I Théorie de la mesure

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, et on pourra utiliser un espace métrique (T, d).

Théorème I-1 (Dynkin). — *Le σ-système engendré par un π-système est égal à la tribu engendrée par ce dernier.*

Théorème I-2 (Convergence monotone). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $[0,+\infty]$, telle que pour tout $n \geq 0$, $f_n \leq f_{n+1}$. Alors, en notant f la limite simple de cette suite, on a que f est mesurable, et :*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

Théorème I-3 (Convergence dominée). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Si il existe g mesurable telle que pour tout $n \geq 0$, $|f_n| \leq g$, alors f est intégrable et :*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

Remarque. On peut seulement supposer les conditions ci-dessus vraies presque partout, mais dans ce cas il faut imposer la mesurabilité de la limite simple, ou bien travailler dans la tribu complétée.

Méthode :

Toujours se demander : dans quel ensemble je travaille, quelle est la tribu, quelle est la mesure ?

Outils :

Corollaire I-4 (Unicité des mesures). — *Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$ qui coïncident sur un π-système $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors :*

1. *Si $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*
2. *Si il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ tels que $\bigcup_n A_n = E$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.*

Lemme I-5 (Fatou). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int \underline{\lim}_n f_n \leq \underline{\lim}_n \int f_n$$

Proposition I-6 (Continuité des intégrales). — *Soit $t_0 \in T$ et $f : T \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. Si :*

- *Pour tout $t \in T$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.*
- *Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en t_0.*
- *Il existe g intégrable telle que pour tout $t \in T$, pour presque tout $x \in E$, on a $|f(t,x)| \leq g(x)$*

Alors, $t \mapsto \int f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue en t_0.

Proposition I-7 (Dérivation des intégrales). — *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, et $f : I \times E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. Si :*

- *Pour tout $t \in T$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable et intégrable.*
- *Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en t_0.*
- *Il existe g intégrable telle que pour tout $t \in T$, pour presque tout $x \in E$, on a $|f(t,x)| \leq g(x)$*

Alors, $t \mapsto \int f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue en t_0.