

# Théorème de Hille-Yosida et applications

---

Sacha Ben-Arous, Quentin Verrier, Clément Robiez

March 6, 2024

ENS Paris-Saclay

Théorème de Hille-Yosida

Équation de la chaleur

Régularité elliptique

# Théorème de Hille-Yosida

---

On travaille dans un espace de Hilbert  $H$ . On considère un opérateur linéaire non borné (i.e non continu)  $A : D(A) \rightarrow H$ .

- $A$  est monotone si  $\forall v \in D(A), \langle Av, v \rangle \geq 0$
- $A$  est maximal si  $\forall f \in H, \exists u \in D(A), u + Au = f$

Si  $A$  est un opérateur maximal monotone, alors :

- $D(A)$  est dense dans  $H$
- Le graphe de  $A$  est fermé
- $\forall \lambda > 0$ ,  $(I + \lambda A)$  est une bijection, et  $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Soit  $A$  est un opérateur maximal monotone, on note pour  $\lambda > 0$  :

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$  la résolvante de  $A$
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$  l'approximation de Yosida de  $A$

Rq :  $A_\lambda$  est continue et définie sur  $H$ .

Soit  $A$  est un opérateur maximal monotone, on note pour  $\lambda > 0$  :

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$  la résolvante de  $A$
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$  l'approximation de Yosida de  $A$

Rq :  $A_\lambda$  est continue et définie sur  $H$ .

On a les propriétés suivantes :

- $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$  et  $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$
- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av$
- $\|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|$  et  $\|A_\lambda v\| \leq \|Av\|$

# Théorème de Hille-Yosida

## Théorème (Hille-Yosida) :

Soit  $A$  un opérateur maximal monotone.

Alors,  $\forall u_0 \in D(A)$ ,  $\exists ! u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$  tel que :

$$(*) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus  $\forall t \geq 0$ ,  $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$  et  $\left\| \frac{du}{dt} \right\| \leq \|Au_0\|$



## Preuve (1) : Unicité

Soient  $u_1, u_2$  solutions de (\*), on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_1 - u_2|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt} (u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \right\rangle \\ &= - \langle A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \rangle \leq 0\end{aligned}$$

Or  $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ , donc  $\forall t \geq 0, u_1(t) = u_2(t)$

## Preuve (2) : Approximations

Soit  $\lambda \geq 0$  :

$$(**) \begin{cases} \frac{d}{dt}u_\lambda + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

Il existe  $u_\lambda$  solution  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(**)$  par C-L.

On a  $\langle A_\lambda u_\lambda, u_\lambda \rangle \geq 0$  et  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda|^2 \leq 0$  donc  $|u_\lambda| \leq u_0$ .

Par le même raisonnement, on obtient la décroissance de toutes les dérivées.

## Preuve (3) et (4) : Convergence

Soit  $\lambda, \mu \geq 0$ , on a de même  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |Au_0|^2$ , et en intégrant on obtient :

$$|u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t} |Au_0|$$

Donc sur tout segment  $[0, T]$  on a une suite de Cauchy, sur lequel la convergence va être uniforme vers  $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, H)$ .

Si de plus  $u_0 \in D(A^2)$ , on peut refaire le même raisonnement avec les dérivées pour obtenir  $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H)$ .

## Preuve (5) : Densité

On remarque que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u_\lambda = u$ , et de plus  $\frac{d}{dt} u_\lambda + A(J_\lambda u_\lambda) = 0$ .

Alors,  $A$  étant fermé, on en déduit que  $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$ , et  $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$ , donc que  $u$  est solution de  $(*)$ .

## Preuve (5) : Densité

On remarque que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u_\lambda = u$ , et de plus  $\frac{d}{dt} u_\lambda + A(J_\lambda u_\lambda) = 0$ .

Alors,  $A$  étant fermé, on en déduit que  $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$ , et  $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$ , donc que  $u$  est solution de  $(*)$ .

### Lemme :

Soit  $u_0 \in D(A)$ , en notant  $u'_0 := J_\lambda u_0 \in D(A)$ , on a  $u'_0 + \lambda A u'_0 = u_0$ .

Alors  $u'_0 \in D(A^2)$ , et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u_0 = u_0$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda A u_0 = A u_0$ , ce qui donne la densité de  $D(A^2)$  dans  $D(A)$ .

## Preuve (6) : Densité

Soit  $(u_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \in D(A^2)^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $u_0$  pour la norme du graphe. On considère les solutions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associées par l'étape (5). Par décroissance, on a

$$\begin{cases} |u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0,n} - u_{0,m}| \rightarrow 0 \\ \left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq |Au_{0,n} - Au_{0,m}| \rightarrow 0 \end{cases}$$

Alors convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ , leur limite vérifie  $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H)$

Comme  $A$  est fermé,  $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$ , et  $u$  satisfait le problème initial, ce qui achève la preuve.



## Équation de la chaleur

---

# Présentation du problème

$$(*) \begin{cases} \Delta u = \frac{d}{dt}u \\ u(0) = u_0(x) \quad \text{où } u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega) \end{cases}$$

On veut appliquer Hille-Yosida avec  $A = -\Delta$ , sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  (ou bien  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ ).

Avec  $\Omega$  qui est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$ .



La transformée de Fourier est plus forte que Hille-Yosida dans le cas particulier où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , car on obtient une forme explicite de la solution. On raisonne par analyse synthèse :

$$\widehat{\frac{du}{dt}} - \widehat{\Delta} u = 0, \text{ or on a } \frac{d\widehat{u}}{dt} = \frac{d\widehat{u}}{dt} \text{ et } \widehat{\Delta} u = -|\xi|^2 \widehat{u}$$

On obtient alors  $\widehat{u} = \widehat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t}$ , et donc  $u = \text{TF}^{-1}(\widehat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t})$

Par les calculs, on obtient  $u = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \sqrt{\frac{\pi}{t}}^d e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$

On reconnait un produit de convolution entre  $u_0$  et  $\mathcal{H}_t$  le noyau de la chaleur.

$$\mathcal{H}_t := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Réciproquement, cette solution vérifie (\*).

On veut résoudre dans  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ . La monotonie du laplacien est immédiate, la partie difficile étant la maximalité :

$$-\Delta u + u = f \text{ où } f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

Il est facile de prouver l'existence de solution dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  grâce au théorème de Lax-Milgram :

$$\exists! u \in \mathcal{H}^1(\Omega), \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$$

# Régularité elliptique

---

**Théorème (version Dirichlet) :** Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $\mathcal{C}^2$ , de frontière  $\Gamma$  bornée. Si  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  et  $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  tq :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$$

Alors  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ .