Difféomorphismes du cercle et théorème de Nash-Moser

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

14 Mai 2024

ENS Paris-Saclay

Difféomorphismes du cercle

Théorème d'Arnold

Calcul paradifférentiel

Multiplicateurs de Fourier

On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

Décomposition régularisante

On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

Caractérisations d'espaces fonctionnels

On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

Paraproduits

On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

Paralinéarisation

On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \text{ si } k \geq 0$$

Difféomorphismes du cercle

Dynamique en dimension 1

On considère le cercle $\mathbb{S}^1 := \{z, |z| = 1\}$, ainsi que le plongement $\Pi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$.
Pour $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$, on dit que $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est un relèvement si $\Pi \circ F = f \circ \Pi$, i.e $f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi F(t)}$

Lemme : Si f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme du cercle, alors il existe un relèvement de f qui est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (de $\mathbb{R}$).

Dans la suite, on considèrera a minima des homéomorphismes, ainsi que leur relèvements réguliers associés.

Nombre de rotation et Théorème Poincaré

Si f est un homéomorphisme, F un relèvement, et $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{F^n(x)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de x, notée $\rho(F)$. On définit alors $\rho(f) := \rho(F) \mod 1$.

Théorème (Poincaré) : Si f est un homéomorphisme de nombre de rotation α irrationnel, alors f est semi-conjugué à R_α, i.e il existe h continue telle que $h \circ f = R_\alpha \circ h$.

Théorème d'Arnold

But

Le But du théorème d'Arnold est déterminé la régularité des conjugaison d'un Difféomorphisme g d'angle de rotation α irrationnelle proche de la rotation R_α. c'est a dire résoudre :

$$\eta(x+\alpha) = g \cdot \eta(x)$$

d'inconnue η.

Cadre

On écrit alors :

$$g(x) = R_\alpha + f(x)$$

avec f "assez petit".
On cherche alors $\eta = id + u$. L'équation a résoudre:

$$\eta(x+\alpha) = g \cdot \eta(x)$$

devient alors :

$$\Delta_\alpha u = f \cdot (id + u) \text{ avec } \Delta_\alpha u(x) = u(x+\alpha) - u(x)$$

Perte de régularité

Simplement en voulant résoudre

$$U(x+\alpha) - U(x) = \eta(x)$$

On a que

$$(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)\widehat{u}(n) = \widehat{f}(n)$$

Avec la condition diophansiènne :

$$\left\| \alpha - \frac{m}{n} \right\| \geq \frac{k}{n^{\sigma}}$$

cela induit la perte de régularité suivante, si $f \in H^{s+\sigma}$ alors $\Delta_{\alpha}^{-1} f \in H^{s}$

Enoncé et Preuve

Le théorème d'Arnold affirme