Sprawozdanie z laboratorium 2. z algorytmów geometrycznych - Otoczka wypukła

Hubert Miklas
Grupa 5, Poniedziałek 15:00-16:30
Data wykonania ćwiczenia:
28-10-2024
Data oddania sprawozdania:
14-11-2024

1 Wstęp do ćwiczenia

1.1 Specyfikacja środowiska

System: Windows 10 Home
Procesor: Intel(R) Core(TM) i5-7400 CPU 3.00 GHz
Pamięć RAM: 24 GB
Karta Graficzna: NVIDIA GeForce GTX 1060
Środowisko: Jupyter Notebook, Python 3.12.7

1.2 Opis i cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wygenerowanie różnych zbiorów punktów na płaszczyźnie oraz wyznaczenie ich otoczki wypukłej, czyli najmniejszego wypukłego wielokąta, który zawiera wszystkie punkty ze zbioru. W tym celu zastosowano dwa algorytmy: Algorytm Jarvisa i Algorytm Grahama. Do obliczeń orientacji punktów względem prostych wyznaczanych przez pary punktów, zarówno dla sortowania kątowego, jak i "owijania prezentu," używany jest wyznacznik macierzy 2x2 (1). Dla każdego algorytmu dokonano pomiaru czasu wykonania, aby porównać ich efektywność.

$$\mathbf{det(a,b,c)} = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix} \tag{1}$$

2 Wstęp teoretyczny

Definicja otoczki wypukłej: Podzbiór Q płaszczyzny nazywamy wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch punktów $p, q \in Q$, odcinek łączący p i q jest całkowicie zawarty w Q.

Otoczka wypukła zbioru Q, oznaczana jako $CH(Q)$, to najmniejszy wypukły zbiór zawierający Q. Wyznaczanie otoczki wypukłej ma szerokie zastosowanie, m.in. w grafice komputerowej, robotyce oraz systemach GIS.

W ćwiczeniu opisano i zaimplementowano dwa algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej: Algorytm Grahama i Algorytm Jarvisa.

2.1 Algorytm Grahama

Algorytm Grahama jest jednym z wydajniejszych algorytmów wyznaczania otoczki wypukłej o złożoności czasowej $O(n \log n)$. Działa, uporządkowując punkty względem kąta biegunowego w odniesieniu do wybranego punktu bazowego, a następnie wybierając punkty tworzące wypukły wielokąt. Kroki algorytmu są następujące:

1. **Tworzenie tablicy:** Inicjalizuje pustą tablicę **hull**
2. **Wybór punktu bazowego:** Znajduje punkt o najniższej współrzędnej y (jeśli jest więcej niż jeden taki punkt, wybieramy ten o najmniejszej współrzędnej x), który będzie punktem startowym.
3. **Sortowanie kątowe:** Uporządkowujemy pozostałe punkty rosnąco względem kąta, jaki tworzą z osią poziomą względem punktu bazowego, co ma złożoność $O(n \log n)$.
4. **Budowanie otoczki:** Rozważa kolejny punkt w posortowanej tablicy, nazwijmy go Q **hull**.
5. **Weryfikacja poprawności punktu:** Dla punktu Q sprawdzamy, czy utworzony kąt jest wypukły:
   - Jeśli kąt jest wypukły (zgodnie z orientacją przeciwną do ruchu wskazówek zegara), punkt Q jest dodawany do otoczki **hull**.
   - Jeśli kąt jest wklęsły, usuwamy ostatnio dodany punkt z otoczki i ponownie sprawdzamy warunek, czy końcowy punkt otoczki tworzy kąt wypukły z następnym punktem Q.
6. **Zakończenie algorytmu:** Proces kontynuujemy, aż wrócimy do punktu startowego, czyli aż do momentu $P == Q$. Zwraca **hull**.

Algorytm Grahama jest szczególnie wydajny dla zbiorów punktów losowych oraz równomiernie rozłożonych, jak np. punkty na okręgu. Jego wydajność wynika z efektywnego sortowania i eliminacji punktów, które nie są częścią otoczki. Jendak dla bardzo dużych zbiorów danych, dla których ilość punktów na otoczce jest niewielka, sortowanie może okazać się niepotrzebne. W takim przypadku lepiej jest użyć innego algorytmu, który opisany jest poniżej.

2.2 Algorytm Jarvisa

Algorytm Jarvisa, znany także jako algorytm "zawijania prezentu", jest bardziej intuicyjnym podejściem do wyznaczania otoczki wypukłej o złożoności czasowej $O(nh)$, gdzie h to liczba punktów na otoczce. W pesymistycznym przypadku złożoność ta wynosi $O(n^2)$. Algorytm iteracyjnie wybiera kolejne punkty otoczki na podstawie kąta tworzonego z bieżącym punktem. Kroki algorytmu są następujące:

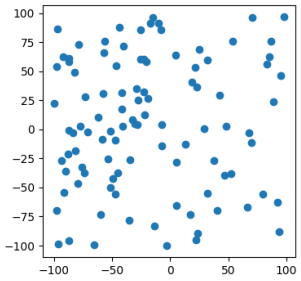
1. **Tworzenie tablicy:** Inicjalizuje pustą tablicę **hull**
2. **Wybór punktu początkowego:** Wybiera punkt, nazwijmy go P o najmniejszej współrzędnej y (jeśli jest kilka takich punktów, wybieramy ten o najmniejszej współrzędnej x), który będzie punktem początkowym otoczki. Dodaje go do **hull**
3. **Wybór kolejnego punktu:** W każdym kroku wybieramy kolejny punkt najbardziej wysunięty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara względem bieżącego punktu na otoczce, który znajduje się również najdalej. Nazwijmy go Q, dodaje go do **hull**.
4. **Budowa łańcucha otoczki:** Każdy nowo wybrany punkt staje się bieżącym punktem otoczki, a krok 2 jest powtarzany aż do powrotu do momentu, kiedy $P! = Q$.

5. **Zakończenie algorytmu:** Algorytm kończy się, gdy wybrany punkt jest ponownie punktem początkowym, zwraca otoczkę składającą się z punktów na **hull**.

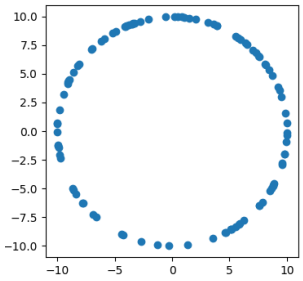
Algorytm Jarvisa sprawdza się dobrze dla zbiorów o "rzadkiej" otoczce wypukłej (z dużą liczbą punktów wewnętrznych w stosunku do liczby punktów brzegowych). Jest szczególnie efektywny, gdy liczba punktów tworzących otoczkę jest znacznie mniejsza od ogólnej liczby punktów, co może być korzystne np. dla punktów leżących na krawędziach prostokąta, lub wielokątów, dla których $k < \log n$, gdzie k to liczba wierzchołków.

3 Generowanie danych

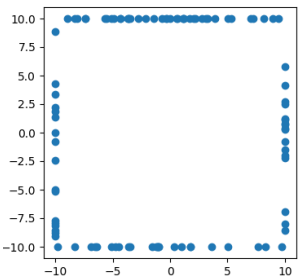
Poniżej znajdują się wykresy i opisy metod wykorzystanych do generowania zbiorów punktów użytych do obliczeń.



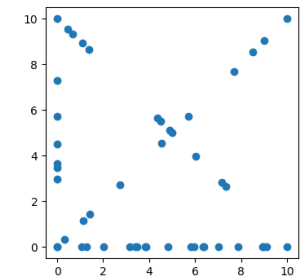
(a) Wygenerowano 100 losowych punktów w przedziale $[-100, 100]$ przy użyciu funkcji `uniform(-100, 100)` z biblioteki `random`. Wynikowa chmura punktów została zwizualizowana na Wykresie powyżej.



(b) W kolejnym zbiorze punkty są równomiernie rozmieszczone na okręgu o promieniu $R = 10$ i o środku w $(0, 0)$. Wizualizacja tych punktów znajduje się na wykresie powyżej.



(c) Wygenerowano punkty leżące na bokach kwadratu o wierzchołkach $(-10, 10)$, $(-10, -10)$, $(10, -10)$, $(10, 10)$. Każdy bok prostokąta zawiera proporcjonalnie rozłożone punkty, a wizualizacja tego zbioru jest przedstawiona na wykresie powyżej.



(d) Punkty w tej sekcji rozmieszczono wokół kwadratu o wierzchołkach $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 10)$, $(0, 10)$. Na osiach OX i OY umieszczono po 25 punktów, natomiast na przekątnych $y = x$ oraz $y = 10 - x$ po 20 punktów. Wizualizacja punktów na bokach i przekątnych znajduje się na wykresie powyżej.

4 Przebieg obliczeń

Dla każdego zbioru danych wyznaczono otoczkę wypukłą za pomocą obu opisanych algorytmów: Grahama i Jarvisa. W obliczeniach zastosowano precyzję typu float32 oraz parametr $\epsilon = 10^{-18}$, dobrany eksperymentalnie w celu uniknięcia błędów zaokrągleń.

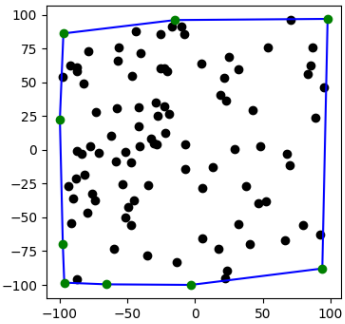
5 Prezentacja wyników

W tabelach zestawiono czasy wykonania poszczególnych algorytmów dla różnych zbiorów danych. Wyniki przedstawiono na wykresach, gdzie oznaczenia są następujące:

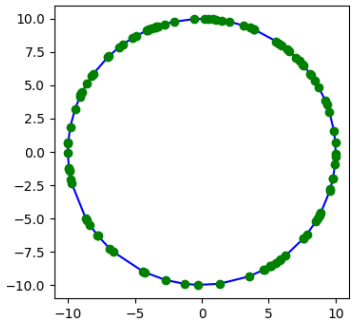
- Punkty należące do otoczki są zaznaczone na zielono.
- Punkty wewnętrzne, które nie należą do otoczki, są zaznaczone na czarno.
- Krawędzie otoczki wypukłej są zaznaczone na niebiesko.

5.1 Obliczenia dla przykładowych zbiorów

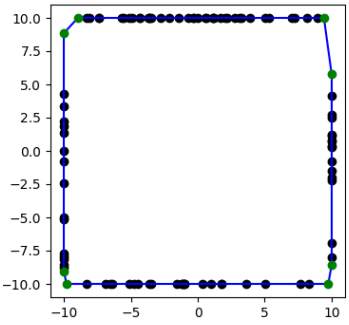
Dla zilustrowania działania algorytmów i ich dokładności, przeprowadzono obliczenia na kilku przykładowych zbiorach punktów. Przedstawiono zarówno czas wykonania obliczeń, jak i uzyskaną otoczkę wypukłą dla każdego przypadku, aby umożliwić porównanie efektywności obu metod.



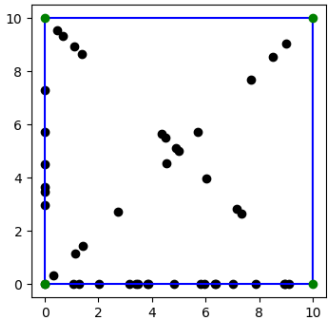
(a) Wizualizacja otoczki wypukłej dla zbioru A



(b) Wizualizacja otoczki wypukłej dla zbioru B



(c) Wizualizacja otoczki wypukłej dla zbioru C



(d) Wizualizacja otoczki wypukłej dla zbioru D

Tabela poniżej przedsawia porównianie czasów wykonania dla algorytmu Grahama i algorytmu Jarvisa w zaokrągleniu do 4 miejsc po przecinku dla milisekund.

Tabela 1: Tabela różnica czasów obliczeń dla podstawowych zbiorów A, B, C i D

Ilość punktów	Algorytm Grahama	Algorytm Jarvisa	Punkty na otoczce wypukłej
100	0,0 μs	999,4507 μs	9
100	595,0928 μs	6,6411 ms	100
100	1,0006 ms	0,0 μs	8
45	0,0 μs	0,0 μs	4

6 Zbiory zmodyfikowane

6.1 Modyfikacja zbiorów testowych

W celu przeprowadzenia testów wydajnościowych algorytmów zmodyfikowano poprzednie zbiory:

- **Zbiór A**: Zawiera losowo wygenerowane punkty o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000].
- **Zbiór B**: Zawiera losowo wygenerowane punkty leżące na okręgu o środku $(100, 100)$ i promieniu $R = 3000$.
- **Zbiór C**: Zawiera losowo wygenerowane punkty leżące na bokach prostokąta o wierzchołkach $(-1000, 1000), (1000, 1000), (1000, 1000), (-1000, 1000)$.
- **Zbiór D**: Zawiera wierzchołki kwadratu $(0, 0), (1000, 0), (1000, 1000), (0, 1000)$ oraz punkty wygenerowane losowo na przekątnych kwadratu o liczności n i dwóch bokach kwadratu znajdujących się na osiach o liczności m. Przyjąłem, że $\frac{n}{m} = \frac{4}{5}$

Zbiory te wygenerowano dla zadanych o licznościach:

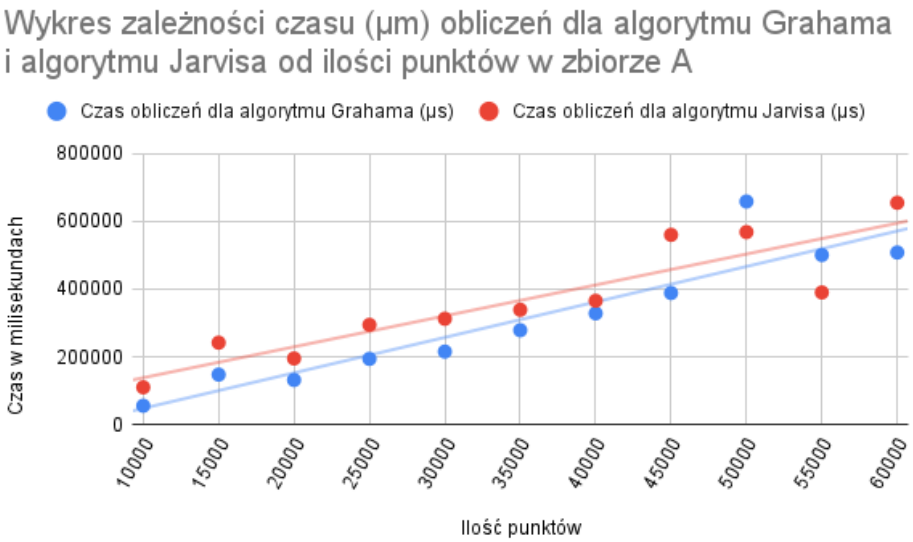
- $n \in \{10000, 15000, 20000, 25000, 30000, 35000, 40000, 45000, 50000, 55000, 60000\}$ dla zbiorów A i C,
- $n \in \{100, 200, 300, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 6000, 10000\}$ dla zbioru B,
- $m+n \in \{22500, 33750, 45000, 56250, 67500, 78750, 90000, 101250, 112500, 123750, 135000\}$ dla zbioru D.

Podczas testów weryfikowano zgodność liczby punktów otoczki wynikowych zwracanych przez oba algorytmy, w celu weryfikacji implementacji, zwłaszcza dla przypadku zbióru B.

6.2 Zbiór A

Tabela 2: Tabela różnic czasów obliczeń dla algorytmu Grahama i Jarvisa dla zmodyfikowanego zbioru A

Ilość punktów	Algorytm Grahama	Algorytm Jarvisa	Punkty na otoczce wypukłej
10000	55,5928 ms	110,0578 ms	24
15000	147,5341 ms	241,8611 ms	27
20000	131,6946 ms	195,2589 ms	25
25000	194,0067 ms	294,481 ms	28
30000	215,5235 ms	312,4542 ms	26
35000	278,6458 ms	338,9909 ms	25
40000	328,4674 ms	365,5345 ms	22
45000	388,4759 ms	560,2539 ms	29
50000	658,7453 ms	568,4695 ms	29
55000	500,7644 ms	390,1613 ms	19
60000	508,148 ms	654,9058 ms	29



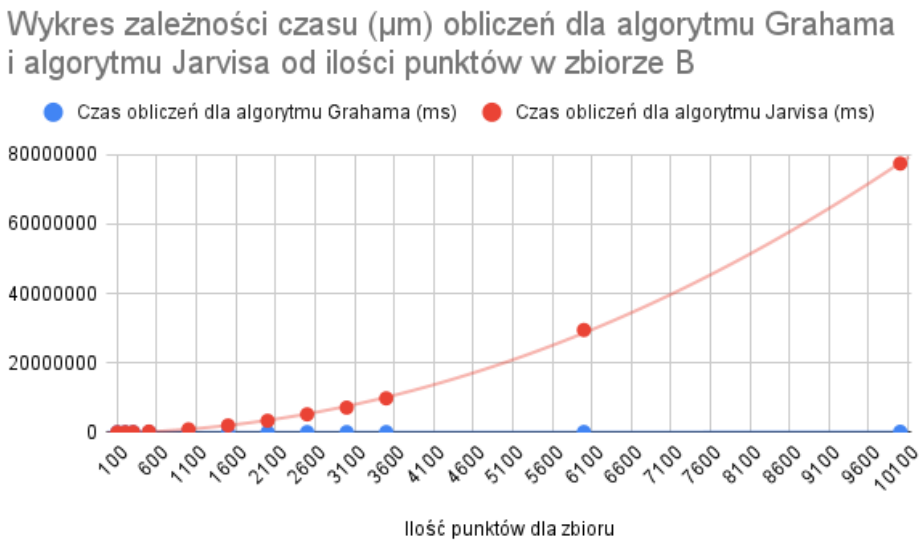
Wykres 3: Porównanie graficzne czasu wyznaczania otoczki wypukłej przez algorytmy dla zmodyfikowanego zbioru A

W **Tabeli** 2 i na **Wykresie** 3, algorytm Grahama wykazuje się lepszą efektywnością w stosunku do algorytmu Jarvisa dla zbioru losowych punktów w przestrzeni dwuwymiarowej. Linia trendu dla algorytmu Grahama jest zbliżona do liniowej, ponieważ dla różnic ilości punktów rzędu $\Delta n = 10^4$, składnik $\log n \approx 13$. Algorytm Jarvisa jest w tym przypadku wolniejszy, jednak różnica jest niewielka, ponieważ największa ilość punktów znajdujących się na otoczce to $k = 29$ i algorytm Grahama może mieć w mojej implementacji dużą stałą. Dla rozkładów powyżej wartość można zrobić oszacowanie $k \approx 1.3 \cdot logn$.

6.3 Zbiór B

Tabela 3: Tabela różnic czasów obliczeń dla algorytmu Grahama i Jarvisa dla zmodyfikowanego zbioru B

Ilość punktów	Algorytm Grahama	Algorytm Jarvisa	Punkty na otoczce wypukłej
100	0,0 μs	9,0001 ms	100
200	999,9275 μs	32,0237 ms	200
300	2,0235 ms	69,0019 ms	300
500	3,0246 ms	198,199 ms	500
1000	7,9994 ms	820,411 ms	1000
1500	12,9988 ms	1,938 s	1500
2000	16,9988 ms	3,2977 s	2000
2500	28,9989 ms	5,1429 s	2500
3000	30,9975 ms	7,0856 s	3000
3500	37,029 ms	9,7628 s	3500
6000	60,998 ms	29,4608 s	6000
10000	127,9974 ms	77,4403 s	10000



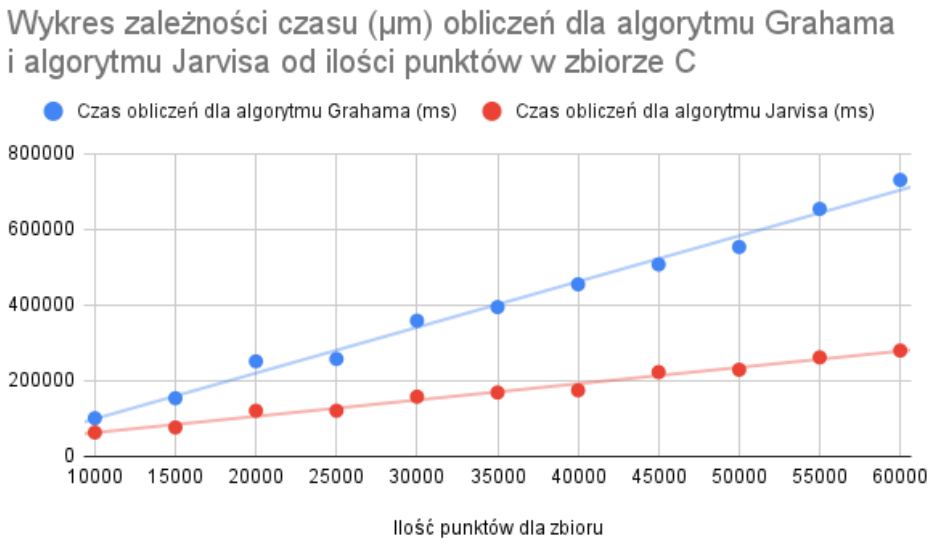
Wykres 4: Porównanie graficzne czasu wyznaczania otoczki wypukłej przez algorytmy dla zmodyfikowanego zbioru B

Dla każdej kolejnej liczności zmodyfikowanego generatora zbiorów B, liczba punktów otoczki jest równa liczbie wszystkich punktów, co było oczekiwane i dowodzi poprawności implementacji obu algorytmów. Jak można zauważyć na **Wykresie** 4, krzywa trendu dla tego algorytmu ma postać kwadratową. Związane jest to z faktem, że ilość punktów na otoczce $k = n$, co skutkuje osiągnięciem przez ten algorytm złożoności $O(n^2)$. Jak widać w **Tabeli** 3 , złożoność algorytmu Grahama sprawia, że jest on zdecydowanie lepszym wyborem dla tego zbioru. W najgorszym przypadku 10000 punktów w zbiorze stosunek czasów wykonania algorytmów to $\frac{t_J}{t_G} \approx 682$.

6.4 Zbiór C

Tabela 4: Tabela różnic czasów obliczeń dla algorytmu Grahama i Jarvisa dla zmodyfikowanego zbioru C

Ilość punktów	Algorytm Grahama	Algorytm Jarvisa	Punkty na otoczce wypukłej
10000	101,1715 ms	63,3497 ms	8
15000	153,9557 ms	76,6666 ms	8
20000	251,3793 ms	120,8305 ms	8
25000	257,6144 ms	120,8324 ms	8
30000	358,6156 ms	157,8729 ms	8
35000	394,6457 ms	168,9529 ms	8
40000	454,8154 ms	174,7561 ms	8
45000	507,2525 ms	222,8427 ms	8
50000	553,3626 ms	229,1861 ms	8
55000	654,083 ms	261,8713 ms	8
60000	730,5443 ms	279,7983 ms	8



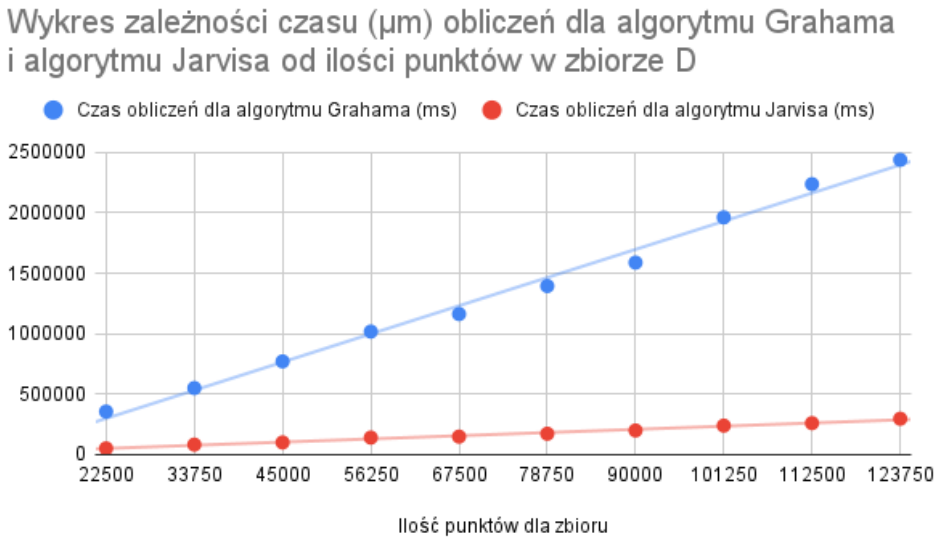
Wykres 5: Porównanie graficzne czasu wyznaczania otoczki wypukłej przez algorytmy dla zmodyfikowanego zbioru C

W przypadku zmodyfikowanym C, jak widać na **Tabeli** 4 oraz na **Wykresie** 5, występuje inna różnica czasu obliczeń. W tym przypadku ilość punktów na otoczce $k = 8$, przez co złożoność algorytmu Jarvisa jest rzędu $O(n)$, a dla algorytmu Grahama złożoność to dalej $O(nlogn)$. Wynika z tego, że dla zbiorów o m.in. dużej zawartości punktów współliniowych (a w efekcie ograniczonym k), algorytm Jarvisa jest ma krótszy czas obliczeń.

6.5 Zbiór D

Tabela 5: Tabela różnic czasów obliczeń dla algorytmu Grahama i Jarvisa dla zmodyfikowanego zbioru D

Ilość punktów	Algorytm Grahama	Algorytm Jarvisa	Punkty na otoczce wypukłej
22500	356,2996 ms	51,9669 ms	4
33750	550,7028 ms	82,9678 ms	4
45000	771,1387 ms	100,9698 ms	4
56250	1,0179 s	141,001 ms	4
67500	1,1629 s	149,0333 ms	4
78750	1,3947 s	172,9193 ms	4
90000	1,5884 s	200,0017 ms	4
101250	1,9623 s	240,0343 ms	4
112500	2,2371 s	260,53 ms	4
123750	2,4383 s	296,999 ms	4
135000	2,6013 s	299,9678 ms	4



Wykres 6: Porównanie graficzne czasu wyznaczania otoczki wypukłej przez algorytmy dla zmodyfikowanego zbioru D

W tym przypadku również algorytm Jarvisa dużo szybciej oblicza otoczę wypukłą, jak widać na **Tabeli** 5 oraz na **Wykresie** 6. Otoczka wypukła zbioru D zawiera wyłącznie wierzchołki kwadratu i ilość punktów na otoczce to oczywiście $k = 4$. Liczba ta jest dwukrotnie mniejsza niż w ostanim przypadku, daltego też algorytm Jarvisa znacznie lepiej sobie radzi, niż algorytm Grahama.

7 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonego ćwiczenia można wyciągnąć następujące wnioski:

- Po wykonaniu ćwiczenia można zauważyć, dlaczego zostały zaproponowany zbiory A,B,C i D:
  - Zbiór A - miał za zadanie uwzględniać przypadek jednorodnego losowego rozkładu puktów, w zmodyfikowanej formie była to dobry zbiór dla wizualizacji algorytmu Grahama.
  - Zbiór B - weryfikował, czy cały okrąg zostanie oznaczony jako otoczka wypukła. Był to dobry test dla tolerancji ϵ, dzięki któremu dla większych danych założyłem ostatecznie $\epsilon = 10^{-18}$. Był to też najlepszy test na pokazanie złożoności $O(n^2)$ dla algorytmu Jarvisa.
  - Zbiór C - sprawdzał działanie wykluczania współliniowości punktów, otoczka ma co najmniej 4 punkty i co najwyżej 8 punktów.
  - Zbiór D - miał tylko jedną poprawną odpowiedź, były to 4 punkty na krawędziach kwadratu. Sprawdzał poprawność i wykluczanie punktów współliniowych z otoczki.
- Algorytm Grahama wykazał przewagę czasową nad algorytmem Jarvisa dla dużych zbiorów punktów o losowym rozkładzie (np. zbiór A, C), co wynika z jego złożoności $O(n \log n)$ w porównaniu do $O(n * k)$ Jarvisa, dla których $\log n < k$. Dzięki temu jest bardziej wydajny w przypadku zbiorów o dużej ilości punktów należących do otoczki wypukłej.
- Algorytm Jarvisa okazał się bardziej efektywny w przypadku zbiorów, gdzie liczba punktów tworzących otoczkę wypukłą, k, jest stosunkowo mała (np. zbiory z punktami ułożonymi w siatkę, jak w zbiorze C i D). W takich sytuacjach algorytm osiąga złożoność bliską liniowej względem liczby punktów w otoczce, co przekłada się na krótszy czas wykonania w porównaniu do algorytmu Grahama.
- Testy wskazują, że liczba punktów tworzących otoczkę wypukłą (k) znacząco wpływa na czas działania algorytmu Jarvisa. W przypadku zbioru, w którym wszystkie punkty leżą na otoczce (np. zbiór B), złożoność algorytmu Jarvisa rośnie do $O(n^2)$, co sprawia, że jego czas wykonania jest znacznie dłuższy niż czas działania algorytmu Grahama.
- Wybór odpowiedniego algorytmu zależy od charakterystyki zbioru punktów:
  - Algorytm Grahama jest bardziej uniwersalny i lepiej sprawdza się w przypadku zbiorów o rozkładzie losowym oraz dla dużych zbiorów punktów.
  - Algorytm Jarvisa wykazuje przewagę przy zbiorach, gdzie większość punktów znajduje się wewnątrz otoczki lub rozkład punktów jest taki, że tylko nieliczne tworzą jej krawędź.

Podsumowując, oba algorytmy efektywnie rozwiązują problem wyznaczania otoczki wypukłej, jednak wybór algorytmu powinien opierać się na porównaniu między k i $\log n$, jeżeli jesteśmy w stanie oszacować te wartości. W praktyce może to oznaczać że dla łatwego zaznaczania punktów na mapie dla danego obszaru ograniczonego lepszy będzie algorytm Grahama, ze względu na losowe rozmieszczenie punktów na obszarze. Zaś dla danych geologicznych o określonej strukturze lepszy byłby algorytm Jarvisa.