例题 1 求

$$f(x,y)=\begin{cases} y\ln\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的偏导数。

解 由于

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{\Delta y\ln(\Delta y)^2}{\Delta y}=\ln(\Delta y)^2,$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\text{ 不存在.}\quad \square$$

例题 2 考察

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{当 } xy\neq 0,\\ 0, & \text{当 } xy=0.\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处对 x,y 的偏导数，在 $(0,0)$ 点的连续性和极限存在性。

如果偏导数在某一点的邻域内存在而且有界，则可推出函数在该点连续。

例题 3 证明函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域内存在且有界，则 f 在 (x_0,y_0) 点连续。

提示：微分中值定理

显然 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但 f 在 $(0,0)$ 点不连续, 甚至极限也不存在.

证 注意到

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

利用一元函数的微分中值定理, 得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 已知 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有界, 所以

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0,$$

即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续. $\square$

例题 4 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，证明：(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 都存在；(3) 从定义出发证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

证 (1) 由于 $|\Delta f|=|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}$, 于是

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(f(0,0)+\Delta f)=0=f(0,0).$$

(2) 直接按定义计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

(3) 由于

$$\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2},$$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$, 则

$$\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{r}=\frac{|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点不可微. □

例题 5 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数，且 $f(x,x^2)\equiv 1$. (1) 若 $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$；(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$.

例题 6 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数，求 z_x,z_y 及 z_{xy}.

例题 7 设 $x=\cos\varphi\cos\psi, y=\cos\varphi\sin\psi, z=\sin\varphi$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 (1) 对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两边求导得

$$f_x+2xf_y=0.$$

由条件得

$$x+2xf_y=0,$$

所以当 $x\neq 0$ 时, $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$. 由 f_y 的连续性知当 $x=0$ 时也有 $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$.

(2) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$, 则 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微, 且

$$F_y(x,y)=0.$$

于是 $F(x,y)$ 只是 x 的函数, 即 $F(x,y)=\varphi(x)$, 从而

$$f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

再由 $f(x,x^2)\equiv 1$ 得 $\varphi(x)=1-2x^4$, 所以

$$f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4.\quad\square$$

解 先求 z_x. 在 $F(x-y, y-z)=0$ 两边对 x 求导, 得

$$F_1 - z_x F_2 = 0, \tag{20.3}$$

于是得 $z_x = \frac{F_1}{F_2}$.

求 z_y. 可用公式

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-F_1+F_2}{-F_2} = \frac{F_2-F_1}{F_2}.$$

求 z_{xy}. 在 (20.3) 两边对 y 求导, 得

$$-F_{11} + F_{12}(1-z_y) - \{[-F_{21} + F_{22}(1-z_y)]z_x + F_2 z_{xy}\} = 0. \tag{20.4}$$

将 z_x, z_y 的表达式代入 (20.4), 得到

$$-F_{11} + F_{12}\frac{F_1}{F_2} - [(-F_{21} + F_{22}\frac{F_1}{F_2})\frac{F_1}{F_2} + F_2 z_{xy}] = 0.$$

解出 z_{xy} 得

$$z_{xy} = \frac{1}{F_2^3}(2F_1F_2F_{12} - F_2^2F_{11} - F_1^2F_{22}).$$

也可先在 $F-1-F_2+F_2z_y=0$ 两边对 x 求导, 然后解出 z_{xy}. □

解 1 由所给方程组的前两个方程可确定 $\varphi=\varphi(x,y), \psi=\psi(x,y)$, 故 $z=\sin\varphi(x,y)$, 即 z 是以 φ 为中间变量的 x,y 的函数, 所以

$$z_x = \cos\varphi\cdot\varphi_x. \tag{20.11}$$

在前两个方程两边对 x 求导, 得

$$1 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi + \cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x,$$

$$0 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cdot\psi_x.$$

解出

$$\varphi_x = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}, \quad \psi_x = -\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \tag{20.12}$$

代入 (20.11) 得

$$z_x = -\cot\varphi\cos\psi.$$

在上式两边再对 x 求导得

$$z_{xx} = \csc^2\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi + \cot\varphi\sin\psi\cdot\psi_x.$$

将 (20.12) 代入, 得到

$$z_{xx} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi - 1}{\sin^3\varphi}. \quad □$$

解 2 由已知条件得 $x^2+y^2+z^2=1$, 两边对 x 求两次导数, 注意到 y 与 x 是各自独立的变量, 得

$$x + zz_x = 0, \qquad 1 + z_x^2 + zz_{xx} = 0,$$

于是

$$z_x = -\frac{x}{z},$$

$$z_{xx} = -\frac{z^2+x^2}{z^3} = \frac{y^2-1}{z^3} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi - 1}{\sin^3\varphi}. \quad □$$

例题 8 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-e^{x\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的 *4* 阶 *Taylor* 多项式，并求出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0), \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$.

解 由于

$$e^{x(x^2+y^2)}=1+x(x^2+y^2)+\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2+o([x(x^2+y^2)]^2),$$

于是

$$\frac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}=-x-\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+o(x^2(x^2+y^2)).$$

由 Taylor 展式的惟一性知 $f(x,y)$ 的 4 阶 Taylor 展开式为

$$-x-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2.$$

由此得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=4!(-\frac{1}{2})=-12.\quad\square$$