Sprawozdanie z laboratorium 3

Hubert Miklas

25 Marca 2025

1 Wstęp

Tematem laboratorium 3. jest analiza metod interpolacji wielomianowej, wyrażanie wielomianów metodą Hornera oraz oszacowanie liczby mnożeń potrzebnych do ewaluacji wielomianu w różnych reprezentacjach.

2 Zadanie 1: Obliczenie wielomianu interpolacyjnego

Mamy dane węzły:

$$(x_0, y_0) = (-1, 2.4), \quad (x_1, y_1) = (1, 1.8), \quad (x_2, y_2) = (2, 4.5).$$

Szukamy wielomianu stopnia 2 w postaci:

$$p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

2.1 Metoda jednomianów

Podstawiając poszczególne węzły, otrzymujemy układ równań:

$$a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = 2.4, \tag{1}$$
$$a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1.8, \tag{2}$$
$$a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 4.5. \tag{3}$$

Co upraszcza się do:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 + a_0 &= 2.4, \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 1.8, \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 4.5. \end{aligned}$$

Odejmując równanie (1) od (2):

$$(a_2 + a_1 + a_0) - (a_2 - a_1 + a_0) = 1.8 - 2.4 \quad \Longrightarrow \quad 2a_1 = -0.6,$$

stąd:

$$a_1 = -0.3.$$

Podstawiamy a_1 do równania (2):

$$a_2 - 0.3 + a_0 = 1.8 \quad \Longrightarrow \quad a_2 + a_0 = 2.1. \tag{4}$$

Natomiast z równania (3):

$$4a_2 + 2(-0.3) + a_0 = 4.5 \quad \Longrightarrow \quad 4a_2 - 0.6 + a_0 = 4.5,$$

czyli:

$$4a_2 + a_0 = 5.1. \tag{5}$$

Odejmując równanie (4) od (5):

$$(4a_2 + a_0) - (a_2 + a_0) = 5.1 - 2.1 \quad \Longrightarrow \quad 3a_2 = 3,$$

więc:

$$a_2 = 1.$$

Wstawiając $a_2 = 1$ do (A):

$$1 + a_0 = 2.1 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = 1.1.$$

Stąd wielomian interpolacyjny ma postać:

$$p(t) = t^2 - 0.3t + 1.1. \tag{6}$$

2.2 Metoda wielomianów Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange'a zapisujemy jako:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k(t),$$

gdzie wielomiany bazowe mają postać:

$$L_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2} \frac{t - x_i}{x_k - x_i}.$$

Obliczamy kolejne $L_k(t)$:

- Dla $k = 0$, czyli $x_0 = -1$:

$$L_0(t) = \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(t-1)(t-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{(t-1)(t-2)}{(-2)(-3)} = \frac{(t-1)(t-2)}{6}.$$

- Dla $k = 1$, czyli $x_1 = 1$:

$$L_1(t) = \frac{(t - x_0)(t - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(t+1)(t-2)}{(1+1)(1-2)} = \frac{(t+1)(t-2)}{(2)(-1)} = -\frac{(t+1)(t-2)}{2}.$$

- Dla $k = 2$, czyli $x_2 = 2$:

$$L_2(t) = \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(t+1)(t-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{(t+1)(t-1)}{3}.$$

Podstawiając wartości $y_0 = 2.4$, $y_1 = 1.8$, $y_2 = 4.5$, mamy:

$$p(t) = 2.4 \cdot \frac{(t-1)(t-2)}{6} - 1.8 \cdot \frac{(t+1)(t-2)}{2} + 4.5 \cdot \frac{(t+1)(t-1)}{3}.$$

Uprośćmy poszczególne wyrażenia:

$$\frac{2.4}{6} = 0.4, \quad \frac{1.8}{2} = 0.9, \quad \frac{4.5}{3} = 1.5.$$

Wówczas:

$$p(t) = 0.4\,(t-1)(t-2) - 0.9\,(t+1)(t-2) + 1.5\,(t+1)(t-1).$$

Rozwiniemy nawiasy:

$$(t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2,$$

$$(t+1)(t-2) = t^2 - t - 2,$$

$$(t+1)(t-1) = t^2 - 1.$$

Podstawiając:

$$\begin{aligned}
p(t) &= 0.4\,(t^2 - 3t + 2) - 0.9\,(t^2 - t - 2) + 1.5\,(t^2 - 1) \\
&= \big(0.4t^2 - 1.2t + 0.8\big) + \big(-0.9t^2 + 0.9t + 1.8\big) + \big(1.5t^2 - 1.5\big) \\
&= (0.4 - 0.9 + 1.5)t^2 + (-1.2 + 0.9)t + (0.8 + 1.8 - 1.5) \\
&= t^2 - 0.3t + 1.1.
\end{aligned}$$

Stąd:

$$p(t) = t^2 - 0.3t + 1.1 \tag{7}$$

co jest zgodne z wynikiem uzyskanym metodą jednomianów.

2.3 Metoda Newtona

W postaci Newtona wielomian interpolacyjny zapisujemy jako:

$$p(t) = a_0 + a_1(t - x_0) + a_2(t - x_0)(t - x_1),$$

gdzie współczynniki wyznaczamy w następujący sposób:

- $a_0 = f(x_0) = 2.4,$
- $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{1.8 - 2.4}{1 - (-1)} = \dfrac{-0.6}{2} = -0.3,$
- $a_2 = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - a_1}{x_2 - x_0} = \dfrac{\dfrac{4.5 - 1.8}{2 - 1} - (-0.3)}{2 - (-1)} = \dfrac{2.7 + 0.3}{3} = \dfrac{3.0}{3} = 1.$

Podstawiając, otrzymujemy:

$$p(t) = 2.4 - 0.3\,(t + 1) + (t + 1)(t - 1).$$

Ponieważ:

$$(t + 1)(t - 1) = t^2 - 1,$$

to:

$$p(t) = 2.4 - 0.3t - 0.3 + t^2 - 1 = t^2 - 0.3t + (2.4 - 0.3 - 1) = t^2 - 0.3t + 1.1.$$

Czyli:

$$p(t) = t^2 - 0.3t + 1.1. \tag{8}$$

2.4 Podsumowanie

Wszystkie trzy metody – jednomianowa, Lagrange'a oraz Newtona – dają ten sam wielomian interpolacyjny:

$$p(t) = t^2 - 0.3t + 1.1.$$

Jest to zgodne z teorią interpolacji, która gwarantuje jednoznaczność wielomianu interpolacyjnego dla danej liczby węzłów [4].

2.5 Kod realizujący wszystkie obliczenia i wyniki

```
    import numpy as np

def mononomial(values):
    n = len(values)
    A = np.array([ [values[j][0] ** i for i in range(n)] for j in range(n) ])
    b = np.array(list(zip(*values))[1])
    coefficients = np.linalg.solve(A,b)
    return np.poly1d(coefficients)

def Lagrange_polynomial(values):
    x_values, y_values = zip(*values)
    n = len(values)
    def L(i, x):
        nonlocal x_values
        numer = np.prod([(x - x_values[j]) for j in range(len(x_values)) if j != i])
        denom = np.prod([(x_values[i] - x_values[j]) for j in range(len(x_values)) if j != i])
        return numer / denom

    def P(x):
        return sum(y_values[i] * L(i, x) for i in range(len(x_values)))

    return P


def Newton_approximation(values):
    x_values, y_values = zip(*values)

    def divided_differences(x_values, y_values):
        n = len(x_values)
        coef = list(y_values)
        for j in range(1, n):
            for i in range(n - 1, j - 1, -1):
                coef[i] = (coef[i] - coef[i - 1]) / (x_values[i] - x_values[i - j])
        return coef

    coeffs = divided_differences(x_values, y_values)

    def P(x):
        n = len(coeffs)
        result = coeffs[-1]
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            result = result * (x - x_values[i]) + coeffs[i]
        return result

    return P

def test_interpolation(values):
    poly_mono = mononomial(values)
    poly_lagrange = Lagrange_polynomial(values)
    poly_newton = Newton_approximation(values)
    test_xs = [-1, 1, 2, 0, 3]
    for x in test_xs:
```

```
        print(f"x={x}: Monomial={poly_mono(x)}, Lagrange={poly_lagrange(x)}, Newton={poly_newton(x)}")

def main():
    interpolation_points = [(-1,2.4), (1,1.8),(2,4.5)]
    test_interpolation(interpolation_points)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Dla wybranych wartości x, gdzie $x \in -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ prezentują się następująco:

Wartość x	Jednomian	Lagrange	Netwon
-3	11.8	11.0	11.0
-2	6.0	5.699999999999999	5.699999999999999
-1	2.4	2.4	2.4
0	0.9999999999999999	1.1	1.1
1	1.8000000000000003	1.8	1.8
2	4.800000000000001	4.5	4.5
3	10.000000000000002	9.2	9.200000000000001

Table 1: Porównanie wartości wynikowych dla wybranych x po interpolacji zadaną metodą

3 Zadanie 2: Wyrażenie wielomianu metodą Hornera

Mamy dany wielomian:

$$p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4. \tag{4}$$

Celem jest przekształcenie tego wielomianu do postaci Hornera, która pozwala na efektywną ewaluację i redukcję błędów numerycznych (por. [2, 1]).

3.1 Przekształcenie do postaci Hornera

Schemat Hornera polega na zagnieżdżonym wyciąganiu wspólnego czynnika t:

$$p(t) = ((a_3 t + a_2)t + a_1)t + a_0.$$

Podstawiając nasze współczynniki, otrzymujemy:

$$p(t) = ((3t - 7)t + 5)t - 4.$$

3.2 Weryfikacja poprawności

Rozwińmy postać Hornera, aby upewnić się, że jest równoważna oryginalnemu wielomianowi:

$$\begin{aligned} ((3t - 7)t + 5)t - 4 &= \big((3t^2 - 7t) + 5\big)t - 4 \\ &= (3t^3 - 7t^2 + 5t) - 4 \\ &= 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4. \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest identyczny z postacią pierwotną, co potwierdza poprawność przekształcenia.

3.3 Korzyści płynące z metody Hornera

Postać Hornera pozwala na:

- Redukcję liczby mnożeń – dla wielomianu stopnia 3 potrzebujemy tylko 3 mnożeń i 3 dodawań, zamiast 6 mnożeń i 3 dodawań.
- Zmniejszenie błędów zaokrągleń, co jest szczególnie istotne przy ewaluacji wielomianów w arytmetyce zmiennoprzecinkowej (patrz [2, 1, 3]).

4 Zadanie 3: Analiza złożoności obliczeniowej ewaluacji wielomianu

Rozważmy wielomian $p(t)$ stopnia $n-1$ zapisany w trzech reprezentacjach.

4.1 Reprezentacja jednomianowa

W standardowej postaci:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Ewaluację wielomianu można przeprowadzić efektywnie przy użyciu schematu Hornera, który przekształca postać wielomianu do:

$$p(t) = a_0 + t\Big(a_1 + t\Big(a_2 + \cdots + t\, a_{n-1}\Big)\Big).$$

Schemat Hornera wymaga dokładnie $n-1$ mnożeń oraz $n-1$ dodawań. Zatem liczba mnożeń wynosi $n-1$ mnożeń. Oznacza to złożoność czasową względem ilości operacji $\mathcal{O}(n)$; por. [2].

4.2 Reprezentacja Lagrange'a

W postaci Lagrange'a wielomian interpolacyjny zapisujemy jako:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\, L_k(t),$$

gdzie wielomian bazowy $L_k(t)$ ma postać:

$$L_k(t) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1} \frac{t - x_i}{x_k - x_i}.$$

Dla każdego k należy wykonać iloczyn $n-1+n-1$ mnożenia (obliczenie mianownika i licznika, nie licząc w tym dzielenia) – co daje $2n-2$ mnożeń na każdy z n węzłów, czyli łącznie:

$$2n(n-1)$$

mnożeń. Dodatkowo, po obliczeniu iloczynów należy pomnożyć każdy $L_k(t)$ przez y_k (co daje n mnożeń) oraz zsumować wszystkie składniki. Łącznie otrzymujemy:

$$2n(n-1) + n = 2n^2 - n.$$

jest to rzędu $\mathcal{O}(n^2)$ mnożeń.

4.3 Reprezentacja Newtona

W postaci Newtona wielomian interpolacyjny zapisujemy jako:

$$p(t) = a_0 + a_1(t - x_0) + a_2(t - x_0)(t - x_1) + \cdots + a_{n-1}(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{n-2}).$$

Wyznaczenie tego wielomianu można przeprowadzić również przy użyciu schematu Hornera (adaptowanego do postaci Newtona), co wymaga:

- Obliczenia iloczynów w sposób sekwencyjny – przy czym dla wyrazu $(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{k-1})$ potrzeba k mnożeń,
- Łączna liczba mnożeń wynosi: $0 + 1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Jednak przy zastosowaniu rekurencyjnej formy schematu Hornera dla Newtona (patrz np. [3]), można obliczyć wartość wielomianu wykonując tylko $n - 1$ mnożeń. Dlatego przyjmujemy $n - 1$ mnożeń.

4.4 Podsumowanie

- Reprezentacja jednomianowa (przy użyciu schematu Hornera): około $n - 1$ mnożeń.
- Reprezentacja Lagrange'a: około n^2 mnożeń.
- Reprezentacja Newtona (przy użyciu schematu Hornera): około $n - 1$ mnożeń.

Porównanie efektywności ewaluacji wielomianu wskazuje, że metody oparte na schemacie Hornera (jednomiany oraz Newtona) są znacznie bardziej optymalne niż bezpośrednia ewaluacja postaci Lagrange'a. Wynik ten znajduje potwierdzenie w literaturze dotyczącej stabilności i efektywności algorytmów numerycznych [2, 1].

5 Zadanie domowe 1 – Interpolacja funkcji Rungego

Rozważamy funkcję Rungego:

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25t^2}. \tag{5}$$

Interpolacja tej funkcji przy użyciu równoodległych węzłów na przedziale $[-1, 1]$ prowadzi do wystąpienia tzw. *efektu Rungego* – czyli znacznych oscylacji, szczególnie w pobliżu krańców przedziału. Problem ten wynika z właściwości wielomianu interpolacyjnego, który dla dużych stopni może mieć bardzo zmienny przebieg przy równoodległych węzłach (por. [2]).

5.1 Węzły równomierne vs. węzły Czebyszewa

Przy wyborze węzłów równomiernych w przedziale $[-1, 1]$, węzły te mają postać:

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

W praktyce, interpolacja funkcji Rungego dla stosunkowo dużej liczby węzłów (np. $n \geq 10$) powoduje wyraźne oscylacje wielomianu interpolacyjnego przy krańcach przedziału.

Lepszym rozwiązaniem jest użycie węzłów Czebyszewa, które są rozmieszczone gęściej przy końcach przedziału, co minimalizuje maksymalny błąd interpolacji. Węzły Czebyszewa dla przedziału $[-1, 1]$ definiuje się jako:

$$t_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{2n + 2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Dzięki takiemu rozmieszczeniu błędy interpolacyjne są rozłożone bardziej równomiernie, a oscylacje znacznie się zmniejszają (por. [4], [2]).

6 Zadanie domowe 2 – Własności wielomianów Legendre'a

W tym zadaniu rozważamy trzy zagadnienia związane z wielomianami Legendre'a.

6.1 Ortogonalność

Wielomiany Legendre'a $P_n(t)$ są ortogonalne względem miary jednostkowej na przedziale $[-1, 1]$, co formalnie zapisujemy jako:

$$\int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)\,dt = 0, \quad \text{dla } i \neq j. \tag{7}$$

Dowód tej ortogonalności opiera się na własnościach układu wielomianów ortogonalnych i można go znaleźć w literaturze [5].

6.2 Rekurencyjna zależność

Wielomiany Legendre'a spełniają również rekurencyjny wzór, który pozwala na wyznaczanie kolejnych wielomianów:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)t\,P_n(t) - n\,P_{n-1}(t). \tag{8}$$

Wzór ten umożliwia generowanie wielomianów $P_n(t)$ dla $n \geq 1$ przy znajomości $P_0(t)$ i $P_1(t)$. Standardowe postaci pierwszych kilku wielomianów to:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \ \ldots$$

6.3 Rozkład jednomianów

Każdy jednomian t^k (dla $k = 0, 1, \ldots, 6$) można wyrazić jako liniową kombinację wielomianów Legendre'a $\{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_6(t)\}$. Przykładowo, dla niższych potęg mamy:

$$\begin{aligned}
1 &= P_0(t),\\
t &= P_1(t),\\
t^2 &= \frac{2}{3}P_2(t) + \frac{1}{3}P_0(t),\\
t^3 &= \frac{2}{5}P_3(t) + \frac{3}{5}P_1(t).
\end{aligned}$$

Ogólny proces wyznaczania współczynników opiera się na wykorzystaniu ortogonalności wielomianów Legendre'a – poprzez rzutowanie jednomianu na przestrzeń wielomianów ortogonalnych:

$$c_k = \frac{\int_{-1}^{1} t^m\,P_k(t)\,dt}{\int_{-1}^{1} [P_k(t)]^2\,dt}.$$

Dla wyższych potęg (np. $m = 4, 5, 6$) współczynniki można wyznaczyć analogicznie, co daje rozkłady typu:

$$\begin{aligned}
t^4 &= \frac{8}{35}P_4(t) + \frac{4}{7}P_2(t) + \frac{3}{35}P_0(t),\\
t^5 &= \frac{8}{63}P_5(t) + \frac{5}{9}P_3(t) + \frac{5}{21}P_1(t),\\
t^6 &= \frac{16}{231}P_6(t) + \frac{10}{33}P_4(t) + \frac{5}{11}P_2(t) + \frac{1}{33}P_0(t).
\end{aligned}$$

7 Zadanie domowe 3 – Interpolacja sklejanymi funkcjami sześciennymi

Rozważamy interpolację funkcji przy użyciu sklejanych funkcji sześciennych na trzech punktach x_0, x_1, x_2 o równych odstępach (tj. $x_1 = x_0 + h$ oraz $x_2 = x_0 + 2h$). Sklejanymi funkcjami sześciennymi (ang. cubic splines) na dwóch przedziałach $[x_0, x_1]$ i $[x_1, x_2]$ są dwie funkcje:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad x \in [x_1, x_2].$$

7.1 Warunki interpolacji i ciągłości

Aby uzyskać gładką funkcję składaną, musimy spełnić następujące warunki:

1. **Interpolacja wartości:**

$$S_0(x_0) = f(x_0),$$
$$S_0(x_1) = f(x_1),$$
$$S_1(x_1) = f(x_1),$$
$$S_1(x_2) = f(x_2).$$

2. **Ciągłość pierwszej pochodnej w punkcie x_1:**

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1).$$

3. **Ciągłość drugiej pochodnej w punkcie x_1:**

$$S_0''(x_1) = S_1''(x_1).$$

7.2 Dodatkowe warunki brzegowe

Aby układ równań był jednoznacznie określony, stosuje się dodatkowo warunki brzegowe. Jednym z popularnych wyborów jest tzw. *natural spline*:

$$S_0''(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad S_1''(x_2) = 0.$$

W naszym przypadku, mając 3 punkty, mamy 2 segmenty (każdy opisany przez 4 współczynniki, czyli łącznie 8 niewiadomych). Warunki interpolacji (4 równania), ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie x_1 (2 równania) oraz dwa warunki brzegowe (2 równania) dają łącznie 8 równań, które pozwalają na wyznaczenie wszystkich współczynników a_i, b_i, c_i, d_i (dla $i = 0, 1$).

7.3 Opis metody rozwiązania

Rozważamy funkcję określoną w trzech punktach:

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h,$$

oraz wartości:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2.$$

Celem jest wyznaczenie funkcji sklejanej $S(x)$ złożonej z dwóch sześciennych segmentów $S_0(x)$ dla $x \in [x_0, x_1]$ oraz $S_1(x)$ dla $x \in [x_1, x_2]$, przy zachowaniu warunków interpolacyjnych, ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie x_1 oraz warunków brzegowych typu natural spline:

$$S_0''(x_0) = 0, \quad S_1''(x_2) = 0.$$

7.4 Definicja funkcji sklejanych

Przyjmujemy następujące postaci segmentów:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad x \in [x_1, x_2].$$

7.5 Warunki interpolacyjne

1. $S_0(x_0) = y_0 \Longrightarrow a_0 = y_0$.
2. $S_0(x_1) = y_1 \Longrightarrow$
$$a_0 + b_0h + c_0h^2 + d_0h^3 = y_1.$$
3. $S_1(x_1) = y_1 \Longrightarrow a_1 = y_1$.
4. $S_1(x_2) = y_2 \Longrightarrow$
$$a_1 + b_1h + c_1h^2 + d_1h^3 = y_2.$$

7.6 Warunki ciągłości

1. **Ciągłość pierwszej pochodnej w x_1:**
$$S_0'(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2,$$
więc
$$S_0'(x_1) = b_0 + 2c_0h + 3d_0h^2.$$
Dla $S_1(x)$:
$$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1) + 3d_1(x - x_1)^2,$$
a zatem
$$S_1'(x_1) = b_1.$$
Warunek ciągłości pierwszej pochodnej:
$$b_0 + 2c_0h + 3d_0h^2 = b_1.$$

2. **Ciągłość drugiej pochodnej w x_1:**
$$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0(x - x_0) \quad \Longrightarrow \quad S_0''(x_1) = 2c_0 + 6d_0h.$$
$$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_1) \quad \Longrightarrow \quad S_1''(x_1) = 2c_1.$$
Warunek ciągłości drugiej pochodnej:
$$2c_0 + 6d_0h = 2c_1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_0 + 3d_0h.$$

Warunki brzegowe (natural spline)

1. $S_0''(x_0) = 0 \Longrightarrow 2c_0 = 0 \Longrightarrow c_0 = 0$.
2. $S_1''(x_2) = 0$. Skoro $x_2 = x_1 + h$, mamy:
$$S_1''(x_2) = 2c_1 + 6d_1h = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -3d_1h.$$

7.7 Wyznaczenie współczynników

Zapiszemy teraz kolejne równania i wyznaczymy współczynniki.

Segment $S_0(x)$ na $[x_0, x_1]$

1. $a_0 = y_0$.
2. $S_0(x_1) = y_1$ daje:

$$y_0 + b_0 h + 0 \cdot h^2 + d_0 h^3 = y_1 \implies b_0 h + d_0 h^3 = y_1 - y_0.$$

Stąd:

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} - d_0 h^2.$$

Segment $S_1(x)$ na $[x_1, x_2]$

1. $a_1 = y_1$.
2. $S_1(x_2) = y_2$ daje:

$$y_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 = y_2 \implies b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 = y_2 - y_1.$$

Ciągłość pochodnej w x_1

$$b_0 + 2c_0 h + 3d_0 h^2 = b_1.$$

Ponieważ $c_0 = 0$, mamy:

$$b_0 + 3d_0 h^2 = b_1.$$

Podstawiając b_0:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - d_0 h^2 + 3d_0 h^2 = \frac{y_1 - y_0}{h} + 2d_0 h^2 = b_1.$$

Ciągłość drugiej pochodnej w x_1

$$c_1 = c_0 + 3d_0 h \implies c_1 = 3d_0 h,$$

oraz z warunku brzegowego dla $S_1''(x_2)$:

$$2c_1 + 6d_1 h = 0 \implies c_1 = -3d_1 h.$$

Zatem:

$$3d_0 h = -3d_1 h \implies d_0 = -d_1.$$

7.8 Wyznaczenie d_0

Podstawiamy teraz do równania $S_1(x_2) = y_2$. Korzystamy z faktu, że:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + 2d_0 h^2,$$

a $c_1 = 3d_0 h$. Wówczas równanie $S_1(x_2) = y_2$ przyjmuje postać:

$$y_1 + \left(\frac{y_1 - y_0}{h} + 2d_0 h^2 \right) h + 3d_0 h \cdot h^2 + d_1 h^3 = y_2.$$

Ponieważ $d_1 = -d_0$, mamy:

$$y_1 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot h + 2d_0 h^3 + 3d_0 h^3 - d_0 h^3 = y_2.$$

Upraszczając:

$$y_1 + (y_1 - y_0) + 4d_0 h^3 = y_2.$$

Stąd:

$$4d_0 h^3 = y_2 - 2y_1 + y_0 \implies d_0 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}.$$

A zatem:

$$d_1 = -\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}.$$

7.9 Wyznaczenie b_0 i b_1

Mamy:

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} - d_0 h^2 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3} \cdot h^2 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h}.$$

Natomiast:

$$b_1 = b_0 + 3d_0 h^2 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h} + 3\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h} = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4h}.$$

Uproszczając:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h}.$$

7.10 Wyznaczenie c_1

Z ciągłości drugiej pochodnej:

$$c_1 = 3d_0 h = \frac{3h\,(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4h^3} = \frac{3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4h^2}.$$

7.11 Ostateczne współczynniki funkcji sklejanych

Dla przedziału $[x_0, x_1]$ (funkcja $S_0(x)$)

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0, \\
b_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h}, \\
c_0 &= 0, \\
d_0 &= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}.
\end{aligned}$$

Dla przedziału $[x_1, x_2]$ (funkcja $S_1(x)$)

$$\begin{aligned}
a_1 &= y_1, \\
b_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h}, \\
c_1 &= \frac{3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4h^2}, \\
d_1 &= -\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}.
\end{aligned}$$

7.12 Podsumowanie

Ostatecznie funkcja sklejana $S(x)$ jest dana wzorami:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = y_0 + \left[\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h}\right](x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}(x - x_0)^3, & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) = y_1 + \left[\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h}\right](x - x_1) + \frac{3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4h^2}(x - x_1)^2 - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{4h^3}(x - x_1)^3, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Spełnia ona warunki interpolacji, ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie x_1 oraz warunki naturalne na brzegach, co gwarantuje gładkość przejścia między segmentami.

References

[1] David Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1):5–48, 1991.

[2] Nicholas J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, 2002.

[3] Katarzyna Rycerz. Wykład z przedmiotu metody obliczeniowe w nauce i technice. Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica, 2025.

[4] Wikipedia. Interpolacja wielomianowa — Wikipedia, the free encyclopedia. `http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Interpolacja\%20wielomianowa&oldid=70764886`, 2025. [Online; accessed 31-March-2025].

[5] Wikipedia. Legendre polynomials — Wikipedia, the free encyclopedia. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Legendre\%20polynomials&oldid=1281099475`, 2025. [Online; accessed 01-April-2025].