1) On considère les règles suivantes : (1) $S \to aA$; (2) $S \to Bb$; (3) $A \to aA$; (4) $B \to Bb$; (5) $A \to X$; (6) $B \to X$; (7) $X \to aXb$; (8) $X \to \epsilon$.
Tout d'abord, il est clair que L_1 est inclu dans le langage engendré par cette grammaire. Réciproquement, quand l'on crée un mot à partir des règles ci-dessus, on commence soit par mettre seulement des a, (resp. seulement des b). Une fois que l'on convertit A (resp. B) en X, on ne peut alors ajouter que le même nombre des a et de b de chaque côté, donc on a un mot de la forme $a^{k+n}b^n$ (resp. $a^n b^{k+n}$), où $k > 0$. Finalement, le langage reconnu par cette grammaire est exactement L_1, qui est donc algébrique.

2) On a vu en cours que ce langage n'est pas reconnaissable par un automate à pile (via le lemme de pompage). On en déduit qu'en particulier il n'est pas algébrique.

3) Idem que pour 2)

4) On considère les règles suivantes : (1) $S \to aSa$; (2) $S \to bSb$; (3) $S \to \epsilon$.
Cette grammaire reconnait clairement L_4 qui est donc algébrique.

5) On considère les règles suivantes : (1) $S \to abS$; (2) $S \to baS$; (3) $S \to Sba$; (4) $S \to Sab$; (5) $S \to aSb$; (6) $S \to bSa$; (7) $S \to \epsilon$; (8) $S \to SS$.
Le langage reconnu par cette grammaire est inclus dans L_5 car à chaque réécriture, on ajoute autant de a que de b. Réciproquement, on montre par une récurrence forte sur la taille des mots que L_5 est inclus dans le langage reconnu par cette grammaire.

- L_5 n'a aucun mot de taille 1, et les mots de taille 2 sont obtenus en faisant : $(1)|(2) \to (7)$.
- On suppose que tous les mots de L_5 de taille $\leq 2n$ sont reconnus par la grammaire. On se donne $w = w_1 \dots w_{2n+2}$ (les mots de L_5 étant forcément de taille paire). On considère alors $n_0 := \inf\{\, k \leq 2n+2 \mid w_1 \dots w_k \in L_5\}$. Si $k < 2n+2$, en commençant par (8), puis en appliquant l'hypothèse de récurrence à $w_1 \dots w_k$ et $w_{k+1} \dots w_{2n+2}$, on conclut. Sinon, si $k = 2n+2$, alors le mot commence par aa et fini par bb (resp. commence par bb et fini par aa). On applique alors deux fois (5) (resp. (6)), puis on applique l'hypothèse de récurrence à $w_3 \dots w_{2n}$.

Donc L_5 est reconnu par la grammaire ci-dessus, et est donc algébrique.

Rq : On peut sans doute s'en sortir avec beaucoup moins de règles, mais au moins ici la preuve est facile.