Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = O(1/n^2)$. Que dire de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$$
où γ est un réel que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On note pour $n \geq 2$, $u_n := \dfrac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ et calculer sa valeur.

Exercice 2 (avec préparation) : Soient E un e.v.n de dimension quelconque, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$v_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.
2. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$$
3. On suppose que E est de dimension finie, montrer que :
$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$
4. On suppose à nouveau que E est de dimension quelconque. Montrer que si
$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.
5. Étudier la réciproque.

Exercice 3 :
On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on introduit les événements :
A_n = "On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences",
B_n = "On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n-1$ et n".
On pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$, et $p_1 = 0$.

1. Calculer p_2, p_3 et p_4.
2. Pour $n \geq 2$, montrer que :
$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad et \quad p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
3. En déduire une relation entre p_{n+2}, p_{n+3} et p_n valable pour tout $n \geq 1$.
4. Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4 (avec préparation) :
On étudie l'équation fonctionnelle :

$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

1. Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h la fonction f est-elle solution de (E) ?
3. On définit par récurrence une suite de fonctions avec $h_0 : x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

   Pour $x \in [0;1]$, soit $T_x : y \mapsto y - \dfrac{xy^2}{2}$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x([0;1]) \subset [0;1]$. En déduire que (h_n) converge uniformément sur $[0;1]$.
4. Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.
5. Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 5 :
Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de u, et $n_1, \ldots, n_q$ leurs multiplicités. On suppose que tous les espaces propres de u sont de dimension 1.

1. Si $1 \leq i \leq q$ et $0 \leq m \leq n_i$, montrer que le noyau de $(u - \lambda_i \mathrm{Id})^m$ est de dimension m.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$F = \mathrm{Ker}\,(Q(u))$$
3. Montrer que le nombre de sous-espaces de E stables par u est le nombre de diviseurs unitaires de χ_u dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6 :
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famile $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?
2. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $A_p := p\mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.
3. Montrer que
$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$
4. Que dire de la sommabilité de la famille $(1/p)_{p\in\mathcal{P}}$?

Exercice bonus 1 :
Montrer que tout sous-groupe fini des inversibles d'un corps commutatif est cyclique.

Exercice bonus 2 :
Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(M^k) = 0$.