École Normale Supérieure Paris-Saclay
New York University, Courant Institute

Research internship conducted as part of the Master 1 Hadamard
Supervised by Tristan Buckmaster

Self-similar singularity formation in fluids

Sacha Ben-Arous

COURANT INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES

Compte-rendu de stage

D'Avril à Août 2025, j'ai effectué mon stage de Master 1 à l'Université de New York, sous la direction de Tristan Buckmaster. Ce stage avait pour objectif à la fois de s'initier à un domaine de recherche (très) actif, et de découvrir le fonctionnement du monde de la recherche. Le compte-rendu qui suit décrit mon expérience globale au cours de ce stage.

Tout d'abord, ce qui m'a attiré vers ce stage est la possibilité de d'étudier un problème central des mathématiques : le caractère bien-posé de certaines équations de la mécanique des fluides, sous la direction d'un chercheur ayant apporté des contributions significatives à ce domaine : Tristan Buckmaster a participé à la résolution de la conjecture d'Onsager, avec P. Isett et V. Vicol. De plus, le Courant Institute où j'ai effectué mon stage à une grande tradition de l'étude théorique et numérique de la mécanique des fluides, grâce à des mathématiciens illustres tels que P. Lax, L. Nirenberg, A. Majda, C. Morawetz, et plus récemment avec T. Buckmaster, V. Vicol, J. Shatah.

Par ailleurs, j'ai dès le début de mon stage été marqué par la pluridisciplinarité présente dans ce laboratoire, grâce au large spectre de disciplines représentées. Un nombre colossal d'exposés avait lieu durant le premier mois de stage (au moins un par jour), dont les sujets variaient de l'étude numérique appliquée de la dynamique des océans jusqu'à l'utilisation de matrices aléatoires pour étudier la fonction zêta de Riemann, en passant par de la théorie de la mesure géométrique, avec la fameuse résolution de la conjecture de Kakeya par Hong Wang en Mars dernier.
Un autre fait marquant a été d'assister à la conférence célébrant la retraite de S.R.S. Varadhan, monument des probabilités modernes, ayant passé 60 ans (!!!) au Courant Institute, en ayant été deux fois son directeur. Ce dernier est à l'origine de l'autre tradition majeure de Courant : l'étude et le développement de la théorie des probabilités modernes, en particulier des phénomènes de grandes déviations, ainsi que de l'étude des processus de diffusion. Cette conférence a été l'occasion pour moi de découvrir des facettes souvent négligées dans les description des grandes carrières scientifiques : Varadhan a bien sur été extrêment prolifique sur le plan des découvertes mathématiques, mais il s'est aussi et surtout massivement investi dans la construction d'une culture de la recherche en probabilité qui porte encore ses fruits aujourd'hui, par exemple avec l'étude des matrices aléatoires citée ci-dessus, mais aussi avec l'intelligence artificielle, qui est aujourd'hui sans conteste le domaine le plus actif de la recherche mathématique, et dans lequel le Courant Institute est un lieu d'avant garde.
Finalement, j'ai aussi eu la chance de participer à la fin de mon stage à une summer school organisée par la National Science Foundation, portant précisemment sur le thème de mon stage, qui se déroulait au département de mathématiques de Princeton. Cela m'a permit d'avoir d'être exposé à des travaux actuels, d'avoir de très nombreuses discussions avec les différents participants, qu'ils soient professeurs ou élèves, et d'observer comment se coordonne un groupe de recherche en établissant une stratégie à long terme pour résoudre un problème important.

Concernant le contenu de mon stage, j'ai été initié à une stratégie très générale employée par Tristan Buckmaster et ses collaborateurs afin d'étudier l'existence de solutions régulières aux équations de la mécanique des fluides, telles que l'équation d'Euler ou l'équation de Navier-Stokes (incompressibles). Ce problème est bien sur très célèbre, car il est mis à prix par le Clay Institute pour un million de dollars, David Hilbert l'ayant décrit comme l'un des problèmes devant guider les recherches des mathématiciens au cours de notre millénaire. Ce problème peut à première vu sembler dénué d'interêt aujourd'hui, tant les modélisations utilisées dans des domaines appliquées tels que la météorologie ou l'étude de la dynamique des océans sont infiniments plus compliqués. Cependant, ce qui motive une telle question n'est pas d'évaluer la pertinence des équations d'Euler ou de Navier-Stokes pour décrire la réalité, mais est plutôt de permettre, via l'abstraction induite par le cadre mathématique, de mettre en évidence les potentielles incohérences et défauts de nos modélisations intuives des fluides conduisant à des absurdités physiques, et donc de repenser à un niveau fondamental notre conception et appréhension des fluides. Le premier résultat majeur sur ce sujet a été publié par Jean Leray en 1934 [Ler34] dans lequel est établit l'existence globale de solutions faibles, "turbulentes", aux équations de Navier-Stokes, aujourd'hui appelées solutions de Leray-Hopf. Ce sujet a été largement étudié depuis, et une avancée importante récente est l'existence de données initiales lisses qui conduisent à une singularité pour l'équation d'Euler à frontière cylindrique, publiée par Chen et Hou en 2023 dans une série d'articles [CH22],[CH23], et qui utilise une stratégie semblable à celle décrite dans ce rapport. Il faut aussi noter le récent progrès dans la résolution du 6ème problème de Hilbert, qui concerne la dérivation probabiliste des équations de la physique (en particulier de la mécanique des fluides), obtenu par Deng, Hani, Ma [DHM25]. Ce résultat s'inscrit dans une série de travaux menés par Bodineau, Gallagher, Golse, Saint-Raymond, et offre une approche potentiellement différente de la vision analytique classique, car elle s'appuie sur des outils probabiliste, et est motivée physiquement par la description atomique, moléculaire, des fluides. Cette vision probabiliste des fluides comme étant la limite d'un ensemble de particules en intéraction ne sera cependant pas abordée ici.

D'un point de vue pratique, j'ai d'abord commencé par apprendre les résultats classiques de la mécanique des fluides et de l'auto-similarité dans des livres tels que [MB01], [EF15], [Tao06], j'ai ensuite lu les articles [BSV19],[BCG22] afin de découvrir les différentes technique utilisées pour résoudre le type de problème auquel j'étais confronté. J'ai ensuite expérimenté avec les approximations numériques et l'utilisation des bibliothèques Python de calcul formel et de calculs rigoureux, puis j'ai appliqué la méthode générale précedemment mentionnée dans le cas de l'équation de Burgers.

Internship summary

I Introduction

II Analysis of shock and self-similar singularities in a fluid

In this section, I will present the concepts of shock formation and self-similar blow-up for a nonlinear partial differential equation, illustrated by the fundamental example of Burgers' equation.

III Energy inequality for the linearized operator

b

III.1 Quality of the approximation

The compact operators that we are studying are of the form:

$$K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

Assuming that we can bound the growth of the kernel at infinity, a natural choice of a finite rank approximation on a bounded domain $[-A, A]$ would be to use a Riemann sum :

$$K_n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n} \delta K(x, y_i)f(y_i)$$

where $\delta := \frac{2A}{n}$ is the integration step and $\begin{cases} y_0 = -A \\ y_{i+1} = y_i + \delta \end{cases}$ are the sample points.

Now, we want to get a precise bound on the quality of this approximation in order to compute a relevant upper bound in the energy estimate 1.1.
We want to use the following result to get a precise bound on the convergence in the operator norm.

Lemma III-1 (Schur test). — *Let $K : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ be a square integrable kernel, and T be the operator defined by*

$$T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \qquad \big(Tf\big)(x) := \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

Then

$$\|T\|_{L^2 \mapsto L^2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}y \times \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}x.$$

Let's now rewrite the operators to apply this lemma. Recall that the Fourier multiplier $(1-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ defines an isometric isomorphism from $H^3(\mathbb{R})$ to $L^2(\mathbb{R})$, and also that the Dirac function that evaluates a function at a given point x has a representation in $H^3(\mathbb{R})$, that we denote η_x. Now, for a function f in $H^3(\mathbb{R})$, defining $g := (1-\Delta)^{\frac{3}{2}} f$, we have:

$$K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} (1-\Delta_y)^{\frac{-3}{2}} K(x,y)g(y)\mathrm{d}y$$

and

$$\begin{aligned} K_n(f)(x) &= \sum_{i=0}^{n} \delta K(x,y_i)f(y_i) = \sum_{i=0}^{n} \delta K(x,y_i)\langle f, \eta_{y_i}\rangle_{H^3} = \sum_{i=0}^{n} \delta K(x,y_i)\langle g, (1-\Delta_y)^{\frac{3}{2}}\eta_{y_i}\rangle_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{n} \delta K(x,y_i)(1-\Delta_y)^{\frac{3}{2}}\eta_{y_i}(y)g(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

III.2 Conclusion for the linear part

IV Bootstrap method for the non-linear part

c

References

[Ler34] Jean Leray. "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace." In: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248. DOI: 10.1007/BF02547354.

[MB01] Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001. ISBN: 9780521630573. DOI: 10.1017/CBO9780511613203.

[Tao06] Terence Tao. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*. Vol. 106. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2006. ISBN: 9780821889503.

[EF15] Jens Eggers and Marco A. Fontelos. *Singularities: Formation, Structure, and Propagation*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2015. ISBN: 9781107098411.

[BSV19] Tristan Buckmaster, Steve Shkoller, and Vlad Vicol. "Formation of shocks for 2D isentropic compressible Euler." In: *arXiv preprint* (2019). Comm. Pure Appl. Math., in print. arXiv: 1907.03784 [math.AP].

[BCG22] Tristan Buckmaster, Gonzalo Cao-Labora, and Javier Gómez-Serrano. "Smooth imploding solutions for 3D compressible fluids." In: *arXiv preprint* (2022). Revised Apr. 21, 2025; to appear in *Forum of Mathematics, Pi*. arXiv: 2208.09445 [math.AP].

[CH22] Jiajie Chen and Thomas Y. Hou. "Stable nearly self-similar blowup of the 2D Boussinesq and 3D Euler equations with smooth data I: Analysis." In: *arXiv preprint arXiv:2210.07191* (2022). Revised on 9 May 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2210.07191.

[CH23] Jiajie Chen and Thomas Y. Hou. "Stable nearly self-similar blowup of the 2D Boussinesq and 3D Euler equations with smooth data II: Rigorous Numerics." In: *arXiv preprint* (2023). Submitted 9 May 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2305.05660.

[DHM25] Yu Deng, Zaher Hani, and Xiao Ma. "Hilbert's sixth problem: derivation of fluid equations via Boltzmann's kinetic theory." In: *arXiv preprint* (2025). Submitted 3 March 2025. URL: https://arxiv.org/abs/2503.01800.

A Computation of the kernel

A.1 Definitions

Let $W(x) := \left(-\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{27} + \frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^{1/3} - \left(\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{27} + \frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$

and define $Lz := -az - b\frac{\partial z}{\partial x}$, where $a(x) := 1 + \frac{W(x)}{x} + \frac{\partial W}{\partial x}(x)$ and $b(x) := \frac{3x}{2} + W(x)$.

A.2 Computation in Sobolev spaces

Let $\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_{L^2} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx$ be the usual inner product of $L^2(\mathbb{R})$.

Let $w, z \in H^k(\mathbb{R})$ for k large enough. For simplicity, we will denote $\frac{\partial z}{\partial x} := z'$.

A.2.1 Symetric part in L^2 space

In L^2, the symetric part is computed as follows :

$$\begin{aligned}\langle Lz, w\rangle_{L^2} &= \langle -az - bz', w\rangle = \langle z, -aw\rangle + \langle z, b'w + bw'\rangle \\ &= \langle z, (-a + b')w + bw'\rangle = \langle z, L^*w\rangle\end{aligned}$$

Thus, $\frac{1}{2}(L + L^*)z = \frac{1}{2}(-az - bz' - az + b'z + bz') = -az + \dfrac{b'}{2}z$ in L^2.

A.2.2 Quadratic form in H^1 space

In H^1, the quadratic form is computed as follows :

$$\begin{aligned}\langle Lz, z\rangle_{H^1} &= \langle -az - bz', z\rangle + \langle -a'z - az' - b'z' - bz'', z'\rangle \\ &= \langle -az, z\rangle + \langle -bz - a'z, z'\rangle + \langle -az' - b'z', z'\rangle + \langle -bz', z''\rangle \\ &= \langle -az, z\rangle + \langle \frac{1}{2}(b' + a'')z, z\rangle + \langle (-a - b')z', z'\rangle + \langle \frac{1}{2}b'z', z'\rangle \\ &= \langle (-a + \frac{b'}{2} + \frac{a''}{2})z, z\rangle + \langle (-a - \frac{b'}{2})z', z'\rangle\end{aligned}$$

Remark. The operator $(Lz)'$ is not defined on H^1 as it involves second derivatives of z, but it is a classical fact that the quadratic form of an operator as a larger domain than the operator itself.

A.2.3 Quadratic form in H^2 space

In H^2, the quadratic form is computed as follows :

$$\begin{aligned}\langle (Lz)'', z''\rangle &= \langle -a''z - a'z' - a'z' - az'' - b''z' - b'z'' - b'z'' - bz^{(3)}, z''\rangle \\ &= \langle -a''z, z''\rangle + \langle (-2a' - b'')z', z''\rangle + \langle (-a - 2b')z'', z''\rangle + \langle -bz^{(3)}, z''\rangle \\ &= \langle a^{(3)}z + a''z', z'\rangle + \langle \frac{1}{2}(2a'' + b^{(3)})z', z'\rangle + \langle (-a - 2b')z'', z''\rangle + \langle \frac{1}{2}b'z'', z''\rangle \\ &= \langle -\frac{1}{2}a^{(4)}z, z\rangle + \langle 2a'' + \frac{1}{2}b^{(3)})z', z'\rangle + \langle (-a - \frac{3}{2}b')z'', z''\rangle\end{aligned}$$

Thus, we have in H^2 :

$$\langle Lz, z\rangle_{H^2} = \langle (-a + \frac{b'}{2} + \frac{a''}{2} - \frac{a^{(4)}}{2})z, z\rangle + \langle (-a - \frac{b'}{2} + 2a'' + \frac{b^{(3)}}{2})z', z'\rangle + \langle (-a - \frac{3}{2}b')z'', z''\rangle$$

A.2.4 Quadratic form in H^3 space

In H^3, the quadratic form is computed as follows :

$$\begin{aligned}
\langle (Lz)^{(3)}, z^{(3)}\rangle &= \langle -a'''z - 3a''z' - 3a'z'' - az^{(3)} - b'''z' - 3b''z'' - 3b'z^{(3)} - bz^{(4)}, z^{(3)}\rangle \\
&= \langle -a'''z, z^{(3)}\rangle + \langle(-3a'' - b''')z', z^{(3)}\rangle + \langle(-3a' - 3b'')z'', z^{(3)}\rangle + \langle(-a - 3b')z^{(3)}, z^{(3)}\rangle \\
&\quad + \langle -bz^{(4)}, z^{(3)}\rangle \\
&= \langle a^{(4)}z + a'''z', z''\rangle + \langle(3a''' + b^{(4)})z' + (3a'' + b''')z'', z''\rangle + \langle \tfrac{3}{2}(a'' + b''')z'', z''\rangle \\
&\quad + \langle(-a - 3b')z^{(3)}, z^{(3)}\rangle + \langle \tfrac{1}{2}b'z^{(3)}, z^{(3)}\rangle \\
&= \langle -a^{(5)}z - a^{(4)}z', z'\rangle + \langle -\frac{1}{2}a^{(4)}z', z'\rangle + \langle \frac{1}{2}(-3a^{(4)} - b^{(5)})z', z'\rangle + \langle(3a'' + b''')z'', z''\rangle \\
&\quad + \langle \tfrac{3}{2}(a'' + b''')z'', z''\rangle + \langle(-a - 3b')z^{(3)}, z^{(3)}\rangle + \langle \tfrac{1}{2}b'z^{(3)}, z^{(3)}\rangle \\
&= \langle \frac{a^{(6)}}{2}z, z\rangle + \langle(-3a^{(4)} - \frac{1}{2}b^{(5)})z', z'\rangle + \langle(\tfrac{9}{2}a'' + \tfrac{5}{2}b^{(3)})z'', z''\rangle + \langle(-a - \frac{5}{2}b')z^{(3)}, z^{(3)}\rangle
\end{aligned}$$

Thus, we have in H^3 :

$$\begin{aligned}
\langle Lz, z\rangle_{H^3} &= \langle(-a + \frac{b'}{2} + \frac{a''}{2} - \frac{a^{(4)}}{2} + \frac{a^{(6)}}{2})z, z\rangle + \langle(-a - \frac{b'}{2} + 2a'' + \frac{b^{(3)}}{2} - 3a^{(4)} - \frac{1}{2}b^{(5)}))z', z'\rangle \\
&\quad + \langle(-a - \frac{3}{2}b' + \tfrac{9}{2}a'' + \tfrac{5}{2}b^{(3)})z'', z''\rangle + \langle(-a - \frac{5}{2}b')z^{(3)}, z^{(3)}\rangle
\end{aligned}$$

A.3 Compact part of the quadratic form

We proved in the previous section that the quadratic form associated with L in H^3 is of the form :

$$\langle Lz, z\rangle_{H^3} = \langle \varphi_0 z, z\rangle + \langle \varphi_1 z', z'\rangle + \langle \varphi_2 z'', z''\rangle + \langle \varphi_3 z^{(3)}, z^{(3)}\rangle$$

In the next section, we will show that φ_3 has a sign and is bounded. This leaves to study the lower order terms, and we will prove that there exists a compact operator M such that

$$\langle Mz, z\rangle_{H^3} = \langle \varphi_0 z, z\rangle + \langle \varphi_1 z', z'\rangle + \langle \varphi_2 z'', z''\rangle$$

Combining those results yield the following energy estimate :

$$\langle Lz, z\rangle_{H^3} \leq -\delta\|z\|^2_{H^3} + \langle Mz, z\rangle_{H^3} \tag{1.1}$$

We will use the Fourier transform, with the following convention :

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

and we will denote

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{2\pi i x\xi}\, d\xi$$

the inverse Fourier transform.

A.3.1 Base case

We want to find M_0 such that

$$\langle M_0 z, z\rangle_{H^3} = \langle \varphi_0 z, z\rangle \tag{1.2}$$

The Parseval identity gives :

$$\int \hat{z}(\xi)\widehat{M_0 z}(\xi)(1 + \xi^2)^3 \mathrm{d}\xi = \int \hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_0 z}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Thus, choosing M_0 such that $\widehat{M_0 z}(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)^3}\widehat{\varphi_0 z}(\xi)$ would give the equality.

Defining $\lambda_0(\xi) := \frac{1}{(1+\xi^2)^3}$, this condition is equivalent to :

$$\widehat{M_0 z} = \widehat{\mathcal{F}^{-1}(\lambda_0)}\widehat{\varphi_0 z} = \widehat{\mathcal{F}^{-1}(\lambda_0) * \varphi_0 z}$$

i.e. $M_0 z = \mathcal{F}^{-1}(\lambda_0) * \varphi_0 z$ satisfies eq. (1.2).

A.3.2 First order case

We want to find M_1 such that

$$\langle M_1 z, z\rangle_{H^3} = \langle \varphi_1 z', z'\rangle \tag{1.3}$$

Integrating by parts and applying the Parseval identity, we have the equivalence

$$\begin{aligned}
\langle M_1 z, z\rangle_{H^3} &= -\langle \varphi_1' z' + \varphi_1 z'', z\rangle = -\langle \varphi_1' z, z'\rangle - \langle \varphi_1 z, z''\rangle \\
\Leftrightarrow \int \hat{z}(\xi)\widehat{M_1 z}(\xi)(1+\xi^2)^3 \mathrm{d}\xi &= -\int (2\pi i\xi)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_1' z}(\xi)\mathrm{d}\xi + \int (4\pi^2\xi^2)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_1 z}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
\Leftrightarrow \int \hat{z}(\xi)\widehat{M_1 z}(\xi)(1+\xi^2)^3 \mathrm{d}\xi &= \int \hat{z}\left[-(2\pi i\xi)\widehat{\varphi_1' z}(\xi) + (4\pi^2\xi^2)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_1 z}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Defining $\lambda_1(\xi) := -\frac{2\pi i\xi}{(1+\xi^2)^3}$ and $\lambda_2(\xi) := \frac{4\pi^2\xi^2}{(1+\xi^2)^3}$, we have that

$$M_1 z := \left(\mathcal{F}^{-1}(\lambda_1) * \varphi_1' z\right) + \left(\mathcal{F}^{-1}(\lambda_2) * \varphi_1 z\right)$$

satisfies eq. (1.3).

A.3.3 Second order case

We want to find M_2 such that

$$\langle M_2 z, z\rangle_{H^3} = \langle \varphi_2 z'', z''\rangle \tag{1.4}$$

Integrating by parts twice and applying the Parseval identity, we have the equivalence

$$\begin{aligned}
\langle M_2 z, z\rangle_{H^3} &= \langle \varphi_2'' z'' + 2\varphi_2' z^{(3)} + \varphi_2 z^{(4)}, z\rangle = \langle \varphi_2'' z, z''\rangle + \langle 2\varphi_2' z, z^{(3)}\rangle + \langle \varphi_2 z, z^{(4)}\rangle \\
\Leftrightarrow \int \hat{z}(\xi)\widehat{M_2 z}(\xi)(1+\xi^2)^3 \mathrm{d}\xi &= -\int (4\pi^2\xi^2)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_2'' z}(\xi)\mathrm{d}\xi - \int (i16\pi^3\xi^3)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_2' z}(\xi)\mathrm{d}\xi + \int (16\pi^4\xi^4)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_2 z}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
\Leftrightarrow \int \hat{z}(\xi)\widehat{M_2 z}(\xi)(1+\xi^2)^3 \mathrm{d}\xi &= \int \hat{z}\left[-(4\pi^2\xi^2)\widehat{\varphi_2'' z}(\xi) - (i16\pi^3\xi^3)\hat{z}(\xi)\widehat{\varphi_2' z}(\xi) + (16\pi^4\xi^4)\widehat{\varphi_2 z}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Defining $\lambda_3(\xi) := -\frac{i16\pi^3\xi^3}{(1+\xi^2)^3}$ and $\lambda_4(\xi) := \frac{16\pi^4\xi^4}{(1+\xi^2)^3}$, we have that

$$M_2 z := \left(-\mathcal{F}^{-1}(\lambda_2) * \varphi_2'' z\right) + \left(\mathcal{F}^{-1}(\lambda_3) * \varphi_2' z\right) + \left(\mathcal{F}^{-1}(\lambda_4) * \varphi_2 z\right)$$

satisfies eq. (1.4).

B aled

Assuming that $f \in H^3(\mathbb{R})$ is also in $L^1(\mathbb{R})$, we can use the inversion formula and work in Fourier space :

$$K_n(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta K(x, y_i) f(y_i) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \sum_{i=0}^{n} \delta K(x, y_i) e^{2i\pi\xi y_i} \mathrm{d}\xi \tag{2.1}$$

On the other hand, the operator can be written as :

$$\begin{aligned} K(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \hat{K}(x,\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} K(x,y)e^{-2i\pi\xi y}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

There is a sign problem in the phase of the exponential, but if we can assume that the function f is even, then we can also reverse the sign in the approximate kernel formula, and now the difference between the kernel and its approximation is easily bounded using the mean value theorem on $[-A, A]$, and by giving an explicit bound on the decay of the kernel away from zero.

Now, taking the difference of the two expressions, we have :

$$\begin{aligned} |K(f)(x) - K_n(f)(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \left(\int_{-A}^{A} K(x,y)e^{-2i\pi\xi y}\mathrm{d}y - \sum_{i=0}^{n} \delta K(x,y_i)e^{2i\pi\xi y_i} \right) \mathrm{d}\xi \right| \\ + \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} K(x,y)e^{2i\pi\xi y}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \right| & \\ &\leq (I) + (II) \end{aligned}$$

Let's first bound the difference on the compact domain $[-A, A]$ by applying the mean value theorem:

$$\begin{aligned} (I) &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \sum_{i=0}^{n} \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} K(x,y)e^{2i\pi\xi y} - K(x,y_i)e^{2i\pi\xi y_i}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right| \sum_{i=0}^{n} \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} \delta \sup_{y\in[-A,A]} \left|\partial_y K(x,y)e^{2i\pi\xi y} + 2i\pi\xi K(x,y)e^{2i\pi\xi y}\right|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq n\delta^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right| \sup_{y\in[-A,A]} \Big(|\partial_y K(x,y)| + |2\pi\xi K(x,y)| \Big)\mathrm{d}\xi \\ &\leq n\delta^2 \Big(\|\hat{f}\|_{L^1} \sup_{y\in[-A,A]} |\partial_y K(x,y)| + \|\xi\hat{f}(\xi)\|_{L^1} \sup_{y\in[-A,A]} 2\pi|K(x,y)| \Big) \\ &\leq C\frac{4A^2}{n} \Big(\sup_{y\in[-A,A]} |\partial_y K(x,y)| + \sup_{y\in[-A,A]} |2\pi K(x,y)| \Big) \|f\|_{H^2} \end{aligned}$$

Where $C := \max\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)}\mathrm{d}\xi, \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\mathrm{d}\xi \Big)$ and we used the fact that, because $f \in H^3(\mathbb{R})$, we have:

$$\|\hat{f}(\xi)\|_{L^1} = \|\frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}(1+\xi^2)^{1/2}\hat{f}(\xi)\|_{L^1} \leq \|\frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\|_{L^2}\|(1+\xi^2)^{1/2}\hat{f}(\xi)\|_{L^2} = \|\frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\|_{L^2}\|f\|_{H^1}$$

and

$$\|\xi\hat{f}(\xi)\|_{L^1} = \|\frac{\xi}{(1+\xi^2)}(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)\|_{L^1} \leq \|\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\|_{L^2}\|(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)\|_{L^2} = \|\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\|_{L^2}\|f\|_{H^2}$$

Then for the second part, by Fubini's theorem:

$$\begin{aligned} (II) &= \left| \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} K(x,y) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi y}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} \lambda(x-y)\varphi(y)f(y)\mathrm{d}y \right| \end{aligned}$$

We can compute that $\lambda(x) = \frac{\pi}{4}e^{-2\pi|x|}\left(2\pi^2x^2 + 3\pi|x| + \frac{3}{2}\right)$, and thus defining $P(x) := 2\pi^2x^2 + 3\pi|x| + \frac{3}{2}$ and recalling that $|x+y| \leq |x| + |y|$ and $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, we can bound the lambda term:

$$P(x+y) \leq 2\pi^2(2x^2 + 2y^2) + 3\pi(|x| + |y|) + \tfrac{3}{2} = 2P(x) + 2P(y).$$

Hence

$$\begin{aligned}\lambda(x+y) = \tfrac{\pi}{4}e^{-2\pi|x+y|}P(x+y) &\leq \tfrac{\pi}{4}e^{-2\pi|x+y|}(2P(x) + 2P(y)) \\ &\leq 2e^{-2\pi|y|}\lambda(x) + 2e^{-2\pi|x|}\lambda(y)\end{aligned}$$

Assuming we can show that φ is bounded, we now have : We can also integrate by part here, since f is in H^3

$$\begin{aligned}(II) \quad &\leq \quad \|\varphi\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}\left(2e^{-2\pi|y|}\lambda(x) + 2e^{-2\pi|x|}\lambda(y)\right)|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \quad \|\varphi\|_{L^\infty}\left(\lambda(x)\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}2e^{-2\pi|y|}|f(y)|\mathrm{d}y + 2e^{-2\pi|x|}\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}\lambda(y)|f(y)|\mathrm{d}y\right) \\ &\leq \quad \|\varphi\|_{L^\infty}\left(\lambda(x)\left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}2e^{-4\pi|y|}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2} + 2e^{-2\pi|x|}\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}\lambda(y)^2\mathrm{d}y\|f\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$