

# Étude du problème MP-LWE

Sacha Ben-Arous, sous la direction d’Alice Pellet-Mary

## Résumé

Insérer abstract ici

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>2</b>
2.1	Problème LWE et difficulté . . . . .	3
2.2	Variantes structurées . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Étude de la réduction</b>	<b>4</b>
3.1	Principe de la réduction . . . . .	5
3.2	Effets géométriques . . . . .	6
3.2.1	Évolution du volume . . . . .	6
3.2.2	Évolution de la distance au réseau . . . . .	8
3.3	Heuristique gaussienne . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Schéma de chiffrement</b>	<b>9</b>
4.1	Preuve de correction . . . . .	9
	<b>Références</b>	<b>10</b>

## 1 Introduction

Les réseaux euclidiens sont une construction algébrique permettant entre autres de définir des problèmes mathématiques dont la résolution algorithmique est conjecturée difficile, même pour des ordinateurs quantiques. Cela les rend donc particulièrement intéressants pour construire des protocoles sûrs en cryptographie post-quantique.

Deux exemples fondamentaux de problèmes sur les réseaux sont le *Small Integer Solutions problem* (SIS) introduit par Ajtai en 1996, et le *Learning With Errors problem* (LWE), découvert par Regev en 2005.

Le problème LWE est privilégié dans la construction de schémas de chiffrement car d'une part il est facile d'en tirer des constructions cryptographiques, et d'autre part il été prouvé (cf. [Reg09]) que résoudre une instance aléatoire de LWE est aussi dur que résoudre la pire instance d'un problème supposé dur. On dit que LWE bénéficie d'une réduction *pire-cas moyen-cas*.

Cependant, si l'on utilise la version standard de LWE pour construire des protocoles, ces derniers auront une efficacité moyenne à cause d'opérations faisant intervenir de grandes matrices aléatoires. La variante *Polynomial Learning With Errors* (PLWE), proposée par Stehlé *et al.* [SSTX09], résout ce problème en utilisant des réseaux structurés : les calculs matriciels correspondent alors à des produits de polynômes, calculables plus rapidement. Cependant, ce gain d'efficacité se fait potentiellement au détriment de garanties de sécurité : les polynômes sont manipulés dans  $\mathbb{Z}_p[X]/f$  et la complexité de la variante est directement liée au  $f$  choisi.

Afin de se débarrasser de cette dépendance, Roşca *et al.* introduisent le *Middle-Product Learning With Errors problem* (MP-LWE) [RSSS17] dont l'intérêt est d'être aussi dur que des classes exponentiellement grandes de problèmes PLWE (dont on espère qu'elles contiennent au moins une instance difficile), tout en conservant l'efficacité des réseaux structurés.

Durant mon stage, j'ai ainsi travaillé sur la variante MP-LWE du problème de Regev, et plus particulièrement sur les effets de la réduction de PLWE vers MP-LWE proposée par [RSSS17].

## 2 Préliminaires

**Définition 2.1** Un *réseau euclidien* de  $\mathbb{R}^m$  est l'ensemble des combinaisons à coefficients entiers de vecteurs linéairement indépendants  $b_1, \dots, b_n$ , que l'on note :

$$\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i, x_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Le réseau est alors de *dimension*  $n$ , et la famille des  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  est appelée *base* de ce réseau.

En notant  $B := [b_1, \dots, b_n]$  la matrice dont les colonnes sont formées par les  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on considérera de manière équivalente :

$$\mathcal{L}(B) := \{Bx, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

### Définition 2.2 (Notations)

- On note  $\mathbb{Z}_q$  (resp.  $\mathbb{R}_q$ ) le quotient  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ ), et  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne.
- Si  $E$  est un ensemble fini, on note  $\mathcal{U}(E)$  la distribution uniforme sur cet ensemble.
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{K}^{<n}[X]$  l'ensemble des polynômes de degré strictement plus petit que  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , on note  $\mathcal{N}(\sigma)$  la distribution gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$ .

- Pour  $\mathcal{D}$  une distribution de probabilité sur  $\mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{D}^n[X]$  la distribution de probabilité sur  $\mathbb{K}^n[X]$  où chaque coefficient suit la loi  $\mathcal{D}$ .
- Pour  $f \in \mathbb{Z}^m[X]$ , on définit  $EF(f) := \max_{\substack{g \in \mathbb{Z}^{2m-1}[X] \\ g \neq 0}} \left( \frac{\|g \bmod f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \right)$  le *facteur d'expansion* de  $f$ .

## 2.1 Problème LWE et difficulté

**Définition 2.3 (Distribution LWE)** Soient  $q \geq 2$ ,  $m \geq 1$ ,  $\chi$  une distribution de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . À partir de  $s \in \mathbb{Z}_q^m$ , on définit  $\mathcal{D}_{q,\chi,m}(s)$  la distribution sur  $\mathbb{Z}_q^m \times \mathbb{R}_q$  obtenue en choisissant  $a \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^m)$ ,  $e \leftarrow \chi$ , et qui renvoie  $(a, b) := (a, \langle a, s \rangle + e \bmod q)$ .

**Définition 2.4 (Problèmes LWE)** Soient  $q \geq 2$ ,  $m \geq 1$ ,  $\chi$ . On tire  $s \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^m)$ , et muni de la distribution  $\mathcal{D}_{q,\chi,m}(s)$  précédente, on peut alors définir deux problèmes :

- **LWE-Décisionnel** consiste à distinguer un nombre arbitraire d'échantillons de  $\mathcal{D}_{q,\chi,m}(s)$  et le même nombre d'échantillons de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^m) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q)$ .
- **LWE-Calculatoire** consiste à retrouver le secret  $s$  à partir d'un nombre fixé d'échantillons indépendants.

En notant  $A$  la matrice dont les lignes sont formées des  $(a_i)_{i \leq t}$ ,  $e := (e_i)_{i \leq t}$  et  $b := (b_i)_{i \leq t}$  ( $t$  représente le nombre d'échantillons), on a :  $b = As + e \bmod q$ .

**Définition 2.5** Dans un réseau  $\Lambda$ , on note  $\lambda_i := \inf\{r, \dim(\text{Vect}(\Lambda \cap \mathcal{B}(0, r))) = i\}$  le  $i$ -ème minimum du réseau. En particulier, on a  $\lambda_1 = \inf\{\|v\|, v \in \mathcal{L}(B) \setminus \{0\}\}$  qui est le plus court vecteur non nul du réseau.

$\text{Rq}$  :  $\lambda_i$  s'interprète comme le rayon de la plus petite boule centrée à l'origine qui contient  $i$  vecteurs indépendants du réseau.

Le calcul effectif de ces minimums semble très dur : les meilleurs algorithmes polynomiaux connus calculant  $\lambda_1$  ont un facteur d'approximation exponentiel.

On peut alors considérer le problème algorithmique suivant, qui apparaît lors de l'étude des réseaux reliés aux protocoles utilisant LWE :

**Définition 2.6 (BDD)** Soit  $B$  une base d'un réseau de dimension  $n$ , et  $\gamma \geq 2$ . Une instance du problème *Bounded Distance Decoding* est un vecteur  $t \in \mathbb{R}^m$  de la forme  $t = x + e$ , où  $x \in \mathcal{L}(B)$  et  $\|e\| \leq \lambda_1/\gamma$ . Le problème consiste à retrouver  $x$  (ou  $e$ ) à partir de  $t$ .

En revenant au problème LWE-Calculatoire, on constate que ce dernier se réduit à une instance de BDD dans le réseau engendré par les colonnes de  $A$  et  $q\text{Id}_t$  où  $t$  est le nombre d'échantillons.

En effet,  $b = As + e \bmod q$ , donc on travaille dans  $\mathcal{L} := \{y \in \mathbb{R}^{tm} \mid \exists x \in \mathbb{R}^m, y = Ax \bmod q\}$ , et on va montrer que  $\mathcal{L} = \{y \in \mathbb{R}^{tm} \mid \exists x \in \mathbb{R}^{t(m+1)}, y = [A|q\text{Id}_{tm}] \cdot x\}$

Pour  $y \in \mathcal{L}$ , il existe  $x \in \mathbb{R}^m$  tel que  $y = Ax \bmod q$ . Alors en notant  $x' \in \mathbb{R}^{t(m+1)}$  le vecteur dont les  $m$  premières coordonnées sont celles de  $x$  et les autres sont nulles, on a que  $y = [A|q\text{Id}_{tm}] \cdot x'$

Réciproquement, pour  $y$  dans le second réseau, il existe  $x \in \mathbb{R}^{t(m+1)}$  tel que  $y = [A|q\text{Id}_{tm}] \cdot x$ . Alors en notant  $x' \in \mathbb{R}^m$  le vecteur constitué des  $m$  premières composantes de  $x$ , et  $x'' \in \mathbb{R}^{tm}$  le reste, on a que  $y = Ax' + q\text{Id}_{tm}x''$ , donc  $y = Ax' \bmod q$ .

**Conjecture 2.1** Dans un réseau de dimension  $n$ , pour  $\gamma$  polynomial en  $n$ , le problème BDD est conjecturé exponentiellement (en  $n$ ) dur à résoudre, même sur des ordinateurs quantiques.

## 2.2 Variantes structurées

On considère la variante polynomiale du problème LWE :

**Définition 2.7 (Distribution PLWE)** Soient  $q \geq 2$ ,  $m > 0$ ,  $f$  polynôme de degré  $m$ ,  $\chi$  une distribution sur  $\mathbb{R}_q[X]/f$ . À partir de  $s \in \mathbb{Z}_q[X]/f$ , on définit la distribution  $P_{q,\chi}^{(f)}(s)$  sur  $\mathbb{Z}_q[X]/f \times \mathbb{R}_q[X]/f$  obtenue en tirant  $a \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q[X]/f)$ ,  $e \leftarrow \chi$  et qui renvoie  $(a, b = a \cdot s + e)$ .

Ensuite, on définit un nouveau produit sur les polynômes, qui consiste à garder les  $d$  coefficients du milieu dans un produit de degré  $d + 2k - 1$  :

**Définition 2.8 (Middle-Product)** Soient  $d_a, d_b, d, k \in \mathbb{N}$  tels que  $d_a + d_b - 1 = d + 2k$ . Alors le *middle-product*  $\odot_d : \mathbb{R}^{<d_a}[X] \times \mathbb{R}^{<d_b}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{<d}[X]$  est la fonction :

$$(a, b) \mapsto a \odot_d b = \left\lfloor \frac{(a \cdot b) \bmod x^{k+d}}{x^k} \right\rfloor$$

On construit alors une distribution plus générale utilisant le produit précédent :

**Définition 2.9 (Distribution MP-LWE)** Soient  $n, d > 0$ ,  $q \geq 2$  et  $\chi$  une distribution sur  $\mathbb{R}_q^{<d}[X]$ . Pour  $s \in \mathbb{Z}_q^{<n+d-1}[X]$ , on définit la distribution  $MP_{q,n,d,\chi}(s)$  sur  $\mathbb{Z}_q^{<n}[X] \times \mathbb{R}_q^{<d}[X]$  obtenu en tirant  $a \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^{<n}[X])$ ,  $e \leftarrow \chi$  et qui renvoie  $(a, b = a \odot_d s + e)$ .

Les problèmes décisionnels  $PLWE_{q,\chi}^{(f)}(s)$  et  $MP-LWE_{q,n,d,\chi}(s)$  associés peuvent se définir ensuite de manière parfaitement analogue au cas LWE classique.

**Théorème 2.1 (Théorème 3.6 [RSSH17])** Soient  $n, d > 0$ ,  $q \geq 2$ , et  $\alpha \in (0, 1)$ . Pour  $S > 0$ , on note  $\mathcal{F}(S, d, n)$  les polynômes de  $\mathbb{Z}[X]$  unitaires, dont le coefficient constant est inversible dans  $\mathbb{Z}_q$ , de degré  $m$  vérifiant  $d \leq m \leq n$ , et tels que  $EF(f) \leq S$ . Il existe une réduction *ppt* depuis  $PLWE_{q,\mathcal{N}(\alpha q)^{<d}[X]}^{(f)}$  pour tout  $f \in \mathcal{F}(S, d, n)$  vers  $MP-LWE_{q,n,d,\mathcal{N}(\alpha' q)^{<d}[X]}$ , où  $\alpha' = \alpha d S$ .

Il s'agit du résultat principal de [RSSH17]. Durant mon stage, j'ai étudié comment la réduction explicitée dans la preuve du théorème agit géométriquement sur les réseaux sous-jacents aux problèmes de manière à ne pas en diminuer la complexité.

## 3 Étude de la réduction

Afin de manipuler les réseaux sous-jacents à ces variantes, il est nécessaire de définir les objets suivants :

**Définition 3.1** Soient  $f, a \in \mathbb{R}_d[X]$  de degré  $m$  et  $n$ , et  $d \in \mathbb{N}$

- On note  $\text{Rot}_f^d(a) \in \mathbb{R}^{d \times m}$  la matrice dont la  $i$ -ème ligne est constituée des coefficients de  $a \cdot x^{i-1} \bmod f$ . On écrira  $\text{Rot}_f(a)$  pour  $\text{Rot}_f^m(a)$
- On note  $\text{Toep}^{d,n}(a) \in \mathbb{R}^{d \times (n+d-1)}$  la matrice dont la  $i$ -ème ligne est constituée des coefficients de  $a \cdot x^{i-1}$ .

- On note  $M_f^d \in \mathbb{R}^{d \times m}$  la matrice dont l'entrée  $(i, j)$  est le coefficient constant de  $x^{i+j-2} \bmod f$ .  
On écrira  $M_f$  pour  $M_f^m$ .

Dans la suite, on notera de manière identique un polynôme et le vecteur de ses coefficients. De plus, pour un vecteur  $a$ , on notera  $\bar{a}$  ce vecteur renversé.

**Lemme 3.1** Soient  $d, k > 0$ , et  $a \in \mathbb{R}^{<k+1}[X]$ ,  $b \in \mathbb{R}^{<k+d}[X]$  et  $f \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $m$ , alors :

- (1)  $\text{Rot}_f^d(a) = \text{Toep}^{d,k+1}(a) \cdot \text{Rot}_f^{k+d}(1)$
- (2)  $a \odot_d b = \overline{\text{Toep}^{d,k+1}(a) \cdot \bar{b}}$
- (3)  $\text{Rot}_f(a \cdot b) = \text{Rot}_f(a) \cdot \text{Rot}_f(b)$
- (4) Si  $\deg(a) < m$ ,  $\text{Rot}_f(a) \cdot (1, 0, \dots, 0)^\top = M_f \cdot a$

Les preuves calculatoires sont fournies dans [RSSS17].

### 3.1 Principe de la réduction

Soient  $q \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f$  polynôme vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1, dont on gardera les notations.

À partir de  $s \in \mathbb{Z}_q[X]/f$ , on se donne initialement un nombre  $t$  d'échantillons  $(a_i, b_i)_{i \leq t}$  de  $P_{q, D_{\alpha q}}^{(f)}(s)$ . Le but est de construire  $t$  échantillons  $(a'_i, b'_i)_{i \leq t}$  de  $\text{MP}_{q, n, d, D_{\alpha' q}}(s)$ . Dans un premier temps, on va "prolonger" les  $a_i$  dans un espace de polynômes de plus grand degré. Ensuite grâce au Lemme 3.1 on passera du produit usuel dans l'espace quotient au middle-product. Il faudra alors re-randomiser le secret, et éliminer la dernière dépendance en  $f$  dans la distribution de la nouvelle erreur.

Tout d'abord, on tire  $(r_i)_{i \leq t} \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^{<n-m}[X])$ , et on définit  $a'_i := a_i + f \cdot r_i \in \mathbb{Z}_q^{<n}[X]$ . On a alors que, les  $a_i$  et  $r_i$  étant uniformes, les  $a'_i$  le sont aussi. Moralement, on rajoute la partie des  $a_i$  qui a été oubliée en passant au quotient. La preuve formelle consitue le Lemme 2.1 de [Lyu16]. Elle se fait par récurrence, en utilisant de manière cruciale que  $f$  est unitaire.

Ensuite, en utilisant le Lemme 3.1 et la définition des  $(b_i)_{i \leq t}$ , on a

$$\text{Rot}_f(b_i) = \text{Rot}_f(a_i) \cdot \text{Rot}_f(s) + \text{Rot}_f(e_i)$$

Ce qui donne, en conservant la première colonne (i.e en multipliant par  $(1, 0, \dots, 0)^\top$ ) et les  $d$  premières lignes :

$$\begin{aligned} M_f^d \cdot b_i &= \text{Rot}_f^d(a_i) \cdot M_f^d \cdot s + M_f^d \cdot e_i \\ &= \text{Rot}_f^d(a'_i) \cdot M_f^d \cdot s + M_f^d \cdot e_i \\ &= \text{Toep}^{d,n}(a'_i) \cdot \text{Rot}_f^{d+n-1}(1) \cdot M_f^d \cdot s + M_f^d \cdot e_i \\ \bar{b}'_i &= \text{Toep}^{d,n}(a'_i) \cdot \bar{s}' + \bar{e}'_i \end{aligned}$$

$$\text{où on a noté } \begin{cases} b'_i = \overline{M_f^d \cdot b_i} \\ s' = \overline{\text{Rot}_f^{d+n-1}(1) \cdot M_f^d \cdot s} \\ e'_i = \overline{M_f^d \cdot e_i} \end{cases}$$

Alors on a, toujours en utilisant le Lemme 3.1, que  $b'_i = a'_i \odot_d s' + e'_i$

On obtient que  $b'_i$  est uniformément distribué car  $b_i$  l'est, et que  $M_f$  est inversible modulo  $q$ . Cette dernière affirmation repose sur l'hypothèse que le coefficient constant de  $f$  est inversible modulo  $q$ .

Ensuite, on constate que le nouveau secret est encore fortement lié au secret de l'ancien réseau. Pour régler ce problème, on prend  $s'' \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q^{n+d-1}[X])$  et en sortie, on ajoute à chaque  $(a'_i, b'_i)$  le couple  $(0, a'_i \odot_d s'')$ , de manière à re-randomiser le secret, i.e : le nouveau secret  $\tilde{s} = s' + s''$  est maintenant uniforme dans le nouveau réseau.

On a de plus que, en notant  $J \in \mathbb{R}^{d \times d}$  la matrice qui a des 1 sur son anti-diagonale et des 0 ailleurs, la nouvelle distribution de l'erreur est  $J \cdot M_f^d \cdot \mathcal{N}(\alpha q)^{<d}[X]$ . Pour obtenir à nouveau une gaussienne, il suffit alors de majorer les valeurs singulières de la nouvelle distribution, et de choisir le majorant comme variance de la nouvelle gaussienne. Or dans notre cas, on a clairement  $\|J\| = 1$  et  $\|M_f\| \leq d\text{EF}(f) \leq dS$ , d'où  $\alpha' = \alpha dS$  convient, comme annoncé dans le Théorème 2.1.

### 3.2 Effets géométriques

Comme on a pu le voir dans la définition du problème BDD, la difficulté d'une instance  $x$  dans un réseau  $\mathcal{L}$  est reliée au facteur  $\gamma$ , que l'on peut écrire  $\gamma = \frac{\lambda_1}{\text{dist}(x, \mathcal{L})}$ . Plus  $\gamma$  est petit, plus l'instance est difficile, et inversement.

**Définition 3.2** On appelle volume d'un réseau  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(B)$  la quantité  $\sqrt{\det B}$ . Elle ne dépend pas de la base choisie.

Le théorème suivant donne alors une première borne sur  $\lambda_1$  :

**Théorème 3.1 (Minkowski)** Dans un réseau  $\mathcal{L}$  de dimension  $n$ ,  $\lambda_1 \leq \sqrt{n} \cdot \text{vol}(\mathcal{L})^{\frac{1}{n}}$

De plus, dans des réseaux aléatoires, on a l'estimation suivante :

**Remarque 3.1 (Heuristique gaussienne)** Dans un réseau aléatoire, l'heuristique gaussienne fournit une borne inférieure sur  $\lambda_1$  :

$$\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \text{vol}(\mathcal{L})^{\frac{1}{n}}$$

On admet pour l'instant que nos réseaux structurés suivent cette heuristique, et on étudiera la pertinence de cette hypothèse dans un second temps. Les deux bornes permettent d'avoir une estimation de  $\lambda_1$ , et donc du facteur  $\gamma$  associé à l'instance  $x$  de BDD étudiée :  $\gamma \simeq \frac{\sqrt{n} \text{vol}(\mathcal{L})^{\frac{1}{n}}}{\text{dist}(x, \mathcal{L})}$ .

Ainsi, les deux caractéristiques des réseaux permettant d'estimer la complexité du problème BDD associé sont leur volume, et la distance au point choisi. Dans ce qui suit, on se propose donc d'étudier ces deux quantités dans le cadre de la réduction précédemment présentée.

#### 3.2.1 Évolution du volume

Si  $(A_i)_{i \leq t}$  est une famille de matrices, on désigne par  $[A_{i \leq t}]$  la matrice par blocs qui correspond à l'empilement des  $(A_i)_{i \leq t}$ .

Pour  $A$  et  $B$  des matrices, on désigne par  $[A|B]$  la matrice dont les colonnes sont celles de  $A$ , puis celles de  $B$ .

Afin d'étudier les effets de cette réduction, on remarque que 3 réseaux distincts apparaissent, et on se propose donc d'en étudier les propriétés :

- Le réseau initial  $\mathcal{L}_0 = \{y \in \mathbb{Z}^{tm} \mid \exists x \in \mathbb{Z}^m, y = [\text{Rot}_f(a_i)_{i \leq t}] \cdot x \bmod q\}$
- Le réseau intermédiaire  $\mathcal{L}_1 = \{y \in \mathbb{Z}^{td} \mid \exists x \in \mathbb{Z}^d, m = [\text{Rot}_f^d(a_i)_{i \leq t}] \cdot x \bmod q\}$  qui correspond au projeté en dimension  $d$  du réseau initial
- Le réseau final  $\mathcal{L}_2 = \{y \in \mathbb{Z}^{td} \mid \exists x \in \mathbb{Z}^{n+d-1}, y = [\text{Toep}^{d,n}(a'_i)_{i \leq t}] \cdot x \bmod q\}$

On claiement que  $\mathcal{L}_0$  est engendré par les colonnes de la matrice  $[[\text{Rot}_f(a_i)_{i \leq t}] \mid q\text{Id}_t]$ . En particulier, son sous-espace vectoriel engendré est égal à l'espace entier (ou encore son rang est égal à la dimension ambiante), on dit que c'est un réseau de *rang plein*. De plus, ce réseau contient les  $(0, \dots, q, \dots, 0)^\top$ , dans ce cas il est dit *q-aire*.

**Lemme 3.2** Si  $a_1$  est inversible modulo  $f$ , alors  $\mathcal{L}_0$  est engendré par

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} \text{Id}_m & 0 & \cdots & 0 \\ \text{Rot}_f(a_2) \cdot \text{Rot}_f(a_1)^{-1} & q & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{Rot}_f(a_t) \cdot \text{Rot}_f(a_1)^{-1} & 0 & \cdots & q \end{array} \right]$$

**Preuve :**

Pour alléger les notations, on pose  $A_i := \text{Rot}_f(a_i)$  et  $A := [\text{Rot}_f(a_i)_{i \leq t}]$ . Premièrement, si  $a_1$  est inversible modulo  $f$ , alors  $A_1$  est inversible. En effet, on a  $\text{Rot}_f(a_1) \cdot \text{Rot}_f(a_1^{-1}) = \text{Rot}_f(a_1 \cdot a_1^{-1}) = \text{Rot}_f(1) = \text{Id}_m$ , d'où  $\text{Rot}_f(a_1)^{-1} = \text{Rot}_f(a_1^{-1})$ . On peut alors remarquer que :

( $\subseteq$ ) Si  $y \in \mathcal{L}_0$ , alors il existe  $x$  tel que  $y = Ax \bmod q$ , donc en notant  $x' := \text{Rot}_f(a) \cdot x$ , on a  $y = A \cdot \text{Rot}_f(a)^{-1} \cdot x' \bmod q$ , d'où

$$\left[ \begin{array}{c|c} \text{Id}_m & \\ \text{Rot}_f(a_2) \cdot \text{Rot}_f(a_1)^{-1} & q \cdot \text{Id} \\ \vdots & \\ \text{Rot}_f(a_t) \cdot \text{Rot}_f(a_1)^{-1} & \end{array} \right]$$

engendre  $\mathcal{L}_0$ . Alors, des combinaisons linéaires des colonnes du bloc de gauche permettent de retirer les  $m$  premières colonnes du bloc de droite (ces dernières étant engendrées modulo  $q$  par le bloc de gauche). Finalement, on a bien que les vecteurs voulus engendrent  $\mathcal{L}_0$ .

( $\supseteq$ ) Réciproquement, il suffit de remonter les calculs, tout étant inversible.

**Théorème 3.2** Si l'un des  $a_i$  est inversible modulo  $f$ , alors  $\text{vol}(\mathcal{L}_0) = q^{m(t-1)}$

**Preuve :**

On commence par remarquer que quitte à permuter les  $a_i$ , la forme précédente est valable dès qu'au moins l'un d'entre eux est inversible modulo  $f$ . Il suffit alors de dire que les colonnes de la matrice constituée sont linéairement indépendantes pour obtenir une base du réseau. Or cette matrice est triangulaire inférieure à termes diagonaux non nuls, donc ses colonnes sont libres, et de plus son déterminant vaut le produit des termes diagonaux, ce qui achève la preuve.

On aimerait pouvoir utiliser la même preuve dans le cas des réseaux  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , cependant cela n'est pas possible car les matrices composant le bloc de gauche sont rectangulaires, donc n'admettent pas

d'inverse. On peut cependant justifier que cette colonne est de rang plein, ce qui permettra d'obtenir un résultat sur le volume analogue à celui qui précède.

### Théorème 3.3 (Volumes)

- Avec une probabilité  $\geq 1 - (\frac{m}{q})^{\lfloor t/\lceil \frac{m}{d} \rceil \rfloor}$ , on a que  $\text{vol}(\mathcal{L}_1) = q^{td-m}$ .
- Avec une probabilité  $\geq 1 - (\frac{n+d-1}{q})^{\lfloor t/\lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil \rfloor}$ , on a que  $\text{vol}(\mathcal{L}_2) = q^{td-(n+d-1)t}$ .

Si on utilise les ordres de grandeurs proposés dans le schéma de chiffrement de [RSSS17], on a :

$$\mathbb{P}(\text{vol}(\mathcal{L}_2) = q^{td-(n+d-1)t}) \geq 1 - \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\log n}}\right)^{\log n}$$

**Preuve :** Les deux cas étant analogues, on se contente de la preuve pour  $\mathcal{L}_2$ . Il suffit de montrer qu'avec bonne probabilité,  $A := [\text{Toep}^{d,n}(a'_i)_{i \leq t}]$  est de rang plein.

On commence par rappeler de lemme de Schwartz-Zippel : pour un polynôme multivarié non nul de degré  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , la probabilité d'annuler ce polynôme en choisissant les variables uniformément est au plus  $\frac{n}{p}$ .

On considère donc la matrice carré constituée des  $n+d-1$  premières lignes de  $A$ , que l'on note  $A_1$ . Le déterminant de cette sous-matrice est un polynôme à plusieurs variables, de degré  $n+d-1$ , dont les variables sont choisies uniformément dans  $\mathbb{Z}_q$ . Ce polynôme est non nul, par exemple on peut choisir  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = x^d$ ,  $a_3 = x^{2d}$ , ... et alors  $A_1 = \text{Id}$  et donc  $\det(A_1) = 1 \neq 0$ .

Alors, d'après le lemme, on a que :

$$\mathbb{P}[\det(A_1) = 0] \leq \frac{n+d-1}{q}$$

On peut ensuite répéter ce processus pour les sous-matrices suivantes. Cependant, afin de conserver l'indépendance, il faut faire attention à ne pas reprendre une Toeplitz déjà utilisée. Ainsi,  $A_k$  sera la sous matrice carré commençant à la  $(k-1)d \lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil$ -ème ligne. Au total, on pourra donc avoir au moins  $\lfloor t/\lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil \rfloor$  sous matrices carrés dont les entrées sont mutuellement indépendantes. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{rg}(A) < n+d-1) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \leq \lfloor t/\lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil \rfloor} \det A_k = 0\right) \\ &= \mathbb{P}[\det(A_1) = 0]^{\lfloor t/\lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil \rfloor} \\ &= \left(\frac{n+d-1}{q}\right)^{\lfloor t/\lceil \frac{n+d-1}{d} \rceil \rfloor} \end{aligned}$$

Ce qui donne bien l'inégalité voulue. On peut alors procéder aux mêmes inversions et opérations sur les colonnes que dans le cas de  $\mathcal{L}_0$ , pour obtenir de manière analogue la valeur du volume.

On précise que cette borne est loin d'être optimale. En effet, les résultats expérimentaux laissent penser que la probabilité d'être de rang plein pour nos matrices structurées est en fait la même que pour des matrices où les coefficients sont choisis uniformément (dans ce cas on a une formule exacte).

### 3.2.2 Évolution de la distance au réseau

Dans le cas de LWE, la distance au réseau de l'instance de BDD est exactement égale à la norme du vecteur d'erreur  $e$ . On note  $e_0$  (resp.  $e_1$ ) (resp.  $e_2$ ) la variable aléatoire qui représente le vecteur d'erreur tiré dans  $\mathcal{L}_0$  (resp.  $\mathcal{L}_1$ ) (resp.  $\mathcal{L}_2$ ).



**Théorème 3.4 (Erreur moyenne)**

- $\mathbb{E}(\|e_0\|) \leq \sqrt{tm}(\alpha q)$
- $\mathbb{E}(\|e_1\|) \leq \sqrt{td}(\alpha q)$
- $\mathbb{E}(\|e_2\|) \leq \sqrt{td}(\alpha dSq)$

**Preuve :**

On rappelle que par concavité de la fonction racine, on a que, pour  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , l'inégalité de Jensen donne :

$$\sqrt{\mathbb{E}(\|X\|^2)} \geq \mathbb{E}(\|X\|)$$

Les composantes de  $e_0$  et  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) suivent une loi normale de variance  $\alpha q$  (resp.  $\alpha q dS$ ), ce qui donne la valeur du deuxième moment. Alors par linéarité de l'espérance et en utilisant l'inégalité ci-dessus, on en déduit le résultat voulu.

**3.3 Heuristique gaussienne****4 Schéma de chiffrement****4.1 Preuve de correction**

On se propose tout d'abord de détailler la preuve de correction du schéma de chiffrement proposé dans [RSSS17] :

On rappelle le cadre de la preuve :  $s \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}^{<n+d+k-1}[X])$ , pour  $i \leq t$  on a  $a_i \leftarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}^{<n}[X])$ ;  $e_i \leftarrow [D_{\alpha q}][X]^{<k+d}$  et finalement  $r_i \leftarrow \mathcal{U}(\{0, 1\}^{<k+1}[X])$ . On note  $e_i(j)$  le  $j$ -ème coefficient de  $e_i$ . Le but est d'avoir avec bonne probabilité que :

$$\|\mu + 2 \sum_{i \leq t} r_i \odot_d e_i\|_{\infty} < q/2$$

où  $\mu \in \{0, 1\}^{<d}[X]$  est le message à chiffrer.

**Théorème 4.1** Si  $\alpha \leq \frac{1}{16(k+1)t\sqrt{\lambda}}$  et  $8td(k+1) \leq qd \leq e^{\lambda}$ , alors pour tout  $\mu \in \{0, 1\}^{<d}[X]$ , avec probabilité  $\geq 1 - 2^{-\Omega(\lambda)}$  sur  $(\text{sk}, \text{pk}) \leftarrow \text{KeyGen}$ , on a  $\text{Decrypt}(\text{sk}, \text{Encrypt}(\text{pk}, \mu)) = \mu$

**Preuve :** On commence par donner une borne classique sur la distribution gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X \leftarrow \mathcal{N}(\sigma)}(|X| \geq M) &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_M^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &\leq \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_M^{\infty} \frac{t}{M} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &\leq \frac{2\sigma}{M\sqrt{2\pi}} [-e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}]_M^{\infty} \\ &\leq \frac{2\sigma}{M\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

De plus, si on note  $E := \max_{i,j} |e_i(j)|$ , on a que :

$$\begin{aligned} |(r_i \odot_d e_i)(l)| &= |(r_i \times e_i)(l+k)| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{k+l} r_i(j) e_i(k+l-j) \right| \\ &\leq (k+1)E \end{aligned}$$

Car les  $r_i$  étants de degré au plus  $k$ , il y a au plus  $k + 1$  termes non nuls dans la somme.

Donc  $|(\sum_{i \leq t} r_i \odot_d e_i)(l)| \leq t(k + 1)E$ .

Alors, on obtient que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\|\mu + 2 \sum_{i \leq t} r_i \odot_d e_i\|_\infty \geq q/2) &\leq \mathbb{P}(1 + 2E \geq \frac{q}{2t(k+1)}) \\
 &\leq \mathbb{P}(\bigcup_{i,j} \{|e_i(j)| \geq \frac{q}{4t(k+1)} - \frac{1}{2}\}) \\
 &\leq (k+d)t \mathbb{P}_{X \leftarrow \mathcal{N}(\alpha q)}(|X| \geq \frac{q}{4t(k+1)} - 1) \\
 &\leq \frac{8t^2(k+1)(k+d)\alpha q}{q - 6t(k+1)} e^{-\frac{1}{2(\alpha q)^2}(\frac{q}{4t(k+1)} - 1)^2}
 \end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses sur les paramètres de sécurité, on obtient l'inégalité suivante sur l'exposant :

$$\frac{1}{2(\alpha q)^2}(\frac{q}{4t(k+1)} - 1)^2 \geq \frac{16^2 \lambda t^2 (k+1)^2}{2q^2}(\frac{q}{4t(k+1)} - 1)^2 \geq \frac{\lambda}{2}(4 - \frac{16t(k+1)}{q})^2 \geq 2\lambda$$

On majore de même le facteur pré-exponentiel :

$$\frac{8t^2(k+1)(k+d)\alpha q}{q - 6t(k+1)} \leq \frac{8t^2(k+1)(k+d)\alpha q}{2t(k+1)} \leq 4t(k+d)q \frac{1}{16(k+1)t\sqrt{\lambda}} \leq \frac{(k+d)q}{4(k+1)\sqrt{\lambda}} \leq \frac{qd}{4\sqrt{\lambda}}$$

Finalement on obtient la borne voulue :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\|\mu + 2 \sum_{i \leq t} r_i \odot_d e_i\|_\infty \geq q/2) &\leq \frac{qd}{4\sqrt{\lambda}} e^{-2\lambda} \\
 &\leq e^{-\lambda - \log(4\sqrt{\lambda})} \\
 &\leq 2^{-\Omega(\lambda)}
 \end{aligned}$$

□

## Annexe

## Références

- [Reg09] Oded REGEV. “On lattices, learning with errors, random linear codes, and cryptography”. In : *Journal of the ACM* (2009), p. 1-40.
- [SSTX09] Damien STEHLÉ, Ron STEINFELD, Keisuke TANAKA et Keita XAGAWA. “Efficient public key encryption based on ideal lattices”. In : *International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security* (2009), p. 617-635.
- [Lyu16] Vadim LYUBASHEVSKY. “Digital signatures based on the hardness of ideal lattice problems in all rings”. In : *International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security* (2016), p. 196-214.

- [RSSS17] Miruna ROȘCA, Amin SAKZAD, Damien STEHLÉ et Ron STEINFELD. “Middle-Product Learning With Errors”. In : *Annual International Cryptology Conference* (2017), p. 283-297.