

I Théorie de la mesure

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) .

THÉORÈME I-1 (Dynkin). — *Le π -système engendré par un σ -système est égal à la tribu engendrée par ce dernier.*

COROLLAIRE I-2 (Unicité des mesures). — *Soient μ et ν deux mesures sur (E, \mathcal{A}) qui coïncident sur un π -système \mathcal{C} tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors :*

1. *Si $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*
2. *Si il existe une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C} tels que $\bigcup_n A_n = E$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*

THÉORÈME I-3 (Convergence monotone). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $[0, +\infty]$, telle que pour tout $n \geq 0$, $f_{n+1} \geq f_n$. Alors, en notant f la limite simple de cette suite, on a que f est mesurable, et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

THÉORÈME I-4 (Convergence dominée). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f . Si il existe g mesurable telle que pour tout $n \geq 0$, $|f_n| \leq g$, alors f est intégrable et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

REMARQUE. On peut seulement supposer les conditions ci-dessus vraies presque partout, mais dans ce cas il faut imposer la mesurabilité de la limite simple, ou bien travailler dans la tribue complétée.

Outils :

LEMME I-5 (Fatou). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n$$

Méthode :

Toujours se demander : dans quel ensemble je travaille, quelle est la tribue, quelle est la mesure ?