Calcul paradifférentiel et théorème d'Arnold

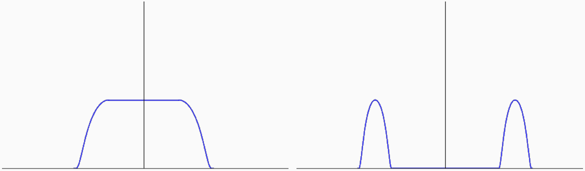
Sacha Ben-Arous, Mathis Bordet

14 Mai 2024

ENS Paris-Saclay

Calcul paradifférentiel

Multiplicateurs de Fourier



On définit les opérateurs de la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante :

$$\text{Pour } u \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\Delta_{-1} u} := \psi \cdot \hat{u}, \quad \widehat{\Delta_k u} := \chi(2^{-k} \cdot) \cdot \hat{u} \ \text{ si } k \geq 0$$

$$S_n u := \sum_{k=-1}^{n-1} \Delta_k u$$

On a que :

$$\lim_{n \to \infty} S_n u = u$$

Décomposition régularisante

- Régularisation: si $u \in L^2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n \in \mathcal{S}$.
- Presque comme une base hilbertienne : pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2 \sum_{k \geq -1} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2.$$

Caractérisations d'espaces fonctionnels

Pour $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$u \in H^s(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sum_{k \geq -1} 2^{2ps} \|\Delta_k u\|_{L^2}^2 < +\infty.$$

Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$u \in C^r(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \sup_{k \geq -1} 2^{k\alpha} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Paraproduits

$$uv = \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k u S_{k-2} v \; + \sum_{k=-1}^{+\infty} \Delta_k v S_{k-2} u \; + \sum_{|k-j|\leq 2} \Delta_k u \Delta_j u$$
$$= T_v u + T_u v + R(u,v)$$

- $\forall s \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in H^s,$

$$\|T_u v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s}$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, u \in L^\infty, v \in C_*^\alpha,$

$$\|T_u v\|_{C_*^\alpha} \leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{C^\alpha}$$

Paralinéarisation

- Soit F une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $\rho := s - \frac{d}{2} > 0$, alors

$$F(u) - T_{F'(u)} u \in H^{s+\rho}(\mathbb{R}^d).$$

- Soit $s, r > 0$, et $a, b \in C^r_*(\mathbb{T}^d)$. Alors

$$R_{CM}(a, b) := T_a \circ T_b - T_{ab}$$

est un opérateur continu de $H^s(\mathbb{T}^d)$ dans $H^{s+r}(\mathbb{T}^d)$

Difféomorphismes du cercle

Dynamique en dimension 1

On considère le cercle $\mathbb{S}^1 := \{z, |z| = 1\}$, ainsi que le plongement $\Pi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$.
Pour $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$, on dit que $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est un relèvement si $\Pi \circ F = f \circ \Pi$, i.e $f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi F(t)}$

Lemme : Si f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme du cercle, alors il existe un relèvement de f qui est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (de $\mathbb{R}$).

Dans la suite, on considèrera a minima des homéomorphismes, ainsi que leur relèvements réguliers associés.

Nombre de rotation et Théorème Poincaré

Si f est un homéomorphisme, F un relèvement, et $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{F^n(x)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de x, notée $\rho(F)$.
On définit alors $\rho(f) := \rho(F) \mod 1$.

Théorème (Poincaré) : Si f est un homéomorphisme de nombre de rotation α irrationnel, alors f est semi-conjugué à R_α, i.e il existe h continue telle que $h \circ f = R_\alpha \circ h$.

Théorème d'Arnold

But

Le But du théorème d'Arnold est déterminé la régularité des conjugaison d'un homéomorphisme g d'angle de rotation α irrationnelle proche de la rotation R_α. c'est a dire résoudre :

$$\eta(x+\alpha) = g \cdot \eta(x)$$

d'inconnue η.

Cadre

On écrit alors :

$$g(x) = R_\alpha + f(x)$$

avec f "assez petit".
On cherche alors $\eta = id + u$. L'équation a résoudre:

$$\eta(x+\alpha) = g \cdot \eta(x)$$

devient alors :

$$\Delta_\alpha u = f \cdot (id + u) \text{ avec } \Delta_\alpha u(x) = u(x+\alpha) - u(x)$$

Perte de régularité

En voulant résoudre

$$\Delta_\alpha u = h(x)$$

On a que

$$(\exp(2i\pi n\alpha) - 1)\widehat{u}(n) = \widehat{h}(n)$$

Avec la condition diophantienne:

$$\|\frac{q\alpha}{\pi} - p| \geq \frac{1}{\gamma q^\sigma}$$

cela induit la perte de régularité suivante, si $h \in H^{s+\sigma}$ alors $\Delta_\alpha^{-1} h \in H^s$

L'idée de la preuve est de transformer l'équation :

$$\Delta_\alpha u = f \cdot (id + u)$$

en une equation de la forme:

$$u = \Delta_\alpha^{-1} L u$$

De telle sorte que L compense les pertes de Δ_α^{-1} grace au théorème de paralinéarisation.
On en conclut que pour que la conjugaison soit dans H^s, il faut que f soit dans $H^{s+\sigma+\varepsilon} \cap C^{N_s+1}$

Conclusion