

---

# Probabilités

## Contexte

- Une mesure de probabilité étant en particulier finie, on a dans ce cadre que les espaces  $L^p$  sont emboîtés, i.e :  $L^\infty \subseteq \dots \subseteq L^1$ . Cela se traduit par le fait que si une variable aléatoire possède un moment d'ordre  $k$ , tous ses moments d'ordre inférieur sont également finis.
- Des variables indépendantes sont de covariance nulle, mais la réciproque est très fausse ! Par exemple en considérant une loi gaussienne et son produit par une v.a. de Rademacher, leur covariance est nulle mais elles ne sont pas indépendantes, sinon leurs valeurs absolues le seraient, et donc la gaussienne serait indépendante d'elle même, i.e. constante.
- À l'inverse, des variables a priori corrélées peuvent être indépendantes : si  $U$  est une loi exponentielle et  $V$  une loi uniforme sur  $[0, 1]$ , alors  $\sqrt{U} \cos(2\pi V)$  et  $\sqrt{U} \sin(2\pi V)$  sont indépendantes et suivent chacune la loi  $\mathcal{N}(0, 1/2)$ .

## Méthode

- Utiliser les outils adaptés : pour étudier une somme de v.a. indépendantes on utilise la transformée de Fourier, pour étudier leur min on utilise la fonction de répartition, etc ...
- Pour calculer la loi d'un couple  $(X, Y)$  de v.a., on prend  $f$  mesurable positive et on essaye d'écrire  $E(f(X, Y)) = \int f(x, y) d\mu(x, y)$ , et alors le couple est de loi  $\mu$ .

## Définitions et propriétés élémentaires

DÉFINITION 1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé, et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable.

1. Si  $X : \Omega \rightarrow E$  est mesurable, alors  $X$  est appelée *variable aléatoire* (v.a.) à valeurs dans  $E$ .
2. Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans  $E$ , on appelle loi de  $X$  la mesure image de  $P$  par  $X$ , notée  $P_X$  et vérifiant :

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A).$$

DÉFINITION 2. Pour toute v.a.r  $X$ , on appelle *fonction de répartition* de  $X$  la donnée de  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par  $F_X(t) = P(X \leq t) = P_X((-\infty, t])$ .

REMARQUE.  $F_X$  est continue à droite, limitée à gauche (càdlàg), croissante, tend vers 0 en  $-\infty$ , 1 en  $+\infty$ , et caractérise  $P_X$ .

DÉFINITION 3. Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On appelle *fonction caractéristique* de  $X$ , notée  $\Phi_X$ , la fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\Phi_X(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} dP_X(x) = E\left(e^{i\langle X, \xi \rangle}\right).$$

REMARQUE.  $\Phi_X$  est en fait la transformée de Fourier de la loi  $P_X$ . C'est une fonction uniformément continue, dont le module est borné par 1.  $\Phi_X$  a autant de dérivées que  $X$  a de moments finis.

REMARQUE. Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors  $\Phi_X(\xi) = \exp(i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2})$ .

DÉFINITION 4. Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on appelle *fonction génératrice* de  $X$ , la fonction  $G_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$G_X(t) := E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n).$$

REMARQUE.  $G_X$  caractérise la loi de  $X$ , et détermine tous les moments de  $X$  comme l'explique la proposition suivante.

---

PROPOSITION 1. — Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors pour tout  $k \geq 1$  :

$$E \left( \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G_X^{(k)}(t).$$

DÉFINITION 5 (Indépendance).

- Des événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont dits indépendants si pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a :

$$P \left( \bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

- Des tribus  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  sont dites indépendantes si pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  telle que  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , les événements sont indépendants.
- Des variables aléatoires  $(X_i)_{i \in I}$  à valeurs dans des espaces mesurables  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  sont dites indépendantes si la famille de tribus  $(\sigma(X_i))_{i \in I}$  l'est.

REMARQUE. L'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  porte sur les tribus engendrées (sur  $\Omega$ ) et non sur les valeurs proprement dites de ces variables aléatoires. Par suite, si des  $\Phi_i : (E_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow (E'_i, \mathcal{E}'_i)$  sont mesurables, l'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  entraîne celle des  $(\Phi_i(X_i))_{i \in I}$ .

REMARQUE. La vérification de l'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  se ramène à montrer que pour tout  $J \subset I$  fini, pour toute famille  $(A_j)_{j \in J}$  telle que  $A_j \in \mathcal{E}_j$ , on a  $P \left( \bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j) \right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$ .

PROPOSITION 2 (Caractérisations de l'indépendance). — Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de variables aléatoires réelles, et  $X := (X_1, \dots, X_n)$ .

1. Si les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants, et ont  $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$  comme densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue, alors  $P_X \ll \lambda_n$  et a pour densité  $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ .
2. Réciproquement, si  $P_X \ll \lambda_n$ , de densité s'écrivant  $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$  où les  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des densités de probabilité (i.e. positives, d'intégrale valant 1), alors les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants, de densités respectives  $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ .

COROLLAIRE 3. — Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires réelles, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes ;
2.  $P_X = \otimes_{i=1}^n P_{X_i}$
3. Pour toute famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  de fonctions boréliennes positives,  $E \left( \prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^n E(f_i(X_i))$
4.  $\Phi_X = \otimes_{i=1}^n \Phi_{X_i}$

## Résultats principaux

THÉORÈME 4 (Inégalité de Markov). — Soit  $X$  une variable aléatoire réelle presque sûrement positive, alors pour  $\alpha > 0$  :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

THÉORÈME 5 (Injectivité de la transformée de Fourier). — Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Si  $\Phi_{X_1} = \Phi_{X_2}$ , alors  $P_{X_1} = P_{X_2}$ .

THÉORÈME 6 (Coalitions). — Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de tribus engendrées par les  $\pi$ -systèmes  $(C_i)_{i \in I}$ . Alors ces tribus sont indépendantes si et seulement si les  $\pi$ -systèmes générateurs le sont. En particulier, si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes, et  $(I_k)_{k \in K}$  une partition de  $I$ , alors les tribus  $(\sigma(X_i, i \in I_k))_{k \in K}$  sont indépendantes.

THÉORÈME 7 (Loi faible des grands nombres). — Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de variables aléatoires indépendantes de  $L^2$ , telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$  et  $\sup_i V(X_i) = \sigma^2$ . Alors :

1. La moyenne empirique  $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge dans  $L^2$  vers la moyenne théorique  $\mu$ .
2. Pour  $\varepsilon > 0$ , on a l'estimation suivante :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

LEMME 8 (Borel-Cantelli). — Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  une suite d'évènements. On note  $\limsup A_n := \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ , qui correspond à l'évènement "être dans une infinité de  $A_n$ ". On a alors la dichotomie suivante :

1. Si  $\sum_n P(A_n) < \infty$ , alors  $P(\limsup A_n) = 0$ , i.e.  $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} < +\infty$  presque sûrement.
2. Si  $\sum_n P(A_n) = \infty$  et que les  $(A_n)_{n \geq 0}$  sont indépendants, alors  $P(\limsup A_n) = 1$ .

THÉORÈME 9 (Loi du 0-1). — Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes, on note  $\mathcal{F}_n^+ := \sigma(X_k, k \geq n)$  et  $\mathcal{F}_\infty^+ := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n^+$  la tribu asymptotique. Alors pour tout  $A \in \mathcal{F}_\infty^+$ ,  $P(A) \in \{0, 1\}$ .

REMARQUE. On en déduit qu'une variable aléatoire  $\mathcal{F}_\infty^+$ -mesurable est presque sûrement constante en considérant sa fonction de répartition. En particulier, les  $\liminf$  et  $\limsup$  d'une suite de v.a. indépendantes sont constantes presque sûrement, donc soit cette suite converge p.s. vers une constante, soit la limite n'existe p.s. jamais.

THÉORÈME 10 (Loi forte des grands nombres). — Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. i.i.d. telle que  $E(|X_1|) < \infty$ , alors P p.s. on a :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow E(X_1)$$

REMARQUE. Avec des résultats d'uniforme intégrabilité, on peut aussi obtenir la convergence au sens  $L^1$  dans le théorème ci-dessus.

THÉORÈME 11 (Théorème central limite). — Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. i.i.d. telle que  $E(X_1^2) < \infty$ , alors en notant  $m := E(X_1)$  et  $\sigma^2 := V(X_1)$ , on a :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

## Outils importants

LEMME 12 (Fekete). — Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite sous additive, i.e.  $\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$ , alors  $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et on a l'égalité :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

PROPOSITION 13 (Formule de transfert). — Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ , et  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction mesurable telle que  $f \geq 0$  p.p. ou  $E(|f(X)|) < \infty$ , alors :

$$E(f(X)) = \int_E f(x) dP_X(x).$$

THÉORÈME 14 (Inégalité de Jensen). — Soient  $X \in L^1$ , et  $\Phi$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  tel que  $P(X \in I) = 1$  et  $E(|\Phi(X)|) < \infty$ . Alors  $\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X))$ . Si  $\Phi$  est de plus strictement convexe, alors il y a égalité si et seulement si  $X$  est p.s. constante.

---

COROLLAIRE 15 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychef). — Si  $X \in L^2$  est une v.a.r., alors pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

PROPOSITION 16 (Inégalité de Hoeffding). — Soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de v.a. indépendantes à valeurs dans  $[a, b]$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \epsilon) \leq 2 \exp(-2 \frac{n\epsilon^2}{(b-a)^2})$$

THÉORÈME 17 (Lévy). — Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , alors :  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\infty$  si et seulement si  $\Phi_{X_n} \rightarrow \Phi_{X_\infty}$  simplement.

## Autres résultats

LEMME 18. — Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, alors pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$  :

$$\Phi(x) = \sup_{a,b \mid l_{a,b} \leq \Phi} l_{a,b}(x)$$

LEMME 19. — Pour une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $E(X) = \int_0^\infty P(X \geq x) dx$ , car  $X = \int_0^\infty 1_{x \leq X} dx$