Exercice 1:

- 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = O(1/n^2)$. Que dire de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?
- 2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$$

où γ est un réel que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On note pour $n \ge 2$, $u_n := \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$. Justifier la convergence de $\sum_{n \ge 2} u_n$ et calculer sa valeur.

Exercice 2 (avec préparation): Soient E un e.v.n de dimension quelconque, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| \le \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$v_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$$

- 1. Simplifier $v_n \circ (u \mathrm{Id})$.
- 2. Montrer que :

$$\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) = \{0\}$$

3. On suppose que E est de dimension finie, montrer que :

$$\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) = E$$

4. On suppose à nouveau que E est de dimension quelconque. Montrer que si

$$\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) = E$$

alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.

5. Étudier la réciproque.

Exercice 3:

On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \ge 2$, on introduit les événements :

 A_n = "On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences",

 B_n = "On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs n-1 et n".

On pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$, et $p_1 = 0$.

- 1. Calculer p_2 , p_3 et p_4 .
- 2. Pour $n \geq 2$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad et \quad p_{n+3} = \frac{1}{8} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \right)$$

- 3. En déduire une relation entre p_{n+2} , p_{n+3} et p_n valable pour tout $n \ge 1$.
- 4. Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4 (avec préparation):

On étudie l'équation fonctionnelle :

$$(E): f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

- 1. Quelles sont les solutions constantes sur \mathbb{R} ?
- 2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note f(x) = xh(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h la fonction f est-elle solution de (E)?
- 3. On définit par récurrence une suite de fonctions avec $h_0: x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Pour $x \in [0;1]$, soit $T_x : y \mapsto y - \frac{xy^2}{2}$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur [0;1] et que $T_x([0;1]) \subset [0;1]$. En déduire que (h_n) converge uniformément sur [0;1].

- 4. Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur [0;1].
- 5. Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur \mathbb{R}_+

Exercice 5:

Soient E un \mathbb{C} -ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de u, et n_1, \ldots, n_q leurs multiplicités. On suppose que tous les espaces propres de u sont de dimension 1.

- 1. Si $1 \le i \le q$ et $0 \le m \le n_i$, montrer que le noyau de $(u \lambda_i \operatorname{Id})^m$ est de dimension m.
- 2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$F = Ker(Q(u))$$

3. Montrer que le nombre de sous-espaces de E stables par u est le nombre de diviseurs unitaires de χ_u dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6:

Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers et, pour s > 1,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

- 1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famile $(\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* ?
- 2. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $A_p := p\mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.
- 3. Montrer que

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

4. Que dire de la sommabilité de la famille $(1/p)_{p\in\mathcal{P}}$?

Exercice bonus 1:

Montrer que tout sous-groupe fini des inversibles d'un corps commutatif est cyclique.

Exercice bonus 2:

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(M^k) = 0$.