\limits_x Z_x$ միավորումը $X \times Y$-ն է: Այսպիսով ստացանք, որ $X \times Y$-ը կապակցված է: ■

Հետևանք: Կամայական $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ կետի դեպքում $\mathbb{R}^2 \setminus (x_0, y_0)$ տարածությունը (որպես $\mathbb{R}^2$-ի ենթատարածություն) կապակցված է:

Իրոք, $\mathbb{R}^2\setminus(x_0, y_0)$-ն կարող ենք ներկայացնել որպես $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-ի չորս բաց՝ A, B, C, D ենթաբազմությունների միավորում՝

$$\mathbb{R}^2 \setminus (x_0, y_0) = A \cup B \cup C \cup D$$
$$= \big(\mathbb{R} \times (y_0, +\infty)\big) \cup \big(\mathbb{R} \times (-\infty, y_0)\big) \cup \big((-\infty, x_0) \times \mathbb{R}\big) \cup \big((x_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) :$$

Դրանցից յուրաքանչյուրը կապակցված է որպես երկու կապակցված ենթաբազմությունների ուղիղ արտադրյալ: Քանի որ $A \cap C \neq \varnothing$ և $B \cap D \neq \varnothing$, ուստի $A \cup C$ և $B \cup D$ ենթաբազմությունները կապակցված են ըստ թեորեմ 3-ի: Նաև ակնհայտ է, որ $(A \cup C) \cap (B \cup D) \neq \varnothing$, ուստի $\mathbb{R}^2 \setminus (x_0, y_0)$ տարածությունը կապակցված է դարձյալ ըստ թեորեմ 3-ի:

Կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է և թույլ է տալիս որոշ դեպքերում ապացուցել երկու տարածությունների ոչ հոմեոմորֆությունը:

Տոպոլոգիայում տեղի ունի Բրաուերի նշանավոր թեորեմը (1911թ.) էվկլիդեսյան տարածությունների չափականության մասին:

Թեորեմ 5: Եթե $n \neq m$, ապա ($\mathbb{R}^n$, սովոր. մետր. տոպ.) և ($\mathbb{R}^m$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունները միմյանց հոմեոմորֆ չեն:

Ապացույցը ընդհանուր դեպքում բարդ է, իսկ դրա համար անհրաժեշտ գիտելիքը դուրս է մեր դասընթացի շրջանակներից:

Ապացուցենք թեորեմը $n = 1$, $m = 2$ մասնավոր դեպքում: Ենթադրենք՝ գոյություն ունի $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ հոմեոմորֆիզմ: Դիցուք $h(0) = z_0 \in \mathbb{R}^2$: Հեռացնելով $\mathbb{R}$-ից 0 կետը, իսկ $\mathbb{R}^2$-ից z_0 կետը՝ դիտարկենք $\overline{h} : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}^2 \setminus z_0$ արտապատկերում՝ սահմանելով $\overline{h}(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R} \setminus 0$: Պարզ է, որ $\overline{h}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է: Նրա անընդհատությունը հետևում է h-ի անընդհատությունից (**հիմնավորե՛ք**):

Քանի որ $(\mathbb{R} \setminus 0)$-ն կապակցված չէ, իսկ $(\mathbb{R}^2 \setminus z_0)$-ն կապակցված է (ըստ թեորեմ 4-ից հետևանքի), ստանում ենք հակասություն թեորեմ 2-ի հետ: ■

Թեորեմ 6: Տոպոլոգիական տարածության կապակցված ենթաբազմության փակումը նորից կապակցված ենթաբազմություն է:

Սա ապացուցելու նպատակով նախ ապացուցենք:

Լեմմա: Դիցուք X-ը Y տարածության որևէ կապակցված ենթաբազմություն է: Եթե $y_0 \in Y$ կետը հպման կետ է X-ի համար, ապա $\{y_0\} \cup X$-ը Y-ի կապակցված ենթաբազմություն է:

Այլ կերպ ասած, կապակցված ենթաբազմությանը նրա որևէ հպման կետ ավելացնելիս դարձյալ ստացվում է կապակցված ենթաբազմություն:

Ապացուցում: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $y_0 \notin X$: Ենթադրենք հակառակը՝ $\{y_0\} \cup X = U \cup V$, որտեղ U-ն և V-ն ոչ դատարկ, չհատվող, բաց ենթաբազմություններ են $\{y_0\} \cup X$-ում (Y-ից $\{y_0\} \cup X$-ի վրա մակածված տոպոլոգիայում): Դիցուք $y_0 \in U$, և ուրեմն $V \subset X$: Նշանակում է V-ն միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է X կապակցված ենթաբազմությունում, որից հետևում է, որ $V = X$ և $U = \{y_0\}$: Այսպիսով՝ y_0 կետն ունի $U = \{y_0\}$ բաց շրջակայք և $U \cap X = \{y_0\} \cap X = \varnothing$: Սրանից հետևում է, որ y_0-ն հպման կետ չէ X-ի համար (հակասություն): ■

Ապացուցենք թեորեմ 6-ը: Դիցուք X-ը ինչ-որ տոպոլոգիական տարածության կապակցված ենթաբազմություն է, իսկ Y-ը X-ի հպման կետերի բազմությունն է՝ $Y = \overline{X}$: Կարող ենք Y-ը ներկայացնել $Y = \overline{X} = X \cup Y = \bigcup\limits_{y \in Y} (X \cup \{y\})$ տեսքով: Յուրաքանչյուր $X \cup \{y\}$ ենթաբազմություն կապակցված է համաձայն լեմմայի: Քանի որ $\bigcap\limits_{y \in Y} (X \cup \{y\})$ հատումը դատարկ չէ, ուստի Y-ը կապակցված է համաձայն թեորեմ 3-ի: ■

Այժմ ներմուծենք կապակցված տարածությունների մի կարևոր բնութագրիչ:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության **կապակցվածության բաղադրիչ** կոչվում է նրա ամեն մի կապակցված ենթաբազմություն, որը չի պարունակվում տվյալ տարածության մի այլ կապակցված ենթաբազմության մեջ:

Օրինակ 2: ա) Հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր կապակցված տարածություն ունի միայն մի կապակցվածության բաղադրիչ՝ ինքը:

բ) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ տարածությունը ($(\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով) ունի երկու կապակցվածության բաղադրիչ՝ $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$ ենթաբազմությունները:

գ) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ տարածությունը՝ որպես $(\mathbb{R}$, սովոր.)-ի ենթատարածություն, ունի անթիվ կապակցվածության բաղադրիչներ՝ իր բոլոր կետերը:

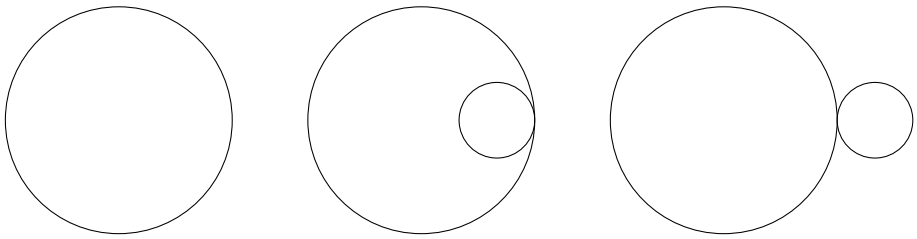
Թեորեմ 7: Տոպոլոգիական տարածության յուրաքանչյուր կետ պատկանում է նրա ճիշտ մի կապակցվածության բաղադրիչի:

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ X տարածության ցանկացած միկետանոց $\{x\}$ ենթաբազմություն X-ի կապակցված ենթաբազմություն է: Այժմ դիտարկենք կամայական $x \in X$ սևեռված կետը պարունակող բոլոր կապակցված U_i ենթաբազմությունների $U(x) = \bigcup\limits_i U_i$ միավորումը: Քանի որ $\bigcap U_i \neq \varnothing$, ուստի $U(x)$-ը կապակցված ենթաբազմություն է (ըստ թեորեմ 3-ի) և չի պարունակվում իրենից տարբեր որևէ կապակցված ենթաբազմությունում: Ուստի $U(x)$-ը x կետը պարունակող կապակցվածության բաղադրիչ է: ■

Հետևանք: Տվյալ տոպոլոգիական տարածության ցանկացած երկու կապակցվածության բաղադրիչ կա՛մ չեն հատվում, կա՛մ համընկնում են: Ուստի ցանկացած տոպոլոգիական տարածություն ներկայացվում է որպես իր կապակցվածության բաղադրիչների չկապակցված միավորում:

Հետևանք թեորեմներ 6-ից և 7-ից: Տոպոլոգիական տարածության ամեն մի կապակցվածության բաղադրիչ փակ ենթաբազմություն է այդ տարածությունում:

Օրինակ 3: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթությունը իր սովորական մետրիկային տոպոլոգիայով և նրանում C կորը, որտեղ C-ն ա) շրջանագիծ է, բ) երկու ներքնապես շոշափվող շրջանագծերի միավորումն է, գ) երկու արտաքնապես շոշափվող շրջանագծերի միավորումն է:



(ա) (բ) (գ)

Ապա $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ենթատարածությունը ունի ա) դեպքում երկու, իսկ բ) և գ) դեպքերում երեքական կապակցվածության բաղադրիչներ (**որո՞նք են դրանք**):

Թեորեմ 8: Տոպոլոգիական տարածության կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունը (ընդհանուր դեպքում որպես բազմության հզորություն) տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

Մասնավորապես դա նշանակում է, որ եթե ինչ-որ տոպոլոգիական տարածություն ունի վերջավոր քանակով՝ ճիշտ n հատ կապակցվածության բաղադրիչ, ապա նրան հոմեոմորֆ ամեն մի տարածություն նույնպես ունի ճիշտ n հատ կապակցվածության բաղադրիչ:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը և Y-ը հոմեոմորֆ տարածություններ են: Նշանակում է՝ գոյություն ունեն $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ անընդհատ արտապատկերումներ, որ

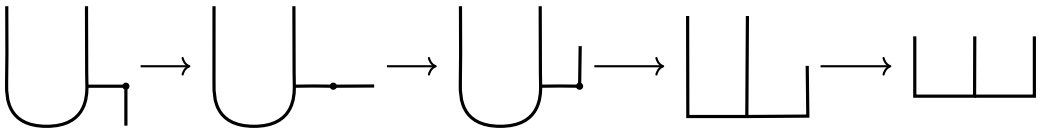
$f \circ g = \mathbb{1}_Y$ և $g \circ f = \mathbb{1}_X$: Նշանակենք $N(X)$-ով և $N(Y)$-ով համապատասխանաբար X-ի և Y-ի կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունները:

Այժմ նկատենք, որ X-ի ամեն մի կապակցվածության բաղադրիչի կերպարը f անընդհատ արտապատկերման դեպքում ընկած է Y-ի որևէ կապակցվածության բաղադրիչի մեջ: Իրոք, դիցուք $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմությունները կապակցվածության բաղադրիչներ են, ընդ որում $f(A) \cap B \neq \varnothing$: Ուստի $f(A) \cup B$-ն Y-ի կապակցված ենթաբազմություն է համաձայն թեորեմ 2-ի և թեորեմ 3-ի: Կապակցվածության բաղադրիչի սահմանումից հետևում է, որ $f(A) \subset B$: Նշանակում է՝ $N(X) \leq N(Y)$: Կատարելով նույն դատողությունները g արտապատկերման նկատմամբ՝ ստանում ենք $N(Y) \leq N(X)$, ուստի $N(X) = N(Y)$: ■

Որպես հետևանք թեորեմ 8-ից ստանում ենք, որ օրինակ 3-ում բերված $\mathbb{R}^2 \setminus C$ տարածությունները հոմեոմորֆ չեն միմյանց ա) և բ), կամ ա) և գ) դեպքերում, իսկ բ) և գ) դեպքում $\mathbb{R}^2 \setminus C$ տարածությունների հոմեոմորֆության վերաբերյալ թեորեմ 8-ը ոչինչ չի տալիս:

Օրինակ 4: Դիտարկենք հայոց այբուբենի և տառերը (գծապատկերները) որպես ($\mathbb{R}^2$, սովոր.) տարածության ենթատարածություններ: Հարց. արդյոք հոմեոմո՞րֆ են դրանք միմյանց:

Նկատենք, որ եթե հնարավոր է երկու գծապատկերներից մեկը անընդհատ ձևափոխելով, առանց կտրատելու և առանց ինքնահատումների համընկեցնել մյուսի հետ, ապա դրանք հոմեոմորֆ են: Տվյալ դեպքում հարցի պատասխանը դրական է, և օրինակ հոմեոմորֆիզմ կարելի է կառուցել հետևյալ հաջորդականությամբ՝



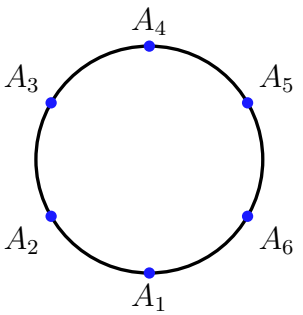
Այժմ քննարկենք նույն հարցը և գծապատկերների համար: Այս դեպքում բոլոր փորձերը նախորդի նմանությամբ մի պատկերից ստանալ մյուսը դատապարտված են ձախողման: Պատճառը այդ պատկերների կառուցվածքային էական տարբերության մեջ է. եթե մենք պատկերից հեռացնենք մի որևէ կետ, ապա ստացված պատկերը կարող է լինել ոչ կապակցված տարածություն, որի կապակցվածության բաղադրիչների քանակությունը կարող է լինել ամենաշատը երեք: Իսկ եթե նման գործողություն կատարենք պատկերի հետ, ապա կախված հեռացվող կետից կարող է ստացվել տարածություն, որն ունի կապակցվածության չորս բաղադրիչ: Այժմ, օգտագործելով այս հանգամանքը՝ ապացուցենք, որ այս պատկերները հոմեոմորֆ չեն միմյանց:

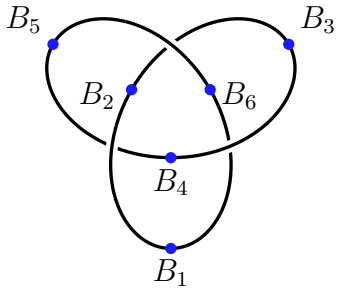
Իրոք, ենթադրենք գոյություն ունի $h :$ $\to$ հոմեոմորֆիզմ: Հեռացնենք ^{a} պատկերից a կետը, իսկ պատկերից $h(a)$ կետը:

Ստացված $\bar{h}: \text{Ԣ} \setminus \{a\} \to \text{Ш} \setminus \{h(a)\}$ արտապատկերումը նորից հոմեոմորֆիզմ է (ինչո՞ւ): Բայց $\text{Ԣ} \setminus \{a\}$ տարածությունն ունի կապակցվածության 4 բաղադրիչ, մինչդեռ $\text{Ш} \setminus \{h(a)\}$ տարածության համար դրանց քանակությունը փոքր է 4-ից (հակասություն թեորեմ 8-ի հետ):

Անդրադառնալով տարածությունների միջև հոմեոմորֆիզմ կառուցելու խնդրին՝ կատարենք կարևոր դիտողություն: Եթե մի տարածություն (օրինակ՝ գծապատկեր) հնարավոր չէ առանց կտրատումների և ինքնահատումների համընկեցնել մյուսի հետ, դա դեռ չի նշանակում, որ այդ տարածությունները հոմեոմորֆ չեն:

Օրինակ՝ $\mathbb{R}^3$ տարածությունում հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների $x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$ շրջանագիծը անընդհատ ձևափոխումներով համընկեցնել այսպես կոչված «երեքնուկաձև» օվալի հետ: Մինչդեռ դրանք հոմեոմորֆ են միմյանց:





Իրոք, վերցնելով շրջանագծի վրա $A_1, A_2, \ldots, A_6$ կետերը, իսկ օվալի վրա $B_1, B_2, \ldots, B_6$ կետերը՝ մենք կարող ենք նախ կառուցել հոմեոմորֆիզմներ այդ պատկերների համապատասխան աղեղների միջև՝ $h_1 : A_1A_2 \to B_1B_2,\ h_2 : A_2A_3 \to B_2B_3, \ldots, h_5 : A_5A_6 \to B_5B_6,\ h_6 : A_6A_1 \to B_6B_1$: Այնուհետև հաջորդաբար «սոսնձելով» այդ արտապատկերումներից յուրաքանչյուրն իր հաջորդի հետ (թեմա 12-ում թեորեմ 3-ի իմաստով)՝ կստանանք որոնելի h հոմեոմորֆիզմ:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 15-ի վերաբերյալ

15.1. Ճի՞շտ է պնդումը. կապակցված տարածության ցանկացած ենթաբազմություն կապակցված է:

15.2. Ապացուցեք. կապակցված X տարածության ցանկացած X/R ֆակտոր-տարածություն կապակցված է:

15.3. Ապացուցեք. ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության ռացիոնալ կետերի ամեն մի ենթաբազմություն կապակցված չէ:

15.4. Ունենք $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Ճի՞շտ է պնդումը. Y-ում կապակցված ամեն մի B ենթաբազմության $f^{-1}(B)$ նախակերպարը կապակցված է X-ում:

15.5. Ապացուցեք. $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածության ամեն մի ուռուցիկ ենթաբազմություն կապակցված ենթատարածություն է:

Յուցում. Սևեռելով $X \subset \mathbb{R}^n$ ուռուցիկ ենթաբազմության որևէ x_0 կետ՝ դիտարկեք x_0 սկզբնակետով բոլոր հատվածները, որոնք ընկած են X-ում:

15.6. $\mathbb{R}^3$ էվկլիդեսյան տարածության հետևյալ երեք՝

$$\big\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 - z^2 = \delta\big\}, \qquad \text{որտեղ } \delta = -1, 0, 1$$

մակերևույթներից որո՞նք են կապակցված (պատասխանը հիմնավորե՛ք):

15.7. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածության հետևյալ ենթաբազմություններից՝ ա) $\{0, 1\}$, բ) $[0, 1)$, գ) $[0, 1]$, դ) $(0, 0)$, ե) $(0, 1]$, ոչ մեկը կապակցված չէ:

15.8. Ապացուցեք. $\mathbb{R}^2$ էվկլիդեսյան հարթության այն բոլոր կետերի A ենթաբազմությունը, որոնց կոորդինատներից գոնե մեկը ռացիոնալ թիվ է, կապակցված ենթաբազմություն է:

Յուցում. Հիմնավորեք, որ A-ի ցանկացած երկու կետեր կարող են միացվել իրար երկու կամ երեք հատվածներից կազմված բեկյալով, որն ամբողջությամբ ընկած է A-ի մեջ:

15.9. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\mathbb{R}^2$ հարթության այն բոլոր կետերի B ենթաբազմությունը, որոնց կոորդինատներից միայն մեկն է ռացիոնալ թիվ, կապակցված ենթաբազմություն է:

Յուցում. Ըստ պայմանի՝ B-ն չունի ընդհանուր կետ $y = x$ ուղղի հետ: Ուստի B-ն ներկայացվում է որպես երկու ենթաբազմությունների միավորում, որոնցից մեկը ընկած է այդ ուղղից վերև, իսկ մյուսը՝ ներքև:

15.10. Ապացուցեք. $\mathbb{R}$ թվային ուղղի որևէ $[a, b]$ ենթատարածություն հոմեոմորֆ չէ $\mathbb{R}^2$ հարթության որևէ $[c, d] \times [e, f]$ ենթատարածության:

15.11. Ապացուցեք. X տոպոլոգիական տարածությունը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում, որտեղ Y-ը մեկից ավելի կետեր պարունակող դիսկրետ տարածություն է, հաստատուն արտապատկերում է:

15.12. Ապացուցեք. (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կապակցված չէ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $f : (X, \tau) \to (Y, \text{դիսկր.})$ անընդհատ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, որտեղ Y-ը երկկետանոց բազմություն է:

15.13. Ապացուցեք. եթե A-ն X տարածության կապակցված ենթատարածություն է և $A \subset Y \subset \overline{A}$, ապա Y-ը X-ի կապակցված ենթատարածություն է:

Թեմա 16

Գծորեն կապակցված տարածություններ, գծային կապակցվածությունը որպես տոպոլոգիական հատկություն: Կապը կապակցվածություն և գծային կապակցվածություն հասկացությունների միջև: Տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչները:

Նախորդ թեմայում քննարկվեցին կապակցված տոպոլոգիական տարածություն և տարածության կապակցվածության բաղադրիչ հասկացությունները: Մասնավորապես տեսանք, որ թվային ուղիղը կապակցված է և ունի կապակցվածության մի բաղադրիչ՝ ինքը $\mathbb{R}$-ը: Իսկ $\mathbb{R} \setminus 0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ տարածությունը (որպես $\mathbb{R}$-ի ենթատարածություն) կապակցված չէ և ունի կապակցվածության երկու բաղադրիչ՝ $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$:

Այս օրինակներում ենթագիտակցաբար (կամ բառացի) կապակցվածությունը կարող է ընկալվել նաև որպես տվյալ տարածության կամայական մի կետից մի այլ կետ ինչ-որ ճանապարհով (ուղիով) անընդհատ տեղափոխվելու հնարավորություն: Բնական է համարել, որ $\mathbb{R}$-ում դա միշտ հնարավոր է, իսկ $\mathbb{R} \setminus 0$ տարածությունում, օրինակ, -1 կետից $+1$ կետ որևէ ուղիով անընդհատ տեղափոխվել հնարավոր չէ (0 կետի հեռացումը խախտում է $\mathbb{R}$-ի ամբողջականությունը): Այս ամենի հստակեցումը մեզ բերում է գծորեն կապակցված տարածություն հասկացությանը:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածությունում **ուղի** կոչվում է $I = [0; 1]$ հատվածի ամեն մի $f : I \to X$ անընդհատ արտապատկերում: Եթե $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$, ապա x_0-ն և x_1-ը կոչվում են f ուղու **սկիզբ** և **վերջ**: Եթե ունենք $f : I \to X$ ուղի, որը միացնում է x_0 կետը x_1 կետին, ապա $\overline{f} : I \to X,\ \overline{f}(t) = f(1-t),\ t \in I$ արտապատկերումը նույնպես ուղի է, որը միացնում է x_1-ը x_0-ին (հիմնավորե՛ք): Եթե f ուղին այնպիսին է, որ $f(t) = x_0$ ամեն մի $t \in I$ կետի դեպքում, ապա f-ը կոչվում է **հաստատուն ուղի x_0 կետում** և նշանակվում է ε_{x_0}:

Դիցուք ունենք երկու $f, g : I \to X$ ուղիներ X-ում, ընդ որում $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ և $g(0) = x_1$, $g(1) = x_2$: Սահմանենք նոր՝ $h : I \to X$ արտապատկերում

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

բանաձևով: Նկատենք, որ $h(0) = f(0) = x_0,\ h(1) = g(1) = x_2$:

Այս արտապատկերումը կոչվում է f և g **ուղիների արտադրյալ** և նշանակվում է $f * g$:

Թեորեմ 1: Ուղիղների $f * g$ արտադրյալը ուղի է, որն սկսվում է x_0 կետից և ավարտվում է x_2 կետում:

Ապացուցելու համար մնում է ցույց տալ $f * g$ արտապատկերման անընդհատությունը: Այն անմիջապես հետևում է թեմա 12-ի թեորեմ 3-ից:

Սահմանում: X տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է **գծորեն կապակցված տարածություն**, եթե նրա ցանկացած x_1 և x_2 կետեր կարող են միացվել որևէ ուղիով X-ում:

Թեորեմ 2: Դիցուք $x_0 \in X$ որևէ սևեռված կետ է: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի ցանկացած կետ միացվում է x_0-ին որևէ ուղիով:

Ապացուցում: Պայմանի անհրաժեշտությունը հետևում է սահմանումից: Ցույց տանք բավարարությունը: Ըստ պայմանի՝ $\forall x_1, x_2 \in X$ կետերի համար գոյություն ունեն $f, g : I \to X$ ուղիներ, որ $f(0) = g(0) = x_0$ և $f(1) = x_1$, $g(1) = x_2$: Ուստի $\overline{f} * g$ ուղին x_1-ը միացնում է x_2-ին: ■

Սահմանում: X տարածության Y ենթաբազմությունը կոչվում է X-ի **գծորեն կապակցված ենթաբազմություն**, եթե Y-ը գծորեն կապակցված է որպես X-ի ենթատարածություն: Սա համարժեք է նրան, որ Y-ի կամայական y_1, y_2 կետեր կարող են միացվել որևէ $f : I \to Y$ ուղիով:

Նկատենք, որ շնորհիվ $I \to Y \subset X$ համադրույթի անընդհատության՝ f-ը նաև ուղի է X-ում:

Թեորեմ 3: Դիցուք X տարածությունը ներկայացված է որպես իր որոշ X_j, $j \in J$, գծորեն կապակցված ենթաբազմությունների միավորում՝ $X = \bigcup\limits_j X_j$: Եթե $\bigcap\limits_j X_j \neq \varnothing$, ապա X-ը ևս գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք $x_0 \in \bigcap\limits_j X_j$ որևէ սևեռված կետ է, դիտարկենք կամայական $x_1 \in X$ կետ: Գոյություն ունի այնպիսի X_j, որ $x_1 \in X_j$, և այնպիսի $f : I \to X_j$ ուղի, որ $f(0) = x_0$, $f(x) = x_1$: Դիցուք $h_j : X_j \to X$ արտապատկերումը X_j ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ (այսինքն $h_j(x) = x$, $\forall x \in X_j$ կետի դեպքում): Պարզ է, որ $h_j \circ f$ ուղին միացնում է x_0 կետը x_1 կետին, ուստի X-ը գծորեն կապակցված է ըստ թեորեմ 2-ի: ■

Թեորեմ 4: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածության ցանկացած ուռուցիկ ենթաբազմությունն գծորեն կապակցված է:

Ապացուցում: Եթե x, $y \in \mathbb{R}^n$, ապա $(1-t)x + ty$, $t \in I$ տեսքի բոլոր կետերի բազմությունը x, y ծայրակետերով $[x, y]$ հատվածն է $\mathbb{R}^n$-ում (տե՛ս թեմա 14-ի վերջում): Հետևաբար, եթե W-ն ուռուցիկ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում և $x, y \in W$, ապա $[x, y]$ հատվածը պարունակվում է W-ում, և $f : I \to W$, $f(t) = (1-t)x + ty$, $t \in I$ արտապատկերումը ուղի է W-ում, որը միացնում է x-ը y-ին: ■

Թեորեմ 5: Տարածության գծային կապակցվածությունը տոպոլոգիական հատկություն է:

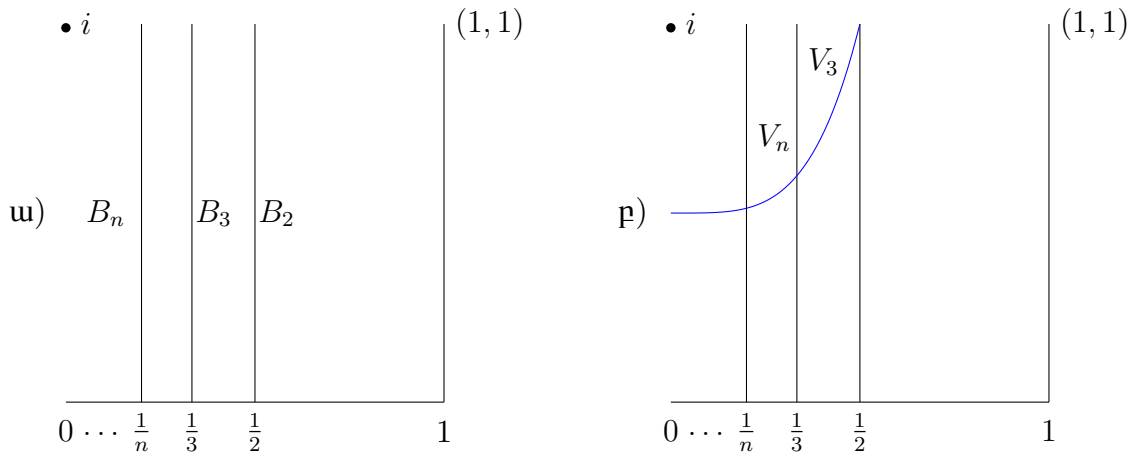
Ապացուցում: Բավական է ցույց տալ, որ գծորեն կապակցված տարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում նույնպես գծորեն կապակցված է: Դիցուք $h : X \to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է, և $h(X) = Y$: Դիտարկենք $\forall\, y_1, y_2 \in Y$ կետեր: Պայմանից հետևում է. գոյություն ունեն x_1, $x_2 \in X$ կետեր, որ $h(x_1) = y_1$, $h(x_2) = y_2$, և գոյություն ունի այնպիսի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$: Ուստի $g = h \circ f$ համադրույթը ուղի է Y-ում, և $g(0) = y_1$, $g(1) = y_2$: ■

Այժմ քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպե՞ս են իրար հետ կապված կապակցվածություն և գծային կապակցվածություն հասկացությունները:

Թեորեմ 6: Ամեն մի գծորեն կապակցված տարածություն նաև կապակցված տարածություն է:

Ապացուցում: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք X-ը գծորեն կապակցված տարածություն է, բայց կապակցված չէ: Նշանակում է գոյություն ունեն X-ի ոչ դատարկ, չհատվող U և V բաց ենթաբազմություններ, որ $X = U \cup V$: Վերցնենք որևէ $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ կետեր: Ապա գոյություն ունի $f : I \to X$ ուղի, որ $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$: Ունենք $I = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, ընդ որում $f^{-1}(U)$-ն և $f^{-1}(V)$-ն ոչ դատարկ, չհատվող բաց ենթաբազմություններ են $[0;1]$ հատվածում, ինչը հակասում է $[0;1]$-ի կապակցվածությանը: ■

Կապակցված տարածությունը կարող է գծորեն կապակցված չլինել: Բերենք համապատասխան օրինակ: Ներկայացնելով $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ հարթության (x, y) կետերը նաև որպես $x+iy$ կոմպլեքս թվեր՝ դիտարկենք $\mathbb{R}^2$-ի A և B երկու ենթաբազմություններ՝ $A = \{i\}$, $B = [0;1] \cup \left\{ \dfrac{1}{n} + yi;\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le y \le 1 \right\}$, որտեղ $[0;1]$-ը OX առանցքի $\{(x, 0); 0 \le x \le 1\}$ ենթաբազմությունն է: Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության $C = A \cup B$ ենթաբազմությունը $\mathbb{R}^2$-ի սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով:



Թեորեմ 7: C-ն կապակցված, բայց ոչ գծորեն կապակցված տարածություն է:

Ապացույցը ստացվում է հետևյալ երեք պնդումներից:

Պնդում 1: C-ն կապակցված տարածություն է:

Իրոք, քանի որ B-ի յուրաքանչյուր $B_n = [0;1] \cup \left\{\frac{1}{n} + yi,\ 0 \le y \le 1\right\}$ ենթաբազմությունը կապակցված է որպես երկու հատվող հատվածների միավորում (տե՛ս նկար ա-ն) և $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$, ուստի C-ի $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ենթաբազմությունը կապակցված է ըստ թեմա 15-ում թեորեմ 3-ի:

Մյուս պնդումը ձևակերպելու համար կանգ առնենք i կետի շրջակայքերի մի առանձնահատկության վրա: Դիտարկենք i կետի $U = C \cap \left\{z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \frac{1}{2}\right\}$ բաց շրջակայքը C տարածությունում (տե՛ս նկար բ-ն): Այստեղ $\left\{z \in \mathbb{R}^2;\ |z - i| < \frac{1}{2}\right\}$ ենթաբազմությունը i կենտրոնով $r = \frac{1}{2}$ շառավղով բաց շրջան է $\mathbb{R}^2$-ում: Նկատենք, որ $U \cap B$ ենթաբազմությունը զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող

$$V_n = U \cap \left\{\frac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1\right\}, \qquad n > 2$$

ենթաբազմությունների միավորումն է:

Պնդում 2: Յուրաքանչյուր V_n ենթաբազմություն բաց և փակ ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Իրոք, քանի որ ամեն մի $\left\{\frac{1}{n} + yi;\ 0 \le y \le 1\right\}$ ենթաբազմություն փակ է $\mathbb{R}^2$-ում (հիմնավորե՛ք), ուստի V_n-ը փակ է U ենթաբազմությունում ըստ մակածված տոպոլոգիայի սահմանման: Մյուս կողմից, V_n-ը կարող է ներկայացվել

$$V_n = U \cap \left\{(x,y); \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

տեսքով, որտեղ $\left\{(x,y);\ \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1},\ y \in \mathbb{R}\right\}$ ենթաբազմությունը բաց է $\mathbb{R}^2$-ում որպես երկու՝ $\left\{(x,0);\ \frac{1}{n-1} < x < \frac{1}{n+1}\right\}$ և $\{(0;y),\ y \in \mathbb{R}\}$ բաց ենթաբազմությունների ուղիղ արտադրյալ: Հետևաբար V_n-ը նաև բաց ենթաբազմություն է U տարածությունում:

Վերջապես ապացուցելու համար, որ C-ն գծորեն կապակցված չէ, բավական է ցույց տալ, որ i կետը հնարավոր չէ C-ում ուղիով միացնել B-ի որևէ կետի հետ: Դրա համար ցույց կտանք, որ եթե $f : I \to C$ ուղին այնպիսին է, որ $f(0) = i$, ապա f-ը հաստատուն ուղի է, այսինքն՝ $f(t) = i,\ \forall\, t \in I$ դեպքում: Նախ ապացուցենք.

Պնդում 3: Ցանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i) \subset I$ ենթաբազմության համար:

Ապացուցում: Դիտարկենք $f(t_0) = i$ կետի վերը բերված U բաց շրջակայքը C-ում: Քանի որ f-ը անընդհատ է t_0 կետում, ուստի գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, որ $f(t) \in U$, երբ $|t - t_0| < \varepsilon$, այսինքն՝ երբ $t \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon)$: Ցույց տանք, որ t_0-ի այդ շրջակայքն ընկած է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմությունում: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի $t_1 \in [0,1] \cap (t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon)$ կետ և $f(t_1) \neq i$: Նշանակում է $f(t_1) \in U \cap B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, ուստի գոյություն ունի $n_1 > 2$ բնական թիվ, որ $f(t_1) \in V_{n_1}$: Քանի որ $[0,1] \cap (t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon)$ ենթաբազմությունը հետևյալ երեք՝ $(t_0 - \varepsilon,\, t_0 + \varepsilon)$, $[0, t_0 + \varepsilon)$ և $(t_0 - \varepsilon, 1]$ ենթաբազմություններից որևէ մեկն է, ուստի այն կապակցված ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Հետևաբար $W = f\big([0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\big) \subset U$ ենթաբազմությունը կապակցված է շնորհիվ f-ի անընդհատության: Քանի որ $W \subset U$, իսկ V_{n_1}-ը համաձայն պնդում 2-ի բաց և փակ ենթաբազմություն է U-ում, ուստի $V_{n_1} \cap W$-ն բաց և փակ է W-ում (ըստ U-ից W-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի սահմանման): Բացի այդ $f(t_1) \in V_{n_1} \cap W$, և ուրեմն $V_{n_1} \cap W \neq \varnothing$: Այժմ W-ի կապակցվածությունից հետևում է, որ $W = V_{n_1} \cap W$, ուստի $W \subset V_{n_1}$: Բայց դա անհնարին է, քանի որ մի կողմից $i = f(t_0) \in W \subset V_{n_1}$, իսկ մյուս կողմից $i \notin V_{n_1}$: Հետևաբար $[0,1] \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset f^{-1}(i)$, և ուրեմն ցանկացած $t_0 \in f^{-1}(i)$ կետ ներքին կետ է $f^{-1}(i)$ ենթաբազմության համար: ■

Այժմ պատրաստ ենք ավարտելու թեորեմ 7-ի ապացուցումը:

Նախ, որպես հետևանք պնդում 3-ից ստանում ենք, որ $f^{-1}(i)$-ն ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Մյուս կողմից, $\{i\}$-ն փակ ենթաբազմություն է C-ում, ուստի $f^{-1}(i)$-ն փակ ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում շնորհիվ f-ի անընդհատության: Հետևաբար $f^{-1}(i) = [0,1]$ շնորհիվ $[0,1]$-ի կապակցվածության: ■

Տոպոլոգիական տարածության կապակցվածության բաղադրիչ հասկացության նմանությամբ սահմանվում է տոպոլոգիական տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչ հասկացությունը:

Սահմանում: Տոպոլոգիական տարածության **գծային կապակցվածության բաղադրիչ** կոչվում է նրա ամեն մի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն, որը չի պարունակվում իրենից տարբեր որևէ գծորեն կապակցված ենթաբազմությունում:

Ինչպես կապակցվածության բաղադրիչների դեպքում, գծային կապակցվածության բաղադրիչները նույնպես օժտված են հետևյալ հատկություններով.

Հ1. Տարածության ամեն մի կետ պատկանում է գծային կապակցվածության որևէ բաղադրիչի,

Հ2. Գծային կապակցվածության ցանկացած երկու բաղադրիչ կամ չեն հատվում, կամ համընկնում են,

Հ3. Տարածության գծային կապակցվածության բաղադրիչների քանակը (հզորությունը) տոպոլոգիական ինվարիանտ է:

Այդուհանդերձ կապակցված ենթաբազմությունների և կապակցվածության բաղադրիչների ոչ բոլոր հատկություններն են տարածվում գծորեն կապակցված ենթաբազմությունների և գծային կապակցվածության բաղադրիչների վրա:

Մասնավորապես գծորեն կապակցված ենթաբազմության փակումը կարող է չլինել գծորեն կապակցված ենթաբազմություն:

Որպես օրինակ՝ դիտարկենք վերը քննարկված $\mathbb{R}^2$-ի $C = A \cup B$ ենթատարածության B գծորեն կապակցված ենթաբազմությունը: Նրա $\overline{B} = C$ փակումը գծորեն կապակցված չէ ըստ թեորեմ 7-ի:

Այժմ բերենք մի բավարար պայման, որի դեպքում տարածության կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են:

Թեորեմ 8: Դիցուք X տարածության յուրաքանչյուր կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք: Ապա X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը կապակցված է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կապակցված տարածություն է, դիտարկենք նրա գծային կապակցվածության որևէ U բաղադրիչ (այդպիսին գոյություն ունի շնորհիվ Հ1 հատկության): Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\forall x \in U$ կետի համար գոյություն ունի x-ի V գծորեն կապակցված շրջակայք: Թեորեմ 3-ից հետևում է, որ $V \cup U$-ն X-ի գծորեն կապակցված ենթաբազմություն է, ուստի $V \subset U$: Այսպիսով U-ն շրջակայք է իր կամայական կետի համար, ուստի U-ն X-ի բաց ենթաբազմություն է: Ըստ Հ2-ի՝ $X \setminus U$-ն X-ի մյուս բոլոր գծային կապակցվածության բաղադրիչների միավորումն է: Ուստի $X \setminus U$-ն բաց ենթաբազմություն է որպես բաց ենթաբազմությունների միավորում: Քանի որ U-ն և $(X \setminus U)$-ն բաց են, նրանք նաև փակ ենթաբազմություններ են: Այսպիսով U-ն X կապակցված տարածության ոչ դատարկ, բաց և փակ ենթաբազմություն է, ուստի $X = U$: Հետևաբար X-ը գծորեն կապակցված է:

Հակառակ պնդումը հետևում է թեորեմ 6-ից: ■

Թեորեմ 8-ից ստանում ենք.

Հետևանք 1: Եթե X տարածության ամեն մի կետ ունի գծորեն կապակցված շրջակայք, ապա նրա ամեն մի գծային կապակցվածության բաղադրիչ X-ի բաց ենթաբազմություն է:

Հետևանք 2: Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ տարածության բաց ենթաբազմությունների համար կապակցվածությունն ու գծային կապակցվածությունը համարժեք են:

Սա հետևում է նրանից, որ $\mathbb{R}^n$-ի ամեն մի կետի ցանկացած շրջակայք իր մեջ պարունակում է այդ կետի բաց գնդային շրջակայք, որն իհարկե գծորեն կապակցված է ըստ թեորեմ 4-ի (հիմնավորե՛ք):

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 16-ի վերաբերյալ

16.1. Ճի՞շտ է պնդումը. ցանկացած անտիդիսկրետ տարածություն գծորեն կապակցված է:

16.2. Ապացուցեք. գծորեն կապակցված ամեն մի X տարածության ցանկացած X/R ֆակտոր-տարածություն գծորեն կապակցված է:

16.3. Ճի՞շտ է պնդումը. եթե տոպոլոգիական տարածությունների $X \times Y$ արտադրյալը գծորեն կապակցված է, ապա X-ը և Y-ը գծորեն կապակցված են:

Յուցում. Դիտարկեք $X \times Y$ արտադրյալի P_X և P_Y կանոնական պրոյեկցիաները X-ի և Y-ի վրա և օգտվեք թեորեմ 5-ի ապացույցից:

16.4. Ապացուցեք հետևյալ թեորեմը. $X \times Y$ արտադրյալը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ գծորեն կապակցված են X-ը և Y-ը:

Յուցում. Պայմանի բավարարությունը ապացուցելու համար դիտարկենք $X \times Y$-ի որևէ երկու (x_1, y_1) և (x_2, y_2) կետեր: Դիցուք $f_1 : I \to X$ ուղին միացնում է x_1 կետը x_2 կետին, իսկ $f_2 : I \to Y$ ուղին միացնում է y_1 կետը y_2 կետին: Օգտվելով թեմա 14-ում թեորեմ 3-ից՝ դիտարկեք $(f_1, f_2) : I \to X \times Y$, $(f_1, f_2)(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ արտապատկերումը:

16.5. Դիցուք X-ը և Y-ը հոմեոմորֆ տարածություններ են: Ապացուցեք. X-ը գծորեն կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ գծորեն կապակցված է Y-ը:

16.6. Ապացուցեք. $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածության $B^n = \{x;\ \|x\| \le 1\}$ միավոր գունդը գծորեն կապակցված ենթատարածություն է:

Յուցում. Հիմնավորեք, որ B^n-ը ուռուցիկ ենթաբազմություն է:

16.7. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդեսյան տարածության S^n_+ և S^n_- միավոր կիսասֆերաները, որտեղ

$$S^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x\| = 1,\ x_{n+1} \ge 0\right\}, \quad S^n_- = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x\| = 1,\ x_{n+1} \le 0\right\}$$

գծորեն կապակցված ենթատարածություններ են:

Յուցում. Հիմնավորելով, որ $\mathbb{R}^{n+1}$-ի պրոյեկցիան $\mathbb{R}^n$-ի վրա՝ սահմանված $P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բանաձևով, որոշում է S^n_+ և S^n_- կիսասֆերաներից յուրաքանչյուրի հոմեոմորֆիզմ B^n գնդին, օգտվեք նախորդ երկու խնդիրներից:

16.8. Ապացուցեք. $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդեսյան տարածության $S^n = \{x;\ \|x\| = 1\}$ միավոր սֆերան գծորեն կապակցված տարածություն է:

Յուցում. Ներկայացնելով S^n-ը որպես S^n_+ և S^n_- կիսասֆերաների միավորում՝ օգտվեք նախորդ խնդրից և թեորեմ 3-ից:

16.9. Ապացուցեք. $n \geq 0$ դեպքում $\mathbb{RP}^n$ իրական պրոյեկտիվ տարածությունը գծորեն կապակցված է:

Յուցում. Երբ $n = 0$, $\mathbb{RP}^0$-ն բաղկացած է մի կետից: Երբ $n > 0$, ներկայացրեք $\mathbb{RP}^n$-ը որպես S^n սֆերայի կամ S^n_+ կիսասֆերայի ֆակտոր-տարածություն և օգտվեք նախորդ խնդիրներից:

16.10. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ հարթության

$$A = \left\{(x, y);\ x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\} \quad \text{և} \quad B = \{(0, y);\ -1 \leq y \leq 1\}$$

ենթաբազմությունները: Ապացուցեք. $A \cup B$ միավորումը կապակցված է, բայց գծորեն կապակցված չէ:

Յուցում. Թեորեմ 7-ի նմանությամբ ցույց տվեք, որ B-ի ոչ մի կետ հնարավոր չէ ուղիով միացնել A-ի որևէ կետի հետ:

Թեմա 17

Կոմպակտ տարածություն, կոմպակտ ենթաբազմություն, օրինակներ: Թեորեմ տոպոլոգիական տարածությունների ուղիղ արտադրյալի կոմպակտության մասին: Թեորեմ $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածության կոմպակտ ենթաբազմությունների մասին:

Վերհիշենք ծածկույթ և ենթածածկույթ հասկացությունները: Եթե $A \subset X$, ապա A ենթաբազմության ծածկույթ կոչվում է X-ի որոշ ենթաբազմություններից կազմված այնպիսի $\{U_i,\, i \in I\}$ ընտանիքը, որ $A \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ծածկույթը կոչվում է վերջավոր ծածկույթ, եթե I-ն վերջավոր բազմություն է:

Եթե $\{V_j,\, j \in J\}$ նույնպես A-ի ծածկույթ է, և $\forall\, j \in J$ ինդեքսի համար գոյություն ունի $i \in I$ ինդեքս այնպես, որ $V_j = U_i$, ապա $\{V_j,\, j \in J\}$ ծածկույթը կոչվում է $\{U_i,\, i \in I\}$ ծածկույթի ենթածածկույթ:

A ենթաբազմության ծածկույթը կոչվում է բաց ծածկույթ, եթե բոլոր U_i-ները բաց ենթաբազմություններ են X-ում:

Սահմանում: X-ի A ենթաբազմությունը կոչվում է **կոմպակտ ենթաբազմություն**, եթե նրա կամայական բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի նրա վերջավոր ենթածածկույթ (հաճախ ասում են նաև՝ A-ի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել A-ի վերջավոր ենթածածկույթ):

Մասնավորապես X-ը կոչվում է **կոմպակտ տարածություն**, եթե նրա կամայական $\{U_i,\, i \in I\},\ X = \bigcup\limits_i U_i$ բաց ծածկույթի համար գոյություն ունի նրա վերջավոր $\{V_j,\, j = 1, 2, \ldots, n\}$ ենթածածկույթ:

Օրինակ 1: X բազմությունը անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով կոմպակտ տարածություն է, իսկ X-ը դիսկրետ տոպոլոգիայով կոմպակտ տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ը վերջավոր բազմություն է (**ինչո՞ւ**):

Օրինակ 2: $\mathbb{R}$ թվային ուղիղը սովորական մետրիկային տոպոլոգիայով կոմպակտ չէ: Իրոք, $\mathbb{R}$-ի $\{(n, n+2),\, n \in \mathbb{Z}\}$ բաց ծածկույթից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

Օրինակ 3: Ամեն մի $(X, \text{վերջ. լր.})$ տարածություն կոմպակտ տարածություն է: Իրոք, դիցուք $S = \{U_i,\, i \in I\}$ ընտանիքը X-ի որևէ բաց ծածկույթ է, ընդ որում U_i ենթաբազմություններից ոչ մեկը չի համընկնում X-ի հետ (հակառակ դեպքում ապացուցելու բան չկա): Դիտարկենք այդ ծածկույթի որևէ U_{i_0} տարր և նրա $X \setminus U_{i_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ լրացումը X-ում: Այժմ յուրաքանչյուր $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, տարրի համար ընտրելով որևէ $U_{i_k} \in S$ տարր այնպես, որ $x_k \in U_{i_k}$, կստանանք X-ի S ծածկույթի $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ վերջավոր ենթածածկույթ:

Թեորեմ 1: $A \subset X$ ենթաբազմությունը կոմպակտ ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն կոմպակտ տարածություն է X-ից A-ի վրա մակածված տոպոլոգիայով:

Ապացուցումը հեշտությամբ ստացվում է հետևյալից. եթե $\{U_i,\, i \in I\}$-ն բաց ծածկույթ է A ենթաբազմության համար, ապա $\{U_i \cap A,\, i \in I\}$ ընտանիքը բաց ծածկույթ է A ենթատարածության համար:

Թեորեմ 2: ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում թվային ուղղի $[a, b]$ փակ հատվածը կոմպակտ տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք $S = \{U_i \mid U_i \subset \mathbb{R},\ i \in I\}$ ընտանիքը $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության բաց ծածկույթ է՝ $[a, b] \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ենթադրենք $[a, b]$-ն կոմպակտ չէ: Նշանակում է $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ հատվածներից որևէ մեկը հնարավոր չէ ծածկել S-ի որևէ վերջավոր ենթածածկույթով: Նշանակենք այդ հատվածը $[a_1, b_1]$: Նույն դատողությամբ $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ հատվածներից գոնե մեկը հնարավոր չէ ծածկել S-ի վերջավոր ենթածածկույթով: Նշանակենք այդ հատվածը $[a_2, b_2]$, և այդպես շարունակ: Ստանում ենք ներդրումների անվերջ

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

հաջորդականություն, և $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$:

Քանի որ $a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n < b_m$ ցանկացած n-ի և փվյալ m-ի դեպքում, ուստի գոյություն ունի $\sup\{a_i\} = \overline{a}$, և քանի որ $\overline{a} \le b_m$ ցանկացած m-ի դեպքում, ուստի գոյություն ունի $\inf\{b_i\} = \overline{b}$: Պարզ է, որ $\overline{a} \le \overline{b}$:

Ունենք՝ $a_n \le \overline{a} \le \overline{b} \le b_n$, և $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ ցանկացած n-ի դեպքում: Հետևաբար $\overline{a} = \overline{b}$:

Այժմ $[a, b] \subset \bigcup\limits_i U_i$ պայմանից ստանում ենք. գոյություն ունի այնպիսի $U_i \in S$, որ $\overline{a} \in U_i$, և այնպիսի $\varepsilon > 0$, որ $(\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon) \subset U_i$: Ընտրենք N բնական թիվ այնպես, որ $\dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$, և ուրեմն $b_N - a_N < \varepsilon$: Քանի որ $\overline{a} \in [a_N, b_N]$, ուստի $\overline{a} - a_N < \dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$ և $b_N - \overline{a} < \dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$: Հետևաբար $[a_N, b_N] \subset (\overline{a} - \varepsilon, \overline{a} + \varepsilon) \subset U_i$, որը հակասում է նրան, որ $[a_N, b_N]$-ը հնարավոր չէ ծածկել S-ի որևէ վերջավոր ենթածածկույթով: ■

Թեորեմ 3: Կոմպակտ տարածության կերպարը անընդհատ արտապատկերման դեպքում կոմպակտ տարածություն է:

Ապացուցում: Ունենք X կոմպակտ տարածություն, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում և $f(X) = Y$: Եթե $S = \{U_i,\, i \in I\}$ ընտանիքը Y-ի որևէ բաց ծածկույթ է, ապա $T = \{f^{-1}(U_i),\, i \in I\}$ ընտանիքը X-ի բաց ծածկույթ է: Ըստ պայմանի՝ գոյություն ունի T-ի $f^{-1}(U_{i_1}),\ f^{-1}(U_{i_2}), \ldots, f^{-1}(U_{i_n})$ վերջավոր ենթածածկույթ՝ $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$:

Ունենք՝ $Y = f(X) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_k})) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$, ուստի Y-ը կոմպակտ տարածություն է: ■

Հետևանք 3: Եթե A-ն X տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է, $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում է, ապա $f(A)$-ն Y տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է:

Հետևանք 4: Կոմպակտությունը տոպոլոգիական հատկություն է (հիմնավորե՛ք):

Հետևանք 5: Եթե X-ը կոմպակտ տարածություն է, ապա նրա ցանկացած $X/\sim$ ֆակտոր-տարածությունը նույնպես կոմպակտ տարածություն է (**ինչո՞ւ**):

Սրանից հետևում է, որ շրջանագիծը, տորը, Կլեյնի շիշը, պրոյեկտիվ հարթությունը կոմպակտ տարածություններ են (այս օրինակների մասին տե՛ս թեմա 13-ում):

Թեորեմ 4: Կոմպակտ տարածության $\forall$ փակ ենթաբազմություն կոմպակտ ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կոմպակտ է, իսկ A-ն X-ի փակ ենթաբազմություն է: Դիցուք $S = \{U_i,\, i \in I\}$-ն A-ի բաց ծածկույթ է, $A \subset \bigcup\limits_i U_i$: Ապա $U_i,\, i \in I$ և $X \setminus A$ ենթաբազմություններով կազմված ընտանիքը X-ի բաց ծածկույթ է: Քանի որ X-ը կոմպակտ է, գոյություն ունի այդ ծածկույթի վերջավոր ենթածածկույթ այնպես, որ կամ $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n}$ կամ $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n} \cup (X \setminus A)$: Քանի որ $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$, ուրեմն երկու դեպքում էլ $A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n}$, ուստի A-ն X-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: ■

Թեորեմ 5: Հաուսդորֆյան տարածության ցանկացած կոմպակտ ենթաբազմություն փակ ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը հաուսդորֆյան տարածություն է, և $A \subset X$ կոմպակտ ենթաբազմություն է: Սևեռենք $x_0 \in X \setminus A$ կետ: Ըստ պայմանի՝ x_0-ի և ցանկացած $a \in A$ կետի համար (նկատենք, որ $x_0 \neq a$) գոյություն ունեն չհատվող U_a և V_a բաց շրջակայքեր այնպես, որ $x_0 \in U_a$, $a \in V_a$: Քանի որ $A \subset \bigcup\limits_a V_a$, գոյություն ունի A-ի $\{V_a,\, a \in A\}$ ծածկույթի վերջավոր $V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_n}$ ենթածածկույթ: Դիտարկենք x_0-ի $U(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$ բաց շրջակայքը: Քանի որ $U(x_0) \cap V_{a_i} = \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots, n$, ուստի՝ $U(x_0) \subset (X \setminus A)$: Այսպիսով $(X \setminus A)$-ն շրջակայք է իր կամայական x_0 կետի համար, ուրեմն $(X \setminus A)$-ն բաց ենթաբազմություն է, ուստի A-ն փակ ենթաբազմություն է: ■

Թեորեմ 6: Մետրիկային տարածության ցանկացած կոմպակտ ենթաբազմություն սահմանափակ ենթաբազմություն է:

Ապացուցում: Դիցուք A-ն (X, ρ) մետրիկային տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է: Ցույց տանք, որ A-ն կարելի է ներառնել որևէ գնդի մեջ: Ամեն մի $a \in A$ կետի համար ընտրենք a կենտրոնով որևէ $\mathcal{D}(a, r)$ բաց գունդ: Պարզ է, որ

$A \subset \bigcup\limits_a \mathcal{D}(a,r)$, և քանի որ A-ն կոմպակտ է, գոյություն ունի $\{\mathcal{D}(a,r),\, a \in A\}$ ծածկույթի վերջավոր $\mathcal{D}(a_1,r_1), \mathcal{D}(a_2,r_2), \ldots, \mathcal{D}(a_n,r_n)$ ենթածածկույթ, որ $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i,r_i)$: Նշանակենք $r' = \max \rho(a_i,a_j)$, $r'' = \max(r_i)$, $r = \max(r',r'')$ և ցույց տանք, որ $A \subset \mathcal{D}(a_1,2r)$: Իրոք, եթե $a \in A$ կամայական կետ է, ապա գոյություն ունի $\mathcal{D}(a_k,r_k)$ գունդ, որ $a \in \mathcal{D}(a_k,r_k)$: Պարզ է, որ $\rho(a,a_1) \le \rho(a_k,a) + \rho(a_k,a_1) < r_k + r' \le r'' + r' \le 2r$, ուստի $a \in \mathcal{D}(a_1,2r)$: ■

Թեորեմ 7: Տոպոլոգիական տարածությունների $X \times Y$ արտադրյալը կոմպակտ տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ կոմպակտ են X-ը և Y-ը:

Պայմանի անհրաժեշտությունը: Դիցուք $X \times Y$-ը կոմպակտ տարածություն է: Դիտարկենք $P_X : X \times Y \to X$ կանոնական պրոյեկցիան: Քանի որ P_X-ը անընդհատ է, $P_X(X \times Y) = X$, ուստի X-ը կոմպակտ է ըստ թեորեմ 3-ի: Նույն ձևով Y-ը ևս կոմպակտ տարածություն է:

Պայմանի բավարարության ապացուցումը կատարենք երկու քայլով:

1. Դիցուք X-ը և Y-ը կոմպակտ են և $W = \{U_i \times V_i,\, i \in I\}$ ընտանիքը $X \times Y$-ի որևէ բաց ծածկույթ է (այստեղ U_i-ները բաց են X-ում, իսկ V_i-ները բաց են Y-ում): Ցույց տանք, որ W ծածկույթից կարելի է անջատել $X \times Y$-ի վերջավոր ենթածածկույթ: Սևեռենք որևէ $x_0 \in X$ կետ և դիտարկենք W-ի այն բոլոր $U_j(x_0) \times V_j(x_0)$, $j \in J$ տարրերը, որ $x_0 \in U_j(x_0)$ (այստեղ J-ն ինդեքսների I բազմության ենթաբազմություն է և յուրաքանչյուր $U_j\ (x_0) \times V_j(x_0)$ ենթաբազմություն W-ի որևէ տարր է):

Դիտարկենք W ընտանիքի $W(x_0) = \{U_j(x_0) \times V_j(x_0),\, j \in J\}$ ենթաընտանիքը: Պարզ է, որ $X \times Y$-ի յուրաքանչյուր (x_0,y) կետ պատկանում է $W(x_0)$-ի որևէ տարրի (հակառակ դեպքում կունենանք $(x_0,y) \notin W$): Ուստի $W(x_0)$-ն $\{x_0\} \times Y$ ենթաբազմության բաց ծածկույթ է: Քանի որ $\{x_0\} \times Y$-ը $X \times Y$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է (հետևում է Y-ի կոմպակտությունից և թեմա 14-ի թեորեմ 6-ից), ուստի նրա $W(x_0)$ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Վերահամարակալենք այդ ենթածածկույթը՝

$$U_1(x_0) \times V_1(x_0), U_2(x_0) \times V_2(x_0), \ldots, U_{n(x_0)}(x_0) \times V_{n(x_0)}(x_0)$$

տեսքով, որտեղ $n(x_0)$ թիվը որոշվում է x_0 կետով:

Այժմ դիտարկենք X-ի $U(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n(x_0)} U_i(x_0)$ բաց ենթաբազմությունը: Պարզ է, որ $x_0 \in U(x_0)$: Ստացանք X-ի $\{U(x),\, x \in X\}$ բաց ծածկույթ: Քանի որ X-ը կոմպակտ է, նրա $\{U(x),\, x \in X\}$ բաց ծածկույթից կարելի է անջատել X-ի վերջավոր $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_m)$ ենթածածկույթ: Արդյունքում ունենք W ընտանիքի տարրերից կազմված ենթատարածությունների հաջորդականություն, որտեղ

1) $U_1(x_1) \times V_1(x_1)$, $U_2(x_1) \times V_2(x_1)$, $\ldots$, $U_{n(x_1)}(x_1) \times V_{n(x_1)}(x_1)$ ընտանիքը բաց ծածկույթ է $U(x_1) \times Y$-ի համար,

2) $U_1(x_2) \times V_1(x_2),\ U_2(x_2) \times V_2(x_2),\ \ldots,\ U_{n(x_2)}(x_2) \times V_{n(x_2)}(x_2)$ ընտանիքը բաց ծածկույթ է $U(x_2) \times Y$-ի համար,

... ...

$m)$ $U_1(x_m) \times V_1(x_m),\ U_2(x_m) \times V_2(x_m),\ \ldots,\ U_{n(x_m)}(x_m) \times V_{n(x_m)}(x_m)$ ընտանիքը բաց ծածկույթ է $U(x_m) \times Y$-ի համար (հիշեցնենք, որ յուրաքանչյուր $n(x_i)$-ն բնական թիվ է՝ որոշված փվյալ x_i կետի համար):

Հետևաբար թվարկվածները կազմում են $X \times Y$-ի W ծածկույթի վերջավոր ենթածածկույթ:

2. Դիցուք այժմ ունենք $X \times Y$-ի կամայական $W = \{W_i,\ i \in I\}$ բաց ծածկույթ: Ըստ $X \times Y$ ուղիղ արտադրյալի տոպոլոգիայի սահմանման՝ ամեն մի i ինդեքսի համար գոյություն ունի $W_i = \bigcup\limits_{k \in K} (U_{i,k} \times V_{i,k})$ ներկայացում, որտեղ $U_{i,k}$-ները բաց են X-ում, իսկ $V_{i,k}$-ները բաց են Y-ում (այստեղ K-ն ինդեքսների բազմություն է որոշված փվյալ i ինդեքսի համար՝ $K = K(i)$):

Պարզ է, որ $\{U_{i,k} \times V_{i,k},\ i \in I,\ k \in K(i)\}$ ընտանիքը նույնպես $X \times Y$-ի բաց ծածկույթ է: Ըստ նախորդ 1. դեպքի՝ այդ ծածկույթից կարելի է անջատել $X \times Y$-ի վերջավոր ենթածածկույթ:

Դիցուք այն (վերահամարակալումից հետո) կազմված է $U_1 \times V_1,\ U_2 \times V_2,\ \ldots,\ U_p \times V_p$ տարրերից: Այժմ յուրաքանչյուր $U_s \times V_s,\ s = 1, 2, \ldots, p$ տարրի համար ընտրելով W ծածկույթի մի այնպիսի W_s տարր, որ $U_s \times V_s$-ը լինի $W_s = \bigcup\limits_{k \in K} (U_{i,k} \times V_{i,k})$ միավորման բաղադրիչ, կստանանք $X \times Y$-ի W ծածկույթի $W_1, W_2, \ldots, W_p$ վերջավոր ենթածածկույթ: ■

Թեորեմ 7-ն ընդհանրացվում է ցանկացած վերջավոր (անգամ անվերջ) թվով $X_1, X_2, \ldots, X_n$ տարածությունների և նրանց $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ արտադրյալի դեպքում՝ $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ արտադրյալը կոմպակտ տարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ կոմպակտ են բոլոր X_i արտադրիչները: Այստեղից և թեորեմ 2-ից ստանում ենք.

Հետևանք: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ արտադրյալը, որտեղ $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, կոմպակտ է որպես $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն: Կոմպակտ է նաև $\underbrace{S^k \times S^k \times \cdots \times S^k}_{n}$ տարածությունը (S^k-ն $\mathbb{R}^{k+1}$-ում միավոր սֆերան է) որպես $\mathbb{R}^{nk+n} = \underbrace{\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k+1}}_{n}$ էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն:

Թեորեմ 8: Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ տարածության M ենթաբազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փակ է և սահմանափակ $\mathbb{R}^n$-ում:

Ապացուցում: Եթե M-ը կոմպակտ է, ապա այն սահմանափակ է $\mathbb{R}^n$-ում ըստ թեորեմ 6-ի, և $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմություն է ըստ թեորեմ 5-ի: Այժմ հակառակը. դիցուք M-ը փակ և սահմանափակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում: Սահմանափակությունից հետևում է, որ գոյություն ունի n-չափականության $N = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times$

$\cdots \times [a_n, b_n]$ ուղղանկյունանիստ, որ $M \subset N$: Քանի որ M-ը և N-ը փակ են R^n-ում և $M \subset N$, ուստի M-ը փակ է նաև N-ում (ըստ թեորեմ 1-ի նմանակի թեմա 12-ում): Վերջապես, քանի որ N-ը կոմպակտ է ըստ թեորեմ 7-ից հետևանքի, ուստի M-ը նույնպես կոմպակտ է ըստ թեորեմ 4-ի: ■

Թեորեմ 9 (Վեյերշտրասի թեորեմի ընդհանրացումը)**:** Կոմպակտ տարածության վրա սահմանված անընդհատ թվային ֆունկցիան սահմանափակ է և ընդունում է մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը կոմպակտ տոպոլոգիական տարածություն է, և $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերումն անընդհատ է: Քանի որ $f(X)$-ը, ըստ թեորեմ 3-ի, $\mathbb{R}$ թվային ուղղի կոմպակտ ենթաբազմություն է, ուստի այն փակ և սահմանափակ է համաձայն թեորեմ 8-ի: Դիտարկենք $\inf(f(X))$ և $\sup\ (f(X))$ կետերը $\mathbb{R}$-ում: Որպես $f(X)$ փակ ենթաբազմության հման կետեր՝ դրանք պատկանում են $f(X)$-ին: Հետևաբար գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in X$ կետեր, որ $f(x_1) = \inf(f(X))$ և $f(x_2) = \sup(f(X))$: ■

Բերենք նաև մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության մասին Կանտորի թեորեմի ընդհանրացումը մետրիկական տարածությունների դեպքում:

Սահմանում: Դիցուք X-ը և Y-ը մետրիկային տարածություններ են համապատասխանաբար ρ_1 և ρ_2 մետրիկներով, և ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում: Ապա f-ը կոչվում է **հավասարաչափ անընդհատ արտապատկերում**, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի դեպքում գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, որ ամեն մի $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում՝ եթե $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$, ապա $\rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$:

Պարզ է, որ ամեն մի հավասարաչափ անընդհատ արտապատկերում անընդհատ արտապատկերում է: Հակառակը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ (**հիմնավորե՛ք օրինակով**):

Թեորեմ 10: Եթե (X, ρ_1), (Y, ρ_2) մետրիկային տարածություններից առաջինը կոմպակտ տարածություն է, ապա ամեն մի $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացուցում: Դիցուք $\varepsilon > 0$ թիվը սևեռված է: Ամեն մի $x \in X$ կետի համար գոյություն ունի $\delta(x) > 0$ թիվ, որ եթե $x' \in X$ և $\rho_1(x', x) < 2\delta(x)$, ապա $\rho_2(f(x'), f(x)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$: Պարզ է, որ x կենտրոնով և $\delta(x)$ շառավղով $\mathcal{D}(x, \delta(x)) = \{x';\ \rho_1(x', x) < \delta(x)\}$ գնդերի $\{\mathcal{D}(x, \delta(x));\ x \in X\}$ ընտանիքը կազմում է X տարածության բաց ծածկույթ: Ըստ պայմանի՝ գոյություն ունի այդ ծածկույթի $\mathcal{D}(x_1, \delta(x_1))$, $\mathcal{D}(x_2, \delta(x_2))$, $\ldots$, $\mathcal{D}(x_n, \delta(x_n))$ վերջավոր ենթածածկույթ: Նշանակենք $\delta = \min\{\delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_n)\}$: Պարզ է, որ եթե $x, y \in X$ և $\rho_1(x, y) < \delta$, ապա $x \in \mathcal{D}(x_i, \delta(x_i))$ ինչ-որ i $(1 \le i \le n)$ ինդեքսի դեպքում: Այնուհետև, քանի որ

$$\rho_1(y, x_i) \le \rho_1(y, x) + \rho_1(x, x_i) < \delta + \delta(x_i) \le 2\delta(x_i)$$

ուստի $\rho_2(f(y), f(x_i)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$: Այստեղից ստանում ենք՝

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq \rho_2(f(x), f(x_i)) + \rho_2(f(x_i), f(y)) < \varepsilon : \qquad \blacksquare$$

Ընդհանուր տոպոլոգիայում և նրա կիրառություններում դիտարկվում են կոմպակտության բնույթի, կամ կոմպակտության հետ առնչվող մի շարք հասկացություններ, ինչպիսիք են հաշվելի-կոմպակտ, սեկվենցիալ կոմպակտ, լոկալ կոմպակտ, պարակոմպակտ տարածություն հասկացությունները: Չմոռանանք դրանց շարքում նշել նաև թեմա 8-ից մեզ ծանոթ լինդելյոֆյան տարածություն հասկացությունը:

Սահմանում: Տարածությունը կոչվում է **հաշվելի-կոմպակտ տարածություն**, եթե նրա ցանկացած հաշվելի բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

Պարզ է, որ ամեն մի կոմպակտ տարածություն նաև հաշվելի-կոմպակտ տարածություն է: Հակառակ պնդումը ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ. հայտնի են տոպոլոգիական տարածությունների մի քանի օրինակներ, երբ հաշվելի-կոմպակտ տարածությունը կոմպակտ տարածություն չէ: Այդ բոլոր օրինակները բավականին բարդ են, քանի որ կոմպակտության այս երկու հասկացությունների միջև տարբերությունը այնքան էլ մեծ չէ, ինչը անուղղակի ձևով հաստատվում է հետևյալ պնդումով:

Թեորեմ 11: Հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին բավարարող տարածությունների դեպքում կոմպակտությունը հավասարազոր է հաշվելի-կոմպակտությանը:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը հաշվելի-կոմպակտ տարածություն է, և $S = \{U_\alpha;\ \alpha \in A\}$ ընտանիքը նրա կամայական բաց ծածկույթ է: Թեորեմի պայմանից ունենք, որ X-ը լինդելյոֆյան տարածություն է (ըստ սահմանման): Այժմ թեմա 8-ի թեորեմ 3-ից հետևում է՝ S ծածկույթից կարելի է անջատել X-ի հաշվելի S' ենթածածկույթ, որն էլ իր հերթին պարունակում է S'' վերջավոր ենթածածկույթ: Պարզ է, որ S''-ը վերջավոր ենթածածկույթ է նաև S ծածկույթի համար, ինչով և ավարտվում է թեորեմի ապացուցումը: $\blacksquare$

Սահմանում: Տոպոլոգիական X տարածությունը կոչվում է **սեկվենցիալ-կոմպակտ տարածություն**, եթե այն բավարարում է Բոլցանո-Վեյերշտրասի պայմանին՝ X-ում կետերի ցանկացած անվերջ հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն (նշենք՝ «սեկվենցիալ» բառը լատիներենից թարգմանաբար նշանակում է «հաջորդականություն»):

Սեկվենցիալ-կոմպակտ տարածության պարզ օրինակ է թվային ուղղի ցանկացած $[a, b]$ հատվածը. մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում հատվածի շարունակական կիսման եղանակով ցույց է տրվում, որ $[a, b]$-ն բավարարում է սահմանման պահանջին:

Թեորեմ 12: Մետրիկային տարածությունների, մասնավորապես $\mathbb{R}^n$ էվկլիդեսյան տարածությունների դեպքում կոմպակտությունը, հաշվելի-կոմպակտությունը և սեկվենցիալ-կոմպակտությունը համարժեք են միմյանց:

Ապացույցի, ինչպես նաև կոմպակտության հետ առնչվող այլ հասկացությունների հետ կարելի է ծանոթանալ [ ] գրքում:

Իսկ մենք այստեղ սահմանափակվենք՝ նշելով մետրիկային տարածությունների կոմպակտ ենթաբազմությունների ևս մի քանի հատկություններ:

Սահմանում: Դիցուք A-ն և M-ը (X, ρ) մետրիկային տարածության ենթաբազմություններ են, ընդ որում $A \subset M$: Ասում են, որ A-ն **ε-խիտ է** M-ում, եթե M-ի ցանկացած x կետի համար գոյություն ունի $a \in A$ կետ, որ $\rho(x, a) < \varepsilon$:

Ցույց տանք, որ (X, ρ)-ի ամեն մի M կոմպակտ ենթաբազմության համար գոյություն ունի նրա ε-խիտ վերջավոր ենթաբազմություն, որտեղ ε-ը կամայական սևեռված դրական թիվ է:

Դիտարկենք M-ի $\{\mathcal{D}(x, \varepsilon);\ x \in M\}$ բաց ծածկույթը կազմված x կենտրոններով և ε շառավղով $\mathcal{D}(x, \varepsilon)$ անեզր գնդերից: Օգտվելով M-ի կոմպակտությունից՝ ընտրենք այդ ծածկույթի որևէ $S(\varepsilon) = \{\mathcal{D}(a_1, \varepsilon), \mathcal{D}(a_2, \varepsilon), \ldots, \mathcal{D}(a_k, \varepsilon)\}$ վերջավոր ենթածածկույթ: Պարզ է, որ M-ի $A(\varepsilon) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ենթաբազմությունը որոնելին է (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 13: Մետրիկային տարածության ամեն մի M կոմպակտ ենթատարածություն սեպարաբել է, ուստի և բավարարում է հաշվելիության երկրորդ աքսիոմին:

Ապացուցում: Ամեն մի n բնական թվի համար ընտրելով M-ի որևէ $A(\frac{1}{n})$ վերջավոր $\frac{1}{n}$-խիտ ծածկույթ՝ դիտարկենք $A = \bigcup\limits_n A(\frac{1}{n})$ միավորումը: Ստուգումը, որ A-ն M-ի հաշվելի, ամենուրեք խիտ ենթաբազմություն է, թողնվում է ընթերցողին: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 17-ի վերաբերյալ

17.1. Դիցուք (X, τ_1) և (X, τ_2) տոպոլոգիական տարածություններն այնպիսին են, որ $\tau_1 \subset \tau_2$: Ճի՞շտ է պնդումը.

ա) եթե (X, τ_1)-ը կոմպակտ է, ապա (X, τ_2)-ը կոմպակտ է;

բ) եթե (X, τ_2)-ը կոմպակտ է, ապա (X, τ_1)-ը կոմպակտ է:

17.2. Կոմպա՞կտ է արդյոք աջից կիսաբաց ինտերվալների $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունը:

17.3. Կոմպա՞կտ է արդյոք ա) $[1, 2)$; բ) $(1, 2]$ ենթաբազմությունը $(\mathbb{R}, \mapsto)$ տարածությունում:

17.4. Գոյություն ունի՞ $(\mathbb{R}, \text{սովոր.})$ տարածության

ա) $(-1, 1)$ ինտերվալի;

բ) $[-1, 1]$ հատվածի

անընդհատ արտապատկերում $\mathbb{R}$-ի վրա:

17.5. Ապացուցեք.

ա) էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^{n+1}$ տարածության S^n միավոր սֆերան և B^{n+1} միավոր փակ գունդը կոմպակտ տարածություններ են;

բ) $\mathbb{RP}^n$, $n \geq 0$ պրոյեկտիվ տարածությունները կոմպակտ տարածություններ են:

17.6. Ապացուցեք. տոպոլոգիական տարածության ամեն երկու կոմպակտ ենթաբազմությունների միավորումը կոմպակտ ենթաբազմություն է:

17.7. Ի տարբերություն նախորդ խնդրի պնդման՝ երկու կոմպակտ ենթաբազմությունների հատումը կարող է չլինել կոմպակտ ենթաբազմություն:

Բերենք օրինակ. դիտարկենք իրական թվերի A ենթաբազմությունը՝ կազմված բոլոր ամբողջ թվերից և $\pm\frac{1}{2}$ թվերից՝ $A = \mathbb{Z} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$: Սահմանենք տոպոլոգիա A բազմության վրա՝ համարելով բաց ենթաբազմություններ $\varnothing$-ը և A-ն, $\mathbb{Z}$-ի բոլոր ենթաբազմությունները և A-ի այն բոլոր ենթաբազմությունները, որոնց լրացումները վերջավոր են: Ցույց տվեք.

1. տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները բավարարվում են;
2. A-ի $B = \mathbb{Z} \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ և $C = \mathbb{Z} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ենթաբազմությունները կոմպակտ են;
3. $B \cap C$ ենթաբազմությունը կոմպակտ չէ:

17.8. Ճի՞շտ է պնդումը. ցանկացած մետրիկային տարածության ամեն մի փակ և սահմանափակ ենթաբազմություն կոմպակտ ենթաբազմություն է:

Ցուցում. Որպես ժխտօրինակ դիտարկեք որևէ X անվերջ բազմություն

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x = y \\ 1, & \text{երբ } x \neq y \end{cases}$$

մետրիկով և նրա $\mathcal{D}(x_0, 1) = \{x;\ \rho(x_0, x) \leq 1\}$ ենթաբազմությունը, որտեղ x_0-ն X-ի որևէ սևեռված կետ է:

17.9. Ապացուցեք. եթե A-ն X հաուսդորֆյան տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն է, ապա A-ի և ցանկացած $x_0 \in X \setminus A$ կետի համար գոյություն ունեն չհատվող շրջակայքեր:

Ցուցում. Օգտվեք թեորեմ 5-ի ապացուցման ընթացքից:

17.10. Ապացուցեք. ամեն մի հաուսդորֆյան կոմպակտ տարածություն ռեգուլյար տարածություն է:

17.11. Ապացուցեք. հաուսդորֆյան տարածության ցանկացած երկու կոմպակտ չհատվող ենթաբազմությունների համար գոյություն ունեն դրանց չհատվող շրջակայքեր:

17.12. Ապացուցեք. ամեն մի հաուսդորֆյան կոմպակտ տարածություն նորմալ տարածություն է:

Գրականություն դասընթացի վերաբերյալ

Բազմությունների տեսություն

[1] П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* изд. «Наука», М., 1977.

[2] А. В. Архангельский. *Канторовская теория множеств.* изд. Московского университета, 1988.

[3] А. Френкель; И. Бар-Хиллел. *Основания теории множеств.* изд. «Мир», М., 1966.

[4] И. А. Лавров; Л. Л. Максимова. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.* изд. «Наука», М., 1984.

[5] В. Е. Подран. *Элементы топологии.* изд. «Лань», 2008.

[6] А. В. Архангельский; В. В. Федорчук. *Основные понятия и конструкции общей топологии.* в серии «Современные проблемы математики, том 17», 1988.

[7] О. Я. Виро; О. А. Иванов; Н. Ю. Нецветаев; В. М. Харламов. *Задачи по топологии.* Ленинградский университет, 1988.

[8] Н. Стинрод; У. Чинн. *Первые понятия топологии.* изд. «Мир», 1967.

Ընդհանուր տոպոլոգիա

[9] Келли Дж. *Общая топология.* изд. «Наука», М., 1968.

[10] Ч. Коснёвски. *Начальный курс алгебраической топологии.* изд. «Мир», М., 1983.

[11] Р. А. Александрян; Э. А. Мирзаханян. *Общая топология.* изд. «Высшая школа», М., 1979.