Théorème de Hille-Yosida et applications

Sacha Ben-Arous, Quentin Verrier, Clément Robiez

March 3, 2024

ENS Paris-Saclay

Théorème de Hille-Yosida

Équation de la chaleur

Régularité elliptique

Théorème de Hille-Yosida

Définitions

On travaille dans un espace de Hilbert H. On considère un opérateur linéaire non borné (i.e non continu) $A : D(A) \to H$.

- A est monotone si $\forall v \in D(A),\ \langle Av, v\rangle \geq 0$
- A est maximal si $\forall f \in H,\ \exists u \in D(A),\ u + Au = f$

Propriétés fondamentales

Si A est un opérateur maximal monotone, alors :

- $D(A)$ est dense dans H
- Le graphe de A est fermé
- $\forall \lambda > 0,\ (I + \lambda A)$ est une bijection, et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Outils de la preuve

Soit A est un opérateur maximal monotone, on note pour $\lambda > 0$:

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ l'approximation de Yosida de A

Rq : A_λ est continue et définie sur H.

Outils de la preuve

Soit A est un opérateur maximal monotone, on note pour $\lambda > 0$:

- $J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A
- $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ l'approximation de Yosida de A

Rq : A_λ est continue et définie sur H.

On a les propriétés suivantes :

- $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$ et $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av$
- $\|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|$ et $\|A_\lambda v\| \leq \|Av\|$

Théorème (Hille-Yosida) :
Soit A un opérateur maximal monotone.
Alors, $\forall u_0 \in D(A),\ \exists ! u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,H) \cap \mathcal{C}([0,+\infty[,D(A))$ tel que :

$$(*) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus $\forall t \geq 0$, $\|u(t)\| \leq 0$ et $\|\dfrac{du}{dt}\| \leq \|Au_0\|$

Preuve (1) : Unicité

Soient u_1, u_2 solutions de $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt}(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \right\rangle \\ &= -\langle A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Or $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, donc $\forall t \geq 0, u_1(t) = u_2(t)$

Preuve (2) : Approximations

Équation de la chaleur

Régularité elliptique