Julio García Salas – 22076
Joaquín Campos – 22155
Sofía García – 22210

Laboratorio 5 ModSim

Link al github

https://github.com/Hayser8/Lab5Modsim/tree/main

Teoría Parte 1

1) Rasgo definitorio y por qué obliga a ir más allá del promedio

La característica más definitoria de una red libre de escala es que su distribución de grados sigue una ley de potencia:

$P(k) \propto k^{-\gamma}, \quad k \geq k_{min}$

En contraste, una red Erdős–Rényi (ER) tiene una distribución de grados (aprox.) Poisson, estrecha alrededor de la media:

$P(k) \approx e^{-k} k^k / k!$

Implicación clave: en redes libres de escala aparece heterogeneidad extrema (hubs). Por eso, los modelos basados sólo en promedios (p. ej., SIR "mean-field" clásico que usa únicamente k) no capturan la dinámica real. En estas redes, los momentos superiores importan (especialmente k^2). De hecho, para $2 < \gamma \leq 3$ la varianza Var(k) puede crecer sin cota con el tamaño de la red, cambiando el umbral epidémico y la intensidad de brotes. En resumen: debo modelar la heterogeneidad de grados, no sólo el promedio.

2) Efecto de un γ menor (p. ej., 2.1 vs 3.5)

Un γ menor implica una cola más pesada:

Mayor prevalencia de hubs (nodos con grado muy alto).

k^2 crece mucho; para $2 < \gamma \leq 3$, incluso puede divergir con N.

En la práctica: con $\gamma = 2.1$ espero muchos nodos altamente conectados; con $\gamma = 3.5$ la cola decae más rápido y los hubs extremos son más raros.

3) Por qué R_0 depende de la varianza (no sólo de la media)

En redes con heterogeneidad de grados (p. ej., configuration model), el número reproductivo básico está controlado por la razón entre el segundo momento y el primero:

$R_0 \approx T \cdot (k^2 - k)/k \iff \lambda\_c = k/k^2$

donde T es la transmisibilidad por arista y λ_c el umbral epidémico efectivo.

Intuición: la infección "ve" grados altos porque llega por aristas; la probabilidad de aterrizar en un nodo de grado k es ∝ k·P(k). Esa ponderación eleva el peso de nodos con grados grandes, introduciendo k^2 y, por ende, la varianza. Si k^2 es grande (o diverge), R_0 aumenta y el umbral λ_c tiende a 0: casi cualquier transmisibilidad sostiene brotes.

Julio García Salas – 22076
Joaquín Campos – 22155
Sofía García – 22210

4) Intervenciones dirigidas en redes sin escala: por qué son tan eficaces

(a) Perspectiva matemática

- El umbral epidémico depende de λ_c = k/k^2.
- Proteger/remover hubs (vacunar, testear, mascarillas focalizadas, limitar contactos) reduce drásticamente k^2 (mucho más que k), elevando λ_c y pudiendo volver la propagación subcrítica sin intervenir masivamente.
- En ER (distribución estrecha), "apuntar" a grados altos es casi equivalente a aleatorio (no hay outliers grandes), por lo que la ganancia marginal es menor.

(b) Perspectiva práctica

- En redes sin escala, pocos hubs concentran muchas rutas de transmisión. Focalizar recursos en esos centros:
  - Corta múltiples trayectorias de contagio de una sola vez.
  - Es eficiente en costos (menos individuos intervenidos para gran impacto).
- En redes ER no existen cuellos de botella comparables; el mismo esfuerzo difuso rinde menos.

Teoría Parte 2

1) Robustez vs. ataques: aeropuertos (libre de escala) vs. alcantarillado (reticular / mundo pequeño)

Distribución de grados (idea clave)

- Libre de escala (aeropuertos): P(k) ~ k^(-gamma) con 2 < gamma < 3 ⇒ existen hubs muy conectados y muchos nodos de bajo grado.
- Reticular / mundo pequeño (alcantarillado): grados acotados y homogéneos, alto clustering local y algunos atajos.

Fallas aleatorias

- Más vulnerable: alcantarillado, al carecer de hubs que amortigüen eliminaciones al azar.
- Más robusta: aeropuertos, porque las fallas típicamente afectan nodos de bajo grado y los hubs sostienen la componente gigante.

Ataques dirigidos

- Más vulnerable: aeropuertos; la caída coordinada de los 5 hubs mayores rompe puentes globales, aumenta el diámetro y fragmenta la red.
- Más robusta: alcantarillado; sin hubs claros, atacar 5 estaciones resulta menos devastador y suelen existir rutas locales alternativas.

2) Cuándo no aplica Barabási–Albert (BA) y por qué

Suposiciones de BA

Julio García Salas – 22076
Joaquín Campos – 22155
Sofía García – 22210

(1) Crecimiento sostenido del grafo.
(2) Adjunción preferencial (nuevos nodos se conectan proporcionalmente al grado).

Ejemplo que viola BA: red vial urbana (calles–intersecciones)

- La geometría y la regulación planar limitan el grado; no es factible añadir muchas aristas a un mismo nodo.
- La adjunción preferencial no es pura; el grado queda acotado por capacidad/espacio.
- En consecuencia, P(k) no sigue una ley de potencia clara y no emergen hubs extremos.

Inadecuación del modelo BA

- Sobreestima la aparición de hubs y de colas pesadas en P(k).
- Omite costos, espacialidad y límites de capacidad.
- Induce predicciones de longitudes de camino y resiliencia que no corresponden a redes geométricas.

3) Watts–Strogatz: variación de clustering y longitud de camino con p

Puntos de referencia

- Anillo regular con grado medio k = k.
- En p = 0 (orden): C(0) ≈ 3*(k-2) / [4*(k-1)] y L(0) ~ n / (2k).
- En p = 1 (aleatoria Erdős–Rényi): C_rand ≈ k/n y L_rand ~ ln(n) / ln(k).

Tendencias al aumentar p en [0, 1]

- Clustering: C(p) decrece gradualmente desde C(0) hacia ≈ <k>/n. Aproximación ilustrativa: C(p) ≈ C(0) * (1 - p)^3.
- Longitud de camino: L(p) cae con rapidez incluso con p << 1; unos pocos atajos bastan para aproximar L_rand.

Efecto de un p = 0.01

- Con solo 1% de recableo aparecen atajos entre nodos lejanos, de modo que L(p << 1) ≈ L_rand mientras C(p << 1) ≈ C(0).
- Se obtiene el régimen de mundo pequeño: caminos cortos sin perder clustering local elevado.

4) Red social con comunidades fuertes y hubs: regla generativa

Objetivo

- Mantener comunidades densas (universidad, trabajo) con clustering alto.
- Permitir hubs/influencers para inducir cola pesada en P(k).

Regla conceptual (sin código)

Julio García Salas – 22076
Joaquín Campos – 22155
Sofía García – 22210

- Base comunitaria: crear B comunidades de tamaños n1, …, nB; dentro de cada una, conectar con WS de p bajo o SBM con p_in alto (clustering).
- Fitness / popularidad: asignar a cada nodo una fitness eta_i (por ejemplo, log-normal o potencia truncada) como atractivo global.
- Adjunción mixta por enlace: con probabilidad alpha (cierre triádico), conectar con amigos de amigos; con probabilidad (1 - alpha) (preferencia global), elegir destino con probabilidad proporcional a eta_j * (k_j + 1)^(beta).
- Puentes intercomunidad: con probabilidad pequeña epsilon, dirigir el enlace a otra comunidad (atajos y caminos cortos).
- Envejecimiento / capacidad (opcional): decrecer la atractividad con el tiempo y limitar el grado en nodos comunes (los de alta eta admiten límites mayores).

Resultado esperado

- Comunidades sólidas (WS/SBM + cierre triádico) ⇒ C local alto.
- Hubs globales (preferencia ponderada por eta) ⇒ cola pesada en P(k).
- Caminos cortos (puentes esporádicos entre comunidades).