

# Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons des contre-exemples de régularité optimale, dus à Denjoy, et qui sont développés par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X. Nous présenterons ensuite un résultat sur la densité de ces contre-exemples, en suivant toujours les travaux de Herman.

## 1 Introduction et outils

On se propose de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.1 (Denjoy) :** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un  $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$ -difféomorphisme  $f$  du tore tel que  $\rho(f) = \alpha$  et  $f$  n'est pas conjugué à la rotation  $R_\alpha$ .

Rq : Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , de dérivée  $1-\epsilon$ -hölderienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas  $\mathcal{C}^2$  : on sait déjà par Poincaré qu'un tel  $f$  est semi-conjugué à  $R_\alpha$  par une fonction continue croissante  $h$  du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si  $h$  n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle  $I$  non trivial du tore. Les itérés  $f^n(I)$  sont alors disjoints (on dit que  $I$  est un intervalle errant pour la dynamique de  $f$ ), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge. L'idée ici est donc construire une fonction  $f$  qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjugaison suivant :

**Définition 1.1 :** Un homéomorphisme du tore  $f$  est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par  $f$  est vide ou égal au tore tout entier.

### Proposition 1.1

1. Si  $f$  est conjugué à  $g$  minimal, alors  $f$  est minimal.
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , alors  $R_\alpha$  est minimal

**Preuve :**

- (1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjugaison.
- (2) s'obtient en remarquant que si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , alors  $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , et donc  $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  est dense dans le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

**Proposition 1.2** Soient  $D_1, D_2$  deux ensembles denses dans  $[0, 1]$ , et  $f : D_1 \rightarrow D_2$  une surjection (strictement) croissante, alors  $f$  admet un unique prolongement continu, (strictement) croissant,

de  $[0, 1]$  dans lui-même.

**Preuve :** L'unicité du prolongement est immédiate par densité de  $D_1$ , car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si  $x \in [0, 1] \setminus D_1$ , il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D_1$  qui tend vers  $x$ , que l'on peut supposer monotone. La suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de  $f(x)$ . Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de  $f$ , et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de  $f$  est dense.  $\square$

### 1.1 Contre-exemple continu

On note  $(l_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(a) \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$$

On peut par exemple choisir  $l_n = \frac{c}{n^2 + 1}$  où  $c$  est une constante bien choisie.

On note alors  $\alpha_n := \alpha n \bmod 1$  et on pose  $I_n := [b_n, c_n]$  où 
$$\begin{cases} b_n := \sum_{\{m, \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \sum_{\{m, \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$$

**Lemme 1.1**  $K := [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$  est un fermé non trivial.

**Preuve :** Cet ensemble est clairement distinct de  $[0, 1]$ , et il est de plus non vide car sinon, par compacité de  $[0, 1]$ , on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , ce qui est absurde.  $\square$

Rq :  $K$  est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction  $h$  définie par morceaux sur les  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $h : I_n \mapsto \alpha_n$ .

**Lemme 1.2** Les  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont ordonnés identiquement aux  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . De plus  $h$  admet un prolongement continu sur  $[0, 1]$  qui vérifie  $\forall n \in \mathbb{Z}, h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$

**Preuve :** Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$ , alors :  $b_{n_2} - c_{n_1} = \sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k > 0$ , ce qui prouve le premier point.

On en déduit immédiatement que  $h$  est croissante, et alors par la Proposition 1.2, admet un prolongement continu croissant de  $[0, 1]$  dans lui-même. Par définition, on a l'inclusion  $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$ . Si par l'absurde il existe  $x$  tel que  $h(x) = \alpha_n$  et  $x \notin I_n$ , alors  $d(x, I_n) > 0$ . On suppose sans perte de généralité que  $x < b_n$ , alors par densité de  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$  il existe  $y \in I_{n'}$  tel que  $x \leq y < b_n$ , et la croissance de  $h$  donne  $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_{n'}$ , i.e  $\alpha_{n'} = \alpha_n$ , ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue.  $\square$

On prolonge maintenant  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par la relation, pour  $x \in [0, 1]$  et  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $h(x + p) = h(x) + p$ , et on note  $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$ . Alors  $U := \bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$  est un ouvert dense de  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{R} \setminus U$  est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ , on choisit un homéomorphisme croissant  $g_n$  de  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ , par exemple la transformation affine :  $g_n(x) := \frac{l_n + 1}{l_n}x + b_{n+1} - b_n \frac{l_{n+1}}{l_n}$ , qui vérifie bien  $g_n(b_n) = b_{n+1}$  et  $g_n(c_n) = c_{n+1}$ . Cela définit alors une application  $g$  de  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$  dans lui-même, strictement croissante, que l'on prolonge sur  $\mathbb{R}$  entier de la même manière que  $h$ . Par la Proposition 1.2,  $g$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. On a alors par construction  $h \circ g = R_\alpha \circ h$  sur  $\bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$ , mais cet ensemble est dense dans  $\mathbb{R}$  et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout  $\mathbb{R}$ . Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du tore, et on a la propriété suivante :

**Théorème 1.2** L'homéomorphisme du cercle  $g$  construit précédemment vérifie  $\rho(g) = \alpha$ , mais  $g$  n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ .

**Preuve :**  $\rho(g) = \alpha$  est immédiat car la semi-conjugaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite,  $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$  est invariant par  $g$  par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme 1.1, donc  $g$  n'est pas minimal, et alors la Proposition 1.1 permet de conclure que  $g$  n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ . □

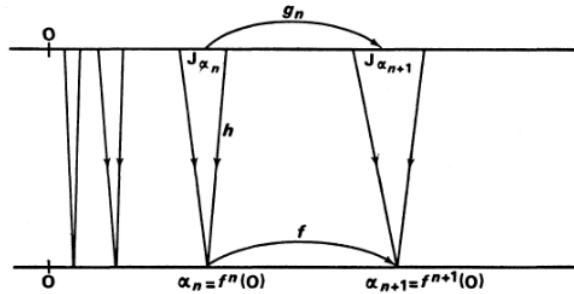


FIGURE 1 – [Her79] Schéma de la construction où  $f = R_\alpha$

## 1.2 Contre-exemple dérivable

On considère toujours un homéomorphisme croissant  $g_n$  de  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ , prolongé en  $g_{n,p} = g_n + p$  sur  $I_{n,p}$ . On va de plus imposer que  $g_n$  soit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant :

$$(*) \begin{cases} g'_n(x) = 1 & \text{si } x \in \partial I_n \\ \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \sup_{x \in I_n} |g'_n(x) - 1| = 0 \end{cases}$$

On considèrera enfin les fonctions  $g'_n$  prolongées continuellement sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ , en les prenant constantes égales à 1 sur le complémentaire de  $I_n$

**Lemme 1.3**  $g_n : x \mapsto b_{n+1} + \int_{b_n}^x 1 + \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) (t - b_n)(c_n - t) dt$  vérifie la condition (\*).

**Preuve :**  $g_n$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme car sa dérivée est strictement positive. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{c_n} 1 + \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) (t - b_n)(c_n - t) dt &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \int_{b_n}^{c_n} (t - b_n)(c_n - t) dt \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \left[ \frac{u^2}{2} l_n - \frac{u^3}{3} \right]_0^{l_n} \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \frac{l_n^3}{6} = l_{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $g_n$  envoie bien  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ . La première condition de (\*) est immédiate, la seconde découle du fait que pour  $x \in I_n$  :  $|g'_n(x) - 1| \leq 6 \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \pm\infty$  par hypothèse.  $\square$

**Lemme 1.4** La fonction  $\eta$  qui coïncide avec  $g'_n$  sur  $I_n$  et qui vaut 1 ailleurs est continue et vérifie  $\eta = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g'_n - 1)$

**Preuve :**

En différenciant les cas  $x \in I_n$ , et  $x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ , l'égalité ponctuelle est immédiate. On va de plus montrer que la convergence est uniforme, ce qui donnera la continuité de  $\eta$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , et  $x \in [0, 1]$ , on a :  $\sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) = \begin{cases} g'_n(x) - 1 & \text{si il existe } n \text{ tel que } x \in I_n \text{ et } |n| \geq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas,  $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) \right| \leq \sup_{|n| \geq N} |g'_n(x) - 1|$ . Or par hypothèse sur les dérivées, ce majorant tend vers 0 et donc la convergence est uniforme.  $\square$

La fonction  $g$  admet comme dans la partie précédente un prolongement en homéomorphisme de  $[0, 1]$  mais on a cette fois le résultat plus fort suivant :

**Théorème 1.3**  $g$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie  $\rho(g) = \alpha$  mais n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ .

**Preuve :** Le seul point qui ne découle pas du Théorème 1.2 est que  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Pour montrer cela, on commence par remarquer que  $g$  est d'une part continue, et que d'autre part  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $U := \bigcup_{n, p \in \mathbb{Z}} I_{n, p}$  qui est de mesure pleine dans  $\mathbb{R}$ .

Alors, si  $A$  est un borélien de mesure de Lebesgue nulle, on a  $\lambda(g(A)) \leq \lambda(g(A \cap (\mathbb{R} \setminus U))) + \lambda(g(A \cap U))$ . Or le premier terme est nul car  $\mathbb{R} \setminus U$  est stable par  $g$  et de mesure nulle, et le second terme est nul par théorème de changement de variable,  $g$  étant un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $U$ , et  $A$  de mesure nulle.

On en déduit que la mesure de Stieltjes associée à  $g$  est de Radon, et est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors la théorie des points de Lebesgue donne qu'il existe  $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  telle que  $g(x) = g(0) + \int_0^x \mu(t) dt$ . Mais alors  $\mu$  est égale à  $g'_n$  sur les  $(I_{n, p})_{p \in \mathbb{Z}}$ , i.e presque partout

égale à  $\eta$  car  $U$  est de mesure pleine, et on a finalement :  $g(x) = g(0) + \int_0^x \eta(t) dt$ .

On en déduit que  $g$  est un homéomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  à dérivée non nulle, et donc un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.  $\square$

### 1.3 Régularité hölderienne

Soit  $w : [0, +\infty] \mapsto [0, +\infty]$  un module de continuité, en considérant la fonction  $g$  construite dans la partie précédente, on a le lemme :

**Lemme 1.5**  $g'$  est continue pour le module  $w \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{1}{w(l_n)} < +\infty$

## Références

- [Her79] Michael HERMAN. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.
- [Mil01] John MILNOR. “Introductory Dynamics Lectures”. 2001.
- [GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.