

I Théorie de la mesure

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) , et on pourra utiliser un espace métrique (T, d) .

THÉORÈME I-1 (Dynkin). — *Le σ -système engendré par un π -système est égal à la tribu engendrée par ce dernier.*

THÉORÈME I-2 (Convergence monotone). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $[0, +\infty]$, telle que pour tout $n \geq 0$, $f_n \leq f_{n+1}$. Alors, en notant f la limite simple de cette suite, on a que f est mesurable, et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

THÉORÈME I-3 (Convergence dominée). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f . Si il existe g intégrable telle que pour tout $n \geq 0$, $|f_n| \leq g$, alors f est intégrable et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

REMARQUE. On peut seulement supposer les conditions ci-dessus vraies presque partout, mais dans ce cas il faut imposer la mesurabilité de la limite simple, ou bien travailler dans la tribu complétée, comme l'explique la remarque suivante.

REMARQUE. Si $\tilde{f} : E \mapsto F$ est presque partout égale à une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (F, \mathcal{B})$, alors \tilde{f} est mesurable pour la tribu complétée $\overline{\mathcal{A}}$ sur E .

Méthode :

Toujours se demander : dans quel ensemble je travaille, quelle est la tribu, quelle est la mesure ?

Outils :

COROLLAIRE I-4 (Unicité des mesures). — *Soient μ et ν deux mesures sur (E, \mathcal{A}) qui coïncident sur un π -système \mathcal{C} tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors :*

1. *Si $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*
2. *Si il existe une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C} tels que $\bigcup_n A_n = E$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*

LEMME I-5 (Fatou). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n$$

PROPOSITION I-6 (Continuité des intégrales). — *Soit $t_0 \in T$ et $f : T \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. Si :*

- *Pour tout $t \in T$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.*
- *Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue en t_0 .*
- *Il existe g intégrable telle que pour tout $t \in T$, pour presque tout $x \in E$, on a $|f(t, x)| \leq g(x)$*

Alors, $t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$ est continue en t_0 .

PROPOSITION I-7 (Dérivation des intégrales). — *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, et $f : I \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. Si :*

- *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable et intégrable.*

- Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable en t_0 .
- Il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, pour presque tout $x \in E$, on a

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq g(x) |t - t_0|$$

Alors, $t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$ est dérivable en t_0 , de dérivée $\int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) d\mu(x)$.

REMARQUE. On peut remplacer les deux dernières conditions par les suivantes, plus fortes, qui assurent alors la dérivabilité en tout point de l'intervalle :

- Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur tout I .
- Il existe g intégrable tel que pour presque tout $x \in E$, pour tout $t \in I$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$.