Probabilités

Méthode et contexte

- Une mesure de probabilité étant en particulier finie, on a dans ce cadre que les espaces L^p sont emboités, i.e : $L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^1$. Cela se traduit par le fait que si une variable aléatoire possède un moment d'ordre k, tous ses moments d'ordre inférieur sont également finis.

Définitions et propriétés élémentaires

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et on pourra utiliser un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.

1. Si $X : \Omega \mapsto E$ est mesurable, alors X est appelée *variable aléatoire* (v.a.) à valeurs dans E.
2. Si X est une v.a. à valeurs dans E, on appelle loi de X la mesure image de P par X, notée P_X et vérifiant
$$P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}\right) = P(X \in A).$$

Définition 2. Pour toute v.a.r X, on appelle *fonction de répartition* de X la donnée de $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t) = P_X(]-\infty, t])$.

Remarque. F_X est continue à droite, limitée à gauche (càdlàg), croissante, tend vers 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, et caractérise P_X.

Définition 3. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X, notée Φ_X, la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_X(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}P_X(x) = E\left(e^{i\langle X,\xi\rangle}\right).$$

Remarque. Φ_X est en fait la transformée de Fourier de la loi P_X. C'est une fonction uniformément continue, dont le module est borné par 1. Φ_X a autant de dérivées que X a de moments finis.

Remarque. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\Phi_X(\xi) = exp(i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2})$.

Définition 4. Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X, la fonction $G_X : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$ définie par :

$$G_X(t) := E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n).$$

Remarque. G_X caractérise la loi de X, et détermine tous les moments de X comme l'explique la proposition suivante.

Proposition 1. — *Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq 1$:*

$$E\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)\right) = \lim_{t \to 1^-} G_X^{(k)}(t).$$

Résultats principaux

Théorème 2 (Inégalité de Markov). — *Soit X une v.a.r presque surement positive, alors pour $\alpha > 0$:*

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Théorème 3 (Inégalité de Jensen). — *Soient $X \in L^1$, et Φ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $P(X \in I) = 1$ et $E(|\Phi(X)|) < \infty$. Alors $\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X))$. Si Φ est de plus strictement convexe, alors il y a égalité si et seulement si X est p.s constante.*

Théorème 4 (Injectivité de la transformée de Fourier). — *Soient X_1 et X_2 des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $\Phi_{X_1} = \Phi_{X_2}$, alors $P_{X_1} = P_{X_2}$.*

Outils importants

Proposition 5 (Changement de variable). — *Soit X une v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, et $f : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable telle que $f \geq 0$ p.p. ou $E\big(|f(X)|\big) < \infty$, alors :*

$$E(f(X)) = \int_E f(x) \mathrm{d}P_X(x).$$

Corollaire 6 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychef). — *Si $X \in L^2$ est une v.a.r, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Autres résultats

Lemme 7. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\Phi : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors pour tout $x \in \mathring{I}$:*

$$\Phi(x) = \sup_{a,b \ | \ l_{a,b} \leq \Phi} l_{a,b}(x)$$