Décomposition de Littlewood-Paley et opérateurs paradifférentiels

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

Ce document a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation en explicitant tous les outils utilisés, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08] et [GV19] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

I Décomposition de Littlewood-Paley

Théorème I-1 (Inégalité de Bernstein). — *Soit B une boule, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, et $\lambda > 0$. Si $u \in L^p$ tel que $supp(\hat{u}) \subset \lambda B$, alors*

$$\max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{k+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p} \tag{1.1}$$

Preuve. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur un voisinage de B, on a $\hat{u}(\xi) = \varphi(\lambda^{-1}\xi)\hat{u}(\xi)$, donc $u = \lambda^d g * u$, avec $g := \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\lambda \cdot)$, et donc $\partial^\alpha u = \lambda^d \partial^\alpha g * u$. L'inégalité de Young donne de plus que : $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$, où $1 \leq p, r \leq q \leq +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Or :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(\lambda x)\right)\right|^r \mathrm{d}x = \lambda^{|\alpha|r} \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right)(\lambda x)\right|^r \mathrm{d}x \\ &\leq \lambda^{|\alpha|r-d} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}^r \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \lambda^{|\alpha|+d(1-\frac{1}{r})} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r} \|u\|_{L^p} = C_k \lambda^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{L^p}$$

□

Lemme I-1. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{p \geq -1} \|S_p u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad \sup_{p \geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

Lemme I-2 (Presque-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{p \geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{p \geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \tag{1.2}$$

Théorème I-2 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — *Si $s \in \mathbb{R}$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{p \geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 < +\infty$. De plus, il existe $C > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{C} \sum_{p \geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{p \geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \tag{1.3}$$

Théorème I-3 (Injection de Sobolev). — *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continuement dans $C^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème I-4. — *Soit $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > s$. Il existe C tel que pour toute famille $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $H^n(\mathbb{R}^d)$, si*

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)}\varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, alors $u = \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $\|u\|_{H^s}^2 \leq C\sum_k \varepsilon_k^2$.

II Théorèmes de paralinéarisation

Théorème II-1. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*

$$F(u) - T_{F'(u)}u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme II-1. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s > 0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\| \leq C_s\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s} \tag{2.2}$$

Preuve. Si $s = 0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction G continue telle que $F(u) = uG(u)$. Alors, comme $u \in L^2$ et $G(u) \in L^\infty$ car u est bornée, on obtient bien $F \in L^2$.
Quand $s > 0$, on remarque qu'il existe C_α indépendant de u et k telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k}\varepsilon_k \tag{2.3}$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein (1.1) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (1.3) donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha|k}\|u\|_{L^\infty} \tag{2.4}$$

toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de presque-orthogonalité (1.2) donnant que $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de L^2 fournit alors la convergence simple de cette série, i.e. $S_n u \to u$ dans L^2. De plus, d'après le Lemme I-1, $\|S_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$. On en déduit que $F(S_n u) \to F(u)$ dans L^2 car :

$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \leq C \sup_{t\in[0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u\|_{L^\infty}\|S_n u - u\|_{L^2} \to 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1}u) - F(S_k u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \Delta_k u \tag{2.5}$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_k u + t\Delta_k u)\mathrm{d}t$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_k u + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k}\|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaine (plus précisement la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en F' avec le Lemme I-1 et on utilise (2.4) pour les termes en u. En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k}\|u\|_{L^\infty}$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (2.3), on obtient :

$$\|\partial^\alpha(m_k\Delta_k u)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,F}2^{(|\alpha|-s)k}\|u\|_{L^\infty}\varepsilon_k$$

On peut donc conclure par le Théorème I-4. □

Preuve du Théorème II-1.

On commence par remarquer que quitte à soustraire un terme linéaire au à $F(u)$, on peut supposer que $F'(0) = 0$. Cela ne change rien à la preuve car :

$$F(u) + au - T_{F'(u)+a}u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - T_a u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - au = F(u) - T_{F'(u)}u$$

Ensuite, comme $\rho > 0$, le Théorème I-3 donne $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par définition, on a

$$T_{F'(u)}u = S_{-3}g\ u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-2}g\Delta_k u$$

où $g = F'(u)$. En utilisant (2.5), comme $F(S_0u)$ et $S_{-3}g\ u_0$ sont dans H^∞, il suffit de prouver que :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(m_k - S_{k-2}g)\Delta_k u\ \in H^{s+\rho}$$

Cela découle du Théorème I-4, que l'on peut appliquer d'une part grâce à (2.3), et d'autre part car on a l'inégalité :

$$\|\partial^\alpha(m_k - S_{k-2}g)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

□

Références

[Mé08] Guy Métivier. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.

[GV19] David Gérard-Varet. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.