Contre-exemples au théorème de Denjoy

Ce document est consacré à l'étude de certains contre-exemples du théorème de Denjoy. Dans une première partie nous construirons un contre-exemple $\mathcal{C}^1$ élémentaire proposé par Denjoy lui-même, et qui est développé par H. Rosenberg dans [Ros74]. Nous présenterons ensuite un résultat sur l'existence et la densité de contre-exemples de régularité $\mathcal{C}^{2-\epsilon}$ proposé par Michael Herman dans sa thèse [Her79], en particulier au chapitre X.

1 Cas continûment dérivable

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Denjoy) : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme f du tore tel que $\rho(f) = \alpha$ et f n'est pas conjugué à la rotation R_α.

Pour faire cela, on s'inspire de la preuve du théorème dans le cas $\mathcal{C}^2$: on sait déjà par Poincaré qu'un tel f est semi-conjugué à R_α par une fonction continue croissante h du tore. La preuve procède par l'absurde, en montrant que si h n'est pas inversible, alors elle est constante sur un intervalle I non trivial du tore. Les itérés $f^n(I)$ sont alors disjoints (on dit que I est un intervalle errant pour la dynamique de f), et on conclut en montrant que la somme de leurs tailles diverge.
L'idée ici est donc construire une fonction f qui admet un intervalle errant mais dont la suite des tailles des itérés est sommable.

On se servira de l'invariant de conjuguaison suivant :

Définition 1.1 : Un homéomorphisme du tore f est dit *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal au tore tout entier.

Proposition 1.1

1. Si f est conjugué à g minimal, alors f est minimal.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors R_α est minimal

Preuve :
(1) est immédiat en utilisant la bijectivité et la continuité de la conjuguaison.
(2) s'obtient en remarquand que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ est dense dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$\square$

La proposition suivante sera utile dans la suite :

Proposition 1.2 Soient D_1, D_2 deux ensembles denses dans $[0, 1]$, et $f : D_1 \to D_2$ une surjection (strictement) croissante, alors f admet un unique prolongement continu, (strictement) croissant, de $[0, 1]$ dans lui-même.

Preuve : L'unicité du prolongement est immédiate par densité de D_1, car deux fonctions continues sur un sous-ensemble dense sont partout égales. Si $x \in [0,1] \setminus D_1$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_1 qui tend vers x, que l'on peut supposer monotone. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone bornée, donc converge vers une limite qui définit la valeur de $f(x)$. Cette construction préserve clairement la monotonie (stricte) de f, et est de plus continue, car l'image monotone non continue d'un intervalle évite un intervalle, or l'image de f est dense.

□

Preuve du Théorème 1.1 :

On note $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des longueurs des intervalles, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$
- $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$
- $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| < \frac{1}{4}$

On peut par exemple prendre $l_n = \frac{c}{n^2+k}$ où k est grand et c est une constante bien choisie.

On note alors $\alpha_n := \alpha n \mod 1$ et on pose $I_n := [b_n, c_n]$ où $\begin{cases} b_n := \sum_{\{m,\ \alpha_m < \alpha_n\}} l_m \\ c_n := \sum_{\{m,\ \alpha_m \leq \alpha_n\}} l_m = b_n + l_n \end{cases}$

Lemme 1.1 $K := [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{I}_n$ est un fermé non trivial.

Preuve : Cet ensemble est clairement distinct de $[0,1]$, et il est de plus non vide car sinon, par compacité de $[0,1]$, on pourrait en extraire un recouvrement fini, mais alors la mesure de ce recouvrement serait strictement plus petite que 1 au vu de la définition des $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui est absurde.

□

<u>Rq</u> : K est en fait un ensemble de Cantor, au sens où il est fermé d'intérieur vide et sans point isolé.

On considère ensuite la fonction h définie par morceaux sur les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h : I_n \mapsto \alpha_n$.

Lemme 1.2 Les $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont ordonnés identiquement aux $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus h admet un prolongement continu sur $[0,1]$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{Z},\ h^{-1}(\{\alpha_n\}) = I_n$

Preuve : Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2}$, alors : $b_{n_2} - c_{n_1} = \sum_{k, \alpha_{n_1} < \alpha_k < \alpha_{n_2}} l_k \ > 0$, ce qui prouve le premier point.
Ensuite, on en déduit immédiatement que h est croissante, et alors par la Proposition 1.2, admet un prolongement continue croissant de [0,1] dans lui-même.

Références

[Ros74] Harold Rosenberg. “Un contre-exemple à la conjecture de Seifert”. In : *Séminaire N. Bourbaki* 434 (1974), p. 294-306.

[Her79] Michael Herman. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. In : *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.* 49 (1979), p. 5-233.