Exercice 1 :

Pour $x > 1$, on note $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Calculer la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $F(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ soit bien définie.
3. Montrer que F est continue sur $[-1; 1[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 1[$.
4. Donner une expression plus simple de $F(x)$.

Correction :

1. Posons $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1; +\infty[$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1; +\infty[$, ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$. Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \quad \text{avec} \quad \sum u_n(a) \quad \text{convergente}$$

   et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a; +\infty[$. Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

   on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites :

$$\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

2. Posons $v_n(x) = \frac{\zeta(n) x^n}{n}$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x| \, .$$

   Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

   Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\left((-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0, car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

3. En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1; 1[$. Les fonctions v_n sont continues sur $[-1; 0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1; 0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}.$$

   Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1; 0]$ et sa somme F est donc continue.

4. Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in]-1;1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geq 1} \left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right| \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|.$$

On en déduit après sommation géométrique :

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p}\right).$$

La série de fonctions associée converge normalement sur tout segment de $]-1;1[$ et on peut donc intégrer terme à terme :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-t} - \frac{1}{p}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{p}{p-x}\right) - \frac{x}{p}\right).$$

Exercice 2 : On note $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que pour $0 < r < R$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$
2. Que dire sur f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
3. On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathbb{C}_d[X]$.