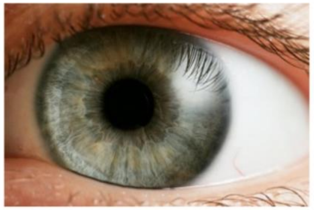
# MPEI 2023-2024

Variáveis aleatórias multidimensionais

# Motivação

- Trabalhamos frequentemente com grupos de variáveis relacionadas

120 million photoreceptors



256 EEG sensors

- Exemplo:
  - Peso e altura das pessoas
  - 256 valores medidos por sensores ECG

# Variáveis aleatórias multidimensionais

- Frequentemente temos situações em que os resultados possíveis são conjuntos de várias variáveis aleatórias, *X1, X2*,...

- Dois tipos de casos:
  - Experiência aleatória produz várias saídas
  - Repetições da experiência aleatória (com uma única saída)

- A um vector n-dimensional em que as componentes são as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ chama-se **vector aleatório** ou v.a. Vectorial

$$\mathbf{X} = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n)$$

# Vector aleatório

- **Um vector aleatório** $X$ é uma função que atribui um vector de números reais a todos os resultados $\zeta$ no espaço de amostragem da experiência aleatória $S$

- Exemplo: $\mathbf{X} = (H \quad W \quad A)$ com

$$H(\zeta) = \text{altura do estudante } \zeta \text{ em metros,}$$
$$W(\zeta) = \text{peso do estudante } \zeta \text{ em Kg, e}$$
$$A(\zeta) = \text{idade do estudante } \zeta \text{ em anos.}$$

# Como caracterizar estas variáveis aleatórias com n-dimensões ?

# Funções de distribuição conjuntas

- Para situações envolvendo 2 ou mais variáveis, definem-se, estendendo as definições para uma variável:
  - Função massa de probabilidade conjunta
  - Função de distribuição cumulativa conjunta
  - Função de densidade de probabilidade conjunta

# Função massa de probabilidade conjunta

- Para duas variáveis discretas, *X* e *Y*:

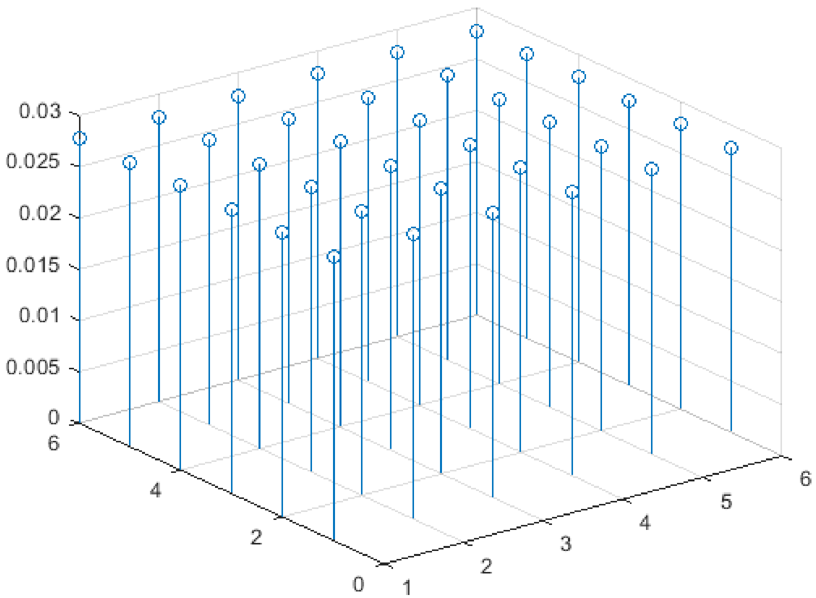
- $p_{X,Y}(i,j) = \boldsymbol{P(X = i \wedge Y = j)}$

- Exemplo: *X*= dado 1; *Y*= dado 2

$$p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(1,2) = \ \dots = p_{X,Y}(6,6) = 1/36$$

# Exemplo (continuação)

- Representação 3D



# Função massa de probabilidade conjunta

- A expressão generaliza para mais de 2 variáveis:

- $p_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  $= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$

- Uma função em $\mathbb{R}^n$, não-negativa
- $\sum_{x_1,x_2,\dots,x_n} p_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

# Função de distribuição acumulada conjunta

- Simples extensão ...

- Para duas variáveis, *X* e *Y*:

$$F_{X,Y}(x,y) = \boldsymbol{P(X \leq x \wedge Y \leq y)}$$

- Para n variáveis:

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

No caso discreto é uma função em terraços ...

# Exemplo 1

- Caso discreto

  $Y_1$ = número de temporais em Junho (0, 1, ou 2)

  $Y_2$ = número de temporais in Julho (0, 1, ou 2)

- Tabela com probabilidades

$p_{y1\,y2}(0, 2)$

| Julho ($y_2$) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Junho ($y_1$) | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 |
| | 1 | 0.1 | 0.15 | 0.20 |
| | 2 | 0.15 | 0.05 | 0.05 |

# Distribuição de cada uma das variáveis

- A distribuição acumulada de cada uma das variáveis pode ser obtida da distribuição conjunta

- Por exemplo, no caso com duas variáveis *X* e *Y*:
- $$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X \leq a) \\ &= P(X \leq a, Y < \infty) \\ &= F_{X,Y}(a, \infty) \end{aligned}$$

- De forma similar:

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = F_{X,Y}(\infty, b)$$

# Distribuição de cada uma das variáveis

- Também se pode obter facilmente a função de massa de probabilidade de cada uma das variáveis

- Para o caso discreto temos:

$$p_X(x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x} p_{X,Y}(x,y)$$

# Funções de probabilidade marginais

- No caso de duas variáveis ($X$ e $Y$):

- Para obter a função massa de probabilidade de $X$ somamos as linhas apropriadas da tabela representando a função de probabilidade conjunta

- De forma similar obtém-se $Y$ somando as colunas

# Exemplo 1

- Para o exemplo introduzido antes..

| Julho ($y_2$) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | $p\ (y_1)$ |
| Junho ($y_1$) | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.30 |
| | 1 | 0.1 | 0.15 | 0.20 | 0.45 |
| | 2 | 0.15 | 0.05 | 0.05 | 0.25 |
| | $p\ (y_2)$ | 0.30 | 0.30 | 0.40 | 1.00 |

$p_{Y1}(y1) =$

| $y_1$ | $p_{\ Y1}(\ y_1\ )$ |
|---|---|
| 0 | 0.30 |
| 1 | 0.45 |
| 2 | 0.25 |
| TOTAL | 1.00 |

| $y_2$ | $p_{Y2}(\ y_2\ )$ |
|---|---|
| 0 | 0.30 |
| 1 | 0.30 |
| 2 | 0.40 |
| TOTAL | 1.00 |

# Generalização

- O caso de ***n* variáveis discretas** é uma generalização simples

- Se $X_1, X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias discretas no mesmo espaço de amostragem com função massa de probabilidade conjunta:

$$p_{X_1,\ldots X_n}(x_1,\ldots x_n) = P(X_1 = x_1,\ldots, X_n = x_n)$$

- A função de probabilidade marginal para $X_1$ é:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,\ldots X_n}(x_1,\ldots x_n)$$

- A função (bidimensional) para a função de probabilidade marginal de $X_1$ e $X_2$ :

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3,\ldots,x_n} p_{X_1,\ldots X_n}(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$$

# Independência

- Em termos de  função de distribuição acumulada conjunta:

  *X* e *Y* são independentes **se e só se**

$$F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$$

  qualquer que sejam *a* e *b*

- Também, no caso discreto, *X* e *Y* são independentes **se e só se**

$$p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

- E no caso contínuo $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\ \ f_Y(y)$

# Generalização – independência de n variáveis aleatórias

- *n* variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes se

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}$$

# Exemplo 1

- $Y_1$ e $Y_2$ são independentes ?

| Julho ($y_2$) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Junho ($y_1$) | | 0 | 1 | 2 | $P(y_1)$ |
| | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.30 |
| | 1 | 0.1 | 0.15 | 0.20 | 0.45 |
| | 2 | 0.15 | 0.05 | 0.05 | 0.25 |
| | $f(y_2)$ | 0.30 | 0.30 | 0.40 | 1.00 |

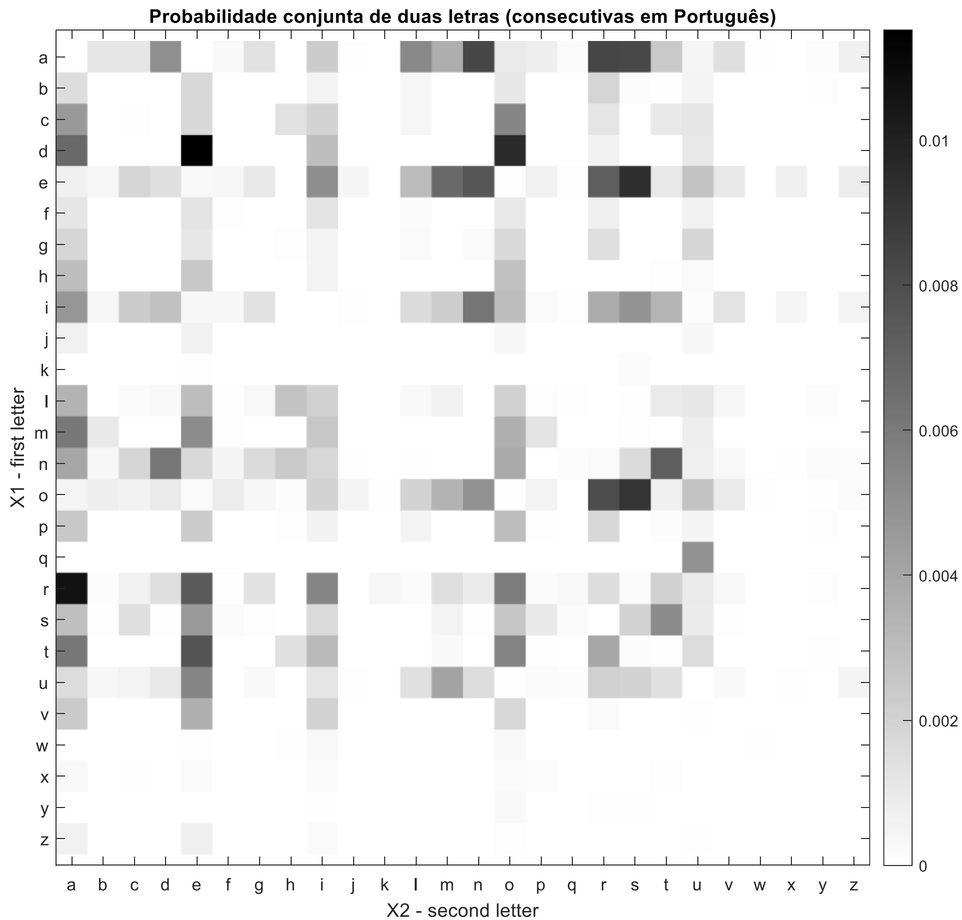
| Julho ($y_2$) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Junho ($y_1$) | | 0 | 1 | 2 | $p(y_1)$ |
| | 0 | 0.09 | | | 0.30 |
| | 1 | | | | 0.45 |
| | 2 | | | | 0.25 |
| | $p(y_2)$ | 0.30 | 0.30 | 0.40 | 1.00 |

# Exemplo 2

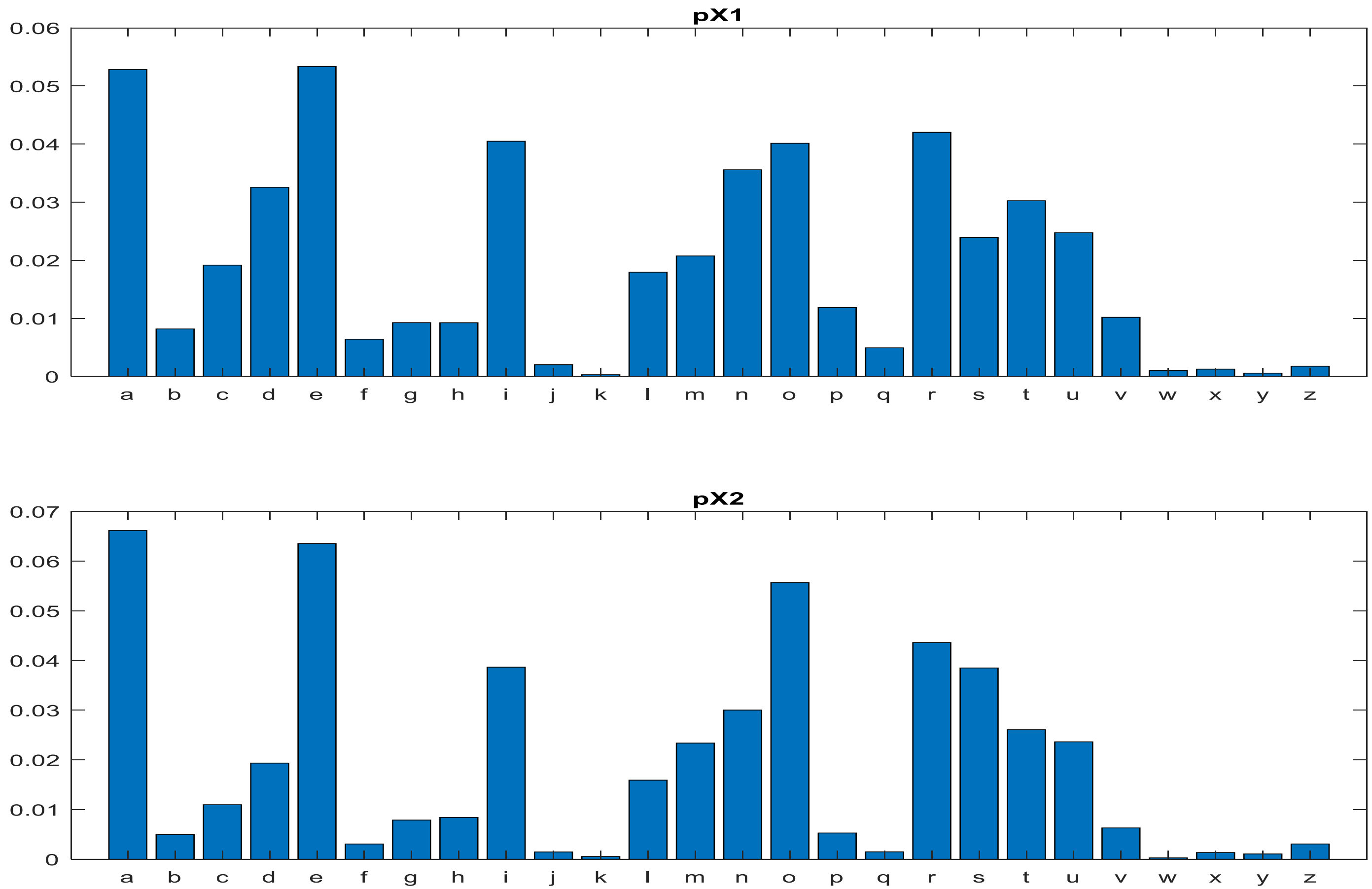
- Consideremos sequências de 2 letras (consecutivas) em Português
  - X1 representa a primeira; X2 a segunda

- Função massa de probabilidade conjunta?
- Distribuições marginais?
- X1 e X2 são independentes?

# Função massa de probabilidade conjunta

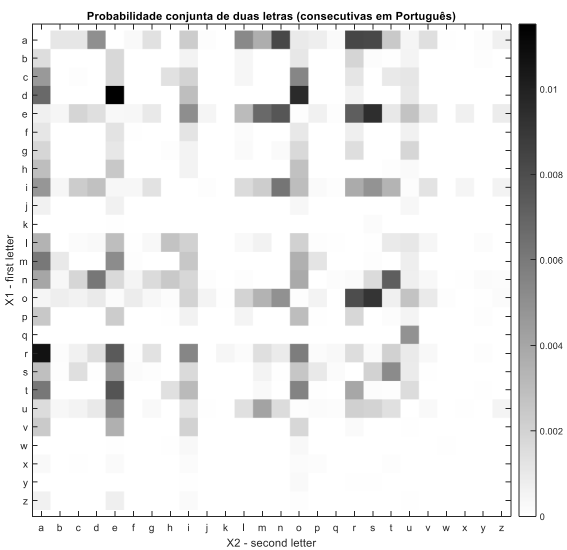


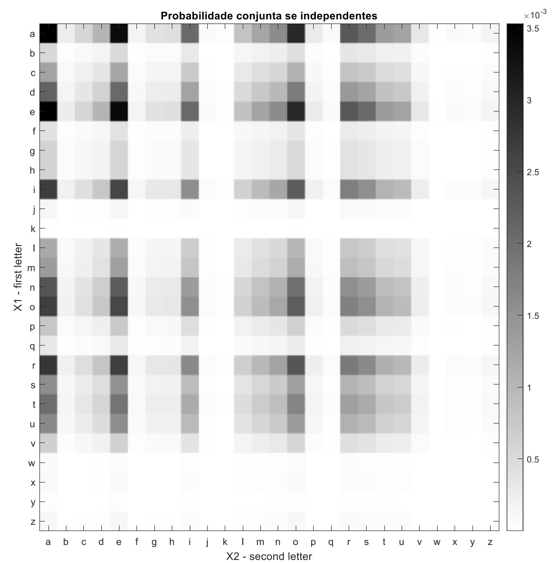
# Distribuições marginais



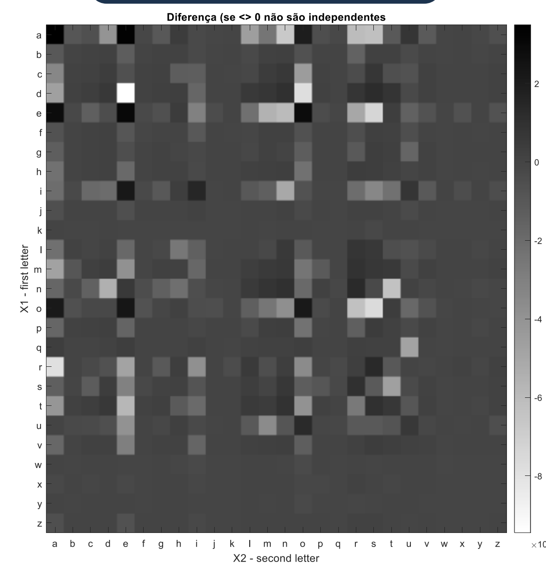
# Independência

$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$?




Diferença



# Esperança matemática

# Extensão das definições

- Os momentos de ordem *j k* das variáveis $X, Y$ definem-se como sendo …
- Caso discreto:

$$E\left[X^j Y^k\right] = \sum_m \sum_n {x_m}^j {y_n}^k \, p_{XY}(x_m, y_n)$$

- Caso contínuo:

$$E\left[X^j Y^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^j y^k f_{XY}(x, y) dx\, dy$$

- Se *j*=1 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=1 temos os valores médios de *X* e *Y*
- Se *j*=2 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=2 temos os valores quadráticos médios

# Extensão das definições (cont.)

- Os momentos centrais conjuntos de ordem *j k* das variáveis $X, Y$ definem-se como:

$$E\left[(X - E[X])^j (Y - E[Y])^k\right]$$

- Para *j*=2 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=2 obtemos as variâncias de $X$ e $Y$

# Correlação

- Alguns dos momentos são particularmente relevantes…

- O momento de ordem *j=k=* 1, $E[XY]$, é designado de correlação das variáveis $X$ e $Y$

- Quando $E[XY] = 0$ as variáveis são ortogonais

# $E[XY]$ e Independência

- Sendo $X$ e $Y$ independentes

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

- Demonstração (caso discreto):

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy \, p_{X,Y}(x,y)$$

$=\sum_{x,y} xy \, p_{X,Y}(x,y)$

$= \sum_{x,y} xy \, p(x)p_Y(y)$

$= \left[\sum_x x \, p_X(x)\right] \; \left[\sum_y y \, p_Y(y)\right]$

$= E[X]E[Y]$

# Covariância

- A covariância de duas variáveis $X$ e $Y$ é o seu momento central de ordem *j*= *k*= 1
  - Ou seja $E\left[(X - E[X]) \quad (Y - E[Y]) \quad\right]$
  - Designa-se por Cov(*X*,*Y*)

- $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
  $= E\left[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]\right]$
  $= E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$
  $= E[XY] - E[X]E[Y]$

- $E[X] = 0$ ou $E[Y] = 0 \quad \Rightarrow Cov(X, Y) = E[XY]$

# Covariância

- É uma generalização da Variância
  $$Cov(X,X) = E[(X - E[X])(X - E[X])]$$
  $$= Var(X)$$

- A covariância é uma medida de relação linear entre as variáveis aleatórias

- Se a relação for não linear, a covariância pode não ser sensível à relação.

# Covariância e independência

- **Se X e Y são independentes então $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \mathbf{0}$**

- "Demonstração":

- Como vimos $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- *X* e *Y* são independentes implica
$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Nota: o contrário não é verdadeiro

pode ter-se Cov(*X*,*Y*)=0 e as variáveis não serem independentes

# Propriedades da Covariância

- $Cov(X,X) = Var(X)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(cX,Y) = c\, Cov(X,Y)$

- $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

Demonstração:

$= E[X(Y+Z)] - E[X]E[Y+Z] =$

$= E[XY] + \mathrm{E[XZ]} - \mathrm{E[X]E[Y]} - \mathrm{E[X]E[Z]}$

$= E[XY] - \mathrm{E[X]E[Y]} + \mathrm{E[XZ]} - \mathrm{E[X]E[Z]}$

$= Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

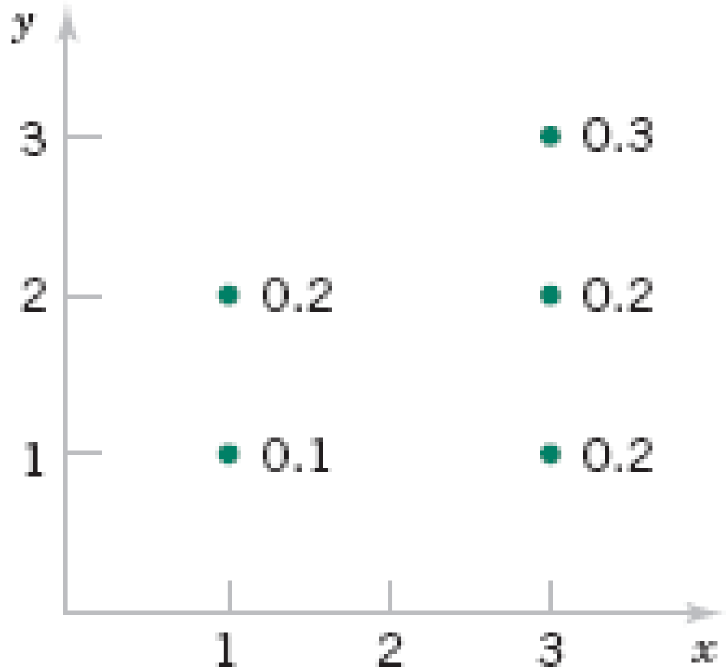
- Generalização: $$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

# Covariância de *n* variáveis

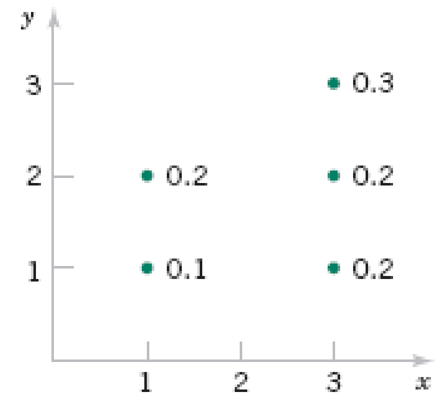
- Se tivermos um vector de *n* variáveis aleatórias $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$
- $Cov(Y) = \begin{bmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} Var(Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{Cov(Y_1, Y_n)} & \cdots & Var(Y_n) \end{bmatrix}$

# Exemplo

- Considere a seguinte distribuição conjunta de $X$ e $Y$ e calcule $Cov(X,Y)$



# Cov(X,Y)= ?




- Cov(X,Y) = E[ (X-E[X]) (Y-E[Y] )]

- E(X) = ?
  = 1 x 0,3 + 3 x 0,7 = 2,4
- E(Y)= ?
- = 1 x 0,3 + 2 x 0,4 + 3 x 0,3 = 2,0

- Cov(X,Y) = E[ (X-E[X]) (Y-E[Y] )]
- = (1-2,4)(1-2,0) x 0,1 + (1-2,4)(2-2,0) x 0,2
- \+ (3-2,4)(1-2,0) x 0,2 + (3-2,4)(2-2,0) x 0,2
- \+ (3-2,4)(3-2,0) x 0,3 = 0,2

| xi | pX(xi) |
|---|---|
| 1 | 0.3 |
| 3 | 0.7 |

| yi | pY(yi) |
|---|---|
| 1 | 0.3 |
| 2 | 0.4 |
| 3 | 0.3 |

# Coeficiente de correlação

- A **coeficiente de correlação** das variáveis $X$ e $Y$ é:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$$

- Demonstra-se que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

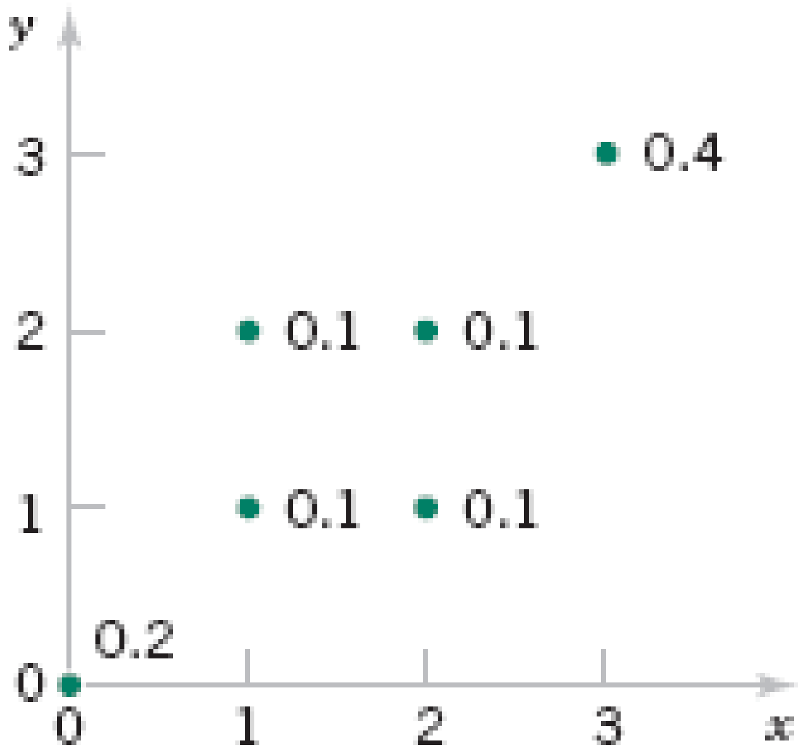
- E que os valores extremos (1 e -1) se obtêm para a relação linear $Y = a\,X + b$ com a> 0 ou a <0, respectivamente

# Coeficiente de correlação

- Se $\rho_{XY} = 0$ as variáveis dizem-se **descorrelacionadas**

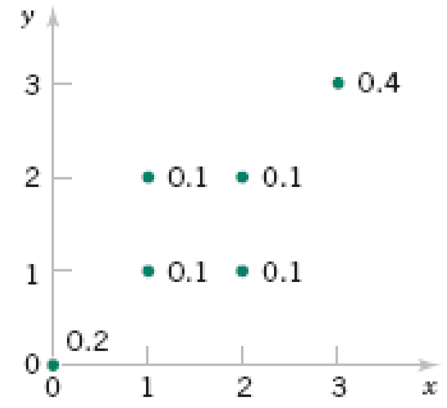
- Como se viu, se $X$ e $Y$ são independentes, a sua covariância é nula e portanto são descorrelacionadas
  - Mas o contrário não é (necessariamente) verdadeiro

# Exemplo de cálculo de $\rho_{XY}$




| x | y | P(x,y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,2 |
| 1 | 1 | 0,1 |
| 1 | 2 | 0,1 |
| 2 | 1 | 0,1 |
| 2 | 2 | 0,1 |
| 3 | 3 | 0,4 |
| | | |
| | SOMA | 1,0 |

# Cálculo de E[$XY$], E[$X$] e E[$Y$]




| x | y | P(x,y) | E[XY]= xy P(x,y) | E[X] = x P(x) | E[Y]= y P(y) | E[$X^2$] $= x^2\ P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,2 | 0x0x0,2=0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0,1 | 1x1x0,1=0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 1 | 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 2 | 1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |
| 2 | 2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 0,4 |
| 3 | 3 | 0,4 | 3,6 | 1,2 | 1,2 | 3,6 |
| | | | | | | |
| | SOMA | 1,0 | 4,5 | 1,8 | 1,8 | 4,6 |

# Exemplo de cálculo de $\rho_{XY}$

- Var(*X*) = $E[X^2] - (E[X])^2$ = 4,6 – 3,24 = 1,36
- Var(*Y*) é igual à de *X*

- $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
  = 4,5 – (1,8) (1,8)=1,26

- Finalmente:
- $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y} = \frac{1,26}{(\sqrt{1,36})(\sqrt{1,36})} = 0,926$