

Analisis de Fractura de Roca

Reporte de Resultados

Estudiante: Hazel Shamed Sánchez Chávez
Profesor: Dr. Hector Gabriel Salazar Pedroza

Resumen

1. Introducción

2. Planteamiento de hipótesis

Las ecuaciones fundamentales que describen ondas generadas por un impacto fuerte y rápido en una roca y por qué producen patrones elípticos o circulares.

2.1. Ecuación de onda elastodinámica

Un impacto fuerte sobre una roca genera ondas que se propagan como deformaciones en un medio sólido. La ecuación general que describe esto es la **ecuación de Navier–Cauchy**:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F},$$

donde,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix}$$

es el campo de desplazamientos; ρ , densidad de la roca; λ y μ , constantes de Lamé (rigidez); y \mathbf{F} la fuerza impulsiva del impacto.

La ecuación anterior describe la dinámica de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Esta se deduce combinando la *Ley de Hooke generalizada para medios isótropos* y *Ecuación de movimiento (Ley de Newton)*

- **Ley de Hooke generalizada para medios isótropos:** Para un material elástico lineal isótropo, el tensor de tensiones σ_{ij} se relaciona con el tensor de deformaciones infinitesimales ϵ_{ij} mediante los coeficientes de Lamé λ y μ de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij},$$

donde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

es el tensor de deformación, $\epsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ es la traza del tensor de deformación) y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

- **Ecuación de movimiento (Ley de Newton):** Para un elemento de volumen, la segunda ley de Newton en forma diferencial (ecuación de Cauchy) es

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i$$

donde F_i son las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de volumen. En notación vectorial

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}$$

Ahora, calculamos la divergencia del tensor de tensiones

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \epsilon_{kk}) + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

Desarrollando tenemos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \epsilon_{kk}) = \lambda \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad \text{y} \quad 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left(\nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right).$$

Entonces,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

y en notación vectorial

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Por lo tanto,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

Podemos interpretar a $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ como la fuerza de inercia por unidad de volumen; a $(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$ como la fuerza elástica debida a compresiones/dilataciones; $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ es la fuerza elástica debida a deformaciones de corte; y \mathbf{F} son fuerzas externas por unidad de volumen (gravedad, fuerzas sísmicas, etc.).

Por otro lado, si $\mathbf{F} = 0$ y se busca soluciones de onda, se obtienen dos modos independientes:

- Ondas P (Primarias/Compresionales):

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Velocidad: $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. Estas ondas son longitudinales (vibración en la dirección de propagación).

- Ondas S (Secundarias/Cortantes):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Velocidad: $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Estas ondas son transversales (vibración perpendicular a la dirección de propagación).

La Ecuación de Navier-Cauchy es fundamental en la mecánica de sólidos elásticos, describiendo cómo se mueven y deforman bajo fuerzas, relacionando desplazamiento, densidad y tensión, siendo clave para la elastodinámica (movimiento) y la elastostática (equilibrio) de materiales. Es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que, en su forma general para sólidos elásticos, vinculan el desplazamiento con las fuerzas y la geometría del material, utilizando módulos de elasticidad como los de Lamé, y sirve como base para entender la propagación de ondas elásticas.

La ecuación combina la *ley de Newton (inercia)* con la *ley de Hooke (elasticidad)* en un medio continuo. Los términos elásticos representan dos mecanismos de restauración: uno por cambio de volumen ($\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$) y otro por distorsión de forma ($\nabla^2 \mathbf{u}$). Esto explica por qué en sólidos existen dos tipos de ondas (P y S) con velocidades diferentes, mientras que en fluidos (donde $\mu = 0$) solo existen ondas P.

2.1.1. Ecuación de onda para un impacto impulsivo

Por simplicidad consideremos que un impacto se da en punto $\mathbf{0}$ (el origen) en el instante $t = 0$, para cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ consideremos $r_{\mathbf{x}} := \|\mathbf{x}\|$. Sea δ la delta de Dirac y \mathbf{F}_0 la fuerza del impacto fuerte. La fuerza del impacto por unidad de volumen se modela de la forma

$$\mathbf{F}(r_{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}_0 \delta(r_{\mathbf{x}}) \delta(t).$$

Es decir, la fuerza \mathbf{F}_0 concentrada en un punto ($\delta(r)$) y muy breve en el tiempo ($\delta(t)$). Podemos escribir la ecuación de Navier-Cauchy como

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_0 \delta(r_{\mathbf{x}}) \delta(t)$$

2.2. Solución fundamental para un medio infinito

Para resolver este problema, es conveniente introducir el concepto de *función de Green dinámica* para el operador de Navier-Cauchy.

Buscamos una solución fundamental $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ que sea un tensor de segundo orden (3×3), que represente el desplazamiento en la dirección i debido a una fuerza puntual unitaria aplicada en la dirección j . Matemáticamente, $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ satisface

$$\rho \frac{\partial^2 G_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{G}_j) + \mu \nabla^2 G_{ij}(\mathbf{x}, t) + \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

donde \mathbf{G}_j es la j -ésima columna de \mathbf{G} , o equivalentemente en notación vectorial:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mu \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{I} \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

con condiciones iniciales de reposo

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

Una vez encontrada \mathbf{G} , la solución para nuestro impacto con fuerza \mathbf{F}_0 es simplemente:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{F}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \cdot \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x}') \delta(t') d\mathbf{x}' dt'.$$

Aplicando la transformada de Fourier espacial $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$, la ecuación se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo para cada modo \mathbf{k} .

Más directamente, se proyecta $\hat{\mathbf{G}}$ en componentes longitudinal (P) y transversal (S):

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}_P + \hat{\mathbf{G}}_S, \quad \text{donde } \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{G}}_P = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}}_S = 0.$$

Esto lleva a dos ecuaciones desacopladas:

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{G}}_P}{\partial t^2} = -(\lambda + 2\mu) k^2 \hat{\mathbf{G}}_P + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \delta(t) \quad \text{y} \quad \rho \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{G}}_S}{\partial t^2} = -\mu k^2 \hat{\mathbf{G}}_S + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \delta(t),$$

donde $k = |\mathbf{k}|$, y $\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}$ es el proyector en la dirección de \mathbf{k} .

Resolviendo las EDOs anteriores (osciladores armónicos forzados por un delta) y antitransformando, se obtiene la famosa *solución de Stokes* para la función de Green en un medio infinito, homogéneo e isótropo

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_p^2 r} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \delta \left(t - \frac{r}{c_p} \right) + \frac{1}{c_s^2 r} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}) \delta \left(t - \frac{r}{c_s} \right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{H} \left(t - \frac{r}{c_p}, t - \frac{r}{c_s} \right) \right\} H(t),$$

donde:

- $r = |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r$ es el vector unitario radial.
- $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$ es el diádico o producto tensorial (una matriz 3×3 con componentes $\hat{x}_i\hat{x}_j$).
- $H(t)$ es la función escalón de Heaviside, que garantiza causalidad (no hay señal antes del impacto en $t = 0$).
- El tensor $\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$ es el proyector en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{x}}$.
- La función tensorial \mathbf{H} representa los *términos de campo cercano (near-field)*, que no son impulsivos (como las deltas) sino que tienen una duración finita ($\frac{r}{c_s} - \frac{r}{c_p}$) y decaen como $1/r^3$. Su expresión explícita es

$$\mathbf{H}(\tau_p, \tau_s) = [3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I}] \int_{\tau_s}^{\tau_p} \tau \delta(t - \tau) d\tau = (3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I}) [t(H(t - \tau_s) - H(t - \tau_p))] \text{ evaluado para } \tau_p = r/c_p, \tau_s = r/c_s.$$

En la práctica, \mathbf{H} aporta una señal transitoria que ocurre entre la llegada de las ondas P y S.

Por lo tanto, dada la fuerza impulsiva $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x}) \delta(t)$ y la función de Green $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ derivada anteriormente, la solución explícita para el campo de desplazamientos es

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{F}_0 = \frac{H(t)}{4\pi\rho} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_0}{c_p^2 r} \delta\left(t - \frac{r}{c_p}\right) + \frac{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{F}_0}{c_s^2 r} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{H}\left(t - \frac{r}{c_p}, t - \frac{r}{c_s}\right) \cdot \mathbf{F}_0 \right]$$

Durante las simulaciones se observó un comportamiento circular que no encaja con nuestros patrones obtenidos en rocas.

2.3. Solución con condiciones iniciales y de frontera

\mathbf{u}

Nuestros calcos son los siguientes

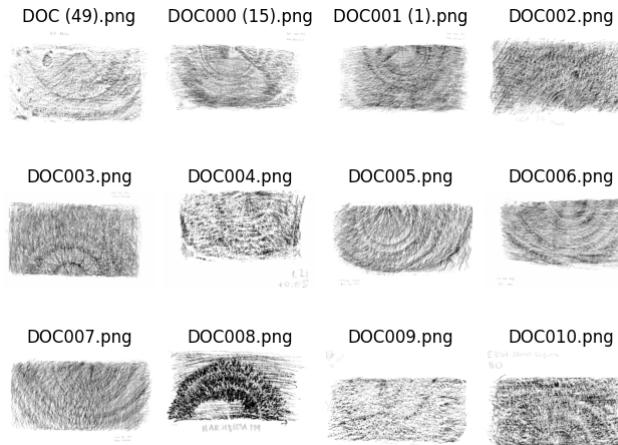


Figura 1: Enter Caption

Queremos ver si a través de considerar condiciones frontera (ya que las lozas son rectangulares) los patrones obtenidos se comportan siguiendo esta ecuación.

Consideremos una losa rectangular de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$, con un impacto en la posición $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$. La ecuación gobernante es

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t)$$

con condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$$

y condiciones de frontera en las seis caras del dominio.