Exercice 1 :
On note :

$$f : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$$

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que f est différentiable en tout M et expliciter $df(M)$.
2. Comparer le rang de $df(M)$ au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \chi_M = \mu_M\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (avec préparation) :

1. Donner un développement asymptotique à deux termes de
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$$
2. À l'aide de la constante d'Euler, calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 3 :

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$. Étendre ce résultat aux matrices non-inversibles.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de $\sup\limits_{O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |Tr(OM)|$ et calculer sa valeur.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ à déterminant > 0 est connexe par arcs.

Exercice 4 (avec préparation) :

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
2. Justifier que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$. On se contentera du cas $n = 2$.
   b) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ est scindé si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |Im(z)|^n \leq |P(z)|$.
   c) En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
   d) Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.

Bonus : Calculer l'adhérence des matrices de rang r dans $M_n(\mathbb{K})$

Exercice 5 :

1. Montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit monogène soit dense.
2. Montrer que $\{\sin n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
3. Montrer que $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6 : Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si ;

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p, q \geq n_0,\ \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$$

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

1. Justifier que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle admet une suite extraite convergente.
3. Montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. Que dire de $(\mathbb{Q}, |.|)$?
4. Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement si la convergence absolue des séries entraine la convergence simple.

Exercice bonus :
Montrer que tout sous-groupe fini des inversibles d'un corps commutatif est cyclique.