Théorie K.A.M paradifférentielle

Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet,
sous la direction de Thomas Alazard.

Table des matières

I Introduction

Ayaya

II Difféomorphismes du cercle

Nous allons dans cette section présenter rapidement les homéomorphismes du cercle et énoncer quelques propriétés fondamentales puisque ces objets nous offrent un cadre d'application des techniques de résolution d'équations que nous verrons dans les sections suivantes. On utilise les notations suivantes :
On note $\mathbb{S}^1$ le cercle de dimension 1 : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
On note également Π l'application $t \to \exp(2i\pi t)$ (la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1$).

II.1 Problèmes de conjuguaison

Définition II-1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. On appelle relèvement de f, une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f \circ \Pi = \Pi \circ F$$

Remarque. Les relèvements permettent de faire le parallèle entre les fonctions du cercle et les fonctions réelles.

Théorème II-1. — *Toute application continue du cercle possède un relèvement continu. De plus, tous ses relèvements continus diffèrent d'une constante entière.*

Dans la suite, toute propriété qui sera énoncée pour une application continue du cercle concernant ses relèvements, ce dernier sera pris continu.

Définition II-2. Pour une application continue du cercle f, on définit son degré $deg(f) = F(1) - F(0)$ avec F un relèvement de f.

Remarque. On peut démontrer que ce nombre est un entier relatif et qu'il ne diffère pas selon les relèvements (continus).

Définition II-3. On dit que f préserve l'orientation si pour tout triangle avec ses sommets sur $\mathbb{S}^1$, l'image de ses sommets par f n'inverse pas l'ordre de ses sommets.

Ce qui nous intéressera dans la suite de cette étude sont surtout les homéomorphismes du cercle, qui sont les applications continues, bijectives et de réciproques continues (la dernière propriété est redondante du fait de la compacité de $\mathbb{S}^1$).

Proposition II-2. — *Prenons f un homéomorphisme préservant l'orientation alors, $deg(f) = 1$ et de plus ses relèvements sont croissants.*

Proposition II-3. — *Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation et F un relèvement de f. Alors le nombre $\rho(F) = \frac{F^n(x)}{n}$ existe et ne dépend pas de x et ne diffère que d'un entier relatif entre chaque relèvement.*

Définition II-4. On définit alors le nombre de rotation de f $\rho_0(f) = \rho(F) \mod [1]$

Ce nombre est primordial puisque celui-ci permet de classifier les homéomorphismes préservant l'orientation puisqu'en effet on a le Théorème de Poincaré :

Théorème II-4 (Poincaré). — *Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation, si son nombre de rotation est un irrationnel alors f est semi-conjugué à la rotation d'angle $\rho_0(f)$.*

On peut même dire un peu plus si on a des informations sur la régularité de f, c'est l'essence du théorème de Denjoy :

Théorème II-5 (Denjoy). — *En plus des hypothèses du théorème de Poincaré, si f est C^2 alors il est cette fois-ci conjugué à la rotation d'angle $\rho_0(f)$.*

II.2 Contres-exemples au théorème de Denjoy

est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons des contre-exemples de régularité optimale, dus à Denjoy, et qui sont développé par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X.

II.2.1 Outils

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème II-6 (Denjoy). — *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$-difféomorphisme f du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α.*

Remarque. Ici, la régularité non-entière est définie au sens de Hölder, i.e f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $1-\epsilon$-hölderienne.

Pour construire un contre-exemple, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas $\mathcal{C}^2$: on sait déjà par le théorème de Poincaré qu'un tel f est semi-conjugué à R_α par une fonction continue croissante h du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si h n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle I non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que I est un intervalle errant pour la dynamique de f), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.
L'idée ici est donc de construire une fonction f qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés de cet intervalle est sommable.

On se servira de l'invariant de conjuguaison suivant :

Définition II-5. Un homéomorphisme du tore f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au tore tout entier.

Proposition II-7. —

1. *Si f est conjugué à g minimal, alors f est minimal.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors R_α est minimal*

Preuve. (1) est immédiat en utilisant la bicontinuité de la conjuguaison.
(2) s'obtient en remarquant que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

□

La proposition suivante sera utile dans la suite :

Proposition II-8. — *Soient D_1, D_2 deux ensembles denses dans $[0,1]$, et $f : D_1 \to D_2$ une surjection croissante (resp. strictement croissante), alors f admet un unique prolongement continu, croissant (resp. strictement croissant), de $[0,1]$ dans lui-même.*

Preuve. L'unicité du prolongement est immédiate par densité de D_1, car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0,1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_1 qui tend vers x, que l'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de f, et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de f est dense.

$\square$

II.2.2 Contre-exemple continu

On note $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$

On peut par exemple choisir $l_n = \dfrac{c}{n^2+1}$ où c est une constante bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \mod 1$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où $\begin{cases} b_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m<\alpha_n\}} l_m \\ c_n := \displaystyle\sum_{\{m,\ \alpha_m\leq\alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

Lemme II-9. — *$K := [0,1] \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_n$ est un fermé non trivial.*

Preuve. Cet ensemble est clairement distinct de $[0,1]$, et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0,1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui est absurde.

$\square$

Remarque. K est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction h définie par morceaux sur les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h : I_n \mapsto \alpha_n$.

Lemme II-10. — *Les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont ordonnés identiquement aux $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus h admet un prolongement continu sur $[0,1]$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{Z},\ h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$*

Preuve.
Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$, alors : $b_{n_2} - c_{n_1} = \displaystyle\sum_{k,\alpha_{n_1}<\alpha_k<\alpha_{n_2}} l_k > 0$, ce qui prouve le premier point. On en déduit immédiatement que h est croissante, et alors par la Proposition II-8, admet un prolongement continue croissant de [0,1] dans lui-même.
Par définition, on a l'inclusion $I_n \subset h^{-1}(\{\alpha_n\})$. Si par l'absurde il existe x tel que $h(x) = \alpha_n$ et $x \notin I_n$, alors $d(x, I_n) > 0$. On suppose sans perte de généralité que $x < b_n$, alors par densité de $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ il existe $y \in I_{n'}$ tel que $x \leq y < b_n$, et la croissance de h donne $\alpha_n = h(x) \leq h(y) \leq \alpha_n$, i.e $\alpha_{n'} = \alpha_n$, ce qui est absurde, et donne donc l'égalité voulue.

$\square$

On prolonge maintenant h sur $\mathbb{R}$ par la relation, pour $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{Z}$, $h(x+p) = h(x)+p$, et on note $I_{n,p} := h^{-1}(\alpha_n + p) = I_n + p$. Alors $U := \displaystyle\bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{I}_{n,p}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}\setminus U$ est encore un ensemble de Cantor.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant g_n de I_n sur I_{n+1}, par exemple la transformation affine : $g_n(x) := \dfrac{l_n+1}{l_n}x + b_{n+1} - b_n\dfrac{l_{n+1}}{l_n}$, qui vérifie bien $g_n(b_n) = b_{n+1}$ et $g_n(c_n) = c_{n+1}$. Cela définit alors une application g de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ dans lui-même, strictement croissante, que l'on prolonge sur $\mathbb{R}$ entier de la même manière que h. Par la Proposition II-8, g se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On a alors par construction $h\circ g = R_\alpha \circ h$ sur $\bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_{n,p}$, mais cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$ et les fonctions en jeu sont continues, donc l'égalité a lieu sur tout $\mathbb{R}$. Par 1-périodicité de ces fonctions, elles descendent en applications du tore, et on a la propriété suivante :

Théorème II-11. — *L'homéomorphisme du cercle g construit précédemment vérifie $\rho(g) = \alpha$, mais g n'est pas conjugué à R_α.*

Preuve. $\rho(g) = \alpha$ est immédiat car la semi-conjuguaison préserve le nombre de rotation (cf. [GV19]). Ensuite, $K = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_n$ est invariant par g par construction de ce dernier, mais cet ensemble est fermé non trivial d'après le Lemme II-9, donc g n'est pas minimal, et alors la Proposition II-7 permet de conclure que g n'est pas conjugué à R_α.

□

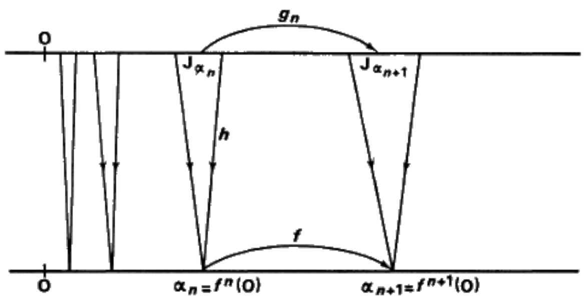

Figure 1 – [Her79] Schéma de la construction où $f = R_\alpha$

II.2.3 Contre-exemple dérivable

On considère toujours un homéomorphisme croissant g_n de I_n sur I_{n+1}, prolongé en $g_{n,p} = g_n + p$ sur $I_{n,p}$. On va de plus imposer que g_n soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant :

$$(*)\begin{cases} g_n'(x) = 1 \quad \text{si } x \in \partial I_n \\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} \sup\limits_{x\in I_n} |g_n'(x) - 1| = 0 \end{cases}$$

On considèrera enfin les fonctions g_n' prolongées continuement sur tout l'intervalle [0,1], en les prenant constantes égales à 1 sur le complémentaire de I_n

Lemme II-12. — $g_n : x \mapsto b_{n+1} + \int_{b_n}^{x} 1 + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)(t-b_n)(c_n-t)\mathrm{d}t$ *vérifie la condition* $(*)$.

Preuve. g_n est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme car sa dérivée est strictement positive. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{c_n} 1 + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)(t-b_n)(c_n-t)\mathrm{d}t &= l_n + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)\int_{b_n}^{c_n}(t-b_n)(c_n-t)\mathrm{d}t \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)\left[\frac{u^2}{2}l_n - \frac{u^3}{3}\right]_0^{l_n} \\ &= l_n + \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)\frac{l_n^3}{6} = l_{n+1} \end{aligned}$$

Donc g_n envoie bien I_n sur I_{n+1}. La première condition de $(*)$ est immédiate, la seconde découle du fait que pour $x \in I_n$: $|g_n'(x) - 1| \leq 6(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$ par hypothèse.

□

LEMME II-13. — *La fonction η qui coïncide avec g_n' sur I_n et qui vaut 1 ailleurs est continue et vérifie* $\eta = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (g_n' - 1)$

PREUVE. En différenciant les cas $x \in I_n$, et $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, l'égalité ponctuelle est immédiate. On va de plus montrer que la convergence est uniforme, ce qui donnera la continuité de η.

Soit $N \in \mathbb{N}$, et $x \in [0,1]$, on a : $\sum_{|k|\geq N} (g_n'(x) - 1) = \begin{cases} g_n'(x) - 1 & \text{si il existe } n \text{ tel que } x \in I_n \text{ et } |n| \geq N \\ 0 \end{cases}$

Dans tous les cas, $\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{|k|\geq N} (g_n'(x) - 1) \right| \leq \sup_{|n|\geq N} |g_n'(x) - 1|$. Or par hypothèse sur les dérivées, ce majorant tend vers 0 et donc la convergence est uniforme.

□

La fonction g admet comme dans la partie précédente un prolongement en homéomorphisme de [0,1] mais on a cette fois le résultat plus fort suivant :

THÉORÈME II-14. — *g est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $\rho(g) = \alpha$ mais n'est pas conjugué à R_α.*

PREUVE. Le seul point qui ne découle pas du Théorème II-11 est que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Pour montrer cela, on commence par remarquer que g est d'une part continue, et que d'autre part g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $U := \bigcup_{n,p\in\mathbb{Z}} I_{n,p}$ qui est de mesure pleine dans $\mathbb{R}$.

Alors, si A est un borélien de mesure de Lebesgue nulle, on a $\lambda(g(A)) \leq \lambda(g(A \cap (\mathbb{R} \setminus U))) + \lambda(g(A \cap U))$. Or le premier terme est nul car $\mathbb{R} \setminus U$ est stable par g et de mesure nulle, et le second terme est nul par théorème de changement de variable, g étant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur U, et A de mesure nulle.

On en déduit que la mesure de Stieltjes associée à g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi g admet une dérivée de Radon-Nikodym $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, telle que $g(x) = g(0) + \int_0^x \mu(t)\mathrm{d}t$. Mais alors μ est presque partout égale à g_n' sur les $(I_{n,p})_{p\in\mathbb{Z}}$ d'après la théorie des points de Lebesgue, i.e presque partout égale à η car U est de mesure pleine, et on a finalement : $g(x) = g(0) + \int_0^x \eta(t)\mathrm{d}t$.

On en déduit que g est un homéomorphisme $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ à dérivée non nulle, et donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

□

II.2.4 Régularité hölderienne

Soit $w : [0,1] \mapsto [0,1]$ un module de continuité, on considère l'ensemble des fonctions continue pour ce module, $\mathcal{C}^w(\mathbb{T}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \;\middle|\; \sup_{0<|x-y|\leq 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}$

En considérant la fonction g construite dans la partie précédente, on a le lemme :

LEMME II-15. — $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{1}{w(l_n)} < +\infty \Rightarrow g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$

PREUVE. On suppose sans perte de généralité que $w(x)/x$ est décroissante. En reprenant le g_n' de la construction précédente, on constate que :

$$|g_n''(t)| = \frac{6}{l_n^2}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)|(c_n - t + b_n - t)| \leq \frac{3}{l_n}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)$$

L'inégalité des accroissements finis donne donc :

$\sup\limits_{0<x-y\leq 1} \left| \frac{g_n'(x) - g_n'(y)}{w(x-y)} \right| \leq \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \frac{3}{w(l_n)} < +\infty$, et on en déduit que $g' \in \mathcal{C}^w(\mathbb{T})$ car $g' - 1$ est limite uniforme de $\sum\limits_{k=-n}^{n} (g_k' - 1)$, et les fonctions dans la somme ayant des supports disjoints 2 à 2, on a :

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} (g_k' - 1) \right|_{\mathcal{C}^w} \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{Z}} |g_n' - 1|_{\mathcal{C}^w} \leq \frac{6}{l_n}(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) < +\infty$$

$\square$

La suite $l_n := \frac{c}{(|n| + k)(log(|n| + k)^{1+\epsilon}}$ vérifie le critère du Lemme II-15 pour le module $w(x) = O(x^{1-\epsilon'})$, pour tout $\epsilon' > \epsilon$, ce qui permet de conclure la preuve du Théorème II-6

III Décomposition de Littlewood-Paley

Cette partie a pour objectif d'exposer les principaux théorèmes de paralinéarisation, avec pour point de départ la décomposition de Littlewood-Paley. On s'appuiera sur [Mé08], [GV19], et [AG91] comme références, en particulier les chapitres 4 et 5 du livre de Métivier. Nous allons dans cette section présenter la décomposition de Littlewood-Paley. C'est une décomposition de fonction dans laquelle chaque terme a un spectre borné. Nous allons également présenter des propriétés sur cette décomposition.

Définition III-1 (Transformée de Fourier). On note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0^0(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\xi\cdot x} f(\xi)\mathrm{d}x$, et on pourra utiliser la notation $\hat{f}$ pour désigner $\mathcal{F}f$. On manipulera de plus le prolongement usuel de $\mathcal{F}$ à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'existence et, plus précisément, à la construction de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec un support au voisinage de 0 mais également constantes au voisinage de 0.

Considérons le cas $d = 1$ et notons $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que g appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ puisqu'on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g^{(n)}(x) = xQ_n(|x|) \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{2}|^2}\right) \tag{3.1}$$

avec Q_n une fraction rationnelle dont le pôle se situe en 1 , ce qui montre la continuité des $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par croissances comparées. On étend alors cette construction à $\mathbb{R}^d$ en notant $\psi(x) = g(|x|)$, qui est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(0, 1)$ et est égale à 1 sur $B(0, \frac{1}{2})$.

En posant $\chi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$, on a ainsi $\mathrm{supp}(\chi(2^{-k}\cdot)) \subset B(0, 2^{k+1}) \setminus B(0, 2^{k-1})$, et par téléscopage on obtient l'égalité :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ 1 = \psi(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k}\xi)$$

LEMME III-1. — *Pour tout $u \in \mathcal{S}$ on a :*

$$\hat{u} = \psi \hat{u} + \sum_{k=0}^{\infty} \chi(2^{-k} \cdot) \hat{u}$$

et la série converge dans l'espace de Schwartz.

PREUVE. Soit $u \in \mathcal{S}$, montrons que pout tout α et $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$, $\left\| x^\alpha \partial^\beta (u - \psi(2^{-k}x)u) \right\|_\infty \to_{k \to \infty} 0$ On considère pour cela :

$$\begin{aligned} \left\| x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-k}x)g) \right\|_\infty &= \left\| x^\alpha \partial^\beta (g - \psi(2^{-k}x)g) \right\|_{\infty, [2^{k-1}; 2^{k+1}]} \\ &\leq \left\| x^\alpha \partial^\beta g \right\|_{\infty, [2^k; 2^{k+1}]} + \left\| x^\alpha \partial^\beta g (1 - \psi(2^{-k}x) \right\|_{\infty, [2^{k-1}; 2^k]} \end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{S}$, on a $\left\| x^\alpha \partial^\beta g \right\|_{\infty, [2^k; 2^{k+1}]}$ qui tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. En utilisant la formule de derivation de Leibniz sachant que $\partial^j \psi = O(x^j)$ (en utilisant (3.1)) on a que $\left\| x^\alpha \partial^\beta g \right\|_{[2^k; 2^{k+1}]}$ tend bien vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. On utilise ensuite la continuité de la transformé de Fourier et de la transformé de Fourier inverse sur $\mathcal{S}$.

□

DÉFINITION III-2. On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

PROPOSITION III-2. — *Soit $u \in \mathcal{S}'$, en posant :*

$$S_n u := \sum_{k=-1}^{n-1} \Delta_k u$$

On a que :

$$\lim_{n \to \infty} S_n u = u$$

REMARQUE. Dans la suite, pour simplifier les calculs, il nous arrivera d'écrire S_{-k} pour $k \geq 0$, et dans ce cas on prend comme définition $S_{-k} := S_0 = \Delta_{-1}$.

PREUVE. Prenons $u \in \mathcal{S}'$ et $v \in \mathcal{S}$.

$$\langle \mathcal{F}(S_n u), v \rangle = \langle \psi(2^{-n}\xi) \mathcal{F}(u), v \rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-n}\xi) v \rangle$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \psi(2^{-n}\xi) v = v$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par le Lemme III-1. On obtient donc :

$$\mathcal{F}(S_n u) \to \mathcal{F}(u) \quad \text{dans } \mathcal{S}$$

Par continuité de $\mathcal{F}^{-1}$, on a finalement $S_n u \to u$ quand $n \to +\infty$.

□

DÉFINITION III-3 (Espaces de Sobolev). Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, on définit

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d), \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

et on admet que c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}$

Définition III-4 (Espaces de Zygmund). Pour tout $\alpha > 0$, on définit

$$C_*^\alpha(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d), \sup_{k\geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} < +\infty \right\}$$

et on admet que c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|u\|_{C_*^\alpha} := \sup_{k\geq -1} 2^{k\alpha}\|\Delta_k u\|_{L^\infty}$

Lemme III-3 (Inégalité de Bernstein). — *Soit B une boule, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, et $\lambda > 0$. Si $u \in L^p$ est tel que $supp(\hat{u}) \subset \lambda B$, alors*

$$\max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{|\alpha|+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p} \tag{3.2}$$

Preuve. On commence par justifier que $u \in \mathcal{S}$. En effet, u ayant un spectre borné, sa transformée de Fourier est dans l'espace de Schwartz, et l'opérateur transformée de Fourier étant un automorphisme de $\mathcal{S}$ dans lui-même, on en déduit que $u \in \mathcal{S}$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur un voisinage de B, on a $\hat{u}(\xi) = \varphi(\lambda^{-1}\xi)\hat{u}(\xi)$, donc $u = \lambda^d u * g$, avec $g := \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\lambda\cdot)$, et donc $\partial^\alpha u = \lambda^d u * \partial^\alpha g$. L'inégalité de Young donne de plus que : $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$, où $1 \leq p, r \leq q \leq +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Or :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(\lambda x)\right)\right|^r \mathrm{d}x = \lambda^{|\alpha| r} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\alpha \left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right)(\lambda x)\right|^r \mathrm{d}x \\ &\leq \lambda^{|\alpha| r - d} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}^r \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \leq \lambda^{|\alpha|+d(1-\frac{1}{r})} \|\partial^\alpha \mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^r}\|u\|_{L^p} = C_k \lambda^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p}$$

□

Lemme III-4. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sup_{n\geq -1} \|S_n u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p} \qquad \sup_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

Preuve. On écrit $S_n u = 2^{nd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^n\cdot)) * u$. Par inégalité de Young on obtient :

$$\|S_n u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \left\| 2^{nd}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^n\cdot) \right\|_{L^1}$$

On procède de même pour $\|\Delta_k u\|_{L^p}$.

□

Lemme III-5 (Presque-orthogonalité). — *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\sum_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{k\geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \tag{3.3}$$

Preuve. On part de $1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^\infty \chi(2^{-p}\xi)$. Seule deux de ces fonctions ont une intersection de support non vide. On utilise alors : $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \psi(\xi)^2 + \sum_{p=0}^\infty \chi(2^{-p}\xi)^2 \leq 1$$

La seconde inégalité de (3.3) s'en déduit en multipliant l'inégalité ci-dessus par $\hat{u}$ et en utilisant l'identité de Plancherel.

□

Proposition III-6 (Caractérisation des espaces de Sobolev). — *Si $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a alors $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{k\geq -1} 2^{2ps}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 < +\infty$. De plus, il existe $C > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{C}\sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq C\sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \tag{3.4}$$

Preuve. En notant $\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$, on a $\|u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u\|_{L^2}$, et le Lemme III-5 donne

$$\sum_{k\geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq 2\sum_{k\geq -1} \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2}^2$$

La formule de Plancherel et la définition de Δ_k, on obtient l'existence de $C > 0$ tel que $\forall k \geq -1$

$$\frac{1}{C}2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \langle D\rangle^s u\|_{L^2} \leq C2^{ps}\|\Delta_k u\|_{L^2}$$

et donc il existe $\tilde{C}$ tel que :

$$\frac{1}{\tilde{C}}\sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq \tilde{C}\sum_{k\geq -1} 2^{2ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2$$

ce qui donne l'équivalence des normes voulue.

□

Lemme III-7 (Injection de Sobolev). — *Soit $s > \frac{d}{2}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ alors $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, en particulier $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)}\|u\|_{H^s}$$

Preuve. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, d'après le résultat précédent on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc sa transformée de Fourier y est de même, et comme elle est à support compact, elle est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la formule d'inversion, on a ainsi :

$$\Delta_k u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\widehat{\Delta_k u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_k u\|_{L^2}\left|B(0, C2^k)\right|^{\frac{1}{2}} \lesssim 2^{k(\frac{d}{2}-s)}2^{ks}\|\Delta_k u\|_{L^2} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)}(\sum_{k\geq -1} 2^{ks}\|\Delta_k u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{k(\frac{d}{2}-s)}\|u\|_{H^s}$$

Ce qui consitue l'inégalité voulue. On en déduit immédiatement que $\sup_{k\geq -1} 2^{k(s-\frac{d}{2})}\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^s}$, et donc $u \in C_*^{s-\frac{d}{2}}$. De plus, on en déduit que la série de terme général $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente dans L^∞, donc par complétude elle converge simplement vers un $\tilde{u}$. On a déjà vu que cette série converge dans $\mathcal{S}'$ vers u, donc $u = \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

□

Proposition III-8. — *Soit $(u_k)_{k\geq -1}$ tel que $\exists R > 0, \forall k \geq -1$, supp $\hat{u}_k \subset B(0, R2^k)$.*

- *Soit $\alpha > 0$, si $\sup 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty} < +\infty$, alors $u = \sum u_k \in C_*^\alpha(\mathbb{R}^d)$, et*

$$\|u\|_{C_*^\alpha} \leq C\sup_k 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty}$$

- *Soit $s > 0$, si $\sum 2^{2ks}\|u_k\|_{L^2}^2 < +\infty$, alors $u = \sum u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et*

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \sum_k 2^{2ks}\|u_k\|_{L^2}^2$$

Preuve. Par hypothèse sur le support des $(u_k)_{k\geq -1}$, pour tout $q \geq -1$, en notant $N := \lfloor \log_2(R) \rfloor + 1$, on a :

$$\Delta_q u = \sum_{k \geq q-N} \Delta_q u_k$$

On en déduit :

$$2^{q\alpha}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k\geq q-N} \|\Delta_q u_k\|_{L^\infty} \leq 2^{q\alpha} \sum_{k\geq q-N} \|u_k\|_{L^\infty} \leq \sum_{k\geq q-N} 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty} 2^{(q-k)\alpha} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{q-k}$$

où :
- $a_k = 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty}$ si $k \geq -1$, $a_k = 0$ sinon.
- $b_r = 2^{r\alpha}$ si $r \leq N$, $b_r = 0$ sinon.

Comme $\alpha > 0$, $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et l'inégalité de Young discrète donne :

$$\|2^{k\alpha}\|\Delta_k u\|_{L^\infty}\|_{\ell^\infty} \leq \|a_q\|_{\ell^\infty}\|b_r\|_{\ell^1}$$

i.e :

$$\|u\|_{C_*^\alpha} = \sup_k 2^{k\alpha}\|\Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C \sup_k 2^{k\alpha}\|u_k\|_{L^\infty}$$

On conclut alors par définition des espaces de Zygmund. La preuve dans le second cas est parfaitement analogue, en remplaçant α par s, et l'espace L^∞ par L^2.

□

Proposition III-9. — *Soit $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > s$. Il existe C tel que pour toute famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $H^n(\mathbb{R}^d)$, si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| \leq n$:*

$$\|\partial^\alpha u_k\|_{L^2} \leq 2^{k(|\alpha|-s)}\varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors la somme $u := \sum_k u_k \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $\|u\|_{H^s}^2 \leq C\sum_k \varepsilon_k^2$.

Preuve. On remarque que la série de terme général u_k est absolument convergente dans L^2, donc par complétude elle converge simplement, et u est bien définit. Ensuite :

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq j} 2^{js}\|\Delta_j u_k\|_{L^2} + \sum_{k<j} 2^{js}\|\Delta_j u_k\|_{L^2}$$

Par hypothèse, et en utilisant le Lemme III-4, on a d'une part :

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C\|u_k\|_{L^2} \leq C2^{-ks}\varepsilon_k$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernstein (3.2), on obtient pour tout $j \geq 0$:

$$\|\Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C2^{-nj} \sum_{|\alpha|=n} \|\partial^\alpha \Delta_j u_k\|_{L^2} \leq C2^{-nj}\|u_k\|_{H^n} \leq C2^{-(j-k)n}2^{-ks}\varepsilon_k$$

Alors :

$$2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq C\sum_{k\geq j} 2^{(j-k)s}\varepsilon_k + C\sum_{k<j} 2^{(j-k)(s-n)}\varepsilon_k = C(a \star \varepsilon)_j$$

où le dernier membre est une convolution discrète entre $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $a = (a)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec

$$a_k = 2^{ks} \text{ si } k \leq 0, \quad a_k = 2^{k(s-n)} \text{ sinon.}$$

Comme $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, l'inégalité de Young discrète donne que $(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^2})_{j\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, ce qui donne le résultat voulu d'après la caractérisation de la Proposition III-6.

□

Corollaire III-10 (Multiplicateurs de Meyer). — *Soient $r, s > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > s$. Si $(m_k)_{k\geq -1}$ est une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq n$, on ait :*

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq M_\alpha 2^{k(|\alpha|-r)},$$

alors l'opérateur

$$f \mapsto \sum_{k\geq -1} m_k \Delta_k f$$

est continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{R}^d)$, et sa norme est bornée par $C_s \sum_{|\beta|\leq n} M_\beta$.

Preuve. Pour tout $|\alpha| \leq n$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha(m_k\Delta_k f)\|_{L^2} &\leq C_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \|\partial^\beta m_k\|_{L^\infty} \|\partial^{\alpha-\beta}\Delta_k f\|_{L^2} \\ &\leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-r-s)} \left(\sum_{\beta\leq\alpha} M_\beta\right) 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Alors, la Proposition III-9 permet d'aboutir au résultat voulu.

□

III.1 Estimations douces et paralinéarisation

On va maintenant se servir de la décomposition de Littlewood-Paley pour étudier des produit dans les espaces fonctionnels précédemment utilisés. On remarque que l'on peut écrire, pour $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} uv &= \sum_{k,j} \Delta_k u \Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty} \sum_{j=-1}^{p} \Delta_k u \Delta_j v + \sum_{k=-1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \Delta_k u \Delta_j v \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k+1} v + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-1}^{j-1} \Delta_k u \Delta_j v = \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k+1} v + \sum_{j=-1}^{+\infty} \Delta_j v S_j u \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k-2} v \; + \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k v S_{k-2} u \; + \sum_{|k-j|\leq 2} \Delta_k u \Delta_j u \\ &= T_v u + T_u v + R(u,v) \end{aligned}$$

Ici, $T_v u$ (resp. $T_u v$) décrit la partie des interactions pour lesquelles la fréquence de v (resp. u) est nettement plus faible que celle de u (resp. v), tandis que $R(u, v)$ représente la partie où les fréquences sont du même ordre. Le terme $T_v u$ est appelé *paraproduit* de u par v.

Proposition III-11 (Estimations douces pour les paraproduits et leur restes). —

- $\forall s \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in H^s$,
$$\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} \tag{3.5}$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in C^\alpha_*$,
$$\|T_u v\|_{C^\alpha_*} \leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{C^\alpha} \tag{3.6}$$
- $\forall r, s \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $r + s > 0, u \in C^r_*, v \in H^s$,
$$\|R(u, v)\|_{H^{r+s}} \leq C_{r,s} \|u\|_{C^r_*} \|v\|_{H^s} \tag{3.7}$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $\alpha+\beta>0, u \in C_*^\alpha, v \in C_*^\beta$,

$$\|R(u,v)\|_{C_*^{\alpha+\beta}} \leq C_{\alpha,\beta}\|u\|_{C_*^\alpha}\|v\|_{C_*^\beta} \tag{3.8}$$

Preuve. On remarque que $T_u v$ a une décomposition qui vérifie les hypothèses de la Proposition III-8. En effet, $T_u v = \sum_{p=-1}^{+\infty} S_{p-2}u\Delta_p v$, et le spectre de $S_{p-2}u\Delta_p v$ est inclus dans $B(0,2^{p-2})+B(0,2^{p+1}) \subset B(0, 4\times 2^p)$. Alors, le Lemme III-4 et la Proposition III-6 donnent :

$$\begin{aligned}\sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v S_{k-2}u\|_{L^2}^2 &\leq \sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v\|_{L^2}^2\|S_{k-2}u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}^2 \sum_k 2^{2ks}\|\Delta_k v\|_{L^2}^2 \\ &\leq C'\|u\|_{L^\infty}^2\|v\|_{H^s}^2\end{aligned}$$

On conclut alors que $\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}$ à l'aide de la Proposition III-8. Les inégalités suivantes se montrent de manière parfaitement analogue.

□

Théorème III-12 (Paralinéarisation). — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors*

$$F(u) - T_{F'(u)}u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d). \tag{3.9}$$

Pour prouver ce théorème, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme III-13. — *Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $s \geq 0$, alors $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\|_{H^s} \leq C_s\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s} \tag{3.10}$$

Preuve. Si $s=0$, le résultat se déduit de l'existence d'une fonction G continue telle que $F(u) = uG(u)$. Alors, comme $u \in L^2$ et $G(u) \in L^\infty$ car u est bornée, on obtient bien $F \in L^2$.
Quand $s>0$, on remarque qu'il existe C_α indépendant de u et k telle que :

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-s)k}\varepsilon_k \tag{3.11}$$

avec $\sum \varepsilon_k^2 = \|u\|_{H^s}^2$. En effet, l'inégalité de Bernstein (3.2) puis la caractérisation des espaces de Sobolev (3.4) donnent le résultat voulu. On a de plus,

$$\|\partial^\alpha \Delta_k u\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{|\alpha|k}\|u\|_{L^\infty} \tag{3.12}$$

toujours par l'inégalité de Bernstein. Le lemme de presque-orthogonalité (3.3) donnant que $(\Delta_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ est terme général d'une série absolument convergente, la complétude de L^2 fournit alors la convergence simple de cette série, i.e. $S_n u \to u$ dans L^2. De plus, d'après le Lemme III-4, $\|S_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$. On en déduit que $F(S_n u) \to F(u)$ dans L^2 car :

$$\|F(S_n u) - F(u)\|_{L^2} \leq C \sup_{t\in[0,1]} \|F'(tS_n u - (1-t)u\|_{L^\infty}\|S_n u - u\|_{L^2} \to 0$$

Un argument télescopique donne alors :

$$F(u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} F(S_{k+1}u) - F(S_k u) = F(S_0 u) + \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \Delta_k u \tag{3.13}$$

où

$$m_k := \int_0^1 F'(S_k u + t\Delta_k u)\mathrm{d}t$$

Alors, on obtient dans un premier temps que :

$$\|\partial^\alpha F'(S_k u + t\Delta_k u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Pour cela on utilise la règle de la chaine (plus précisement la formule de Faà di Bruno), on majore uniformément les termes en F' avec le Lemme III-4 et on utilise (3.12) pour les termes en u. En intégrant, on obtient alors :

$$\|\partial^\alpha m_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty} \tag{3.14}$$

Donc par la formule de Leibniz et l'inégalité (3.11), on obtient :

$$\|\partial^\alpha (m_k \Delta_k u)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,F} 2^{(|\alpha|-s)k} \|u\|_{L^\infty} \varepsilon_k$$

On peut donc conclure par la Proposition III-9.

□

Preuve du Théorème III-12. On commence par remarquer que quitte à soustraire un terme linéaire au à $F(u)$, on peut supposer que $F'(0) = 0$. Cela ne change rien à la preuve car :

$$F(u) + au - T_{F'(u)+a}u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - T_a u = F(u) + au - T_{F'(u)}u - au = F(u) - T_{F'(u)}u$$

Ensuite, comme $\rho > 0$, le Lemme III-7 donne $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par définition, on a

$$T_{F'(u)}u = S_{-3}F'(u) \cdot u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_{k-2}F'(u) \cdot \Delta_k u$$

En utilisant (3.13), comme $F(S_0 u)$ et $S_{-3}F'(u) \cdot u_0$ sont dans H^∞, il suffit de prouver que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m_k - S_{k-2}g)\Delta_k u \ \in H^{s+\rho}$$

Cela découle de la Proposition III-9, que l'on peut appliquer d'une part grâce à (3.11), et d'autre part car on a l'inégalité :

$$\|\partial^\alpha (m_k - S_{k-2}F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Pour obtenir cette dernière, on va montrer séparément :

$$\|\partial^\alpha (m_k - F'(S_{k-2}u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{3.15}$$

$$\|\partial^\alpha (F'(S_k u) - S_k F'(u))\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k} \tag{3.16}$$

On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral, qui donne

$$F'(S_k u + t\Delta_k u) - F'(S_{k-2}u) = \mu_k w_k$$

avec

$$w_k = (\Delta_{k-2}u + \Delta_{k-1}u + t\Delta_k u) \quad \text{ et } \mu_k = \int_0^1 F''(S_{k-2}u + \tau w_k) \mathrm{d}\tau.$$

De manière analogue à (3.14), on a

$$\|\partial^\alpha \mu_k\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,F} 2^{|\alpha|k} \|u\|_{L^\infty}$$

Tandis que w_k vérifie

$$\|\partial^\alpha w_k\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} \|\partial^\alpha w_k\|_{L^2} \leq C_\alpha 2^{\frac{d}{2}k} 2^{(|\alpha|-s)k} \varepsilon_k \leq \tilde{C}_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Bernstein (3.2), puis (3.11). On en déduit donc que

$$\|\partial^\alpha(\mu_k w_k)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{(|\alpha|-\rho)k}$$

Or

$$m_k - F'(S_{k-2}u) = \int_0^1 \mu_k w_k \mathrm{d}t$$

Ce qui donne (3.15). Pour montrer la seconde inégalité, on commence par décomposer en deux membres le terme à majorer :

$$\left[F'(S_k u) - S_k F'(S_k u)\right] + \left[S_k F'(S_k u) - S_k F'(u)\right] = (I) + (II)$$

L'inégalité de Bernstein (3.2) donne alors

$$\|\partial^\alpha S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^\infty} \lesssim_\alpha 2^{(|\alpha|+\frac{d}{2})k}\|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2}.$$

De plus :

$$\|S_k(F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2} \lesssim \|F'(u) - F'(S_k u))\|_{L^2} \lesssim \|u - S_k u\|_{L^2} \lesssim 2^{-ks}\|u\|_{H^s}$$

grâce au Lemme III-4, puis aux accroissements finis, et finalement avec une majoration du reste géométrique dans la caractérisation des espaces de Sobolev (3.4). Ainsi (II) vérifie l'inégalité (3.16).
Il reste maintenant à étudier (I). Pour cela, on remarque que $S_k u \in H^\infty$ car sa transformée de Fourier est à support compact. Alors, d'une part $S_k u \in L^\infty$ par le Lemme III-4 car $u \in L^\infty$, et sa norme est bornée indépendamment de k. D'autre part, en écrivant la norme usuelle de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Bernstein, on a que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|S_k u\|_{H^{s+N}} &\leq C\|S_k u\|_{H^s} + C\sum_{|\alpha|=s+N}\|\partial^\alpha S_k u\|_{L^2} \\
&\leq \|S_k u\|_{H^s} + C_{\alpha,N}2^{kN}\|S_k u\|_{H^s} \\
&\leq C_{\alpha,N}2^{kN}\|u\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

où l'on a observé que $\|S_k u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^s}$ à partir de l'écriture utilisant les multiplicateurs de Fourier, et avec la norme de Sobolev adaptée. Alors, le Lemme III-13 donne que $F'(S_k u) \in H^{s+N}$, et

$$\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \leq C_{\alpha,N}2^{kN}\|u\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty} \tag{3.17}$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein puis le Lemme III-7, on remarque que pour $\sigma > |\alpha| + \frac{d}{2}$ et $a \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\partial^\alpha \Delta_j a\|_{L^\infty} \leq C2^{j(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)}\|a\|_{H^\sigma}$$

Et alors, comme $a - S_k a = \sum_{j\geq k}\Delta_j a$, par majoration d'un reste géométrique, on a :

$$\|\partial^\alpha(a - S_k a)\|_{L^\infty} \leq C2^{k(\frac{d}{2}-\sigma+|\alpha|)}\|a\|_{H^\sigma} \tag{3.18}$$

En appliquant (3.18) avec $a = F'(S_k u)$ et $\sigma = s + N$ où N est suffisamment grand pour que $s + N > \frac{d}{2} + |\alpha|$, on a

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha(F'(S_k u) - S_k F'(S_k u))\|_{L^\infty} &\leq C2^{k(\frac{d}{2}-s-N+|\alpha|)}\|F'(S_k u)\|_{H^{s+N}} \\
&\leq C_{\alpha,N}2^{k(\frac{d}{2}-s+|\alpha|)}\|u\|_{H^s}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.17), ce qui donne finalement la majoration attendue pour (I), conclut la preuve de l'inégalité (3.16) et achève donc la preuve du Théorème III-12.

□

Théorème III-14 (Paralinéarisation des produits). — *Soit $s, r > 0$, et $a, b \in C^r_*(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$R_{CM}(a,b) := T_a \circ T_b - T_{ab}$$

est un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{R}^d)$, et on a :

$$\|R_{CM}(a,b)\|_{\mathcal{L}(H^s,H^{s+r})} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|b\|_{C^r_*}$$

Preuve. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on note $v := T_b u$ et $v_k := S_{k-2}b \cdot \Delta_k u$. On observe que :

$$R_1 v := T_a v - \sum_k S_{k-4}a \cdot \Delta_k v = \sum_k (\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)\Delta_k v \tag{3.19}$$

Or comme $(\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)$ a un spectre inclus dans $B(0, 2^k)$, l'inégalité de Bernstein (3.2) et la définition des espaces de Zygmund donnent que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq r$:

$$\|\partial^\alpha(\Delta_{k-3}a + \Delta_{k-4}a)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}\|\Delta_k a\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-r)}\|a\|_{C^r_*}$$

Alors, le Corollaire III-10 et l'inégalité (3.5) donnent que

$$\|R_1 v\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|v\|_{H^s} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|b\|_{C^r_*}\|u\|_{H^s}$$

De plus, en injectant (3.19), on remarque que :

$$\begin{aligned} T_a T_b u - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j &= R_1 T_b u + \sum_j S_{j-2}a \cdot \Delta_j v - \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot v_j \\ &= R_1 T_b u + \sum_j \sum_{k \leq j-3} \Delta_k a \cdot (\Delta_j v - v_j) \\ &= R_1 T_b u + \sum_k \Delta_k a \sum_{k+3 \leq j \leq k+5} (\Delta_j v - v_j) \end{aligned}$$

pas compris pourquoi on coupe. En développant la défintion de v_j, et en ré-utilisant le Corollaire III-10, on a :

$$\left\| T_a T_b u - \sum_j \sum_{k_1 \leq j-3} \sum_{k_2 \leq j-3} \Delta_{k_1} a \cdot \Delta_{k_2} b \cdot \Delta_j u \right\|_{H^{s+r}} \leq C_{s,r}\|a\|_{C^r_*}\|b\|_{C^r_*}\|u\|_{H^s} \tag{3.20}$$

□

Références

[Her79] Michael Herman. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.

[AG91] Serge Alinhac et Patrick Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Éditions du CNRS, 1991.

[Mé08] Guy Métivier. *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Non-linear Systems*. 2008.

[GV19] David Gérard-Varet. *Around the Nash-Moser theorem*. 2019.