I Théorie de la mesure

Méthode

- Toujours se demander : dans quel ensemble je travaille, quelle est la tribu, quelle est la mesure ?
- Utiliser les indicatrices, raisonner par densité, par régularité.

Théorèmes

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, et on pourra utiliser un espace métrique (T, d).

Théorème I-1 (Dynkin). — *Le σ-système engendré par un π-système est égal à la tribu engendrée par ce dernier.*

Théorème I-2 (Convergence monotone). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $[0, +\infty]$, telle que pour tout $n \geq 0$, $f_n \leq f_{n+1}$. Alors, en notant f la limite simple de cette suite, on a que f est mesurable, et :*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

Théorème I-3 (Convergence dominée). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Si il existe g intégrable telle que pour tout $n \geq 0$, $|f_n| \leq g$, alors f est intégrable et :*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

Remarque. On peut seulement supposer les conditions ci-dessus vraies presque partout, mais dans ce cas il faut imposer la mesurabilité de la limite simple, ou bien travailler dans la tribu complétée, comme l'explique la remarque suivante.

Remarque. Si $\tilde{f} : E \mapsto F$ est presque partout égale à une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (F, \mathcal{B})$, alors $\tilde{f}$ est mesurable pour la tribu complétée $\overline{\mathcal{A}}$ sur E.

Théorème I-4 (Régularité des mesures boréliennes finies). — *Si μ est une mesure borélienne finie sur un espace métrique (T, d), alors μ est régulière, i.e pour tout $A \in \mathcal{B}(T)$:*

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) \mid U \textit{ ouvert},\ A \subset U\} \\ &= \sup\{\mu(F) \mid F \textit{ fermé},\ F \subset A\}\end{aligned}$$

Remarque. Dans un espace polonais (métrique séparable complet), on a de plus que la régularité intérieure est sur les compacts.

Théorème I-5 (Régularité des mesures de Radon). — *Si μ est une mesure de Radon sur un espace métrique localement compact séparable (ex. $\mathbb{R}^d$), alors μ est régulière, et la régularité intérieure est sur les compacts.*

Théorème I-6 (Représentation de Riesz-Markov). — *Si E est un espace métrique localement compact séparable, et $\Lambda : C_c(E) \mapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire positive , alors il existe une unique mesure de Radon μ sur E telle que, pour tout $f \in C_c(E)$:*

$$\Lambda(f) = \int f \mathrm{d}\mu$$

Remarque. Avec ce qui précède, on obtient de plus que la mesure μ est régulière.

Théorème I-7 (Inégalités d'Hölder et de Young). — *Soient* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, *on a les inégalités :*

- *Si* p *et* q *sont des exposants conjugués, i.e :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors* $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.
- *Si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, *alors* $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.

Théorème I-8 (Riesz-Fischer). — *Si* $p \in [1; +\infty]$, *alors* $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace de Banach.*

Outils :

Corollaire I-9 (Unicité des mesures). — *Soient* μ *et* ν *deux mesures sur* $(E, \mathcal{A})$ *qui coïncident sur un* π*-système* $\mathcal{C}$ *tel que* $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$*. Alors :*

1. *Si* $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, *alors* $\mu = \nu$.
2. *Si il existe une suite croissante* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}$ *tels que* $\displaystyle\bigcup_n A_n = E$, *et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$, *alors* $\mu = \nu$.

Lemme I-10 (Fatou). — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int \underline{\lim}_n f_n \leq \underline{\lim}_n \int f_n$$

Proposition I-11 (Continuité des intégrales). — *Soit* $t_0 \in T$ *et* $f : T \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$*. Si :*

- *Pour tout* $t \in T$, $x \mapsto f(t, x)$ *est mesurable.*
- *Pour presque tout* $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ *est continue en* t_0.
- *Il existe* g *intégrable telle que pour tout* $t \in T$, *pour presque tout* $x \in E$, *on a* $|f(t, x)| \leq g(x)$

Alors, $t \mapsto \displaystyle\int f(t, x)\mathrm{d}\mu(x)$ *est continue en* t_0.

Proposition I-12 (Dérivation des intégrales). — *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, *et* $f : I \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$*. Si :*

- *Pour tout* $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ *est mesurable et intégrable.*
- *Pour presque tout* $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ *est dérivable en* t_0.
- *Il existe* g *intégrable telle que pour tout* $t \in I$, *pour presque tout* $x \in E$, *on a*

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq g(x)\,|t - t_0|$$

Alors, $t \mapsto \displaystyle\int f(t, x)\mathrm{d}\mu(x)$ *est dérivable en* t_0, *de dérivée* $\displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\mathrm{d}\mu(x)$.

Remarque. On peut remplacer les deux dernières conditions par les suivantes, plus fortes, qui assurent alors la dérivabilité en tout point de l'intervalle :

- Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur tout I.
- Il existe g intégrable tel que pour presque tout $x \in E$, pour tout $t \in I$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x)$.

Proposition I-13 (Mesure de Stieltjes). — *Il y a une correspondance entre les fonctions croissantes continues à droite, et les mesures de Radon. Plus précisemment :*

- *Si* μ *est une mesure de Radon sur* $\mathbb{R}$, *alors la fonction* F_μ *suivante est croissante, continue à droite.* $F_\mu(x) := \begin{cases} \mu(]0; x]) & \text{si } x \geq 0 \\ -\mu(]x; 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- *Si* $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est croissante, continue à droite, alors il existe une unique mesure de Radon* μ *telle que, pour tout* $a < b \in \mathbb{R}$, $\mu(]a; b]) = F(b) - F(a)$.