Estatística e Probabilidade

Bacharelado em Sistemas de Informação

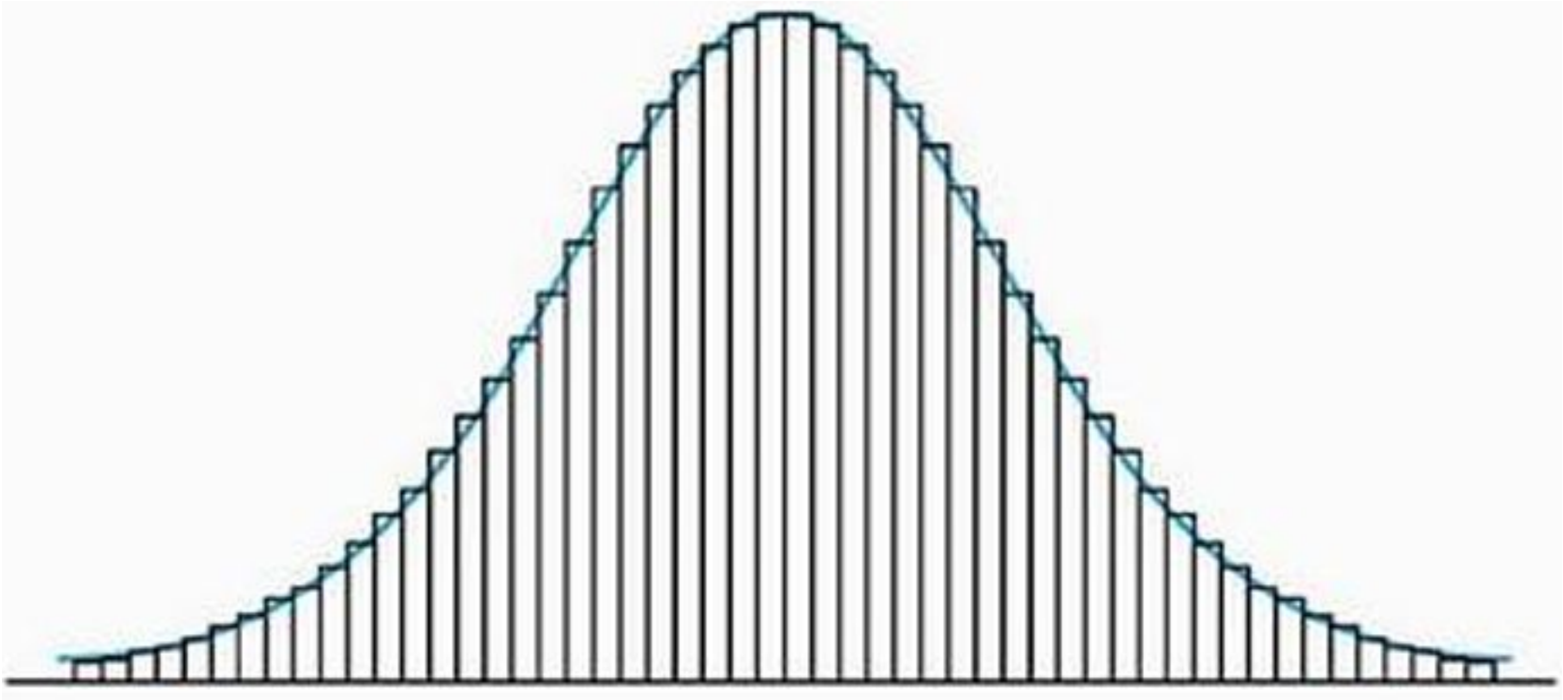
Aula 8: Distribuição Normal

Prof. Dr. Samuel Sanches

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

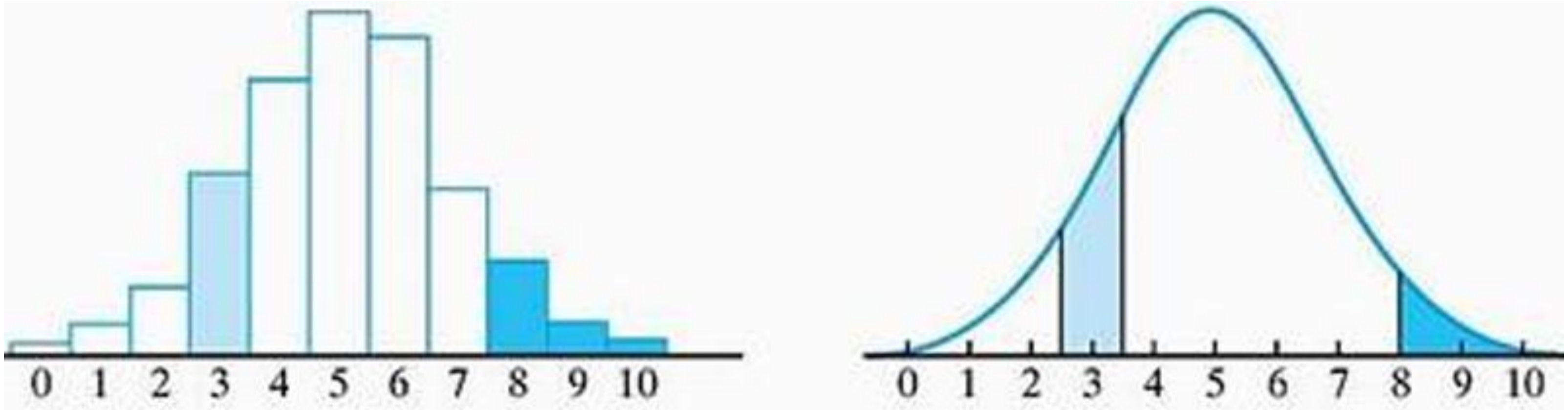
- ★ A temperatura é 38 ºC, arredondada até o grau mais próximo, quer dizer pode estar entre 37,5 e 38,5 ºC.
- ★ A altitude é de 1.100 m, arredondados até os 100 metros mais próximos, quer dizer que pode estar entre 1.050 e 1.150 m.
- ★ Velocidade, massa, concentração, etc.
- ★ Teremos curvas contínuas, que são aproximadas por histogramas com intervalos de classe cada vez menores.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS



DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

★ **Antes**: histogramas → **Agora**: áreas sob curvas contínuas, as densidades de probabilidade ou distribuições contínuas.



★ Lembrando, a área total abaixo da curva tem que ter valor igual a 1.

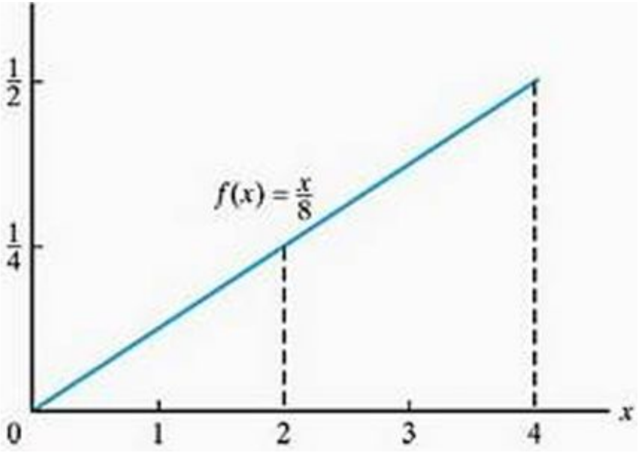
DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

★ **Exemplo**: Verifique que f(x) = x/8 pode ser a densidade de probabilidade de uma variável aleatória definida sobre o intervalo de x = 0 a x = 4.

x/8 não é negativo, no intervalo x = 0 até x = 4 → ok

pelo gráfico vemos que temos um triângulo cuja base é 4 e a altura é 4/8 = 1/2, então a área é (base)*(altura)/2 = (4)*(1/2)/2 = 1 → ok

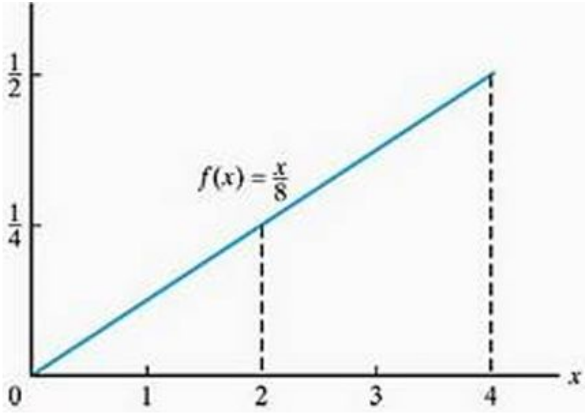
pode ser densidade de probabilidade!



DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

★ **Exemplo**: Com f(x) = x/8, encontre as probabilidades de uma variável aleatória vá tomar um valor: **a)** menor do que 2; **b)** menor do que ou igual a 2.

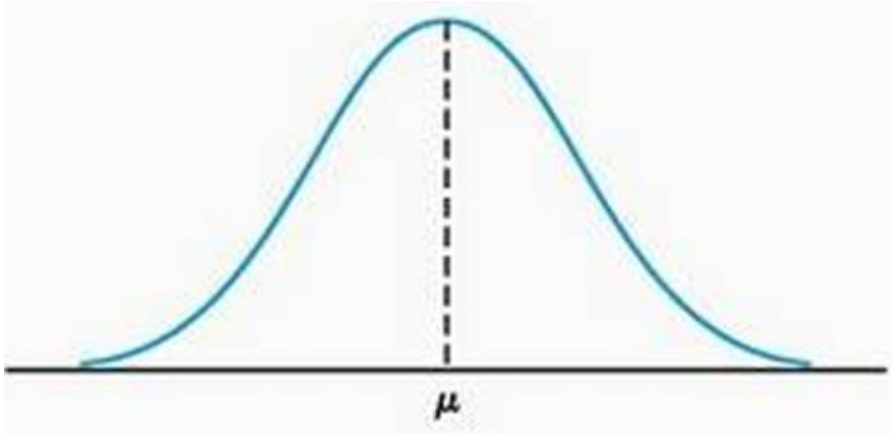
a) é a área do triângulo até x = 2 (linha tracejada) base 2 e altura 2/8 = 1/4, então (2)*(1/4)/2 = 1/4 = 0,25



b) A probabilidade é a mesma da parte **a)**, 1/4 = 0,25

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

- ★ Informações relevantes para distribuições contínuas:
- ★ Média → é uma medida do seu centro, ou meio
- ★ Desvio-padrão → é uma medida de sua dispersão, ou espalhamento



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ Uma das mais importantes (muito usada), devido a regularidade sobre os erros de mensuração, anteriormente chamada “curva normal dos erros” que era atribuída às leis do acaso:

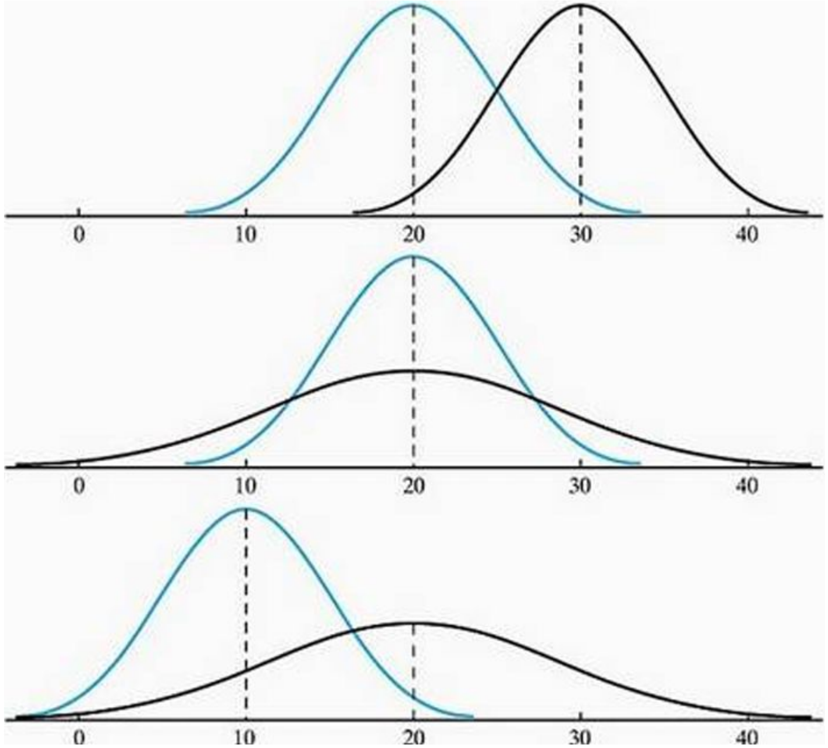
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

★ Agora os valores de x podem ser de -∞ até +∞.

★ Curva em formato de sino, prolonga-se indefinidamente em ambas direções, vai se aproximando do eixo horizontal, mas nunca irá tocá-lo, só quando chegar ao infinito, ou seja, nunca.

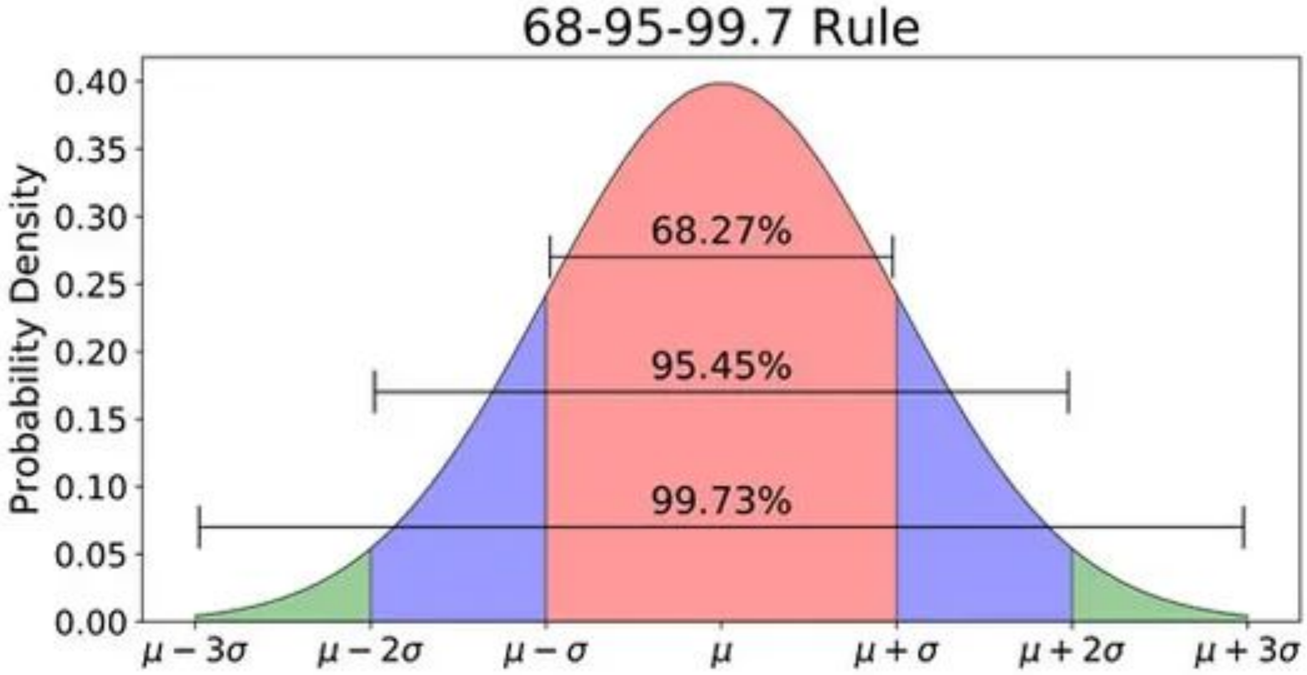
DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ Depende somente da média μ e do desvio-padrão σ.



★ Distribuição normal animada
https://www.geogebra.org/m/nrgtzj5a
https://www.t-ott.dev/2021/11/24/animating-normal-distributions

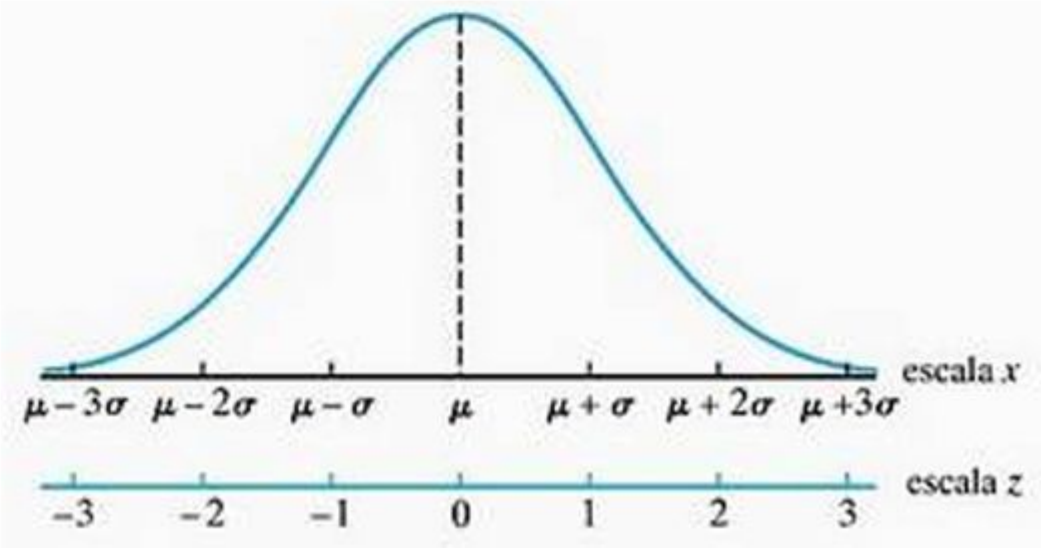
DISTRIBUIÇÃO NORMAL



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

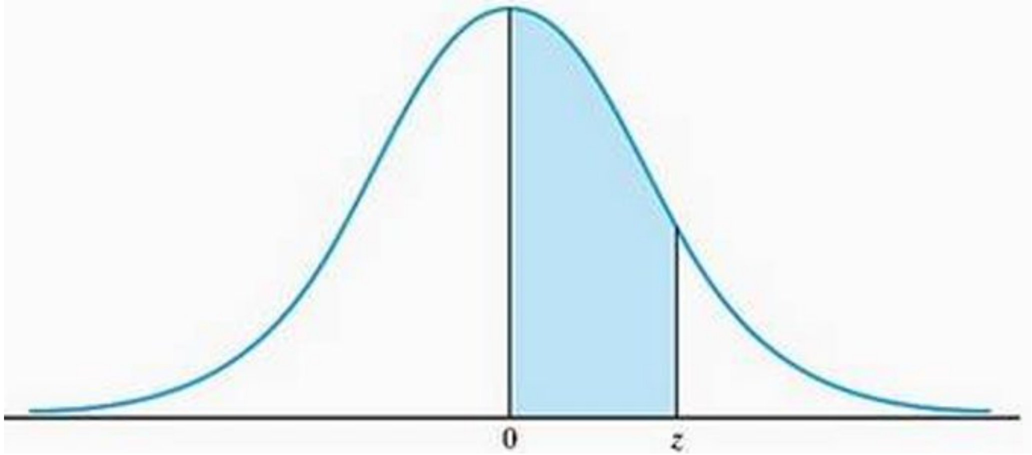
★ Unidades padronizadas (escala z): $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

★ Informa a quantos desvios-padrão o valor correspondente de x está acima ou abaixo da média.



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ Valores (podem ser calculados), são tabelados, por exemplo queremos a área abaixo da curva da média até um valor de z (veja que para o lado esquerdo vale o mesmo, já que temos uma simetria).

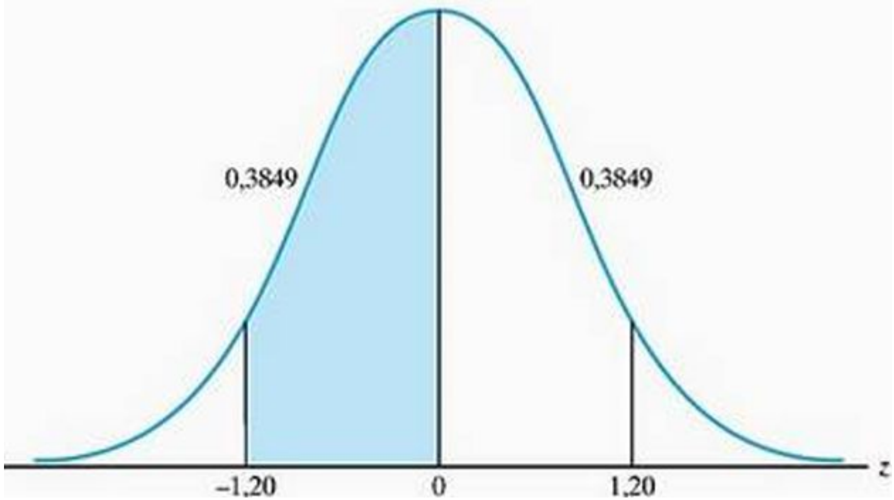


https://professorguru.com.br/wa_files/tabelas-normal-padrao-de-0-a-z.pdf
https://onlinestatbook.com/2/calculators/normal_dist.html

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ **Exemplo**: Encontre a área sob a curva normal padrão entre z = -1,20 e z = 0.

de z = -1,20 até z = 0 é o igual de z = 0 até z = 1,20, então podemos procurar o valor de z = 1,20 na tabela, temos 0,3849



https://professorguru.com.br/wa_files/tabelas-normal-padrao-de-0-a-z.pdf
https://onlinestatbook.com/2/calculators/normal_dist.html

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

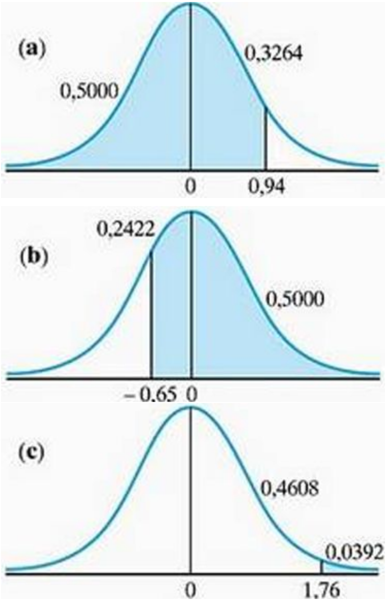
★ **Exemplo**: Encontre a área sob a curva normal padrão: **a)** à esquerda de z = 0,94; **b)** à direita de z = -0,65; **c)** à direita de z = 1,76; **d)** à esquerda de z = -0,85; **e)** entre z = 0,87 e z = 1,28; **f)** entre z = -0,34 e z = 0,62.

lembrar da simetria!

a) Área à esquerda de z = 0,94 é 0,5000 mais o valor da tabela a z = 0,94, ou 0,5000 + 0,3264 = 0,8264

b) Área à direita de z = -0,65 é 0,5000 mais o valor da tabela a z = 0,65, ou 0,5000 + 0,2422 = 0,7422

c) Área à direita de z = 1,76 é 0,5000 menos o valor da tabela a z = 1,76, ou 0,5000 - 0,4608 = 0,0392



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

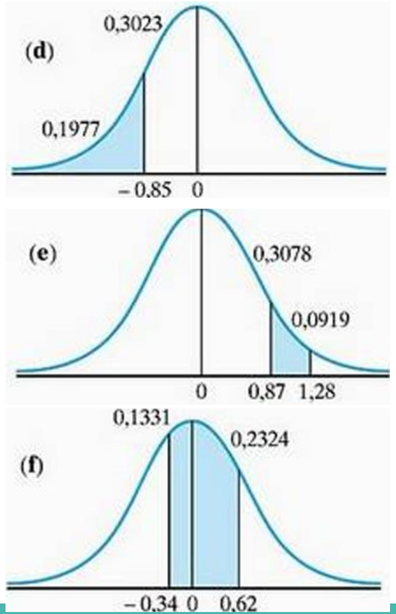
★ **Exemplo**: Encontre a área sob a curva normal padrão: **a)** à esquerda de z = 0,94; **b)** à direita de z = -0,65; **c)** à direita de z = 1,76; **d)** à esquerda de z = -0,85; **e)** entre z = 0,87 e z = 1,28; **f)** entre z = -0,34 e z = 0,62.

lembrar da simetria!

d) Área à esquerda de z = -0,85 é 0,5000 menos o valor da tabela a z = 0,85, ou 0,5000 - 0,3023 = 0,1977

e) Área entre z = 0,87 e 1,28 é a diferença entre os valores de z = 0,87 e z = 1,28, ou 0,3997 - 0,3078 = 0,0919

f) Área entre z = -0,34 e 0,62 é a soma dos valores de z = 0,34 e z = 0,62, ou 0,1331 + 0,2324 = 0,3655

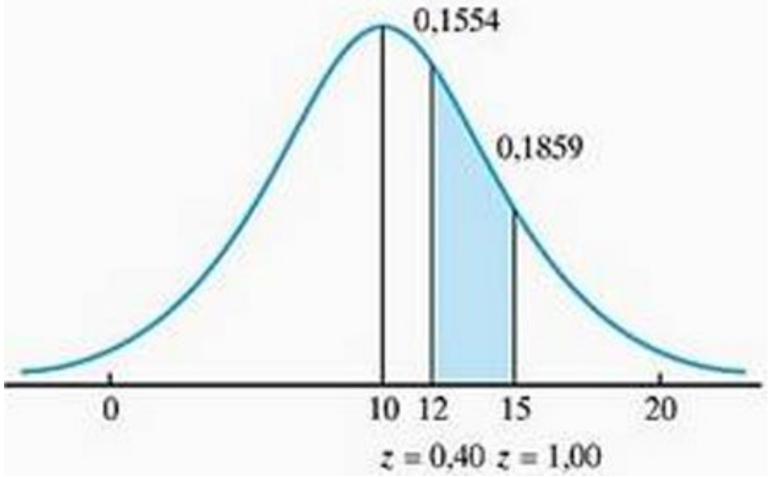


DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ **Exemplo**: Se uma variável aleatória tem a distribuição normal com μ = 10 e σ = 5, qual é a probabilidade de que vá tomar um valor no intervalo de 12 a 15?

transformar x = 12 e x = 15 em unidades padronizadas

$$z = \frac{12 - 10}{5} = 0{,}40 \quad \text{e} \quad z = \frac{15 - 10}{5} = 1{,}00$$



pela tabela z = 0,40 → 0,1554 e
z = 1,00 → 0,3413, então 0,3413 - 0,1554 = 0,1859

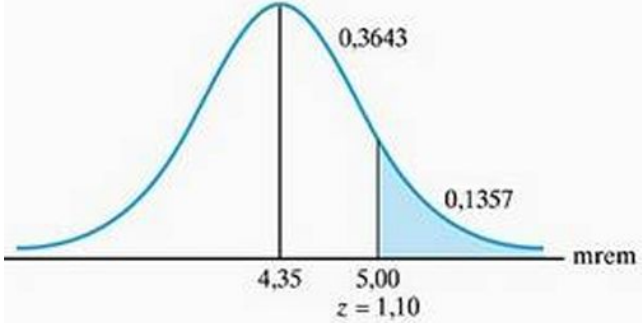
APLICAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ **Exemplo**: Se a quantidade de radiação cósmica a que uma pessoa está exposta enquanto atravessar o território dos EUA de avião é uma variável aleatória de distribuição normal com μ = 4,35 mrem e σ = 0,59 mrem, encontre as probabilidades de que uma pessoa num tal voo esteja exposta a: **a)** mais de 5,00 mrem de radiação cósmica; **b)** alguma quantidade de 3,00 a 4,00 mrem de radiação cósmica.

a) escala z, e então maior que o valor:

$$z = \frac{5,00 - 4,35}{0,59} \approx 1,10$$

pela tabela, z = 1,10 → 0,3646, então:
0,5000 - 0,3646 = 0,1357



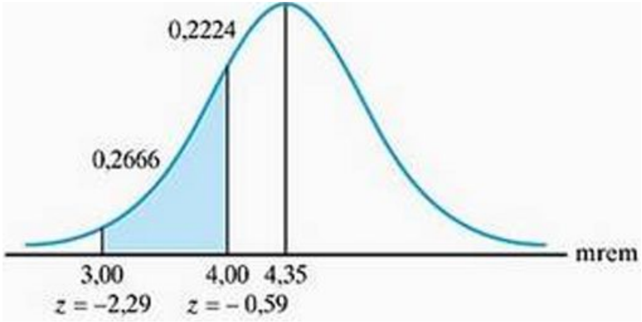
APLICAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ **Exemplo**: Se a quantidade de radiação cósmica a que uma pessoa está exposta enquanto atravessar o território dos EUA de avião é uma variável aleatória de distribuição normal com $\mu = 4{,}35$ mrem e $\sigma = 0{,}59$ mrem, encontre as probabilidades de que uma pessoa num tal voo esteja exposta a: **a)** mais de 5,00 mrem de radiação cósmica; **b)** alguma quantidade de 3,00 a 4,00 mrem de radiação cósmica.

b) escala z, e então entre os valores:

$$z = \frac{3{,}00 - 4{,}35}{0{,}59} \approx -2{,}29 \quad \text{e} \quad z = \frac{4{,}00 - 4{,}35}{0{,}59} \approx -0{,}59$$

pela tabela, $z = 2{,}29 \rightarrow 0{,}4890$ e $z = 0{,}59 \rightarrow 0{,}2224$, então: $0{,}4890 - 0{,}2224 = 0{,}2666$

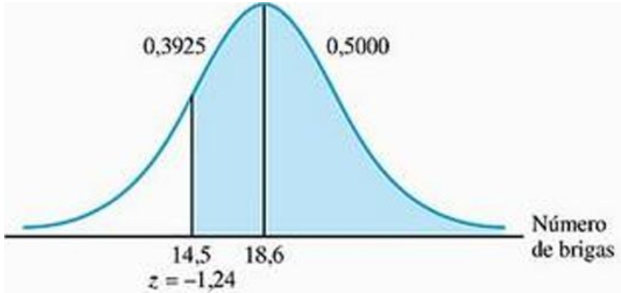


APLICAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

- ★ **Exemplo**: Um estudo com camundongos, observou que ao retornar ao grupo estes tiveram em média 18,6 brigas nos primeiros cinco minutos com desvio-padrão de 3,3 brigas. Admitindo ser normal, qual é a probabilidade de que se envolva em pelo menos 15 brigas?

escala z, e então maior que o valor, pela aproximação (número inteiro) temos que usar 14,5 e não 15:

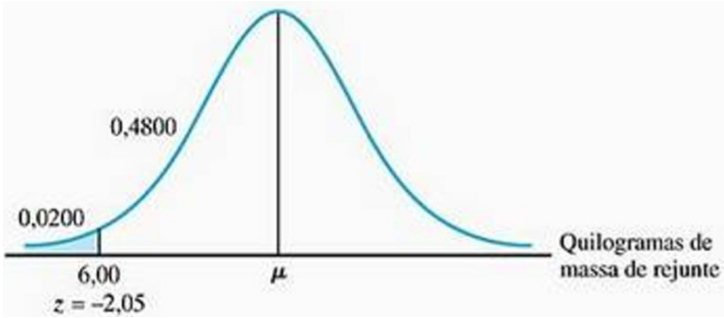
$$z = \frac{14{,}5 - 18{,}6}{3{,}3} \approx -1{,}24$$



pela tabela, z = 1,24 → 0,3925,
então: 0,5000 + 0,3925 = 0,8925

APLICAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

★ **Exemplo**: Uma máquina deposita 6 kg de massa de rejunte na embalagem, com pouca variação, admitindo ser normal com σ = 0,04 kg. Se apenas 2% podem conter menos do que 6 kg, qual deve ser a média depositada?



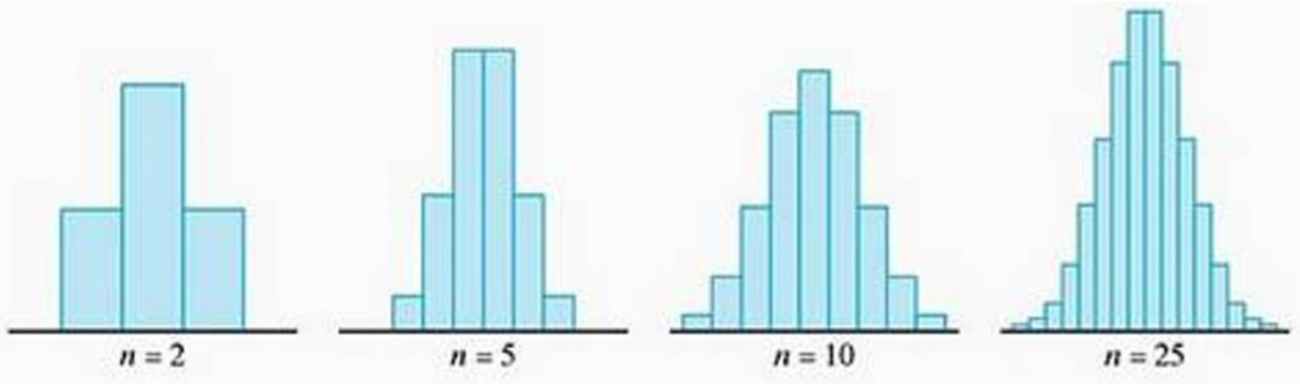
nos informa σ = 0,04 e x = 6,00 e é menor que, aqui devemos fazer metade curva subtraído 2% → 0,5000 - 0,0200 = 0,4800, pela tabela, o valor mais próximo é para z = 2,05 (0,4798), então:

$$-2,05 = \frac{6,00 - \mu}{0,04}$$

resolvendo para a média: μ = 6,082 ≅ 6,08

APROXIMAÇÃO NORMAL DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

★ Quando **n** é grande e **p** é próximo de 1/2, podemos ter uma boa aproximação, os histogramas tem n = 2, 5, 10 e 25 com p = 1/2:



★ É considerada prática segura utilizar a aproximação normal da distribuição binomial somente quando **n*p** e **n*(1 - p)** forem ambos maiores do que 5:

$$np > 5 \text{ e } n(1 - p) > 5$$

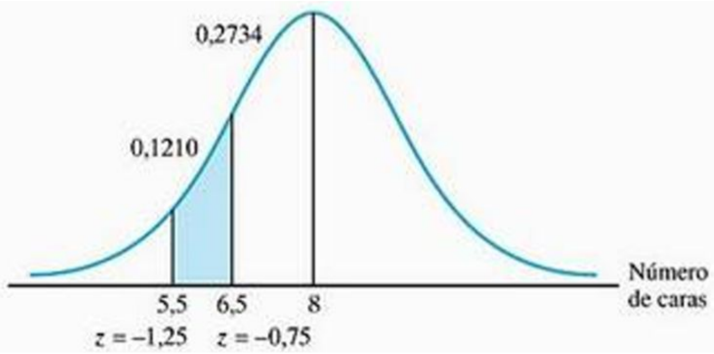
APROXIMAÇÃO NORMAL DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

★ **Exemplo**: Use a distribuição normal para aproximar a probabilidade binomial de obter 6 caras e 10 coroas em 16 lançamentos de uma moeda equilibrada, compare o resultado com o resultado da binomial.

n = 16 e p = 1/2, n*p = 16*(1/2) = 8 e n*(1 - p) = 16*(1-1/2) = 8 → ok

μ = n*p = 8 e σ = √(16*(1/2)*(1 - 1/2)) = 2, como 6 é um inteiro, o intervalo é de 5,5 até 6,5:

$$z = \frac{5{,}5 - 8}{2} = -1{,}25 \quad \text{e} \quad z = \frac{6{,}5 - 8}{2} = -0{,}75$$

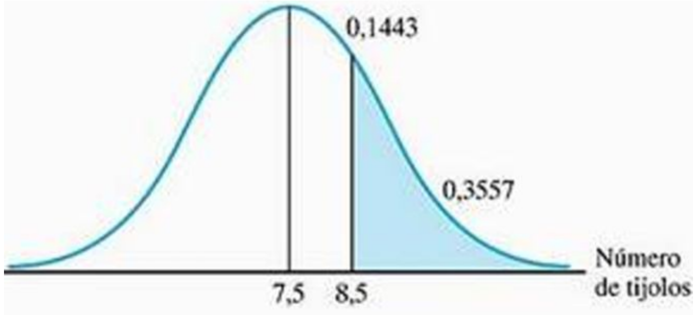


z = 1,25 →0,3944 e z = 0,75 → 0,2734: 0,3944 - 0,2734 = 0,1210

Binomial fornece: 0,122, ou seja, erro percentual: (0,1210 - 0,1220)/(0,1220) = 0,0082 → 0,82%

APROXIMAÇÃO NORMAL DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

★ **Exemplo**: 5% dos tijolos apresentam defeitos. Com a distr normal da distr binomial, encontre a probabilidade de que dentre 150 tijolos, pelo menos 9 tenham defeitos.



n = 150 e p = 0,05, n*p = 150*(0,05) = 7,5 e n*(1 - p) = 150*(1 - 0,05) = 142,5 → ok

μ = n*p = 7,5 e σ = √(150*(0,05)*(1 - 0,05)) ≅ 2,67, como 9 é um inteiro, queremos mais que 8,5:

$$z = \frac{8{,}5 - 7{,}5}{2{,}67} \approx 0{,}37$$

z = 0,37 →0,1443: 0,5000 - 0,1443 = 0,3557

Binomial fornece: 0,3361, erro percentual: (0,3557 - 0,3361)/(0,3361) = 0,058 → 5,8%

APROXIMAÇÃO NORMAL DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

★ **Exemplo**: 5% dos tijolos apresentam defeitos. Com a distr normal da distr binomial, encontre a probabilidade de que dentre 150 tijolos, pelo menos 9 tenham defeitos.

Binomial fornece: 0,3361, erro percentual: (0,3557 - 0,3361)/(0,3361) = 0,058 → 5,8%

Erro considerável!

Devido p muito pequeno!!

A probabilidade de 1 tijolo com problema dentre 150, fornece um erro maior que 100%!!!!!!!!!!

Devemos usar, mas com cautela!!!!!!!!!!!!

EXERCÍCIOS

- **Lista 3 de Exercícios → Parte 2**

  https://drive.google.com/file/d/10ylLX1TlonqhsQtK-8udbR5RyNYMlPB0/view?usp=share_link

- ★ Muito obrigado pela atenção!