**Exercice 1 :**

Pour $x > 1$, on note $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Calculer la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$ .
2. Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que $F(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ soit bien définie.
3. Montrer que $F$ est continue sur $[-1; 1[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 1[$.
4. Donner une expression plus simple de $F(x)$.

**Exercice 2 :**

On note $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que pour $0 < r < R$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$
2. Que dire sur $f$ si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
3. On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathbb{C}_d[X]$.

**Exercice 3 :**

On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de clients dans une boutique, durant un laps de temps $T$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, et $s, t \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq s \leq t$, on note $A(n, s, t)$ l'évènement :

“ Il arrive $n$ clients dans l'intervalle de temps$[s; t[$ ”

On admet qu'il existe un espace probabilisé permettant d'étudier ces événements, en supposant :

(H1) Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, et tous réels $0 \leq r \leq s \leq t$, les événements $A(m, r, s)$ et $A(n, s, t)$ sont indépendants.

(H2) La probabilité de l'événement $A(n, s, t)$ ne dépend que de $n$ et du réel $t - s$. On note :

$$p_n(t) := \mathbb{P}(A(n, 0, t))$$

(H3) La fonction $p_0$ est continue et $p_0(0) = 1$

(H4) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$$

(H5) On a le développement asymptotique quand $t \to 0^+$ :

$$1 - p_0(t) - p_1(t) = o(p_1(t))$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

1. Justifier que la fonction $p_0$ est décroissante, et que :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \ p_0(s + t) = p_0(s)p_0(t)$$

2. Montrer que $p_0$ est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ p_0(t) = e^{-\lambda t}$$
*Indication : On pourra considérer la fonction $f(t) = \ln(p_0(t))$ .*
3. Justifier que, quand $t \to 0^+$ :
$$p_1(t) = \lambda t + o(t) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ p_n(t) = o(t)$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer :
$$\forall s, t \geq 0,\ p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s) p_{n-k}(t)$$
En déduire que $p_n$ est dérivable et que
$$\forall t \geq 0,\ p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$$
5. En considérant $q_n(t) := e^{\lambda t} p_n(t)$, obtenir l'expression de $p_n(t)$.
6. On note $X$ la variable aléatoire déterminant le nombre de clients arrivant durant le laps de temps $T > 0$. Déterminer la loi de $X$. Quelle est l'interprétation du paramètre $\lambda$ ?

**Exercice 4 :**

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré$n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ est scindé si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |Im(z)|^n \leq |P(z)|$.
   c) En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
   d) Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.

*Bonus : Calculer l'adhérence des matrices de rang $r$ dans $M_n(\mathbb{K})$*

**Exercice 5 :**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$. Étendre ce résultat aux matrices non-inversibles.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à déterminant $> 0$ est connexe par arcs.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de $\sup\limits_{O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |Tr(OM)|$ et calculer sa valeur.

**Exercice 6 :**

On note :
$$f : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$$
On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $f$ est différentiable en tout $M$ et expliciter $df(M)$.
2. Comparer le rang de $df(M)$ au degré du polynôme minimal de $M$.
3. Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \chi_M = \mu_M\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 7 :**

Montrer que tout sous-groupe fini des inversibles d'un corps commutatif est cyclique.