Estatística e Probabilidade

Bacharelado em Sistemas de Informação

Aula 5: Algumas Regras de Probabilidade

Prof. Dr. Samuel Sanches

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ Qualquer processo de observação ou medida chamaremos de “**experimento**”.

★ A informação obtida do experimento, como leitura de um instrumento, resposta sim ou não, etc, chamaremos de **resultado**.

★ Do experimento, todos os resultados possíveis chamaremos de **espaço amostral** (**S**).

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

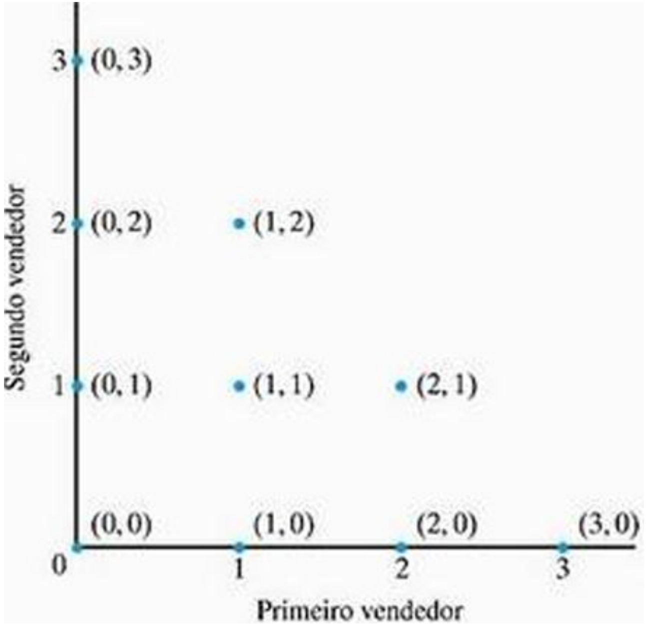
- ★ **Exemplo**: Um zoológico deve escolher 3 dentre 24 porquinhos-da-índia, então o espaço amostral é a combinação (24 3) = 2.024 maneiras.

- ★ **Exemplo**: O reitor de uma universidade deve indicar 2 de seus 84 professores para servir como conselheiros, então o espaço amostral é a combinação (84 2) = 3.486 maneiras.

- ★ Podemos utilizar letras, como S = {a, b, c, d, e, f, g, h}, para uma moeda o espaço amostral é S = {cara, coroa}, para um dado regular S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ **Exemplo**: Uma revenda de caminhões usados tem 3 tipos para serem vendidos por qualquer um de seus dois vendedores. Quantos desses caminhões cada um dos vendedores venderá em uma dada semana, usaremos duas coordenadas, (1, 1) indica que cada um dos dois vendedores venderá um caminhão e (2, 0) que o 1º vendeu dois e o 2º nenhum. Relacione todos os possíveis resultados desse experimento e esboce um diagrama com esses pontos do espaço amostral.



Temos 10 possibilidades: S = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)}.

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

- ★ Note que todos os espaços amostrais que vimos possuem uma quantidade máxima, ou seja, são **finitos** (temos infinitos também).

- ★ **Evento**: subconjunto de um espaço amostral.

- ★ **Conjunto vazio**: pode ser evento, que não contém nenhum elemento, $\varnothing$.

- ★ **Exemplo**: Temos 8 candidatos a uma bolsa de estudos, M = {b, e}, denota o evento de algum aluno receber a bolsa, ou seja, é um “pedaço” do espaço amostral.

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

- ★ **Exemplo**: Do exemplo dos caminhões, expresse com palavras que eventos são representados por A = {(2, 0), (1, 1), (0, 2)}, B = {(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)} e C = {(0, 2), (1, 2), (0, 3)}.

  A é o evento em que são vendidos exatamente 2 caminhões.
  B é o evento em que o 2º vendedor não vende nenhum caminhão.
  C é o evento em que o 2º vendedor vende pelo menos 2 caminhões.

- ★ Veja que B e C não têm nenhum resultado em comum, ou seja, são mutuamente excludentes, ocorrência de um não interfere no outro.

- ★ Já A e B ou A e C possuem resultados iguais.

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ Muitas vezes iremos querer:

★ **União** (ou): dois eventos X e Y, denota união $X \cup Y$, consiste em todos elementos que tem X e Y.

★ **Intersecção** (e): dois eventos X e Y, denota intersecção $X \cap Y$, consiste nos elementos em comum em X e Y.

★ **Complementar** (não X): evento X, então temos outro conjunto X’ em que terá os elementos que não estão no X.

ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ **Exemplo**: Dos eventos dos caminhões, temos: A = {(2, 0), (1, 1), (0, 2)}, B = {(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)} e C = {(0, 2), (1, 2), (0, 3)}. Monte a união e intersecção entre eles.

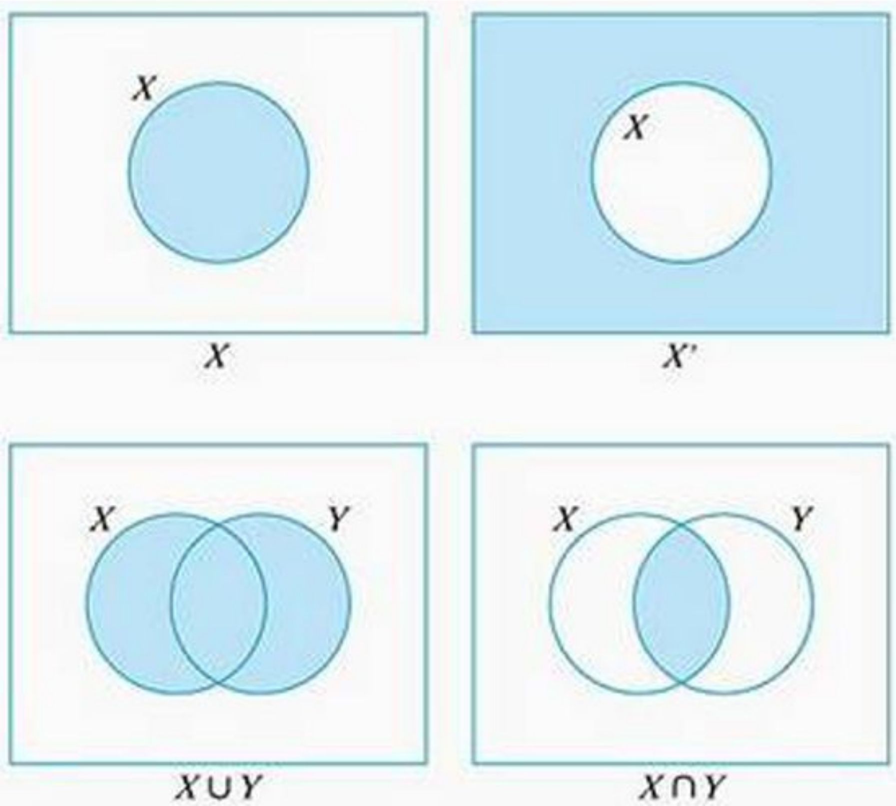
$$B \cup C = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 2), (1, 2), (0, 3)\}$$

$$A \cap C = \{(0, 2)\}$$

$$B' = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3)\}$$

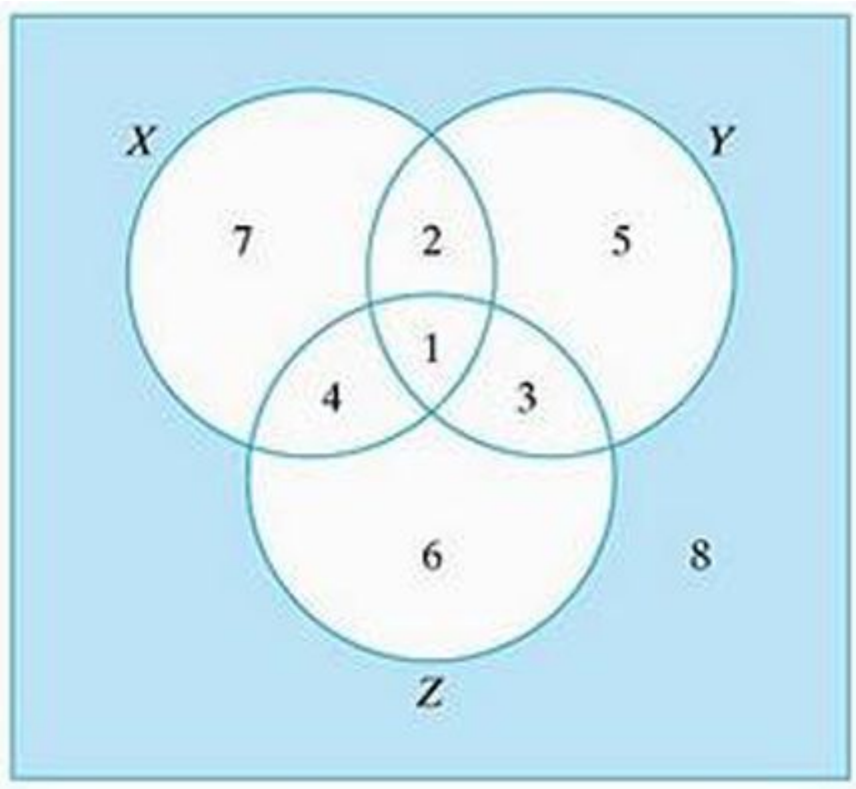
ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ **Diagrama de Venn**



ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

★ **Diagrama de Venn**



POSTULADOS DE PROBABILIDADE

- ★ Eventos denotados por letra maiúscula, então probabilidade de um evento A é P(A), probabilidade do evento B é P(B), a letra S fica reservada para o espaço amostral (todos resultados).

- ★ **1º)** As probabilidades são números reais positivos ou zero; simbolicamente , $P(A) \geq 0$ para qualquer evento A.

  Dos cálculos s/n será sempre um valor positivo ou zero

- ★ **2º)** Qualquer espaço amostral tem probabilidade 1; simbolicamente, $P(S) = 1$ para qualquer espaço amostral S.

  Da expressão s/n, para todo espaço amostral temos n/n = 1

POSTULADOS DE PROBABILIDADE

- **3º)** Se dois eventos são mutuamente excludentes (não podem ocorrer simultaneamente), a probabilidade de ocorrência de um ou do outro é igual à soma de suas probabilidades. Simbolicamente: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; para dois eventos A e B quaisquer mutuamente excludentes.

  Probabilidades de um estudante obter um conceito A ou um B numa disciplina são 0,13 e 0,29, respectivamente, então a probabilidade de o estudante obter um dos dois conceitos A ou B é 0,13 + 0,29 = 0,42.

POSTULADOS DE PROBABILIDADE

- ★ Regras adicionais decorrentes dos 3 postulados:

$$P(A) \leq 1 \quad \textit{para qualquer evento } A$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \textit{para qualquer evento } A$$

- ★ 1º informa que um evento tem sempre a probabilidade menor ou igual a 100%.

- ★ 2º probabilidade de ocorrer nenhum evento do espaço amostral é 0%.

- ★ 3º probabilidade do evento A somada com a probabilidade do que não está no evento A, será 100%, ou seja, pegamos todo o espaço amostral.

POSTULADOS DE PROBABILIDADE

★ **Exemplo**: Se A e B são os eventos que uma certa revista cotar o sistema de som como bom ou ruim e P(A) = 0,24 e P(B) = 0,35, determine: **a)** P(A'); **b)** $P(A \cup B)$; **c)** $P(A \cap B)$.

a) A' é o que o A não engloba, então P(A') = 1 - 0,24 = 0,76. Que consiste na revista cotar o sistema como não sendo bom.

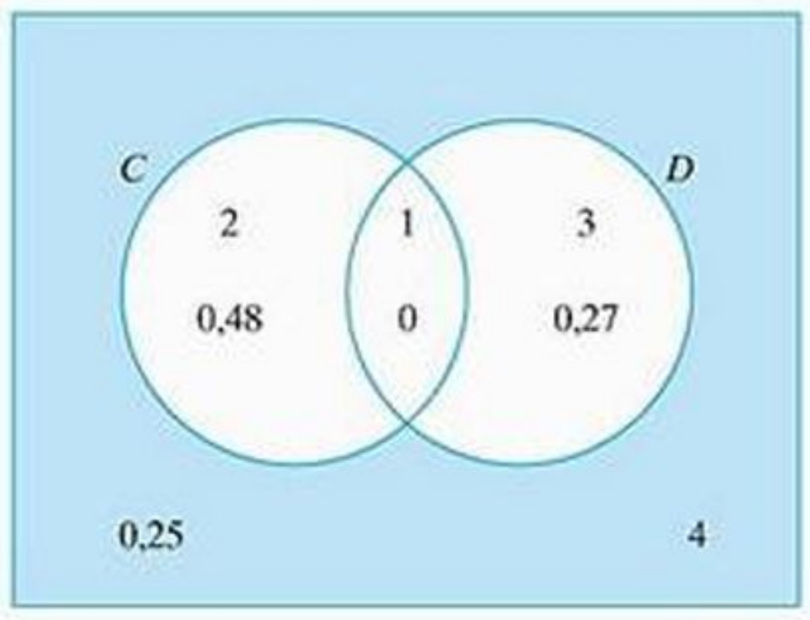
b) A e B são mutuamente excludentes então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}59$. Que é a probabilidade de cotar como bom ou ruim.

c) Como A e B são mutuamente excludentes (não possuem coisas em comum) $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$.

POSTULADOS DE PROBABILIDADE

★ **Exemplo**: Se C e D são os eventos de um média estar às 9h no consultório ou de estar no hospital, se P(C) = 0,48 e P(D) = 0,27, encontre P(C’ ∩ D’).

Usar o diagrama de Venn, intersecção é 0 (mutuamente excludentes, região 1) com ele notamos que o pedido é o que “sobra” quando tiramos o evento C e o D, então
P(C’ ∩ D’) = 1 - (0,48 + 0,27) = 0,25.



PROBABILIDADES E CHANCES

★ Tal evento tem o dobro de chances de ocorrer do que não ocorrer, dizemos que as **chances** são de 2 para 1.

★ As chances de ocorrência de um evento são dadas pelo quociente da probabilidade de que vá ocorrer o evento pela probabilidade de que não vá ocorrer.

★ Se a probabilidade de um evento é **p**, então a chance de sua ocorrência é de **a** para **b**, onde **a** e **b** são valores positivos tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$$

PROBABILIDADES E CHANCES

★ **Exemplo**: Quais são as chances de ocorrer um evento se sua probabilidade é: **a)** 5/9; **b)** 0,85; **c)** 0,20.

a) p = 5/9, assim 1 - 5/9 = 4/9, temos chances de 5 para 4.

b) p = 0,85, assim 1 - 0,85 = 0,15, temos chances de 85 para 15, ou (simplificando por 5) 17 para 3.

c) p = 0,20, assim 1 - 0,20 = 0,80, temos chances de 20 para 80, ou (simplificando por 20) 1 para 4.

PROBABILIDADES E CHANCES

- ★ Em apostas, chance, nos diz o quociente do valor apostado por uma parte pelo valor apostado pela outra parte, então 3 contra 1 pode traduzir R$3,00 contra R$1,00 ou R$1.500 contra R$500.

- ★ Se a **chance de aposta** é igual à chance de ocorrência do evento, a aposta é **honesta** ou **equilibrada**.

- ★ **Exemplo**: Registros mostram que 1/12 dos caminhões acusam excesso de carga. É uma aposta honesta alguém apostar R$40 contra R$4 que o próximo caminhão a ser pesado não terá excesso de carga?

  Probabilidade de não ter excesso é (de ter excesso é 1/12) 1 - 1/12 = 11/12, ou seja, 11 para 1, ou seja R$44 para R$4, não é honesto, favorece a pessoa que fez a aposta.

PROBABILIDADES E CHANCES

★ Para a partir das chances obtermos a **probabilidade subjetiva** da ocorrência do evento, invertemos a expressão da chance, assim, se as chances são de a para b que um evento vá ocorrer, então a probabilidade de sua ocorrência será:

$$p = \frac{a}{a+b}$$

PROBABILIDADES E CHANCES

★ **Exemplo**: Se um candidato a treinador de um time de futebol acredita que suas chances são de 7 para 1 de conseguir o emprego, qual é a probabilidade subjetiva que ele está atribuindo a conseguir o emprego?

Aqui temos a = 7 e b = 1, então $p = \frac{7}{7+1} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

ou seja, 87,5%.

PROBABILIDADES E CHANCES

★ **Exemplo**: Um colunista de jornal acredita que as chances são de 2 para 1 que a taxa de juros vá aumentar antes do fim do ano, de 1 para 5 que a taxa permanecerá a mesma e de 8 para 3 que aumentará ou permanecerá no mesmo patamar. São consistentes as probabilidades correspondentes?

Aumentar: 2/(2 + 1) = 2/3

Manter: 1/(1 + 5) = 1/6

Das duas temos Aumentar ou Manter: 2/3 + 1/6 = **5/6**

Aumentar ou manter: 8/(8 + 3) = **8/11**

Ou seja: 5/6 é diferente de 8/11, assim o julgamento do colunista deve ser questionado!

REGRAS DE ADIÇÃO

- ★ Se k eventos são mutuamente excludentes, a probabilidade de ocorrência de um deles é igual à soma de suas probabilidades individuais:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

para quaisquer eventos mutuamente excludentes A1, A2, ..., e Ak.

REGRAS DE ADIÇÃO

- **Exemplo**: As probabilidades de uma pessoa que deseja adquirir um carro novo escolher entre 3 marcas diferentes são 0,17, 0,22 e 0,08. Supondo que ela compre apenas um carro, qual é a probabilidade de ser de uma dessas três marcas?

  Como a pessoa só irá escolher 1 carro, as três possibilidades são mutuamente excludentes, então essa probabilidade é a soma das 3: 0,17 + 0,22 + 0,08 = 0,47.

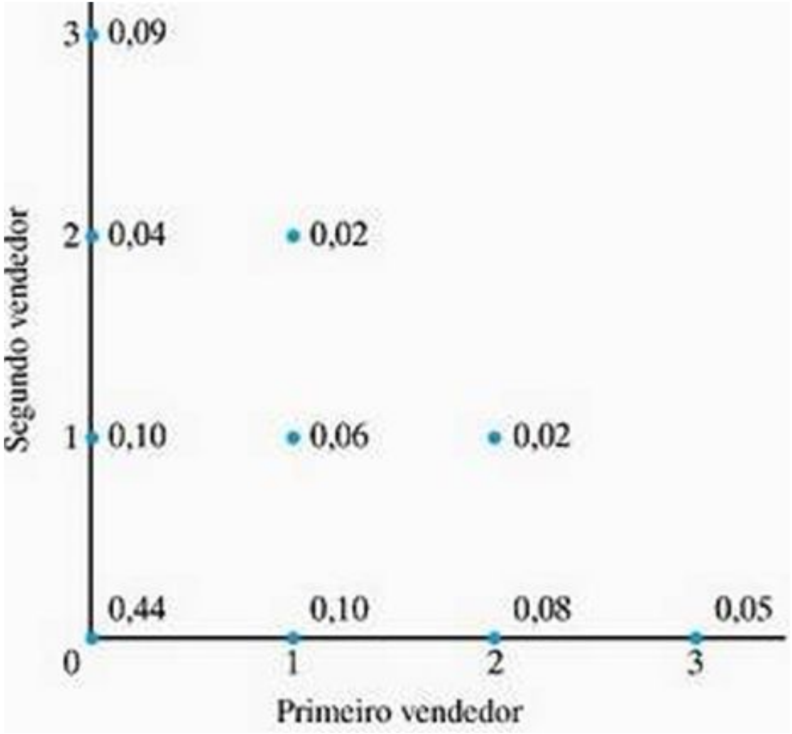
REGRAS DE ADIÇÃO

- **Exemplo**: As probabilidades de um serviço de teste do consumidor classificar uma nova máquina fotográfica como ruim, razoável, boa, muito boa ou excelente são 0,07, 0,16, 0,34, 0,32 e 0,11. Qual é a probabilidade de a nova máquina ser classificada como boa, muito boa ou excelente?

  Novamente, só podemos ter uma classificação, então, elas são mutuamente excludentes, a probabilidade é: 0,34 + 0,32 + 0,11 = 0,77.

REGRAS DE ADIÇÃO

★ **Exemplo**: Considerando o problema dos vendedores de caminhão e as probabilidades na figura, calcule a probabilidade de: **a)** ambos vendedores juntos venderam dois caminhões; **b)** o segundo vendedor não vendeu caminhão algum; **c)** o segundo vendedor vendeu pelo menos dois caminhões.



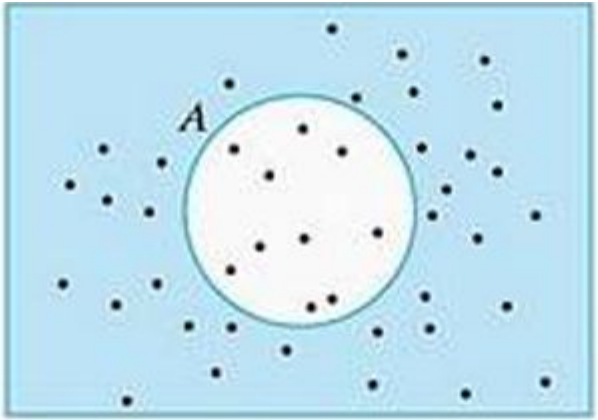
a) Somando as probabilidades de (2, 0), (1, 1) e (0, 2): 0,08 + 0,06 + 0,04 = 0,18.

b) Somando as probabilidades de (0, 0), (1, 0), (2, 0) e (3, 0): 0,44 + 0,10 + 0,88 + 0,05 = 0,67.

c) Somando as probabilidades de (0, 2), (1, 2) e (0, 3): 0,04 + 0,02 + 0,09 = 0,15.

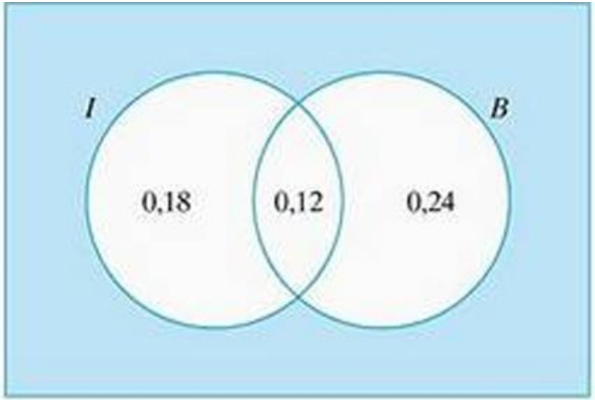
REGRAS DE ADIÇÃO

★ **Exemplo**: Dado que os 44 pontos (resultados) do espaço amostral da figura são equiprováveis, encontre P(A).



No total, temos 44 pontos, cada um com probabilidade igual a 1/44, dentro da região A temos 10 pontos, assim a probabilidade de A será P(A) = 10/44 = 0,2273 => 22,73%.

REGRAS DE ADIÇÃO



- ★ Veja o diagrama de Venn, por ele, calculando P(I) = 0,18 + 0,12 = 0,30 e P(B) = 0,12 +0,24 = 0,36 e P(I ∪ B) = 0,18 + 0,12 + 0,24 = 0,54.

- ★ Não podemos só fazer P(I ∪ B) = P(I) + P(B) = 0,30 + 0,36 = 0,66, pois assim estamos contando o valor 0,12 dobrado que corresponde a intersecção P(I ∩ B) = 0,12.

- ★ Correto é: P(I ∪ B) = P(I) + P(B) - P(I ∩ B) = 0,34 + 0,36 - 0,12 = 0,54.

- ★ **Regra geral da adição**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

REGRAS DE ADIÇÃO

- **Exemplo**: As probabilidades de que choverá em uma cidade num certo dia de agosto, de que haverá trovoadas e de que choverá e haverá trovoadas são de 0,27, 0,24 e 0,15, respectivamente. Qual é a probabilidade de chover e/ou haver trovoadas neste dia na cidade?

  R => Chuva e T => Trovoadas

  $P(R) = 0,27$, $P(T) = 0,24$ e $P(R \cap T) = 0,15$

  Então:
  $P(R \cup T) = P(R) + P(T) - P(R \cap T) = 0,27 + 0,24 - 0,15 = 0,36$.

REGRAS DE ADIÇÃO

★ **Exemplo**: Numa pesquisa por amostras realizada num certo bairro de uma cidade, as probabilidades são 0,92, 0,53 e 0,48 de que uma família selecionada ao acaso possua um automóvel sedan, um 4 por 4 ou ambos. Qual é a probabilidade de uma família possuir um automóvel sedan, um 4 por 4, ou ambos?

A => Auto Sedan e Q => 4 por 4

$P(A) = 0{,}92$, $P(Q) = 0{,}53$ e $P(A \cap Q) = 0{,}48$

Então:
$P(A \cup Q) = P(A) + P(Q) - P(A \cap Q) = 0{,}97 + 0{,}53 - 0{,}48 = 0{,}97$.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- ★ Quando desconhecemos o espaço amostral, utilizamos a probabilidade condicional **P(A|S)** para denotar a probabilidade do evento A em relação ao espaço amostral S (probabilidade de A dado S).

- ★ Se P(B) é diferente de zero, então a probabilidade condicional de A em relação a B, isto é, a probabilidade de A dado B, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Exemplo**: Instituto de pesquisa estudou serviços prestados dentro da garantia por 200 lojas obtendo a tabela.

	Bom serviço dentro da garantia	Serviço deficiente dentro da garantia	Total
Lojas especializadas numa marca	64	16	80
Lojas não especializadas	42	78	120
Total	106	94	200

Aleatoriamente uma dessas lojas tem probabilidade 1/200, com N escolher uma loja especializada e G loja com bom serviço dentro da garantia e $N \cap G$ loja especializada com bom serviço dentro da garantia são:

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Exemplo**: Instituto de pesquisa estudou serviços prestados dentro da garantia por 200 lojas obtendo a tabela.

$$P(N) = \frac{80}{200} = 0{,}40 \qquad P(G) = \frac{106}{200} = 0{,}53 \qquad P(N \cap G) = \frac{64}{200} = 0{,}32$$

Para somente lojas especializadas espaço amostral diminui para 80, então probabilidade de escolher uma loja especializada e que preste bom serviço dentro da garantia é:

$$P(G|N) = \frac{64}{80} = 0{,}80 \qquad P(G|N) = \frac{\frac{64}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{P(N \cap G)}{P(N)}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

★ **Exemplo**: Instituto de pesquisa estudou serviços prestados dentro da garantia por 200 lojas obtendo a tabela. Qual é a probabilidade de uma loja que não é especializada numa marca prestar bons serviços sob garantia, ou, P(G|N')?

$$P(G \cap N') = \frac{42}{200} = 0{,}21 \quad \text{e} \quad P(N') = \frac{120}{200} = 0{,}60$$

$$P(G|N') = \frac{P(G \cap N')}{P(N')} = \frac{0{,}21}{0{,}60} = 0{,}35$$

$$P(G|N') = \frac{42}{120} = 0{,}35$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

★ **Exemplo**: Numa certa escola de 1º grau, a probabilidade de um aluno selecionado aleatoriamente provir de um lar com somente o pai ou a mãe presente é 0,36 e a probabilidade de ele provir de um lar com somente o pai ou a mãe presente e ser um estudante fraco é 0,27. Qual é a probabilidade de um aluno selecionado aleatoriamente ser um estudante fraco, dado que ele provém de um lar com somente o pai ou a mãe presente?

L => estudante fraco e O => lar com pai ou mãe presente, P(O) = 0,36 e P(O ∩ L) = 0,27:

$$P(L|O) = \frac{P(O \cap L)}{P(O)} = \frac{0{,}27}{0{,}36} = 0{,}75$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Exemplo**: A probabilidade de Henrique gostar de um filme que estreou nos cinemas é de 0,70 e a probabilidade de José gostar é 0,60. Se a probabilidade de Henrique gostar da estréia e de José não gostar é de 0,28, qual é a probabilidade de Henrique goste da estréia e de José não gostar?

  P(H) e P(J) são de Henrique gostar e de José gostar, então (José não gostar) P(J') = 1 - 0,6 = 0,4 e P(H ∩ J') = 0,28:

  $$P(H|J') = \frac{P(H \cap J')}{P(J')} = \frac{0{,}28}{0{,}40} = 0{,}70$$

  Veja que é igual P(H), pois são eventos independentes.

REGRAS DE MULTIPLICAÇÃO

★ De: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

★ Obtemos: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

★ Vale também: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

★ Nos informa que a probabilidade da ocorrência de dois eventos é o produto da probabilidade da ocorrência de um deles pela probabilidade condicional da ocorrência do outro evento, dado que o primeiro ocorreu (está ocorrendo ou ocorrerá).

REGRAS DE MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo**: Um júri consiste em 15 pessoas que somente completaram o Ensino Médio e 9 pessoas que tiveram alguma educação superior. Se um advogado seleciona ao acaso dois dos membros do júri para uma arguição, qual é a probabilidade de nenhum dos dois ter tido alguma educação superior?

  Se A é o evento que a 1º pessoa não tem educação superior, então P(A) = 15/24. Se B é o evento que a 2º pessoa não ter educação superior, P(B|A) = 14/23, temos agora 14 sem educação superior e 23 no total, 1 foi escolhida no evento A, assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = \frac{105}{276}$$

  105/276 = 0,3804 => 38,04%

REGRAS DE MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo**: Suponha que a probabilidade de uma doença rara ser diagnosticada é 0,45 e que diagnosticada a cura é de 0,60. Qual é a probabilidade de uma pessoa que contraiu essa doença, ser diagnosticada e ser curada?

  Como os eventos são independentes podemos substituir $P(B|A)$ por $P(B)$, assim:
  $P(A \cap B) = P(A)*P(B)$.

  Para o exemplo:

  $P(A \cap B) = 0,45*0,60 = 0,27$.

TEOREMA DE BAYES

- ★ São parecidos P(A|B) e P(B|A), porém essas probabilidades são bem diferentes. São eventos invertidos, a causa se torna o efeito e o efeito se torna causa.

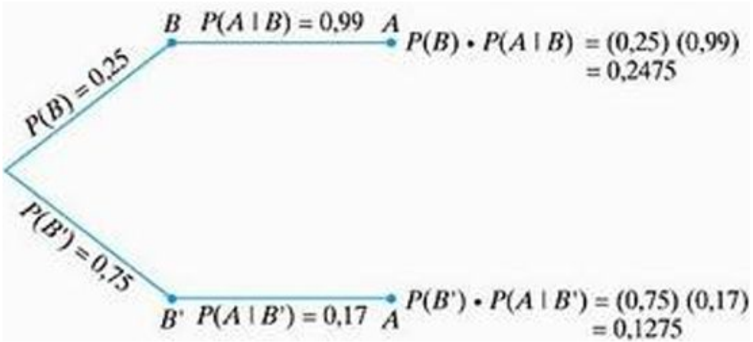
- ★ Assim, podemos utilizar:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

TEOREMA DE BAYES

- **Exemplo**: Em um estado, 25% de todos os carros emitem muitos gases poluentes, quando testados 99% dos que emitem muitos gases são reprovados, mas 17% dos que não emitem muitos gases também são reprovados. Qual é a probabilidade de um carro que é reprovado no teste efetivamente emitir uma quantidade excessiva de gases poluentes?

A => carro reprovado, B => carro emitir muitos gases. P(B) = 0,25, P(A|B) = 0,99 e P(A|B’) = 0,17, então podemos montar o diagrama. Dele o valor 0,2475 representa a P(A ∩ B) e o valor de 0,1275 representa P(A ∩ B’), assim conseguimos encontrar P(A) = P(A ∩ B) + P(A ∩ B’) = 0,3750



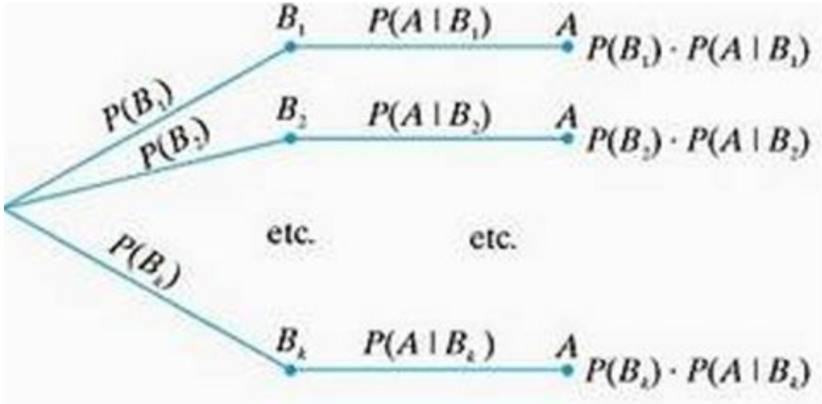
$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{0{,}2475}{0{,}3750} = 0{,}66$$

TEOREMA DE BAYES

★ Caso geral, com B1, B2,..... eventos mutuamente excludentes dos quais um deve ocorrer:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_k) \cdot P(A|B_k)}$$

★ Veja que o denominador é P(A), no exemplo anterior utilizamos essa propriedade de maneira indireta.



TEOREMA DE BAYES

★ **Exemplo**: Numa fábrica de enlatados, as linhas de produção I, II e III respondem por 50, 30 e 20% da produção total. Se 0,4% das latas da linha I são lacradas inadequadamente e as percentagens correspondentes às linhas II e III são de 0,6% e 1,2%, qual é a probabilidade de uma lata lacrada impropriamente (descoberta) provir da linha de produção I?

Aqui P(A) = 0,0020 + 0,0018 + 0,0024 = 0,0062, então:

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}0020}{0{,}0062} = 0{,}32$$

EXERCÍCIOS

★ **Lista 2 de Exercícios → Parte 2**

https://drive.google.com/file/d/18qTxOrn2moaKVDZ_E53JSUjHei53ilPp/view?usp=share_link

- Muito obrigado pela atenção!