Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons des contre-exemples de régularité optimale, dus à Denjoy, et qui sont développé par H. Rosenberg dans [Ros74], et surtout par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X. Nous présenterons ensuite un résultat sur la densité de ces contre-exemples, en suivant les travaux de Herman.

1 Introduction et outils

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. (Denjoy) : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$-difféomorphisme f du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α.

Rq : Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $1-\epsilon$-hölderienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas $\mathcal{C}^2$: on sait déjà par Poincaré qu'un tel f est semi-conjugué à R_α par une fonction continue croissante h du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si h n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle I non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que I est un intervalle errant pour la dynamique de f), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.
L'idée ici est donc construire une fonction f qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjuguaison suivant :

Définition 1.1. : Un homéomorphisme du tore f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au tore tout entier.

Proposition 1.1.

1. Si f est conjugué à g minimal, alors f est minimal.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors R_α est minimal

Preuve :
(1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjuguaison.
(2) s'obtient en remarquand que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

Proposition 1.2. Soient D_1, D_2 deux ensembles denses dans $[0,1]$, et $f : D_1 \to D_2$ une surjection (strictement) croissante, alors f admet un unique prolongement continu, (strictement) croissant, de $[0,1]$ dans lui-même.

Preuve : L'unicité du prolongement est immédiate par densité de D_1, car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0,1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_1 qui tend vers x, que l'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de f, et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de f est dense.

□

1.1 Contre-exemple continu

On note $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$

(b) $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$

On peut par exemple prendre $l_n = \frac{c}{n^2+k}$ où k est grand et c est une constante bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \mod 1$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où $\begin{cases} b_n := \sum_{\{m,\ \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \sum_{\{m,\ \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

Lemme 1.1. $K := [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_n$ est un fermé non trivial.

Preuve : Cet ensemble est clairement distinct de $[0,1]$, et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0,1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui est absurde.

□

Rq : K est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction h définie par morceaux sur les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h : I_n \mapsto \alpha_n$.

Lemme 1.2. Les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont ordonnés identiquement aux $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus h admet un prolongement continu sur $[0,1]$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{Z},\ h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$

Preuve : Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$, alors : $b_{n_2} - c_{n_1} = \sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k > 0$, ce qui prouve le premier point.
On en déduit immédiatement que h est croissante, et alors par la Proposition 1.2, admet un prolongement continue croissant de [0,1] dans lui-même. Par définition, on a l'inclusion $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$. Si par l'absurde il existe x tel que $h(x) = \alpha_n$ et $x \notin I_n$, alors $d(x, I_n) > 0$. On suppose sans perte de généralité que $x < b_n$, alors par densité de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ il existe $y \in I_{n'}$ tel que $x \leq y < b_n$, et la croissance

de h donne $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_n$, i.e $\alpha_{n'} = \alpha_n$, ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue.

□

On prolonge maintenant h sur $\mathbb{R}$ par la relation, pour $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{Z}$, $h(x+p) = h(x) + p$, et on note $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$. Alors $U := \bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R} \setminus U$ est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant g_n de I_n sur I_{n+1}, par exemple la transformation affine : $g_n(x) := \dfrac{l_n + 1}{l_n} x + b_{n+1} - b_n \dfrac{l_{n+1}}{l_n}$, qui vérifie bien $g_n(b_n) = b_{n+1}$ et $g_n(c_n) = c_{n+1}$. Cela définit alors une application g de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ dans lui-même, strictement croissante. Par la Proposition 1.2, g admet un prolongement continu de $[0,1]$ dans lui-même, que l'on prolonge en homéomorphisme sur $\mathbb{R}$ entier de la même manière que h. On a alors par construction $h \circ g = R_\alpha \circ h$ sur $\bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$, mais cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$ et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout $\mathbb{R}$. Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du tore, et on a la propriété suivante :

Théorème 1.2. L'homéomorphisme du cercle g construit précédemment vérifie $\rho(g) = \alpha$, mais g n'est pas conjugué à R_α.

Preuve : $\rho(g) = \alpha$ est immédiat car la semi-conjuguaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite, $K = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$ est invariant par g par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme 1.1, donc g n'est pas minimal, et alors la Proposition 1.1 permet de conclure que g n'est pas conjugué à R_α.

□

1.2 Contre-exemple dérivable

Références

[Ros74] Harold Rosenberg. “Un contre-exemple à la conjecture de Seifert”. In : *Séminaire N. Bourbaki* 434 (1974), p. 294-306.

[Her79] Michael Herman. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.

[GV19] David Gérard-Varet. *Around the Nash-Moser theorem.* 2019.