Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons un contre-exemple $\mathcal{C}^1$ élémentaire proposé par Denjoy lui-même, et qui est développé par H. Rosenberg dans [Ros74]. Nous présenterons ensuite un résultat sur l'existence et la densité de contre-exemples de régularité $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$ proposé par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X.

1 Cas continûment dérivable

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Denjoy) : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme f du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α.

Pour faire cela, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas $\mathcal{C}^2$: on sait déjà par Poincaré qu'un tel f est semi-conjugué à R_α par une fonction continue croissante h du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si h n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle I non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que I est un intervalle errant pour la dynamique de f), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.
L'idée ici est donc construire une fonction f qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjuguaison suivant :

Définition 1.1 : Un homéomorphisme du tore f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au tore tout entier.

Proposition 1.1

1. Si f est conjugué à g minimal, alors f est minimal.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors R_α est minimal

Preuve :
(1) est immédiat en utilisant la bijectivité de la conjuguaison.
(2) s'obtient en remarquand que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$\square$

La proposition suivante sera utile dans la suite :

Proposition 1.2 Soient D_1, D_2 deux ensembles denses dans $[0, 1]$, et $f : D_1 \to D_2$ une surjection (strictement) croissante, alors f admet un unique prolongement continu, (strictement) croissant, de $[0, 1]$ dans lui-même.

Preuve : L'unicité du prolongement est immédiate par densité de D_1, car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0,1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_1 qui tend vers x, quel'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette définition ne dépend pas du choix de la suite, car si l'on se donne une autre suite $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant les mêmes propriétés, on remarque que la suite de terme général $f(x_n) - f(\tilde{x}_n)$ est de Cauchy. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de f, et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de f est dense.

□

Preuve du Théorème 1.1 :

On commence par construire un relèvement de f, et plus précisemment la dérivée de ce dernier : on note $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$. On peut par exemple prendre $l_n = \dfrac{c}{n^2+1}$ où c est bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \mod 1$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où $\begin{cases} b_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

Les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont alors dans le même ordre que les $(\alpha_n)n \in \mathbb{Z}$, c'est à dire que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} \Leftrightarrow c_{n_1} < b_{n_2}$. On en déduit que les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont disjoints, et l'irrationalité de α donne que leur union est dense dans $[0,1]$.

On définit alors f' sur chaque I_n telle que :

1. $f'(t) \to 1$ quand $t \to b_n$ ou $t \to c_n$
2. $f'(t) \to 1$ uniformément quand $n \to \infty$
3. $\displaystyle\int_{I_n} f' = l_{n+1}$

On peut par exemple choisir : $f' : b_n + x \mapsto e^{\gamma_n x(l_n - x)}$ où γ_n est pris de telle sorte à vérifier le 3ème point (l'existence s'obtient par exemple avec le TVI, l'unicité provient de la stricte monotonie).
On remarquera que la condition $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$ permet d'assurer le second point.

On prolonge alors f' sur $[0,1]$ par $f'(t) = 1$ quand $t \in [0,1] \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, puis par $f'(t+1) = f'(t)$ sur $\mathbb{R}$ entier. Cette fonction est continue par ce qui précède, et alors en posant $f(t) := b_1 + \displaystyle\int_0^t f'(s)\mathrm{d}s$, on obtient que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, et que de plus f descend au quotient sur le tore car :

$$\begin{aligned} f(t+1) &= b_1 + \int_0^{t+1} f'(s)\mathrm{d}s = b_1 + \int_0^1 f'(s)\mathrm{d}s + \int_1^{t+1} f'(s)\mathrm{d}s \\ &= b_1 + 1 + \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s = f(t) + 1 \end{aligned}$$

Notons $\tilde{f}$ le difféomorphisme induit sur le tore par f, et montrons qu'il convient.

Lemme 1.1 $\rho(\tilde{f}) = \alpha$

Preuve :
On rappelle que $\alpha_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$. La construction de f donne par récurrence que :

$$\begin{array}{rcl} f^{n+1}(0) & = & \lfloor n\alpha \rfloor + b_{n+1} \quad \text{si} \quad \alpha_n < 1-\alpha \\ f^{n+1}(0) & = & \lfloor n\alpha \rfloor + b_{n+1} + 1 = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor + b_{n+1} \quad \text{si} \quad \alpha_n \geq 1-\alpha \end{array}$$

D'où $|\dfrac{f^n(0)}{n} - \alpha| \leq \dfrac{1}{n}$ et donc $\rho(\tilde{f}) = \alpha$.

Maintenant, si l'on arrive à montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ est invariant par $\tilde{f}$, comme cet ensemble est non trivial dans le tore, l'invariant de similitude mentionné plus haut donnera que $\tilde{f}$ ne peut pas être conjugué à la rotation R_α qui est minimale. On va donc montrer le lemme suivant :

Lemme 1.2 $\forall n \in \mathbb{N},\ f(I_n) = I_{n+1} \mod 1$.

Preuve : *à faire ...*

On en déduit en particulier que, f étant strictement croissante et continue, on a de plus $f(\mathring{I}_n) = \mathring{I}_{n+1}$.

Lemme 1.3 $K := [0,1] \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_n$ est un fermé non trivial et stable par f.

Preuve : La stabilité découle de la remarque précédente. Cet ensemble est clairement distinct de $[0,1]$ et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0,1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui est absurde.

$\square$

<u>Rq</u> : K est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

Références

[Ros74] Harold Rosenberg. “Un contre-exemple à la conjecture de Seifert”. In : *Séminaire N. Bourbaki* 434 (1974), p. 294-306.

[Her79] Michael Herman. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.