Décomposition de Littlewood-Paley et opérateurs paradifférentiels

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

Ce document a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation en explicitant tous les outils utilisés, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08] et [GV19] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier.

I Décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons dans cette section présenter la décomposition de Littlewood-Paley. C'est une décomposition de fonction dans laquelle chaque terme a un spectre borné. Nous allons également présenter des propriétés sur cette décomposition.

Définition I-1 (Transformée de Fourier). On note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0^0(\mathbb{R}^d),\ \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\xi\cdot x} f(\xi)\mathrm{d}x$, et on pourra utiliser la notation $\hat{f}$ pour désigner $\mathcal{F}f$. On manipulera de plus le prolongement usuel de $\mathcal{F}$ à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'existence et, plus précisément, à la construction de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec un support au voisinage de 0 mais également constantes au voisinage de 0.

Considérons le cas $d = 1$ et notons $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que g appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ puisqu'on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g^{(n)}(x) = xQ_n(|x|)\exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) \tag{1.1}$$

avec Q_n une fraction rationnelle dont le pôle se situe en 1 , ce qui montre la continuité des $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par croissances comparées. On étend alors cette construction à $\mathbb{R}^d$ en notant $\psi(x) = g(|x|)$, qui est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(0, 1)$ et est égale à 1 sur $B(0, \frac{1}{2})$.
En posant $\chi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$, on a ainsi $\mathrm{supp}(\chi(2^{-k}\cdot)) \subset B(0, 2^{k+1}) \setminus B(0, 2^{k-1})$, et par téléscopage on obtient l'égalité :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ 1 = \psi(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k}\xi)$$

Lemme I-1. — *Pour tout $u \in \mathcal{S}$ on a :*

$$\hat{u} = \psi\hat{u} + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k}\cdot)\hat{u}$$

et la série converge dans l'espace de Schwartz.

PREUVE. Soit $u \in \mathcal{S}$, montrons que pout tout α et $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$, $\left\|x^\alpha \partial^\beta (u - \psi(2^{-k}x)u)\right\|_\infty \to_{k\to\infty} 0$ On considère pour cela :

$$\begin{aligned}\left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-k}x)g)\right\|_\infty &= \left\|x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-k}x)g)\right\|_{\infty,[2^{k-1};2^{k+1}]} \\ &\leq \left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{\infty,[2^k;2^{k+1}]} + \left\|x^\alpha \partial^\beta g(1 - \psi(2^{-k}x)\right\|_{\infty,[2^{k-1};2^k]}\end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{S}$, on a $\left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{\infty,[2^k;2^{k+1}]}$ qui tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. En utilisant la formule de derivation de Leibniz sachant que $\partial^j \psi = O(x^j)$ (en utilisant (1.1)) on a que $\left\|x^\alpha \partial^\beta g\right\|_{[2^k;2^{k+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. On utilise ensuite la continuité de la transformé de Fourier et de la transformé de Fourier inverse sur $\mathcal{S}$. □

DÉFINITION I-2. On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k}\cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

PROPOSITION I-2. — *Soit $u \in \mathcal{S}'$, en posant :*

$$S_n u := \sum_{k=-1}^{n-1} \Delta_k u$$

On a que :

$$\lim_{n\to\infty} S_n u = u$$

REMARQUE. Dans la suite, pour simplifier les calculs, il nous arrivera d'écrire S_{-k} pour $k \geq 0$, et dans ce cas on prend comme définition $S_{-k} := S_0 = \Delta_{-1}$.

PREUVE. Prenons $u \in \mathcal{S}'$ et $v \in \mathcal{S}$.

$$\langle \mathcal{F}(S_n u), v\rangle = \langle \psi(2^{-n}\xi)\mathcal{F}(u), v\rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-n}\xi)v\rangle$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \psi(2^{-n}\xi)v = v$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par le Lemme I-1. On obtient donc :

$$\mathcal{F}(S_n u) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{dans } \mathcal{S}$$

Par continuité de $\mathcal{F}^{-1}$, on a finalement $S_n u \to u$ quand $n \to +\infty$. □

DÉFINITION I-3 (Espaces de Sobolev). Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, on définit

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d), \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}$$

et on admet que c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

DÉFINITION I-4 (Espaces de Zygmund). Pour tout $\alpha > 0$, on définit

$$C^\alpha_*(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d), \sup_{k\geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} < +\infty\right\}$$

et on admet que c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_{C^\alpha_*} := \sup_{k\geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty}$

LEMME I-3 (Inégalité de Bernstein). — *Soit B une boule, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, et $\lambda > 0$. Si $u \in L^p$ est tel que supp$(\hat{u}) \subset \lambda B$, alors*

$$\max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{|\alpha|+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p} \tag{1.2}$$

Preuve. On commence par justifier que $u \in \mathcal{S}$. En effet, u ayant un spectre borné, sa transformée de Fourier est dans l'espace de Schwartz, et l'opérateur transformée de Fourier étant un automorphisme de $\mathcal{S}$ dans lui-même, on en déduit que $u \in \mathcal{S}$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur un voisinage de B, on a $\hat{u}(\xi) = \varphi(\lambda^{-1}\xi)\hat{u}(\xi)$, donc $u = \lambda^d u * g$, avec $g := \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\lambda\cdot)$, et donc $\partial^\alpha u = \lambda^d u * \partial^\alpha g$. L'inégalité de Young donne de plus que : $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$, où $1 \leq p, r \leq q \leq +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Or :

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(\lambda x)\right)\right|^r \mathrm{d}x = \lambda^{|\alpha| r} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right)(\lambda x)\right|^r \mathrm{d}x \\
&\leq \lambda^{|\alpha| r - d} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}^r
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \lambda^{|\alpha| + d(1-\frac{1}{r})} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r} \|u\|_{L^p} = C_k \lambda^{|\alpha| + d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|u\|_{L^p}$$

□

Lemme I-4. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{n \geq -1} \|S_n u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad \sup_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

Preuve. On écrit $S_n u = 2^{nd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^n\cdot)) * u$. Par inégalité de Young on obtient :

$$\|S_n u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \left\|2^{nd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^n\cdot)\right\|_{L^1}$$

On procède de même pour $\|\Delta_k u\|_{L^p}$. □

Lemme I-5 (Presque-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \tag{1.3}$$

Preuve. On part de $1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^\infty \chi(2^{-p}\xi)$. Seule deux de ces fonctions ont une intersection de support non vide. On utilise alors : $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ et on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{p=0}^\infty \chi(2^{-p}\xi)^2 \leq 1$$

La seconde inégalité de (1.3) s'en déduit en multipliant l'inégalité ci-dessus par $\hat{u}$ et en utilisant l'identité de Plancherel. □

Proposition I-6 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — *Si $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{k \geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 < +\infty$. De plus, il existe $C > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{C} \sum_{k \geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_{k \geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \tag{1.4}$$

Preuve. En notant $\langle\xi\rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, on a $\|u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u\|_{L^2}$, et le Lemme I-5 donne

$$\sum_{k \geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq 2 \sum_{k \geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2}^2$$

La formule de Plancherel et la définition de Δ_k, on obtient l'existence de $C > 0$ tel que $\forall k \geq -1$

$$\frac{1}{C} 2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2} \leq C 2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2}$$

et donc il existe $\tilde{C}$ tel que :

$$\frac{1}{\tilde{C}} \sum_{k\geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq \tilde{C} \sum_{k\geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2$$

ce qui donne l'équivalence des normes voulue. $\square$

Lemme I-7 (Injection de Sobolev). — *Soit $s > \frac{d}{2}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ alors $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, en particulier $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)} \|u\|_{H^s}$$

Preuve. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, d'après le résultat précédent on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc sa transformée de Fourier y est de même, et comme elle est à support compact, elle est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la formule d'inversion, on a ainsi :

$$\Delta_k u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\Delta_k u}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_k u\|_{L^2} \left|B(0, C2^k)\right|^{\frac{1}{2}} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)} 2^{ks} \|\Delta_k u\|_{L^2} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)} (\sum_{k\geq -1} 2^{ks} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)} \|u\|_{H^s}$$

Ce qui consitue l'inégalité voulue. On en déduit immédiatement que $\sup_{k\geq -1} 2^{k(s-\frac{d}{2})} \|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^s}$, et donc $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}$. De plus, on en déduit que la série de terme général $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente dans L^∞, donc par complétude elle converge simplement vers un $\tilde{u}$. On a déjà vu que cette série converge dans $\mathcal{S}'$ vers u, donc $u = \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Proposition I-8. — *Soit $(u_k)_{k\geq -1}$ tel que $\exists R > 0, \forall k \geq -1$, supp $\hat{u}_k \subset B(0, R2^k)$.*

- *Soit $\alpha > 0$, si $\sup 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty} < +\infty$, alors $u = \sum u_k \in C_*^\alpha(\mathbb{R}^d)$, et*

$$\|u\|_{C_*^\alpha} \leq C \sup_k 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty}$$

- *Soit $s > 0$, si $\sum 2^{2ks} \|u_k\|_{L^2}^2 < +\infty$, alors $u = \sum u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et*

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_k 2^{2ks} \|u_k\|_{L^2}^2$$

Preuve. Par hypothèse sur le support des $(u_k)_{k\geq -1}$, pour tout $q \geq -1$, en notant $N := \lfloor \log_2(R) \rfloor + 1$, on a :

$$\Delta_q u = \sum_{k\geq q-N} \Delta_q u_k$$

On en déduit :

$$2^{q\alpha} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k\geq q-N} \|\Delta_q u_k\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k\geq q-N} \|u_k\|_{L^\infty} \leq \sum_{k\geq q-N} 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty} 2^{(q-k)\alpha} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{q-k}$$

où :

- $a_k = 2^{k\alpha} \|u_k\|_{L^\infty}$ si $k \geq -1$, $a_k = 0$ sinon.
- $b_r = 2^{r\alpha}$ si $r \leq N$, $b_r = 0$ sinon.

Comme $\alpha > 0$, $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et l'inégalité de Young discrète donne :

$$\|2^{k\alpha}\|\Delta_k u\|_{L^\infty}\|_{\ell^\infty} \leq \|a_q\|_{\ell^\infty}\|b_r\|_{\ell^1}$$

i.e :

$$\|u\|_{C^\alpha_*} = \sup_k 2^{k\alpha}\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C \sup_k 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty}$$

On conclut alors par définition des espaces de Zygmund. La preuve dans le second cas est parfaitement analogue, en remplaçant α par s, et l'espace L^∞ par L^2. □

Proposition I-9. — *Soit $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > s$. Il existe C tel que pour toute famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $H^n(\mathbb{R}^d)$, si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| \leq n$:*

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)}\varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors la somme $u := \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $\|u\|^2_{H^s} \leq C\sum_k \varepsilon_k^2$.

Preuve. On remarque que la série de terme général u_k est absolument convergente dans L^2, donc par complétude elle converge simplement, et u est bien définit. Ensuite :

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq j} 2^{js}\|\Delta_j u_k\|_{L^2} + \sum_{k<j} 2^{js}\|\Delta_j u_k\|_{L^2}$$

Par hypothèse, et en utilisant le Lemme I-4, on a d'une part :

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C\|u_k\|_{L^2} \leq C2^{-ks}\varepsilon_k$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernstein (1.2), on obtient pour tout $j \geq 0$:

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C2^{-nj}\sum_{|\alpha|=n}\|\partial^\alpha\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C2^{-nj}\|u_k\|_{H^n} \leq C2^{-(j-k)n}2^{-ks}\varepsilon_k$$

Alors :

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq C\sum_{k\geq j} 2^{(j-k)s}\varepsilon_k + C\sum_{k<j} 2^{(j-k)(s-n)}\varepsilon_k = C(a\star\varepsilon)_j$$

où le dernier membre est une convolution discrète entre $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $a = (a)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec

$$a_k = 2^{ks} \text{ si } k \leq 0, \quad a_k = 2^{k(s-n)} \text{ sinon.}$$

Comme $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, l'inégalité de Young discrète donne que $(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2})_{j\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, ce qui donne le résultat voulu d'après la caractérisation de la Proposition I-6.

□

Corollaire I-10 (Multiplicateurs de Meyer). — *Soient $r, s > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > s$. Si $(m_k)_{k\geq-1}$ est une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq n$, on ait :*

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq M_\alpha 2^{k(|\alpha|-r)},$$

alors l'opérateur

$$f \mapsto \sum_{k\geq -1} m_k\Delta_k f$$

est continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{R}^d)$, et sa norme est bornée par $C_s\sum_{|\beta|\leq n} M_\beta$.

Preuve. Pour tout $|\alpha| \leq n$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha(m_k\Delta_k f)\|_{L^2} &\leq C_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \|\partial^\beta m_k\|_{L^\infty}\|\partial^{\alpha-\beta}\Delta_k f\|_{L^2} \\ &\leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-r-s)}\left(\sum_{\beta\leq\alpha} M_\beta\right) 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Alors, la Proposition I-9 permet d'aboutir au résultat voulu. □

II Estimations douces et paralinéarisation

On va maintenant se servir de la décomposition de Littlewood-Paley pour étudier des produit dans les espaces fonctionnels précédemment utilisés. On remarque que l'on peut écrire, pour $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} uv &= \sum_{k,j} \Delta_k u \Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty}\sum_{j=-1}^{p} \Delta_k u\Delta_j v + \sum_{k=-1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\Delta_k u \Delta_j v \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k+1} v + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=-1}^{j-1}\Delta_k u\Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty}\Delta_k u S_{k+1}v + \sum_{j=-1}^{+\infty}\Delta_j v S_j u \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty}\Delta_k u S_{k-2} v \ + \sum_{k=-1}^{+\infty}\Delta_k v S_{k-2} u \ + \sum_{|k-j|\leq 2}\Delta_k u \Delta_j u \\ &= T_v u + T_u v + R(u,v)\end{aligned}$$

Ici, $T_v u$ (resp. $T_u v$) décrit la partie des interactions pour lesquelles la fréquence de v (resp. u) est nettement plus faible que celle de u (resp. v), tandis que $R(u, v)$ représente la partie où les fréquences sont du même ordre. Le terme $T_v u$ est appelé *paraproduit* de u par v.

Proposition II-1 (Estimations douces pour les paraproduits et leur restes). —

- $\forall s \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in H^s$,
$$\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} \tag{2.1}$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in C^\alpha_*$,
$$\|T_u v\|_{C^\alpha_*} \leq C_\alpha\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^\alpha} \tag{2.2}$$
- $\forall r, s \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $r + s > 0, u \in C^r_*, v \in H^s$,
$$\|R(u,v)\|_{H^{r+s}} \leq C_{r,s}\|u\|_{C^r_*}\|v\|_{H^s} \tag{2.3}$$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $\alpha + \beta > 0, u \in C^\alpha_*, v \in C^\beta_*$,
$$\|R(u,v)\|_{C^{\alpha+\beta}_*} \leq C_{\alpha,\beta}\|u\|_{C^\alpha_*}\|v\|_{C^\beta_*} \tag{2.4}$$

Preuve. On remarque que $T_u v$ a une décomposition qui vérifie les hypothèses de la Proposition I-8. En effet, $T_u v = \sum_{p=-1}^{+\infty} S_{p-2}u\Delta_p v$, et le spectre de $S_{p-2}u\Delta_p v$ est inclus dans $B(0, 2^{p-2}) + B(0, 2^{p+1}) \subset B(0, 4 \times 2^p)$. Alors, le Lemme I-4 et la Proposition I-6 donnent :

$$\begin{aligned}\sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v S_{k-2}u\|^2_{L^2} &\leq \sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v\|^2_{L^2}\|S_{k-2}u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|^2_{L^\infty}\sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v\|^2_{L^2} \\ &\leq C'\|u\|^2_{L^\infty}\|v\|^2_{H^s}\end{aligned}$$

On conclut alors que $\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}$ à l'aide de la Proposition I-8. Les inégalités suivantes se montrent de manière parfaitement analogue. □

Théorème II-2 (Paralinéarisation). — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*

$$F(u) - T_{F'(u)}u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{2.5}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme II-3. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s \geq 0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s} \tag{2.6}$$

Preuve. Si $s = 0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction G continue telle que $F(u) = uG(u)$. Alors, comme $u \in L^2$ et $G(u) \in L^\infty$ car u est bornée, on obtient bien $F \in L^2$.
Quand $s > 0$, on remarque qu'il existe C_α indépendant de u et k telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \tag{2.7}$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein (1.2) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (1.4) donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.8}$$

toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de presque-orthogonalité (1.3) donnant que $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de L^2 fournit alors la convergence simple de cette série, i.e. $S_n u \to u$ dans L^2. De plus, d'après le Lemme I-4, $\|S_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$. On en déduit que $F(S_n u) \to F(u)$ dans L^2 car :

$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \leq C \sup_{t\in[0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u\|_{L^\infty} \|S_n u - u\|_{L^2} \to 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1}u) - F(S_k u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \Delta_k u \tag{2.9}$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_k u + t\Delta_k u)\mathrm{d}t$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_k u + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaine (plus précisement la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en F' avec le Lemme I-4 et on utilise (2.8) pour les termes en u. En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \tag{2.10}$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (2.7), on obtient :

$$\|\partial^\alpha (m_k \Delta_k u)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,F} 2^{(|\alpha|-s)k} \|u\|_{L^\infty} \varepsilon_k$$

On peut donc conclure par la Proposition I-9. □

Preuve du Théorème II-2. On commence par remarquer que quitte à soustraire un terme linéaire au à $F(u)$, on peut supposer que $F'(0) = 0$. Cela ne change rien à la preuve car :

$$F(u) + au - T_{F'(u)+a}u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - T_a u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - au = F(u) - T_{F'(u)}u$$

Ensuite, comme $\rho > 0$, le Lemme I-7 donne $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par définition, on a

$$T_{F'(u)}u = S_{-3}F'(u) \cdot u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-2}F'(u) \cdot \Delta_k u$$

En utilisant (2.9), comme $F(S_0u)$ et $S_{-3}F'(u) \cdot u_0$ sont dans H^∞, il suffit de prouver que :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(m_k - S_{k-2}g)\Delta_k u \ \in H^{s+\rho}$$

Cela découle de la Proposition I-9, que l'on peut appliquer d'une part grâce à (2.7), et d'autre part car on a l'inégalité :

$$\|\partial^\alpha(m_k - S_{k-2}F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Pour obtenir cette dernière, on va montrer séparément :

$$\|\partial^\alpha(m_k - F'(S_{k-2}u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{2.11}$$

$$\|\partial^\alpha(F'(S_ku) - S_kF'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{2.12}$$

On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral, qui donne

$$F'(S_ku + t\Delta_k u) - F'(S_{k-2}u) = \mu_k w_k$$

avec

$$w_k = (\Delta_{k-2}u + \Delta_{k-1}u + t\Delta_k u) \quad \text{ et } \mu_k = \int_0^1 F''(S_{k-2}u + \tau w_k)\mathrm{d}\tau.$$

De manière analogue à (2.10), on a

$$\|\partial^\alpha \mu_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k}\|u\|_{L^\infty}$$

Tandis que w_k vérifie

$$\|\partial^\alpha w_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k}\|\partial^\alpha w_k\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k}2^{(|\alpha|-s)k}\varepsilon_k \leq \tilde{C}_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Bernstein (1.2), puis (2.7). On en déduit donc que

$$\|\partial^\alpha(\mu_k w_k)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Or

$$m_k - F'(S_{k-2}u) = \int_0^1 \mu_k w_k \mathrm{d}t$$

Ce qui donne (2.11). Pour montrer la seconde inégalité, on commence par décomposer en deux membres le terme à majorer :

$$\big[F'(S_ku) - S_kF'(S_ku)\big] + \big[S_kF'(S_ku) - S_kF'(u)\big] = (I) + (II)$$

L'inégalité de Bernstein (1.2) donne alors

$$\|\partial^\alpha S_k(F'(u) - F'(S_ku))\|_{L^\infty} \lesssim_\alpha 2^{(|\alpha|+\frac{d}{2})k}\|S_k(F'(u) - F'(S_ku))\|_{L^2}.$$

De plus :

$$\|S_k(F'(u) - F'(S_ku))\|_{L^2} \lesssim \|F'(u) - F'(S_ku))\|_{L^2} \lesssim \|u - S_ku\|_{L^2} \lesssim 2^{-ks}\|u\|_{H^s}$$

grâce au Lemme I-4, puis aux accroissements finis, et finalement avec une majoration du reste géométrique dans la caractérisation des espaces de Sobolev (1.4). Ainsi (II) vérifie l'inégalité (2.12).
Il reste maintenant à étudier (I). Pour cela, on remarque que $S_k u \in H^\infty$ car sa transformée de Fourier est à support compact. Alors, d'une part $S_k u \in L^\infty$ par le Lemme I-4 car $u \in L^\infty$, et sa norme est bornée indépendamment de k. D'autre part, en écrivant la norme usuelle de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Bernstein, on a que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|S_k u\|_{H^{s+N}} &\leq C\|S_k u\|_{H^s} + C\sum_{|\alpha|=s+N}\|\partial^\alpha S_k u\|_{L^2}\\ &\leq \|S_k u\|_{H^s} + C_{\alpha,N}2^{kN}\|S_k u\|_{H^s}\\ &\leq C_{\alpha,N}2^{kN}\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

où l'on a observé que $\|S_k u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^s}$ à partir de l'écriture utilisant les multiplicateurs de Fourier, et avec la norme de Sobolev adaptée. Alors, le Lemme II-3 donne que $F'(S_k u) \in H^{s+N}$, et

$$\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \leq C_{\alpha,N}2^{kN}\|u\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty} \tag{2.13}$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein puis le Lemme I-7, on remarque que pour $\sigma > |\alpha| + \frac{d}{2}$ et $a \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\partial^\alpha \Delta_j a\|_{L^\infty} \leq C2^{j(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)}\|a\|_{H^\sigma}$$

Et alors, comme $a - S_k a = \sum_{j\geq k}\Delta_j a$, par majoration d'un reste géométrique, on a :

$$\|\partial^\alpha(a - S_k a)\|_{L^\infty} \leq C2^{k(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)}\|a\|_{H^\sigma} \tag{2.14}$$

En appliquant (2.14) avec $a = F'(S_k u)$ et $\sigma = s + N$ où N est suffisamment grand pour que $s + N > \frac{d}{2} + |\alpha|$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha(F'(S_k u) - S_k F'(S_k u))\|_{L^\infty} &\leq C2^{k(\frac{d}{2}-s-N+|\alpha|)}\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}}\\ &\leq C_{\alpha,N}2^{k(\frac{d}{2}-s+|\alpha|)}\|u\|_{H^s}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.13), ce qui donne finalement la majoration attendue pour (I), conclut la preuve de l'inégalité (2.12) et achève donc la preuve du Théorème II-2. $\square$

Théorème II-4 (Paralinéarisation des produits). — *Soit $s, r > 0$, et $a, b \in C^r_*(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$R_{CM}(a,b) := T_a \circ T_b - T_{ab}$$

est un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{R}^d)$, et on a :

$$\|R_{CM}(a,b)\|_{\mathcal{L}(H^s,H^{s+r})} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|b\|_{C^r_*}$$

Preuve. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on note $v := T_b u$ et $v_k := S_{k-2}b \cdot \Delta_k u$. On observe que :

$$R_1 v := T_a v - \sum_k S_{k-4}a \cdot \Delta_k v = \sum_k (\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)\Delta_k v \tag{2.15}$$

Or comme $(\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)$ a un spectre inclus dans $B(0, 2^k)$, l'inégalité de Bernstein (1.2) et la définition des espaces de Zygmund donnent que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq r$:

$$\|\partial^\alpha(\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}\|\Delta_k a\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-r)}\|a\|_{C^r_*}$$

Alors, le Corollaire I-10 et l'inégalité (2.1) donnent que

$$\|R_1 v\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|v\|_{H^s} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|b\|_{C^r_*}\|u\|_{H^s}$$

De plus, en injectant (2.15), on remarque que :

$$\begin{aligned}
T_a T_b u - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j &= R_1 T_b u + \sum_j S_{j-2} a \cdot \Delta_j v - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j \\
&= R_1 T_b u + \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot (\Delta_j v - v_j) \\
&= R_1 T_b u + \sum_k \Delta_k a \sum_{k+3 \leq j \leq k+5} (\Delta_j v - v_j)
\end{aligned}$$

pas compris pourquoi on coupe. En développant la défintion de v_j, et en ré-utilisant le Corollaire I-10, on a :

$$\left\| T_a T_b u - \sum_j \sum_{k_1 \leq j-3} \sum_{k_2 \leq j-3} \Delta_{k_1} a \cdot \Delta_{k_2} b \cdot \Delta_j u \right\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r} \|a\|_{C_*^r} \|b\|_{C_*^r} \|u\|_{H^s} \tag{2.16}$$

□

Références

[Mé08] Guy Métivier. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.

[GV19] David Gérard-Varet. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.