OBLICZENIA NAUKOWE – SPRAWOZDANIE 4

autor: Jan Sieradzki
nr indeksu: 236441

Zadanie 1

I. Krótki opis problemu :

Napisać funkcję obliczającą ilorazy różnicowe.

WEJŚCIE:
x – wektor długości n + 1 zawierający węzły $x_0, \ldots, x_n$
f – wektor długości n + 1 zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach
WYJŚCIE:
fx – wektor długości n + 1 zawierający obliczone ilorazy różnicowe

Funkcja nie może korzystać z macierzy.

II. Rozwiązanie :

Rozwiązanie oparte jest na rekurencyjnym wzorze na iloraz różnicowy :

$$f([x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}]) = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k}$$

Jego działanie pomoże rozjaśnić nam poniższy schemat, który ukazuje jakie funkcje algorytm musi policzyć, aby zwrócić interesujący nas pierwszy rząd. Do obliczeń $f[x_i \ldots x_k]$ należy znać $f[x_{i \ldots} x_{k-1}]$ i $f[x_{i+1 \ldots} x_{k-1}]$:

$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
$f[x_3]$			

Aby poznać interesujące nas wartości w pierwszym rzędzie, które są współczynnikami wielomianu interpolującego funkcję f, musimy wyliczyć wcześniej pozostałe komórki, za pomocą rekurencji opisanej wzorem wyżej.

Wyniki zapisuję w pojedynczym wektorze, w każdym kroku zapisując interesujące nas rezultaty z pierwszego rzędu na „dół” tabeli, ponieważ owy „dół” tablicy, wraz z kolejnymi iteracjami nie jest już potrzebny w obliczeniach, co można zaobserwować z trójkątnej budowy schematu na górze. Wektor inicjujemy wartościami $f[x_i]=f(x_i)$.

III. Wnioski :

Udało się stworzyć algorytm wyliczający ilorazy różnicowe, które mają swoje zastosowania do np. metody Newtona, która za pomocą wielomianu przybliża wartości funkcji. Nie trzeba do tego korzystać z macierzy.

Zadanie 2

I. Krótki opis problemu :

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_x(x)$ w punkcie x = t za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera w czasie O(n).

WEJŚCIE:
x – wektor długości n + 1 zawierający węzły $x_0, \ldots, x_n$
fx – wektor długości n + 1 zawierający ilorazy różnicowe
t – punkt, w którym należy obliczyć wartość wielomianu
WYJŚCIE:
nt – wartość wielomianu w punkcie t

II. Rozwiązanie :

Warto najpierw przybliżyć uogólniony algorytm Hornera, który jest dany rekurencją :

$$w_n(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$
$$w_k(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_k]+(x-x_k)w_{k+1}, dla(k=n-1,\ldots,0)$$
$$N_n(x)=w_0(x)$$

Algorytm wylicza kolejno każdy krok rekurencji, zaczynając od wstawienia do nt = $f_x[n]$ i powtarzając wyliczenia $w_k(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_k]+(x-x_k)w_{k+1}, dla(k=n-1,\ldots,0)$, aż do k = 0. Potem następuje zwrócenie wyniku.

III. Wnioski :

Uogólniony algorytm Hornera pozwala w czasie O(n) wyliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona.

Zadanie 3

I. Krótki opis problemu :

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona (ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_2, \ldots, x_n$ napisać funkcję obliczającą, w czasie $O(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a_0, \ldots, a_n$: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

WEJŚCIE:
x – wektor długości n + 1 zawierający węzły $x_0, \ldots, x_n$
fx – wektor długości n + 1 zawierający ilorazy różnicowe
WYJŚCIE:
a – wektor długości n + 1 zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej

II. Rozwiązanie :

Aby znaleźć współczynniki postaci naturalnej, używam metody opartej na uogólnionym algorytmie Hornera. Funkcja używa dwóch pętli, w pierwszej wstawiam do wektora a[k] wartość ilorazu różnicowego fx[k], ponieważ w wielomianie interpolacyjnym współczynnik c_n jest równy współczynnikowi postaci naturalnej a_n dla najwyżej potęgi n. W drugiej pętli wyliczane są dla każdej iteracji współczynniki wielomianu naturalnego za pomocą obliczeń : a[i] = a[i]-a[i+1]*x[k] , po wszystkich iteracjach dla pętli zewnętrznej od k = n-1 do k = 1 i wewnętrznej i = k do i = n-1 zwracany jest wektor wynikowy.

III. Wnioski :

W czasie $O(n^2)$ jesteśmy w stanie wyznaczyć postać naturalną z wielomianu interpolacyjnego, mając wektor węzłów $x_0, \ldots, x_n$ i ilorazów różnicowych.

<u>Zadanie 4</u>

I. Krótki opis problemu :

Napisać funkcję, która interpoluje zadaną funkcję f(x) w przedziale [a, b] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję. W interpolacji użyć węzłów równoodległych, tj. $x_k = a +$ kh, $k = \frac{b-a}{n}$, k = 0, 1, . . . , n.

WEJŚCIE:
f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
a,b – przedział interpolacji
n – stopień wielomianu interpolacyjnego
WYJŚCIE:
funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję w przedziale [a, b]

II. Rozwiązanie :

Pierwszym krokiem, jest wyznaczenie węzłów interpolacji. Są one generowane na podstawie podanego przedziału [a,b] i stopnia wielomianu n tak, aby były równoodległe, tzn $x_k = a+kh$, $k = \frac{b-a}{n}$. Wyliczamy za pomocą podanej funkcji wartości y=f(x) oraz ilorazy różnicowe algorytmem stworzonym w zadaniu 1. Posiadając te wartości, przystępujemy do rysowania funkcji f oraz jej wielomianu interpolacyjnego (tutaj do wyliczenia wartości korzystamy z funkcji z zadania 2 do wyliczania wartości wielomianu).

III. Wnioski :

Dzięki tej funkcji możemy naocznie się przekonać, jak dokładne przybliżenia zwracają wielomiany interpolacyjne. W tym celu korzystamy z algorytmów zaimplementowanych we wcześniejszch zadaniach.

Zadanie 5

I. Krótki opis problemu :

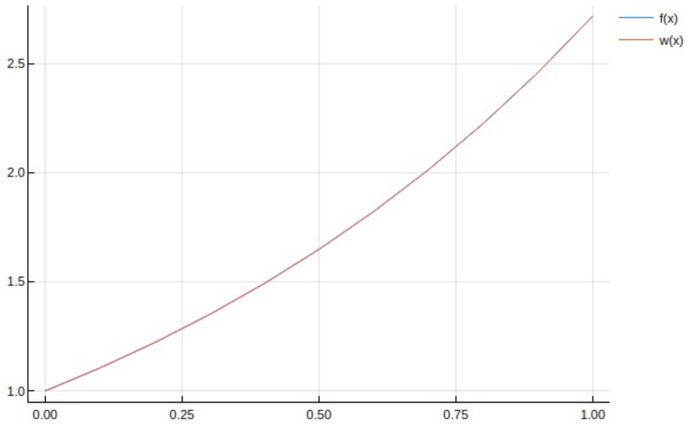
Używając funkcji z zadania 4, wygenerować wykresy wielomianów interpolowanych :

a) $f(x)=e^x, [0,1], n=5,10,15$
b) $g(x)=x^2\sin(x), [-1,1], n=5,10,15$
II. Rozwiązanie :

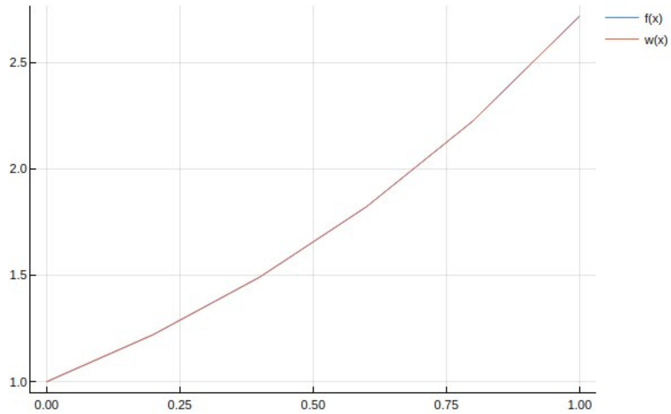
Użycie funkcji z zadania 5.

III. Wyniki oraz ich interpretacja :

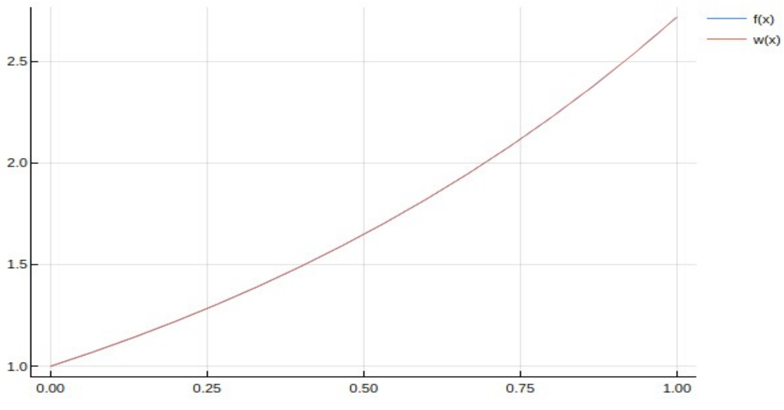
wyniki dla funkcji $f(x)=e^x, [0,1], n=5,10,15$:



n=5

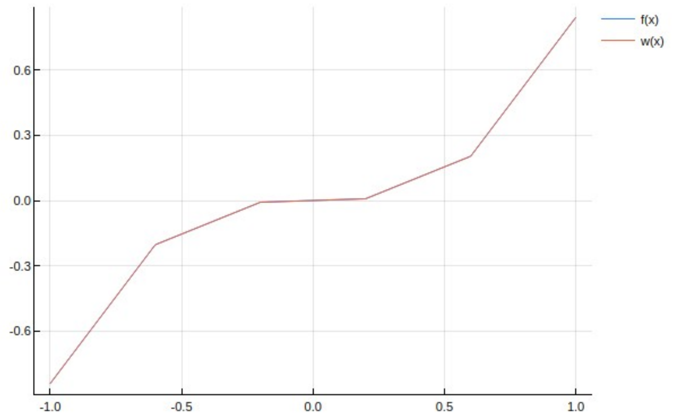


n=10

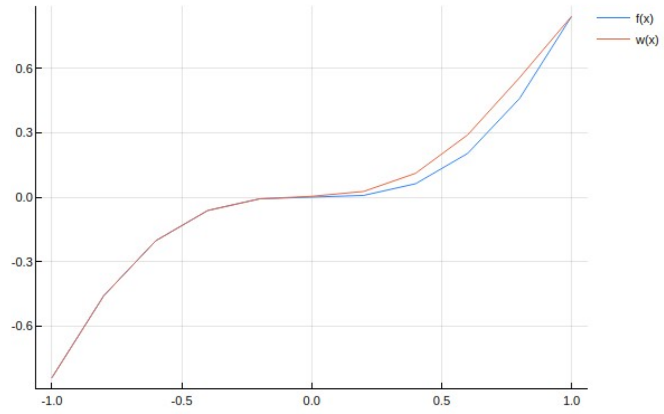


n=15

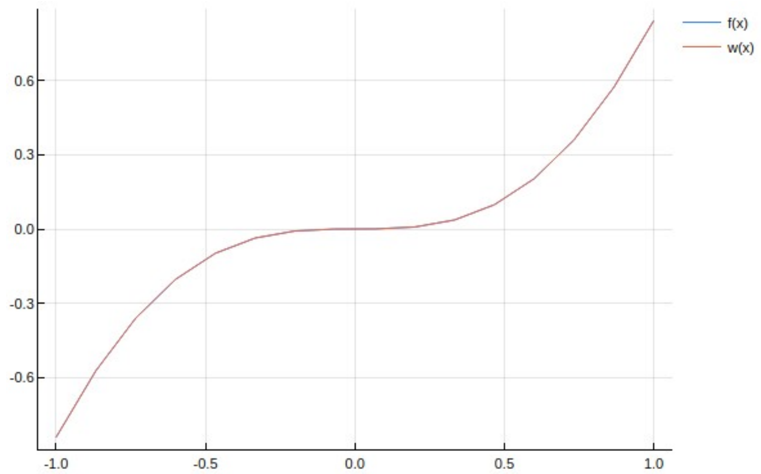
wyniki dla funkcji : $g(x)=x^2\sin(x), [-1,1], n=5,10,15$



n=5



n=10



n=15

IV. Wnioski :

Widać, iż wielomian dobrze przybliża zarówno funkcje f(x) i g(x), chociaż w przypadku g(x) dla n=10 wartości nieznacznie się rozjechały.

Zadanie 6

I. Krótki opis problemu :

Używając funkcji z zadania 4, wygenerować wykresy wielomianów interpolowanych :

a) $f(x)=|x|, [-1,1], n=5,10,15$

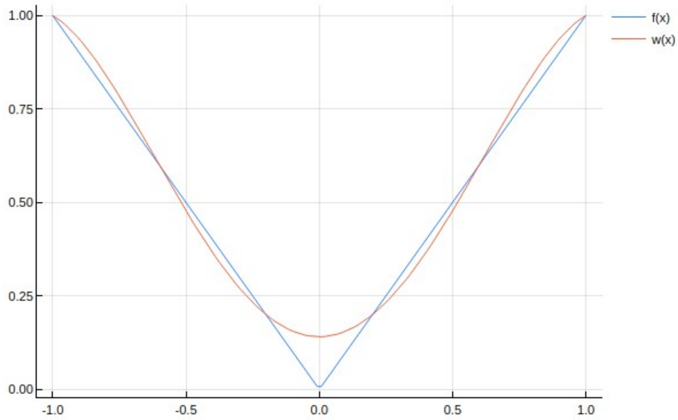
b) $g(x)=\frac{1}{1+x^2}, [-5,5], n=5,10,15$

II. Rozwiązanie :

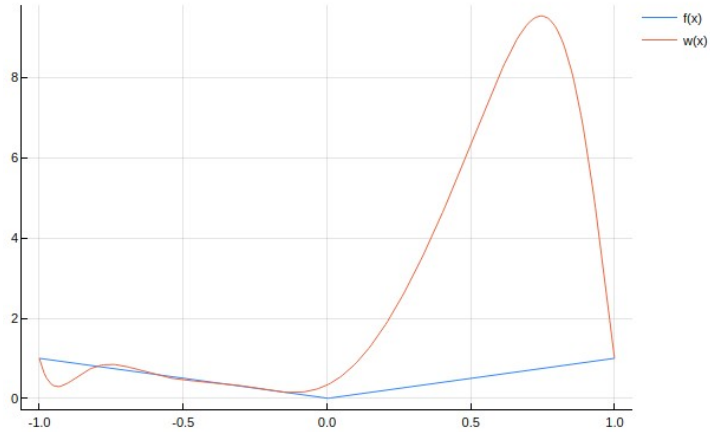
Użycie funkcji z zadania 5.

III. Wyniki oraz ich interpretacja :

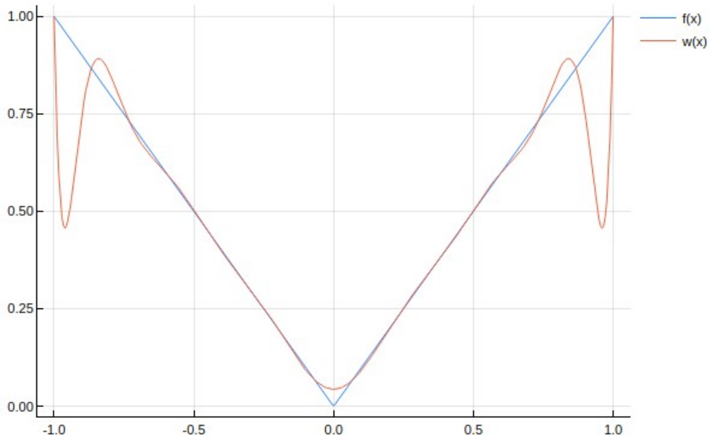
wyniki dla funkcji : $f(x)=|x|,[-1,1],n=5,10,15$



n=5



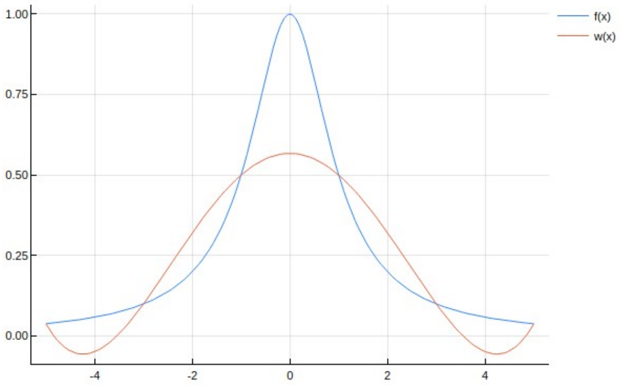
n=10



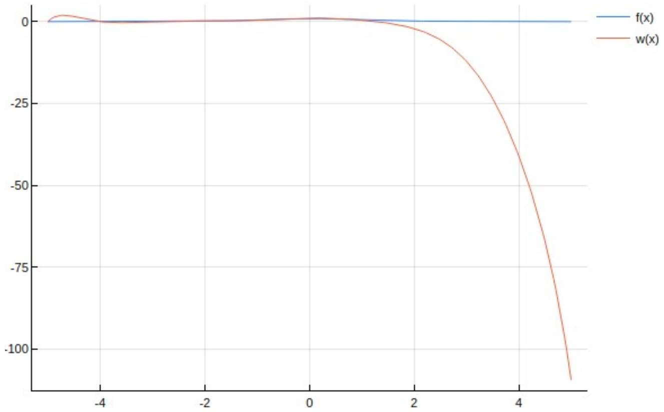
n=15

wyniki dla funkcji : $g(x)=\frac{1}{1+x^2},[-5,5],n=5,10,15$

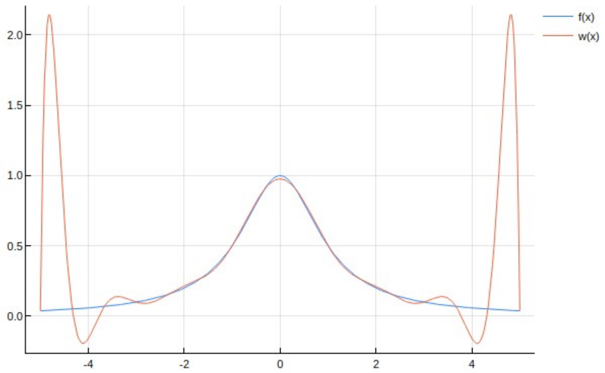
wyniki dla funkcji : $g(x)=\frac{1}{1+x^2},[-5,5],n=5,10,15$



dla n=5



dla n=10



dla n=15

IV. Wnioski :

Można zaobserwować, iż wielomiany z ilością węzłów n=5 dużo lepiej aproksymują funcje f i g, niż dla n=15 i dla n=10 (tutaj funkcje przyjęły bardzo odbiegające wartości).
Jest to efekt Rungego – pogorszenie przybliżenia pomimo zwiększenia liści węzłów, chociaż wydaje się to nieintuicyjne. Aby złagodzić ten efekt należałoby zastosować wielomiany Czebyszewa.