

# Analisis de Fractura de Roca

## Reporte de Resultados

---

---

Estudiante: Hazel Shamed Sánchez Chávez  
Profesor: Dr. Hector Gabriel Salazar Pedroza

---

---

### Resumen

## 1. Introducción

## 2. Planteamiento de hipótesis

Las ecuaciones fundamentales que describen ondas generadas por un impacto fuerte y rápido en una roca y por qué producen patrones elípticos o circulares.

### 2.1. Ecuación de onda elastodinámica

Un impacto fuerte sobre una roca genera ondas que se propagan como deformaciones en un medio sólido. La ecuación general que describe esto es la **ecuación de Navier–Cauchy**:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F},$$

donde,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix}$$

es el campo de desplazamientos;  $\rho$ , densidad de la roca;  $\lambda$  y  $\mu$ , constantes de Lamé (rigidez); y  $\mathbf{F}$  la fuerza impulsiva del impacto.

La ecuación anterior describe la dinámica de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Esta se deduce combinando la *Ley de Hooke generalizada para medios isótropos* y *Ecuación de movimiento (Ley de Newton)*

- **Ley de Hooke generalizada para medios isótropos:** Para un material elástico lineal isótropo, el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  se relaciona con el tensor de deformaciones infinitesimales  $\epsilon_{ij}$  mediante los coeficientes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$  de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij},$$

donde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

es el tensor de deformación,  $\epsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$  es la traza del tensor de deformación) y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

- **Ecuación de movimiento (Ley de Newton):** Para un elemento de volumen, la segunda ley de Newton en forma diferencial (ecuación de Cauchy) es

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i$$

donde  $F_i$  son las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de volumen. En notación vectorial

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}$$

Ahora, calculamos la divergencia del tensor de tensiones

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \epsilon_{kk}) + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

Desarrollando tenemos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} \epsilon_{kk}) = \lambda \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad \text{y} \quad 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left( \nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right).$$

Entonces,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

y en notación vectorial

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Por lo tanto,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

Podemos interpretar a  $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  como la fuerza de inercia por unidad de volumen; a  $(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$  como la fuerza elástica debida a compresiones/dilataciones;  $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$  es la fuerza elástica debida a deformaciones de corte; y  $\mathbf{F}$  son fuerzas externas por unidad de volumen (gravedad, fuerzas sísmicas, etc.).

Por otro lado, si  $\mathbf{F} = 0$  y se busca soluciones de onda, se obtienen dos modos independientes:

- Ondas P (Primarias/Compresionales):

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Velocidad:  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ . Estas ondas son longitudinales (vibración en la dirección de propagación).

- Ondas S (Secundarias/Cortantes):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Velocidad:  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . Estas ondas son transversales (vibración perpendicular a la dirección de propagación).

La Ecuación de Navier-Cauchy es fundamental en la mecánica de sólidos elásticos, describiendo cómo se mueven y deforman bajo fuerzas, relacionando desplazamiento, densidad y tensión, siendo clave para la elastodinámica (movimiento) y la elastostática (equilibrio) de materiales. Es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que, en su forma general para sólidos elásticos, vinculan el desplazamiento con las fuerzas y la geometría del material, utilizando módulos de elasticidad como los de Lamé, y sirve como base para entender la propagación de ondas elásticas.

La ecuación combina la *ley de Newton (inercia)* con la *ley de Hooke (elasticidad)* en un medio continuo. Los términos elásticos representan dos mecanismos de restauración: uno por cambio de volumen ( $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ ) y otro por distorsión de forma ( $\nabla^2 \mathbf{u}$ ). Esto explica por qué en sólidos existen dos tipos de ondas (P y S) con velocidades diferentes, mientras que en fluidos (donde  $\mu = 0$ ) solo existen ondas P.

### 2.1.1. Ecuación de onda para un impacto impulsivo

Por simplicidad consideremos que un impacto se da en punto  $\mathbf{0}$  (el origen) en el instante  $t = 0$ , para cada punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  consideremos  $r_{\mathbf{x}} := \|\mathbf{x}\|$ . Sea  $\delta$  la delta de Dirac y  $\mathbf{F}_0$  la fuerza del impacto fuerte. La fuerza del impacto por unidad de volumen se modela de la forma

$$\mathbf{F}(r_{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}_0 \delta(r_{\mathbf{x}}) \delta(t).$$

Es decir, la fuerza  $\mathbf{F}_0$  concentrada en un punto ( $\delta(r)$ ) y muy breve en el tiempo ( $\delta(t)$ ). Podemos escribir la ecuación de Navier-Cauchy como

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_0 \delta(r_{\mathbf{x}}) \delta(t)$$

## 2.2. Solución fundamental para un medio infinito

Para resolver este problema, es conveniente introducir el concepto de *función de Green dinámica* para el operador de Navier-Cauchy.

Buscamos una solución fundamental  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  que sea un tensor de segundo orden ( $3 \times 3$ ), que represente el desplazamiento en la dirección  $i$  debido a una fuerza puntual unitaria aplicada en la dirección  $j$ . Matemáticamente,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  satisface

$$\rho \frac{\partial^2 G_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{G}_j) + \mu \nabla^2 G_{ij}(\mathbf{x}, t) + \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

donde  $\mathbf{G}_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{G}$ , o equivalentemente en notación vectorial:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mu \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{I} \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

con condiciones iniciales de reposo

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

Una vez encontrada  $\mathbf{G}$ , la solución para nuestro impacto con fuerza  $\mathbf{F}_0$  es simplemente:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{F}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \cdot \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x}') \delta(t') d\mathbf{x}' dt'.$$

Aplicando la transformada de Fourier espacial  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$ , la ecuación se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo para cada modo  $\mathbf{k}$ .

Más directamente, se proyecta  $\hat{\mathbf{G}}$  en componentes longitudinal ( $P$ ) y transversal ( $S$ ):

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}_P + \hat{\mathbf{G}}_S, \quad \text{donde } \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{G}}_P = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}}_S = 0.$$

Esto lleva a dos ecuaciones desacopladas:

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{G}}_P}{\partial t^2} = -(\lambda + 2\mu) k^2 \hat{\mathbf{G}}_P + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \delta(t) \quad \text{y} \quad \rho \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{G}}_S}{\partial t^2} = -\mu k^2 \hat{\mathbf{G}}_S + \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \delta(t),$$

donde  $k = |\mathbf{k}|$ , y  $\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}$  es el proyector en la dirección de  $\mathbf{k}$ .

Resolviendo las EDOs anteriores (osciladores armónicos forzados por un delta) y antitransformando, se obtiene la famosa *solución de Stokes* para la función de Green en un medio infinito, homogéneo e isótropo

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_p^2 r} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \delta \left( t - \frac{r}{c_p} \right) + \frac{1}{c_s^2 r} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}) \delta \left( t - \frac{r}{c_s} \right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{H} \left( t - \frac{r}{c_p}, t - \frac{r}{c_s} \right) \right\} H(t),$$

donde:

- $r = |\mathbf{x}|$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r$  es el vector unitario radial.
- $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$  es el diádico o producto tensorial (una matriz  $3 \times 3$  con componentes  $\hat{x}_i\hat{x}_j$ ).
- $H(t)$  es la función escalón de Heaviside, que garantiza causalidad (no hay señal antes del impacto en  $t = 0$ ).
- El tensor  $\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$  es el proyector en el plano perpendicular a  $\hat{\mathbf{x}}$ .
- La función tensorial  $\mathbf{H}$  representa los *términos de campo cercano (near-field)*, que no son impulsivos (como las deltas) sino que tienen una duración finita ( $\frac{r}{c_s} - \frac{r}{c_p}$ ) y decaen como  $1/r^3$ . Su expresión explícita es

$$\mathbf{H}(\tau_p, \tau_s) = [3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I}] \int_{\tau_s}^{\tau_p} \tau \delta(t - \tau) d\tau = (3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I}) [t(H(t - \tau_s) - H(t - \tau_p))] \text{ evaluado para } \tau_p = r/c_p, \tau_s = r/c_s.$$

En la práctica,  $\mathbf{H}$  aporta una señal transitoria que ocurre entre la llegada de las ondas P y S.

Por lo tanto, dada la fuerza impulsiva  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x}) \delta(t)$  y la función de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  derivada anteriormente, la solución explícita para el campo de desplazamientos es

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{F}_0 = \frac{H(t)}{4\pi\rho} \left[ \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_0}{c_p^2 r} \delta\left(t - \frac{r}{c_p}\right) + \frac{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{F}_0}{c_s^2 r} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{H}\left(t - \frac{r}{c_p}, t - \frac{r}{c_s}\right) \cdot \mathbf{F}_0 \right]$$

Durante las simulaciones se observó un comportamiento circular que no encaja con nuestros patrones obtenidos en rocas.

### 2.3. Solución con condiciones iniciales y de frontera

$\mathbf{u}$

Nuestros calcos son los siguientes

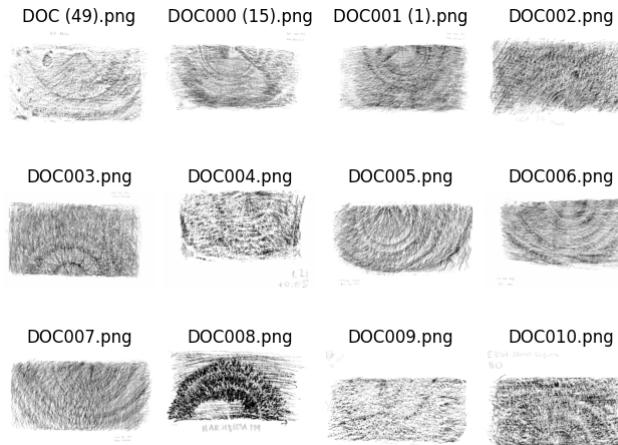


Figura 1: Enter Caption

Queremos ver si a través de considerar condiciones frontera (ya que las lozas son rectangulares) los patrones obtenidos se comportan siguiendo esta ecuación.

Consideremos una losa rectangular de dimensiones  $L_x \times L_y \times L_z$ , con un impacto en la posición  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ . La ecuación gobernante es

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t)$$

con condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$$

y condiciones de frontera en las seis caras del dominio.

### 3. Factorización no negativa de matrices

## 4. Factorización de Matrices No Negativas (NMF)

Dada una matriz no negativa  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times n}$ , NMF busca aproximarla como el producto de dos matrices no negativas:

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{WH}, \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times k}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k \times n}$$

donde  $k \ll \min(m, n)$  es el número de componentes.

### 4.1. Interpretabilidad Aditiva

La restricción de no negatividad es clave para la interpretación física:

- Cada componente  $\mathbf{w}_i$  (columna de  $\mathbf{W}$ ) representa un *patrón base* o *parte* del sistema.
- Las entradas de  $\mathbf{H}$  indican cómo se combinan estos patrones para reconstruir las observaciones.
- La aproximación es puramente *aditiva*:

$$\mathbf{v}_j \approx \sum_{i=1}^k h_{ij} \mathbf{w}_i$$

sin cancelaciones por coeficientes negativos.

Esta propiedad permite interpretar los componentes como características constitutivas de los datos, siendo especialmente útil en imágenes, texto y datos espectrales.