Estatística e Probabilidade

Bacharelado em Sistemas de Informação

Aula 4: Possibilidades e Probabilidades

Prof. Dr. Samuel Sanches

CONTAGEM

★ Contagem está presente em muitas coisas no dia a dia.

★ 1º: Listar tudo que pode ocorrer em determinada situação.

★ 2º: Determinar quantas coisas diferentes podem ocorrer (nem sempre é necessário uma listagem completa, poupar trabalho).

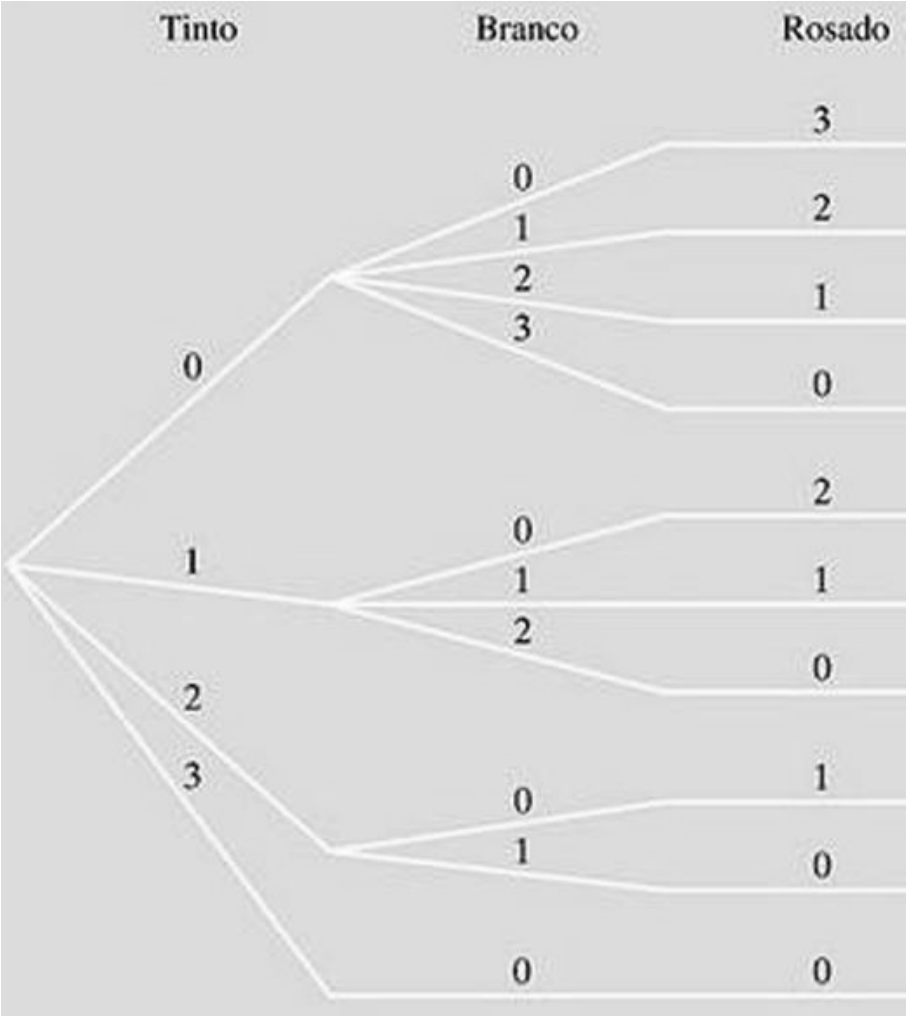
CONTAGEM

- **Exemplo**: Um restaurante oferece três tipos de vinhos da casa em copos: um vinho tinto, um branco e um rosado. Relacione o número de maneiras pelas quais três fregueses podem pedir três copos de vinho, sem levar em conta qual freguês recebe qual vinho.

  Muitas possibilidades: 3 tintos ou 2 tintos e 1 rosado ou 1 branco e 2 rosados ou 1 de cada, e assim por diante. Assim fica complicado listar todas as possibilidades, podemos omitir alguma. Uma maneira para facilitar é com o **Diagrama de Árvore**.

CONTAGEM

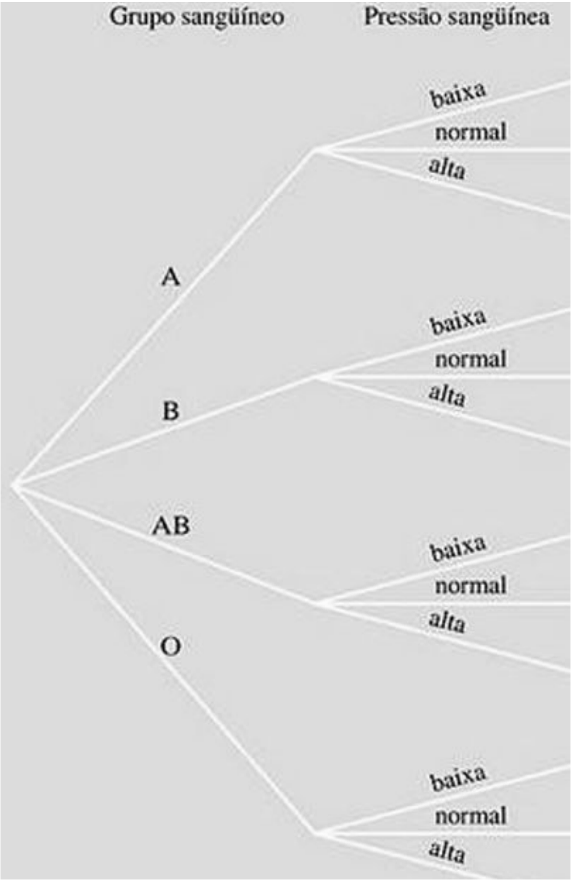
★ **Diagrama de Árvore**



CONTAGEM

★ **Exemplo**: Em um estudo médico, os pacientes são classificados pelo grupo sanguíneo como A, B, AB ou O, e também de acordo com sua pressão sanguínea baixa, normal ou alta. De quantas maneiras pode um paciente ser classificado?

Com o diagrama, podemos verificar que são 12 maneiras de classificação.



CONTAGEM

- **Multiplicação de Escolhas:**

  Se uma escolha consiste em dois passos, o primeiro dos quais pode ser realizado de **m** maneiras, e para cada uma dessas o segundo passo pode ser realizado de **n** maneiras, então a escolha total pode ser feita de **m*n** maneiras.

  No exemplo: 4 tipos sanguíneos e 3 pressões, então 4*3 = 12

  No exemplo dos vinhos, não podemos utilizar, pois uma escolha afeta a próxima!

CONTAGEM

★ **Exemplo**: Se um cientista quer realizar uma experiência com um de 12 novos medicamentos para a sinusite, testando com camundongos, porquinhos-da-índia e ratos, de quantas maneiras o cientista pode escolher um dos medicamentos e uma das três cobaias?

Aqui temos m = 12 (primeira escolha) e n = 3 (segunda escolha que não é afetada pela primeira), então 12*3 = 36 maneiras diferentes de programar o experimento.

CONTAGEM

- **Exemplo**: Se um departamento da faculdade oferece três turmas de aulas teóricas e quinze turmas de laboratório, de quantas maneiras pode um aluno escolher uma turma de cada? Também, quantas escolhas terá um aluno se duas das turmas de aulas teóricas e quatro das turmas de laboratório já estão sem vagas quando chegar sua vez de efetuar sua matrícula?

  1º parte: m = 4 e n = 15, então 15*4 = 60 maneiras.

  2º parte: 2 da teórica ocupadas, então m = 4 - 2 = 2 e 4 do laboratório ocupadas, então n = 15 - 4 = 11, assim 2*11 = 22 maneiras.

CONTAGEM

★ Caso se tenha mais de duas escolhas, ou seja, k passos (escolhas), prosseguimos multiplicando as maneiras possíveis, n1*n2*n3* .... * nk maneiras.

★ De maneira prática, **continuamos a multiplicar as quantidades de maneiras** em que podem ser realizados os diferentes passos.

CONTAGEM

- **Exemplo**: Um vendedor de automóveis novos oferece um carro em quatro estilos, dez acabamentos e três potências. De quantas maneiras diferentes pode ser encomendado um desses carros?

  Aqui temos, n1 = 4 (estilos), n2 = 10 (acabamentos) e n3 = 3 (potências), então 4*10*3 = 120 maneiras diferentes de encomendar um desses carros.

CONTAGEM

★ **Exemplo**: Um vendedor de automóveis novos oferece um carro em quatro estilos, dez acabamentos, três potências, se o carro tem transmissão automática ou manual e com ou sem ar-condicionado. De quantas maneiras diferentes pode ser encomendado um desses carros?

Aqui temos, n1 = 4 (estilos), n2 = 10 (acabamentos), n3 = 3 (potências), n4 = 2 (auto ou manual) e n5 = 2 (com ou sem ar), então 4*10*3*2*2 = 480 maneiras diferentes de encomendar um desses carros.

CONTAGEM

★ **Exemplo**: Um teste consiste em 15 questões de múltipla escolha, cada questão apresentando quatro opções de respostas. De quantas maneiras diferentes um estudante pode marcar uma resposta para cada uma das questões?

Aqui temos 4 opções de respostas em 15 perguntas, então n1 = n2 = n3 = ... = n15 = 4, ou seja, 4*4*4*4*4*4*4*4*4*4*4*4*4*4*4 = 4^{15} = 1.073.741.824 maneiras diferentes de marcar uma resposta em cada questão, lembre que as respostas corretas estão em apenas uma dessas possibilidades.

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

- ★ Quando podemos fazer várias escolhas de um único conjunto e qual a ordem dessas escolhas devemos pensar em como elas serão arranjadas e como são trocados entre si (permuta).

- ★ **Exemplo**: Em um concurso com 20 candidatos, de quantas maneiras teremos um vencedor e um segundo lugar?

  Veja que ao ter um vencedor ele já é excluído do segundo lugar, assim temos m = 20 para o vencedor e n = 19 candidatos para o segundo lugar, então, 20*9 = 380 maneiras de termos os dois primeiros lugares.

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ **Exemplo**: De quantas maneiras distintas os 48 membros de um clube podem escolher um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro?

O escolhido como presidente, é excluído dos outros cargos, e assim por diante, então n1 = 48 (presidente), n2 = 47 (vice-presidente), n3 = 46 (secretário) e n4 = 45 (tesoureiro), então, 48*47*46*45 = 4.669.920 possibilidades diferentes.

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

- ★ **Formalmente**:

  se **r** objetos são escolhidos de um conjunto de **n** objetos distintos, qualquer escolha ordenada particular desses objetos é denominada **arranjo**.

  se **r = n**, dizemos que o arranjo é uma **permutação**.

  Como, 4 1 2 3 é uma permutação dos quatro primeiros inteiros positivos; Pernambuco, Alagoas e Paraíba é um arranjo (escolha ordenada particular) de três dos seis estados da região nordeste.

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ **Exemplo**: Determine o número de arranjos distintos de duas das cinco vogais, a, e, i, o, u, e elabore uma lista desses arranjos.

Podemos escolher m = 5 e então sobra n = 4 (para a segunda vogal), então 5*4 = 20 arranjos diferentes, sendo eles:

ae ai ao au ei eo eu io iu ou ea ia oa ua ie oe ue oi ui uo

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ O número total de arranjos de r objetos selecionados de um conjunto de n objetos distintos, a primeira escolha é feita no conjunto total de n objetos, a segunda é feita dentre n - 1 restantes, a terceira n - 2 restantes, assim a r-ésima (última escolha, estará entre n - (r - 1) = n - r + 1 objetos que restam após feitas as r - 1 escolhas anteriores.

★ Então o número total de arranjos de r objetos do conjunto n, denotado nPr, é n(n - 1)(n - 2) ... (n - r + 1), multiplicação feita até então.

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ Notação fatorial: fatorial de n, denotado por n!

0! = 1 (por definição)
1! = 1
2! = 2*1 = 2
3! = 3*2*1 = 6
4! = 4*3*2*1 = 24
5! = 5*4*3*2*1 = 120
6! = 6*5*4*3*2*1 = 720

em geral

n! = n(n - 1)(n - 2)....3*2*1

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ Facilidade para simplificações, pois valores fatoriais crescem muito rapidamente:

12*11*10! = 12!

9*8*7*6! = 9!

37*36*35*34*33! = 37!

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

★ Número de arranjos de r objetos selecionados de um conjunto de n objetos distintos:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

★ Caso de r = 0, ou seja, nenhum arranjo:

$$_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

- **Exemplo**: Ache o número de permutações de r = 4 objetos selecionados de um conjunto de n = 12 objetos distintos (número de maneiras em que um painel de críticos pode escolher quatro dentre 12 estréias do cinema como sendo as de melhor qualidade, uma delas a melhor, outra a segunda melhor, outra a terceira e mais uma a quarta).

  Antigamente: 12*11*10*9 = 11.880

  Com a expressão:

$$_{12}P_4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 11.880$$

ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

- O número de permutações de n objetos distintos (tomados todos de uma só vez), fazemos r = n, então:

$$_{n}P_{n} = n!$$

- **Exemplo**: De quantas maneiras oito professores substitutos podem ser distribuídos para lecionar oito turmas de um curso?

  Aqui n = 8, assim:

$$_{8}P_{8} = 8! = 40.320$$

COMBINAÇÕES

- ★ Algumas vezes o interesse é para um número de arranjos sem que a ordem importa, como, 4 letras do alfabeto a, b, c, d, vamos arranjar em 3, os 24 primeiros:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

- ★ Veja que cada linha só permuta as letras, como vimos antes a permutação nesse caso é de 3 possibilidades com 3 escolhas, $_3P_3 = 3! = 6$

COMBINAÇÕES

★ Então, o número de maneiras pelas quais **r** objetos podem ser escolhidos de um conjunto de **n** objetos é conhecida como combinação, denotada por ${}_n C_r$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

★ **Exemplo**: Quantas maneiras pode ser formado um comitê de quatro dentre 45 membros, sem importar a ordem de escolha (qual o coeficiente binomial).

Aqui, n = 45 e r = 4: $${}_{45}C_4 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!} = 148.995$$

COMBINAÇÕES

★ **Exemplo**: Quantas maneiras podem ser escolhidos cinco dentre 36 envelopes, sem importar a ordem de escolha (qual o coeficiente binomial).

Aqui, n = 36 e r = 5: $$\binom{36}{5} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{5!} = 376.992$$

★ **Exemplo**: Quantas maneiras uma pessoa pode escolher três livros de uma lista de dez mais vendidos, supondo que é inconsequente a ordem de escolha dos livros (qual o coeficiente binomial).

Aqui, n = 10 e r = 3: $$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$$

COMBINAÇÕES

- **Exemplo**: Quantas maneiras podem ser escolhidos dois guitarristas dentre 7 candidatos e três bateristas dentre 9 candidatos, sem importar a ordem de escolha (qual o coeficiente binomial).

  Para guitarristas, n = 7 e r = 2, para bateristas, n = 9 e r = 3, assim, multiplicando a combinação de cada um deles, temos a combinação total:

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3} = 21 \cdot 84 = 1.764$$

COMBINAÇÕES

★ Algumas vezes queremos simplificar os cálculos, então podemos fazer a transformação:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{para} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

★ **Exemplo**: Determine o valor de $\binom{75}{72}$.

$$\binom{75}{72} = \binom{75}{3} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{3!} = 67.525$$

COMBINAÇÕES

- **Exemplo**: Determine o valor de $\binom{19}{13}$.

$$\binom{19}{19-13}=\binom{19}{6} = 27.132$$

- O r não pode ser 0 na expressão passada, mas podemos simplificar e chegar:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n-0}=\binom{n}{n}$$

ou seja, temos resultado o valor 1, que é o total de maneiras de se escolher todo o conjunto de uma vez ou de não escolher nenhum.

PROBABILIDADE

- ★ Agora queremos verificar o que é provável e o que é improvável.
- ★ Em dado evento vamos atribuir probabilidades (ou especificar as chances de ocorrência).
- ★ **Probabilidade clássica**: medir incertezas, originalmente em jogos de azar, diferenciar possibilidade e probabilidade, só vale quando todos resultados possíveis são igualmente prováveis:

  Se há **n** possibilidades igualmente prováveis, das quais uma deve ocorrer, e **s** são consideradas como favoráveis, ou então um “sucesso”, como a probabilidade de um “sucesso” é de **s/n**

PROBABILIDADE

★ **Exemplo**: Qual é a probabilidade de se tirar um ás de um baralho bem misturado de 52 cartas?

Bem misturado quer dizer que qualquer carta tem a mesma chance de ser tirada, então se enquadra no conceito de probabilidade clássica, temos s = 4 ases entre as n = 52 cartas, então:

$$\frac{s}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

1/13 = 0,0769 => 7,69%.

PROBABILIDADE

★ **Exemplo**: Qual é a probabilidade de obter um 3, um 4, um 5 ou um 6 numa jogada de um dado equilibrado?

Equilibrado quer dizer que cada face do dado tem a mesma chance de aparecer, então, pode aplicar o conceito de probabilidade clássica, aqui s = 4 e n = 6, então:

$$\frac{s}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2/3 = 0,6667 => 66,67%.

PROBABILIDADE

- **Exemplo**: Se Ca representa “cara” e Co representa “coroa”, os oito resultados possíveis de três jogadas de uma moeda equilibrada são CaCaCa, CaCaCo, CaCoCa, CoCaCa, CoCoCa, CoCaCo, CaCoCo e CoCoCo. Quais são as probabilidades de obter duas caras ou três caras?

  Equilibrada, duas faces tem mesma chance de aparecer, contando as possibilidades para duas caras s = 3 e n = 8 e para três caras s = 1 e n = 8, então:

  3/8 = 0,375 => 37,5%

  1/8 = 0,125 => 12,5%

PROBABILIDADE

★ **Exemplo**: Se três de um grupo de vinte levantadores de peso têm usado esteróides anabolizantes e quatro quaisquer deles são testados para o uso de esteróides, qual é a probabilidade de que exatamente um dos três levantadores de peso do grupo seja incluído no teste?

Precisamos saber de quantas maneiras temos de escolher os quatro:

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4.845$$

Agora, precisamos combinar 1 dos 3 que usam esteróides e 3 dos 17 que não usam:

$$s = \binom{3}{1}\binom{17}{3} = 3 \cdot 680 = 2.040$$

Então:

$$\frac{s}{n} = \frac{2.040}{4.845} = \frac{8}{19}$$

8/19 = 0,4211 => 42,11%

PROBABILIDADE

- Conceito de **interpretação frequencial**: A probabilidade de um evento (acontecimento ou resultado) é a proporção do número de vezes em que eventos do mesmo tipo ocorrem a longo prazo.

- Caso tenhamos uma probabilidade de 0,90 de um carro dar partida no frio, isso quer dizer que ele funcionará em 90% das vezes, não podemos garantir o que irá ocorrer, mas se guardar registros de um longo período, veremos que a proporção de sucessos estará próxima de 0,90.

- Estima-se a probabilidade de um evento observando qual fração das vezes os eventos análogos têm ocorrido no passado.

PROBABILIDADE

- ★ **Exemplo**: Uma pesquisa mostrou que dentre 8.319 mulheres da faixa etária de 20 aos 30 que se casam novamente depois de um divórcio, 1.358 voltaram a se divorciar. Qual é a probabilidade de uma mulher divorciada da faixa etária dos 20 aos 30 divorciar-se novamente?

  Do total n = 8.319 e s = 1.358, então 1.358/8.319 = 0,1632 => 16,32%

- ★ **Exemplo**: Registros mostram que 34 de 956 pessoas que visitaram um local, contraíram malária. Qual é a probabilidade de que uma pessoa recentemente visitou o local, não tenha contraído malária?

  Dos valores 956 - 35 = 922 das 956 não contraíram, então n = 956 e s = 922, então 922/956 = 0,9644 => 96,44%

PROBABILIDADE

- ★ **Lei dos Grandes Números**: Se determinada situação, experimento ou tentativa é repetida um grande número de vezes, a proporção de sucessos tenderá para a probabilidade de que um dado resultado qualquer seja um sucesso.

- ★ Conhecido como “lei das médias”, é uma afirmação sobre a proporção de sucessos a longo prazo, mas não diz nada sobre um experimento isolado.

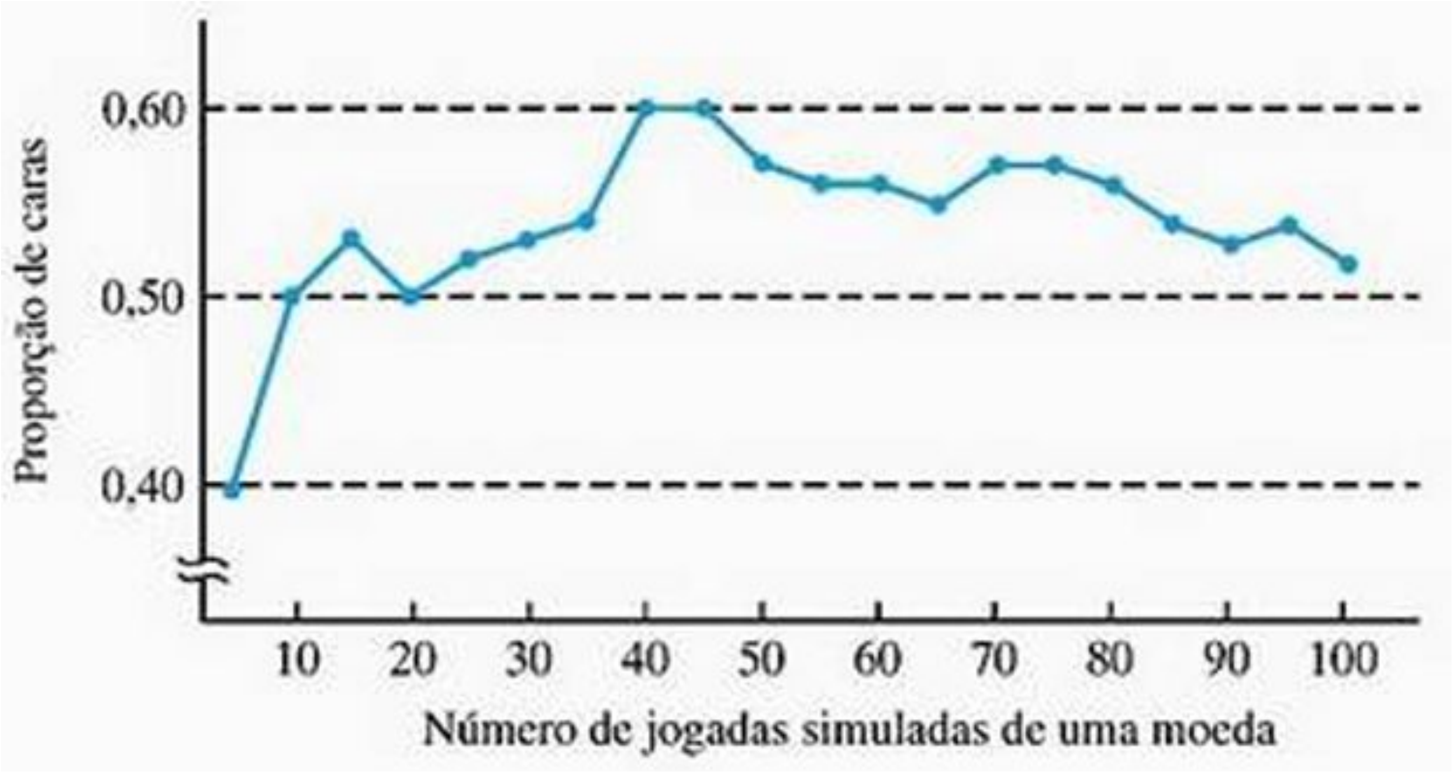
- ★ Utilizando um computador, foi simulado o jogo de uma moeda, onde 0 e 1 indicam cara e coroa, resultado no próximo slide.

PROBABILIDADE

★ 5 primeiras jogadas, 2 caras: 2/5 = 0,40; 10 primeiras jogadas, 5 caras: 5/10 = 0,50; 15 primeiras jogadas, 8 caras: 8/15 = 0,53. Valor flutua ao redor de 0,50, que é a probabilidade para a face de uma moeda.

0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0

PROBABILIDADE



PROBABILIDADE

- ★ Pessoa fez cirurgia específica, em geral 78% dos pacientes tem alta em 4 dias, podemos afirmar que a pessoa terá alta em quatro dias?
- ★ Da probabilidade temos eventos análogos, porém essa escolha dos eventos análogos pode não ser das melhores, idade, peso, condição e etc do paciente, pode afetar o nosso resultado.
- ★ Então o julgamento das escolhas para esses eventos análogos, podem trazer divergências nas probabilidades para um mesmo evento, sendo todos válidos.

Planilha Aula 4:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1RUE7ogsYNrLPNAT2emlTCLdmIebjFXae07t9j8-FpvM/edit?usp=share_link

EXERCÍCIOS

- **Lista 2 de Exercícios → Parte 1**

  https://drive.google.com/file/d/18qTxOrn2moaKVDZ_E53JSUjHei53ilPp/view?usp=share_link

- Muito obrigado pela atenção!