Probabilités

Méthode et contexte

- Une mesure de probabilité étant en particulier finie, on a dans ce cadre que les espaces L^p sont emboités, i.e : $L^\infty \subseteq \cdots \subseteq L^1$.

Définitions et propriétés élémentaires

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et on pourra utiliser un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.

1. Si $X : \Omega \mapsto E$ est mesurable, alors X est appelée *variable aléatoire* (v.a.) à valeurs dans E.
2. Si X est une v.a. à valeurs dans E, on appelle loi de X la mesure image de P par X, notée P_X et vérifiant
$$P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}\right) = P(X \in A).$$

Définition 2. Pour toute v.a.r X, on appelle *fonction de répartition* de X la donnée de $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t) = P_X(]-\infty, t])$.

Remarque. F_X est continue à droite, limitée à gauche (càdlàg), croissante, tend vers 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, et caractérise P_X.

Définition 3. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X, notée Φ_X, la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_X(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi\rangle} \mathrm{d}P_X(x) = E\left(e^{i\langle X, \xi\rangle}\right).$$

Remarque. Φ_X est en fait la transformée de Fourier de la loi P_X. C'est une fonction uniformément continue, dont le module est borné par 1. Φ_X a autant de dérivées que X a de moments finis.

Remarque. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\Phi_X(\xi) = exp(i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2})$.

Définition 4. Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X, la fonction $G_X : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$ définie par :
$$G_X(t) := E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n).$$

Remarque. G_X caractérise la loi de X, et détermine tous les moments de X comme l'explique la proposition suivante.

Proposition 1. — *Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq 1$:*

$$E\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)\right) = \lim_{t \to 1^-} G_X^{(k)}(t).$$

Résultats principaux

Théorème 2 (Inégalité de Markov). — *Soit X une v.a.r presque surement positive, alors pour $\alpha > 0$:*

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Théorème 3 (Inégalité de Jensen). — *Soient $X \in L^1$, et Φ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $P(X \in I) = 1$ et $E(|\Phi(X)|) < \infty$. Alors $\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X))$. Si Φ est de plus strictement convexe, alors il y a égalité si et seulement si X est p.s constante.*

Théorème 4. — *Soient X_1 et X_2 des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $\Phi_{X_1} = \Phi_{X_2}$, alors $P_{X_1} = P_{X_2}$.*

Outils importants

Proposition 5 (Changement de variable). — *Soit X une v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, et $f : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable telle que $f \geq 0$ p.p. ou $E\big(|f(X)|\big) < \infty$, alors :*

$$E(f(X)) = \int_E f(x) \mathrm{d}P_X(x).$$

Corollaire 6 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychef). — *Si $X \in L^2$ est une v.a.r, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Autres résultats

Lemme 7. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\Phi : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors pour tout $x \in \mathring{I}$:*

$$\Phi(x) = \sup_{a,b \ | \ l_{a,b} \leq \Phi} l_{a,b}(x)$$