

# Probabilités

## Méthode et contexte

- Une mesure de probabilité étant en particulier finie, on a dans ce cadre que les espaces  $L^p$  sont emboîtés, i.e :  $L^\infty \subseteq \dots \subseteq L^1$ . Cela se traduit par le fait que si une variable aléatoire possède un moment d'ordre  $k$ , tous ses moments d'ordre inférieur sont également finis.

## Définitions et propriétés élémentaires

DÉFINITION 1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé, et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable.

1. Si  $X : \Omega \rightarrow E$  est mesurable, alors  $X$  est appelée *variable aléatoire* (v.a.) à valeurs dans  $E$ .
2. Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans  $E$ , on appelle loi de  $X$  la mesure image de  $P$  par  $X$ , notée  $P_X$  et vérifiant :

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A).$$

DÉFINITION 2. Pour toute v.a.r  $X$ , on appelle *fonction de répartition* de  $X$  la donnée de  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par  $F_X(t) = P(X \leq t) = P_X([-\infty, t])$ .

REMARQUE.  $F_X$  est continue à droite, limitée à gauche (càdlàg), croissante, tend vers 0 en  $-\infty$ , 1 en  $+\infty$ , et caractérise  $P_X$ .

DÉFINITION 3. Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On appelle *fonction caractéristique* de  $X$ , notée  $\Phi_X$ , la fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\Phi_X(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} dP_X(x) = E(e^{i\langle X, \xi \rangle}).$$

REMARQUE.  $\Phi_X$  est en fait la transformée de Fourier de la loi  $P_X$ . C'est une fonction uniformément continue, dont le module est borné par 1.  $\Phi_X$  a autant de dérivées que  $X$  a de moments finis.

REMARQUE. Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors  $\Phi_X(\xi) = \exp(i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2})$ .

DÉFINITION 4. Si  $X$  est une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on appelle *fonction génératrice* de  $X$ , la fonction  $G_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$G_X(t) := E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n).$$

REMARQUE.  $G_X$  caractérise la loi de  $X$ , et détermine tous les moments de  $X$  comme l'explique la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors pour tout  $k \geq 1$  :

$$E\left(\prod_{i=0}^{k-1} (X - i)\right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G_X^{(k)}(t).$$

DÉFINITION 5 (Indépendance).

- Des événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont dits indépendants si pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

- Des tribus  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  sont dites indépendantes si pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  telle que  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , les événements sont indépendants.
- Des variables aléatoires  $(X_i)_{i \in I}$  à valeurs dans des espaces mesurables  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  sont dites indépendantes si la famille de tribus  $(\sigma(X_i))_{i \in I}$  l'est.

REMARQUE. L'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  porte sur les tribus engendrées (sur  $\Omega$ ) et non sur les valeurs proprement dites de ces variables aléatoires. Par suite, si des  $\Phi_i : (E_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow (E'_i, \mathcal{E}'_i)$  sont mesurables, l'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  entraîne celle des  $(\Phi_i(X_i))_{i \in I}$ .

REMARQUE. La vérification de l'indépendance des  $(X_i)_{i \in I}$  se ramène à montrer que pour tout  $J \subset I$  fini, pour toute famille  $(A_j)_{j \in J}$  telle que  $A_j \in \mathcal{E}_j$ , on a  $P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$ .

PROPOSITION 2 (Caractérisations de l'indépendance). — Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de variables aléatoires avec  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$ . Soit  $X := (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i)$ .

1. Les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants si et seulement si  $P_X = \otimes_{i=1}^n P_{X_i}$ , ce qui équivaut à  $\Phi_X = \otimes_{i=1}^n \Phi_{X_i}$ .
2. (a) Si les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants, et ont  $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$  comme densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue, alors  $P_X \ll \lambda_n$  et a pour densité  $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ .
- (b) Réciproquement, si  $P_X \ll \lambda_n$ , de densité s'écrivant  $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ , alors les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants, de densités respectives  $(f_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ .

## Résultats principaux

THÉORÈME 3 (Inégalité de Markov). — Soit  $X$  une variable aléatoire réelle presque sûrement positive, alors pour  $\alpha > 0$  :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

THÉORÈME 4 (Inégalité de Jensen). — Soient  $X \in L^1$ , et  $\Phi$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  tel que  $P(X \in I) = 1$  et  $E(|\Phi(X)|) < \infty$ . Alors  $\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X))$ . Si  $\Phi$  est de plus strictement convexe, alors il y a égalité si et seulement si  $X$  est p.s constante.

THÉORÈME 5 (Injectivité de la transformée de Fourier). — Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Si  $\Phi_{X_1} = \Phi_{X_2}$ , alors  $P_{X_1} = P_{X_2}$ .

THÉORÈME 6 (Coalitions). — Soient  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de variables aléatoires indépendantes, et  $(I_k)_{k \in K}$  une partition de  $I$ . Alors les tribus  $(\sigma(X_i, i \in I_k))_{k \in K}$  sont indépendantes.

THÉORÈME 7 (Loi faible des grands nombres). — Soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de variables aléatoires indépendantes de  $L^2$ , telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$  et  $\sup_i V(X_i) = \sigma^2$ . Alors :

1. La moyenne empirique  $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge dans  $L^2$  vers la moyenne théorique  $\mu$ .
2. Pour  $\varepsilon > 0$ , on a l'estimation suivante :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

## Outils importants

LEMME 8 (Fekete). — Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite sous additive, i.e.  $\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$ , alors  $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et on a l'égalité :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

PROPOSITION 9 (Changement de variable). — Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ , et  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction mesurable telle que  $f \geq 0$  p.p. ou  $E(|f(X)|) < \infty$ , alors :

$$E(f(X)) = \int_E f(x) dP_X(x).$$

COROLLAIRE 10 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychef). — Si  $X \in L^2$  est une v.a.r, alors pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

PROPOSITION 11 (Inégalité de Hoeffding). — Soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de v.a. indépendantes à valeurs dans  $[a, b]$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \epsilon) \leq 2 \exp(-2 \frac{n\epsilon^2}{(b-a)^2})$$

## Autres résultats

LEMME 12. — Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, alors pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$  :

$$\Phi(x) = \sup_{a, b \mid l_{a,b} \leq \Phi} l_{a,b}(x)$$