Exercice 1.

Quitte à retirer un ensemble de mesure nulle, on suppose que la convergence simple a lieu sur tout Ω. On se donne un $\varepsilon > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $B_{k,N} := \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \dfrac{1}{k} \right\}$. La mesurabilité des fonctions en jeu donne immédiatement la mesurabilité des $B_{k,N}$.

Par définition, l'hypothèse de convergence simple donne que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k},$$

ce qui se traduit par l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} B_{k,N} = \Omega.$$

De plus, cette union étant croissante, la propriété de continuité croissante donne que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(B_{k,N}) \xrightarrow[N \to \infty]{} P(\Omega) = 1,$$

et alors, on a en particulier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k, P(B_{k,N_k}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}.$$

En notant maintenant $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_{k,N_k}$, on a l'inégalité suivante :

$$P(\Omega \setminus A) \leq \sum_{k \geq 1} P(\Omega \setminus B_{k,N_k}) \leq \varepsilon \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \varepsilon.$$

Finalement, on remarque que, si η est un réel strictement positif, alors en notant $k_0 := \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor + 1$, le fait que $A \subset B_{k_0, N_{k_0}}$ donne :

$$\forall \omega \in A, \forall n \geq N_{k_0}, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k_0} \leq \eta,$$

ce qui permet de conclure que la convergence sur A est bien uniforme.

$\square$