Décomposition de Littlewood-Paley et opérateurs paradifférentiels

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

Ce document a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation en explicitant tous les outils utilisés, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08] et [GV19] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

I Décomposition de Littlewood-Paley

Théorème I-1 (Inégalité de Bernstein). — *Soit $r_1, r_2 > 0$. Il existe C tel que pour tout $k \geq 1$, $\lambda > 0$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, on a :*

$$\text{supp } \hat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C^k \lambda^k \|u\|_{L^p} \tag{1.1}$$

$$\text{supp } \hat{u} \subset C(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k \|u\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C^k \lambda^k \|u\|_{L^p} \tag{1.2}$$

Lemme I-1. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{p\geq -1} \|S_p u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad \sup_{p\geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

Lemme I-2 (Quasi-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{p\geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{p\geq -1} \|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \tag{1.3}$$

Théorème I-2 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — *Si $s \in \mathbb{R}$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{p\geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 < +\infty$. De plus, il existe $C > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{C} \sum_{p\geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s} \leq C \sum_{p\geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_{L^2}^2 \tag{1.4}$$

Théorème I-3. — *Soit $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > s$. Il existe C tel que pour toute famille $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $H^n(\mathbb{R}^d)$, si*

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)}\varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, alors $u = \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $\|u\|_{H^s}^2 \leq C\sum_k \varepsilon_k^2$

II Théorèmes de paralinéarisation

Théorème II-1. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*

$$F(u) - T_{F'(u)}u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme II-1. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s>0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\| \le C_s \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \tag{2.2}$$

Preuve. Si $s=0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction G continue telle que $F(u) = uG(u)$. Alors, comme $u \in L^2$ et $G(u) \in L^\infty$ car u est bornée, on obtient bien $F \in L^2$.
Quand $s>0$, on remarque qu'il existe C_α indépendant de u et k telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \le C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \tag{2.3}$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein (1.1) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (1.4) donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \le C_\alpha 2^{|\alpha| k} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.4}$$

toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de quasi-orthogonalité (1.3) donnant que $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de L^2 fournit alors la convergence simple de cette série, i.e. $S_n u \to u$ dans L^2. De plus, d'après le Lemme I-1, $\|S_p u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{L^\infty}$. On en déduit que $F(S_n u) \to F(u)$ dans L^2 car :

$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \le C \sup_{t\in[0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u\|_{L^\infty} \|S_n u - u\|_{L^2} \to 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1}u) - F(S_k u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \Delta_k u$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_k u + t\Delta_k u)\mathrm{d}t$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_k u + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \le C_{\alpha,F} 2^{|\alpha| k} \|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaine (plus précisement la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en F' avec le Lemme I-1 et on utilise (2.4) pour les termes en u. En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \le C_{\alpha,F} 2^{|\alpha| k} \|u\|_{L^\infty}$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (2.3), on obtient :

$$\|\partial^\alpha (m_k \Delta_k u)\|_{L^2} \le C_{\alpha,F} 2^{(|\alpha|-s)k} \|u\|_{L^\infty} \varepsilon_k$$

On peut donc conclure par le Théorème I-3.

□

Preuve du Théorème II-1.

□

Références

[Mé08] Guy MÉTIVIER. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.

[GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.