

# Théorie de la mesure

## Méthode et contexte

- Toujours se demander : dans quel ensemble je travaille, quelle est la tribu, quelle est la mesure ?
- Utiliser la régularité des mesures ; utiliser les raisonnements par densité :  
indicateurs  $\rightarrow$  fonctions étagées  $\rightarrow$  positives (limite croissante)  $\rightarrow$  mesurables (parties positive/négative).
- User et abuser des  $\limsup$  et  $\liminf$ .

## Résultats principaux

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace mesuré  $(E, \mathcal{A}, \mu)$ , et on pourra utiliser un espace métrique  $(T, d)$ .

THÉORÈME 1 (Dynkin). — *Le  $\sigma$ -système engendré par un  $\pi$ -système est égal à la tribu engendrée par ce dernier.*

THÉORÈME 2 (Convergence monotone). — *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables de  $E$  dans  $[0, +\infty]$ , telle que pour tout  $n \geq 0$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ . Alors, en notant  $f$  la limite simple de cette suite, on a que  $f$  est mesurable, et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

THÉORÈME 3 (Convergence dominée). — *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers  $f$ . Si il existe  $g$  intégrable telle que pour tout  $n \geq 0$ ,  $|f_n| \leq g$ , alors  $f$  est intégrable et :*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n$$

REMARQUE. On peut seulement supposer les conditions ci-dessus vraies presque partout, mais dans ce cas il faut imposer la mesurabilité de la limite simple, ou bien travailler dans la tribu complétée, comme l'explique la remarque suivante.

REMARQUE. Si  $\tilde{f} : E \mapsto F$  est presque partout égale à une fonction mesurable  $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \mapsto (F, \mathcal{B})$ , alors  $\tilde{f}$  est mesurable pour la tribu complétée  $\overline{\mathcal{A}}$  de  $\mu$  sur  $E$ .

THÉORÈME 4 (Régularité des mesures boréliennes finies). — *Si  $\mu$  est une mesure borélienne finie sur un espace métrique  $(T, d)$ , alors  $\mu$  est régulière, i.e pour tout  $A \in \mathcal{B}(T)$  :*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \{ \mu(U) \mid U \text{ ouvert, } A \subset U \} \\ &= \sup \{ \mu(F) \mid F \text{ fermé, } F \subset A \} \end{aligned}$$

REMARQUE. Dans un espace polonais (métrique séparable complet), on a de plus que la régularité intérieure est sur les compacts.

THÉORÈME 5 (Régularité des mesures de Radon). — *Si  $\mu$  est une mesure de Radon sur un espace métrique localement compact séparable (ex.  $\mathbb{R}^d$ ), alors  $\mu$  est régulière, et la régularité intérieure est sur les compacts.*

THÉORÈME 6 (Représentation de Riesz-Markov). — *Si  $E$  est un espace métrique localement compact séparable, et  $\Lambda : C_c(E) \mapsto \mathbb{R}$  une forme linéaire positive, alors il existe une unique mesure de Radon  $\mu$  sur  $E$  telle que, pour tout  $f \in C_c(E)$  :*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu$$

REMARQUE. Avec ce qui précède, on obtient de plus que la mesure  $\mu$  est régulière.

THÉORÈME 7 (Inégalités d'Hölder et de Young). — Soient  $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ ,  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ , on a les inégalités :

- Si  $p$  et  $q$  sont des exposants conjugués, i.e. :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .
- Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ , alors  $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

THÉORÈME 8 (Riesz-Fischer). — Si  $p \in [1; +\infty]$ , alors  $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace de Banach.

REMARQUE. La preuve du théorème ci-dessus donne en particulier que la convergence en norme  $L^p$  implique l'existence d'une extraite qui converge presque partout. Le théorème de convergence dominée fournit une sorte de réciproque, i.e que la convergence presque partout entraîne la convergence  $L^p$ , sous réserve d'avoir une domination intégrable.

THÉORÈME 9 (Densité). — Soit  $p \in [1; +\infty[$ .

1. Les fonctions étagées sont denses dans  $L^p$ . De plus, si  $\mathcal{A}$  est généré par une famille dénombrable dense et si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, alors  $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$  est séparable.
2. (a) Si  $(E, d)$  est un espace métrique et  $\mu$  une mesure borélienne finie, alors les fonctions lipschitziennes sont denses dans  $L^p$ .
- (b) Si de plus  $(E, d)$  est localement compact séparable et  $\mu$  est une mesure de Radon, alors les fonctions lipschitziennes à support compact sont denses dans  $L^p$ .

REMARQUE. Si  $(E, d)$  est une métrique séparable, alors  $\mathcal{B}(E)$  est dénombrablement généré.

REMARQUE. Pour le point 2.(a), il suffit en fait que la mesure soit extérieurement régulière sur les ouverts, et pour le point 2.(b), il suffit qu'elle soit de plus intérieurement régulière sur les compacts.

THÉORÈME 10 (Dérivée de Radon-Nikodym). — Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $(E, \mathcal{A})$ . Si  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ , alors il existe  $f : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$  mesurable tel que  $\nu = f\mu$ .

REMARQUE. Si  $\nu$  est une mesure signée (en particulier finie), et  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie, on a l'équivalence entre les propositions suivantes :

- (i)  $\nu \ll \mu$
- (ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow |\nu|(A) \leq \varepsilon$

L'hypothèse de finitude de  $\nu$  est cruciale car elle donne l'intégrabilité de la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à  $\mu$ .

THÉORÈME 11 (Fubini-Tonelli). — Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ . Si  $f : E_1 \times E_2 \mapsto [0, +\infty]$  est mesurable, alors :

1.  $x \mapsto \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y)$  est mesurable pour  $\mathcal{E}_1$ , et  $y \mapsto \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x)$  est mesurable pour  $\mathcal{E}_2$ .
2. On a :

$$\int f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{E_1} \left( \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{E_2} \left( \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

REMARQUE. On dispose aussi de la version Fubini-Lebesgue dans le cas intégrable, qui aboutit aux mêmes conclusions, avec en plus que, pour  $|f|$ , les deux fonctions de 1. sont finies presque-partout.

REMARQUE. Les égalités des théorèmes de Fubini reposent entièrement sur le théorème de la classe monotone, d'où l'importance de l'hypothèse de  $\sigma$ -finitude.

COROLLAIRE 12 (Intégration par parties). — Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions mesurables, localement intégrables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t) dt.$$

Alors,  $F$  et  $G$  sont absolument continues, dérivables presque partout, de dérivées presque partout égales respectivement à  $f$  et  $g$ , et de plus, pour tout  $a < b$  :

$$\int_a^b f(t)G(t)dt = \left( F(b)G(b) - F(a)G(a) \right) - \int_a^b F(t)g(t)dt$$

THÉOREME 13 (Changement de variable). — Soit  $\varphi$  un  $C^1$ -difféomorphisme entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\varphi'(x)$  sa différentielle et  $J_\varphi(x) := \det(\varphi'(x))$  le jacobien de  $\varphi$  au point  $x \in U$ . Alors :

1. Pour toute fonction  $f \geq 0$  borélienne et tout borélien  $B$  de  $V$ , on a :

$$\int_B f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx$$

2. Pour toute fonction borélienne  $f$  sur  $V$ , la condition que  $f$  soit intégrable sur  $V$  est identique à la condition que la fonction  $|J_\varphi(x)|f(\varphi(x))$  soit intégrable sur  $U$ , et dans ce cas, la formule du changement de variable ci-dessus est encore valide.

## Outils importants

COROLLAIRE 14 (Unicité des mesures). — Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur  $(E, \mathcal{A})$  qui coïncident sur un  $\pi$ -système  $\mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ . Alors :

1. Si  $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$ , alors  $\mu = \nu$ .
2. Si il existe une suite croissante  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  tels que  $\bigcup_n A_n = E$ , et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$ , alors  $\mu = \nu$ .

LEMME 15 (Fatou). — Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n$$

PROPOSITION 16 (Continuité des intégrales). — Soit  $t_0 \in T$  et  $f : T \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ . Si :

- Pour tout  $t \in T$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.
- Pour presque tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue en  $t_0$ .
- Il existe  $g$  intégrable telle que pour tout  $t \in T$ , pour presque tout  $x \in E$ , on a  $|f(t, x)| \leq g(x)$

Alors,  $t \mapsto \int f(t, x)d\mu(x)$  est continue en  $t_0$ .

PROPOSITION 17 (Dérivation des intégrales). — Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ , et  $f : I \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ . Si :

- Pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est mesurable et intégrable.
- Pour presque tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est dérivable en  $t_0$ .
- Il existe  $g$  intégrable telle que pour tout  $t \in I$ , pour presque tout  $x \in E$ , on a

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq g(x) |t - t_0|$$

Alors,  $t \mapsto \int f(t, x)d\mu(x)$  est dérivable en  $t_0$ , de dérivée  $\int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)d\mu(x)$ .

REMARQUE. On peut remplacer les deux dernières conditions par les suivantes, plus fortes, qui assurent alors la dérivabilité en tout point de l'intervalle :

- Pour presque tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur tout  $I$ .
- Il existe  $g$  intégrable tel que pour presque tout  $x \in E$ , pour tout  $t \in I$ , on a  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$ .

PROPOSITION 18 (Mesure de Stieltjes). — Il y a une correspondance entre les fonctions croissantes continues à droite, et les mesures de Radon. Plus précisément :

- Si  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $F_\mu$  suivante est croissante, continue à droite.

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu(]0; x]) & \text{si } x \geq 0 \\ -\mu(]x; 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Si  $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est croissante, continue à droite, alors il existe une unique mesure de Radon  $\mu$  telle que, pour tout  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(]a; b]) = F(b) - F(a)$ .

COROLLAIRE 19 (Décomposition de Lebesgue). — Si  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $(E, \mathcal{A})$ , alors il existe une unique décomposition  $\nu = \nu_a + \nu_s$  en deux mesures telles que  $\nu_a$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ , et  $\nu_s$  est étrangère à  $\mu$ .

PROPOSITION 20 (Points de Lebesgue). — Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ , alors presque tous les points de  $\mathbb{R}^d$  sont des points de Lebesgue pour  $f$ .

COROLLAIRE 21. — Si  $\mu$  est une mesure de Radon absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors sa dérivée de Radon-Nikodym  $f$  est localement intégrable, et pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\lambda_d(B(x, r))} = f(x)$$

REMARQUE. On peut en fait montrer que pour une mesure étrangère à  $\lambda_d$ , le taux d'accroissement ci-dessus tend vers 0. On en déduit que pour une mesure borélienne  $\sigma$ -finie quelconque, la limite de ce taux est presque-partout égal à la dérivée de Radon-Nikodym de la partie absolument continue de la décomposition de Lebesgue de cette mesure.

COROLLAIRE 22. — L'intégrale d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  contre la mesure de Lebesgue est presque partout dérivable, de dérivée  $f$ .

REMARQUE. La réciproque est fautive : une fonction borélienne dérivable presque partout n'est pas forcément égale à l'intégrale de sa dérivée. Par exemple l'escalier de Cantor est croissant continu sur  $[0, 1]$ , de dérivée presque partout nulle, mais  $F(1) - F(0) = 1$ .

En fait, si  $f$  est croissante continue, par théorème de Stieltjes elle définit une mesure de Radon, et si la partie singulière dans sa décomposition de Lebesgue est nulle, i.e la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on dit que  $f$  est absolument continue. Sinon, il manque la contribution de la partie singulière.

## Autres résultats

THÉORÈME 23 (Egorov). — Si  $\mu$  est une mesure finie, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions mesurables réelles convergeant  $\mu$ -presque-partout vers  $f$  mesurable, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ , et  $\mu(E \setminus A) \leq \varepsilon$ .

THÉORÈME 24 (Lusin). — Soit  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  borélienne. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \subset [a, b]$  avec  $\lambda([a, b] \setminus K) \leq \varepsilon$ , tel que la restriction de  $f$  à  $K$  est continue.

REMARQUE. Le résultat ci-dessus est en fait une équivalence, i.e une fonction est mesurable si et seulement si elle est continue sur un ensemble de mesure arbitrairement grande.

THÉORÈME 25 (Décomposition de Jordan). —

REMARQUE. Version signée/complexe de représentation de Riesz.

THÉORÈME 26 (Dualité). — Si  $p$  et  $q$  sont deux exposants conjugués finis, alors  $L^q$  est le dual topologique de  $L^p$ .