# Décomposition de Littlewood-Paley et opérateurs paradifférentiels

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

Ce document a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation en explicitant tous les outils utilisés, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08] et comme [GV19] références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

## I Théorèmes de paralinéarisation

THÉORÈME I-1. — *Soit $F$ une fonction $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*

$$F(u) - T_{F'(u)}u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{1.1}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

LEMME I-1. — *Soit $F$ une fonction $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s > 0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\| \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \tag{1.2}$$

PREUVE. Si $s = 0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction $G$ continue telle que $F(u) = uG(u)$. Or $u \in L^2$, et $G(u) \in L^\infty$ car $u$ est bornée, ce qui donne bien $F \in L^2$.

Quand $s > 0$, on remarque qu'il existe $C_\alpha$ indépendant de $u$ et $k$ telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \tag{1.3}$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein **??** puis la caractérisation des espaces de Sobolev donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \tag{1.4}$$

$\square$

## Références

[Mé08] Guy Métivier. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.

[GV19] David Gérard-Varet. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.