

# Théorie K.A.M paradifférentielle

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet,  
sous la direction de Thomas Alazard.  
Stage de L3, ENS Paris-Saclay.

## I Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est née à la fin du 19ème siècle, sous l’impulsion des travaux d’Henri Poincaré sur le problème à 3 corps. Dans les années 50, Kolmogorov, suivi d’Arnold puis de Moser, bâtit une théorie de la dynamique des systèmes hamiltoniens et de leur perturbations, qui s’applique en particulier à la mécanique céleste. Le problème principal qui émerge de ce type de dynamique est celui des “*petits diviseurs*”, qui se traduit par une perte de régularité induite par les opérateurs mis en jeu. La théorie K.A.M (Kolmogorov, Arnold, Moser) développe des outils raffinés d’analyse, en particulier le théorème de Nash-Moser, qui est un schéma de Newton modifié où sont rajoutés des opérateurs régularisants, afin de surmonter cette difficulté.

Ces résultats sont cependant difficiles d’accès de part leur sophistication (on présente en annexe une version succincte du théorème de Nash-Moser due à Hörmander [Hö85]), et d’autre part, les schémas itératifs utilisés ont pour conséquence de rendre physiquement irréalistes les ordres de grandeurs des perturbations prises en compte par la théorie.

Dans ce contexte, Thomas Alazard et Chengyang Shao publient une nouvelle preuve [AS23] de certains résultats de K.A.M, qui utilise des outils de calcul paradifférentiel. Le principe de cette méthode est de directement régulariser les équations que l’on cherche à résoudre, puis de revenir à l’équation initiale à l’aide de théorèmes de point fixe. Cette approche a d’une part l’avantage d’être relativement élémentaire, et d’autre part les résultats de stabilité sont obtenus à partir de théorème de point fixe classiques et non plus avec des schémas itératifs, ce qui pourrait permettre d’améliorer la pertinence physique des bornes autorisées pour les perturbations.

Dans la première partie du rapport, nous présentons le cadre et les principaux théorèmes de la dynamique en dimension 1 sur le cercle, ainsi que des contre-exemples au théorème de Denjoy, afin d’observer l’optimalité de ce théorème. Pour cela, nous nous appuyons principalement sur [GV19], qui a par ailleurs aussi servi de support pour les parties suivantes. Dans la seconde partie, on pose les fondements du calcul paradifférentiel à l’aide de la décomposition de Littlewood-Paley, puis on énonce les théorèmes de paralinéarisation qui vont permettre de prouver un théorème dû à Arnold, qui permet de mettre en évidence le phénomène des petits diviseurs, et sa résolution à l’aide du calcul paradifférentiel.

## II Difféomorphismes du cercle

Nous allons dans cette section présenter rapidement les difféomorphismes du cercle et énoncer quelques propriétés fondamentales puisque ces objets nous offrent un cadre d’application des techniques de résolution d’équations que nous verrons dans les sections suivantes. On utilise les notations suivantes : On note  $\mathbb{S}^1$  le cercle de dimension 1 :  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  et  $\Pi$  l’application  $t \rightarrow \exp(2i\pi t)$  (la projection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{S}^1$ ).

## II.1 Problèmes de conjugaison

DÉFINITION II-1. Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On appelle relèvement de  $f$ , une application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$f \circ \Pi = \Pi \circ F.$$

REMARQUE. Les relèvements permettent de faire le parallèle entre les fonctions du cercle et les fonctions réelles.

THÉORÈME II-1. — *Toute application continue du cercle possède un relèvement continu. De plus, deux relèvements continus diffèrent d'une constante entière.*

Dans la suite, tous les relèvements d'applications continues du cercle seront pris continus.

DÉFINITION II-2. Pour une application continue du cercle  $f$ , on définit son degré  $\deg(f) := F(1) - F(0)$  avec  $F$  un relèvement de  $f$ .

REMARQUE. Ce nombre est un entier relatif et il ne diffère pas selon les relèvements (continus).

DÉFINITION II-3. On dit que  $f$  préserve l'orientation si pour tout triangle avec ses sommets sur  $\mathbb{S}^1$ , l'image de ses sommets par  $f$  n'inverse pas l'ordre de ses sommets.

Ce qui nous intéressera dans la suite de cette étude sont surtout les homéomorphismes du cercle, qui sont les applications continues, bijectives et de réciproques continues (la dernière propriété est redondante du fait de la compacité de  $\mathbb{S}^1$ ).

PROPOSITION II-2. — *Prenons  $f$  un homéomorphisme préservant l'orientation alors,  $\deg(f) = 1$  et de plus ses relèvements sont croissants.*

PROPOSITION II-3. — *Soit  $f$  un homéomorphisme préservant l'orientation et  $F$  un relèvement de  $f$ . Alors le nombre  $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x)}{n}$  existe, ne dépend pas de  $x$ , et ne diffère que d'un entier relatif entre chaque relèvement.*

DÉFINITION II-4. On définit alors le nombre de rotation de  $f$  par  $\rho(f) := \rho(F) \mod [1]$

Cette quantité est fondamentale car elle caractérise le nombre de rotations moyen d'un homéomorphisme. On peut alors se demander si, de manière analogue à la relation de similitude en l'algèbre linéaire, il existe un représentant simple pour un homéomorphisme du cercle donné, i.e : un homéomorphisme du cercle  $f$  est-il conjugué à la rotation d'angle  $R_{\rho(f)}$  ? La réponse est clairement non si le nombre de rotation est rationnel : il suffit de remarquer qu'un homéomorphisme ayant un point fixe est de nombre de rotation nul, or la rotation d'angle 0 est l'identité, et cette dernière est seule dans sa classe d'équivalence. Dans le cas irrationnel, le théorème suivant dû à Poincaré apporte une première réponse :

THÉORÈME II-4 (Poincaré). — *Soit  $f$  un homéomorphisme préservant l'orientation, si son nombre de rotation est un irrationnel alors  $f$  est semi-conjugué à la rotation d'angle  $\rho(f)$ , i.e : il existe une fonction du cercle  $h$  continue, surjective, ayant un relèvement croissant, telle que  $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$ .*

REMARQUE. La preuve de ce théorème utilise un résultat d'existence de mesure invariante pour une application continue du cercle, souvent appelé Théorème de Krylov-Bogolyubov. Or ce dernier n'est pas prouvé dans [GV19], et on propose donc une preuve inspirée d'un cours de Patrick Bernard en annexe.

Un critère d'inversibilité de la semi-conjugaison est ensuite fourni par le théorème de Denjoy :

THÉORÈME II-5 (Denjoy). — *En plus des hypothèses du théorème de Poincaré, si  $f$  est  $C^2$  alors  $f$  est conjuguée à la rotation d'angle  $\rho(f)$ .*

On peut cependant se questionner sur la nécessité de l'hypothèse  $C^2$  qui semble inattendue, et l'objet de la partie suivante sera de montrer que cette condition est optimale en un certain sens.

## II.2 Contres-exemples au théorème de Denjoy

Cette partie est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy, qui sont tirés du cours au Collège de France de Jean-Christophe Yoccoz de l'année 2013-2014, ainsi que du chapitre X de la thèse de Michel Herman [Her79] et du séminaire Bourbaki [Ros74] par Harold Rosenberg.

On se propose de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME II-6 (Denjoy). — *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un  $C^{2-\epsilon}$ -difféomorphisme  $f$  du cercle tel que  $\rho(f) = \alpha$  et  $f$  n'est pas conjugué à la rotation  $R_\alpha$ .*

REMARQUE. Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e  $f$  est  $C^1$ , de dérivée  $1 - \epsilon$ -höldérienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas  $C^2$  : on sait déjà par le Théorème de Poincaré qu'un tel  $f$  est semi-conjugué à  $R_\alpha$  par une fonction continue croissante  $h$  du cercle. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si  $h$  n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle  $I$  non trivial du cercle. Les itérés  $f^n(I)$  sont alors disjoints (on dit que  $I$  est un intervalle errant pour la dynamique de  $f$ ), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.

L'idée ici est donc de construire une fonction  $f$  qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés de cet intervalle est sommable.

### II.2.1 Outils

On se servira de l'invariant de conjugaison suivant :

DÉFINITION II-5. Un homéomorphisme du cercle  $f$  est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par  $f$  est vide ou égal au cercle tout entier.

PROPOSITION II-7. —

1. Si  $f$  est conjugué à  $g$  minimal, alors  $f$  est minimal.
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , alors  $R_\alpha$  est minimal

PREUVE. (1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjugaison.

(2) s'obtient en remarquant que si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , alors  $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , et donc  $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  est dense dans le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

PROPOSITION II-8. — *Soient  $D_1, D_2$  deux ensembles denses dans  $[0, 1]$ , et  $f : D_1 \rightarrow D_2$  une surjection croissante (resp. strictement croissante), alors  $f$  admet un unique prolongement continu, croissant (resp. strictement croissant), de  $[0, 1]$  dans lui-même.*

PREUVE. L'unicité du prolongement est immédiate par densité de  $D_1$ , car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si  $x \in [0, 1] \setminus D_1$ , il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D_1$  qui tend vers  $x$ , que l'on peut supposer monotone. La suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de  $f(x)$ . Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de  $f$ , et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or

l'image de  $f$  est dense.

□

### II.2.2 Contre-exemple continu

On note  $(l_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(a) \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$$

On peut par exemple choisir  $l_n = \frac{c}{n^2 + 1}$ , où  $c := \frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + 1}}$ .

On note alors  $\alpha_n := \alpha n \pmod{1}$  et on pose  $I_n := [b_n, c_n]$  où  $\begin{cases} b_n := \sum_{\{m, \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \sum_{\{m, \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

LEMME II-9. — *L'ensemble  $K := [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$  est un fermé non trivial.*

PREUVE. Cet ensemble est clairement distinct de  $[0, 1]$ , et il est de plus non vide car sinon, par compacité de  $[0, 1]$ , on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , ce qui est absurde.

□

REMARQUE.  $K$  est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction  $h$  définie par morceaux sur les  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $h : I_n \mapsto \alpha_n$ .

LEMME II-10. — *Les  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont ordonnés identiquement aux  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . De plus  $h$  admet un prolongement continu sur  $[0, 1]$  qui vérifie  $\forall n \in \mathbb{Z}, h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$*

PREUVE.

Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$ , alors :  $b_{n_2} - c_{n_1} = \sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k > 0$ , ce qui prouve le premier

point. On en déduit immédiatement que  $h$  est croissante, et alors par la Proposition II-8, admet un prolongement continu croissant de  $[0, 1]$  dans lui-même.

Par définition, on a l'inclusion  $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$ . Si par l'absurde il existe  $x$  tel que  $h(x) = \alpha_n$  et  $x \notin I_n$ , alors  $d(x, I_n) > 0$ . On suppose sans perte de généralité que  $x < b_n$ , alors par densité de  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$  il existe

$y \in I_{n'}$  tel que  $x \leq y < b_n$ , et la croissance de  $h$  donne  $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_n$ , i.e  $\alpha_{n'} = \alpha_n$ , ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue.

□

On prolonge maintenant  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par la relation, pour  $x \in [0, 1]$  et  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $h(x+p) = h(x) + p$ , et on note  $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$ . Alors  $U := \bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$  est un ouvert dense de  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{R} \setminus U$  est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ , on choisit un homéomorphisme croissant  $g_n$  de  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ , par exemple la transformation

affine :  $g_n(x) := \frac{l_n + 1}{l_n}x + b_{n+1} - b_n \frac{l_{n+1}}{l_n}$ , qui vérifie bien  $g_n(b_n) = b_{n+1}$  et  $g_n(c_n) = c_{n+1}$ . Cela définit alors une application  $g$  de  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$  dans lui-même, strictement croissante, que l'on prolonge sur  $\mathbb{R}$  entier de la même manière que  $h$ . Par la Proposition II-8,  $g$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. On a alors par construction  $h \circ g = R_\alpha \circ h$  sur  $\bigcup_{n,p \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$ , mais cet ensemble est dense dans  $\mathbb{R}$  et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout  $\mathbb{R}$ . Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du cercle, et on a la propriété suivante :

**THÉORÈME II-11.** — *L'homéomorphisme du cercle  $g$  construit précédemment vérifie  $\rho(g) = \alpha$ , mais  $g$  n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ .*

**PREUVE.**  $\rho(g) = \alpha$  est immédiat car la semi-conjugaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite,  $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$  est invariant par  $g$  par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme II-9, donc  $g$  n'est pas minimal, et alors la Proposition II-7 permet de conclure que  $g$  n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ . □

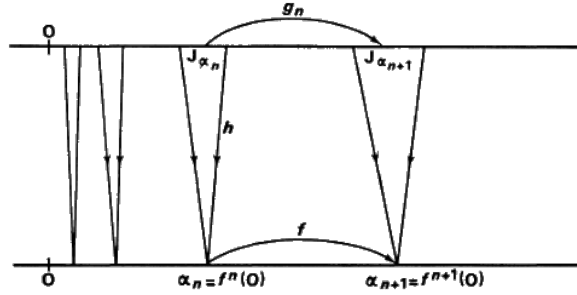


FIGURE 1 – [Her79] Schéma de la construction où  $f = R_\alpha$

### II.2.3 Contre-exemple dérivable

On considère toujours un homéomorphisme croissant  $g_n$  de  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ , prolongé en  $g_{n,p} = g_n + p$  sur  $I_{n,p}$ . On va de plus imposer que  $g_n$  soit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant :

$$(*) \begin{cases} g'_n(x) = 1 & \text{si } x \in \partial I_n \\ \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \sup_{x \in I_n} |g'_n(x) - 1| = 0 \end{cases}$$

On considèrera enfin les fonctions  $g'_n$  prolongées continuellement sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ , en les prenant constantes égales à 1 sur le complémentaire de  $I_n$

**LEMME II-12.** — *Les fonctions  $g_n : x \mapsto b_{n+1} + \int_{b_n}^x 1 + \frac{6}{l_n^2} (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)(t - b_n)(c_n - t) dt$  vérifient la condition (\*).*

**PREUVE.**  $g_n$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme car sa dérivée est strictement positive. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{c_n} 1 + \frac{6}{l_n^2} (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)(t - b_n)(c_n - t) dt &= l_n + \frac{6}{l_n^2} (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \int_{b_n}^{c_n} (t - b_n)(c_n - t) dt \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \left[ \frac{u^2}{2} l_n - \frac{u^3}{3} \right]_0^{l_n} \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2} (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \frac{l_n^3}{6} = l_{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $g_n$  envoie bien  $I_n$  sur  $I_{n+1}$ . La première condition de  $(*)$  est immédiate, la seconde découle du fait que pour  $x \in I_n$  :  $|g'_n(x) - 1| \leq 6(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \pm\infty$  par hypothèse.  $\square$

LEMME II-13. — *La fonction  $\eta$  qui coïncide avec  $g'_n$  sur  $I_n$  et qui vaut 1 ailleurs est continue et vérifie  $\eta = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g'_n - 1)$*

PREUVE. En différenciant les cas  $x \in I_n$ , et  $x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ , l'égalité ponctuelle est immédiate. On va de plus montrer que la convergence est uniforme, ce qui donnera la continuité de  $\eta$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , et  $x \in [0, 1]$ , on a :  $\sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) = \begin{cases} g'_n(x) - 1 & \text{si il existe } n \text{ tel que } x \in I_n \text{ et } |n| \geq N \\ 0 & \end{cases}$

Dans tous les cas,  $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{|k| \geq N} (g'_k(x) - 1) \right| \leq \sup_{|n| \geq N} |g'_n(x) - 1|$ . Or par hypothèse sur les dérivées, ce majorant tend vers 0 et donc la convergence est uniforme.  $\square$

La fonction  $g$  admet comme dans la partie précédente un prolongement en homéomorphisme de  $[0, 1]$  mais on a cette fois le résultat plus fort suivant :

THÉORÈME II-14. —  *$g$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie  $\rho(g) = \alpha$  mais n'est pas conjugué à  $R_\alpha$ .*

PREUVE. Le seul point qui ne découle pas du Théorème II-11 est que  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Pour montrer cela, on commence par remarquer que  $g$  est d'une part continue, et que d'autre part  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $U := \bigcup_{n, p \in \mathbb{Z}} I_{n, p}$  qui est de mesure pleine dans  $\mathbb{R}$ .

Alors, si  $A$  est un borélien de mesure de Lebesgue nulle, on a  $\lambda(g(A)) \leq \lambda(g(A \cap (\mathbb{R} \setminus U))) + \lambda(g(A \cap U))$ . Or le premier terme est nul car  $\mathbb{R} \setminus U$  est stable par  $g$  et de mesure nulle, et le second terme est nul par théorème de changement de variable,  $g$  étant un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $U$ , et  $A$  de mesure nulle.

On en déduit que la mesure de Stieltjes associée à  $g$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi  $g$  admet une dérivée de Radon-Nikodym  $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , telle que  $g(x) = g(0) + \int_0^x \mu(t) dt$ . Mais alors  $\mu$  est presque partout égale à  $g'_n$  sur les  $(I_{n, p})_{p \in \mathbb{Z}}$  d'après la théorie des points de Lebesgue, i.e presque partout égale à  $\eta$  car  $U$  est de mesure pleine, et on a finalement :  $g(x) = g(0) + \int_0^x \eta(t) dt$ .

On en déduit que  $g$  est un homéomorphisme  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  à dérivée non nulle, et donc un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.  $\square$

## II.2.4 Régularité hölderienne

Soit  $w : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  un module de continuité, on considère l'ensemble des fonctions continue pour ce module,  $\mathcal{C}^w(\mathbb{T}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \mid \sup_{0 < |x-y| \leq 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}$

En considérant la fonction  $g$  construite dans la partie précédente, on a le lemme :

LEMME II-15. —  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{1}{w(l_n)} < +\infty \Rightarrow g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$

PREUVE. On suppose sans perte de généralité que  $w(x)/x$  est décroissante. En reprenant le  $g'_n$  de la construction précédente, on constate que :

$$|g''_n(t)| = \frac{6}{l_n^2} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) |(c_n - t + b_n - t)| \leq \frac{3}{l_n} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right)$$

L'inégalité des accroissements finis donne donc :

$$\sup_{0 < x-y \leq 1} \left| \frac{g'_n(x) - g'_n(y)}{w(x-y)} \right| \leq \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{3}{w(l_n)} < +\infty, \text{ et on en déduit que } g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T}) \text{ car } g' - 1 \text{ est}$$

limite uniforme de  $\sum_{k=-n}^n (g'_k - 1)$ , et les fonctions dans la somme ayant des supports disjoints 2 à 2, on a :

$$\left| \sum_{k=-n}^n (g'_k - 1) \right|_{\mathcal{C}^w} \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |g'_n - 1|_{\mathcal{C}^w} \leq \frac{6}{l_n} \left( \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) < +\infty$$

□

La suite  $l_n := \frac{c}{(|n| + k)(\log(|n| + k))^{1+\epsilon}}$  vérifie le critère du Lemme II-15 pour le module  $w(x) = O(x^{1-\epsilon'})$ , pour tout  $\epsilon' > \epsilon$ , ce qui permet de conclure la preuve du Théorème II-6

### III Calcul paradifférentiel

Cette partie a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation de Bony [Bon81], avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley, et comme but de démontrer un théorème dû à Arnold, que l'on énonce dans un second temps. On s'appuiera sur [Mé08], [GV19], et [AG91] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

#### III.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons dans cette section présenter la décomposition de Littlewood-Paley. C'est une décomposition de fonction dans laquelle chaque terme a un spectre borné. Nous allons également présenter des propriétés sur cette décomposition.

DÉFINITION III-1 (Transformée de Fourier). On note  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\xi \cdot x} f(x) dx$ , et on pourra utiliser la notation  $\hat{f}$  pour désigner  $\mathcal{F}f$ . On manipulera de plus le prolongement usuel de  $\mathcal{F}$  à l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

On s'intéresse dans un premier temps à l'existence et, plus précisément, à la construction de fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec un support au voisinage de 0 mais également constantes au voisinage de 0.

Considérons le cas  $d = 1$  et notons  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que  $g$  appartient à  $C^\infty(\mathbb{R})$  puisqu'on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], g^{(n)}(x) = x Q_n(|x|) \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) \quad (3.1)$$

avec  $Q_n$  une fraction rationnelle dont le pôle se situe en 1, ce qui montre la continuité des  $(g^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  par croissances comparées. On étend alors cette construction à  $\mathbb{R}^d$  en notant  $\psi(x) = g(|x|)$ , qui est une

fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  $\text{supp}(\psi) \subset B(0, 1)$  et est égale à 1 sur  $B(0, \frac{1}{2})$ .

En posant  $\chi(x) = \psi(x) - \psi(\frac{x}{2})$ , on a ainsi  $\text{supp}(\chi(2^{-k}\cdot)) \subset B(0, 2^{k+1}) \setminus B(0, 2^k)$ , et par télescopage on obtient l'égalité :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 1 = \psi(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k}\xi)$$

LEMME III-1. — *Pour tout  $u \in \mathcal{S}$  on a :*

$$\hat{u} = \psi \hat{u} + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k}\cdot) \hat{u}$$

*et la série converge dans l'espace de Schwartz.*

PREUVE. Soit  $u \in \mathcal{S}$ , montrons que pour tout  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ ,  $\|x^\alpha \partial^\beta (u - \psi(2^{-k}x)u)\|_\infty \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ . On considère pour cela :

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta (u - \psi(2^{-k}x)u)\|_\infty &= \|x^\alpha \partial^\beta (u - \psi(2^{-k}x)u)\|_{\infty, [2^{k-1}; 2^{k+1}]} \\ &\leq \|x^\alpha \partial^\beta u\|_{\infty, [2^k; 2^{k+1}]} + \|x^\alpha \partial^\beta u(1 - \psi(2^{-k}x))\|_{\infty, [2^{k-1}; 2^k]} \end{aligned}$$

Comme  $u \in \mathcal{S}$ , on a  $\|x^\alpha \partial^\beta u\|_{\infty, [2^k; 2^{k+1}]}$  qui tend bien vers 0 lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ . En utilisant la formule de dérivation de Leibniz sachant que  $\partial^j \psi = O(x^j)$  (en utilisant (3.1)) on a que  $\|x^\alpha \partial^\beta u(1 - \psi(2^{-k}x))\|_{\infty, [2^{k-1}; 2^k]}$  tend bien vers 0 lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ . Pour conclure on utilise finalement que la transformée de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}$  dans lui-même.  $\square$

DÉFINITION III-2. On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1}u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k}\cdot) \cdot \hat{u} \quad \text{si } k \geq 0$$

PROPOSITION III-2. — *Soit  $u \in \mathcal{S}'$ , en posant :*

$$S_n u := \sum_{k=-1}^{n-1} \Delta_k u$$

*On a que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n u = u$$

*où la convergence est au sens de  $\mathcal{S}'$ .*

REMARQUE. Dans la suite, pour simplifier les calculs, il nous arrivera d'écrire  $S_{-k}$  pour  $k \geq 0$ , et dans ce cas on prend comme définition  $S_{-k} := S_0 = \Delta_{-1}$ .

PREUVE. Prenons  $u \in \mathcal{S}'$  et  $v \in \mathcal{S}$ .

$$\langle \mathcal{F}(S_n u), v \rangle = \langle \psi(2^{-n}\xi) \mathcal{F}(u), v \rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-n}\xi) v \rangle$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(2^{-n}\xi) v = v$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  par le Lemme III-1. On obtient donc :

$$\mathcal{F}(S_n u) \rightarrow \mathcal{F}(u) \quad \text{dans } \mathcal{S}'$$

Par continuité de  $\mathcal{F}^{-1}$ , on a finalement  $S_n u \rightarrow u$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$



DÉFINITION III-3 (Espaces de Sobolev). Pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ , on définit

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d), \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

et on admet que c'est un espace de Hilbert muni de la norme  $\|u\|_{H^s} := \left( \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$

DÉFINITION III-4 (Espaces de Zygmund). Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit

$$C_*^\alpha(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \sup_{k \geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} < +\infty \right\}$$

et on admet que c'est un espace de Banach muni de la norme  $\|u\|_{C_*^\alpha} := \sup_{k \geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty}$

LEMME III-3 (Inégalité de Bernstein). — Soit  $B$  une boule,  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et  $\lambda > 0$ . Si  $u \in L^p$  est tel que  $\text{supp}(\hat{u}) \subset \lambda B$ , alors

$$\max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{L^p} \quad (3.2)$$

PREUVE. On commence par justifier que  $u \in \mathcal{S}$ . En effet,  $u$  ayant un spectre borné, sa transformée de Fourier est dans l'espace de Schwartz, et l'opérateur transformée de Fourier étant un automorphisme de  $\mathcal{S}$  dans lui-même, on en déduit que  $u \in \mathcal{S}$ .

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  qui vaut 1 sur un voisinage de  $B$ , on a  $\hat{u}(\xi) = \varphi(\lambda^{-1}\xi)\hat{u}(\xi)$ , donc  $u = \lambda^d u * g$ , avec  $g := \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\lambda \cdot)$ , et donc  $\partial^\alpha u = \lambda^d u * \partial^\alpha g$ . L'inégalité de Young donne de plus que :  $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}$ , où  $1 \leq p, r \leq q \leq +\infty$ , et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$ . Or :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha (\mathcal{F}^{-1} \varphi(\lambda x))|^r dx = \lambda^{|\alpha|r} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha (\mathcal{F}^{-1}(\varphi))(\lambda x)|^r dx \\ &\leq \lambda^{|\alpha|r-d} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1} \varphi\|_{L^r}^r \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \lambda^{|\alpha|+d(1-\frac{1}{r})} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1} \varphi\|_{L^r} \|u\|_{L^p} = C_k \lambda^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u\|_{L^p}$$

□

LEMME III-4. — Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\sup_{n \geq -1} \|S_n u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p} \quad \sup_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p}$$

PREUVE. On écrit  $S_n u = 2^{nd}(\mathcal{F}^{-1}\psi)(2^n \cdot) \star u$ . Par inégalité de Young on obtient :

$$\|S_n u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \left\| 2^{nd}(\mathcal{F}^{-1}\psi)(2^n \cdot) \right\|_{L^1}$$

Or, par changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| 2^{nd}(\mathcal{F}^{-1}\psi)(2^n \cdot) \right\|_{L^1} &= 2^{nd} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F}^{-1}\psi)(2^n x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}^{-1}\psi(x)| dx = \|\mathcal{F}^{-1}\psi\| \end{aligned}$$

On procède de même pour  $\|\Delta_k u\|_{L^p}$ .

□

LEMME III-5 (Presque-orthogonalité). — Pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \quad (3.3)$$

PREUVE. On part de  $1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)$ . Seule deux de ces fonctions ont une intersection de support non vide. On utilise alors :  $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\xi)^2 \leq 1$$

La seconde inégalité de (3.3) s'en déduit en multipliant l'inégalité ci-dessus par  $\hat{u}$  et en utilisant l'identité de Plancherel. □

PROPOSITION III-6 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — Si  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , on a alors  $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 < +\infty$ . De plus, il existe  $C > 0$  tel que :

$$\frac{1}{C} \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \quad (3.4)$$

PREUVE. En notant  $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ , on a  $\|u\|_{H^s} = \|\langle D \rangle^s u\|_{L^2}$ , et le Lemme III-5 donne

$$\sum_{k \geq -1} \|\Delta_k \langle D \rangle^s u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq 2 \sum_{k \geq -1} \|\Delta_k \langle D \rangle^s u\|_{L^2}^2$$

La formule de Plancherel et la définition de  $\Delta_k$ , on obtient l'existence de  $C > 0$  tel que  $\forall k \geq -1$

$$\frac{1}{C} 2^{ps} \|\Delta_k u\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \langle D \rangle^s u\|_{L^2} \leq C 2^{ps} \|\Delta_k u\|_{L^2}$$

et donc il existe  $\tilde{C}$  tel que :

$$\frac{1}{\tilde{C}} \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq \tilde{C} \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2$$

ce qui donne l'équivalence des normes voulue. □

LEMME III-7 (Injection de Sobolev). — Soit  $s > \frac{d}{2}$ , si  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$  alors  $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ , en particulier  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)} \|u\|_{H^s}$$

PREUVE. Soit  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , d'après le résultat précédent on sait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_k u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , donc sa transformée de Fourier y est de même, et comme elle est à support compact, elle est dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . D'après la formule d'inversion, on a ainsi :

$$\Delta_k u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \widehat{\Delta_k u}(\xi) d\xi$$

Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_k u\|_{L^2} \left| B(0, C2^k) \right|^{\frac{1}{2}} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)} 2^{ks} \|\Delta_k u\|_{L^2} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)} \left( \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)} \|u\|_{H^s}$$

Ce qui consitue l'inégalité voulue. On en déduit immédiatement que  $\sup_{k \geq -1} 2^{k(s-\frac{d}{2})} \|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^s}$ , et donc  $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}$ . De plus, on en déduit que la série de terme général  $(\Delta_k u)_{k \in \mathbb{N}}$  est absolument convergente dans  $L^\infty$ , donc par complétude elle converge simplement vers un  $\tilde{u}$ . On a déjà vu que cette série converge dans  $\mathcal{S}'$  vers  $u$ , donc  $u = \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

PROPOSITION III-8. — Soit  $(u_k)_{k \geq -1}$  tel que  $\exists R > 0, \forall k \geq -1, \text{supp } \hat{u}_k \subset B(0, R2^k)$ .

- Soit  $\alpha > 0$ , si  $\sup 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty} < +\infty$ , alors  $u = \sum u_k \in C_*^\alpha(\mathbb{R}^d)$ , et

$$\|u\|_{C_*^\alpha} \leq C \sup_k 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty}$$

- Soit  $s > 0$ , si  $\sum 2^{2ks} \|u_k\|_{L^2}^2 < +\infty$ , alors  $u = \sum u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , et

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_k 2^{2ks} \|u_k\|_{L^2}^2$$

PREUVE. Par hypothèse sur le support des  $(u_k)_{k \geq -1}$ , pour tout  $q \geq -1$ , en notant  $N := \lfloor \log_2(R) \rfloor + 1$ , on a :

$$\Delta_q u = \sum_{k \geq q-N} \Delta_q u_k$$

On en déduit :

$$2^{q\alpha} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k \geq q-N} \|\Delta_q u_k\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k \geq q-N} \|u_k\|_{L^\infty} \leq \sum_{k \geq q-N} 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty} 2^{(q-k)\alpha} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{q-k}$$

où :

- $a_k = 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty}$  si  $k \geq -1$ ,  $a_k = 0$  sinon.
- $b_r = 2^{r\alpha}$  si  $r \leq N$ ,  $b_r = 0$  sinon.

Comme  $\alpha > 0$ ,  $(b_r)_{r \in \mathbb{Z}}$  est sommable, et l'inégalité de Young discrète donne :

$$\|2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty}\|_{\ell^\infty} \leq \|a_q\|_{\ell^\infty} \|b_r\|_{\ell^1}$$

i.e :

$$\|u\|_{C_*^\alpha} = \sup_k 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C \sup_k 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty}$$

On conclut alors par définition des espaces de Zygmund. La preuve dans le second cas est parfaitement analogue, en remplaçant  $\alpha$  par  $s$ , et l'espace  $L^\infty$  par  $L^2$ .  $\square$

PROPOSITION III-9. — Soit  $s > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > s$ . Il existe  $C$  tel que pour toute famille  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $H^n(\mathbb{R}^d)$ , si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , avec  $|\alpha| \leq n$  :

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)} \varepsilon_k$$

où  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , alors la somme  $u := \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , et  $\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_k \varepsilon_k^2$ .

PREUVE. On remarque que la série de terme général  $u_k$  est absolument convergente dans  $L^2$ , donc par complétude elle converge simplement, et  $u$  est bien définie. Ensuite :

$$2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^2} \leq \sum_{k \geq j} 2^{js} \|\Delta_j u_k\|_{L^2} + \sum_{k < j} 2^{js} \|\Delta_j u_k\|_{L^2}$$

Par hypothèse, et en utilisant le Lemme III-4, on a d'une part :

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C \|u_k\|_{L^2} \leq C 2^{-ks} \varepsilon_k$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernstein (3.2), on obtient pour tout  $j \geq 0$  :

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C 2^{-nj} \sum_{|\alpha|=n} \|\partial^\alpha \Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C 2^{-nj} \|u_k\|_{H^n} \leq C 2^{-(j-k)n} 2^{-ks} \varepsilon_k$$

Alors :

$$2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^2} \leq C \sum_{k \geq j} 2^{(j-k)s} \varepsilon_k + C \sum_{k < j} 2^{(j-k)(s-n)} \varepsilon_k = C(a \star \varepsilon)_j$$

où le dernier membre est une convolution discrète entre  $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec

$$a_k = 2^{ks} \text{ si } k \leq 0, \quad a_k = 2^{k(s-n)} \text{ sinon.}$$

Comme  $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , l'inégalité de Young discrète donne que  $(2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^2})_{j \in \mathbb{N}}$  est de carré sommable, ce qui donne le résultat voulu d'après la caractérisation de la Proposition III-6.

□

**COROLLAIRE III-10** (Multiplicateurs de Meyer). — *Soient  $r, s > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > s$ . Si  $(m_k)_{k \geq -1}$  est une suite de  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que pour tout multi-indice  $\alpha$  avec  $|\alpha| \leq n$ , on ait :*

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq M_\alpha 2^{k(|\alpha|-r)},$$

alors l'opérateur

$$f \mapsto \sum_{k \geq -1} m_k \Delta_k f$$

est continu de  $H^s(\mathbb{R}^d)$  dans  $H^{s+r}(\mathbb{R}^d)$ , et sa norme est bornée par  $C_s \sum_{|\beta| \leq n} M_\beta$ .

**PREUVE.** Pour tout  $|\alpha| \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (m_k \Delta_k f)\|_{L^2} &\leq C_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \|\partial^\beta m_k\|_{L^\infty} \|\partial^{\alpha-\beta} \Delta_k f\|_{L^2} \\ &\leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-r-s)} \left( \sum_{\beta \leq \alpha} M_\beta \right) 2^{ks} \|\Delta_k f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Alors, la Proposition III-9 permet d'aboutir au résultat voulu.

□

## III.2 Estimations douces et paralinéarisation

On va maintenant se servir de la décomposition de Littlewood-Paley pour étudier des produit dans les espaces fonctionnels précédemment utilisés. On remarque que l'on peut écrire, pour  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  :

$$\begin{aligned} uv &= \sum_{k,j} \Delta_k u \Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty} \sum_{j=-1}^p \Delta_k u \Delta_j v + \sum_{k=-1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \Delta_k u \Delta_j v \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k+1} v + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-1}^{j-1} \Delta_k u \Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k+1} v + \sum_{j=-1}^{+\infty} \Delta_j v S_j u \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k-2} v + \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k v S_{k-2} u + \sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_k u \Delta_j v \\ &= T_v u + T_u v + R(u, v) \end{aligned}$$

Ici,  $T_v u$  (resp.  $T_u v$ ) décrit la partie des interactions pour lesquelles la fréquence de  $v$  (resp.  $u$ ) est nettement plus faible que celle de  $u$  (resp.  $v$ ), tandis que  $R(u, v)$  représente la partie où les fréquences sont du même ordre. Le terme  $T_v u$  est appelé *paraproduit* de  $u$  par  $v$ .

PROPOSITION III-11 (Estimations douces pour les paraproducts et leurs restes). —

$$\bullet \forall s \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in H^s, \quad \|T_u v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} \quad (3.5)$$

$$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in C_*^\alpha, \quad \|T_u v\|_{C_*^\alpha} \leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{C^\alpha} \quad (3.6)$$

$$\bullet \forall r, s \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } r + s > 0, u \in C_*^r, v \in H^s, \quad \|R(u, v)\|_{H^{r+s}} \leq C_{r,s} \|u\|_{C_*^r} \|v\|_{H^s} \quad (3.7)$$

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \alpha + \beta > 0, u \in C_*^\alpha, v \in C_*^\beta, \quad \|R(u, v)\|_{C_*^{\alpha+\beta}} \leq C_{\alpha,\beta} \|u\|_{C_*^\alpha} \|v\|_{C_*^\beta} \quad (3.8)$$

PREUVE. On remarque que  $T_u v$  a une décomposition qui vérifie les hypothèses de la Proposition III-8. En effet,  $T_u v = \sum_{p=-1}^{+\infty} S_{p-2} u \Delta_p v$ , et le spectre de  $S_{p-2} u \Delta_p v$  est inclus dans  $B(0, 2^{p-2}) + B(0, 2^{p+1}) \subset B(0, 4 \times 2^p)$ . Alors, le Lemme III-4 et la Proposition III-6 donnent :

$$\begin{aligned} \sum_k 2^{2ks} \|\Delta_k v S_{k-2} u\|_{L^2}^2 &\leq \sum_k 2^{2ks} \|\Delta_k v\|_{L^2}^2 \|S_{k-2} u\|_{L^\infty}^2 \leq C \|u\|_{L^\infty}^2 \sum_k 2^{2ks} \|\Delta_k v\|_{L^2}^2 \\ &\leq C' \|u\|_{L^\infty}^2 \|v\|_{H^s}^2 \end{aligned}$$

On conclut alors que  $\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s}$  à l'aide de la Proposition III-8. Les inégalités suivantes se montrent de manière parfaitement analogue.  $\square$

THÉORÈME III-12 (Paralinéarisation). — Soit  $F$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 0$ . Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , avec  $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$ , alors

$$F(u) - T_{F'(u)} u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \quad (3.9)$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

LEMME III-13. — Soit  $F$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 0$ . Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , avec  $s \geq 0$ , alors  $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$  et

$$\|F(u)\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \quad (3.10)$$

PREUVE. Si  $s = 0$ , le résultat se déduit de l'existence d'une fonction  $G$  continue telle que  $F(u) = uG(u)$ . Alors, comme  $u \in L^2$  et  $G(u) \in L^\infty$  car  $u$  est bornée, on obtient bien  $F \in L^2$ .

Quand  $s > 0$ , on remarque qu'il existe  $C_\alpha$  indépendant de  $u$  et  $k$  telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \quad (3.11)$$

avec  $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$ . En effet, l'inégalité de Bernstein (3.2) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (3.4) donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \quad (3.12)$$

toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de presque-orthogonalité (3.3) donnant que  $(\Delta_k u)_{k \in \mathbb{N}}$  est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de  $L^2$  fournit alors la convergence

simple de cette série, i.e.  $S_n u \rightarrow u$  dans  $L^2$ . De plus, d'après le Lemme III-4,  $\|S_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$ . On en déduit que  $F(S_n u) \rightarrow F(u)$  dans  $L^2$  car :

$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \leq C \sup_{t \in [0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u)\|_{L^\infty} \|S_n u - u\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1} u) - F(S_k u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \Delta_k u \quad (3.13)$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_k u + t\Delta_k u) dt$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_k u + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaîne (plus précisément la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en  $F'$  avec le Lemme III-4 et on utilise (3.12) pour les termes en  $u$ . En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \quad (3.14)$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (3.11), on obtient :

$$\|\partial^\alpha (m_k \Delta_k u)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,F} 2^{(|\alpha|-s)k} \|u\|_{L^\infty} \varepsilon_k$$

On peut donc conclure par la Proposition III-9. □

PREUVE DU THÉORÈME III-12. On commence par remarquer que quitte à soustraire un terme linéaire  $au$  à  $F(u)$ , on peut supposer que  $F'(0) = 0$ . Cela ne change rien à la preuve car :

$$F(u) + au - T_{F'(u)+a} u = F(u) + au - T_{F'(u)} u - T_a u = F(u) + au - T_{F'(u)} u - au = F(u) - T_{F'(u)} u$$

Ensuite, comme  $\rho > 0$ , le Lemme III-7 donne  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Par définition, on a

$$T_{F'(u)} u = S_{-3} F'(u) \cdot u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-2} F'(u) \cdot \Delta_k u$$

En utilisant (3.13), comme  $F(S_0 u)$  et  $S_{-3} F'(u) \cdot u_0$  sont dans  $H^\infty$ , il suffit de prouver que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m_k - S_{k-2} g) \Delta_k u \in H^{s+\rho}$$

Cela découle de la Proposition III-9, que l'on peut appliquer d'une part grâce à (3.11), et d'autre part car on a l'inégalité :

$$\|\partial^\alpha (m_k - S_{k-2} F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Pour obtenir cette dernière, on va montrer séparément :

$$\|\partial^\alpha (m_k - F'(S_{k-2} u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \quad (3.15)$$

$$\|\partial^\alpha (F'(S_k u) - S_k F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \quad (3.16)$$

On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral, qui donne

$$F'(S_k u + t\Delta_k u) - F'(S_{k-2} u) = \mu_k w_k$$

avec

$$w_k = (\Delta_{k-2}u + \Delta_{k-1}u + t\Delta_k u) \quad \text{et} \quad \mu_k = \int_0^1 F''(S_{k-2}u + \tau w_k) d\tau.$$

De manière analogue à (3.14), on a

$$\|\partial^\alpha \mu_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Tandis que  $w_k$  vérifie

$$\|\partial^\alpha w_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} \|\partial^\alpha w_k\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \leq \tilde{C}_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Bernstein (3.2), puis (3.11). On en déduit donc que

$$\|\partial^\alpha (\mu_k w_k)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Or

$$m_k - F'(S_{k-2}u) = \int_0^1 \mu_k w_k dt$$

Ce qui donne (3.15). Pour montrer la seconde inégalité, on commence par décomposer en deux membres le terme à majorer :

$$[F'(S_k u) - S_k F'(S_k u)] + [S_k F'(S_k u) - S_k F'(u)] = (I) + (II)$$

L'inégalité de Bernstein (3.2) donne alors

$$\|\partial^\alpha S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^\infty} \lesssim_\alpha 2^{(|\alpha|+\frac{d}{2})k} \|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2}.$$

De plus :

$$\|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2} \lesssim \|F'(u) - F'(S_k u)\|_{L^2} \lesssim \|u - S_k u\|_{L^2} \lesssim 2^{-ks} \|u\|_{H^s}$$

grâce au Lemme III-4, puis aux accroissements finis, et finalement avec une majoration du reste géométrique dans la caractérisation des espaces de Sobolev (3.4). Ainsi (II) vérifie l'inégalité (3.16).

Il reste maintenant à étudier (I). Pour cela, on remarque que  $S_k u \in H^\infty$  car sa transformée de Fourier est à support compact. Alors, d'une part  $S_k u \in L^\infty$  par le Lemme III-4 car  $u \in L^\infty$ , et sa norme est bornée indépendamment de  $k$ . D'autre part, en écrivant la norme usuelle de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Bernstein, on a que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|S_k u\|_{H^{s+N}} &\leq C \|S_k u\|_{H^s} + C \sum_{|\alpha|=s+N} \|\partial^\alpha S_k u\|_{L^2} \\ &\leq \|S_k u\|_{H^s} + C_{\alpha,N} 2^{kN} \|S_k u\|_{H^s} \\ &\leq C_{\alpha,N} 2^{kN} \|u\|_{H^s}. \end{aligned}$$

où l'on a observé que  $\|S_k u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^s}$  à partir de l'écriture utilisant les multiplicateurs de Fourier, et avec la norme de Sobolev adaptée. Alors, le Lemme III-13 donne que  $F'(S_k u) \in H^{s+N}$ , et

$$\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \leq C_{\alpha,N} 2^{kN} \|u\|_{H^s} \|u\|_{L^\infty} \quad (3.17)$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein puis le Lemme III-7, on remarque que pour  $\sigma > |\alpha| + \frac{d}{2}$  et  $a \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|\partial^\alpha \Delta_j a\|_{L^\infty} \leq C 2^{j(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)} \|a\|_{H^\sigma}$$

Et alors, comme  $a - S_k a = \sum_{j \geq k} \Delta_j a$ , par majoration d'un reste géométrique, on a :

$$\|\partial^\alpha (a - S_k a)\|_{L^\infty} \leq C 2^{k(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)} \|a\|_{H^\sigma} \quad (3.18)$$

En appliquant (3.18) avec  $a = F'(S_k u)$  et  $\sigma = s + N$  où  $N$  est suffisamment grand pour que  $s + N > \frac{d}{2} + |\alpha|$ , on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (F'(S_k u) - S_k F'(S_k u))\|_{L^\infty} &\leq C 2^{k(\frac{d}{2}-s-N+|\alpha|)} \|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \\ &\leq C_{\alpha,N} 2^{k(\frac{d}{2}-s+|\alpha|)} \|u\|_{H^s} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.17), ce qui donne finalement la majoration attendue pour (I), conclut la preuve de l'inégalité (3.16) et achève donc la preuve du Théorème III-12.  $\square$

THÉORÈME III-14 (Paralinéarisation des produits). — Soit  $s, r > 0$ , et  $a, b \in C_*^r(\mathbb{T}^d)$ . Alors

$$R_{CM}(a, b) := T_a \circ T_b - T_{ab}$$

est un opérateur continu de  $H^s(\mathbb{T}^d)$  dans  $H^{s+r}(\mathbb{T}^d)$ , et on a :

$$\|R_{CM}(a, b)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^{s+r})} \leq C_{s,r} \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r}$$

PREUVE. Soit  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , on note  $v := T_b u$  et  $v_k := S_{k-2} b \cdot \Delta_k u$ . On observe que :

$$\begin{aligned} T_a T_b u - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j &= \sum_j S_{j-2} a \cdot \Delta_j v - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j \\ &= \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot (\Delta_j v - v_j) \\ &= \sum_k \Delta_k a \sum_{k+3 \leq j \leq k+5} (\Delta_j v - v_j) \end{aligned}$$

Car  $\sum_q v_q = \sum_q \Delta_q v$ , et que  $v_q$  a un spectre inclus dans la boule de rayon  $2^q$ . En développant la définition de  $v_j$ , et en utilisant le Corollaire III-10, on a :

$$\left\| T_a T_b u - \sum_j \sum_{k_1 \leq j-3} \sum_{k_2 \leq j-3} \Delta_{k_1} a \cdot \Delta_{k_2} b \cdot \Delta_j u \right\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r} \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r} \|u\|_{H^s} \quad (3.19)$$

De plus, en notant

$$c_j := \sum_{k_1 \leq j-3} \sum_{k_2 \leq j-3} \Delta_{k_1} a \cdot \Delta_{k_2} b,$$

on a :

$$\begin{aligned} \|ab - c_j\|_{L^\infty} &\leq \sum_{k_1 \geq j-3 \text{ ou } k_2 \geq j-3} \|\Delta_{k_1} a\|_{L^\infty} \cdot \|\Delta_{k_2} b\|_{L^\infty} \\ &\leq C_r \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r} \sum_{k_1+k_2 \geq j-3} 2^{-(k_1+k_2)r} \\ &\leq C_r \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r} 2^{-jr} \end{aligned}$$

Or :

$$T_{ab} u - \sum_j c_j \cdot \Delta_j u = \sum_j (S_{j-2}(ab) - c_j) \cdot \Delta_j u,$$

et en utilisant les deux inégalités précédentes avec le Corollaire III-10, il vient :

$$\left\| T_{ab} u - \sum_j c_j \cdot \Delta_j u \right\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r} \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r} \|u\|_{H^s} \quad (3.20)$$

En combinant (3.19) et (3.20), on conclut la démonstration du théorème.  $\square$



### III.3 Théorème d'Arnold

On s'intéresse dans cette section au cas suivant :  $g$  difféomorphisme du cercle régulier (au moins  $C^2$ ), préservant les angles et ayant un angle de rotation  $\alpha$  irrationnel. On a automatiquement par le Théorème II-5 qu'il est conjugué à la rotation d'angle  $\alpha$ . Le théorème d'Arnold s'intéresse à la régularité de la conjugaison lorsque  $g$  est "très proche" de la rotation  $R_\alpha$ .

#### III.3.1 Description du problème

On choisit de réécrire  $g$  comme une perturbation de la rotation soit :  $g = f + R_\alpha$  avec  $f$  "assez petit" (nous définirons ce que cela veut dire dans la suite). On cherche alors naturellement la conjugaison que l'on note  $\eta$ , l'équation à résoudre est alors :

$$\eta(x + \alpha) = \eta(x) + \alpha + f \cdot \eta(x) \quad (3.21)$$

On écrit la conjugaison sous la forme d'une perturbation de l'identité soit  $\eta = id + u$ .

Pour plus de généralité on introduit ici un paramètre réel  $\lambda$  et en utilisant les notations de  $\eta$  avec  $u$ , l'équation (3.21) devient :

$$\Delta_\alpha u = f \cdot (id + u) - \lambda \text{ avec } \Delta_\alpha u(x) = u(x + \alpha) - u(x) \quad (3.22)$$

d'inconnue  $u$ .

Pour illustrer le problème de régularité que va poser ce type d'équation, intéressons-nous d'abord à l'équation (3.22) linéarisée :

$$\mu + \Delta_\alpha v = h \quad (3.23)$$

avec  $\mu = \text{Avg } h$ .

En utilisant les séries de Fourier, on obtient la solution suivante :

$$\hat{v}(k) = \frac{\hat{h}(k)}{\exp(ik\alpha) - 1}$$

Cependant, le facteur  $\exp(ik\alpha) - 1$  peut gêner la convergence de la série de Fourier puisque celui-ci peut arbitrairement s'approcher de zéro en fonction des  $k$  du fait que  $\alpha$  soit irrationnel. C'est ce qui est communément appelé phénomène des petits diviseurs.

On doit alors ici préciser la nature de notre irrationnel  $\alpha$ . On supposera en effet dans toute la suite de notre développement que  $\alpha$  vérifie la condition diophantienne suivante :

$\exists \gamma > 0, \sigma > 1$  telle que  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^2$  :

$$\left| \frac{q\alpha}{\pi} - p \right| \geq \frac{1}{\gamma q^\sigma} \quad (3.24)$$

Ce qui induit en notant la solution  $v$  de (3.22) que si  $h \in H^{s+\sigma}$  alors  $\Delta_\alpha^{-1}h \in H^s$ . Plus précisément, que l'opération  $\Delta_\alpha^{-1}$  induit une perte de régularité de l'ordre de  $\sigma$  et que :

$$\|\Delta_\alpha^{-1}h\|_{H^s} \leq C_\gamma \|h\|_{H^{s+\sigma}} \quad (3.25)$$

Ce problème de perte de régularité nous empêche d'utiliser les théorèmes de point fixe ou les méthodes itératives traditionnelles pour résoudre cette équation. Face à cela, deux approches s'offrent à nous. La première est l'utilisation d'un schéma de Nash-Moser dont le fonctionnement est détaillé en annexe. La deuxième, que l'on va développer dans la suite consiste à utiliser les théorèmes de paralinéarisation pour régulariser cette équation (3.22).

### III.3.2 Résolution par la para-linéarisation

On veut montrer le résultat suivant :

**THÉORÈME III-15 (Arnold).** — Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , vérifiant la condition diophantienne (3.25) avec  $\gamma > 0, \sigma > 1$ . Soient  $\varepsilon > 0, s \geq \sigma + 1.5 + \varepsilon$  et  $N_s := \lceil s \rceil$ . Si  $g = R_\alpha + f \in H^{s+\sigma+\varepsilon} \cap C^{N_s+1}$  vérifie  $\rho(g) = \alpha$ , alors il existe  $\tau > 0$  tel que si  $\|f\|_{H^{s+\sigma+\varepsilon}} + \|f\|_{C^{N_s+1}} \leq \tau$  alors il existe  $u \in H^s$  tel que  $\eta = Id + u$  conjugue  $g$  à  $R_\alpha$ .

On rappelle un résultat qui sera utile par la suite :

**LEMME III-16 (Série de Neumann).** — Soit  $f$  application linéaire de  $U$  dans  $V$  des espaces de Banach. Si la norme subordonnée de  $f$  est strictement plus petite que 1, alors l'opérateur  $Id + f$  est inversible.

On choisit les notations suivantes :

$$\mathbf{F}(f, U) := \Delta_\alpha u - f \cdot (id + u) + \lambda$$

Alors, en notant  $U := (u, \lambda)$ , l'équation (3.22) à résoudre pour prouver le théorème d'Arnold se réécrit en :

$$\mathbf{F}(f, U) = 0 \quad (3.26)$$

**PREUVE DU THÉORÈME III-15.** On suppose que  $f \in H^{s+\sigma+\varepsilon} \cap C^{N_s+1}$  avec  $s > \sigma + 1.5 + \varepsilon$ . On cherche a priori  $u$  dans  $H^s$ , et par injection de Sobolev il sera également dans  $C^r$  où  $r = s - 0.5 > 1$ . En utilisant le Théorème III-12 de paralinéarisation, on obtient :

$$\mathbf{F}(f, U) = \Delta_\alpha u - f - T_{f'(id+u)}u + R_{pl}(f(x + \cdot), u) + \lambda \quad (3.27)$$

Or on a l'égalité suivante :

$$f'(id + u) = \frac{\Delta_\alpha u}{1 + u'} - \frac{\mathbf{F}(f, U)'}{1 + u'}$$

En réinjectant dans (3.27) on obtient :

$$\mathbf{F}(f, U) = \Delta_\alpha u - f - T_{\frac{\Delta_\alpha u}{1+u'}}u - T_{\frac{\mathbf{F}(f, U)'}{1+u'}}u + R_{pl}(f(x + \cdot), u) + \lambda \quad (3.28)$$

De plus en utilisant l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha u - T_{\frac{\Delta_\alpha u}{1+u'}}u &= u \cdot \tau_\alpha - T_{\frac{1+u'}{1+u'}}u - T_{\frac{\Delta_\alpha u}{1+u'}}u \\ &= u \cdot \tau_\alpha - T_{\frac{1+u' \cdot \tau_\alpha}{1+u'}}u \\ &= u \cdot \tau_\alpha - T_{1+u' \cdot \tau_\alpha} T_{\frac{1}{1+u'}}u + R_1(1 + u' \cdot \tau_\alpha, \frac{1}{1+u'}) \end{aligned}$$

en utilisant le Théorème III-14

$$\begin{aligned} &= T_{1+u' \cdot \tau_\alpha} (T_{\frac{1}{1+u' \cdot \tau_\alpha}} u \cdot \tau_\alpha - T_{\frac{1}{1+u'}}u) + R_1(1 + u' \cdot \tau_\alpha, \frac{1}{1+u'}) \\ &\quad + R'_1(1 + u' \cdot \tau_\alpha, \frac{1}{1+u' \cdot \tau_\alpha}) \end{aligned}$$

toujours avec le Théorème III-14

$$= T_{1+u' \cdot \tau_\alpha} \Delta_\alpha T_{\frac{1}{1+u'}}u + \tilde{R}$$

En réinjectant cela, on obtient finalement :

$$\mathbf{F}(f, U) = T_{1+u' \cdot \tau_\alpha} \Delta_\alpha T_{\frac{1}{1+u'}}u + \tilde{R} - f - T_{\frac{\mathbf{F}(f, U)'}{1+u'}}u + R_{pl}(f(x + \cdot), u) + \lambda \quad (3.29)$$

LEMME III-17. — Il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|u'\|_{L^\infty} \leq \delta$  alors les opérateurs  $T_{\frac{1}{1+u'}}$  et  $T_{1+u' \cdot \tau_\alpha}$  sont inversibles de  $H^s$  dans lui-même (ou de  $H^{s+\sigma+\epsilon}$ ).

PREUVE. Par le Théorème III-14, on a que pour  $a := \frac{1}{1+u'}$  :

$$T_a \cdot T_{a^{-1}} - T_1 = R(a, a^{-1})$$

avec  $\|R(a, a^{-1})\|_{\mathcal{L}(H^s, H^{s+r})} \leq_{s,r} \|a\|_{C_*^r} \|a^{-1}\|_{C_*^r}$ . On a que  $R$  est continu et donc avec  $R(1, 1) = 0$ . On a que  $\lim_{u' \rightarrow 0} R(a, a^{-1}) = 0$ .

Donc on peut choisir  $\|u'\|_{L^\infty} \leq \delta$  pour que  $\|R(a, a^{-1})\|_{\mathcal{L}(H^s, H^{s+r})} < 1$  et utiliser une série de Neumann pour avoir l'inversibilité de  $T_a$ . La preuve est identique pour  $T_{1+u' \cdot \tau_\alpha}$  et pour  $H^{s+\sigma+\epsilon}$ .  $\square$

REMARQUE. Par injection de Sobolev et par le fait que  $u \in C_*^r$  où  $r = s - 0.5 > 1$  on peut choisir  $u \in H^s$  tel que  $\|u\|_{H^s}$  soit assez petit pour que la condition  $\|u'\|_{L^\infty} \leq \delta$  soit satisfaite. On cherchera dans la suite un  $u$  avec une telle norme.

On cherche à résoudre pour le moment une version modifiée de l'équation (3.26) :

$$\mathbf{F}(f, U) - T_{\frac{\mathbf{F}(f, U)'}{1+u'}} u = 0 \quad (3.30)$$

Équation qu'on peut réécrire avec le Lemme III-17 et l'expression (3.29) :

$$u = T_{1+u' \cdot \tau_\alpha}^{-1} \Delta_\alpha^{-1} T_{\frac{1}{1+u'}}^{-1} (\tilde{R} - f + R_{\text{pl}}(f(x + \cdot), u) + \lambda) \quad (3.31)$$

La valeur de  $\lambda$  est alors déterminée dans cette équation puisqu'elle est réglée pour pouvoir appliquer  $\Delta_\alpha^{-1}$  (voir condition (3.23)). Considérons le membre de gauche comme une fonction de  $u$  et montrons qu'elle envoie  $H^s$  dans lui-même. En effet d'une part avec  $\tilde{R} = R_1(1 + u' \cdot \tau_\alpha, \frac{1}{1+u'})u + R'_1(1 + u' \cdot \tau_\alpha, \frac{1}{1+u' \cdot \tau_\alpha})u$  avec les notations du Théorème III-14. On a que  $\tilde{R}(u) : H^s \rightarrow H^{s+r-1} \subset H^{s+\sigma+\epsilon}$ . De plus par le Théorème III-12 de paralinéarisation,  $R_{\text{pl}}(f(x + \cdot), u) : H^s \rightarrow H^{s+r} \subset H^{s+\sigma+\epsilon}$ .

Malgré la perte de régularité imposée par  $\Delta_\alpha^{-1}$ , le membre de gauche de (3.31) envoie donc  $H^s$  dans lui-même (de manière continue).

D'autre part, avec le Théorème III-12, on a le contrôle suivant sur les normes :

$$\|R_{\text{pl}}(f(x + \cdot), u)\|_{H^s} \leq C_s \|f\|_{C_*^{N_s+1}} (1 + \|u\|_{H^s})$$

De plus l'une des conséquences de la preuve du Lemme III-17 est que  $\tilde{R}(u)$  converge quadratiquement vers 0 lorsque  $u$  tend vers 0 dans  $H^s$ . En prenant donc  $\|u\|_{H^s} \leq \rho$  on a que la norme  $H^s$  du membre de gauche (3.30) est majorée par :

$$C(s, \sigma)(\|f\|_{H^{s+\sigma+\epsilon}} + \|f\|_{C_*^{N_s+1}} (1 + \rho) + \rho^2) \quad (3.32)$$

Puisqu'on peut prendre  $\|f\|_{H^{s+\sigma+\epsilon}}$  et  $\|f\|_{C_*^{N_s+1}}$  aussi petits qu'on veut, il existe un  $\rho$  tel que le membre de gauche (3.31) envoie  $B_\rho$  dans elle-même. En utilisant le point fixe de Schauder on a que l'équation (3.31) a une solution  $u$  dans  $H^s$  dans  $B_{\rho'}$  pour tout  $\rho' \leq \rho$ .

Enfin pour résoudre l'équation (3.30), on remarque par l'inégalité (3.5) de la Proposition III-11 :

$$\|T_{\frac{\mathbf{F}(f, U)'}{1+u'}} u\|_{H^s} \leq \|\mathbf{F}(f, U)\|_{C^1} \|u\|_{H^s} \quad (3.33)$$

En utilisant une nouvelle fois l'argument de la série de Neumann on a bien que  $u$  est également solution de :

$$\mathbf{F}(f, U) = 0 \quad (3.34)$$

$\square$

## IV Annexe sur le théorème de Nash-Moser

### IV.1 Cadre théorique

**Espace :** On considère ici deux suites d'espaces de Banach  $E_\sigma, \|\cdot\|_\sigma$  et  $F_\sigma, \|\cdot\|_\sigma$ .

De telle sorte qu'il existe une fonction régularisante  $S$  telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S : E_0 \rightarrow E_\infty$$

$$\|S_\theta u\|_b \leq C \|u\|_a, \text{ si } b \leq a \quad (4.1)$$

$$\|S_\theta u\|_b \leq C \theta^{b-a} \|u\|_a, \text{ si } a < b \quad (4.2)$$

$$\|u - S_\theta u\|_b \leq C \theta^{b-a} \|u\|_a, \text{ si } a > b \quad (4.3)$$

$$\left\| \frac{d}{d\theta} S_\theta u \right\|_b \leq C \theta^{b-a-1} \|u\|_a \quad (4.4)$$

**Outil :** On prend  $\theta_j$  une suite d'indices divergents et on définit  $\Delta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$  et  $R_j u = (S_{\theta_{j+1}} u - S_{\theta_j} u) / \Delta_j$  si  $j > 0$ ,  $R_0 u = S_{\theta_1} u / \Delta_0$ .

On obtient alors :

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j R_j u$$

Convergente dans  $E_a$  si  $u \in E_b$  et  $a < b$ .

Avec de plus :

$$\|R_j u\|_b \leq C_{a,b} \theta_j^{b-a-1} \|u\|_a \quad (\text{en utilisant (4.4)}) \quad (4.5)$$

**Espace faible :** On généralise l'approche ci-dessus en définissant l'ensemble  $E'_b$  : l'ensemble des sommes  $\sum \Delta_j u_j$  convergentes dans  $E_b$  et satisfaisant

$$\|u_j\|_b \leq M \theta_j^{b-a-1} \quad \forall a \in [0, b]$$

On munit cet espace de la norme  $\|\cdot\|'_b$  l'infimum des constantes  $M$  respectant l'inégalité précédente. On a de manière immédiate que  $\|\cdot\|'_a > \|\cdot\|_b$  si  $b < a$  et par (4.2) on a que  $\|\cdot\|'_a \leq C \|\cdot\|_a$ .

### IV.2 Théorème de Nash-Moser

**Énoncé :** Soit  $a_2 \in \mathbb{R}$  et soit  $\alpha, \beta \in [0, a_2]$ . De plus, considérons une application  $\Phi : E_\alpha \rightarrow F_\beta C^2$  vérifiant :

$$\|\Phi''(u)(v, w)\|_{\beta+\delta} \leq C(1 + \|u\|_\alpha) \|w\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \cdot \|v\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \quad (4.6)$$

On a de plus l'existence d'une inverse à droite pour  $\Phi'$ , c'est-à-dire :

$$\forall v \in E_\infty, \quad \Psi(v) : F_\infty \rightarrow E_{a_2}$$

avec

$$\|\Psi(v)g\|_a \leq C \|g\|_{\beta+a-\alpha} + \|g\|_0 \|v\|_{\alpha+\beta} \quad (4.7)$$

Alors,  $\exists \eta > 0$  telle que  $\forall f \in F'_\beta$  vérifiant  $\|f\|_\beta \leq \eta$ , il existe  $u \in E'_\alpha$  vérifiant  $\Phi(u) - \Phi(0) = f$ .

**Démonstration :** Cette démonstration s'appuie sur un schéma de Newton légèrement altéré pour prendre en compte le manque de 'régularité' de l'inverse de la dérivée. En effet, ce schéma calcule uniquement une solution approchée de l'équation :

$$\Phi'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \Phi(u_n) = 0$$

et compte sur la vitesse du schéma de Newton pour combler l'erreur commise.

Prenons  $g \in F'_\beta$

$$g = \sum \Delta_j g_j$$

On a avec (4.5)

$$\|g_j\|_b \leq C_b \theta_j^{b-\beta-1} \|g\|'_\beta \quad (4.8)$$

On construit la suite  $u_j$  par récurrence de la manière suivante :

$$u_{j+1} = u_j + \Delta_j \dot{u}_j, \quad \dot{u}_j = \Psi(v_j) g_j, \quad v_j = S_{\theta_j} u_j$$

On prendra  $u_0 = 0$  et  $\theta_i = 2^i$ .

**Récurrence** Nous allons démontrer par récurrence les trois inégalités suivantes :

$$\|\dot{u}_j\|_a \leq C_1 \theta_j^{a-\alpha-1} \|g\|'_\beta, \quad a \leq a_2 \quad (4.9)$$

$$\|v_j\|_a \leq C_2 \theta_j^{a-\alpha-} \|g\|'_\beta, \quad \alpha < a \leq a_2 \quad (4.10)$$

$$\|u_j - v_j\|_a \leq C_3 \theta_j^{a-\alpha-} \|g\|'_\beta, \quad \alpha < a \leq a_2 \quad (4.11)$$

L'initialisation est trivialement vérifiée.

On suppose maintenant les inégalités (4.9), (4.11) au rang  $j-1$  et l'inégalité (4.11) au rang  $j$ .

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_j\|_a &= \|\Psi(v_j)g_j\|_a \leq C(\|g_j\|_{\beta+a-\alpha} + \|g_j\|_0 \|v_j\|_{\beta+a}) \text{ en utilisant 4.7} \\ &\leq C(C_b \|g\|'_\beta \theta_j^{a-\alpha-1} + \theta_j^{-\beta-1} \theta_j^{\beta+a-1} \|g\|'^2_\beta) \text{ en utilisant l'inégalité (4.8) et (4.9) au rang } j) \\ &\leq C(C_b + \|g\|'_\beta C_2) \theta_j^{a-\alpha-1} \|g\|'_\beta \end{aligned}$$

Si on prend  $C_1 > C(C_b + \|g\|'_\beta C_2)$  on a (4.9) au rang  $j$ . On va montrer 4.10 et 4.11, pour cela intéressons-nous à la quantité  $u_{j+1}$  :

$$\begin{aligned} \|u_{j+1}\|_a &\leq \sum_{i=1}^j \|\Delta_i \dot{u}_i\|_a \\ &\leq \sum_{i=1}^j |\Delta_i| C_1 \|g\|'_\beta \theta_i^{a-\alpha-1} \text{ en utilisant (4.9) jusqu'au rang } j \\ &\leq C \|g\|'_\beta \theta_i^{a-\alpha} \text{ pour } a \geq \alpha \end{aligned}$$

On obtient donc avec (4.1), (4.10) et (4.11).

**Convergence** 1) Convergence de  $u_j$  On a avec 4.9 que  $u = \sum \Delta_j u_j$  appartient à  $E'_\alpha$  et que  $\|u\|'_\alpha \leq C \|g\|'_\beta$

2) Limite de  $\Phi(u_j)$  Par continuité on a que

$$\Phi(u) - \Phi(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j))$$

$$\begin{aligned}\Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j) &= (\Phi(u_j + \Delta_j \dot{u}_j) - \Phi(u_j) - \Phi'(u_j) \Delta_j \dot{u}_j) + (\Phi'(u_j) - \Phi'(u_j)) \Delta_j \dot{u}_j + \Delta_j g_j \\ &= \Delta_j e_j + \Delta_j e'_j + \Delta_j g_j\end{aligned}$$

Par inégalité de Taylor-Lagrange et en utilisant (4.6)

$$\begin{aligned}\|e_j\|_{\beta+\delta} &\leq C \Delta_j \|\dot{u}_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}}^2 \\ &\leq C \|g\|_{\beta}^2 \Delta_j \theta_j^{-\epsilon-2} \text{ (en utilisant (4.9))} \\ &\leq C \|g\|_{\beta}^2 \theta_j^{-\epsilon-1}\end{aligned}$$

$$e_j = \int_0^1 \Phi''(v_j + t(u_j - v_j))(\dot{u}_j, u_j - v_j) dt$$

$$\begin{aligned}\|e'_j\|_{\beta+\delta} &\leq C(1 + \|v_j + t(u_j - v_j)\|_{\alpha}) \|\dot{u}_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \cdot \|u_j - v_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \\ &\leq C' \|\dot{u}_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \cdot \|u_j - v_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \\ &\leq \|g\|_{\beta}' \theta_j^{-\frac{\epsilon}{2}-1} \|u_j - v_j\|_{\alpha-\frac{\epsilon}{2}} \text{ (en utilisant 4.9)}\end{aligned}$$

On peut utiliser (4.11) pour  $\|u_j - v_j\|_{\alpha+\eta}$  avec  $\eta < \frac{\epsilon}{2}$ .

On obtient donc

$$\sum \Delta_j \|e'_j\|_{\beta}' \leq C \|g\|_{\beta}^2$$

**Conclusion** En notant  $T(g) = \sum \Delta_j e_j + \Delta_j e'_j$  et avec  $\|T(g)\|_{\beta}' \leq C \|g\|_{\beta}^2$ , on peut utiliser le théorème de point fixe de Schauder (pour  $T(g) + y$  avec  $y \in F'_{\beta}$ ) pour montrer la local surjectivité de  $T(g) + g$ .  
Puis :

$$\Phi(u) - \Phi(0) = T(g) + g$$

on conclut bien.

## V Annexe sur le Théorème de Krylov-Bogolyubov

### Énoncé du cas particulier

On s'intéresse ici à la démonstration du théorème de Krylov-Bogolyubov, c'est-à-dire à l'existence d'une mesure invariante pour un homéomorphisme du cercle. On reprend une preuve de Patrick Bernard, et on admet deux théorèmes de théorie de la mesure, que l'on rappelle en fin de document.

### Démonstration

**Cadre** On considère  $T$  un homéomorphisme du cercle. Du fait que l'ensemble  $\mathbb{S}_1$  est compact, par le Théorème 1 on a que  $C^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$  est séparable, i.e. il existe une sous-famille  $F$  dénombrable et dense au sens de la norme uniforme.

**Construction de la suite** Prenons  $x \in \mathbb{S}_1$ . Pour tout  $f \in C^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ , posons :

$$S^N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(T^n(x))$$

Par extraction diagonale et par compacité de  $\mathbb{S}_1$ , il existe une extraction  $N_k$  telle que  $\forall f \in F$ ,  $S_{f}^{N_k}(x)$  converge. On note sa limite  $S_f(x)$ .

**Extension de la construction** Soit  $g \in C^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ . Prenons une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $g$ . Montrons que  $S_g(x)$  a un sens. Pour cela, considérons  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\begin{aligned} |S_g^{N_p}(x) - S_g^{N_q}(x)| &= \left| S_g^{N_p}(x) - S_{f_n}^{N_p}(x) + S_{f_n}^{N_p}(x) - S_{f_n}^{N_q}(x) + S_{f_n}^{N_q}(x) - S_g^{N_q}(x) \right| \\ &\leq \left| S_g^{N_p}(x) - S_{f_n}^{N_p}(x) \right| + \left| S_{f_n}^{N_p}(x) - S_{f_n}^{N_q}(x) \right| + \left| S_{f_n}^{N_q}(x) - S_g^{N_q}(x) \right| \\ &\leq 2 \|g - f_n\|_{\infty} + \left| S_{f_n}^{N_p}(x) - S_{f_n}^{N_q}(x) \right| \end{aligned}$$

Donc  $S_g^{N_p}(x)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{S}_1$ , donc elle converge.

**Conclusion** On pose maintenant

$$\begin{aligned} L_x : C^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto S_g(x) \end{aligned}$$

$L_x$  est 1-lipschitzienne donc continue. D'après le Théorème 2, il existe alors une mesure borélienne  $\mu$  vérifiant :

$$\forall g \in C^0(\mathbb{S}_1), \quad L_x(g) = \int_{\mathbb{S}_1} g d\mu$$

Or, par construction,  $L_x(g \circ T) = L_x(g)$ , donc  $\mu = \mu(T^{-1}(\cdot))$ . Avec  $T$  bijectif, on a bien  $\mu = \mu(T(\cdot))$ .

## Rappels

**THÉORÈME 1.** — *Pour toute métrique compacte  $X$ , l'espace  $C(X)$  est séparable pour la norme uniforme.*

**THÉORÈME 2.** — *Il y a une bijection entre les mesures boréliennes et les formes linéaires positives sur  $C^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ .*

## Références

- [Ros74] Harold ROSENBERG. “Un contre-exemple à la conjecture de Seifert”. In : *Séminaire N. Bourbaki* 434 (1974), p. 294-306.
- [Her79] Michael HERMAN. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.
- [Bon81] Jean-Michel BONY. “Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires”. In : *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*. 4<sup>e</sup> sér. 14 (1981). DOI : [10.24033/asens.1404](https://doi.org/10.24033/asens.1404).
- [Hö85] Lars HÖRMANDER. “On the Nash-Moser implicit function theorem”. In : *Annales Fennici Mathematici* 10 (1985), 255–259. DOI : [10.5186/aasfm.1985.1028](https://doi.org/10.5186/aasfm.1985.1028).
- [AG91] Serge ALINHAC et Patrick GÉRARD. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Éditions du CNRS, 1991.
- [Mé08] Guy MÉTIVIER. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.
- [GV19] David GÉRARD-VARET. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.
- [AS23] Thomas ALAZARD et Chengyang SHAO. “KAM via Standard Fixed Point Theorems”. In : (2023). DOI : [10.48550/arXiv.2312.13971](https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.13971).