Décomposition de Littlewood-Paley et opérateurs paradifférentiels

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

Ce document a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation en explicitant tous les outils utilisés, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08] et [GV19] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

I Décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons dans cette section présenter la décomposition de Littlewood-Paley. C'est une décomposition de fonction dans laquelle chaque terme a un support de fréquence (au sens de la transformée de Fourier) localisé. Nous allons également présenter des propriétés sur cette décomposition. Il nous est cependant indispensable de s'intéresser à l'existence et, plus précisément, à la construction d'un type de fonctions que sont les fonctions $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec un support au voisinage de 0 mais également constantes au voisinage de 0.

Considérons le cas $d = 1$ et notons :

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4}-|x-\frac{1}{2}|^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a que g appartient à $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ puisque, en effet, on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g^{(n)}(x) = xQ_n(|x|)\exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) \tag{1.1}$$

avec Q_n une fraction rationnelle dont le pole ce situe en 1 , ce qui montre la continuité des $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

On étend alors cette construction à $\mathbb{R}^d$ en notant $\Psi(x) = g(|x|)$. Ψ est une fonction $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp}(\Psi) \subset B(0, 1)$ et égale à 1 sur $B(0, \frac{1}{2})$.

On obtient donc, en posant $\chi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ 1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)$$

avec $\text{supp}(\chi(2^{-p}\cdot)) \subset C(0, 2^{p-1}, 2^{p+1})$

Lemme I-1. — *Soit $\phi \in \mathcal{S}$ alors :*

$$\hat{\phi} = \psi\hat{\phi} + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\cdot)\hat{\phi}$$

Preuve. Soit g $\in \mathcal{S}$:
Montrons que pout tout α et $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$

$$\left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_\infty \to_{p\to\infty} 0$$

On considère alors :

$$\begin{aligned}\left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_\infty &= \left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-p}x)g)\right\|_{[2^{p-1};2^{p+1}]}\\ &\leq \left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]} + \left\|x^\alpha \partial^\beta g(1-\psi(2^{-p}x)\right\|_{[2^{p-1};2^p]}\end{aligned}$$

De plus puisque g $\in \mathcal{S}$ alors $\lim_{|x|\to\infty} x^\gamma g(x) = 0$. On a alors $\left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. En utilisant la formule de derivation de Leibniz sachant que $\partial^k \psi = O(x^k)$ (en utilisant (1.1)) on a que $\left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^p;2^{p+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. On utilise ensuite la continuité de la transformé de Fourier et de la transformé de Fourier inverse sur $\mathcal{S}$.

□

Définition I-1. On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\forall q \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in L^q, \quad \Delta_{-1} u = \mathcal{F}^{-1}(\psi) * u, \quad \Delta_p u = 2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\chi(2^p\cdot)) * u \text{ pour } p \geq 0$$

Proposition I-2. — *Soit $u \in \mathcal{S}'$, en posant :*

$$S_p u = \sum_{k=1}^{p-1} \Delta_k u$$

On a que :

$$\lim_{p\to\infty} S_p u = u$$

Preuve. Prenons $u \in \mathcal{S}'$ et $v \in \mathcal{S}$.

$$\langle \mathcal{F}(S_n u), v\rangle = \langle \psi(2^{-p}\xi)\mathcal{F}(u), v\rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-p}\xi)v\rangle$$

Or, $\lim_{p\to+\infty} \psi(2^{-p}\xi)v = v$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par le Lemme I-1. On obtient donc :

$$\mathcal{F}(S_n u) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{dans } \mathcal{S}$$

Par continuité de $\mathcal{F}^{-1}$, on a en effet $S_p u = \sum_{k=1}^{p-1} \Delta_k u$.

□

Lemme I-3 (Inégalité de Bernstein). — *Soit B une boule, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, et $\lambda > 0$. Si $u \in L^p$ tel que supp$(\hat{u}) \subset \lambda B$, alors*

$$\max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{|\alpha|+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p} \tag{1.2}$$

Preuve. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur un voisinage de B, on a $\hat{u}(\xi) = \varphi(\lambda^{-1}\xi)\hat{u}(\xi)$, donc $u = \lambda^d u * g$, avec $g := \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\lambda\cdot)$, et donc $\partial^\alpha u = \lambda^d u * \partial^\alpha g$. L'inégalité de Young donne de plus que : $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$, où $1 \leq p, r \leq q \leq +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Or :

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(\lambda x)\right)\right|^r \mathrm{d}x = \lambda^{|\alpha|r} \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right)(\lambda x)\right|^r \mathrm{d}x\\ &\leq \lambda^{|\alpha|r-d}\|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}^r\end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \lambda^{|\alpha|+d(1-\frac{1}{r})}\|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}\|u\|_{L^p} = C_k \lambda^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p}$$

□

Lemme I-4. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{k\geq -1} \|S_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad \sup_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

Preuve. On écrit $S_k u = 2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^p\cdot)) * u$. Par inégalité de Young on obtient :

$$\|S_k u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \left\|2^{pd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^p\cdot)\right\|_{L^1}$$

On procède de même pour $\|\Delta_k u\|_{L^p}$.

□

Lemme I-5 (Presque-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{L^2} \leq 2 \sum_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|^2_{L^2} \tag{1.3}$$

Preuve. On part de $1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)$. Seule deux de ces fonctions ont une intersection de support non vide. On utilise alors : $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)^2 \leq 1$$

La seconde inégalité s'en déduit en multipliant l'équation ci-dessus par $\hat{u}$ et en utilisant l'identité de Plancherel.

□

Proposition I-6 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — *Si $s \in \mathbb{R}$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{p\geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|^2_{L^2} < +\infty$. De plus, il existe $C > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{C} \sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{H^s} \leq C \sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|^2_{L^2} \tag{1.4}$$

Preuve. En notant $\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$, on a $\|u\|_{H^s} = \| \langle D\rangle^s u\|_{L^2}$, et le Lemme I-5 donne

$$\sum_{k\geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{H^s} \leq 2 \sum_{k\geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|^2_{L^2}$$

La formule de Plancherel et la définition de Δ_p, on obtient l'existence de $C > 0$ tel que $\forall k \geq -1$

$$\frac{1}{C}2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2} \leq C2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2}$$

et donc il existe $\tilde{C}$ tel que :

$$\frac{1}{\tilde{C}} \sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{H^s} \leq \tilde{C} \sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|^2_{L^2}$$

ce qui donne l'équivalence des normes voulue.

□

Proposition I-7 (Injection de Sobolev). — *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continuement dans $C^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$*

Proposition I-8. — *Soit $(u_k)_{k\geq -1}$ tel que $\exists R > 0, \forall k \geq -1, supp\ \hat{u}_k \subset B(0, R2^k)$.*
- *Si* sup

Proposition I-9. — *Soit $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > s$. Il existe C tel que pour toute famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $H^n(\mathbb{R}^d)$, si $\forall\alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq n$:*

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)}\varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, alors $u = \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $\|u\|^2_{H^s} \leq C\sum_k \varepsilon_k^2$.

II Estimations douces et paralinéarisation

Proposition II-1 (Estimations douces pour les paraproduits et leur restes). —

- $\forall s \in \mathbb{R}, u \in L^\infty, v \in H^s$,
$$\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s}$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in L^\infty, v \in C^\alpha$,
$$\|T_u v\|_{C^\alpha} \leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{C^\alpha}$$
- $\forall r, s \in \mathbb{R}$, *tels que* $r + s > 0, u \in C^r, v \in H^s$,
$$\|R(u,v)\|_{H^{r+s}} \leq C_{r,s} \|u\|_{C^r} \|v\|_{H^s}$$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *tels que* $\alpha + \beta > 0, u \in C^\alpha, v \in C^\beta$,
$$\|R(u,v)\|_{C^{\alpha+\beta}} \leq C_{\alpha,\beta} \|u\|_{C^\alpha} \|v\|_{C^\beta}$$

Proposition II-2 (Estimations douces pour le produit). —

- $\forall s > 0,\ u, v \in L^\infty \cap H^s(\mathbb{R}^d)$,
$$\|uv\|_{H^s} \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s})$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N},\ u, v \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$,
$$\|uv\|_{C^\alpha} \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{C^\alpha} + \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{C^\alpha})$$

Théorème II-3. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*
$$F(u) - T_{F'(u)} u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme II-4. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s \geq 0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*
$$\|F(u)\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \tag{2.2}$$

Preuve. Si $s = 0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction G continue telle que $F(u) = uG(u)$. Alors, comme $u \in L^2$ et $G(u) \in L^\infty$ car u est bornée, on obtient bien $F \in L^2$.
Quand $s > 0$, on remarque qu'il existe C_α indépendant de u et k telle que :
$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha| - s)k} \varepsilon_k \tag{2.3}$$
avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein (1.2) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (1.4) donnent le résultat voulu. On a de plus,
$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha| k} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.4}$$
toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de presque-orthogonalité (1.3) donnant que $(\Delta_k u)_{k \in \mathbb{N}}$ est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de L^2 fournit alors la convergence simple de cette série, i.e. $S_n u \to u$ dans L^2. De plus, d'après le Lemme I-4, $\|S_p u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^\infty}$. On en déduit que $F(S_n u) \to F(u)$ dans L^2 car :
$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \leq C \sup_{t \in [0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u\|_{L^\infty} \|S_n u - u\|_{L^2} \to 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1}u) - F(S_ku) = F(S_0u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k\Delta_k u \tag{2.5}$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_ku + t\Delta_k u)\mathrm{d}t$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_ku + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaine (plus précisement la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en F' avec le Lemme I-4 et on utilise (2.4) pour les termes en u. En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.6}$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (2.3), on obtient :

$$\|\partial^\alpha (m_k\Delta_k u)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,F} 2^{(|\alpha|-s)k} \|u\|_{L^\infty}\varepsilon_k$$

On peut donc conclure par la Proposition I-9.

□

Preuve du Théorème II-3. On commence par remarquer que quitte à soustraire un terme linéaire au à $F(u)$, on peut supposer que $F'(0) = 0$. Cela ne change rien à la preuve car :

$$F(u) + au - T_{F'(u)+a}u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - T_au = F(u) + au - T_{F'(u)}u - au = F(u) - T_{F'(u)}u$$

Ensuite, comme $\rho > 0$, la Proposition I-7 donne $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par définition, on a

$$T_{F'(u)}u = S_{-3}F'(u) \cdot u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-2}F'(u) \cdot \Delta_k u$$

En utilisant (2.5), comme $F(S_0u)$ et $S_{-3}F'(u) \cdot u_0$ sont dans H^∞, il suffit de prouver que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m_k - S_{k-2}g)\Delta_k u \ \in H^{s+\rho}$$

Cela découle de la Proposition I-9, que l'on peut appliquer d'une part grâce à (2.3), et d'autre part car on a l'inégalité :

$$\|\partial^\alpha (m_k - S_{k-2}F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Pour obtenir cette dernière, on va montrer séparément :

$$\|\partial^\alpha (m_k - F'(S_{k-2}u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{2.7}$$

$$\|\partial^\alpha (F'(S_ku) - S_kF'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{2.8}$$

On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral, qui donne

$$F'(S_ku + t\Delta_k u) - F'(S_{k-2}u) = \mu_k w_k$$

avec

$$w_k = (\Delta_{k-2}u + \Delta_{k-1}u + t\Delta_k u) \quad \text{ et } \mu_k = \int_0^1 F''(S_{k-2}u + \tau w_k)\mathrm{d}\tau.$$

De manière analogue à (2.6), on a

$$\|\partial^\alpha \mu_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha| k} \|u\|_{L^\infty}$$

Tandis que w_k vérifie

$$\|\partial^\alpha w_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} \|\partial^\alpha w_k\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \leq \tilde{C}_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Bernstein (1.2), puis (2.3). On en déduit donc que

$$\|\partial^\alpha (\mu_k w_k)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Or

$$m_k - F'(S_{k-2}u) = \int_0^1 \mu_k w_k \mathrm{d}t$$

Ce qui donne (2.7). Pour montrer la seconde inégalité, on commence par décomposer en deux membres le terme à majorer :

$$\left[F'(S_k u) - S_k F'(S_k u)\right] + \left[S_k F'(S_k u) - S_k F'(u)\right]$$

L'inégalité de Bernstein (1.2) donne alors

$$\|\partial^\alpha S_k (F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^\infty} \lesssim_\alpha 2^{(|\alpha| + \frac{d}{2})k} \|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2}.$$

De plus :

$$\|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2} \lesssim \|F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2} \lesssim \|u - u_k\|_{L^2} \lesssim 2^{-ks}$$

grâce au Lemme I-4, puis aux accroissements finis, et finalement avec une majoration du reste géométrique dans la caractérisation des espaces de Sobolev (1.4). Ainsi le second membre vérifie l'inégalité (2.8). Ensuite, on remarque que $S_k u \in H^\infty$ car sa transformée de Fourier est à support compact. Alors, d'une part $S_k u \in L^\infty$ par le Lemme I-4, et sa norme est bornée indépendamment de k. D'autre part, en écrivant la norme usuelle de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Bernstein, on a que $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|S_k u\|_{H^{s+N}} &= \|S_k u\|_{H^s} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=s+j} \|\partial^\alpha S_k u\|_{L^2} \\
&\leq \|S_k u\|_{H^s} + \sum_{j=1}^{N} C_{\alpha,j} 2^{kj} \|\partial^s S_k u\|_{L^2} \\
&\leq C_{\alpha,N} 2^{kN} \|S_k u\|_{H^s} \leq C_{\alpha,N} 2^{kN} \|u\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

où l'on a observé que $\|S_k u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^s}$ à partir de l'écriture utilisant les multiplicateurs de Fourier, et avec la norme de Sobolev adaptée. Alors, le Lemme II-4 donne que $F'(S_k u) \in H^{s+N}$, et

$$\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \leq C_{\alpha,N} 2^{kN} \|u\|_{H^s} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.9}$$

En reprenant l'inégalité (**??**) dans la preuve de l'injection de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Bernstein, on remarque que pour $\sigma > |\alpha| + \frac{d}{2}$ et $a \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\partial^\alpha \Delta_j a\|_{L^\infty} \leq C 2^{j(\frac{d}{2} - \sigma + |\alpha|)} \|a\|_{H^\sigma}$$

Et alors, comme $a - S_k a = \sum_{j \geq k} \Delta_j a$, par majoration d'un reste géométrique, on a :

$$\|\partial^\alpha (a - S_k a)\|_{L^\infty} \leq C 2^{k(\frac{d}{2} - \sigma + |\alpha|)} \|a\|_{H^\sigma} \tag{2.10}$$

En appliquant (2.10) avec $a = F'(S_k u)$ et $\sigma = s + N$ où N est suffisamment grand pour que $s + N > \frac{d}{2} + |\alpha|$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha(F'(S_k u) - S_k F'(S_k u))\|_{L^\infty} &\leq C 2^{k(\frac{d}{2} - s - N + |\alpha|)} \|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \\ &\leq C_{\alpha,N} 2^{k(\frac{d}{2} - s + |\alpha|)} \|u\|_{H^s}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.9), ce qui donne finalement la majoration attendue pour le premier membre, conclut la preuve de l'inégalité (2.8) et achève donc la preuve du Théorème II-3.

□

Références

[Mé08] Guy MÉTIVIER. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Nonlinear Systems*. 2008.

[GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.