Difféomorphismes du cercle et théorème de Nash-Moser

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

14 Mai 2024

ENS Paris-Saclay

Difféomorphismes du cercle

Théorème d'Arnold

Théorème de Nash-Moser

Difféomorphismes du cercle

Dynamique en dimension 1

On considère le cercle $\mathbb{S}^1 := \{z, |z| = 1\}$, ainsi que le plongement $\Pi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$.
Pour $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$, on dit que $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est un relèvement si $\Pi \circ F = f \circ \Pi$, i.e $f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi F(t)}$

Lemme : Si f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme du cercle, alors il existe un relèvement de f qui est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (de $\mathbb{R}$).

Dans la suite, on considèrera a minima des homéomorphismes, ainsi que leur relèvements réguliers associés.

Nombre de rotation

Si f est un homéomorphisme, F un relèvement, et $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{F^n(x)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de x, notée $\rho(F)$.
On définit alors $\rho(f) := \rho(F) \mod 1$.

ρ n'est **pas** un morphisme, mais vérifie $\rho(h \circ f \circ h^{-1}) = \rho(f)$, c'est un invariant de conjuguaison.

On se demande alors si il existe un représentant simple de la classe de f, à savoir $R_{\rho(f)}$.

Théorème de Poincaré

Le résultat est clairement faux quand $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Dans le cas irrationnel, on a le résultat suivant :

Théorème (Poincaré) : Si f est un homéomorphisme de nombre de rotation α irrationnel, alors f est semi-conjugué à R_α, i.e il existe h continue telle que $h \circ f = R_\alpha \circ h$.

Que dire de l'inversibilité de h ?

Théorème de Denjoy

Théorème (Denjoy) : Si f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de nombre de rotation α irrationnel, alors f est conjugué à R_α par un homéomorphisme.

Idée de la preuve : Il ne peut pas exister d'intervalle errant pour h.

Question : Le résultat est-il optimal ?

Contre-exemples

Théorème (Herman) : Pour tout α irrationnel, $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$-difféomorphisme f tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α. Ces contre-exemples sont de plus denses dans l'ensemble des difféomorphismes de nombre de rotation α.

Idée : Un homéomorphisme f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au cercle tout entier. Cette propriété est un invariant de conjuguaison.

Construction explicite

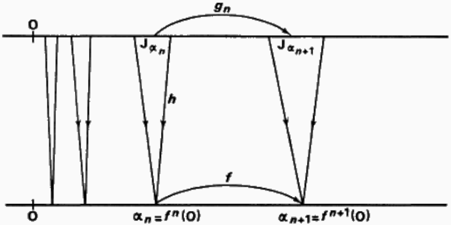

Figure 1: Schéma de la construction où $f = R_\alpha$

On construit un difféo non minimal mais suffisamment régulier en choisissant judicieusement la famille d'intervalles errants.

Théorème d'Arnold

Cadre

Prenons un relevé F analytique de rotation α (et donc semi-conjugué à R_α). Que l'on écrit :

$$F(x) = x + \alpha + \eta(x)$$

avec η analytique et "assez petit".

η est également 1-périodique.

Détermination

Par théorème de semi-conjugaison, on a :

$$F \circ H(x) = H(x+\alpha) \text{ et on cherche } H \text{ de la forme } H = \mathrm{id} + U$$

$\Rightarrow U(x+\alpha) - U(x) = \eta(x + U(x))$ simplifié en $U(x+\alpha) - U(x) = \eta(x)$

On choisit de chercher U 1-périodique. On a que

$$(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)\widehat{U}(n) = \widehat{\eta}(n)$$

Perte de régularité et petits diviseurs

Dans quelle mesure $\widehat{U}$ est-elle liée à une série de Fourier convergente ?

En effet, $\exp(2i\pi n\alpha) - 1$ peut arbitrairement s'approcher de 0.

Petit diviseur avec α irrationnel:
$\left\|\alpha - \frac{m}{n}\right\| \geq \frac{k}{n^\nu} \Rightarrow \|\exp(2i\pi n\alpha) - 1\| \geq \frac{4k}{n^{\nu-1}}$

Induit la perte de régularité suivante

$$\|F\|H\mathsf{per}^s = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s}|\hat{F}(n)|^2\right)^{1/2}, \quad s \geq 0$$

$$\|U\|H\mathsf{per}^s \leq \frac{1}{4K}\|\eta\|H\mathsf{per}^{s+\nu-1}.$$

Le théorème d'Arnold affirme donc que si F a un relevé $F(x) = x + \alpha + \eta(x)$ avec η analytique et assez petit (au sens d'une norme analytique), alors F est analytiquement conjugué à R_α.

Éléments de démonstration :

- U_n la solution de $U_n(x+\alpha) - U_n(x) = \eta_n(x) - \hat{\eta}_n(0)$.
- $H_n(x) = x + U_n(x)$.
- $F_{n+1} = H_n^{-1} \circ F_n \circ H_n = (H_1 \circ \cdots \circ H_n)^{-1} \circ F \circ (H_1 \circ \cdots \circ H_n)$.

Théorème de Nash-Moser

Cadre

On considère ici deux suites d'espaces de Banach $E\sigma, \|\cdot\|\sigma$ et $F\sigma, \|\cdot\|\sigma$.

De telle sorte qu'il existe une fonction régularisante S telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S : E \to F$$

1. $\|S_\theta u\|_b \leq C\|u\|_a$, si $b \leq a$
2. $\|S_\theta u\|_b \leq C\theta^{b-a}\|u\|_a$, si $a < b$
3. $\|u - S_\theta u\|_b \leq C\theta^{b-a}\|u\|_a$, si $a > b$
4. $\left\|\frac{d}{d\theta} S_\theta u\right\|_b \leq C\theta^{b-a-1}\|u\|_a$.

Enoncé

Soit $a_2 \in \mathbf{R}$ et soit $\alpha, \beta \in [0; a_2]$. De plus, considérons une application $\Phi : E_\alpha \to F_\beta\ C^2$ vérifiant :

$$\left\| \Phi''(u)(v,w) \right\| \beta + \delta \leq C(1 + \left\| u \right\| \alpha) \left\| w \right\| \alpha - \frac{\epsilon}{2} \cdot \left\| v \right\| \alpha - \frac{\epsilon}{2}$$

On a de plus l'existence d'une inverse à droite pour Φ', c'est-à-dire : $\forall v \in E_\infty$, on a $\Psi(v) : f_\infty \to E_\infty$ avec

$$\left\| \Psi(v) g \right\| a \leq C \left\| g \right\| \beta + a - \alpha + \left\| g \right\| 0 \left\| v \right\| \alpha + \beta$$

Alors, $\exists \eta > 0$ telle que $\forall f \in F_\beta$ vérifiant $\left\| f \right\| \beta \leq \eta$, alors $\exists u \in E\alpha$ vérifiant $\Phi(u) - \Phi(0) = f$.

Outil

On prend θ_j une suite d'indices divergents et on définit $\Delta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ et $R_j u = \left(S_{\theta_{j+1}} u - S_{\theta_j} u\right) / \Delta_j$ si $j > 0$, $R_0 u = S_{\theta_1} u / \Delta_0$.

On obtient alors :

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j R_j u$$

Convergente dans E_a si $u \in E_b$ et $a < b$.

Schéma de la preuve:

On construit les suites suivantes en prenant g $\in F_\beta$

$$g = \sum \Delta_j g_j; \quad \|g_j\|\, b \leqq C_b \theta_j^{b-\beta-1} \|g\| \beta'.$$

$$u_{j+1} = u_j + \Delta_j \dot{u} j, \quad \dot{u}_j = \psi\left(v_j\right) g_j, \quad v_j = S\theta_j u_j$$

et on montre que $\Phi(u) - \Phi(0) = T(g) + g$ avec T application continue .

Fin

Merci pour votre attention !

Q&A