# Algorytmy i Struktury Danych

## Wykład 2

Złożoność czasowa — to funkcja opisująca liczbę elementarnych operacji w zależności od rozmiaru danych

- pesymistyczna — liczba operacji w najgorszym przypadku
- optymistyczna — minimalna liczba operacji
- oczekiwana — liczba operacji w przypadku średnim

Złożoność pamięciowa — funkcja opisująca liczbę wykorzystywanych komórek pamięci

### Przykład

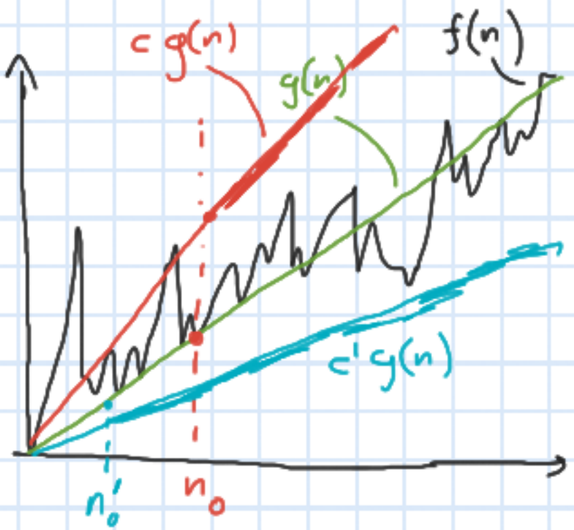
$7n^3 + 10n^2 + 3n\log n$ jest $\Theta(n^3)$

## Notacja asymptotyczna

Niech $f$ i $g$ będą funkcjami

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$




**def** Mówimy, że $f$ jest $O(g(n))$ jeśli:

$$(\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[ f(n) \leq c \cdot g(n)\right]$$

Mówimy, że $f$ jest $\Omega(g(n))$ jeśli

$$(\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[ f(n) \geqslant c \cdot g(n)\right]$$

Mówimy, że $f$ jest $\Theta(g(n))$ jeśli $f$ jest $O(g(n))$ jak i $\Omega(g(n))$

# Problem sortowania

Dane: ciąg $a_0, \dots, a_{n-1}$ danych
razem z operatorem $\leqslant$

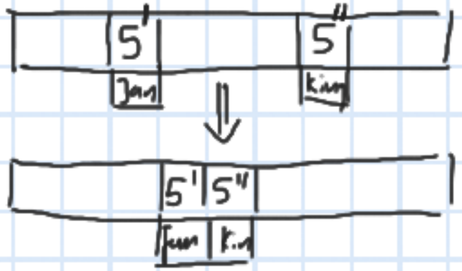
Wynik: permutacja $a_{\pi(0)}, \dots, a_{\pi(n-1)}$
ciągu wejściowego, taka że

$$a_{\pi(0)} \leqslant a_{\pi(1)} \leqslant \dots \leqslant a_{\pi(n-1)}$$

## Uwagi

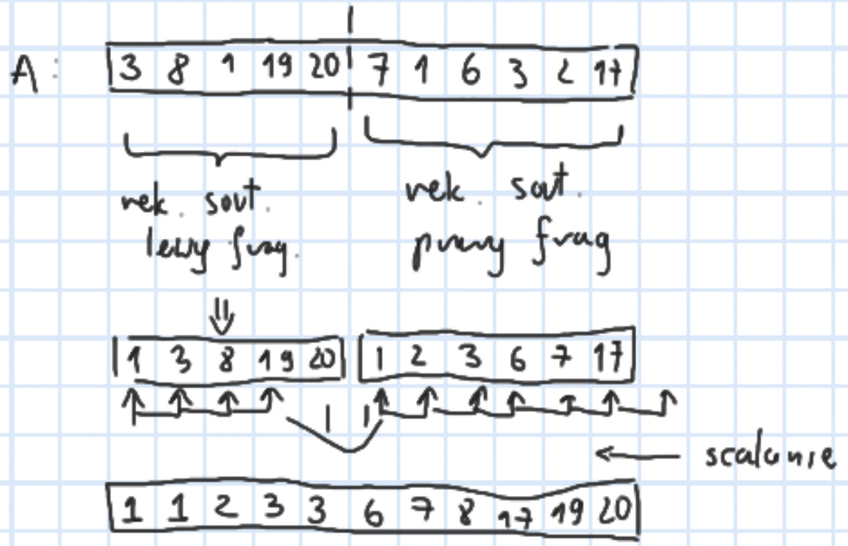
Reprezentacja danych — tablica
— listy 1-kier.
2-kier.
— plik

Stabilność sortowania — czy elementy "równe" mogą zmienić kolejność?



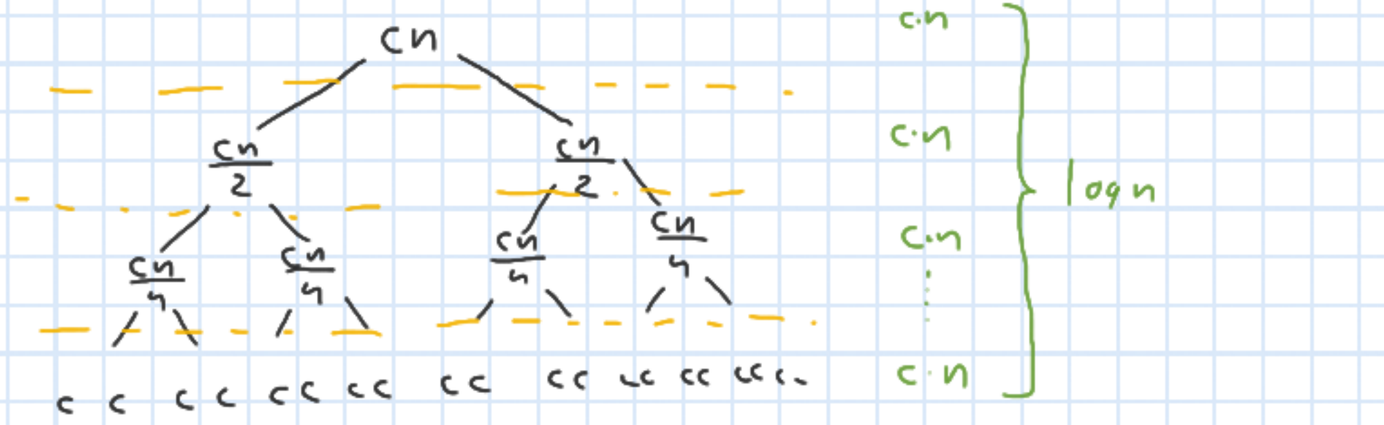

Szybkie sortowanie
↳ proste $O(n^2)$
↳ szybkie $O(n \log n)$

## ① Sortowanie przez scalanie (merge sort)




$$T(n) = \begin{cases} c, & n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn, & n > 1 \end{cases}$$

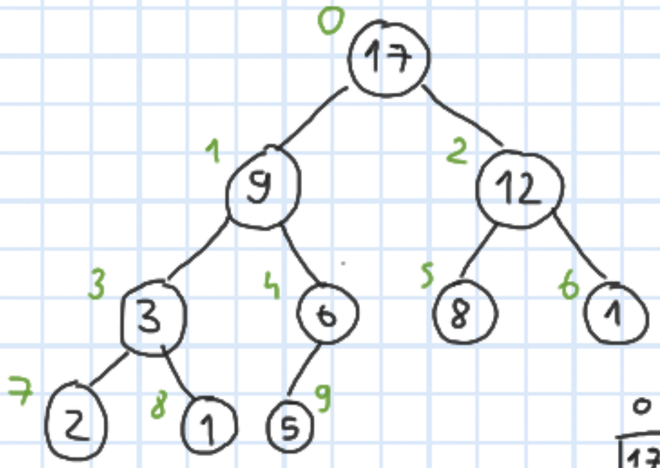
$T(n) = \Theta(n \log n)$



## ② Sortowanie kopcowe (Heapsort)

Kopiec — drzewo binarne, w którym w każdym węźle A przechowywany wartość ≥ niż wartości w jego dzieciach

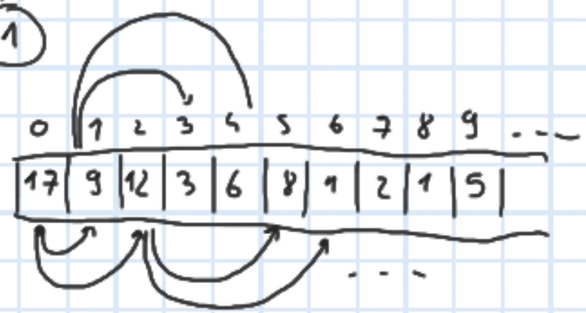
Przykład

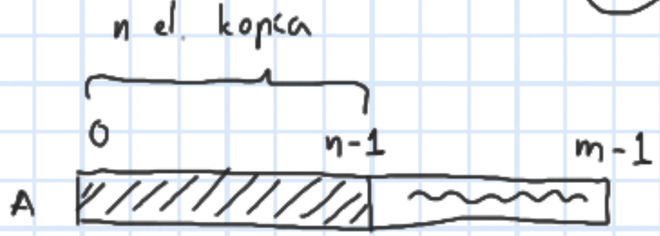



$left(i) = 2i + 1$

$right(i) = 2i + 2$

$parent(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor$




$len(A) = m$

```
def heapify(A, n, i)
    l = left(i)      , max_ind = i
    r = right(i)
    if l<n and A[l] > A[max_ind]:
        max_ind = l
    if r<n and A[r] > A[max_ind]:
        max_ind = r
    if max_ind ≠ i:
        swap(A[i], A[max_ind])
        heapify(A, n, max_ind)
```

$O(\log n)$

```
def build_heap(A):
    n = len(A)
    for i in range(parent(n-1), -1, -1):
        heapify(A, n, i)
```

$O(n \log n)$

$\Theta(n)$

W tablicy mamy $n$ elementów

$\frac{n}{2}$ tych elementów tworzy kopce o wys. 0

$\frac{n}{4}$ tych el., tworzy kopce o wys 1

$\frac{n}{8}$ tych el. tworzy kopce o wys. 2

$\vdots$

$\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ tych el tworzy kopce o wys. $h$

Koszt build heap wyrażamy jako:

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil h = O\left( \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{n \cdot h}{2^{h+1}} \right)$$

$$= O\left( n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2} \xrightarrow{x = \frac{1}{2}} 2$$

```
def heapsort(A):
    n = len(A)
    buildheap(A)
    for i in range(n-1, 0, -1):
        swap(A[i], A[0])
        heapify(A, i, 0)        <-- O(log n)
```

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 8 | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | 12 | 17 |

$\Theta(n \log n)$

## (3) Quick sort