

Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons des contre-exemples de régularité optimale, dus à Denjoy, et qui sont développés par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X.

1 Introduction et outils

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Denjoy) : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$ -difféomorphisme f du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α .

Rq : Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e f est \mathcal{C}^1 , de dérivée $1-\epsilon$ -höldérienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas \mathcal{C}^2 : on sait déjà par Poincaré qu'un tel f est semi-conjugué à R_α par une fonction continue croissante h du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si h n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle I non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que I est un intervalle errant pour la dynamique de f), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge. L'idée ici est donc construire une fonction f qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjugaison suivant :

Définition 1.1 : Un homéomorphisme du tore f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au tore tout entier.

Proposition 1.1

1. Si f est conjugué à g minimal, alors f est minimal.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors R_α est minimal

Preuve :

- (1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjugaison.
- (2) s'obtient en remarquant que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} , et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

Proposition 1.2 Soient D_1, D_2 deux ensembles denses dans $[0, 1]$, et $f : D_1 \rightarrow D_2$ une surjection croissante (resp. strictement croissante), alors f admet un unique prolongement continu, croissant (resp. strictement croissant), de $[0, 1]$ dans lui-même.

Preuve : L'unicité du prolongement est immédiate par densité de D_1 , car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0, 1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D_1 qui tend vers x , que l'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de f , et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de f est dense. \square

1.1 Contre-exemple continu

On note $(l_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(a) \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$$

On peut par exemple choisir $l_n = \frac{c}{n^2 + 1}$ où c est une constante bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \pmod{1}$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où
$$\begin{cases} b_n := \sum_{\{m, \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \sum_{\{m, \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$$

Lemme 1.1 $K := [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$ est un fermé non trivial.

Preuve : Cet ensemble est clairement distinct de $[0, 1]$, et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0, 1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, ce qui est absurde. \square

Rq : K est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction h définie par morceaux sur les $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $h : I_n \mapsto \alpha_n$.

Lemme 1.2 Les $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont ordonnés identiquement aux $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. De plus h admet un prolongement continu sur $[0, 1]$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{Z}, h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$

Preuve : Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$, alors : $b_{n_2} - c_{n_1} = \sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k > 0$, ce qui prouve

le premier point.

On en déduit immédiatement que h est croissante, et alors par la Proposition 1.2, admet un prolongement continu croissant de $[0, 1]$ dans lui-même. Par définition, on a l'inclusion $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$. Si par l'absurde il existe x tel que $h(x) = \alpha_n$ et $x \notin I_n$, alors $d(x, I_n) > 0$. On suppose sans perte de généralité que $x < b_n$, alors par densité de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ il existe $y \in I_{n'}$ tel que $x \leq y < b_n$, et la croissance de h donne $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_{n'}$, i.e $\alpha_{n'} = \alpha_n$, ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue. \square

On prolonge maintenant h sur \mathbb{R} par la relation, pour $x \in [0, 1]$ et $p \in \mathbb{Z}$, $h(x + p) = h(x) + p$, et on note $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$. Alors $U := \bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$ est un ouvert dense de \mathbb{R} , et $\mathbb{R} \setminus U$ est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant g_n de I_n sur I_{n+1} , par exemple la transformation affine : $g_n(x) := \frac{l_n + 1}{l_n}x + b_{n+1} - b_n \frac{l_{n+1}}{l_n}$, qui vérifie bien $g_n(b_n) = b_{n+1}$ et $g_n(c_n) = c_{n+1}$. Cela définit alors une application g de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ dans lui-même, strictement croissante, que l'on prolonge sur \mathbb{R} entier de la même manière que h . Par la Proposition 1.2, g se prolonge en un homéomorphisme de \mathbb{R} dans lui-même. On a alors par construction $h \circ g = R_\alpha \circ h$ sur $\bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$, mais cet ensemble est dense dans \mathbb{R} et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout \mathbb{R} . Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du tore, et on a la propriété suivante :

Théorème 1.2 L'homéomorphisme du cercle g construit précédemment vérifie $\rho(g) = \alpha$, mais g n'est pas conjugué à R_α .

Preuve : $\rho(g) = \alpha$ est immédiat car la semi-conjugaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite, $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$ est invariant par g par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme 1.1, donc g n'est pas minimal, et alors la Proposition 1.1 permet de conclure que g n'est pas conjugué à R_α . □

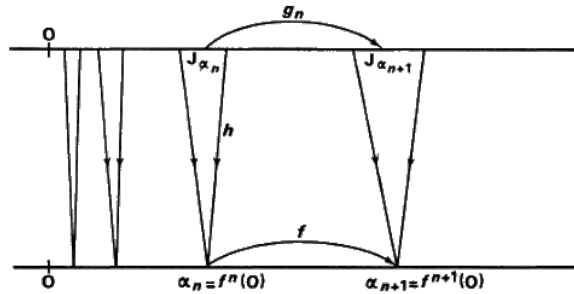


FIGURE 1 – [Her79] Schéma de la construction où $f = R_\alpha$

1.2 Contre-exemple dérivable

On considère toujours un homéomorphisme croissant g_n de I_n sur I_{n+1} , prolongé en $g_{n,p} = g_n + p$ sur $I_{n,p}$. On va de plus imposer que g_n soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant :

$$(*) \begin{cases} g'_n(x) = 1 & \text{si } x \in \partial I_n \\ \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \sup_{x \in I_n} |g'_n(x) - 1| = 0 \end{cases}$$

On considèrera enfin les fonctions g'_n prolongées continuellement sur tout l'intervalle $[0, 1]$, en les prenant constantes égales à 1 sur le complémentaire de I_n

Lemme 1.3 $g_n : x \mapsto b_{n+1} + \int_{b_n}^x 1 + \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) (t - b_n)(c_n - t) dt$ vérifie la condition (*).

Preuve : g_n est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme car sa dérivée est strictement positive. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{c_n} 1 + \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) (t - b_n)(c_n - t) dt &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \int_{b_n}^{c_n} (t - b_n)(c_n - t) dt \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \left[\frac{u^2}{2} l_n - \frac{u^3}{3} \right]_0^{l_n} \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \frac{l_n^3}{6} = l_{n+1} \end{aligned}$$

Donc g_n envoie bien I_n sur I_{n+1} . La première condition de (*) est immédiate, la seconde découle du fait que pour $x \in I_n$: $|g'_n(x) - 1| \leq 6 \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \pm\infty$ par hypothèse. \square

Lemme 1.4 La fonction η qui coïncide avec g'_n sur I_n et qui vaut 1 ailleurs est continue et vérifie $\eta = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g'_n - 1)$

Preuve :

En différenciant les cas $x \in I_n$, et $x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, l'égalité ponctuelle est immédiate. On va de plus montrer que la convergence est uniforme, ce qui donnera la continuité de η .

Soit $N \in \mathbb{N}$, et $x \in [0, 1]$, on a : $\sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) = \begin{cases} g'_n(x) - 1 & \text{si il existe } n \text{ tel que } x \in I_n \text{ et } |n| \geq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas, $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) \right| \leq \sup_{|n| \geq N} |g'_n(x) - 1|$. Or par hypothèse sur les dérivées, ce majorant tend vers 0 et donc la convergence est uniforme. \square

La fonction g admet comme dans la partie précédente un prolongement en homéomorphisme de $[0, 1]$ mais on a cette fois le résultat plus fort suivant :

Théorème 1.3 g est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie $\rho(g) = \alpha$ mais n'est pas conjugué à R_α .

Preuve : Le seul point qui ne découle pas du Théorème 1.2 est que g est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. Pour montrer cela, on commence par remarquer que g est d'une part continue, et que d'autre part g est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $U := \bigcup_{n, p \in \mathbb{Z}} I_{n, p}$ qui est de mesure pleine dans \mathbb{R} .

Alors, si A est un borélien de mesure de Lebesgue nulle, on a $\lambda(g(A)) \leq \lambda(g(A \cap (\mathbb{R} \setminus U))) + \lambda(g(A \cap U))$. Or le premier terme est nul car $\mathbb{R} \setminus U$ est stable par g et de mesure nulle, et le second terme est nul par théorème de changement de variable, g étant un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur U , et A de mesure nulle.

On en déduit que la mesure de Stieltjes associée à g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi g admet une dérivée de Radon-Nikodym $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, telle que $g(x) = g(0) + \int_0^x \mu(t) dt$. Mais alors μ est presque partout égale à g'_n sur les $(I_{n, p})_{p \in \mathbb{Z}}$ d'après la théorie des points de Lebesgue, i.e presque partout égale à η car U est de mesure pleine, et on a finalement : $g(x) = g(0) + \int_0^x \eta(t) dt$. On en déduit que g est un homéomorphisme \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} à dérivée non nulle, et donc un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. \square

1.3 Régularité hölderienne

Soit $w : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ un module de continuité, on considère l'ensemble des fonctions continue pour ce module, $\mathcal{C}^w(\mathbb{T}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \mid \sup_{0 < |x-y| \leq 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}$

En considérant la fonction g construite dans la partie précédente, on a le lemme :

Lemme 1.5 $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{1}{w(l_n)} < +\infty \Rightarrow g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$

Preuve : On suppose sans perte de généralité que $w(x)/x$ est décroissante. En reprenant le g'_n de la construction précédente, on constate que :

$$|g''_n(t)| = \frac{6}{l_n^2} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) |(c_n - t + b_n - t)| \leq \frac{3}{l_n} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right)$$

L'inégalité des accroissements finis donne donc :

$\sup_{0 < x-y \leq 1} \left| \frac{g'_n(x) - g'_n(y)}{w(x-y)} \right| \leq \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{3}{w(l_n)} < +\infty$, et on en déduit que $g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$ car $g' - 1$ est limite uniforme de $\sum_{k=-n}^n (g'_k - 1)$, et les fonctions dans la somme ayant des supports disjoints 2 à 2, on a :

$$\left| \sum_{k=-n}^n (g'_k - 1) \right|_{\mathcal{C}^w} \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |g'_n - 1|_{\mathcal{C}^w} \leq \frac{6}{l_n} \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) < +\infty$$

□

Rq : Ce résultat est en fait une équivalence.

La suite $l_n := \frac{c}{(|n| + k)(\log(|n| + k))^{1+\epsilon}}$ vérifie le critère du lemme 1.5 pour le module $w(x) = O(x^{1-\epsilon'})$, pour tout $\epsilon' > \epsilon$, ce qui permet de conclure la preuve du Théorème 1.1

Références

- [Her79] Michael HERMAN. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.
- [Mil01] John MILNOR. “Introductory Dynamics Lectures”. 2001.
- [GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.