Décomposition de Littlewood-Paley

Mathis Bordet

Mai 2024

I Décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons dans cette section présenter la décomposition de Littlewood-Paley. C'est une décomposition de fonction dans laquelle chaque terme a un support de fréquence (au sens de la transformée de Fourier) localisé. Nous allons également présenter des propriétés sur cette décomposition.

Il nous est cependant indispensable de nous intéresser à l'existence et, plus précisément, à la construction d'un type de fonctions que sont les fonctions $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec un support au voisinage de 0 mais également constantes au voisinage de 0.

Intéressons-nous au cas $d = 1$ et posons :

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a que g appartient à $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ puisque, en effet, on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g^{(n)}(x) = xQ_n(|x|) \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right)\ (1)$$

avec Q_n un fraction rationnelle dont le pole ce situe en 1 , ce qui montre la continuité des $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

On étend alors cette construction à $\mathbb{R}^d$ en notant $\Psi(x) = g(|x|)$. Ψ est une fonction $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp}(\Psi) \subset B(0, 1)$ et égale à 1 sur $B(0, \frac{1}{2})$.

On obtient donc, en posant $\chi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ 1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)\ (2)$$

avec $\text{supp}(\chi(2^{-p}\cdot)) \subset C(0, 2^{p-1}, 2^{p+1})$

Lemme I-1 (Lemme I- ?). — *Soit $\phi \in \mathbb{S}$ alors :*

$$\hat{\phi} = \psi\hat{\phi} + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\cdot)\hat{\phi}$$

demonstrations :. Soit g $\in \mathbb{S}$:
Montrons que pout tout α et $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$

$$\left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_\infty \to_{p\to\infty} 0$$

On considère alors :

$$\begin{aligned} \left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_\infty &= \left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_{[2^{p-1};2^{p+1}]} \\ &\leq \left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]} + \left\|x^\alpha \partial^\beta g(1 - \psi(2^{-p}x))\right\|_{[2^{p-1};2^p]} \end{aligned}$$

De plus puisque g $\in \mathbb{S}$ alors $\lim_{|x|\to\infty} x^\gamma g(x) = 0$.On a alors $\left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. En utilisant la formule de derivation de Leibniz sachant que $\partial^k \psi = O(x^k$ (en utilisant (1)) on a que $\left\|x^\alpha\partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. On utilise ensuive la continuité de la trnasformé de fourrier et de la transformé de Fourrier inverse sur $\mathbb{S}$.

□

DÉFINITION I-1 (Définition). On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\forall q \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in L^q, \quad \Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}(\psi) * u, \quad \Delta_p u = 2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\chi(2^p\cdot)) * u \text{ pour } p \geq 0$$

PROPOSITION I-2 (Propriété). — *Soit $u \in \mathbb{S}'$, en posant :*

$$S_p u = \sum_{k=1}^{p-1} \Delta_k u$$

On a que :

$$\lim_{p\to\infty} S_p u = u$$

DÉMONSTRATION. Prenons $u \in \mathbb{S}'$ et $v \in \mathbb{S}$.

$$\langle \mathcal{F}(S_n u), v\rangle = \langle \psi(2^{-p}\xi)\mathcal{F}(u), v\rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-p}\xi)v\rangle$$

□ Or, $\lim_{p\to+\infty}\psi(2^{-p}\xi)v = v$ dans $\mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$ par le lemme ?. On obtient donc :

$$\mathcal{F}(S_n u) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{dans } \mathbb{S}$$

Par continuité de $\mathcal{F}^{-1}$, on a en effet $S_p u = \sum_{k=1}^{p-1}\Delta_k u$.

LEMME I-3 (Lemme). — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{k\geq -1}\|S_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}, \qquad \sup_{k\geq -1}\|\Delta_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

PREUVE. On écrit $S_k u = 2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^p\cdot)) * u$. Par inégalité de Young on obtient :

$$\|S_k u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}\left\|2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^p\cdot)\right\|_{L^1}$$

De même pour $\|\Delta_k u\|_{L^p}$

□

LEMME I-4 (Presque-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{k\geq -1}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2\sum_{k\geq -1}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \tag{1.1}$$

DÉMONSTRATION. On pars de $1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty}\chi(2^{-p}\xi)$. Seule deux de ces fonctions on une intersection de support non vide. On utilise alors : $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ on obitient alors :

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{p=0}^{\infty}\chi(2^{-p}\xi)^2 \leq 1$$

On obtient alors al segonde inégalité en multipliant la ligne en aux par û et en utilisantl'identité de plancherelle.

□