Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Группа
Б03-908

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ - 2

Приближение функций(интерполяция)

Выполнил: / / /
(подпись) *(дата)*

Агеев Рамиль Наильевич

Долгопрудный
2021г.

Содержание

1 Условие задачи

Вариант 4

При исследовании некоторой химической реакции через каждые 10 минут измерялась концентрация образующегося в ходе реакции вещества. Результаты измерений представлены в таблице.

t, мин	10	20	30	40	50	60	70
C,моль/литр	10	340	550	580	490	490	490

С помощью интерполяции найти максимальную концентрацию вещества.

Рис. 1: Условие задачи

2 Построение интерполяционного полинома

2.1 Полином в форме Ньютона

Теория

Интерполяция - способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

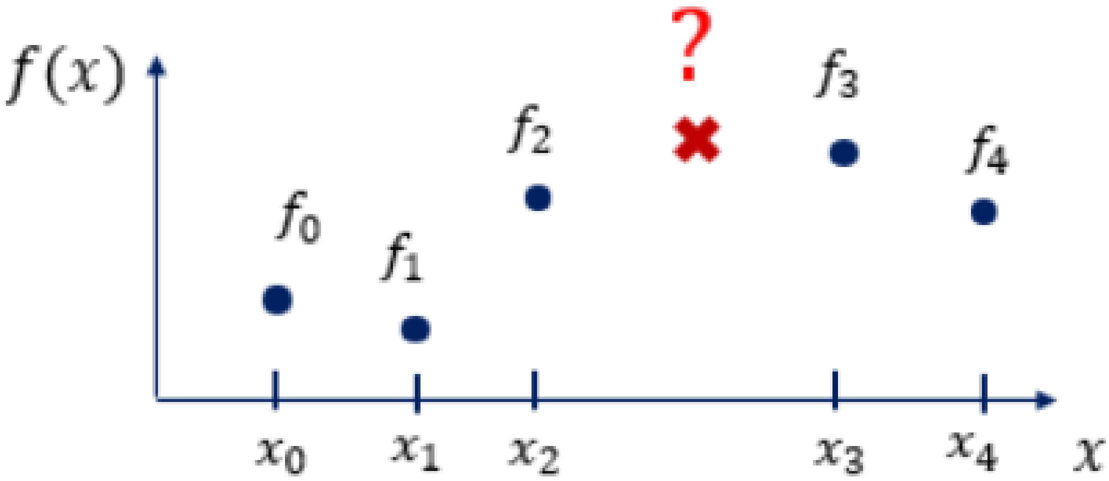

Рис. 2: Задача интерполяции

Утверждение Если заданы $N+1$ узлов $x_0, ..., x_N$, среди которых нет совпадающих, и значения функции в узлах $f(x_0), ..., f(x_N)$, то существует 1 и только 1 многочлен степени не выше N принимающий в узлах x_i заданные значения $f(x_i)$.

Как мы можем заметить, в данной задачи ни один узел не равен иному(однако, на всякий случай я и в коде делаю проверку для большей универсальности кода). Следовательно, мы можем найти интерполяционныый многочлен.

Я ищу полином в форме Ньютона, т.к. этот метод является наиболее распространенным на практике.

Общая формула и таблица разделенных разностей

Интерполяционный полином в форме Ньютона - разностный аналог формулы Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \cdots \tag{1}$$

Разделенная разность первого порядка

$$f_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}, \qquad i, j = 0, \ldots, N \quad i \neq j \tag{2}$$

Разделенная разность второго порядка

$$f_{j,j+1\,j+2} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f_{jj+1} - f_{j+1j+2}}{x_j - x_{j+2}} = \frac{\frac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} - \frac{f_{j+1} - f_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}}{x_j - x_{j+2}} \tag{3}$$

Разделенная разность k-го порядка

$$f_{j\,j+1\,j+2\,\ldots j+k} = f\big(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}\big) = \frac{f_{j+1\,\ldots j+k} - f_{j\ldots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j} \tag{4}$$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \cdots (x - x_0)\ldots(x - x_{N-1})f_{012\ldots N} \tag{5}$$

Давайте рассмотрим матрицу, которую используют для нахождения разделенных разностей полинома в форме Ньютона.

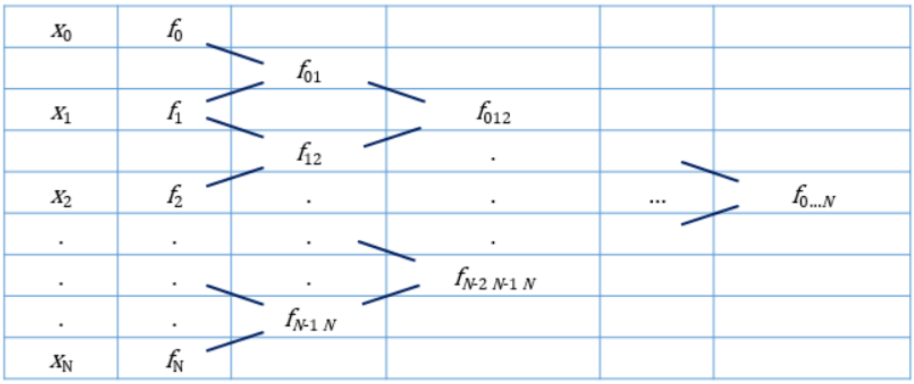

Рис. 3: Матрица

При написании кода я ориентировался на эту "таблицу". Однако, при выводе промежуточных значений("разделенных разностей") вы будете наблюдать не очень красивую картинку. У меня не получилось ее привести к такому виду, но смысл там в следующем: самая верхняя линия матрицы выше это самая левая строчка в промежуточных таблицах.

2.2 Код алгоритма

```
x = [i for i in range(10, 80, 10)]
f = [10, 340, 550, 580, 490, 490, 490]
N = len(f) - 1

F = [f]+[[0]*(N-i) for i in range(N)] #                    f

k = 1
for j in range(1, len(F)):
    for i in range(len(F[j])):
        if (x[i+k] - x[i]) != 0:
            F[j][i] = (F[j-1][i+1] - F[j-1][i]) / (x[i+k] - x[i])
        else:
            print(f"STOP! YOU HAVE EQUAL NODES: {x[i+k]} and {x[i]}")
            exit(0)
    k += 1
    print(tabulate(F, showindex=[f"k={i}" for i in range(N+1)], tablefmt="fancy_grid"))
```

2.3 Код нахождения максимума

```
def find_extremums(func, arg):

    dy = func.diff(arg)
    extremums = solve(dy, arg)

    return extremums


for el in find_extremums(f, x):
    print(f"f value and x: {f.subs(x, el), el}")
print("The max concentration is 591.198569714837")
```

В нахождении максимума функции - ответа на задачу, я использовал функцию f. Это и есть интерполяционный многочлен, который мы искали. Она имеет следующий вид:

```
P_6 = 10 + (x-10)*33.0 + (x-10)*(x-20)*-0.6 + (x-10)*(x-20)*(x-30)*-0.010000000000000002 +
 + (x-10)*(x-20)*(x-30)*(x-40)*0.0005000000000000001 + (x-10)*(x-20)*(x-30)*(x-40)*(x-50)*2.499999999999998e-06 +
 + (x-10)*(x-20)*(x-30)*(x-40)*(x-50)*(x-60)*-6.666666666666666e-07
```

Рис. 4: Функция

2.4 Промежуточные значения

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	0	0	0	0	0		
k=3	0	0	0	0			
k=4	0	0	0				
k=5	0	0					
k=6	0						

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	-0.6	-0.9	-0.6	0.45	0		
k=3	0	0	0	0			
k=4	0	0	0				
k=5	0	0					
k=6	0						

Рис. 5: Промежуточные таблицы 1

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	-0.6	-0.9	-0.6	0.45	0		
k=3	-0.01	0.01	0.035	-0.015			
k=4	0	0	0				
k=5	0	0					
k=6	0						

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	-0.6	-0.9	-0.6	0.45	0		
k=3	-0.01	0.01	0.035	-0.015			
k=4	0.0005	0.000625	-0.00125				
k=5	0	0					
k=6	0						

Рис. 6: Промежуточные таблицы 2

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	-0.6	-0.9	-0.6	0.45	0		
k=3	-0.01	0.01	0.035	-0.015			
k=4	0.0005	0.000625	-0.00125				
k=5	2.5e-06	-3.75e-05					
k=6	0						

k=0	10	340	550	580	490	490	490
k=1	33	21	3	-9	0	0	
k=2	-0.6	-0.9	-0.6	0.45	0		
k=3	-0.01	0.01	0.035	-0.015			
k=4	0.0005	0.000625	-0.00125				
k=5	2.5e-06	-3.75e-05					
k=6	-6.66667e-07						

Рис. 7: Промежуточные таблицы 3

Красная линия как раз показывает используемые разделенные разности в 5

3 Ответ

Используя код, для нахождения максимума получаем ответ, что максимальная концентрация $= 591.19$моль/литр в точке 36.4191 мин.

4 Вывод

В данной задаче мы использовали 7 узлов, что позволило нам построить многочлен степени $N = 6$. Благодаря этому мы достигли максимальной точности в построении интерполяционного многочлена. И, конечно же, решили поставленную задачу на нахождение максимальной концентрации