Estatística e Probabilidade

Bacharelado em Sistemas de Informação

Aula 6: Esperanças e Decisões

Prof. Dr. Samuel Sanches

ESPERANÇA MATEMÁTICA

- Ao tomar decisões quando temos incertezas, não podemos nos basear somente na probabilidade, é necessário conhecer as consequências potenciais (lucros e perdas).

- Trabalho com lucro de 120.000 com probabilidade de 0,20 ou prejuízo de 27.000 com probabilidade 0,80, ir ou não?

ESPERANÇA MATEMÁTICA

★ Em uma tabela de mortalidade nos informa que uma pessoa de 50 anos pode esperar viver mais 31 anos. Então ela irá completar 81 anos e morrer no dia seguinte?

★ Esperar não é no sentido usual, mas como uma média ou **esperança matemática**.

★ Originalmente dos jogos de azar, na forma mais simples é o **produto** da **quantia** que se **pode ganhar** pela **probabilidade** de **ganhar**.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

- **Exemplo**: Qual é a esperança matemática de um jogador que pode ganhar 50 unidades monetárias se, e somente se, uma moeda equilibrada apresentar coroa?

  Moeda equilibrada e jogada aleatória, probabilidade de coroa é 1/2, então esperança é 50*1/2 = 25 unidades monetárias.

- **Exemplo**: Qual é a esperança matemática de alguém que compra um dentre 2.000 bilhetes de uma rifa de viagem, estimada em 1.960 unidades monetárias?

  Probabilidade de ganhar: 1/2000 = 0,0005, esperança é 1.960*0,0005 = 0,98 (=1960/2000). Financeiramente é insensato o bilhete da rifa custar mais de 98 centavos (a não ser por alguma causa nobre ou por prazer pessoas com a aposta).

ESPERANÇA MATEMÁTICA

★ **Exemplo**: Qual é a esperança matemática por bilhete se a rifa anterior também sorteia um jantar para dois no valor de 200, como 2º lugar e duas entradas de cinema no valor de 16, como 3º lugar?

Aqui 1º bilhete pagará 1960, 2º pagará 200 e o 3º 16, no total de 2.176, então 2176/2000 = 1,088 por custo de bilhete.

Ou, cada bilhete tem probabilidade de 0,05% de ganhar e 99,85% de perder, fazendo o que se ganha multiplicado pelo prêmio:

0*0,9985 + 1.960*0,0005 + 200*0,0005 + 16*0,0005 = 1,088.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

- Em geral:

- Se as probabilidades de ganhar as quantias a1, a2, ..., ou ak são p1, p2, ..., e pk, onde p1 + p2 + ... + pk = 1, então a esperança matemática é:

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$$

- A quantia a, será positiva quando representar lucro e negativa quando representar perdas.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

★ **Exemplo**: Qual é a esperança de ganhar 25 quando um dado lançado aparecer com 1 ou 6 e perdermos 12,50 quando aparecer 2, 3, 4 ou 5?

a1 = 25 e a2 = -12,5

Probabilidades: p1 = 2/6 = 1/3 e p2 = 4/6 = 2/3 (dado equilibrado e jogado ao acaso):

$$E = 25 \cdot \frac{1}{3} + (-12{,}5) \cdot \frac{2}{3} = 0$$

Jogo honesto (equilibrado) não favorece nenhuma das partes.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

★ **Exemplo**: As probabilidades de um investidor vender um terreno com lucro de 2.500, de 1.500, de 500 ou prejuízo de 500 são 0,22, 0,36, 0,28 e 0,14, respectivamente. Qual é o lucro esperado?

a1 = 2.500, a2 = 1.500, a3 = 500, a4 = -500

Probabilidades: p1 = 0,22, p2 = 0,36, p3 = 0,28, p4 = 0,14:

$$E = 2.500(0,22) + 1.500(0,36) + 500(0,28) - 500(0,14)$$
$$= 1.160 \text{ unidades monetárias}$$

ESPERANÇA MATEMÁTICA

- **Exemplo**: As probabilidades de a agência de uma companhia aérea num certo aeroporto receber 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 reclamações por dia, são 0,06, 0,21, 0,24, 0,18, 0,14, 0,10, 0,04, 0,02 e 0,01, respectivamente. Quantas reclamações pode se esperar por dia?

$$
\begin{aligned}
E &= 0(0{,}06) + 1(0{,}21) + 2(0{,}24) + 3(0{,}18) + 4(0{,}14) \\
&\quad + 5(0{,}10) + 6(0{,}04) + 7(0{,}02) + 8(0{,}01) \\
&= 2{,}75
\end{aligned}
$$

ESPERANÇA MATEMÁTICA

★ **Exemplo**: Para defender um cliente um advogado deve decidir se cobra honorários fixos de 7.500 ou de contingência, que só receberá se o cliente ganhar a causa. O advogado está estimando as chances de seu cliente se: **a)** prefere honorários fixos de 7.500 a uma contingência de 25.000; **b)** prefere honorários de contingência de 60.000 aos honorários fixos de 7.500?

a) prob de ganhar: p então esperança é 25.000p, nesse caso fixos é preferido então 7.500 > 25.000p:

$$p < \frac{7.500}{25.000} = 0{,}30$$

b) esperança é 60.000p, nesse caso contingência é preferido então: 60.000p > 7.500:

$$p > \frac{7.500}{60.000} = 0{,}125$$

Probabilidade subjetiva de sucesso do cliente: 0,125 < p < 0,30.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

- **Exemplo**: Uma pessoa pagará 220 e ganhará dois ingressos se tirar um valete, dama, rei ou ás de um baralho de 52 cartas, caso contrário perderá os 220 e não ganhará os ingressos. Qual é o valor dos dois ingressos para que essa aposta seja equilibrada?

  4 valetes, 4 damas, 4 reis e 4 ases, probabilidade de ganhar 16/52, de perder 1 - 16/52 = 36/52, a esperança:

  $$E = a \cdot \frac{16}{52} + 0 \cdot \frac{36}{52} = a \cdot \frac{16}{52}$$

  a é o valor dos ingressos, igualando a esperança a 200, que seria um preço justo a pagar pelo risco:

  $$a \cdot \frac{16}{52} = 220 \quad \text{e} \quad a = \frac{52 \cdot 220}{16} = 715$$

  os dois ingressos devem custar 715 para que seja uma aposta equilibrada.

TOMADA DE DECISÃO

★ **Exemplo**: Uma empresa de medicamentos obteve a tabela para gastos de pesquisa, sabe-se que a chance de sucesso é 1/3.
O que se deve fazer para maximizar o lucro?

	Continuar os testes	*Acabar com os testes*
Medicamento eficaz	1.500.000	– 500.000
Medicamento ineficaz	– 600.000	– 400.000

Sucesso é 1/3, fracasso é 2/3, continuando os testes:

$$1.500.000 \cdot \frac{1}{3} + (-600.000) \cdot \frac{2}{3} = 100.000$$

Não continuando os testes:

$$(-500.000) \cdot \frac{1}{3} + (-400.000) \frac{2}{3} \approx -433.333$$

Perda muito alta! Melhor continuar os testes.

TOMADA DE DECISÃO

- ★ A verificação do exemplo anterior é chamada de **análise bayesiana**.
- ★ Atribuir probabilidades onde temos incertezas.
- ★ Escolher a opção que der mais lucro ou menor prejuízo.
- ★ Julgamento perante todas as probabilidades e todos os resultados precisam ser precisos, para um resultado satisfatório.

TOMADA DE DECISÃO

★ **Exemplo**: Sobre o exemplo do remédio foi revista e a probabilidade de sucesso é 1/15 e não 1/3. O que isso afeta o resultado?

Continuando os testes:

$$1.500.000 \cdot \frac{1}{15} + (-600.000) \cdot \frac{14}{15} = -460.000$$

Parando os testes:

$$(-500.000) \cdot \frac{1}{15} + (-400.000) \cdot \frac{14}{15} \approx -406.667$$

Logo, é preferível perder menos, então é melhor parar os testes.

TOMADA DE DECISÃO

★ **Exemplo**: Sobre o exemplo do remédio a probabilidade de sucesso é 1/15 e o lucro estimado caso sucesso na verdade é 2.300.000 e não 1.500.000. O que isso afeta o resultado?

Continuando os testes:

$$2.300.000 \cdot \frac{1}{15} + (-600.000) \cdot \frac{14}{15} = -406.667$$

Parando os testes:

$$(-500.000) \cdot \frac{1}{15} + (-400.000) \cdot \frac{14}{15} \approx -406.667$$

Ao que tudo indica, tanto faz a escolha, jogue uma moeda!

PROBLEMAS DE DECISÃO ESTATÍSTICA

- **Exemplo**: Dos 5 grupos montados, temos 1, 2, 5, 1 e 6 membros mulheres. Os grupos são separados aleatoriamente e deve-se prever quantos membros de um grupo escolhido são mulheres. Ganhará 300 mais 600 caso a previsão esteja certa, qual previsão maximiza o lucro?

  Moda é 1, ganha 300 com probabilidade 3/5 ou 900 com probabilidade 2/5:

  $$300 \cdot \frac{3}{5} + 900 \cdot \frac{2}{5} = 540$$

  Caso seja 2, 5 ou 6, ganha 300 com probabilidade 4/5 ou 900 com probabilidade 1/5:

  $$300 \cdot \frac{4}{5} + 900 \cdot \frac{1}{5} = 420$$

  Qualquer outra previsão ganha 300, 1º é a melhor escolha.

PROBLEMAS DE DECISÃO ESTATÍSTICA

★ Se é preciso escolher um valor exato (no chute) e não se ganha nada por ter uma resposta próxima, a melhor escolha é sempre a moda (afinal, é o valor que mais aparece).

PROBLEMAS DE DECISÃO ESTATÍSTICA

- **Exemplo**: Ainda sobre o exemplo dos grupos, ganha-se 600 menos uma importância igual a 40 vezes a magnitude de seu erro. Como maximizar o lucro?

  Nesse caso a mediana é a melhor escolha, dos grupos temos 1, 1, 2, 5 ou 6, escolhendo o meio (2), o erro será 1, 0, 3 ou 4. Assim, o ganho será 560 (600-1*40), 600, 480 (600-3*40) ou 440 (600-4*40), com probabilidades 2/5, 1/5, 1/5, e 1/5, com esperança:

$$560 \cdot \frac{2}{5} + 600 \cdot \frac{1}{5} + 480 \cdot \frac{1}{5} + 440 \cdot \frac{1}{5} = 528$$

  Qualquer outra escolha, acarretará em um erro maior.

PROBLEMAS DE DECISÃO ESTATÍSTICA

- **Exemplo**: Ainda sobre o exemplo dos grupos, ganha-se 600 menos uma importância igual a 20 vezes o quadrado de seu erro. Como maximizar o lucro?

  Nesse caso a média é a melhor escolha, dos grupos a média é 3, os quadrados dos erros são 4, 1, 4 ou 9. Assim, o ganho será 520 (600-4*20), 580 (600-1*20), 520 (600-4*20) ou 420 (600-9*20), com probabilidades 2/5, 1/5, 1/5, e 1/5, com esperança:

$$520 \cdot \frac{2}{5} + 580 \cdot \frac{1}{5} + 520 \cdot \frac{1}{5} + 420 \cdot \frac{1}{5} = 512$$

  Qualquer outra escolha, acarretará em um erro maior.

EXERCÍCIOS

★ **Lista 2 de Exercícios → Parte 3**

https://drive.google.com/file/d/18qTxOrn2moaKVDZ_E53JSUjHei53ilPp/view?usp=share_link

- ★ Muito obrigado pela atenção!