# Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons des contre-exemples de régularité optimale, dus à Denjoy, et qui sont développé par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X.

## 1 Introduction et outils

On se propose de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.1 (Denjoy) :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$-difféomorphisme $f$ du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et $f$ n'est pas conjugué à la rotation $R_\alpha$.

Rq : Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e $f$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $1-\epsilon$-hölderienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas $\mathcal{C}^2$ : on sait déjà par Poincaré qu'un tel $f$ est semi-conjugué à $R_\alpha$ par une fonction continue croissante $h$ du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si $h$ n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle $I$ non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que $I$ est un intervalle errant pour la dynamique de $f$), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.
L'idée ici est donc construire une fonction $f$ qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjuguaison suivant :

**Définition 1.1** : Un homéomorphisme du tore $f$ est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par $f$ est vide ou égal au tore tout entier.

**Proposition 1.1**

1. Si $f$ est conjugué à $g$ minimal, alors $f$ est minimal.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $R_\alpha$ est minimal

**Preuve :**
(1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjuguaison.
(2) s'obtient en remarquant que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

**Proposition 1.2** Soient $D_1, D_2$ deux ensembles denses dans $[0,1]$, et $f : D_1 \to D_2$ une surjection croissante (resp. strictement croissante), alors $f$ admet un unique prolongement continu, croissant (resp. strictement croissant), de $[0,1]$ dans lui-même.

**Preuve :** L'unicité du prolongement est immédiate par densité de $D_1$, car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0,1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D_1$ qui tend vers $x$, que l'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de $f$, et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de $f$ est dense.

□

## 1.1 Contre-exemple continu

On note $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$

On peut par exemple choisir $l_n = \dfrac{c}{n^2+1}$ où $c$ est une constante bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \mod 1$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où $\begin{cases} b_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

**Lemme 1.1** $K := [0,1] \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$ est un fermé non trivial.

**Preuve :** Cet ensemble est clairement distinct de $[0,1]$, et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0,1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui est absurde.

□

Rq : $K$ est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction $h$ définie par morceaux sur les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h : I_n \mapsto \alpha_n$.

**Lemme 1.2** Les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont ordonnés identiquement aux $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus $h$ admet un prolongement continu sur $[0,1]$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{Z},\ h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$

**Preuve :** Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$, alors : $b_{n_2} - c_{n_1} = \displaystyle\sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k > 0$, ce qui prouve le premier point.
On en déduit immédiatement que $h$ est croissante, et alors par la Proposition 1.2, admet un prolongement continue croissant de [0,1] dans lui-même. Par définition, on a l'inclusion $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$. Si par l'absurde il existe $x$ tel que $h(x) = \alpha_n$ et $x \notin I_n$, alors $d(x, I_n) > 0$. On suppose sans perte de généralité que $x < b_n$, alors par densité de $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ il existe $y \in I_{n'}$ tel que $x \leq y < b_n$, et la croissance de $h$ donne $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_n$, i.e $\alpha_{n'} = \alpha_n$, ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue.

□

On prolonge maintenant $h$ sur $\mathbb{R}$ par la relation, pour $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{Z}$, $h(x+p) = h(x) + p$, et on note $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$. Alors $U := \bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_{n,p}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R} \setminus U$ est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant $g_n$ de $I_n$ sur $I_{n+1}$, par exemple la transformation affine : $g_n(x) := \dfrac{l_n+1}{l_n} x + b_{n+1} - b_n \dfrac{l_{n+1}}{l_n}$, qui vérifie bien $g_n(b_n) = b_{n+1}$ et $g_n(c_n) = c_{n+1}$. Cela définit alors une application $g$ de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ dans lui-même, strictement croissante, que l'on prolonge sur $\mathbb{R}$ entier de la même manière que $h$. Par la Proposition 1.2, $g$ se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On a alors par construction $h \circ g = R_\alpha \circ h$ sur $\bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_{n,p}$, mais cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$ et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout $\mathbb{R}$. Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du tore, et on a la propriété suivante :

**Théorème 1.2** L'homéomorphisme du cercle $g$ construit précédemment vérifie $\rho(g) = \alpha$, mais $g$ n'est pas conjugué à $R_\alpha$.

**Preuve :** $\rho(g) = \alpha$ est immédiat car la semi-conjuguaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite, $K = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_n$ est invariant par $g$ par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme 1.1, donc $g$ n'est pas minimal, et alors la Proposition 1.1 permet de conclure que $g$ n'est pas conjugué à $R_\alpha$.

□

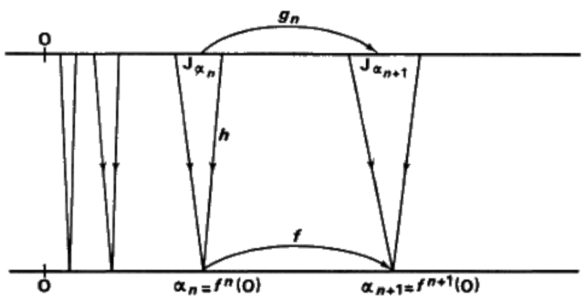


FIGURE 1 – [Her79] Schéma de la construction où $f = R_\alpha$

## 1.2 Contre-exemple dérivable

On considère toujours un homéomorphisme croissant $g_n$ de $I_n$ sur $I_{n+1}$, prolongé en $g_{n,p} = g_n + p$ sur $I_{n,p}$. On va de plus imposer que $g_n$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant :

$$(*) \begin{cases} g_n'(x) = 1 \quad \text{si } x \in \partial I_n \\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} \sup\limits_{x\in I_n} |g_n'(x) - 1| = 0 \end{cases}$$

On considèrera enfin les fonctions $g_n'$ prolongées continuement sur tout l'intervalle [0,1], en les prenant constantes égales à 1 sur le complémentaire de $I_n$

**Lemme 1.3** $g_n : x \mapsto b_{n+1} + \displaystyle\int_{b_n}^{x} 1 + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)(t - b_n)(c_n - t)dt$ vérifie la condition $(*)$.

**Preuve :** $g_n$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme car sa dérivée est strictement positive. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{c_n} 1+\frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n}-1)(t-b_n)(c_n-t)\mathrm{d}t &= l_n+\frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n}-1)\int_{b_n}^{c_n}(t-b_n)(c_n-t)\mathrm{d}t \\ &= l_n+\frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n}-1)\left[\frac{u^2}{2}l_n-\frac{u^3}{3}\right]_0^{l_n} \\ &= l_n+\frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n}-1)\frac{l_n^3}{6}=l_{n+1}\end{aligned}$$

Donc $g_n$ envoie bien $I_n$ sur $I_{n+1}$. La première condition de $(*)$ est immédiate, la seconde découle du fait que pour $x\in I_n$ : $|g_n'(x)-1|\leq 6(\frac{l_{n+1}}{l_n}-1)\to 0$ quand $n\to\pm\infty$ par hypothèse.

□

**Lemme 1.4** La fonction $\eta$ qui coïncide avec $g_n'$ sur $I_n$ et qui vaut 1 ailleurs est continue et vérifie $\eta = 1+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(g_n'-1)$

**Preuve :**
En différenciant les cas $x\in I_n$, et $x\in[0,1]\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, l'égalité ponctuelle est immédiate. On va de plus montrer que la convergence est uniforme, ce qui donnera la continuité de $\eta$.
Soit $N\in\mathbb{N}$, et $x\in[0,1]$, on a : $\sum_{|k|\geq N}(g_n'(x)-1)=\begin{cases} g_n'(x)-1 & \text{si il existe } n \text{ tel que } x\in I_n \text{ et } |n|\geq N \\ 0 \end{cases}$

Dans tous les cas, $\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{|k|\geq N}(g_n'(x)-1)\right|\leq \sup_{|n|\geq N}|g_n'(x)-1|$. Or par hypothèse sur les dérivées, ce majorant tend vers 0 et donc la convergence est uniforme.

□

La fonction $g$ admet comme dans la partie précédente un prolongement en homéomorphisme de [0,1] mais on a cette fois le résultat plus fort suivant :

**Théorème 1.3** $g$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $\rho(g)=\alpha$ mais n'est pas conjugué à $R_\alpha$.

**Preuve :** Le seul point qui ne découle pas du Théorème 1.2 est que $g$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Pour montrer cela, on commence par remarquer que $g$ est d'une part continue, et que d'autre part $g$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $U:=\bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} I_{n,p}$ qui est de mesure pleine dans $\mathbb{R}$.
Alors, si $A$ est un borélien de mesure de Lebesgue nulle, on a $\lambda(g(A))\leq\lambda(g(A\cap(\mathbb{R}\setminus U)))+\lambda(g(A\cap U))$. Or le premier terme est nul car $\mathbb{R}\setminus U$ est stable par $g$ et de mesure nulle, et le second terme est nul par théorème de changement de variable, $g$ étant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $U$, et $A$ de mesure nulle.

On en déduit que la mesure de Stieltjes associée à $g$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi $g$ admet une dérivée de Radon-Nikodym $\mu\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, telle que $g(x)=g(0)+\int_0^x\mu(t)\mathrm{d}t$. Mais alors $\mu$ est presque partout égale à $g_n'$ sur les $(I_{n,p})_{p\in\mathbb{Z}}$ d'après la théorie des points de Lebesgue, i.e presque partout égale à $\eta$ car $U$ est de mesure pleine, et on a finalement : $g(x)=g(0)+\int_0^x\eta(t)\mathrm{d}t$. On en déduit que $g$ est un homéomorphisme $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ à dérivée non nulle, et donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

□

### 1.3 Régularité hölderienne

Soit $w : [0,1] \mapsto [0,1]$ un module de continuité, on considère l'ensemble des fonctions continue pour ce module, $\mathcal{C}^w(\mathbb{T}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \;\middle|\; \sup_{0<|x-y|\leq 1} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}$

En considérant la fonction $g$ construite dans la partie précédente, on a le lemme :

**Lemme 1.5** $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{1}{w(l_n)} < +\infty \Rightarrow g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$

**Preuve :** On suppose sans perte de généralité que $w(x)/x$ est décroissante. En reprenant le $g_n'$ de la construction précédente, on constate que :

$$|g_n''(t)| = \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)|(c_n - t + b_n - t)| \leq \frac{3}{l_n}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)$$

L'inégalité des accroissements finis donne donc :

$\sup_{0<x-y\leq 1} \left| \frac{g_n'(x) - g_n'(y)}{w(x-y)} \right| \leq \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{3}{w(l_n)} < +\infty$, et on en déduit que $g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$ car $g' - 1$ est limite uniforme de $\sum_{k=-n}^{n} (g_k' - 1)$, et les fonctions dans la somme ayant des supports disjoints 2 à 2, on a :

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} (g_k' - 1) \right|_{\mathcal{C}^w} \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{Z}} |g_n' - 1|_{\mathcal{C}^w} \leq \frac{6}{l_n}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) < +\infty$$

□

Rq : Ce résultat est en fait une équivalence.

La suite $l_n := \frac{c}{(|n|+k)(log(|n|+k)^{1+\epsilon}}$ vérifie le critère du lemme 1.5 pour le module $w(x) = O(x^{1-\epsilon'})$, pour tout $\epsilon' > \epsilon$, ce qui permet de conclure la preuve du Théorème 1.1

## Références

[Her79] Michael HERMAN. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.

[Mil01] John MILNOR. “Introductory Dynamics Lectures”. 2001.

[GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem.* 2019.