Théorème de Hille-Yosida et applications

Sacha Ben-Arous, Clément Robiez, Quentin Verrier

March 12, 2024

ENS Paris-Saclay

Théorème de Hille-Yosida

Équation de la chaleur

Régularité elliptique

Théorème de Hille-Yosida

Définitions

On travaille dans un espace de Hilbert H. On considère un opérateur linéaire non borné (i.e non continu) $A : D(A) \to H$.

- A est monotone si $\forall v \in D(A),\ \langle Av, v \rangle \geq 0$
- A est maximal si $\forall f \in H,\ \exists u \in D(A),\ u + Au = f$

Propriétés fondamentales

Si A est un opérateur maximal monotone, alors :

- $D(A)$ est dense dans H
- Le graphe de A est fermé
- $\forall \lambda > 0,\ (I + \lambda A)$ est une bijection, et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Outils de la preuve

Soit A est un opérateur maximal monotone, on note pour $\lambda > 0$:

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ l'approximation de Yosida de A

Rq : A_λ est continue et définie sur H.

Outils de la preuve

Soit A est un opérateur maximal monotone, on note pour $\lambda > 0$:

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ l'approximation de Yosida de A

Rq : A_λ est continue et définie sur H.

On a les propriétés suivantes :

- $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$ et $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av$
- $\|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|$ et $\|A_\lambda v\| \leq \|Av\|$

Théorème (Hille-Yosida) :

Soit A un opérateur maximal monotone.

Alors, $\forall u_0 \in D(A),\ \exists! u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$ tel que :

$$(*) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus $\forall t \geq 0$, $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ et $\|\dfrac{du}{dt}\| \leq \|Au_0\|$

Preuve (1) : Unicité

Soient u_1, u_2 solutions de $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt}(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \right\rangle \\ &= -\langle A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)\rangle \ \leq \ 0\end{aligned}$$

Or $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, donc $\forall t \geq 0,\ u_1(t) = u_2(t)$

Preuve (2) : Approximations

Soit $\lambda \geq 0$:

$$(**) \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u_\lambda + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

Il existe u_λ solution $\mathcal{C}^\infty$ de $(**)$ par C-L.

On a $\langle A_\lambda u_\lambda, u_\lambda \rangle \geq 0$ et $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda|^2 \leq 0$ donc $|u_\lambda| \leq u_0$.

Par le même raisonnement, on obtient la décroissance de toutes les dérivées.

Preuve (3) et (4) : Convergence

Soit $\lambda, \mu \geq 0$, on a de même $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda+\mu)|Au_0|^2$, et en intégrant on obtient :

$$|u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\ |Au_0|$$

Donc sur tout segment $[0,T]$ on a une suite de Cauchy, sur lequel la convergence va être uniforme vers $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[,H)$.

Si de plus $u_0 \in D(A^2)$, on peut refaire le même raisonnement avec les dérivées pour obtenir $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H)$.

Preuve (5) : Densité

On remarque que $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda u_\lambda = u$, et de plus $\dfrac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda) = 0$.

Alors, A étant fermé, on en déduit que $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$, et $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$, donc que u est solution de $(*)$.

Preuve (5) : Densité

On remarque que $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda u_\lambda = u$, et de plus $\frac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda) = 0$.

Alors, A étant fermé, on en déduit que $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$, et $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A))$, donc que u est solution de $(*)$.

Lemme :
Soit $u_0 \in D(A)$, en notant $u_0' := J_\lambda u_0 \in D(A)$, on a $u_0' + \lambda A u_0' = u_0$.

Alors $u_0' \in D(A^2)$, et $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda u_0 = u_0$ et $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda A u_0 = A u_0$, ce qui donne la densité de $D(A^2)$ dans $D(A)$.

Preuve (6) : Densité

Soit $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} \in D(A^2)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers u_0 pour la norme du graphe. On considère les solutions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées par l'étape (5). Par décroissance, on a

$$\begin{cases} |u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0,n} - u_{0,m}| \to 0 \\ |\dfrac{du_n}{dt}(t) - \dfrac{du_m}{dt}(t)| \leq |Au_{0,n} - Au_{0,m}| \to 0 \end{cases}$$

Alors convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, leur limite vérifie $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[, H)$

Comme A est fermé, $\forall t \geq 0, u(t) \in D(A)$, et u satisfait le problème initial, ce qui achève la preuve.

$\square$

Équation de la chaleur

Présentation du problème

$$(*) \begin{cases} \Delta u = \dfrac{du}{dt} \\ u(0) = u_0(x) \quad \text{où} \quad u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega) \end{cases}$$

On veut appliquer Hille-Yosida avec $A = -\Delta$, sur l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\Omega)$, avec $D(A) = \mathcal{H}^2(\Omega)$, sur Ω qui est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

Cas $\Omega = \mathbb{R}^n$

La transformée de Fourier est plus forte que Hille-Yosida dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^n$, car on obtient une forme explicite de la solution. On raisonne par analyse synthèse :

$\widehat{\dfrac{du}{dt}} - \widehat{\Delta u} = 0$, or on a $\widehat{\frac{du}{dt}} = \frac{d\hat{u}}{dt}$ et $\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2 \hat{u}$

On obtient alors $\widehat{u} = \widehat{u_0}\ e^{-|\xi|^2 t}$, et donc $u = \mathsf{TF}^{-1}(\widehat{u_0}\ e^{-|\xi|^2 t})$

Noyau de la chaleur

Par les calculs, on obtient $u = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \sqrt{\frac{\pi}{t}}^d e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$

On reconnait un produit de convolution entre u_0 et $\mathcal{H}_t$ le noyau de la chaleur.

$\mathcal{H}_t := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

Réciproquement, cette solution vérifie $(*)$.

Cas général

On veut résoudre dans $\mathcal{H}^2(\Omega)$. La monotonie du laplacien est immédiate, la partie difficile étant la maximalité :

$-\Delta u + u = f$ où $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

Il est facile de prouver l'existence de solution dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ grâce au théorème de Lax-Milgram :

$$\exists!\ u \in \mathcal{H}^1(\Omega),\ \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Régularité elliptique

Théorème (Dirichlet)

Théorème (version Dirichlet) : Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^2$, de frontière Γ bornée. Si $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ et $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tq :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad (*)$$

Alors $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$.

Idée de la preuve

On étudie la cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\Omega = \mathbb{R}^n_+ (= \mathbb{R}^{n-1} \times]0; +\infty[)$, qui contiennent l'essentiel de la preuve dans le cas général.

On se servira de $D_h u(x) := \dfrac{u(x+h) - u(x)}{|h|}$ quand cet objet a un sens.

Lemme

Lemme : $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega),\ h \parallel \Gamma$, on a $\|D_h v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$

Preuve : On se rammène à $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{H}^1(\Omega)$ par densité de cet ensemble.

On a $D_h v(x) = \dfrac{1}{|h|} \displaystyle\int_0^1 \nabla v(x+th).h \,\mathrm{d}t$, et donc :

$$\|D_h v\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega \int_0^1 |\nabla v(x+th).h|^2 \leq \|\nabla v\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

en utilisant un changement de variable et Fubini-Tonelli.

Cas $\Omega = \mathbb{R}^n$

On applique $(*)$ avec $v = D_{-h}D_h u$, ce qui donne :

$$\int_\Omega |\nabla D_h u|^2 + \int_\Omega |D_h u|^2 = \int_\Omega f D_{-h} D_h u$$

Par Cauchy-Schwarz et avec le lemme précédent on obtient :

$\|D_h u\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|f\|_2$, donc en particulier $\forall i = 1, \ldots, n \; : \; \|D_h \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\|_2 \leq \|f\|_2$

Par le lemme precedent, on conclut que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1$.

Cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (1)

Par le même raisonnement, on a que pour $h \parallel \Gamma$, on a $\|D_h u\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|f\|_2$

On se donne alors $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, et on a :

$$\left|\int D_h(\frac{\partial u}{\partial x_j})\varphi\right| = \left|-\int u D_{-h}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})\right| \leq \|f\|_2\|\varphi\|_2$$

En passant à la limite sur h, on obtient $\forall 1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n-1$:

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq \|f\|_2\|\varphi\|_2$$

Cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (2)

En utilisant $(*)$, on obtient :

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2}\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right| + \left|\int (f-u)\varphi\right| \leq C\|f\|_2\|\varphi\|_2$$

Finalement, on a montré qu'il existe des $f_{j,k} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \int f_{j,k}\varphi$$

Donc $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$.