

Probabilités

Méthode et contexte

- Une mesure de probabilité étant en particulier finie, on a dans ce cadre que les espaces L^p sont emboîtés, i.e : $L^\infty \subseteq \dots \subseteq L^1$. Cela se traduit par le fait que si une variable aléatoire possède un moment d'ordre k , tous ses moments d'ordre inférieur sont également finis.

Définitions et propriétés élémentaires

DÉFINITION 1. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, et (E, \mathcal{E}) un espace mesurable.

1. Si $X : \Omega \rightarrow E$ est mesurable, alors X est appelée *variable aléatoire* (v.a.) à valeurs dans E .
2. Si X est une v.a. à valeurs dans E , on appelle loi de X la mesure image de P par X , notée P_X et vérifiant :

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A).$$

DÉFINITION 2. Pour toute v.a.r X , on appelle *fonction de répartition* de X la donnée de $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t) = P_X([-\infty, t])$.

REMARQUE. F_X est continue à droite, limitée à gauche (càdlàg), croissante, tend vers 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, et caractérise P_X .

DÉFINITION 3. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On appelle *fonction caractéristique* de X , notée Φ_X , la fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} définie par

$$\Phi_X(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} dP_X(x) = E\left(e^{i\langle X, \xi \rangle}\right).$$

REMARQUE. Φ_X est en fait la transformée de Fourier de la loi P_X . C'est une fonction uniformément continue, dont le module est borné par 1. Φ_X a autant de dérivées que X a de moments finis.

REMARQUE. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\Phi_X(\xi) = \exp(i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2})$.

DÉFINITION 4. Si X est une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , on appelle *fonction génératrice* de X , la fonction $G_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$G_X(t) := E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n).$$

REMARQUE. G_X caractérise la loi de X , et détermine tous les moments de X comme l'explique la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , alors pour tout $k \geq 1$:

$$E\left(\prod_{i=0}^{k-1} (X - i)\right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G_X^{(k)}(t).$$

DÉFINITION 5 (Indépendance).

- Des événements $(A_i)_{i \in I}$ sont dits indépendants si pour toute partie finie J de I , on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

- Des tribus $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sont dites indépendantes si pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{A}_i$, les événements sont indépendants.
- Des variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ à valeurs dans des espaces mesurables (E_i, \mathcal{E}_i) sont dites indépendantes si la famille de tribus $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ l'est.

REMARQUE. L'indépendance des $(X_i)_{i \in I}$ porte sur les tribus engendrées (sur Ω) et non sur les valeurs proprement dites de ces variables aléatoires. Par suite, si des $\Phi_i : (E_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow (E'_i, \mathcal{E}'_i)$ sont mesurables, l'indépendance des $(X_i)_{i \in I}$ entraîne celle des $(\Phi_i(X_i))_{i \in I}$.

REMARQUE. La vérification de l'indépendance des $(X_i)_{i \in I}$ se ramène à montrer que pour tout $J \subset I$ fini, pour toute famille $(A_j)_{j \in J}$ telle que $A_j \in \mathcal{E}_j$, on a $P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$.

PROPOSITION 2 (Caractérisations de l'indépendance). — Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables aléatoires avec $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$. Soit $X := (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i)$.

1. Les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants si et seulement si $P_X = \otimes_{i=1}^n P_{X_i}$, ce qui équivaut à $\Phi_X = \otimes_{i=1}^n \Phi_{X_i}$.
2. (a) Si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants, et ont $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ comme densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $P_X \ll \lambda_n$ et a pour densité $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$.
- (b) Réciproquement, si $P_X \ll \lambda_n$, de densité s'écrivant $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$, alors les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants, de densités respectives $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$.

Résultats principaux

THÉORÈME 3 (Inégalité de Markov). — Soit X une variable aléatoire réelle presque sûrement positive, alors pour $\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

THÉORÈME 4 (Inégalité de Jensen). — Soient $X \in L^1$, et Φ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $P(X \in I) = 1$ et $E(|\Phi(X)|) < \infty$. Alors $\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X))$. Si Φ est de plus strictement convexe, alors il y a égalité si et seulement si X est p.s. constante.

THÉORÈME 5 (Injectivité de la transformée de Fourier). — Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . Si $\Phi_{X_1} = \Phi_{X_2}$, alors $P_{X_1} = P_{X_2}$.

THÉORÈME 6 (Coalitions). — Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, et $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I . Alors les tribus $(\sigma(X_i, i \in I_k))_{k \in K}$ sont indépendantes.

THÉORÈME 7 (Loi faible des grands nombres). — Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de L^2 , telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$ et $\sup_i V(X_i) = \sigma^2$. Alors :

1. La moyenne empirique $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge dans L^2 vers la moyenne théorique μ .
2. Pour $\varepsilon > 0$, on a l'estimation suivante :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Outils importants

LEMME 8 (Fekete). — Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sous additive, i.e $\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$, alors $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on a l'égalité : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

PROPOSITION 9 (Changement de variable). — Soit X une v.a. à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , et $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable telle que $f \geq 0$ p.p. ou $E(|f(X)|) < \infty$, alors :

$$E(f(X)) = \int_E f(x) dP_X(x).$$

COROLLAIRE 10 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychef). — Si $X \in L^2$ est une v.a.r, alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

PROPOSITION 11 (Inégalité de Hoeffding). — Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de v.a. indépendantes à valeurs dans $[a, b]$. Alors pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \epsilon) \leq 2 \exp(-2 \frac{n\epsilon^2}{(b-a)^2})$$

Autres résultats

LEMME 12. — Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Si $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$:

$$\Phi(x) = \sup_{a,b \mid l_{a,b} \leq \Phi} l_{a,b}(x)$$