

Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

Abordagem Frequencista

Noção Frequencista

- Noção introduzida por De Moivre (1718)
- Repete-se a experiência um certo número de vezes (N)
- Determina-se o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (k)
 - (ex: “sair face 5 num dado”)
- Determina-se $f=k/N$
 - ou seja a frequência relativa de ocorrência
- Usa-se esta frequência como uma medida empírica de probabilidade

Frequência relativa e probabilidade

- A **frequência relativa** do evento **A** é portanto:

$$f(A) = \frac{\# \text{ ocorrências do evento } A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando N aumenta, então o **limite da frequência relativa** é a **probabilidade** de **A**

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ ocorrências de } A}{N}$$

Frequência relativa (cont.)

- $0 \leq f(A) \leq 1$
- Numa experiência com K resultados possíveis em N experiências:
 - $S = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_K\}$
 - O resultado A_i ocorre N_i vezes
 - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de $f(A_i) = N_i/N$
 - $\sum_{i=1}^K f(A_i) = \frac{(N_1 + N_2 + \dots + N_K)}{N} = 1$

Exemplo em **Matlab**

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**
- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula a experiência de 3 lançamentos?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos ...

% simular 1 lançamento (de uma moeda)

lan= rand() <0.5 % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos

lan_3= rand (3, 1) < 0.5 % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes

N= 1e6 % mas comecem com valor pequeno

lancamentos= rand(3,N) < 0.5; % importante o “;”

ocorrências → freq. Relativa → prob

% contar num ocorrências de “2 caras”

% contar num caras (1s) em cada experiência

% (que se encontram numa coluna da matriz lancamentos)

numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

% contar vezes em que esse número de caras é 2

numOcorrencias = sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular frequência relativa

fr = numOcorrencias / N

% usar como estimativa da probabilidade

pA= fr

Variação com N

% variação da frequência relativa em função de N

$N = 1e5$

lancamentos = rand(3,N) < 0.5;

sucessos= sum(lancamentos)==2; % 1 = sucesso

fabsol = **cumsum**(sucessos);

frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);

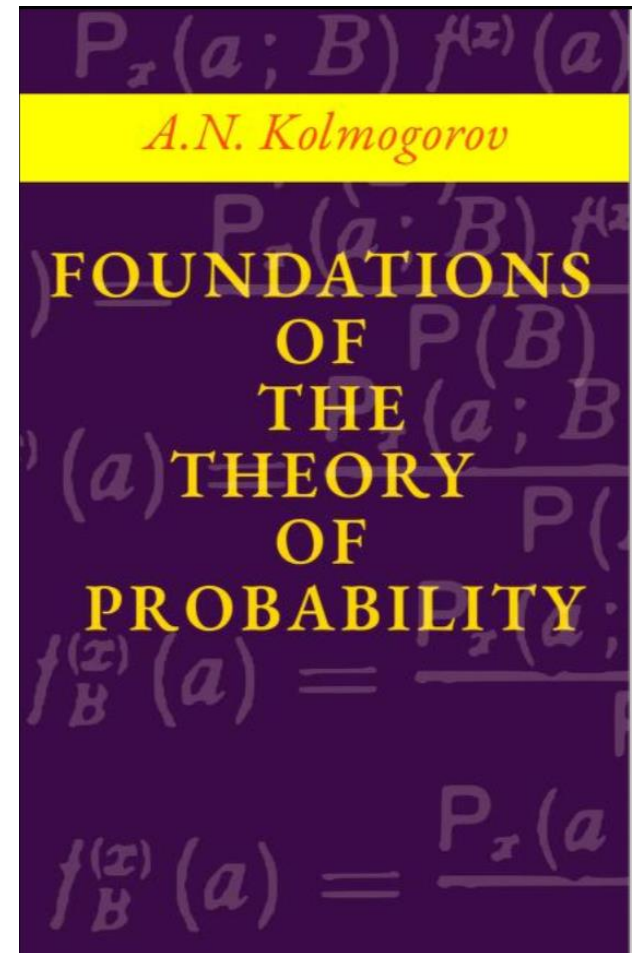
Simple mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
 - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
 - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
 - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
 - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
 - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
 - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

Teoria Axiomática de Probabilidade

Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR AXIOMATIZAÇÃO
 - na sua obra Foundations of the Theory of Probability
- com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos



O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

Axiomática de probabilidades

- Axioma 1 - probabilidades são não-negativas
 $P(A) \geq 0$
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)
 $P(S) = 1$
- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Axioma 3b – Se A_1, A_2, \dots for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ($\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$)

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k)$$

Teoremas

- Como sabem, às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outros teoremas já deles obtidos por dedução, chamamos TEOREMAS

Teoremas / Corolários :

Prob. do acontecimento complementar

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

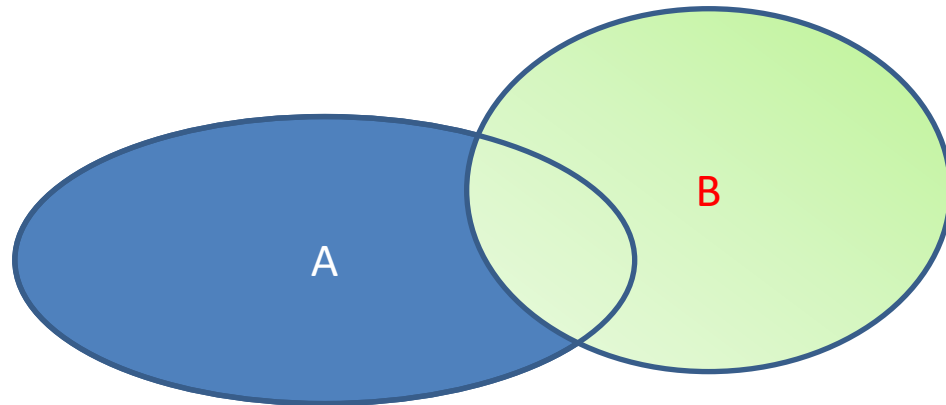
Demonstração

- Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E $A \cup \bar{A} = S$
- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S) \dots$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

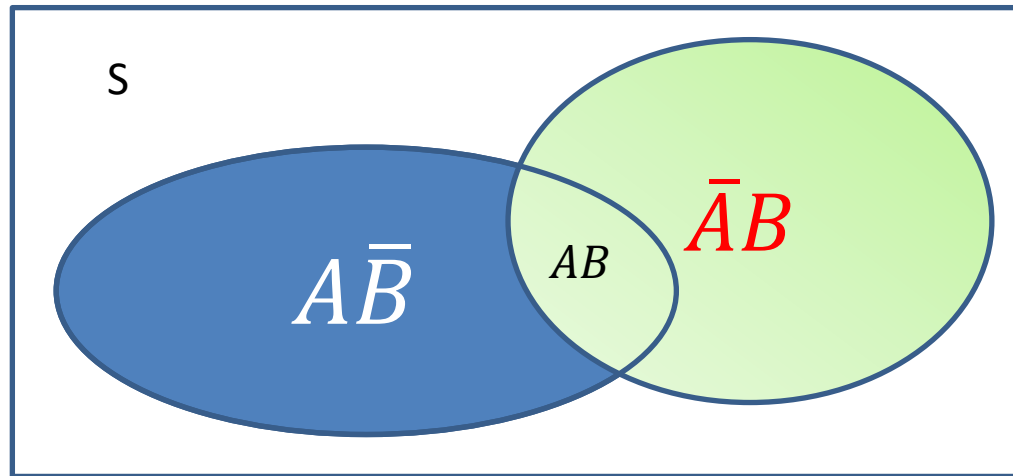
Teorema/Corolário: Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com $AB \equiv A \cap B$



Demonstração



$$A \cup B = A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B, \text{ disjuntos}$$

Logo (axioma):

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo $P(AB)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= (P(A\bar{B}) + P(AB)) + P(\bar{A}B) + P(AB) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
 - Escolha de um número real no intervalo $[a,b]$
- Seja o acontecimento A “número pertencer a $[c,d]$ ”



- $P(A) = (d-c) / (b-a)$
- A probabilidade de qualquer ponto $x \in [a, b]$ é igual a 0
 - Ter, por exemplo, $]c, d[$ dará igual

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

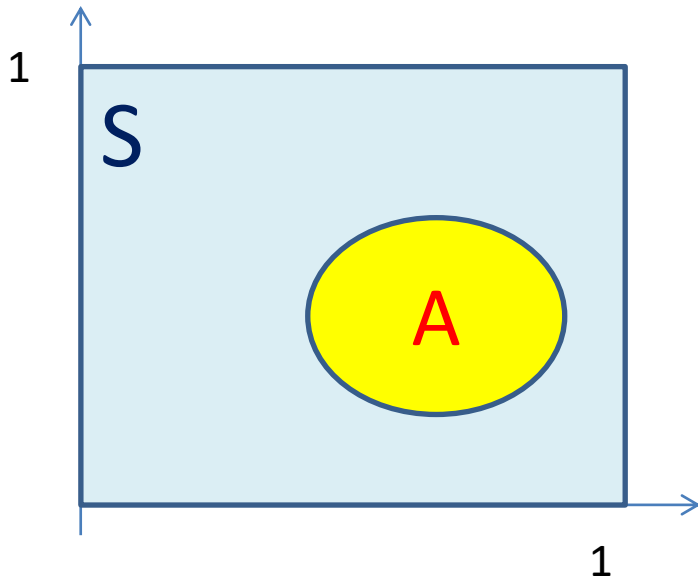
- Exemplo:

- Escolha de um número real no intervalo $[0,60]$ relativo ao atraso de chegada a uma aula de 60m
- Seja o acontecimento A “chegar dentro da tolerância, i.e. $[0,15[$
- $P(A) = (15-0) / (60-0) = 0.25$
 - Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula 😞
 - O que não é válido

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais x, y entre 0 e 1

$$S = \{x, y: x \in [0,1] \cap y \in [0,1]\}$$



$$P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(S)}$$

A axiomática é compatível com
as teorias anteriores ?

Sim, como era de esperar.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: « $p(A)$ não negativo»
 - pois se as frequências relativas são números não negativos também convergem para um número não negativo.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: « $p(E)=1$ »
 - pois as frequências relativas de um acontecimento certo são sempre 1, logo, tendem para 1.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»
 - pois se os acontecimentos A e B são incompatíveis não têm resultados comuns, a frequência relativa de $A \cup B$ é a frequência relativa de A mais a frequência relativa de B e o limite da soma das duas sucessões é a soma dos limites.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Lei de Laplace
 - Num espaço finito de resultados equiprováveis a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a A ($\#A$) e o número de resultados possíveis ($\#E$)

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: « $p(A)$ não negativo»
 - Pois $p(A) = \#A / \#E$ o que significa que $p(A)$ é o quociente entre um número real não negativo e um número positivo.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: « $p(E)=1$ »
 - Pois $p(E) = \#E / \#E$ é o quociente entre dois números iguais.

Exemplo: Axioma 3

- Satisfaz o axioma 3:

“Se A e B são incompatíveis então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B”

- Se A e B são disjuntos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

E então:

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{\#A + \#B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} = p(A) + p(B)$$

Exemplo - k ocorrências em n experiências

- n lançamentos de moeda de 1 Euro

$$P(\text{Reverso}) = P(F) = p \quad ; \quad P(\text{Verso}) = P(V) = 1-p$$



$$P(FVVFVF) = P(F) \times P(V) \times \dots = p (1-p) (1-p) p p p$$

$$\begin{aligned} P(FVVFVF) &= p^{\# \text{ Faces}} (1-p)^{\# \text{ Versos}} \\ &= p^4 (1-p)^2 \end{aligned}$$

Para aprender mais ...

- Capítulos iniciais do livro “[Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática](#)”
 - F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.
- Links para material online:
 - <http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm>
- Capítulos iniciais do Livro “O Acaso”
 - Joaquim Marques de Sá, Gradiva