偏导与全微分 & 泰勒展开

面临升学困难的黄思思 ◊ 巴德年数应专业摸鱼
Blog: https://hc1023.github.io/

2020 年 4 月 19 日

1 轻松的分享

1.1 微积分这门课

1. 众多数学课程以及理工类课程的基础，常微分、偏微分、概率论与数理统计 etc
2. 抽象思维导引，比如著名的 $\epsilon-\delta$ 语言

1.2 学习资源

1. 推荐一个很好的下载书籍的网站：https://b-ok.xyz/
2. 文本编辑：Here comes LaTeX! Miktex+TeXworks+Mathpix; Markdown 语法！Typora or VS code.

2 偏导数

以二元函数为例，设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义。固定 $y=y_0$ 将 $f(x,y)$ 视为 x 的一元函数。如果它在 x_0 点可导，定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点关于 x 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x},$$

类似定义 $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$ 以及任意个变元的多元函数的偏导数。

一定要牢记定义！

例题 1 求

$$f(x,y)=\begin{cases} y\ln\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的偏导数。

在一元函数中，可导可以推出连续，但在多元函数中，若 f 在某一点对每一个变元的偏导数存在，不能说 f 在该点连续，甚至不能说 f 在该点的极限存在。

例题 2 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当} xy\neq 0,\\ 0, & \text{当} xy=0.\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处对 x,y 的偏导数，在 $(0,0)$ 点的连续性和极限存在性。

如果偏导数在某一点的邻域内存在而且有界，则可推出函数在该点连续。

例题 3 证明函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域内存在且有界，则 f 在 (x_0,y_0) 点连续。

提示：微分中值定理

3 全微分

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域上有定义，如果 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(r),$$

其中 A,B 是两个仅与点 (x_0,y_0) 有关而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，$o(r)$ 是当 $r\to 0$ 时关于 r 的高阶无穷小量，$r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 f 在点 (x_0,y_0) 可微，且称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是 f 在 (x_0,y_0) 点的全微分。又可以写作

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$$

全微分具有下列性质：（1）如果 f 在点 (x_0,y_0) 可微，则

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

（2）若 f 在点 (x_0,y_0) 可微，则 f 在点 (x_0,y_0) 连续

例题 4 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，证明：（*1*）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；（*2*）$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 都存在；（*3*）从定义出发证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

偏导数存在，可微和连续的关系：可微则偏导数存在，偏导数存在且连续则可微。偏导数存在且在某邻域内偏导数有界则连续，可微则连续，连续不能反向推出任何一者。

可以直接对函数求全微分来求偏导数。

4 隐函数偏导数

例题 5 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数，且 $f(x,x^2)\equiv 1$. （*1*）若 $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$; （*2*）若 $f_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$.

例题 6 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数，求 z_x,z_y 及 z_{xy}.

例题 7 设 $x=\cos\varphi\cos\psi,y=\cos\varphi\sin\psi,z=\sin\varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5 Taylor 展开

这里直接讨论二元函数的泰勒展开。

Taylor 公式：设函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 $D=\left\{(x,y)\middle|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2\right\}$. 内有关于 x,y 的各个 $m+1$ 阶连续偏导数。对 D 内任意一点 (x,y)，记 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，则

$$\begin{aligned}f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right)&+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\Delta y\\&+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(x_0,y_0\right)+\cdots\\&+\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\left(x_0,y_0\right)+R_m(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$R_m(x,y)=\frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y\right)$$

$0<\theta<1$，称为 Lagrange 余项。

（Taylor 公式的唯一性）设 $f(x,y)$ 具有 $m+1$ 阶连续偏导数，若用某种方法得到展开式

$$f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{m}A_{ij}\left(x-x_0\right)^i\left(y-y_0\right)^j+o\left(\rho^m\right),$$

其中 $\rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$，则必有

$$A_{ij}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f\left(x_0,y_0\right).$$

记住几个常见的泰勒展开。应用：1. 利用已有的常见泰勒展开求其他函数的泰勒展开；2. 利用泰勒展开求高阶导数。

例题 8 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\mathrm{e}^{x\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的 4 阶 Taylor 多项式，并求出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0),\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$.

6 考试准备

注重定义 + 例题

考试仔细些就好了。