Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Si (v_n) est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série $\sum v_n$ converge.
Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

(b) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que $(s_n)_{n\geq 1}$ tend vers $\ln 2$ et donc $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

(c) On peut écrire

$$s_n = \ln 2 - r_n$$

avec

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On a

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car par, application du critère spécial à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$, on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit

$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 + \mathrm{O}\big((x-1)^2\big)$$

et donc

$$u_n = \mathrm{e}^{s_n} - 2 + \mathrm{O}\big((\mathrm{e}^{s_n} - 2)^2\big)$$

avec

$$\mathrm{e}^{s_n} - 2 = 2\big(\mathrm{e}^{-r_n} - 1\big) = -2r_n + \mathrm{O}\big(r_n^2\big) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum u_n$ converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Par sommation de relations de comparaison (on compare au terme général d'une série à termes positifs convergente), on peut écrire avec existence

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

Par comparaison avec une intégrale, on poursuit

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Pour $k \geq 1$, on peut écrire

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En sommant pour k allant de 2 jusqu'à $n-1$, il vient

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

avec

$$\sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=-\gamma} - \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=\mathrm{O}(1/n)}.$$

En ajoutant un terme $1/n$ et en réorganisant les membres, on obtient l'identité voulue.

(c) Posons S_n la somme partielle de rang n. On a

$$\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor = k \iff 2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

On en déduit

$$S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} k = k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p} - \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p+1}.$$

On adjoint les termes pairs intermédiaires à la deuxième somme

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}-\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}.$$

On en déduit

$$S_{2^{N+1}-1}=\sum_{k=1}^{N}\left(S_{2^{k+1}-1}-S_{2^k-1}\right)+S_1$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}\right).$$

Après glissement d'indice dans la deuxième somme puis simplification

$$S_{2^{N+1}-1}=\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-\sum_{k=2}^{N+1}\left((k-1)\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-N\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{2^N-1}\frac{1}{n}-N\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{n}$$
$$=\ln\left(2^N-1\right)+\gamma+\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right)-N\ln 2-N\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\gamma.$$

Cette étude ne suffit pas pour conclure, il faut encore étudier la limite de (S_n). Pour $n\geq 1$, introduisons k tel que $2^k\leq n<2^{k+1}$. On a

$$S_n-S_{2^k-1}=k\sum_{p=2^k}^{n}\frac{(-1)^p}{p}.$$

Par application du critère spécial, cette somme est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple, celles de rangs 2^k-1 (qui vaut 0) et 2^k (qui vaut $1/2^k$). On en déduit :

$$\left|S_n-S_{2^k-1}\right|\leq\frac{k}{2^k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On peut alors conclure que la série étudiée converge et sa somme vaut γ.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) f est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. Pour $p\geq 4$,

$$\int_p^{p+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{\ln p}{p}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+v_n$ avec

$$\int_4^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq v_n\leq\int_3^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $v_n\sim\frac{1}{2}(\ln n)^2$.

Étudions $w_n=u_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n-w_{n-1}=\frac{\ln n}{n}-\int_{n-1}^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq 0$ donc (w_n) est décroissante.

D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n=\frac{1}{2}(\ln n)^2+C+\mathrm{o}(1).$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{n}-\sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln(n)}{n}=\ln 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+u_N-u_{2N}.$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\ln 2.\ln n+\ln(2)\gamma+\frac{1}{2}(\ln n)^2+C-\frac{1}{2}(\ln 2n)^2-C+\mathrm{o}(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}(1)\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$$

Exercice 32 : [énoncé]
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Or $d(x, A) = 0$ donc $x = y \in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$.
Posons $\alpha = \sup\{x \in A \mid x \leq c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A \mid x \geq c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha\,;\beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Par télescopage
$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$
donc
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)}\big(u^{n+1} - \mathrm{Id}\big).$$

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x.$$
Or
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1}\big(u^{n+1}(a) - a\big) \to 0$$
car
$$\left\|u^{n+1}(a) - a\right\| \leq \left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\| \leq 2\|a\|.$$
On en déduit $x = 0$.

(c) Par la formule du rang
$$\dim \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$
et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

(d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \to 0$. On en déduit $v_n(z) \to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Puisque pour tout $x \in E$, on a
$$\left\|v_n(x)\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|u^k(x)\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|x\| = \|x\|$$
on obtient à la limite $\left\|p(x)\right\| \leq \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, p$ est une partie fermée.

(e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n\to+\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.
D'une part, puisque
$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1}\big(u^{n+1}(z) - z\big)$$
on obtient à la limite
$$u(y) = y$$
car l'application linéaire u est continue et $\left\|u^{n+1}(z)\right\| \leq \|z\|$. On en déduit $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
D'autre part
$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{Id} - u^k)(z)\right)$$
et
$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u^k) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell-1}\right) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$$
donc $z - v_n(z) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ car $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec
$$x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \text{ et } y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $B_f(x, r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte.
L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f\big(B_f(x, r)\big)$ est aussi compacte.

(c) Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. En sommant les relations précédentes, on obtient

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S.$$

On en tire $S = 1$ et donc il est quasi-certain que deux piles consécutifs apparaissent.

(d) Il s'agit de calculer (sous réserve de convergence)

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

On exploite la relation

$$(n+2)a_{n+2} = (1-p)(n+2)a_{n+1} + p(1-p)(n+2)a_n$$

et on somme

$$\mu - 2a_2 - a_1 = (1-p)\big((\mu - a_1) + (S - a_1)\big) + p(1-p)(\mu + 2S).$$

On en tire

$$\mu = \frac{1+p}{p^2}.$$

Il ne reste plus qu'à établir la convergence de la série définissant μ. Puisque (a_n) est une suite récurrente linéaire double, son terme général est combinaison linéaire de suite géométrique de limite nulle car $a_n \to 0$. La série des na_n est alors convergente par argument de croissance comparée.

Exercice 12 : [énoncé]

Notons A_n l'événement de probabilité p_n :

« la famille a n enfants ».

Les événements A_n constituent un système complet.
On veut ici calculer la probabilité de l'événement B : « la famille a au moins 1 fille » On peut plus facilement calculer la probabilité de l'événement contraire $C = \overline{B}$: « la famille n'a que des garçons » Par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(C)\mathrm{P}(A_n).$$

Or $P_{A_n}(C)$ est la probabilité qu'une famille à n enfants n'a que des garçons et donc

$$P_{A_n}(C) = \frac{1}{2^n}.$$

On obtient alors

$$\mathrm{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda/2}.$$

On conclut

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda/2} \simeq 0,632.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Notons S_n l'événement « L'expérience au rang n est un succès ». On sait

$$\mathrm{P}(S_n) = \mathrm{P}(\overline{S_n}) = \frac{1}{2}.$$

On peut exprimer simplement[1] B_2, B_3 et B_4 en fonctions des événements S_n :

$$B_2 = S_1 \cap S_2, \quad B_3 = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4.$$

Par indépendance des résultats des différentes expériences

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

(b) L'événement A_n est la réunion des B_k pour k allant de 2 à n et ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par additivité, on a donc

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{car} \quad p_1 = 0.$$

Étudions ensuite $\mathrm{P}(B_{n+3})$.

On exprime B_{n+3} comme intersection d'événements indépendants.

L'événement B_{n+3} signifie que deux succès consécutifs sont rencontrés aux rangs $n+2$ et $n+3$ et que cette situation n'a pas été rencontrée précédemment :

$$B_{n+3} = S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

Cependant, si l'expérience a réussi au rang $n+2$ mais qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant ce rang, c'est qu'elle a échoué au rang $n+1$. Ainsi, $S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} \subset \overline{S_{n+1}}$ et donc

$$S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

1. L'expression de B_5 est plus complexe : $B_5 = \overline{S_3} \cap S_4 \cap S_5 \cap \overline{S_1 \cap S_2}$.

Aussi, sachant que l'expérience a échoué au rang $n+1$, affirmer qu'il n'y a pas eu deux succès consécutifs avant le rang $n+2$ revient à signifier qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant le rang n :

$$\overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_n}.$$

Ainsi, on a l'égalité

$$B_{n+3} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_n}.$$

Enfin, les différentes expériences étant indépendantes et l'événement A_n n'étant que fonctions des événements $S_1, \dots, S_n$, les événements de l'intersection précédentes sont indépendants ce qui donne

$$p_{n+3} = \mathrm{P}(B_{n+3}) = \mathrm{P}(\overline{S_{n+1}})\mathrm{P}(S_{n+2})\mathrm{P}(S_{n+3})\mathrm{P}(\overline{A_n}) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

(c) L'égalité précédente démontrée pour $n \geq 2$ est aussi vraie pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on peut alors écrire à la fois

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{et} \quad p_{n+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right).$$

Par différence, on obtient $p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{1}{8}p_n$ et cette égalité est encore vraie pour $n = 1$.

(d) *$(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 3 : l'expression de son terme général se déduit du calcul des puissances d'une matrice traduisant la relation de récurrence.*

Pour $n \geq 1$, introduisons X_n la colonne de coefficients p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. On a

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout $n \geq 1$. Afin de calculer la puissance de A, on étudie la réduction de cette matrice. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)$$

de racines distinctes :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Pour λ valeur propre de A, l'espace propre associé est engendré par la colonne ${}^t\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$ et on peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \begin{pmatrix} \beta\gamma(\gamma-\beta) & -(\beta+\gamma)(\gamma-\beta) & \gamma-\beta \\ -\alpha\gamma(\gamma-\alpha) & (\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha) & \gamma-\alpha \\ \beta\alpha(\beta-\alpha) & -(\beta+\alpha)(\beta-\alpha) & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

soit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'égalité $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ permet de conclure :

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Notons A_n l'évènement

« les n premieres boules tirées sont rouges ».

On a $\mathrm{P}(A_0) = 1$ et

$$\mathrm{P}(A_n \,|\, A_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n}$$

car si A_{n-1} a lieu, l'urne est composée d'une boule blanche et de $2n-1$ boules rouges lors du n-ième tirage.
Par probabilités composées

$$\mathrm{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s}. \tag{2}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

(c) En reprenant, l'expression (**??**), étudions

$$F(s)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s}=\sum_{p=1}^{+\infty}u_p(s)$$

avec

$$u_p(s)=\frac{(2p)^s-(2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour $s\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s)>0$.
Pour $s=a+ib$ fixé, la fonction $f\colon t\mapsto t^s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p-1\,;2p]$ et

$$\left|f'(t)\right|=\left|st^{s-1}\right|=|s|t^{a-1}\le|s|\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right).$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|(2p)^s-(2p-1)^s\right|\le|s|\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\left|u_p(s)\right|&\le|s|\frac{\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right)}{(2p)^a(2p-1)^a}\\&\le|s|\left(\frac{1}{(2p)^a(2p-1)}+\frac{1}{(2p)(2p-1)^a}\right).\end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R}=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\operatorname{Re}(z)\ge\alpha\text{ et }|z|\le R\right\}\quad\text{pour}\quad\alpha,R>0.$$

Les fonctions u_n sont continues sur $\Omega_{\alpha,R}$ et pour tout $s\in\Omega_{\alpha,R}$

$$\left|u_n(s)\right|\le|R|\left(\frac{1}{(2p)^\alpha(2p-1)}+\frac{1}{(2p)(2p-1)^\alpha}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\Omega_{\alpha,R}$ et sa fonction somme F est définie et continue sur $\Omega_{\alpha,R}$. Ceci valant pour tous α et R strictement positifs, on obtient que F est définie et continue sur $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\operatorname{Re}(z)\right\}$. Enfin, la fonction $s\mapsto1-2^{1-s}$ étant continue et ne s'annulant pas sur Ω, on peut prolonger ζ par continuité sur Ω en posant

$$\zeta(s)=\frac{F(s)}{1-2^{1-s}}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C=2C-2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C=0$ et $C=1/2$ seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas $x=0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x)=h(x)-xh(x)^2.$$

(c) L'application T_x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y)=1-xy$. Sur $[0\,;1]$, on vérifie $\left|T_x'(y)\right|\le1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0\,;1]$ avec $T_x(0)=0$ et $T_x(1)=1-x/2$. On en déduit $T_x\Big([0\,;1]\Big)\subset[0\,;1]$.
Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0\,;1],h_n(x)\in[0\,;1].$$

Pour $n\ge1$ et $x\in[0\,;1]$, on a par lipschitzianité

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right|\le\left|h_n\left(\frac{x}{2}\right)-h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

En répétant cette majoration

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right|\le\left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|=\frac{x}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x)-h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h. Au surplus

$$\left|h(x)-h_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}h_{k+1}(x)-h_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0\,;1]$.

(d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0\,;1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0\,;1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0\,;1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f\colon x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur $[0\,;2]$ en posant

$$\forall x \in \left]1\,;2\right], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

De même, on prolonge la solution sur $[0\,;4]$, $[0\,;8]$, etc.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $u_n(x) = \mathrm{O}(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$u_n'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}.$$

Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x \in [a\,;b]$

$$\left|u_n'(x)\right| \le \left|u_n'(a)\right| + \left|u_n'(b)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction f l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x > 0$, on a après télescopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{x}$$

et

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) = f(2) &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)\big) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $f(x+1) - f(x) = \ln x$. Enfin, f est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.
Inversement, soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées.
Étudions la fonction $h = f - g$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.
Pour $x > 0$, on a par croissance des dérivées de f et de g

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \le f'\big(\lfloor x\rfloor + 1\big) - g'\big(\lfloor x\rfloor\big) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor} + h'\big(\lfloor x\rfloor\big)$$

et parallèlement

$$h'(x) \ge h'\big(\lfloor x\rfloor\big) - \frac{1}{\lfloor x\rfloor}.$$

La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'\big(\lfloor x\rfloor\big)$ sont donc constantes égales à C.
En passant à la limite quand $x \to +\infty$ l'encadrement

$$C - \frac{1}{\lfloor x\rfloor} \le h'(x) \le C + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction Γ « connue » indéfiniment dérivable avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or
$$\left({}^tM\right)^2 = {}^t\left(M^2\right) = \mathrm{I}_n - M$$
donc
$$M^4 - 2M^2 + \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - M$$
et donc la matrice M est annulé par le polynôme
$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2+X-1).$$
C'est un polynôme scindé à racines simples donc la matrice M est diagonalisable.

Exercice 25 : [énoncé]
Posons $D = \operatorname{diag}(1,2,\dots,n)$. L'étude, coefficient par coefficient, de la relation $MD = DM$ donne que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à D sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Si λ est valeur propre de A alors $\lambda^p = 0$ d'où $\lambda = 0$. Par suite $\chi_A = X^n$ puis par le théorème de Cayley Hamilton $A^n = 0$.

(b) $\det(A+I) = \chi_A(1) = 1$

(c) Si M est inversible $\det(A+M) = \det(AM^{-1}+I)\det M$.
Or A et M^{-1} commutent donc $(AM^{-1})^p = 0$ puis, par ce qui précède
$$\det(A+M) = \det M.$$
Si M n'est pas inversible, introduisons les matrices $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$. À partir d'un certain rang les matrices M_p sont assurément inversibles (car M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres). Les matrices M_p comment avec A et on peut donc écrire
$$\det(A+M_p) = \det M_p.$$
Or $\det M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det M$ et $\det(A+M_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det(A+M)$ et on peut donc – en passant à la limite – retrouver l'égalité
$$\det(A+M) = \det M.$$

(d) Non prendre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Si v est un endomorphisme, on a
$$\dim v^{-1}(F) \le \dim F + \dim \operatorname{Ker} v.$$
Pour $k \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k+1} = (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{-1}\left(\operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^k\right)$$
donc
$$\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k+1} \le \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^k + 1.$$
Ainsi, on obtient
$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^k \le k.$$
Le polynôme caractéristique de u est
$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{n_i}$$
et celui-ci est annulateur de u. Par le lemme de décomposition des noyaux
$$E = \bigoplus_{i=1}^q \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i}$$
et donc
$$\dim E = \sum_{i=1}^q \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i}.$$
Or
$$\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i} \le n_i$$
et
$$\dim E = \deg \chi_u = \sum_{i=1}^q n_i$$
donc
$$\forall 1 \le i \le q, \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i} = n_i.$$
Enfin, par l'étude initiale
$$\forall 1 \le i \le q, \forall 0 \le m \le n_i \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^m = m.$$

(b) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, le polynôme caractéristique Q de u_F annule u_F et divise χ_u. On obtient ainsi un polynôme Q de la forme

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{m_i} \text{ avec } m_i \leq n_i$$

vérifiant

$$F \subset \operatorname{Ker} Q(u).$$

Or, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\operatorname{Ker} Q(u) = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}$$

puis, en vertu du résultat précédent

$$\dim \operatorname{Ker} Q(u) = \sum_{i=1}^{q} m_i = \deg Q = \dim F.$$

Par inclusion et égalité des dimensions

$$\operatorname{Ker} Q(u) = F.$$

(c) On reprend les notations qui précèdent

$$F = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}.$$

On peut alors faire correspondre à F le tuple $(m_1, \ldots, m_q)$.
Cette correspondance est bien définie et bijective car

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i}, E = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{n_i}$$

et

$$\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} = mi.$$

Il y a donc autant de sous-espaces vectoriels stables que de diviseurs unitaires de χ_u.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Par l'absurde supposons X et Y colinéaires. Il existe alors une colonne X_0 réelle telle que

$$X = \alpha X_0 \text{ et } Y = \beta X_0 \text{ avec } (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

On a alors $Z = (\alpha + \mathrm{i}\beta) X_0$ et la relation $AZ = \lambda Z$ donne

$$(\alpha + \mathrm{i}\beta) A X_0 = \lambda (\alpha + \mathrm{i}\beta) X_0.$$

Puisque $\alpha + \mathrm{i}\beta \neq 0$, on peut simplifier et affirmer $AX_0 = \lambda X_0$. Or X_0 est une colonne réelle donc, en conjuguant, $AX_0 = \overline{\lambda} X_0$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$ ce qui est exclu.

(b) On écrit $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. La relation $AZ = \lambda Z$ donne en identifiant parties réelles et imaginaires

$$AX = aX - bY \text{ et } AY = aY + bX.$$

On en déduit que $\operatorname{Vect}(X, Y)$ est stable par A.

(c) Le polynôme caractéristique de f est

$$(X+1)(X-2)(X^2 - 2X + 2).$$

Les valeurs propres de A sont $-1, 2$ et $1 \pm \mathrm{i}$ avec

$$E_{-1}(A) = \operatorname{Vect} {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \operatorname{Vect} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{1+\mathrm{i}}(A) = \operatorname{Vect} {}^t\big(\mathrm{i} \quad -$$

Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u induit par f sur ce plan divise le polynôme caractéristique de f tout en étant réel et de degré 2. Ce polynôme caractéristique ne peut qu'être

$$(X+1)(X-2) \text{ ou } X^2 - 2X + 2.$$

Dans le premier cas, 1 et 2 sont valeurs propres de u et les vecteurs propres associés sont ceux de f. Le plan P est alors

$$\operatorname{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Dans le second cas, pour tout $x \in P$, on a par le théorème de Cayley Hamilton

$$u^2(x) - 2u(x) + 2x = 0_E$$

et donc la colonne X des coordonnées de x vérifie

$$X \in \operatorname{Ker}(A^2 - 2A + 2\mathrm{I}_4).$$

Après calculs, on obtient

$$X \in \operatorname{Vect}({}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

(b) C'est immédiat puisque l'indépendance mutuelle d'une famille infinie se ramène à celle des sous-familles finies.

Exercice 19 : [énoncé]
On étudie
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right).$$
Par indépendances des $\overline{A_n}$, on a
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)=\prod_{n=0}^{N}\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr).$$
Or $1-x\le \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)\le\prod_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{P}(A_n)}=\exp\left(-\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(A_n)\right).$$
À la limite quand $N\to+\infty$
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\le\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(A_n)\right)$$
où l'on comprend l'exponentielle nulle si la série des $\mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 20 : [énoncé]
(a) On a
$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}.$$
Par continuité décroissante
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right).$$
Enfin, par mutuelle indépendance
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_k}).$$
La relation demandée est dès lors immédiate.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons (i). On a
$$\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_k})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{n}\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_k})\bigr)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_k})\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty.$$
Ainsi, la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ est divergente.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Inversement, si la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ diverge, puisque les termes sommés sont positifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On peut alors suivre la démonstration précédente à rebours et conclure (i).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons (ii).
Si $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge grossièrement.
Si en revanche $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors
$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)=\ln\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\mathrm{P}(A_n)$$
et à nouveau la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge, cette fois-ci par équivalence de séries à termes de signe constant.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons (iii).
Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en constatant
$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\iff\mathrm{P}(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Exercice 21 : [énoncé]
(a) La famille définit une loi de probabilité si elle est formée de réels positifs, qu'elle est sommable et de somme égale à 1. Ceci a lieu si, et seulement si, $\lambda=1/\zeta(s)$.
(b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $p_1,\dots,p_m$ des nombres premiers deux à deux distincts.
$$A_{p_1}\cap\ldots\cap A_{p_m}=\bigl\{n\in\mathbb{N}^*\bigm|\forall k\in[\![1\,;m]\!],\ p_k\mid n\bigr\}.$$
Les p_k étant des nombres premiers deux à deux distincts, on a la propriété arithmétique
$$\bigl(\forall k\in[\![1\,;m]\!],\ p_k\mid n\bigr)\iff p_1\dots p_m\mid n$$
et donc
$$A_{p_1}\cap\ldots\cap A_{p_m}=A_{p_1\dots p_m}.$$

Il reste à calculer les probabilités des événements A_p.

$$\mathrm{P}(A_p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{p^s}.$$

L'égalité $(p_1 \dots p_m)^s = p_1^s \dots p_m^s$ donne alors immédiatement

$$\mathrm{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}) = \mathrm{P}(A_{p_1 \dots p_m}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_m)^s} = \mathrm{P}(A_{p_1}) \times \dots \times \mathrm{P}(A_{p_m}).$$

On peut conclure que les événements A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

(c) On a

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

car tout entier naturel supérieur à 2 est divisible par un nombre premier. Énumérons les nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. On peut écrire par continuité décroissante et indépendance

$$\mathrm{P}\big(\{1\}\big) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_{p_k}}\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{P}(\overline{A_{p_k}}) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Or $\mathrm{P}(\{1\}) = \lambda$ et donc

$$\lambda = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Après passage à l'inverse, ceci fournit la relation demandée sous réserve de comprendre

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

(d) Par l'absurde, supposons la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ sommable. On a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Or

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

est terme général d'une série convergente et on peut donc introduire

$$M = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right).$$

Aussi, pour tout $s > 1$,

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}}\right) \le \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)$$

et donc, lorsque N tend vers l'infini,

$$\zeta(s) \le M.$$

Ceci est absurde car ζ est de limite $+\infty$ quand s tend vers 1.