

Estatística e ProbabilidadeBacharelado em Sistemas de Informação

Aula 10: Teste de Hipóteses: Médias, Desvio-Padrão e Baseados em Dados Contados Prof. Dr. Samuel Sanches



- ★ Aula passada: inferência com problemas relacionados a estimativas.
- ★ Se quisermos supor um resultado para determinado conjunto de dados, entramos nas hipóteses.
- ★ Uma hipótese estatística é uma afirmação ou conjectura sobre um parâmetro, ou parâmetros, de uma população (ou populações); pode também se referir ao tipo, ou natureza, da população (ou populações).
- ★ Agora, vamos testar hipóteses sobre parâmetros populacionais, média e o desvio-padrão.



- ★ A hipótese a ser formulada necessita ser muito precisa, o que dificulta, então o que se faz é criar uma **hipótese contrária**!
- ★ Suspeita da honestidade de um jogo de dados: se hipótese for dados são viciados, teremos que especificar como, quanto, etc, sobre esse "vício". Muito mais simples testar a hipótese de que eles são perfeitamente equilibrados, o que nos forneceria então, a resposta sobre a honestidade do jogo!
- ★ Mostrar que determinada dieta é mais eficiente que outra, podemos testar se elas são iguais.



- ★ Essa primeira hipótese, denotamos como hipótese nula, Ho.
- ★ Ela é testada para ver se é rejeitada ou não.
- ★ Mesma ideia de processos criminais, a pessoa é inocente, até que se prove o contrário. Inocência é a hipótese nula.
- ★ Quando a nula é rejeitada, temos a hipótese alternativa, HA. Formulada em conjunto com a nula.
- \star Caso teste da hipótese nula seja μ = 0,38 e queremos testar contra a alternativa μ > 0,38, só será válido se média for muito maior, com a alternativa de μ ≠ 0,38 cobrimos todos casos.



- ★ **Exemplo**: O tempo médio de secagem de uma tinta é de 20 minutos. Investigando a eficácia de uma modificação na composição química, se quer testar a hipótese nula μ = 20 minutos contra uma alternativa adequada. a) Qual hipótese alternativa se deve utilizar se ele quiser fazer a modificação só se realmente decrescer o tempo de secagem? b) Qual hipótese alternativa o fabricante deve usar se o novo processo for mais barato, e será feito, a não ser se o tempo de secagem aumentar?
 - a) Hipótese alternativa μ < 20 e fazer a modificação somente se a hipótese nula puder ser rejeitada.
 - **b)** Hipótese alternativa μ > 20 e fazer a modificação a menos que a hipótese nula seja rejeitada.



Exemplo: Temos μ = 0,38 s, vamos testar H₀ sendo μ = 0,38 s e alternativa HA sendo μ ≠ 0,38 s. Toma-se uma amostra aleatória de n = 40 para ver se a hipótese nula é aceita, caso a média da amostra cair em entre 0,36 e 0,40 s, caso contrário, será rejeitada.

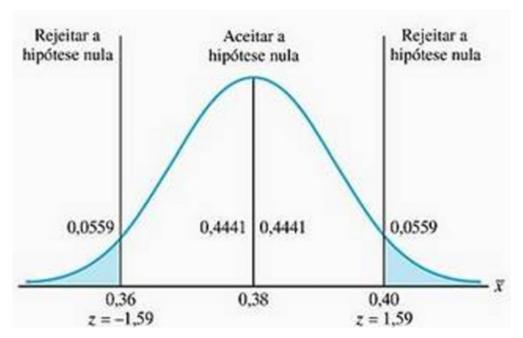
Pode ser falho, amostra pode ser < 0,36 ou > 0,40. Supondo saber σ = 0,08 s, para verificar se é <= que 0,36 ou >= 0,40 vemos as áreas da curva normal, para essa amostra escolhida:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.08}{\sqrt{40}} \approx 0.0126$$

$$z = \frac{0,36 - 0,38}{0,0126} \approx -1,59$$
 e $z = \frac{0,40 - 0,38}{0,0126} \approx 1,59$



★ Exemplo:



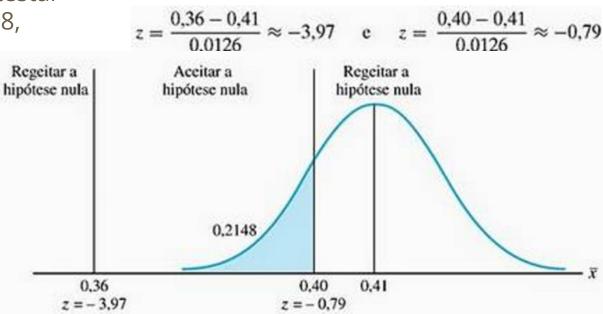
Então: $0.0559 + 0.0559 = 0.1118 \approx 0.11$



Exemplo: se μ = 0,41, acabaria aceitando erroneamente a hipótese nula, então temos que testar

agora para µ ≠ 0,38,

então:





Exemplo: Então temos $0,11 \rightarrow 11\%$ de rejeitar erroneamente a hipótese nula $\mu = 0,38$ ou $0,21 \rightarrow 21\%$ de aceitar erroneamente quando na verdade $\mu = 0,41$.

	Aceitar H ₀	Rejeitar H ₀
H ₀ é verdadeiro	Decisão correta	Erro tipo I
H ₀ é falso	Erro tipo II	Decisão correta

Probabilidade do Erro tipo I é denominada α (alfa). Probabilidade do Erro tipo II é denominada β (beta)



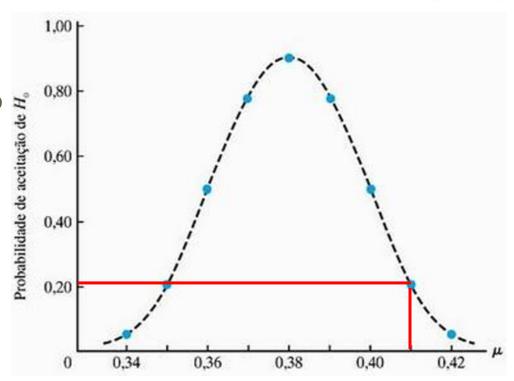
Exemplo: Vamos supor, média da amostra seja 0,408. Que decisão tomar e estará errada se: **a)** μ = 0,38 e **b)** μ = 0,42?

Como 0,408 excede 0,40, temos que rejeitar a hipótese nula μ = 0,38.

- a) Como a hipótese nula é verdadeira e foi rejeitada, estamos cometendo um erro do tipo I.
- **b)** Como a hipótese nula é falsa e foi rejeitada, não estamos cometendo erro.



No exemplo, o valor alternativo 0,41 foi escolhido arbitrariamente, poderia ter sido qualquer outro (com bom senso), se escolhermos vários, e fazer a curva da probabilidade beta para cada um dos casos, temos a curva característica de operação ou curva CO.



(em vermelho o valor 0,41 escolhido e calculado 0,21).



- \bigstar Hipótese nula ser μ = 0,38 é chamada de **hipótese simples**
- **Hipótese composta** $\mu \neq 0.38$ ou $\mu > 0.38$ ou $\mu < 0.38$.
- ★ Exemplo: Pesquisa mostra que motoristas levam 0,9 multas por ano em média. Uma pessoa quer verificar se a pessoa que tem mais de 65 anos, tem mais do que 0,9 multas por ano, tomando uma amostra de motoristas com mais de 65 anos:

Rejeitar H₀ de μ = 0,9 (aceitar a H_A de μ > 0,9) caso média amostral seja > 1,2 multas por ano, caso contrário, não concluir nada.



★ Continuação Exemplo: Como não será concluído caso não obtermos sucesso não temos erro tipo II.

Isso é o teste de significância: se a diferença entre o que se espera sob a hipótese nula e o que se observa numa amostra for grande demais para que possa razoavelmente ser atribuída ao acaso, rejeitamos a hipótese nula, se a diferença for muito pequena e pode ser atribuída ao acaso ela **não é significante**.

Temos 5 passos para seguir:



- ★ 1) Formulamos uma <u>hipótese nula simples</u> e uma hipótese alternativa apropriada que deverá ser aceita quando a hipótese nula for rejeitada.
- \star 2) Especificamos (normalmente α = 0,05 ou 0,01) a probabilidade de um erro tipo I, nível de significância.
- ★ 3) Com base na distribuição amostral de uma estatística apropriada, construímos um critério para testar a hipótese nula contra a hipótese alternativa escolhida, ao nível de significância especificado.
- ★ 4) Calculamos o valor da estatística na qual é baseada a decisão.
- ★ 5) Decidimos se rejeitamos a hipótese nula, se a aceitamos, ou se não decidimos nada (reservar julgamento).



- ★ Exemplo: Uma máquina enche caixas com uma média de 454 gramas por caixa. a) Média seja diferente de 454, qual hipótese nula e qual alternativa devemos adotar para testar? b) Média seja inferior a 454, qual hipótese nula e qual alternativa devemos adotar para testar?
 - a) "diferente" nos resta o igual: H₀: μ = 454 e H_A: μ ≠ 454 (**teste bilateral**, pode ser maior ou menor.
 - **b)** "inferior": Ho: μ = 454 e Ha: μ < 454 (**teste unilateral**, só menor)



★ Estatística para o teste relativo a médias (**teste z**):

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- ★ μ₀ é o valor da média para a hipótese nula
- ★ usa-se unidades padronizadas (unidades z) para se aplicar a grande variedade de problemas
- **★ Teste de grandes amostras**, n ≥ 30, para poder aproximar para a distribuição normal

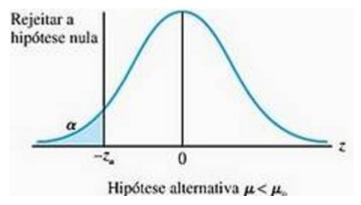


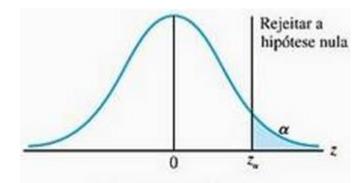
Hipótese alternativa	Rejeitar a hipótese nula se	Aceitar a hipótese nula ou reservar julgamento se
$\mu < \mu_0$	$z \leq -z_{\alpha}$	$z > -z_{\alpha}$
$\mu > \mu_0$	$z \ge z_{\alpha}$	$z < z_{\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ou $z \ge z_{\alpha/2}$	$-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$

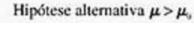
α é o nível de significância:

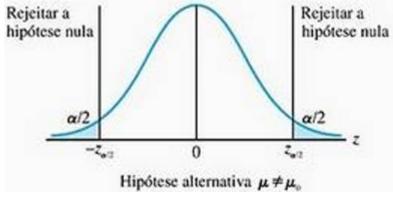
- $\rightarrow \alpha$ = 0,05, as linhas divisórias são -1,645 ou 1,645 quando unilateral e -1,96 e 1,96 quando bilateral
- \rightarrow α = 0,01, as linhas divisórias são -2,33 ou 2,33 quando unilateral e -2,575 e 2,575 quando bilateral













- **Exemplo**: Com uma amostra aleatória com n = 35 e ao nível 0,05 de significância, se quer testar se a média é 72,4. Caso a média amostral seja 73,2, o que se decidirá, com σ = 2,1?
 - **1)** Ho: $\mu = 72.4$ e Ha: $\mu \neq 72.4$ com $\alpha = 0.05$
 - **2)** Rejeitar H₀ se $z \le -1,96$ ou $z \ge 1,96$, caso contrário, aceitar a hipótese nula (ou reservar o julgamento)
 - 3) Com $\mu_0 = 72.4$, $\sigma = 2.1$, n = 35 e x = 73.2: $z = \frac{73.2 72.4}{2.1/\sqrt{35}} \approx 2.25$
 - **4)** Como z = 2,25 (maior que 1,96), a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, a diferença entre a média amostral de 73,2 e a média populacional de 72,4 é significante.



Exemplo: Com uma amostra aleatória com n = 35 e ao nível 0,05 de significância, se quer testar se a média é 72,4. Caso a média amostral seja 73,2, o que se decidirá, com σ = 2,1?

Se o nível de significância fosse α = 0,01, e z = 2,25 (não muda), então ele estaria entre -2,575 e 2,575, e a hipótese nula não poderia ser rejeitada!!!!

O nível deve ser escolhido antes de conhecer os dados, para evitar a tentação de escolher um que convém aos nossos propósitos!!!!!



- ★ Valor p: é a probabilidade na da cauda, o valor que obtemos de uma tabela z (área sob a curva normal).
- ★ Ele é o valor mais baixo para o nível de significância no qual a hipótese nula poderia ter sido rejeitada.
- ★ Usado quando não queremos tomar uma decisão, só saber o valor mínimo, por conhecimento ou para outra pessoa tomar a decisão.



Exemplo: Com uma amostra aleatória com n = 35 e ao nível 0,05 de significância, se quer testar se a média é 72,4. Caso a média amostral seja 73,2, o que se decidirá, com σ = 2,1? Usar valor p!

Com
$$\mu_0 = 72,4$$
, $\sigma = 2,1$, $n = 35$ e $x = 73,2$: $z = \frac{73,2 - 72,4}{2.1/\sqrt{35}} \approx 2,25$

Para z = 2,25 obtemos da tabela de área sob a curva normal o valor de 0,4878, como estamos interessados na parte maior que o z, temos que fazer 0,5000 - 0,4878 = 0,0122, lembre que o z é > e < então multiplicamos por 2, 2*0,022 = 0,0244, então menos nível de significância neste caso é 0,0244.



★ Ao desconhecer, procedemos da mesma maneira, porém com o **teste t**:

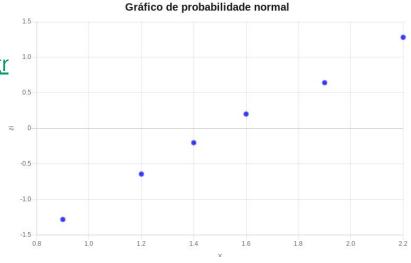
$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

- ★ Temos os graus de liberdade: n 1
- ★ Valores para t e as decisões, seguem igual.



- ★ Exemplo: Seis amostras possuem médias, 1,4; 1,6; 0,9; 1,9; 2,2 e 1,2. a) Confira se esses dados podem ser considerados como uma amostra de uma população normal. b) Se isso ocorrer, teste ao nível 0,05 de significância, se isso corrobora se a média é de fato 1,5.
 - **a)** Fazer o gráfico de probabilidade (https://mathcracker.com/pt/fabricante-gr

temos uma reta, então sim, podemos assumir que a amostra vem de uma população normal





- ★ Exemplo: Seis amostras possuem médias, 1,4; 1,6; 0,9; 1,9; 2,2 e 1,2. a)
 Confira se esses dados podem ser considerados como uma amostra de uma população normal. b) Se isso ocorrer, teste ao nível 0,05 de significância, se isso corrobora se a média é de fato 1,5.
 - **b) 1)** H₀: μ = 1,5 e H_A: $\mu \neq$ 1,5 com α = 0,05 -> α /2 = 0,05/2 = 0,025 e n 1 = 6 1 = 5 graus de liberdade
 - **2)** Rejeitar H₀ se $t_{0,025} \le -2,571$ ou $t_{0,025} \ge 2,571$, caso contrário, aceitar a hipótese nula (ou reservar o julgamento)
 - 3) Com média amostral x = 1,533, s = 0,472 (x e s calculados pelos $t = \frac{1.533 1.5}{0.472/\sqrt{6}} \approx 0$, dados), n = 6 e μ_0 = 1,5:
 - **4)** Como t = 0,171 (entre -2,571 e 2,571), não podemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, os dados tendem a apoiar a alegação de que a média populacional é 1,5.



UTILIDADES

★ Calculadora de teste de hipótese para média:
http://www.learningaboutelectronics.com/Artigos/Calculadora-teste-de-hipotese-estatistica.php



- Vamos testar se o desvio-padrão populacional é igual a uma determinada constante σ_0 .
- Interesse quando se quer estudar a uniformidade de alguma coisa (produto, processo, operação), como se um vidro é suficientemente homogêneo, por exemplo.

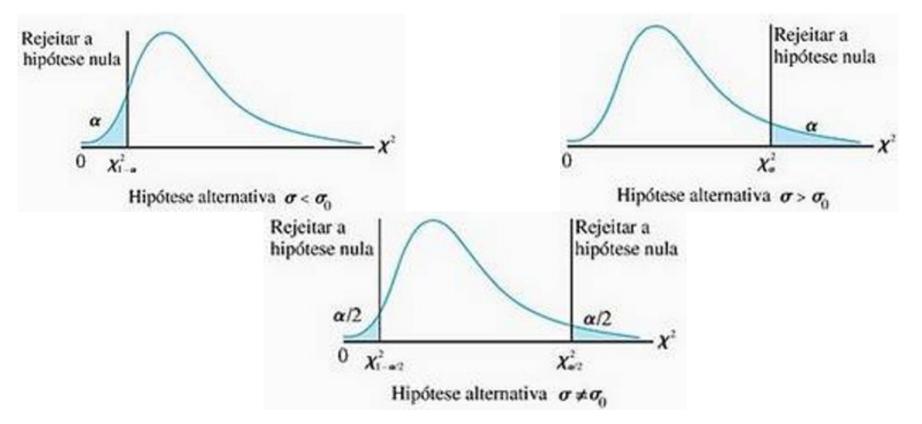
Estatística qui-quadrado:
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$



Hipótese alternativa	Rejeitar a hipótese nula se	Aceitar a hipótese nula ou reservar julgamento se
$\sigma < \sigma_0$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}$
$\sigma > \sigma_0$	$\chi^2 \ge \chi_{\alpha}^2$	$\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$
$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2} \text{ ou} \chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}$	$\chi^2_{1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}$

qui-quadrado também leva em conta os graus de liberdade: n - 1





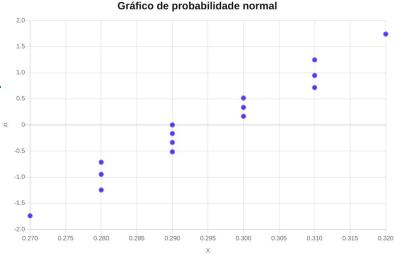


★ Exemplo: Precisa verificar se o desvio-padrão populacional é 0,010, ou se é superior. Com nível de confiança de 0,05 de significância e com uma amostra aleatória de n = 15.

0,32 0,30 0,31 0,28 0,30 0,31 0,28 0,31 0,28 0,31 0,29 0,28 0,30 0,29 0,29

Verificar se a amostra pode ser uma amostra normal (gráfico de probabilidade normal https://mathcracker.com/pt/fabricante-grafico-proba

onde vemos a linearidade, ou seja, podemos dizer que os dados vem de uma amostra normal





- ★ Exemplo: Precisa verificar se o desvio-padrão populacional é 0,010, ou se é superior. Com nível de confiança de
- 0,32 0,30 0,31 0,28 0,30 0,31 0,28 0,31 0,28 0,31 0,29 0,28
- 0,30 0,29 0,27 0,29 0,29
- 0,05 de significância e com uma amostra aleatória de n = 15.
- **1)** Ho: σ = 0,010 e Ha: σ > 0,010 com α = 0,05 e n 1 = 15 1 = 14 graus de liberdade

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- **2)** Rejeitar χ_0 se $\chi^2_{0,05} \ge 23,685$ (pela tabela), caso contrário, aceitar a hipótese nula (ou reservar o julgamento)
- 3) Com s = 0,014 (calculado dos dados), n = 15 e σ_0 = 0,010: $\chi^2 = \frac{14(0.014)^2}{(0.010)^2} \approx 27.44$
- **4)** Como χ^2 = 27,44 (é maior que 23,685), a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, podemos concluir que o desvio-padrão populacional é maior que 0,010.



- ★ O teste qui-quadrado também é chamado de teste relativo ao desvio-padrão para pequenas amostras.
- ★ Quando n ≥ 30, o teste a ser utilizado é o teste z, chamado de estatística do teste relativo ao desvio-padrão para grandes amostras:

$$z = \frac{s - \sigma_0}{\sigma_0 / \sqrt{2n}}$$



- **Exemplo**: Precisamos verificar se o desvio-padrão não exceda 0,040. Se uma amostra aleatória com n = 35, nos informa s = 0,053, isso constitui evidência ao nível 0,01 de significância em favor da hipótese nula σ = 0,040 ou em favor da alternativa σ > 0,040?
 - **1)** Ho: σ = 0,040 e Ha: σ > 0,040 com α = 0,01 e n = 35 (amostra grande)
 - **2)** Rejeitar H_0 se $z \ge 2,33$ (valor informado anteriormente), caso contrário, aceitar a hipótese nula

3) Com s = 0,053, n = 35 e
$$\sigma_0$$
 = 0,040: $z = \frac{0.053 - 0.040}{0.040/\sqrt{70}} \approx 2.72$

4) Como z = 2,72 (é maior que 2,33), a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, podemos concluir que o desvio-padrão populacional é maior que 0,040.



TESTES EM DADOS CONTADOS

- Agora, vamos utilizar os chamados dados contados, que são baseados no número de sucessos em n tentativas (como o lançamento de uma moeda ou dado).
- ★ Podemos dizer, que estaremos testando hipóteses sobre o parâmetro p da população binomial.
- ★ Utilizaremos tabelas (valores) de probabilidade binomiais.

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3275402/mod resource/content/1/Tabela %20Binomial2013.pdf

https://www.geogebra.org/m/xc6wqd5t



TESTES RELATIVOS A PROPORÇÕES

- ★ **Exemplo**: Afirma-se que 70% de pessoas de um grupo são contra alguma coisa. Se 15 dentre 18 pessoas, escolhidas aleatoriamente, são contra, teste a afirmação ao nível 0,05 de significância.
 - **1)** H₀: p = 0.7 e H_A: p > 0.7 com $\alpha = 0.05$
 - 2) A estatística do teste é o número observado de pessoas da amostra que são contra.
 - **3)** Temos n = 18 e x = 15, até, 18, então f(x) = 0.1046; 0,0458; 0,0126; 0,0016 (usando https://www.geogebra.org/m/xc6wqd5t); somando \rightarrow 0,1646, que ultrapassa 0,05.
 - 4) Então a hipótese nula não pode ser rejeitada, ou seja, os dados não apoiam que o p > 0,7.



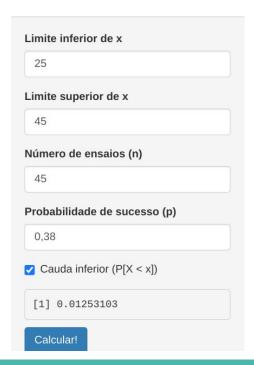
TESTES RELATIVOS A PROPORÇÕES

- **★ Exemplo**: Afirma-se que 38% de pessoas reconhecem determinado produto. Se 25 dentre 45 pessoas, escolhidas aleatoriamente, reconhecem, teste ao nível 0,05 de significância, se deve-se rejeitar a hipótese nula p = 0,38.
 - **1)** Ho: p = 0.38 e Ha: $p \neq 0.38$ (bilateral) com $\alpha = 0.05$
 - **2)** A estatística do teste é x = 25, o número de pessoas na amostra que reconhecem.
 - 3) Temos n = 45 e x = 25, por ser bilateral, precisamos da probabilidade para $x \ge 25$ (usando http://shiny.leg.ufpr.br/hektor/calc_dist/ veja próximo slide); para $x \le 25 \rightarrow 0.9944$ e para $x \ge 25 \rightarrow 0.0125$, fazemos 2*0.0125 = 0.0250, maior que 0.05.
 - **4)** Então a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, p não é 38%, é maior veja: (25/45)*100 = 55,6%.



TESTES RELATIVOS A PROPORÇÕES

\bigstar Resultado x \geq 25



Resultado $x \le 25$

0	
imite superior de x	
25	
lúmero de ensaios (n)	
45	\$
	so (n)
robabilidade de suces	50 (P)
0,38	50 (p)
0,38 Cauda inferior (P[X < x	7000 1.7
0,38	7000 1.7



TESTES RELATIVOS A PROPORÇÕES (n MUITO GRANDE)

 \star n é grande e podemos aproximar para curva normal (np > 5 e n*(1-p) > 5), podemos usar a estatística z:

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Hipótese alternativa	Rejeitar a hipótese nula se	Aceitar a hipótese nula ou reservar reserve julgamento se
$p < p_0$	$z \leq -z_{\alpha}$	$z > -z_{\alpha}$
$p > p_0$	$z \ge z_{\alpha}$	$z < z_{\alpha}$
$p \neq p_0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ou $z \ge z_{\alpha/2}$	$-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$



 $z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$

TESTES RELATIVOS A PROPORÇÕES (n MUITO GRANDE)

- **★ Exemplo**: Afirma-se que 75% de pessoas de um grupo têm dieta ruim. Se 206 de 300 pessoas, escolhidas aleatoriamente, têm dieta ruim, teste a hipótese nula p = 0,75 contra a alternativa p < 0,75 ao nível 0,01 de significância.
 - **1)** Ho: p = 0.75 e Ha: p < 0.75 com $\alpha = 0.01$
 - 2) Rejeitar H₀ se $z \le -2,33$, caso contrário, aceitar a hipótese nula (ou reservar o julgamento)

3) Com x = 206, n = 300, p0 = 0,75:
$$z = \frac{206 - 300(0.75)}{\sqrt{300(0.75)(0.25)}} \approx -2.53$$

4) Como z = -2,53 (menor que -2,33), a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, pelo menos 75% têm dietas ruins.



EXERCÍCIOS

★ Lista 4 de Exercícios → Parte 1

https://drive.google.com/file/d/128w6Pc-oGISlvHcNmGggwQgsOXPHdTaB/view?usp=share_link



★ Muito obrigado pela atenção!