Projekt z równań różniczkowych - Odkształcenie elastyczne

Hubert Miklas

19-01-2025

1 Uproszczenie problemu

1.1 Sformułowanie problemu i postać silna

Korzystając z metody elementów skończonych, należy rozwiązać równanie:

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

$$u(2) = 0$$

$$u'(0) + u(0) = 10$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja:
$(0, 2) \ni x \to u \in \mathbb{R}$ i

$$E(x) = \begin{cases} 3, \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5, \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases} \tag{2}$$

1.2 Postać słaba

Weźmy dowolną funkcję $v \in V$, która spełnia $v(2) = 0$, albowiem w punkcie $x = 2$ mamy warunek Dirichleta $u(2) = 0$. Mnożąc przez nią sformułowanie silne i całkując obustronnie, otrzymujemy:

$$-v\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du}{dx}\right) = 0 \mid \int_0^2 dx \Rightarrow \tag{3}$$

$$\int_0^2 -v\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du}{dx}\right), dx = 0 \tag{4}$$

Korzystając z całkowania przez części równanie (4) przyjmuje postać:

$$-\left[vE(x)\frac{du}{dx}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{dv}{dx}E(x)\frac{du}{dx}dx = 0 \Rightarrow \tag{5}$$

$$-v(2)E(2)\frac{du}{dx}(2) + v(0)E(0)\frac{du}{dx}(0) + \int_0^2 \frac{dv}{dx}E(x)\frac{du}{dx}dx = 0 \tag{6}$$

Z warunków $v(2) = 0$ i $\frac{du}{dx}(0) = 10 - u(0)$, jak również podstawiając wartość $E(0) = 3$:

$$3v(0)(10 - u(0)) + \int_0^2 \frac{dv}{dx}E(x)\frac{du}{dx}dx = 0 \Rightarrow \tag{7}$$

$$-3v(0)u(0) + \int_0^2 \frac{dv}{dx}E(x)\frac{du}{dx}dx = -30v(0) \tag{8}$$

Mamy więc równanie wyrażone w sposób:

$$B(u,v) = L(v) \tag{9}$$

Z biliniowości $B(u,v)$ i liniowości $L(v)$:
Dla $u = w + \bar{u}$

$$B(u,v) = L(v) \Rightarrow$$

$$B(w + \bar{u}, v) = L(v) \Rightarrow$$

$$B(w,v) + B(\bar{u},v) = L(v) \Rightarrow$$

$$B(w,v) = L(v) - B(\bar{u},v) \Rightarrow$$

1.3 Macierz elementów skończonych

Dla elementów skończonych zdefiniowanych następująco:

$$E = \left\{ e_i\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}, \ i \in \{0, 1 \ldots n-1\} \right\} \tag{10}$$

Gdzie $x_i = ih, i \in \{0, 1 \ldots n\}, h = 1/n$, gdzie n to ilość elementów skończonych. Należy zwrócić uwagę, że:

$$\forall i, j \in \{0, 1 \ldots, n\} \wedge |i - j| \geq 2 \Rightarrow \forall e_i, e_j \in E \Rightarrow e_i\left(x\right) e_j\left(x\right) = 0$$

Korzystając z metody Galerkina:

$$u \approx \bar{u} + \sum_{i=0}^{n} w_i e_i, v \approx \sum_{i=0}^{n} v_i e_i \tag{11}$$

Podstawiając do VBVP otrzymamy:

$$B\left(\bar{u} + \sum_{i=0}^{n} w_i e_i, \sum_{i=0}^{n} v_i e_i\right) = L\left(\sum_{i=0}^{n} v_i e_i\right) \tag{12}$$

v jest dowolną funkcją spełniającą $v\left(2\right) = 0$, dlatego możemy w szczególności założyć, że $v_i = \delta_{ij}$, otrzymamy wówczas układ n równań:

$$B\left(\bar{u} + \sum_{i=0}^{n} w_i e_i, e_j\right) = L\left(e_j\right), j \in \{0, 1, \ldots n-1\} \tag{13}$$

Ten układ równań jest w postaci:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_0, e_1) & B(e_0, e_2) & \cdots & 0 \\ B(e_0, e_1) & B(e_0, e_1) & B(e_0, e_1) & \cdots & 0 \\ B(e_0, e_1) & B(e_0, e_1) & B(e_0, e_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \\ u(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) - B(\bar{u}, e_0) \\ L(e_1) - B(\bar{u}, e_1) \\ L(e_2) - B(\bar{u}, e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) - B(\bar{u}, e_{n-1}) \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ponadto macierz jest symetryczna, albowiem:

$$B(e_i, e_j) = -3e_i\left(0\right) e_j\left(0\right) + \int_0^2 \frac{de_i}{dx} E\left(x\right) \frac{de_j}{dx} dx \Leftrightarrow$$

$$-3e_j\left(0\right) e_i\left(0\right) + \int_0^2 \frac{de_j}{dx} E\left(x\right) \frac{de_i}{dx} dx = B(e_j, e_i)$$

2 Szczegóły dotyczące implementacji

Do obliczenia całek z równania (8) skorzystałem z kwadratury Gauss-a dostępnej na Wikipedii po angielsku:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

Gdzie w_i to i-ty współczynnik wielomianu Legendre'a, zaś ξ_i to i-te z kolei miejsce zerowe tego wielomianu.

Współczynnik w_i wyraża się wzorem:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2} \tag{15}$$

Miejsca zerowe wielomianu Legendre's są przybliżane w następujący sposób:

$$x_k \approx cos\left(\pi\frac{i-\frac{1}{4}}{n+\frac{1}{2}}\right),\ \text{dla}\ i \in \{1,\ldots,n\} \tag{16}$$

Ich dokładność może być zwiększona metodą Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{17}$$

Wartości wielomianu są liczone rekurencyjnie za pomocą wzoru rekurencyjnego Bonnet-a:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{18}$$

Mając $P_0(x)$ i $P_1(x)$ można łatwo wyznaczyć dowolną wartość wielomianu.

Pochodna tego wielomianu jest liczona przy pomocy:

$$\frac{d}{dx}P_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) - x\frac{d}{dx}P_n(x) \tag{19}$$