

### 3- O MÉTODO SIMPLEX

#### 3.1- Introdução

O Método Simplex é uma técnica utilizada para se determinar, numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear. Será desenvolvido inicialmente para Problemas de Programação Linear, na forma padrão, mas com as seguintes características para o sistema linear de equações:

- i) Todas as variáveis são não-negativas;
- ii) Todos os  $b_i$  são não-negativos;
- iii) Todas as equações iniciais do sistema são do tipo " $\leq$ ". Assim, na forma padrão, só encontra-se variáveis de folga.

Se uma das características vistas não ocorrer, então, casos especiais do método devem ser considerados e esses serão vistos na seção 3.8, como o Método Simplex de Duas Fases.

#### 3.2- Introdução e fundamentos teóricos para o Método Simplex

##### 3.2.1- Determinação de soluções básicas em um sistema de equações lineares $m \times n$ , $m \leq n$ (sistemas lineares)

Se ao resolver-se um sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{A}$  fosse uma matriz inversível, então a solução seria facilmente determinada.

$$\text{Porém, se dado um sistema } \mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \text{ onde: } \begin{cases} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m & m \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.1)$$

Tal que  $m \leq n$ , ou seja, sistema é retangular, como determinar soluções de  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ?

O sistema acima sempre tem solução?

**Teorema 3.2.1.1:**

Seja a matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  com  $m \leq n$ . Se a matriz  $\mathbf{A}$  possui  $m$  colunas  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  linearmente independentes (LI's), então para qualquer  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$ , o sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  tem ao menos uma solução em  $\mathfrak{R}^n$ .

**Definição 3.2.1.1:**

Seja  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  ( $m \leq n$ ).

Se  $\mathbf{A}$  possui uma submatriz  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  onde  $\det \mathbf{B} \neq 0$  então diz-se que  $\mathbf{B}$  é uma submatriz base de  $\mathbf{A}$ , o que é equivalente a dizer:

**“Se  $\mathbf{A}$  tem  $m$  colunas LI, então a matriz  $\mathbf{B}$  formada por estas colunas é uma base para  $\mathfrak{R}^m$ ”.**

**Definição 3.2.1.2 - Variáveis básicas e não básicas:**

Considerando-se o sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , definido em (3.1) e  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  uma submatriz base de  $\mathbf{A}$ , então, as variáveis associadas à submatriz  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  são denominadas variáveis básicas.

**Notação:** variáveis básicas:  $\mathbf{x}_B$ .

Definida a submatriz base  $\mathbf{B}$  restam em  $\mathbf{A}$  ( $n - m$ ) colunas que chamará-se de submatriz não base  $\mathbf{N}$ . As variáveis associadas a esta submatriz  $\mathbf{N}$  são denominadas variáveis não básicas.

**Notação:** variáveis não básicas:  $\mathbf{x}_N$ .

**3.2.1.2- Uma possível solução para  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  da definição acima**

Seja o sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  e suponha que extraí-se de  $\mathbf{A}$  uma submatriz  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ .

Pelas definições anteriores pode-se fazer as seguintes partições no sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ :  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}; \mathbf{N}]$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$ .

Logo pode-se escrever:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B}:\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

Portanto, o sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  é equivalente ao sistema:

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}. \quad (3.2)$$

Isto define que  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N$  é uma possível solução de  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ .

#### **Definição 3.2.1.3 - Solução básica de $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ :**

Seja o sistema  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  definido em (3.1), então uma solução  $\bar{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , ou seja,  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{b}$ , é denominada solução básica, se e somente se, em (3.2),  $\mathbf{x}_N=0$ , então:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{b} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$\bar{\mathbf{x}}_B$ : solução básica.

#### **Definição 3.2.1.4 - Solução básica factível (viável):**

$\bar{\mathbf{x}}$  é denominada solução básica factível para  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  se, e somente se:

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ e } \bar{\mathbf{x}}_N = 0, \text{ para } \bar{\mathbf{x}} \geq 0 \text{ (ou seja } \bar{\mathbf{x}}_B \geq 0 \text{)}.$$

### **3.3- Definições e Teoremas Fundamentais**

Seja o conjunto  $\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} \in \Re^n \text{ tal que } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \}$

onde  $\mathbf{A} \in \Re^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \Re^m$  e  $\mathbf{x} \in \Re^n$  com  $m \leq n$ .

#### **Definição 3.3.1:**

$\mathbf{x}$  será um ponto extremo de  $\mathbf{S}$  se possuir  $n-m$  variáveis nulas.

#### **Teorema 3.3.1:**

“O conjunto  $\mathbf{S}$ , de todas as soluções factíveis do modelo de Programação Linear, é um conjunto convexo”.

Prova:

Sejam  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2 \in \mathbf{S}$ ,  $\lambda \in [0,1]$ .

Mostrará-se que:

i)  $\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \in \mathbf{S}$ ;

ii)  $\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \geq 0$ .

Para se mostrar i) basta notar que,

Se  $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{S}$  e  $\mathbf{x}^2 \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}$ ;

Assim,  $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \lambda \mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$ .

Logo,  $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2) = \mathbf{b}$ .

Para se mostrar ii):  $\mathbf{x}^1 \geq 0$  e  $\mathbf{x}^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{x}^1 \geq 0$  e  $(1-\lambda)\mathbf{x}^2 \geq 0$ ;

assim,  $\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \geq 0$ .

$\therefore \lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \in \mathbf{S}$ .

$\therefore \mathbf{S}$  é convexo.

### Teorema 3.3.2:

“Toda solução básica do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  é um ponto extremo do conjunto de soluções factíveis  $\mathbf{S}$ ”.

Prova:

Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  uma solução básica associada a uma submatriz base  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Então, sem perda de generalidade, suponha que,  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix}$  com  $\bar{\mathbf{x}}_N =$

0 para  $i = m+1, \dots, n$ .

Por contradição, suponha que  $\bar{\mathbf{x}}$  não seja ponto extremo ou vértice de  $\mathbf{S}$ , então  $\exists \bar{\mathbf{x}}^1$  e  $\bar{\mathbf{x}}^2 \in \mathbf{S}$  tal que:

$\bar{\mathbf{x}} = \lambda \bar{\mathbf{x}}^1 + (1-\lambda)\bar{\mathbf{x}}^2$ ;  $\lambda \in [0,1]$  e  $\bar{\mathbf{x}}^1 \neq \bar{\mathbf{x}}^2$  pois  $\bar{\mathbf{x}} \neq 0$ .

Desde que  $\bar{\mathbf{x}}_i = 0$  para  $i = m+1, \dots, n \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda \bar{\mathbf{x}}_i^1 = 0 \\ (1-\lambda)\bar{\mathbf{x}}_i^2 = 0 \end{cases} \text{ para } i=m+1, \dots, n \Rightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_i^1 = 0 \\ \bar{\mathbf{x}}_i^2 = 0 \end{cases} \text{ para } i=m+1, \dots, n.$$

Logo,  $\bar{\mathbf{x}}^1 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B^1 \\ \bar{\mathbf{x}}_N^1 \end{pmatrix}$  e  $\bar{\mathbf{x}}^2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B^2 \\ \bar{\mathbf{x}}_N^2 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Como } \bar{\mathbf{x}}^1 \in \mathbf{S} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}^2 \in \mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{b} \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^1 = \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{b} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^1 - \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^1 - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^2) = \mathbf{b} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{0}.$$

Mas  $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^1 \neq \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^2$  e então  $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^1 - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}^2 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , contradição,

pois por hipótese  $\mathbf{B}$  é uma submatriz base e portanto não singular!

$\therefore$  “Toda solução básica do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  é um ponto extremo do conjunto de soluções factíveis  $\mathbf{S}$ ”.

### Teorema 3.3.3:

Sejam  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  pontos extremos do conjunto  $\mathbf{S}$  e seja  $\mathbf{S}$  limitado.

Então,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{x}$  pode ser escrito como combinação convexa dos

pontos extremos  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  de  $\mathbf{S}$ , ou seja,  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}^i$  e  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ .

### Teorema 3. 3.4:

Se um problema de programação linear admitir solução ótima, então pelo menos um ponto extremo (vértice) do conjunto de pontos viáveis é uma solução ótima do problema.

Mostrará-se este teorema admitindo-se que o conjunto  $\mathbf{S}$  é limitado.

Prova:

Sejam  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  pontos extremos do conjunto  $\mathbf{S}$  limitado.

Então, pelo teorema 3.3.3,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{x}$  pode ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p$  de  $\mathbf{S}$ , ou seja,  $\mathbf{x} =$

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}^i \text{ e } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

$$\text{Logo, } \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}^i \right) = \lambda_1 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^2 + \dots + \lambda_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}^p.$$

Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto extremo tal que  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^i$  ( $i=1, \dots, p$ ).

$$\text{Mas } \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^2 + \dots + \lambda_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}^p \geq$$

$$\lambda_1 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \lambda_2 \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \dots + \lambda_p \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*.$$

Então,  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S}.$

$\therefore \mathbf{x}^*$  é um vértice ótimo (solução ótima) do problema.

### **Corolário 3.3.1:**

“Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo  $\mathbf{S}$ ”.

### **Teorema 3.3.5:**

Toda combinação convexa de soluções ótimas de um P.P.L. é também uma solução ótima do problema.

### **Corolário 3.3.2:**

Se um P.P.L. admitir mais de uma solução ótima então admite infinitas soluções ótimas.

### **Corolário 3.3.3:**

“Se a função objetivo assume o máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos”.

## **3.4- Os Passos do Método Simplex**

Os passos abordados a seguir referem-se a um P.P.L. de minimização.

Para iniciarmos o Método Simplex necessita-se de uma solução básica viável inicial, a qual é, um dos pontos extremos. Este método verifica se a presente solução é ótima. Se esta não for é porque um dos demais pontos extremos adjacentes (vértice) fornecem valor menor para a função objetivo que a atual, quando o problema considerado é de minimização. Ele então faz uma mudança de vértice na direção que mais diminua a função objetivo e verifica se este novo vértice é ótimo.

O processo termina quando estando num ponto extremo, todos os outros pontos extremos adjacentes fornecem valores maiores para a função objetivo.

Portanto, a troca de vértice, faz uma variável não básica crescer (assumir valor positivo) ao mesmo tempo em que zera uma variável básica (para possibilitar a troca) conservando a factibilidade do Problema de Programação Linear.

Para isso, escolhemos uma variável, cujo custo relativo é mais negativo (não é regra geral), para entrar na base, e as trocas de vértices são feitas até que não exista mais nenhum custo relativo negativo.

A variável que sairá da base é aquela que ao se anular garante que as demais continuem maiores ou iguais a zero, quando aumentamos o valor da variável que entra na base (respeitando a factibilidade).

O Método Simplex compreenderá, portanto, os seguintes passos:

- i) Achar uma solução factível básica inicial;
- ii) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, **pare**. Caso contrário, siga para o passo iii).
- iii) Determinar a variável não básica que deve entrar na base;
- iv) Determinar a variável básica que deve sair da base;
- v) Atualizar o sistema à fim de determinar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii.

### Exemplo 3.4.1:

Seja o problema:

$$\text{Max. } z = x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Passando este problema para a forma padrão, temos a solução inicial:

$$\text{Min. } -z = -x_1 - x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 7$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 1: Quadro 1

$v_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	2	1	1	0	0	8
$x_4$	1	2	0	1	0	7
$x_5$	0	1	0	0	1	3
$-z$	-1	-1	0	0	0	0

$$x^T = (0, 0, 8, 7, 3)$$

Passo 2: Escolhemos  $x_1$  para entrar na base:

$$x_1 = \varepsilon > 0$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 7, \quad x_5 = 3$$

Tomando  $x_1 = \varepsilon$  temos:

1ª equação:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow 2x_1 + x_3 = 8 \rightarrow x_3 = 8 - 2x_1 \geq 0$$

2ª equação:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_4 = 7 \rightarrow x_4 = 7 - x_1 \geq 0$$

3ª equação:

$$x_2 + x_5 = 3 \rightarrow x_5 = 3 \geq 0$$

Passo 3: Analisamos qual das três variáveis básicas deve sair da base:

$$x_3 = 8 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow \text{para } x_3 = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x_4 = 7 - x_1 \geq 0 \rightarrow \text{para } x_4 = 0 \Leftrightarrow 7 - x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 7$$

$$x_5 = 3 - 0x_1 \geq 0 \quad (\text{para qualquer } \varepsilon > 0, x_1 \text{ não afeta a factibilidade}).$$

Para que  $x_3$  e  $x_4$  não percam sua factibilidade o menor valor que  $x_1$  pode assumir é 4 e daí:



$x_1 = \varepsilon = 4$  temos:

$$x_3 = 8 - 2.4 = 0 \quad x_4 = 7 - 4 = 3 \quad x_5 = 3$$

ou seja,  $x_1 = \varepsilon = \min \left\{ \frac{8}{2}, \frac{7}{1}, \frac{3}{0} \right\} = 4$ .

A variável a sair da base é  $x_3$  e a variável a entrar na base é  $x_1$  com o valor assumido por  $\varepsilon > 0$ , ou seja,  $x_1 = 4$ .

Nova base:  $v_B = \{x_1, x_4, x_5\}$  e  $v_N = \{x_2, x_3\}$ .

Como o valor mínimo de  $\varepsilon$  ocorreu na 3ª equação então  $x_3$  sai da base.. Então, o elemento  $a_{11} = 2$  é o pivô da operação. Aplicando o pivoteamento gaussiano nas equações, obtemos o seguinte quadro:

Passo 4: Quadro 2:

$v_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	1/2	1/2	0	0	4
$x_4$	0	3/2	-1/2	1	0	3
$x_5$	0	1	0	0	1	3
$-z$	0	-1/2	1/2	0	0	-4

Passo 5: A solução é ótima? ( $z = 4$ )

Não, pois ainda existem custos relativos negativos, ou seja, a função objetivo ainda pode ser diminuída ou minimizada.

Passo 6: Variável que entra na base:

Custo mais negativo :  $x_2$ .

$$\text{Daí } x_2 = \varepsilon = \min \left\{ \frac{4}{1/2}, \frac{3}{3/2}, \frac{3}{1} \right\} = 2.$$

Passo 7: Variável que sai:

$$x_3 = 8 - x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{ para } x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 8$$

$$x_4 = 3 - 3/2 x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{ para } x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

$$x_5 = 3 - x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{ para } x_5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

A variável a sair da base é  $x_4$  e  $x_2$  entra na base.

Nova base:  $v_B = \{x_1, x_2, x_5\}$  e  $v_N = \{x_3, x_4\}$ .

Desde que o valor mínimo de  $\varepsilon$  ocorreu na 2ª equação, então  $x_4$  sai da base e o elemento pivô da operação é  $a_{22}=3/2$ .

Aplicando o pivoteamento gaussiano, obtemos o próximo quadro:

Passo 8 : Quadro 3: Atualização do sistema em função da nova base:

$v_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	$2/3$	$-1/3$	0	3
$x_2$	0	1	$-1/3$	$2/3$	0	2
$x_5$	0	0	$1/3$	$-2/3$	1	1
$-z$	0	0	$1/3$	$1/3$	0	-5

Passo 9: A solução é ótima?:

Sim, pois não existe nenhum outro custo relativo negativo, ou seja, não podemos diminuir mais a função objetivo.

Portanto, a solução ótima é:  $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 0, 0, 1)$ .

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow z^* = 5.$$

### 3.5- O Método Simplex Revisado.

#### 3.5.1- Considerações teóricas sobre o método.

Sem perda de generalidade, supondo-se que após algumas iterações do método é obtido o seguinte sistema a ser resolvido:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \dots y_{1q} x_q &= y_{10} \\
 x_2 + \dots y_{2q} x_q &= y_{20} \\
 &\dots \\
 x_p + \dots y_{pq} x_q &= y_{p0} \\
 &\dots \\
 x_m + \dots y_{mq} x_q &= y_{m0}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

com  $y_{i0} \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$ .

Então, a solução básica factível atual é:

$x_B = (x_1, \dots, x_m)$  e  $x_N = (x_{m+1}, \dots, x_q, \dots, x_n)$ , com  $x_i = y_{i0} \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$ .

Para se obter a nova solução, suponha que fazemos a variável não básica  $x_q$  entrar na base.

Se o elemento pivô da operação é  $y_{pq}$  então  $x_p$  sai da base.

A nova solução deve estar na forma canônica e assim deve-se efetuar pivoteamento gaussiano em  $y_{pq}$ .

Os novos coeficientes do sistema serão dados por:

linha p:  $y_{pj}' = y_{pj} / y_{pq}$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

para  $i \neq p$ :  $y_{ij}' = y_{ij} - y_{iq} \cdot (y_{pj} / y_{pq})$ .

para  $j = 1, \dots, n$ .

### 3.5.2- Definição de $\epsilon$ .

Assumindo-se que  $x_q = \epsilon \geq 0$ , então, de acordo com o sistema de restrições (3.3).;

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{p0} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1q} \\ \vdots \\ y_{pq} \\ \vdots \\ y_{mq} \end{pmatrix} \cdot \epsilon \geq 0,$$

que pode ser escrito por  $x_B = y^0 - y^q \cdot \epsilon \geq 0$ .

$$\text{Logo, } x_q = \epsilon = \frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \text{ tal que } y_{iq} > 0 \right\}.$$

Assim,  $x_q = \epsilon \geq 0$  entra na base,  $x_p = 0$  sai da base e um novo vértice é alcançado.

Se  $y_{iq} < 0, \forall i$ , então a solução é ilimitada pois  $\forall \epsilon \geq 0$  tem-se que:

$$y_{i0} - y_{iq} \cdot \epsilon \geq 0.$$

### 3.5.3- Decréscimo da função objetivo.

A função objetivo pode ser escrita por  $z = c_B^T x_B + c_N^T x_n$ .

Após  $x_q$  entrar na base tem-se:

$$\begin{aligned} z &= c_B^T x_B + c_N^T x_n = c_B^T (y^0 - y^q \cdot \varepsilon) + c_N^T x_n = \\ &= c_B^T y^0 - c_B^T y^q \cdot \varepsilon + c_q \varepsilon = z_0 + (c_q - z_q) \varepsilon. \end{aligned}$$

Denominando-se  $r_q = c_q - z_q$ , se  $c_q - z_q < 0$  então, desde que  $\varepsilon > 0$ ,

$$z_0 + (c_q - z_q) \varepsilon = z_0 + r_q \varepsilon < z_0.$$

Logo, para  $r_q < 0$  tem-se garantido o decréscimo para a função objetivo.

$r_q$  é denominado custo relativo.

Com as considerações teóricas feitas sobre o sistema de restrições e sobre a função objetivo pode-se enunciar procedimentos para se resolver o problema de programação linear com restrições de desigualdade tipo “ $\leq$ ”, utilizando o método simplex na forma revisada que será visto a seguir.

### 3.6- Os Passos do Método Simplex Revisado

A forma revisada do método simplex é esta:

Dada a inversa  $B^{-1}$  de uma base corrente, considerando  $A = [a^1, \dots, a^q, \dots, a^n]$  e a solução corrente  $x_B = B^{-1}b = y^k$ :

#### Passo 1:

Calcule o coeficiente de custo relativo  $r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ .

Isto pode ser feito primeiro calculando-se  $w^T = c_B^T B^{-1}$  e então o vetor custo relativo será,  $r_N^T = c_N^T - w^T N$ .

Se  $r_N \geq 0$ , pare pois a solução corrente é ótima. Caso contrário:

#### Passo 2:

Determine qual vetor  $a^q$  deve entrar na base selecionando o coeficiente de custo relativo mais negativo (não é regra geral). Calcule:

$y^q = B^{-1} a^q$  que expressa o novo vetor coluna  $a^q$  na base nova.

#### Passo 3:

Se não existe nenhum  $y_{iq} > 0$  pare, o problema é ilimitado. Caso contrário, calcule os quocientes  $\frac{y_{i0}}{y_{iq}}$  para  $y_{iq} > 0$ , para determinar qual variável

irá sair da base. Se  $\min \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \text{ tal que } y_{iq} > 0 \right\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$ , então  $x_p = 0$  sai da

base e  $x_q = \frac{y_{p0}}{y_{pq}} > 0$  entra na base.

#### Passo 4:

Atualize  $B^{-1}$  efetuando pivoteamento gaussiano em torno de  $y_{pq}$ . Calcule a nova solução corrente  $x_B = B^{-1}b$  e volte ao passo 1

#### Exemplo 3.6.1:

Considerando o exemplo 4.7.1 resolvido por quadros e seguindo os procedimentos vistos tem-se:

$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$b$	
2	1	1	0	0	8	
1	2	0	1	0	7	sistema de restrições na forma padrão.
0	1	0	0	1	3	

$$c^T = [-1, -1, 0, 0, 0] \quad \text{coeficientes de custo relativo.}$$

Solução inicial:

Var. bás.	$B^{-1}$	$x_B$
3	1 0 0	8
4	0 1 0	7
5	0 0 1	3

Calcule  $w^T = c_B^T B^{-1} = [0, 0, 0]$  e  $r_N^T = c_N^T - w^T N = [-1, -1]$ .

Fazendo-se  $a^1$  entrar na base temos o quadro a ser atualizado:  $y^1 = B^{-1} a^1$ .

Var. bás.	$B^{-1}$	$x_B$	$y^1$
3	1 0 0	8	2 $\leftarrow$ pivô ( $a_{11} = 2$ )
4	0 1 0	7	1
5	0 0 1	3	0

Após efetuar os quocientes:  $\{ 8/2, 7/1, 3/0 \}$ , seleciona-se o elemento pivô, define-se qual variável irá sair da base e atualiza-se a  $\mathbf{B}^{-1}$  :

Var. bás.	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$
1	1/2 0 0	4
4	-1/2 1 0	3
5	0 0 1	3

Então,  $\mathbf{w}^T = [-1/2, 0, 0]$  e  $\mathbf{r}_N^T = [-1/2, -1/2] = [r_2, r_3]$ .

Seleciona-se então  $\mathbf{a}^2$  para entrar na base:  $\mathbf{y}^2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}^2$

Var. bás.	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{y}^2$
1	-1/2 0 0	4	1/2
4	-1/2 1 0	3	3/2 $\leftarrow$ pivô ( $a_{22} = 3/2$ )
5	0 0 1	3	1

Efetuada-se os quocientes:  $\{ 4/(3/2), 3/(3/2), 3/1 \}$ , selecionamos o elemento pivô e a variável a sair da base. Atualizando a  $\mathbf{B}^{-1}$  tem-se:

Var. bás.	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{x}_B$
1	2/3 -1/3 0	3
2	-1/3 2/3 0	2
5	1/3 -2/3 1	1

Então,  $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$  e  $\mathbf{r}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{w}^T \mathbf{N} = [1/3, 1/3] = [r_3, r_4]$

Como não tem-se mais custos relativos negativos, esta é a solução ótima do problema.

### 3.7- O algoritmo Simplex

#### 3.7.1- Direções de busca

O teorema a seguir mostra que o conjunto solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , é completamente determinado a partir de uma solução particular e do sub-espaço  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ .

**Teorema 3.7.1.1:**

Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  uma solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Então,  $\mathbf{x} \in \Re^n$  satisfaz o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  se e somente se  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$ , tal que  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ .

Prova:

Sendo  $\bar{\mathbf{x}}$  uma solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  então  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ .

A nova solução  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$  satisfaz o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{d} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ .

Portanto, o conjunto das soluções de um sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  é a translação do sub-espço  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$  por qualquer solução perturbada  $\bar{\mathbf{x}}$  do sistema :

$$\{ \bar{\mathbf{x}} \} + \mathbf{N}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{x} \in \Re^n \text{ tal que } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{A}) \}.$$

Foi visto que, considerando-se a partição básica da matriz  $\mathbf{A}$  e do vetor  $\mathbf{x}$ , era válido que:  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$ , com a solução básica factível escrita por  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ .

Se considerar-se  $\bar{\mathbf{x}}$  uma solução para o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , então pode-se escrever  $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\bar{\mathbf{x}}_N$  tal que a solução básica factível é escrita por  $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ .

Note que se perturbarmos  $\bar{\mathbf{x}}_N$  por um vetor  $\mathbf{d}_N$  :

$$\mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{x}}_N + \mathbf{d}_N;$$

podemos obter nova solução para o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , bastando fazer a substituição:

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\bar{\mathbf{x}}_N) - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{d}_N = \bar{\mathbf{x}}_B + \mathbf{d}_B;$$

onde  $\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{d}_N$ .

Assim, a nova solução é:  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$  com;

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_N \end{pmatrix},$$

obtidos acima.

Pela definição de  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \mathbf{d}_N \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{d}_B + \mathbf{N}\mathbf{d}_N = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{d} \in \mathbf{N}(\mathbf{A}).$$

Observe com isto que foi determinado um procedimento para determinar  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ , bastando para isto se atribuir um valor  $\mathbf{d}_N = \bar{\mathbf{d}}_N$ . Isto pode ser feito escolhendo-se:

$\bar{\mathbf{d}}_N = \mathbf{e}^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-m$ ; onde  $\mathbf{e}^j$  é vetor canônico do  $\Re^{n-m}$ , que determinam  $n-m$  vetores linearmente independentes em  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ .

Tem-se assim, os vetores de  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ :

$$\mathbf{d}^j = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}^j \\ \mathbf{e}^j \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n-m;$$

onde  $\mathbf{N}^j$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{N}$  que corresponde ao vetor coluna  $\mathbf{a}^j$  da matriz  $\mathbf{A}$ . Tais vetores, além de serem linearmente independentes, geram o

sub-espço  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ , ou seja,  $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$  então  $\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{n-m} \mathbf{d}^j$ .

Construiu-se assim, uma base de  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$  e segue o seguinte resultado:

### **Teorema 3.7.1.2:**

Seja  $\mathbf{A} \in \Re^{m \times n}$ ,  $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$ . Então,  $\dim(\mathbf{N}(\mathbf{A})) = n-m$ .

Uma nova solução obtida por uma perturbação na direção  $\mathbf{d}^j$ :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{d}^j, \varepsilon > 0,$$

corresponde à estratégia de alterar apenas a  $j$ -ésima componente do vetor das variáveis não básicas:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{N_j} = \bar{\mathbf{x}}_{N_j} + \varepsilon = \varepsilon, j = q \\ \mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}, j \neq q \end{cases};$$

Tal estratégia é denominada “estratégia simplex”, que corresponde a adotar a direção  $\mathbf{d}^j$  definida acima. Assim as direções  $\mathbf{d}^j$  são denominadas de “direções simplex”.

### **3.7.2- Determinação do passo**

Considere a seguinte definição dos conjuntos baseados na partição básica e não básica da matriz  $\mathbf{A}$ :



$I_B = \{ j \text{ tal que } j \text{ é um índice coluna relacionado à base } \mathbf{B} \};$

$I_N = \{ j \text{ tal que } j \text{ é um índice coluna relacionado à } \mathbf{N} \}.$

Em uma iteração corrente, se tiver-se a solução básica factível  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix}$ , então, para a obtenção de uma nova solução a factibilidade será garantida se:

$$\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{d} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}}_B + \varepsilon \mathbf{d}_B \geq 0 \Leftrightarrow (\bar{\mathbf{x}}_B)_i + \varepsilon (\mathbf{d}_B)_i \geq 0, i \in I_B.$$

Isto ocorre se e somente se:

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{-(\bar{\mathbf{x}}_B)_i}{(\mathbf{d}_B)_i} \text{ tal que } (\mathbf{d}_B)_i < 0, i \in I_B \right\}.$$

Se o mínimo ocorre para  $\varepsilon = -(\bar{\mathbf{x}}_B)_p / (\mathbf{d}_B)_p$ ,  $p \in I_B$  então

$(\bar{\mathbf{x}}_B)_p + \varepsilon (\mathbf{d}_B)_p = 0$ , então  $(\bar{\mathbf{x}}_B)_p$  se torna não básica e é substituída por

$$(\bar{\mathbf{x}}_N)_q = \varepsilon, q \in I_N.$$

Se  $(\mathbf{d}_B)_i > 0, \forall i \in I_B$ , então o conjunto de soluções factíveis é ilimitado.

Além disso, se duas ou mais componentes de  $\bar{\mathbf{x}}_B$  se anularem para um mesmo valor de  $\varepsilon$ , temos o caso de degeneração da base.

### 3.7.3- Critério de mudança de base.

Considere o vetor custo relativo  $\mathbf{r}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$ , já visto.

Este pode ser escrito por:  $r_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{a}_N)_j$  para  $j \in I_N$ .

Se  $\exists j \in I_N$  tal que  $r_j \leq 0$ , então é interessante fazer  $x_j$  assumir valor positivo e entrar na base, pois  $\mathbf{d}^j$  é uma direção de descida, ou seja,  $\mathbf{c}^T (\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{d}^j) \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$ . Isto é utilizado como critério de mudança de base.

Se  $r_j \geq 0, \forall j \in I_N$  então a otimalidade é atingida pois não conseguimos mais decréscimos para a função objetivo e isto é utilizado como critério de parada.

Após as considerações anteriores pode-se enunciar um algoritmo que segue os seguintes passos.

### 3.7.4- Algoritmo

Dada a solução básica inicial:  $\mathbf{x}_B^0 = \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{y}^0$  com  $k=0$ , faça:

#### Passo 1-

Calcule o coeficiente de custo relativo  $(\mathbf{r}_N^k)^T = (\mathbf{c}_N^k)^T - (\mathbf{c}_B^k)^T \mathbf{B}_k \mathbf{N}_k$ .

Isto pode ser feito primeiro calculando-se  $\mathbf{w}_B^k = (\mathbf{c}_B^k)^T \mathbf{B}_k$  e então o vetor custo relativo será,  $(\mathbf{r}_N^k)^T = (\mathbf{c}_N^k)^T - (\mathbf{w}_B^k)^T \mathbf{N}_k$ .

Se  $(\mathbf{r}_N^k)^T \geq 0$ , pare pois a solução corrente é ótima. Caso contrário:

#### Passo 2-

Determine  $(\mathbf{r}_N^K)_q = \min \{ (\mathbf{r}_N^K)_j \text{ tal que } (\mathbf{r}_N^K)_j < 0, \text{ para } j \in \mathbf{I}_N \}$ , para determinar qual vetor de  $\mathbf{N}_k$  irá entrar na base.

#### Passo 3-

Calcule  $\mathbf{d}_B^k = -\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{a}_N)_q = (\mathbf{y}^k)_q$  ;

#### Passo 4-

Se não existe  $j \in \mathbf{I}_N$  tal que  $\mathbf{r}_j^k \leq 0$ , então pare, o problema não tem solução, caso contrário determine:

$-(\bar{\mathbf{x}}_B^k)_p / (\mathbf{d}_B^k)_p = \varepsilon = \min \{ -(\bar{\mathbf{x}}_B^k)_i / (\mathbf{d}_B^k)_i \text{ tal que } (\mathbf{d}_B^k)_i < 0, i \in \mathbf{I}_B \}$ , para determinar o vetor de  $\mathbf{B}_k$  a sair da base.

#### Passo 5-

Atualize:

$$(\mathbf{B}^{k+1})_p \leftarrow (\mathbf{N}^k)_q ;$$

$$(\mathbf{N}^{k+1})_q \leftarrow (\mathbf{B}^k)_p ;$$

$$\mathbf{x}_B^k = \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{y}^k ;$$

$$k \leftarrow k+1.$$

### 3.8- Casos especiais do Método Simplex

#### 3.8.1- Empate na entrada

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A única implicação envolvida é que pode-se escolher um caminho mais longo ou mais curto para se chegar à solução ótima.

#### 3.8.2- Empate na saída (degeneração)

Poderá ocorrer que durante a escolha de uma variável para sair da base, temos, empate, isto é, duas ou mais variáveis se anulam com o crescimento da variável que está entrando na base. Neste caso ocorre o que chamamos de degeneração (temos uma solução básica factível degenerada). A escolha também é arbitrária (uma das variáveis básicas assume valor zero).

Temos, então, que a mesma solução é obtida através de bases diferentes. Isso ocorre devido a hiperdeterminação de pontos extremos.

##### Exemplo 3.8.2.1

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

#### 3.8.3- Problemas com múltiplas soluções

Eventualmente, um modelo de Programação Linear pode apresentar mais de uma solução ótima. Quando isso ocorre, o Método Simplex é capaz de acusá-lo, pois o custo de uma variável não-básica é nulo. Dizemos, então, que o sistema tem múltiplas soluções ótimas.

**Exemplo 3.8.3.1:**

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

**3.8.4- Solução ilimitada**

Quando aplicamos o Método Simplex e nenhuma restrição impede o crescimento da variável que entra na base, ou seja, não conseguimos zerar uma variável básica, dizemos que o problema tem solução ilimitada.

Neste caso, o problema tem solução básica factível mas não tem solução ótima.

**Exemplo 3.8.4.1:**

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$4x_1 + x_2 \geq 20$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

**3.9- O Método Simplex duas fases**

Nos problemas onde as restrições são do tipo “ $\leq$ ” (menor ou igual) é sempre possível obtermos uma submatriz (identidade) com o auxílio das variáveis de folga, e assim a solução inicial é óbvia.

Porém, quando não temos uma solução inicial óbvia, ou seja, não conseguimos uma submatriz base (identidade) necessitamos de um procedimento para desenvolvê-la. Isto ocorre quando o problema de Programação Linear tiver restrições de “ $=$ ” (igualdade) e ou restrições do tipo “ $\geq$ ” (maior ou igual).

### Exemplo 3.9.1:

$$\max. z = 6x_1 - x_2$$

sujeito a:

$$4x_1 + x_2 \leq 21$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 13$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Passando o problema para a forma padrão, temos:

$$\min. -z = -6x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 = 13$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

No quadro:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	4	1	1	0	21
	2	3	0	-1	13
	-1	1	0	0	1
	-6	1	0	0	

Portanto, não temos solução inicial óbvia. Como obter a solução inicial?

Para resolvê-lo usamos um procedimento chamado Fase 1 do Método Simplex, que consiste em explorar um problema auxiliar, equivalente ao PPL inicial, com região factível ampliada.

### 3.9.1 Introdução de variáveis artificiais

Introduzimos no problema de programação linear (já na forma padrão) variáveis artificiais nas restrições do tipo “=” e “≥”.

No exemplo anterior:

$$\min. -z = -6x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a = 13$$

$$-x_1 + x_2 + x_2^a = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a \geq 0.$$

Esse problema de programação linear é denominado relaxado ou artificial, ou seja, a região factível é ampliada.

No quadro:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
<b>x</b>	4	1	1	0	0	0	21
<b>x</b>	2	3	0	-1	1	0	13
<b>x</b>	-1	1	0	0	0	1	1
	-6	1	0	0	0	0	0

Obtem-se uma solução inicial óbvia fazendo-se  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ , com  $x_B = (x_3, x_1^a, x_2^a) = (21, 13, 1)$  e  $x_N = (x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$ .

Diz-se que as restrições:

a)  $2x_1 + 3x_2 \geq 13$

b)  $x_1 - x_2 = -1$

foram relaxadas pois:

a)  $2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a = 13$

Se  $x_4 = 0$  e  $x_1^a \geq 0 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 \leq 13$

Se  $x_4 > 0$  e  $x_1^a = 0 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 \geq 13$

b)  $-x_1 + x_2 + x_2^a = 1$

Se  $x_2^a = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = -1$ . Se  $x_2^a > 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \leq -1$ .

Consequentemente relaxou-se o conjunto das restrições (ampliou-se esse conjunto), como é visto na figura 3.1.

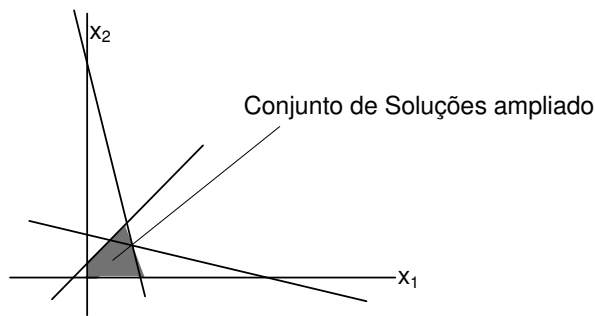


Figura 3.1 – Conjunto de soluções ampliado

O Método Simplex duas fases resolve o problema de programação linear relaxado (ou auxiliar) até zerar as variáveis artificiais (Fase 1), obtendo assim uma solução factível para o problema de Programação Linear inicial, podendo ser a solução ótima caso não exista custo relativo negativo (Fase 2).

#### Observações:

1) O Problema de Programação Linear inicial tem solução factível se as variáveis artificiais se anularem.

Problema de Programação Linear inicial na forma padrão:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeito a } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.4) \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de Programação Linear relaxado:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{s.a } \mathbf{Ax} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b} \quad (3.5) \\ &\mathbf{x}, \mathbf{x}^a \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de Programação Linear inicial tem solução ótima  $\Leftrightarrow \mathbf{x}^a = 0$ .

De (3.4) tem-se  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq 0$ .

De (3.5) tem-se  $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{x}^a \geq 0$ .

Então:  $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^a = 0$ .

2) Seja o problema original de maximização ou de minimização, o problema auxiliar sempre será de minimização;

3) O problema auxiliar é sempre viável (sempre admite solução);

4) Se atingirmos a solução ótima com as variáveis artificiais diferentes de zero, portanto com o valor da função objetivo artificial diferente de zero, o problema original é um problema inviável.

A função objetivo artificial é formada pela soma das variáveis artificiais, ou seja:  $z^a(\mathbf{x}) = x^a_1 + x^a_2 + \dots + x^a_p$  com  $p \leq m$ .

Considerando o exemplo anterior, termos:

$$z^a(\mathbf{x}) = x^a_1 + x^a_2$$

onde:  $x^a_1 = 13 - 2x_1 - 3x_2 + x_4$

$$x^a_2 = 1 + x_1 - x_2.$$

$$\text{Logo } z^a(\mathbf{x}) = 14 - x_1 - 4x_2 + x_4 \Rightarrow 14 = -x_1 - 4x_2 + x_4.$$

Através de quadros, temos:

Quadro 1:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x^a_1$	$x^a_2$	
$x_3$	4	1	1	0	0	0	21
$x^a_1$	2	3	0	-1	1	0	13
$x^a_2$	-1	1	0	0	0	1	1
$z^a$	-1	-4	0	1	0	0	-14
$z$	-6	1	0	0	0	0	0

Aplicando o Método Simplex para obter  $x^a_1 = x^a_2 = 0$ .

### Fase 1:

Como  $r^a_2 = -4$ ,  $x_2$  entra na base.

$$x_2 = \varepsilon = \min \left\{ \frac{21}{1}, \frac{13}{3}, \frac{1}{1} \right\} = 1 \Rightarrow x^a_2 \text{ sai da base.}$$

Quadro 2:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x^a_1$	$x^a_2$	
$x_3$	5	0	1	0	0	-1	20
$x^a_1$	5	0	0	-1	1	-3	10
$x_2$	-1	1	0	0	0	1	1
$z^a$	-5	0	0	1	0	4	-10
$z$	-5	0	0	0	0	-1	-1



Como  $r_1^a = -5$ ,  $x_1$  entra na base.

$$x_1 = \varepsilon = \min \left\{ \frac{20}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{-1} \right\} = 2, x_1^a \text{ sai da base.}$$

Quadro 3:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	0	0	1	1	-1	2	10
$x_1$	1	0	0	-1/5	1/5	-3/5	2
$x_2$	0	1	0	-1/5	1/5	2/5	3
$z^a$	0	0	0	0	1	1	0
$z$	0	0	0	-1	1	1	9

Como as variáveis artificiais são zero, então  $z^a = 0$  e tem-se uma solução factível para o problema inicial.

## Fase 2:

Elimina-se as variáveis artificiais do quadro e a função objetivo artificial, ficando-se somente só com o problema inicial.

Quadro 4:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	0	0	1	1	10
$x_1$	1	0	0	-1/5	2
$x_2$	0	1	0	-1/5	3
	0	0	0	-1	9

Como  $r_4 = -1$ ,  $x_3$  sai da base;  $x_4 = \varepsilon = \min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{2}{-1/5}, \frac{3}{-1/5} \right\} = 10 \Rightarrow x_4$  entra na base.

Quadro 5:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_4$	0	0	1	1	10
$x_1$	1	0	1/5	0	4
$x_2$	0	1	1/5	0	5
	0	0	1	0	10

Quadro ótimo:

$$x_B = (x_4, x_1, x_2) = (10, 4, 5), \quad x_N = (x_3) = (0)$$

$$x^* = (4, 5, 0, 10) \text{ e } z^* = 19.$$

### 3.9.2 Algoritmo para o problema com variáveis artificiais

Um algoritmo análogo àquele visto na seção 3.7.4 é definido para o caso de introdução de variáveis artificiais no PPL original. Agora, consideram-se duas fases, as quais utilizam a execução daquele algoritmo:

**Fase 1:** Considera-se o PPL original relaxado pela introdução das variáveis artificiais e aplica-se o algoritmo, já visto na seção citada, na tentativa de se zerar estas variáveis, mas, considerando-se para a atualização das variáveis, a função objetivo artificial. Se conseguir-se atingir a solução ótima do PPL relaxado com as variáveis artificiais diferentes de zero, então, **pare**, pois o PPL original é inviável. Caso contrário vá para a fase 2;

**Fase 2:** Nesta fase, agora com uma solução inicial para o PPL original, é verificado, inicialmente, se o custo relativo desta solução é maior ou igual a zero. Se for, **pare**, a solução atual é ótima. Caso contrário, aplica-se o algoritmo definido na seção 3.7.4 até se obter a solução ótima do PPL original.

### 3.10- Exercícios.

3.10.1) Resolva geometricamente e pelo método Simplex os seguintes PPL's:

a) maximizar  $5x_1 + 6x_2$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} ;$$

b) maximizar  $4x_1 + 2x_2$

sujeito a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 0x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} ;$$

c) maximizar  $x_2$   
 sujeito a:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ 2x_1 + 0x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 0x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

d) maximizar  $x_1 + x_2$   
 sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} ;$$

e) PPL com múltiplas soluções:

maximizar  $x_1 + x_2$

sujeito a:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} ;$$

3.10.2) Dado o PPL:

minimizar  $\mathbf{z} = -2x_1 + x_2 - x_3$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o pelo método simplex;

b) o que acontece se trocarmos  $c_2 = 1$  por  $c_2' = -3$ . O quadro ótimo se altera?

3.10.3) Sejam  $\bar{x}, \bar{s}$  soluções factíveis para os seguintes sistemas de restrições:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \quad (\mathbf{S}_1); \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \mathbf{s} \geq 0 \quad (\mathbf{S}_2);$$

Considerando-se as novas soluções  $\bar{x} + \varepsilon \mathbf{d}_x$  e  $\bar{s} + \varepsilon \mathbf{d}_s$ ,  $\varepsilon \geq 0$ :

- mostre que  $\mathbf{d}_x$  é uma direção factível para  $(\mathbf{S}_1)$  se  $\mathbf{d}_x \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ ;
- se  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é uma matriz não singular, então:  $\mathbf{d}_s \in \text{Im}(\mathbf{A})$  e  $\mathbf{d}_x = -[\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d}_s$ ;
- considerando-se o problema de minimizar  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , dê condições sobre  $\mathbf{d}_x$  para que esta seja uma direção de descida;
- se a restrição  $(\mathbf{S}_1)$  é alterada para  $\{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{h}, \mathbf{h} \in \Re^n\}$ , como fica a nova determinação de  $\varepsilon \geq 0$  para o método Simplex?

3.10.4) Baseado na escolha de  $\varepsilon \geq 0$ , do item d) do exercício 3.10.2) resolva o seguinte PPL com variáveis canalizadas:

$$\text{maximizar } 5x_1 + 6x_2$$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases};$$

3.10.5) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\text{minimizar } z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases};$$

a) resolva-o pelo método simplex duas fases;

b) se o vetor  $\mathbf{b}$  for trocado para  $\mathbf{b}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 5+2\alpha \\ 6-2\alpha \\ 0+\alpha \end{pmatrix}$ , com  $\alpha \geq 0$ , analise o problema em função de  $\alpha$  para que não se altere a base ótima;

c) ídem, se o vetor  $\mathbf{c}$  for trocado para  $\mathbf{c}^{(\alpha)} = (3 - \alpha, 4 + \alpha, 5 - \alpha)$ .

3.10.6) Suponha que para um PPL tem-se o seguinte quadro ótimo:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_B$
$x_1$	0	1	5/19	-3/19	45/19
$x_2$	1	0	-2/19	5/19	20/19
$z$	0	0	5/19	16/19	235/19

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}^T = (0; 0; 5/19; 16/19) \text{ e } z^* = 235/19;$$

a) Escreva o PPL original;

b) Se mudar-se o valor de  $b_2$  para  $b_2(\alpha) = 10 - \alpha$ , estude condições sobre  $\alpha$  para que o PPL não mude a base ótima.

3.10.7) Um jovem pretende prestar um concurso público cujo exame envolve duas disciplinas, D1 e D2. Ele sabe que, para cada hora de estudo, pode obter 2 pontos na nota da disciplina D1 e 3 pontos na D2 e que o rendimento é proporcional ao seu esforço. Ele dispõe de no máximo 50 horas para os estudos até o dia do exame. Para ser aprovado deverá obter na disciplina D1 um mínimo de 20 pontos, na D2, no mínimo 30, e o total de pontos deverá ser de pelo menos 70. Como, além da aprovação, ele gostaria de alcançar a melhor classificação possível, qual a melhor forma de distribuir as horas disponíveis para seu estudo?

3.10.8) Uma pessoa em dieta necessita ingerir pelo menos 20 unidades de vitamina A, 10 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C. Ela deve conseguir essas vitaminas a partir de dois tipos diferentes de alimentos: A1 e A2. A quantidade de vitaminas que esses produtos contém por unidades e o preço unitário de cada um estão expressos na seguinte tabela:

	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C	Preço Unitário
Alimento A1	4	1	1	30 u.m.
Alimento A2	1	2	---	20 u.m.

Qual a programação de compra dos alimentos A1 e A2 que essa pessoa deve fazer para cumprir sua dieta, ao menor custo possível?

3.10.9) Uma companhia fabrica um produto a partir de dos ingredientes, A e B. Cada quilo de A contém 50 unidades do produto  $P_1$ , 4 unidades do produto  $P_2$ , 2 unidades do produto  $P_3$  e custa 100 u.m.. Cada quilo de B contém 3 unidades de produto  $P_1$ , 5 unidades de produto  $P_2$ , 10 unidades de produto  $P_3$  e custa 150 u.m.. A mistura deve conter pelo menos 20 unidades de  $P_1$ , 18 unidades de  $P_2$  e 30 unidades de  $P_3$ .

Resolva este problema para que o custo do produto seja o menor possível.

3.10.10) Um depósito de 200000  $m^2$  deve ser alocado para armazenar três tipos de produtos,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Sabe-se que  $P_2$  não deve ocupar mais espaço do que  $P_1$ , que o espaço ocupado por  $P_1$  não deve ser maior que 3000  $m^2$  a mais que a soma das áreas de  $P_2$  e  $P_3$ , e que os espaços ocupados por  $P_2$  e  $P_3$  devem Ter pelo menos 5000  $m^2$ . Sabendo que o lucro de  $P_1$  é 10000 u.m., de  $P_2$  eé 8000 u.m. e de  $P_3$  é 5000 u.m. por  $m^2$ , resolva este problema de modo que o lucro seja o maior possível.

3.10.11) No **Método Simplex de 2 Fases**, o problema auxiliar da fase 1 pode ser inviável? Por quê? Pode ser ilimitado? Por quê?

Na próxima seção serão vistos conceitos do tópico Dualidade em Programação Linear. A análise destes servirá para definir-se um outro método para resolução de Problemas de Programação Linear denominado de “Dual-Simplex”.