

Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

Aleatório

- Em termos qualitativos, “qualquer coisa” que não seja **previsível com certeza absoluta**
- Acontecimento (evento) cujo **resultado não possa ser determinado com certeza absoluta**
 - Caso contrário é determinístico
- adj. Que repousa sobre um acontecimento **incerto**, fortuito: contrato aleatório.
Diz-se de uma grandeza que pode tomar certo número de valores, a cada um dos quais está ligada uma probabilidade.
 - De: [dicionário online de português](#)
- <http://www.priberam.pt/dlpo/aleat%C3%B3rio>

Probabilidade

“Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso”

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?
- Na maioria das aplicações **existe algum tipo de regularidade** que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

Problema Exemplo 1

- Qual a probabilidade de acertar num PIN/**password** de 4 dígitos escolhendo um PIN completamente ao acaso?

E de 20 dígitos ?

Experiência aleatória ...

- **Experiência aleatória**
 - Procedimento que deve produzir um resultado
 - Mas mesmo que seja **repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico**
 - Resultado imprevisível
 - **Exemplo:**
 - Escolher aleatoriamente uma letra do alfabeto

Experiência aleatória ...

- A uma **experiência aleatória** são associados
 - Espaço de amostragem (conj. de resultados possíveis)
 - Conjunto de **acontecimentos (ou eventos)**
 - Lei de probabilidade

Espaço de amostragem

- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória
 - Em geral representado por S (do inglês “Sample Space”)
- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis
- Discreto se for contável
 - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- Contínuo se não for contável
- Elementos de S são designados por resultados elementares

Acontecimentos / eventos

- Os resultados elementares das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nas experiências
 - Exemplo:
 - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar ($n^o > L$)
- **Acontecimento (evento)** A é um subconjunto de S
 - S é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
 - O conjunto vazio, ϕ , também é subconjunto e representa o evento impossível

Lei de probabilidade

- **Atribui probabilidade aos vários eventos**
- **Probabilidade:** número associado a um evento
 - que indica a “verosimilhança” de esse evento ocorrer quando se efetua a experiência
 - **valor entre 0 e 1** (às vezes é usada a escala 0 a 100%)
 - 1 para acontecimento certo
 - 0 para acontecimento impossível

Cálculo de probabilidades

Como é que se definem/obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de **medição**
- Através da construção de **modelos** probabilísticos
- Probabilidades **teóricas**
- Probabilidades **empíricas**
- Probabilidades subjetivas
 - Exemplo:
 - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
 - Uma casa de apostas estimou em 1/5 a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
 - E fomos Campeões 😊
 - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria **clássica** (de Laplace)
 - Probabilidades teóricas
- **Frequencista**
 - Probabilidades empíricas
- Teoria **matemática**

Teoria Clássica

Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- *“Pour étudier un phénomène, il faut réduire tous les événements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d’un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l’événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles”*
 - pg 17 livro “O Acaso”
- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **“casos”, igualmente prováveis**

$$P(\text{acontecimento}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Exemplo



- **Lançamento de 1 DADO**
 - Honesto
 - \Rightarrow qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?
- 6 resultados ou eventos elementares
 - Representáveis pelo conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$
- Ao evento “saída da face 5” apenas corresponde um caso favorável
 - $\rightarrow P(\text{“face 5”})=1/6$

Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?
- Espaço de amostragem ?
 - $S=\{1,2,3,4,5\}$? \Rightarrow casos possíveis =5 ?
 - $S=\{1,2,3,4,5,5\}$
- $P(\text{“sair 5”})=2/6$

Regras básicas (**OU**)

- $P(\text{"sair face maior que 4"}) ?$
 $= P(\text{"sair face 5 ou face 6"}) = P(\{5,6\}) = 2/6$
 $= P(\{5\}) + P(\{6\})$
- $P(\text{"face par"}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 1/2$
- $P(\text{"qualquer face"}) = 6 \times 1/6 = 1$

... $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sempre ???

Regras básicas

- $P(\text{"face menor ou igual a 4"})$
 $= 1 - P(\text{"face maior que 4"})$
 $= 1 - 2/6 = 4/6$

Regra do **complemento**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Regras básicas (E)

- $P(\text{"face par E face menor ou igual a 4"}) =$
 $= P(\text{"face par"}) \times P(\text{"face menor ou igual a 4"})$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

... $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Sempre?

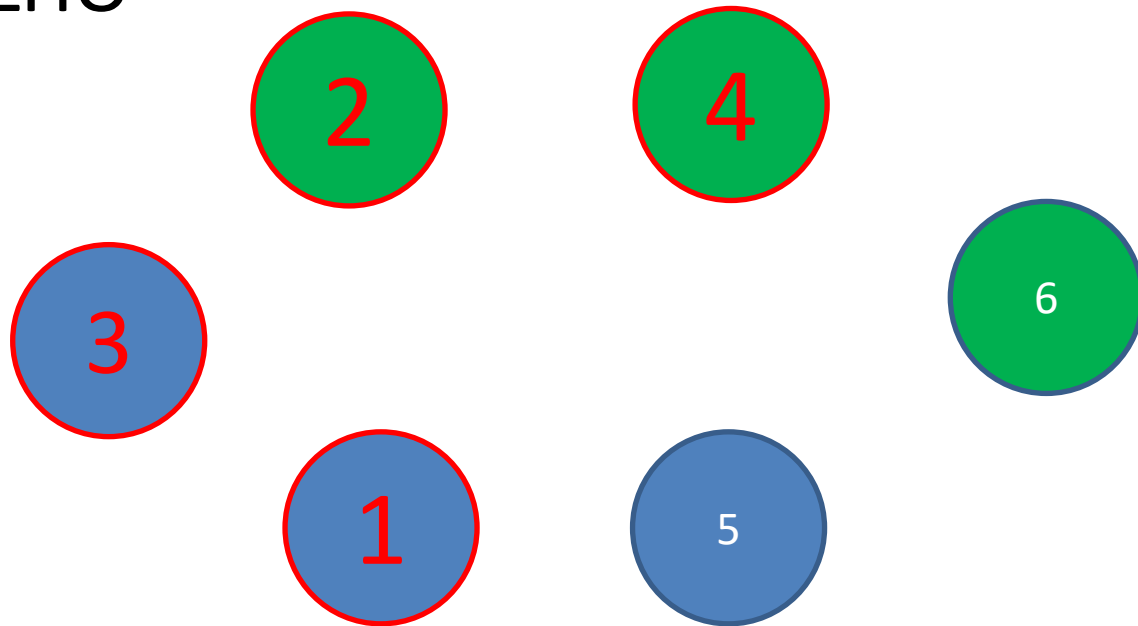
(só se os acontecimentos forem independentes)

Aplicação das regras (OU novamente)

- $P(\text{"face par OU face menor ou igual a 4"}) = ?$
- Se fizermos $P(\text{"face par"}) + P(\text{"face menos ou igual a 4"})$ dá $7/6 > 1$!!
- Qual o erro ?

Acontecimentos

- A=“face par” e fundo VERDE
- B=“face menor ou igual a 4” limite e texto a VERMELHO



...

Temos 3 com fundo verde $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Temos 4 com vermelho $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

... mas temos 2 casos com fundo verde e limite e texto vermelho

– No mínimo perigoso 😊

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Testando as regras ...



- Considere uma **família com 2 filhos** e que a probabilidade de nascer um rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?
- Qual a **probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos** ?



Resolução

- Pelo menos 1 rapaz \Rightarrow MF ou FM ou MM
- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo $= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
- Similar para MM e FM
- $P(MF) + P(MM) + P(FM) = \frac{3}{4}$
 - Devido à união (“ou”)

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, **equiprobabilidade para os eventos elementares**
- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

Simple mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
 - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
 - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
 - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
 - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
 - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
 - Como se lida com medições sujeitas a erro ?