人工智能理论作业 2

数据科学与计算机学院

18340082 邝金熙

1. 给出具体问题的形式化约束满足问题，指出问题的变量，域以及约束

(a) Magic Square

变量：$P_i, \forall i \in \{1,2,...,9\}$，表示魔方格中九个位置的取值。

域：$\forall i, Dom(P_i) = \{1,2,...,9\}$

约束：$\{C1: \forall i, All-Diff(P_i),\ C2: P_1+P_2+P_3 = P_4+P_5+P_6 = P_7+P_8+P_9 = P_1+P_4+P_7 = P_2+P_5+P_8 = P_3+P_6+P_9 = P_1+P_5+P_9 = P_3+P_5+P_7\}$

(b) Independent Set

变量：$P_i, \forall i \in \{1,2,...,k\}$，表示该不相交集的 k 个顶点。

域：$\forall i, P_i \in V$

约束：$\{C1: \forall i,j \in \{1,2,...,k\}, P_i \neq P_j,\ C2: \forall i,j \in \{1,2,...,k\}, < P_i, P_j > \notin E\}$

(c) Crypto-arithmetic puzzle

变量：I,N,T,L,A

域：$Dom(I) = Dom(N) = Dom(T) = Dom(L) = Dom(A) = \{0,1,2,...,9\}$，注意到最高位的数字也可以为 0.

约束：$\{C1: (100I + 10N + T) * L = 1110A + I\}$

2. 分别用 FC 和 GAC 算法求解二元约束 CSP 问题

(a) FC 求解

Node 1: 当前被赋值变量与值:A=1;赋值后各变量的域:$D_A = \{1\}, D_B = \{\}, D_C = \{2,3,5,6,7,9\}, D_D = \{3,5,7,8,9\}$，DWO.

Node 2: 当前被赋值变量与值:A=2;赋值后各变量的域:$D_A=\{2\},D_B=\{\},D_C=\{2,3,5,6,7,9\},D_D=\{3,5,7,8,9\}$，DWO.

Node 3: 当前被赋值变量与值：A=3；赋值后各变量的域：$D_A=\{3\},D_B=\{3\},D_C=\{2,3,5,6,7,9\},D_D=\{3,5,7,8,9\}$.

Node 4: 当前被赋值变量与值：B=3；赋值后各变量的域：$D_A=\{3\},D_B=\{3\},D_C=\{2,5\},D_D=\{3,5,7,8,9\}$.

Node 5: 当前被赋值变量与值：C=2；赋值后各变量的域：$D_A=\{3\},D_B=\{3\},D_C=\{2\},D_D=\{3,5,7,8,9\}$.

Node 6: 当前被赋值变量与值：D=3；赋值后各变量的域：$D_A=\{3\},D_B=\{3\},D_C=\{2\},D_D=\{3\}$.

Node 7: 此时检查到所有的变量都已经被赋值,求解过程结束,问题的一个解为 A=3,B=3,C=2,D=3.

(b) GAC 求解

初始检查：约束队列 Q={C1,C2,C3}

- 检查 C1：(1) 检查变量 A，域修剪为 $D_A=\{3,4\}$，修剪后约束队列为 Q={C2,C3};(2) 检查变量 B，域修剪为 $D_B=\{3,4\}$，修剪后约束队列为 Q={C2,C3}。
- 检查 C2：(1) 检查变量 B，不需要修剪 B 的域;(2) 检查变量 C，域修剪为 $D_C=\{2,5,6\}$，修剪后约束队列为 Q={C3}。
- 检查 C3：(1) 检查变量 C，不需要修剪 C 的域;(2) 检查变量 D，不需要修剪 D 的域。Q 为空。

Node 1: 赋值 A=3，约束队列 Q={C1}

- 检查 C1：(1) 检查变量 A，不需修剪;(2) 检查变量 B，域修剪为 $D_B=\{3\}$，修剪后约束队列为 Q={C2}。
- 检查 C2：(1) 检查变量 B，不需修剪;(2) 检查变量 C，域修剪为 $D_C=\{2,5\}$，修剪后约束队列为 Q={C3}。
- 检查 C3：(1) 检查变量 C，不需修剪;(2) 检查变量 D，不需要修剪 D 的域。Q 为空。

Node 2: 赋值 B=3，约束队列 Q={C1,C2}

- 检查 C1：(1) 检查变量 A，不需修剪;(2) 检查变量 B，不需修剪。
- 检查 C2：(1) 检查变量 B，不需修剪;(2) 检查变量 C，不需修剪。Q 为空。

Node 2: 赋值 C=2，约束队列 Q={C2,C3}

- 检查 C2：(1) 检查变量 B，不需修剪;(2) 检查变量 C，不需修剪。
- 检查 C3：(1) 检查变量 C，不需修剪;(2) 检查变量 D，不需修剪。Q 为空。

Node 3: 赋值 D=3，约束队列 Q={C3}

- 检查 C3：(1) 检查变量 C，不需修剪;(2) 检查变量 D，不需修剪。Q 为空。

Node 4: 此时检查到所有变量已经被赋值, 求解过程结束, 问题的第一个解为 A=3,B=3,C=2,D=3.

3. 一阶逻辑的推理问题

(a) 用一阶逻辑写出相应事实，并说明不能推出 Ellen 未婚

使用四个常量 J,S,B,E 分别表示 Joe,Sally,Bill,Ellen；四个谓词：isMember(X) 表示 X 是俱乐部的成员，spouse(X,Y) 表示 X,Y 是配偶关系（不限定性别），brother(X,Y) 表示 X 是 Y 的兄弟，married(X) 表示 X 已婚。基于这些常量和谓词的事实与逻辑关系表示如下：

$$isMember(J), isMember(S), isMember(B), isMember(E)$$

$$spouse(J, S), spouse(S, J), brother(B, E)$$

$$\forall x \forall y (spouse(x, y) \to spouse(y, x))$$

$$\forall x (married(x) \to (\exists y\ spouse(x, y)))$$

$$\forall x \forall y (spouse(x, y) \land isMember(x) \to isMember(y))$$

现采用反证法，假设可以在语义上证明 E 未婚这一结论，那么将该结论取反，即 E 已婚，加入到知识库 KB 中必然是不可满足的。现给出一个可满足添加 E 已婚这一结论后的 KB’ 的一个

解释：Ellen 和其兄弟 Bill 是配偶关系，即有 spouse(E,B). 在该解释下满足原有知识库中的事实以及三条规则，同时也满足 E 已婚。因此假设前提不成立，即无法在语义上证明 E 未婚。

(b) 补充一些常识，并证明扩充后的知识库可以推出 Ellen 未婚

补充的常识包括：自己与自己不能成为配偶，自己的兄弟与自己不能成为配偶，每个人最多只有一位配偶，写成一阶逻辑形式如下：

$$\forall x(\neg spouse(x,x))$$

$$\forall x\forall y(brother(x,y)\rightarrow\neg spouse(y,x))$$

$$\forall x\forall y(spouse(x,y)\rightarrow\forall z\neq y(\neg spouse(z,x)))$$

现根据一阶谓词逻辑的推理形式（即离散数学课本第一章第六节中的格式）来证明 E 未婚：

Steps	Reason
1.$spouse(J,S)$	前提
2.$\forall x\forall y(spouse(x,y)\rightarrow\forall z\neq y(\neg spouse(z,x)))$	前提
3.$\neg spouse(E,J)$	(1)(2) 的假言推理，(2) 的全称例化
4.$\neg spouse(E,S)$	(1)(2) 的假言推理，(2) 的全称例化
5.$brother(B,E)$	前提
6.$\forall x\forall y(brother(x,y)\rightarrow\neg spouse(y,x))$	前提
7.$\neg spouse(E,B)$	(5)(6) 假言推理
8.$\forall x(\neg spouse(x,x))$	前提
9.$\neg spouse(E,E)$	(8) 全称例化
10.$\neg spouse(E,J)\wedge\neg spouse(E,S)\wedge\neg spouse(E,B)\wedge\neg spouse(E,E)$	(3)(4)(7)(9) 合取律
11.$\forall x\forall y(spouse(x,y)\wedge isMember(x)\rightarrow isMember(y))$	前提
12.$\forall y(spouse(E,y)\wedge isMember(E)\rightarrow isMember(y))$	全称例化
13.$\forall y\neq J,S,B,E,\neg spouse(E,y)$	(12) 假言易位
14.$\forall y\neg spouse(E,y)$	(10)(12) 合取律
15.$\forall x(married(x)\rightarrow(\exists y\ spouse(x,y)))$	前提
16.$\neg married(E)$	(14)(15) 假言易位，全称例化

4. 证明若一个二元关系具有对称性，传递性和 serial 性质，则其具有自反性

要证的结论为 $\forall x P(x,x)$，将其取反之后得到 $\exists x \neg P(x,x)$。将前面三个条件写成子句的形式即可得到下列序号为 1-3 的知识库，将取反后的结论等价写为序号 4 的子句，再在此基础上作归结即可得到归结结果为空，即原结论的否定在知识库中不可满足，即原结论可由知识库推理得到，如下所示，注意到 x,y,z,u,v,w 是变量，a 是常量：

写成子句的过程：

$$\forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x)) \Longrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \Longrightarrow (\neg P(x,y), P(y,x))$$

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) &\Longrightarrow \forall x \forall y \forall z (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee P(x,z)) \\ &\Longrightarrow (\neg P(u,v), \neg P(v,w), P(u,w)) \end{aligned}$$

$$\forall x \exists y \ P(x,y) \Longrightarrow \forall x P(x, f(x)) \Longrightarrow (P(z, f(z)))$$

$$\neg(\forall x P(x,x)) \Longrightarrow \exists x \neg P(x,x) \Longrightarrow (\neg P(a,a))$$

归结过程：

$1.(\neg P(x,y), P(y,x))$

$2.(\neg P(u,v), \neg P(v,w), P(u,w))$

$3.(P(z, f(z)))$

$4.(\neg P(a,a))$

$5.R[3,1a]\{x=z, y=f(z)\}(P(f(z),z))$

$6.R[3,2a]\{u=z, v=f(z)\}(\neg P(f(z),w), P(z,w))$

$7.R[5,6a]\{w=z\}P(z,z))$

$8.R[4,6]\{z=a\}()$