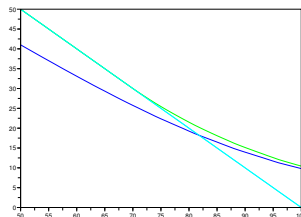


Temps d'arrêt, Arrêt optimal

RECRUTEMENT OPTIMAL, OPTIONS AMÉRICAINES

Bernard Lapeyre

<http://cermics.enpc.fr/~bl>



PLAN

- 1 Temps d'arrêt
- 2 Arrêt optimal
- 3 Option américaine
- 4 Preuve du théorème
- 5 Un problème de recrutement
- 6 (bio et biblio)graphie

PROCESSUS DE MARKOV

- ▶ *Processus de Markov et propriété de Markov*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \end{aligned}$$

- ▶ la matrice de transition : $(P(x, y), x, y \in E)$

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x).$$

- ▶ Loi de (X_0, \dots, X_N) déterminée par P et la loi de X_0 (notée μ_0).

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)P(x_0, x_1) \times \dots \times P(x_{n-1}, x_n).$$

- ▶ Loi de X_N , μ_N donnée par $\mu_N = \mu_0 P^N$.

LOI DE X_n : UNE AUTRE FAÇON D'ÉCRIRE LES CHOSES

- ▶ $(X_n, n \geq 0)$ chaîne de Markov de matrice de transition P sur E .
- ▶ $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$ (i.e. $\mu_0(x_0) = 1, \mu_0(x) = 0$ si $x \neq x_0$.)
- ▶ On sait exprimer $\mathbb{E}(f(X_N))$

$$\mathbb{E}(f(X_N)) = \mu_N f = \mu_0 P^N f = \sum_{x \in E} \mu_0(x) (P^N f)(x) = (P^N f)(x_0).$$

Une formulation alternative plus algorithmique.

Theorem 1

Soit $(u(n, x), n = 0, \dots, N, x \in E)$ la solution unique de

$$(1) \quad \begin{cases} u(n, x) = \sum_{y \in E} P(x, y) u(n+1, y), & n < N \\ u(N, x) = f(x), \end{cases}$$

Alors $\mathbb{E}(f(X_N)) = u(0, x_0)$.

REMARQUES

- La première équation de (1) peut aussi s'écrire

$$u(n, x) = P[u(n+1, \cdot)](x) = \sum_{y \in E} P(x, y)u(n+1, y)$$

- $u(n, x)$ peut s'interpréter comme

$$u(n, x) = \overbrace{P \times \cdots \times P}^{N-n \text{ fois}} f(x) = P^{N-n}f(x),$$

- Lorsque $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$, on a

$$u(n, x) = \mathbb{E}(f(X_N) | X_n = x) = P^{N-n}f(x).$$

Preuve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_N = x_N) \\ = \mathbb{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_n, x_{n+1}) \times P(x_{n+1}, x_{n+2}) \times \cdots \times P(x_{N-1}, x_N) \end{aligned}$$

en sommant sur toutes les valeurs de x_0, \dots, x_{n-1} et x_{n+1}, \dots, x_{N-1} on obtient la loi de (X_n, X_N)

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, X_N = x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n)P^{N-n}(x_n, x_N)$$

$$\mathbb{E}(f(X_N)\mathbf{1}_{\{X_n = x_n\}}) = \mathbb{P}(X_n = x_n) \sum_{x_N \in E} P^{N-n}(x_n, x_N)f(x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n)(P^{N-n}f)(x_n)$$

REMARQUES ET NOTATIONS

- ▶ (1) est une *équation de programmation dynamique*¹
- ▶ E est fini, (1) est un *algorithme* qui termine.

UNE NOTATION COMMUNE “À LA Scilab”

- ▶ $x_{0:n}$ plutôt que (x_0, \dots, x_n)
- ▶ $X_{0:n}$ plutôt que (X_0, \dots, X_n)
- ▶ $X_{0:n} = x_{0:n}$ plutôt que $(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$

1. Sur l'origine du terme programmation dynamique voir [[Dreyfus\(2002\)](#)]. “It was something not even a congressman could object to” selon Bellman.

PREUVE FORMELLE

On le sait déjà ... mais voici une autre méthode de preuve. On va montrer que

$$\mathbb{E}(u(n+1, X_{n+1})) = \mathbb{E}(u(n, X_n)).$$

Si cela est vrai :

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}(u(0, X_0)) = \dots = \mathbb{E}(u(N, X_N)) = \mathbb{E}(f(X_N)).$$

La loi de $X_{0:n+1} = (X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est une façon d'exprimer la propriété de Markov)

$$\mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}) = \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u(n+1, X_{n+1})) &= \sum_{x_{0:n+1} \in E^{n+2}} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}), \\ &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}, x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}), \\ &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) \sum_{x_{n+1} \in E} P(x_n, x_{n+1}) u(n+1, x_{n+1}), \\ &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) u(n, x_n) = \mathbb{E}(u(n, X_n)). \end{aligned}$$

LA QUESTION DU JOUR

- ▶ $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur E . $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$.
- ▶ On cherche à calculer non pas $\mathbb{E}(f(X_N))$, mais $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(X_\tau))$.
- ▶ τ appartenant à une famille de temps aléatoires, *plus grand* que les temps déterministes, mais *plus petit* que tous les temps aléatoires.
- ▶ *plus grand* que les temps déterministes : parce que l'on souhaite pouvoir tenir compte des valeurs de X_n au fil du temps.
- ▶ *plus petit* que tous les temps aléatoires : parce que à l'instant n on ne connaît pas la trajectoire future X_{n+1}, \dots, X_N .
- ▶ $\tau = \text{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$ est optimum, mais réclame de connaître le futur !
- ▶ Voir Pour la Sciences [[Hill\(2009\)](#)] pour une introduction à ce genre de problème.

TEMPS D'ARRÊT

La notion adéquate est celle de *temps d'arrêt* : on souhaite prendre la décision d'arrêter avec l'information que l'on a au temps n .

Definition 2

τ est un *temps d'arrêt*, si, pour tout n , il existe $A_n \subset E^{n+1}$ tel que

$$\{\tau = n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in A_n\}$$

- ▶ “Je peux déterminer si $\tau = n$ en ne considérant que la portion de trajectoire avant n ”.
- ▶ $\operatorname{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$ ne peut pas être un temps d'arrêt (sauf cas particulier).
- ▶ Le temps d'atteinte d'un point z de E est un temps d'arrêt

$$\tau = \inf \{n \geq 0, X_n = z\}.$$

En effet $\{\tau = n\} = \{X_0 \neq z, X_1 \neq z, \dots, X_{n-1} \neq z, X_n = z\}$.

FORMULATION D'UN PROBLÈME D'ARRÊT OPTIMAL

- ▶ On se donne une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur E , de matrice de transition P , issue de x_0 en 0.
- ▶ $f(n, x)$ donné, on cherche à calculer le sup suivant

$$\sup_{\tau \text{ t.a.} \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$$

- ▶ et aussi à identifier un τ qui réalise ce sup.
- ▶ ... on sait répondre complètement à ces deux questions.

Les données : P, x_0, f .

SOLUTION DU PROBLÈME D'ARRÊT OPTIMAL

Theorem 3

Si $(u(n, x), n = 0, \dots, N, x \in E)$ est la solution unique de

$$(2) \quad \begin{cases} u(n, x) = \max \left\{ \sum_{y \in E} P(x, y) u(n+1, y), f(n, x) \right\}, n < N, x \in E \\ u(N, x) = f(N, x), x \in E. \end{cases}$$

Alors

- ▶ $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau)) = u(0, x_0)$
- ▶ $\tau_0 = \inf \{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$ est un temps d'arrêt optimal.

- ▶ Lorsque la matrice de transition dépend de n il faut remplacer P par P_n (la matrice de transition entre les instants n et $n+1$) dans l'équation.
- ▶ τ_0 est bien un temps d'arrêt $\leq N$.

$$\{\tau_0 = n\} = \{u(0, X_0) \neq f(0, X_0), \dots, u(n-1, X_{n-1}) \neq f(n-1, X_{n-1}), u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$$

- ▶ Preuve formelle du théorème : transparent 18.

COMMENTAIRES

- ▶ (2) est une équation de *programmation dynamique* proche de celle qui permet de calculer $\mathbb{E}(f(X_N))$.
- ▶ $u(n, x) = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau) | X_n = x)$.
- ▶ Preuve informelle (“Principe d’optimalité”) :

En n , si $X_n = x$ soit j'exerce en n et je gagne $f(n, x)$ soit j'attends $n + 1$ où je peux gagner $u(n + 1, X_{n+1})$, dont je dois calculer l'espérance en n sachant que $X_n = x$ qui est donnée par

$$\sum_{y \in E} P(x, y) u(n + 1, y).$$

- ▶ On l'utilise (2) pour écrire un algorithme (pas beaucoup plus compliqué (il suffit de rajouter le max) que celui qui permet de calculer $\mathbb{E}(f(X_N))$). Voir TD.

- 1 Temps d'arrêt
- 2 Arrêt optimal
- 3 Option américaine
- 4 Preuve du théorème
- 5 Un problème de recrutement
- 6 (bio et biblio)graphie

EXEMPLE 1 : CALCUL DU PRIX D'OPTIONS AMÉRICAINES

- ▶ $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P décrivant l'évolution des prix des actifs (e.g. modèle de Cox-Ross).
- ▶ J'ai la possibilité si j'"exerce" en $n \leq N$ de gagner $f(n, X_n)$.
- ▶ Que vaut ce droit et à quel moment dois-je exercer ce droit pour maximiser mon gain ?
- ▶ Pour calculer le prix (i.e. la valeur de ce droit), il est naturel² de chercher à maximiser l'espérance du flux actualisé $\mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$ parmi tous les temps d'arrêt de X .

2. pour une justification complète cf. cours de Mathématiques Financière (2A) ou [[Lamberton and Lapeyre\(1997\)](#)].

PROBLÈME CLASSIQUE : PUT AMÉRICAIN

- ▶ On cherche à calculer $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$, le prix de l'option et à déterminer le moment d'exercice optimum.
- ▶ $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ est le processus de Cox-Ross

$$X_0 = 1, X_{n+1} = X_n \left(u \mathbf{1}_{\{U_{n+1} = P\}} + d \mathbf{1}_{\{U_{n+1} = F\}} \right).$$

$(U_n, n \geq 1)$ une suite de tirage à pile ou face indépendant,

$$0 \leq p \leq 1, \quad \mathbb{P}(U_n = P) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = F).$$

- ▶ r le taux d'intérêt sur une période, K le strike, $d < 1 + r < u$.

$$f(n, x) = \frac{1}{(1+r)^n} (K - x)_+$$

SOLUTION

- On commence par calculer (cf TD) $(u(n, x), n = 0, \dots, N, x \in E)$ la solution de l'équation (2) du théorème 3, ici

$$(3) \quad \begin{cases} u(n, x) = \max \left(p u(n+1, xu) + (1-p) u(n+1, xd), \frac{(K-x)_+}{(1+r)^n} \right), \\ u(N, x) = \frac{(K-x)_+}{(1+r)^N}. \end{cases}$$

- Souvent on calcule $v(n, x) = (1+r)^n u(n, x)$ plutôt que $u(n, x)$.
- $u(0, x) = v(0, x) = \sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$
- un temps d'arrêt optimal $\tau_0 = \inf \{n \geq 0, v(n, X_n) = (K - X_n)_+\}$.

- 1 Temps d'arrêt
- 2 Arrêt optimal
- 3 Option américaine
- 4 Preuve du théorème**
- 5 Un problème de recrutement
- 6 (bio et biblio)graphie

PREUVE DU THÉORÈME 3 : τ TEMPS D'ARRÊT QUELCONQUE

- ▶ u solution (2), on va voir que, pour tout τ t.a., $\mathbb{E}(u(n \wedge \tau, X_{n \wedge \tau}))$ **décroît en n** .
- ▶ En admettant ceci, on obtient

$$\begin{aligned} u(0, x_0) &= \mathbb{E}(u(0, X_0)) = \mathbb{E}(u(0 \wedge \tau, X_{0 \wedge \tau})) \\ &\geq \mathbb{E}(u(N \wedge \tau, X_{N \wedge \tau})) = \mathbb{E}(u(\tau, X_\tau)) \geq \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau)). \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir $\sup_{0 \leq \tau \leq N, \text{t.a.}} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau)) \leq u(0, x_0)$.

- ▶ Pour montrer la décroissance annoncée, on remarque que

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \mathbb{E}(u((n+1) \wedge \tau, X_{(n+1) \wedge \tau})) - \mathbb{E}(u(n \wedge \tau, X_{n \wedge \tau})) \\ &= \mathbb{E}\left[(u(n+1, X_{n+1}) - u(n, X_n)) \mathbf{1}_{\{\tau \geq n+1\}}\right]. \end{aligned}$$

PREUVE DU THÉORÈME 3 : τ TEMPS D'ARRÊT QUELCONQUE

- τ est un temps d'arrêt, $\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c$, s'écrit sous la forme

$$\{\tau \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}.$$

- La loi de $(X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est la propriété de Markov)

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \mathbb{E} \left[(u(n+1, X_{n+1}) - u(n, X_n)) \mathbf{1}_{\{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}} \right], \\ &= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n, x_{n+1} \in E} (u(n+1, x_{n+1}) - u(n, x_n)) \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}), \\ &= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n} \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) \left(\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(x_n, x_{n+1}) - u(n, x_n) \right). \end{aligned}$$

u sol. de (2), $\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(x_n, x_{n+1}) \leq u(n, x_n)$, d'où $\Delta_{n+1} \leq 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 3 : τ_0 TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

- ▶ $\tau_0 = \inf \{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$.
- ▶ On va montrer que $\mathbb{E}(u(n \wedge \tau_0, X_{n \wedge \tau_0}))$ **est constant en n** (i.e. $\Delta_{n+1} = 0$).
- ▶ En admettant ceci, il est facile de conclure

$$\begin{aligned} u(0, x_0) &= \mathbb{E}(u(0, X_0)) = \mathbb{E}(u(0 \wedge \tau_0, X_{0 \wedge \tau_0})) , \\ &= \mathbb{E}(u(N \wedge \tau_0, X_{N \wedge \tau_0})) = \mathbb{E}(u(\tau_0, X_{\tau_0})) , \end{aligned}$$

Mais, par définition de τ_0 , $u(\tau_0, X_{\tau_0}) = f(\tau_0, X_{\tau_0})$, donc

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}(f(\tau_0, X_{\tau_0})) .$$

- ▶ Ce qui finit la démonstration puisque τ_0 réalise alors le sup.
- ▶ Il nous reste à montrer que, pour ce temps d'arrêt $\Delta_{n+1} = 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 3 : τ_0 TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

- τ_0 est un temps d'arrêt, $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n^0\}$ où

$$\bar{A}_n^0 = \{u(0, x_0) \neq f(0, x_0), \dots, u(n, x_n) \neq f(n, x_n)\}.$$

- Sur l'événement $\{\tau_0 \geq n+1\}$, on a $u(n, X_n) \neq f(n, X_n)$ et comme u sol. de (2)

$$\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(X_n, x_{n+1}) = u(n, X_n).$$

- On termine alors comme tout à l'heure, mais en tenant compte de cette égalité :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \mathbb{E} \left[(u(n+1, X_{n+1}) - u(n, X_n)) \mathbf{1}_{\{X_{0:n} \in \bar{A}_n^0\}} \right], \\ &= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n^0, x_{n+1} \in E} (u(n+1, x_{n+1}) - u(n, x_n)) \mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) P(x_n, x_{n+1}), \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{X_{0:n} \in \bar{A}_n^0\}} \left(\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(X_n, x_{n+1}) - u(n, X_n) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

- 1 Temps d'arrêt
- 2 Arrêt optimal
- 3 Option américaine
- 4 Preuve du théorème
- 5 Un problème de recrutement
- 6 (bio et biblio)graphie

EXEMPLE 2 : UN PROBLÈME DE RECRUTEMENT

- ▶ Je reçois, consécutivement, N candidats à un poste. Les circonstances m'imposent de décider tout de suite du recrutement (soit je recrute la personne que je viens de recevoir, soit je la refuse définitivement).
- ▶ La *seule* information que j'ai sur les candidats est leur classement.
- ▶ Je souhaite maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat.
- ▶ Quelle est la meilleure façon de s'y prendre ?

LE RÉSULTAT

- ▶ Il faut recevoir (environ) 37% des candidats, puis choisir le premier candidat qui suit qui est meilleur que tous les précédents (le dernier si cela n'arrive jamais).
- ▶ On obtient ainsi un temps d'arrêt optimal.
- ▶ La probabilité d'obtenir le meilleur candidat est (environ) de 37%.
- ▶ Les transparents qui suivent expliquent comment arriver à ces résultats à l'aide de la théorie précédente.

LE MODÈLE

- ▶ $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ une permutation de $(1, \dots, N)$.
- ▶ ω_k le classement du $\#k$ -ième individu dans la permutation.

<i>Indice</i>	(#1	#2	...	#k	...	#N)
<i>Rang</i>	(ω_1	ω_2	...	ω_k	...	ω_N)

- ▶ Ω_N l'ensemble des permutations de $(1, \dots, N)$ muni de la probabilité uniforme.
- ▶ B_n l'événement "le n -ième candidat est le meilleur".
- ▶ On cherche un temps d'arrêt τ qui maximise $\mathbb{P}(B_\tau)$.

OÙ EST LA CHAÎNE DE MARKOV ?

- ▶ Un temps d'arrêt mais pour quel processus de Markov ?
- ▶ $R_k(\omega)$ le rang du k -ième individu parmi les k premiers individus.
- ▶ $B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1\}$.
- ▶ Quelle est la loi de (R_1, \dots, R_N) ?

UN EXEMPLE DE CALCUL DE R

- ▶ $\omega = (2\ 3\ 1\ 4)$ donne $R = (1\ 2\ 1\ 4)$.
- ▶ $R = (1\ 2\ 1\ 4)$ donne $\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4$

$$(1) \rightarrow (\#1)$$

$\#1$ est le premier puisqu'il est tout seul !

$$(1\ 2) \rightarrow (\#1 \leq \#2)$$

$\#2$ est le deuxième parmi les 2 premiers

$$(1\ 2\ 1) \rightarrow (\#3 \leq \#1 \leq \#2)$$

$\#3$ est le premier parmi les 3 premiers

$$(1\ 2\ 1\ 4) \rightarrow (\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4)$$

$\#4$ est le quatrième parmi les 4 premiers

On obtient la permutation de départ $\omega = (2\ 3\ 1\ 4)$

<i>Indice</i>	($\#1$	$\#2$	$\#3$	$\#4$)
<i>Rang</i>	(2	3	1	4)

EN Scilab

Si vous avez un doute voici, deux fonctions Scilab qui font le job.

```
function [R] = Omega2R(omega)
    // Calcule les rang d'insertion pour un omega donne
    for n=[1:length(omega)] do
        // classe le vecteur omega(1:n) en croissant
        y=gsort(omega(1:n),'g','i');
        // R(n) = le classement de omega(n) parmi les n premiers
        R(n)=find(omega(n)==y);
    end
endfunction

function [omega] = R2Omega(R)
    // Calcule omega connaissant les rangs d'insertion
    // J'insère n à l'indice R(n)
    for n=[1:length(R)] do
        omega=[omega(1:R(n)-1);n;omega(R(n):n-1)];
    end;
    // On inverse la permutation
    for n=[1:length(R)] do temp(omega(n))=n;end;
    omega=temp;
endfunction
```

CALCUL DE LOIS

- ▶ À un R correspond un et un seul ω , **donc**, pour $\alpha_k \in \{1, \dots, k\}$

$$P(R_1 = \alpha_1, \dots, R_N = \alpha_N) = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N!}.$$

- ▶ (Par contraction) les R_k suivent des lois uniformes sur $\{1, \dots, k\}$. Elles sont indépendantes.
- ▶ $S_k = \mathbf{1}_{\{R_k = 1\}}$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes. Elles suivent des lois de Bernouilli de paramètre $p_k = \mathbb{P}(S_k = 1) = 1/k$.
- ▶ La suite de variable (S_1, \dots, S_N) suffira pour traiter le problème.

LE CRITÈRE

- ▶ B_n l'événement "le n -ième candidat est le meilleur".

$$B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1\} = \{S_n = 1, S_{n+1} = 0, \dots, S_N = 0\}.$$

- ▶ τ un temps d'arrêt par rapport au processus $R = (R_1, \dots, R_N)$. À l'instant n , (R_1, \dots, R_n) "contient toute l'information disponible".
- ▶ Pour un temps d'arrêt³ τ , on va voir que

$$\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E} \left(\frac{\tau}{N} S_\tau \right).$$

ce qui permettra de mettre le problème "sous forme markovienne".

3. Ce n'est plus vrai sinon ... Exercice : trouver un contre-exemple.

PREUVE

$$\{\tau = n\} = \{(R_1, \dots, R_{n-1}, R_n) \in A_n\} = \{R_{1:n} \in A_n\}.$$

$$\textbf{Notation : } R_{1:n} = (R_1, \dots, R_{n-1}, R_n).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \mathbb{P}(\tau = n, B_n). \\ &= \mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\ &= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\ &= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1) \mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1)\end{aligned}$$

car indépendance des vecteurs $R_{1:n}$ et $R_{n+1:N}$, puis par indépendance des R_n entre eux

$$\mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n+2} \times \dots \times \frac{N-1}{N} = \frac{n}{N}$$

PREUVE

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \frac{n}{N} \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1) = \frac{n}{N} \mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1) \\ &= \frac{n}{N} \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\tau = n, R_n = 1\}} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\tau = n\}} \frac{n}{N} S_n \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\tau = n\}} \frac{\tau}{N} S_\tau \right).\end{aligned}$$

En sommant pour n variant de 1 à N

$$\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E} \left(\frac{\tau}{N} S_\tau \right).$$

RÉSUMONS NOUS !

- ▶ (S_1, \dots, S_N) est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $1/k$, **donc** une chaîne de Markov sur l'espace $E = \{0, 1\}$, non homogène, de matrice de transition, dépendant du temps, P_n

$$P_n(0, 0) = P_n(1, 0) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$P_n(0, 1) = P_n(1, 1) = \frac{1}{n+1}$$

- ▶ On cherche à maximiser $\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\tau}{N} S_\tau\right) = \mathbb{E}(f(\tau, S_\tau))$ parmi tous les temps d'arrêt.

RÉSOLUTION

- ▶ On peut résoudre le problème grâce à (2)
- ▶ On calcule (cf TD) $(u(n, 0 \text{ ou } 1), 0 \leq n \leq N)$

$$\begin{cases} u(n, x) = \max \left\{ \frac{n}{n+1} u(n+1, 0) + \frac{1}{n} u(n+1, 1), \frac{n}{N} x \right\}, n < N, \\ u(N, x) = x, \end{cases}$$

- ▶ Une fois ceci fait, un temps d'arrêt optimal est obtenu par

$$\tau = \inf \left\{ n \geq 0, u(n+1, S_n) = \frac{n}{N} S_n \right\}.$$

- ▶ Dans ce cas, on peut mener des calculs explicites (voir [[Delmas and Jourdain\(2006\)](#)] et TD) pour obtenir les résultats annoncés.

- 1 Temps d'arrêt
- 2 Arrêt optimal
- 3 Option américaine
- 4 Preuve du théorème
- 5 Un problème de recrutement
- 6 (bio et biblio)graphie

SNELL, JAMES LAURIE

- ▶ La théorie de l'arrêt optimal porte le nom d'enveloppe de Snell (voir [[Snell\(1952\)](#)]), "so named by the Russian mathematician, Kolmogorov".
- ▶ Snell (1925-2011), mathématicien américain, élève de Doob.
- ▶ Il utilise la théorie des martingales pour traiter le problème d'arrêt optimal.



BIBLIOGRAPHIE



Jean-François Delmas and Benjamin Jourdain.

Modèles aléatoires.

Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2006.



Stuart Dreyfus.

Richard bellman on the birth of dynamic programming.

Operations Resarch, 50(1) :48–51, 2002.



Theodore Hill.

Savoir quand s'arrêter.

Pour La Science, 381, Juillet 2009.



Damien Lamberton and Bernard Lapeyre.

Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

Ellipses, Édition Marketing, Paris, second edition, 1997.



J. L. Snell.

Applications of martingale system theorems.

Trans. Amer. Math. Soc., 73 :293–312, 1952.