Exercice 10 :

1) Par définition de f, on a : $\forall K \geq 0, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} f_n(k) = \sum_{k=0}^{K} f(k)$.

Supposons que la somme $\sum_{k\geq 0} f(k)$ soit finie. Alors, on peut appliquer le théorème de double limite dans sa version discrète, car toutes les sommes considérées sont finies, ce qui donne :

$$\lim_{K\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} f_n(k)$$

i.e :

$$\sum_{k\geq 0} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} f_n(k)$$

Dans le cas où $\sum_{k\geq 0} f(k)$ est infinie, on a pour tout K positif :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} f_n(k) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} f_n(k) = \sum_{k=0}^{K} f(k)$$

L'existence de la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) est due à la croissance des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'inégalité provient de la positivité de cette suite. Or cette inégalité est vraie pour tout K, dont le majorant ne dépend pas, et par hypothèse le minorant tend vers $+\infty$ avec K. Ainsi, en passant à la limite, on a bien :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} f_n(k) = +\infty$$

2) On note $\tilde{f}_n(k) := \inf_{m\geq n} f_m(k)$. Alors d'une part $\varliminf_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(k)$, et d'autre part la suite des $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante (et positive), on peut donc lui appliquer le résultat de la question précédente, ce qui donne :

$$\sum_{k\geq 0} \varliminf_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} \tilde{f}_n(k) \tag{1}$$

Or, pour $K \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{K} \tilde{f}_n(k) \leq \inf_{m\geq n} \sum_{k=0}^{K} f_m(k) \leq \inf_{m\geq n} \sum_{k\geq 0} f_m(k) \leq \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} f_n(k)$$

Les infimum et sommes infinis existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ grâce à la positivité des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La première inégalité est une propriété classique des infimum (cf. exercice 8), la seconde est due à la positivité des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la troisième est donnée par la croissance d'une suite d'infimum. Finalement, le majorant étant indépendant du K choisi, on peut directement injecter l'ingalité dans (1) en passant à la limite et ainsi obtenir le résultat voulu :

$$\sum_{k\geq 0} \varliminf_{n\to\infty} f_n(k) \leq \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} f_n(k)$$

$\square$