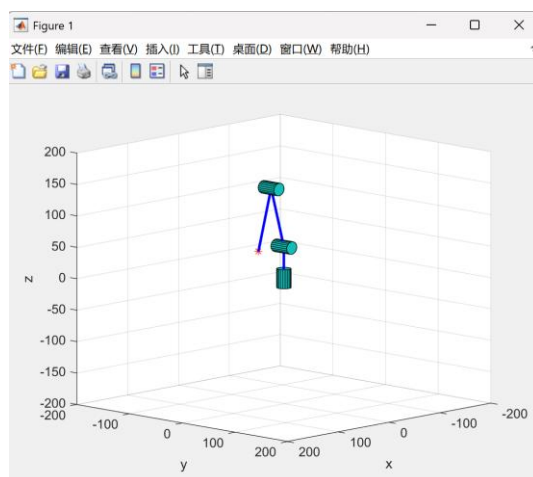


仿真实验二 机器人逆运动学分析

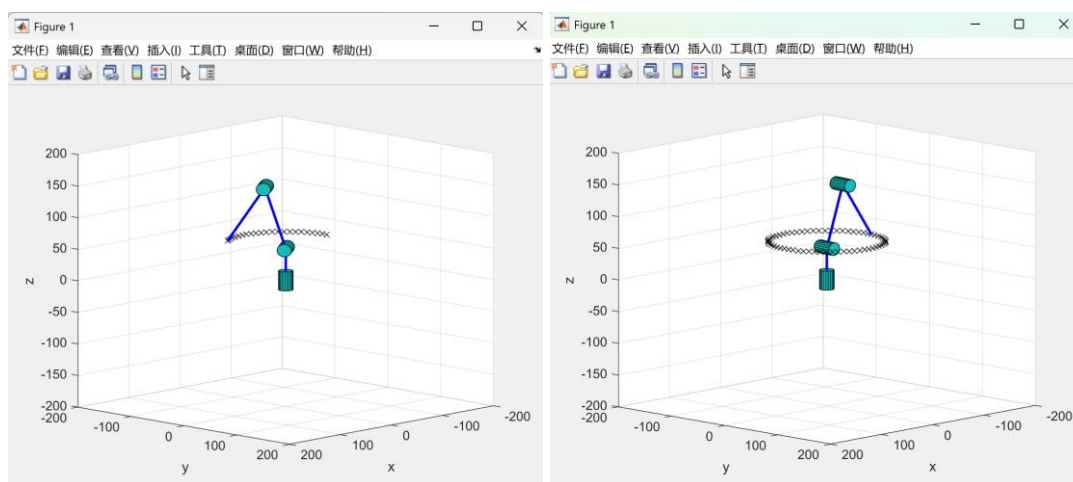
任务一：三自由度机械臂的解析解逆解算法

1.1 运行例程和分析代码

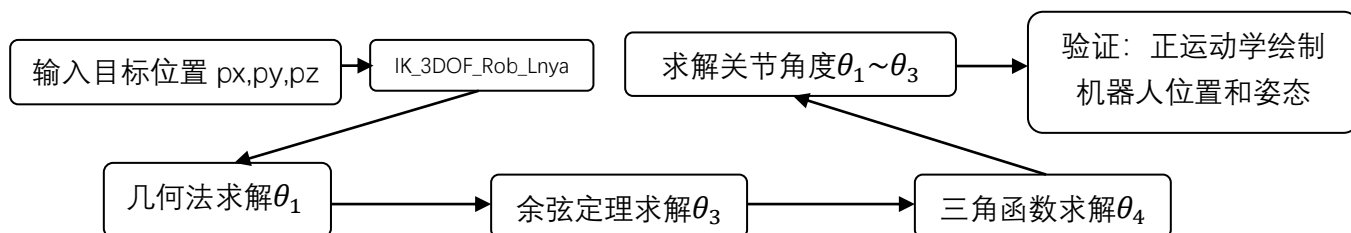


对于给定的位置，程序可以实现逆解，求得末端工作点位于给定位置时所对应的三个关节角，并显示对应的机器人的姿态。阅读代码可以发现，求逆解用的是 IK_3DOF_Rob_Lnya 函数。

绘图过程的动作连环图：

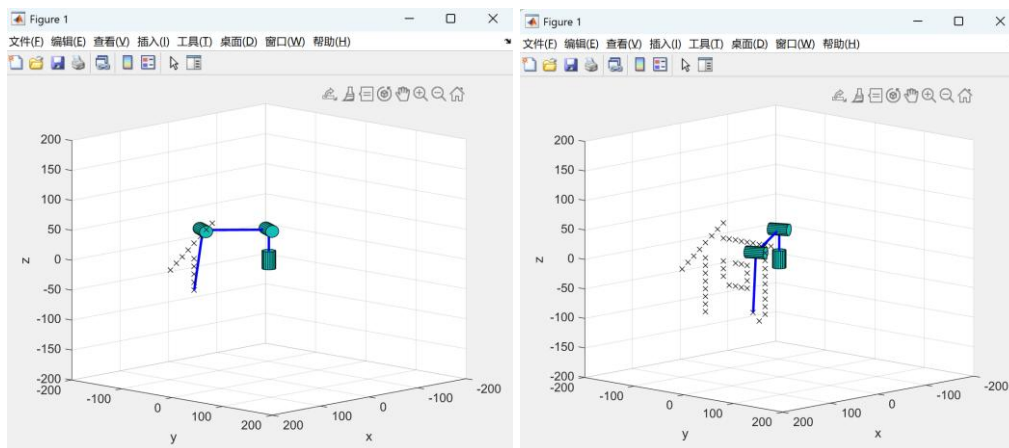


流程图：



1.2 书写汉字

绘制圆形例程中，通过循环给出若干个圆上点的 x,y,z 坐标，然后使用逆解求出各对应点的关节角，再用正运动学绘制机器人位置和姿态。我给出构成汉字“何”的 50 个点的 x,y,z 坐标，同理可求逆解，实现书写汉字。



1.3 基座偏移求解逆解

基座偏移量	末端期望位置	逆解关节角
沿着 z 轴平移 50, 绕着 x 轴旋转 -45°	$(0, 50, 50)$	$\theta_1 = -90^\circ$ $\theta_2 = 123.53^\circ$ $\theta_3 = 157.94^\circ$
沿着 x 轴平移 50, 绕着 x 轴旋转 90°	$(20, 50, 110)$	$\theta_1 = -74.74^\circ$ $\theta_2 = -179.43^\circ$ $\theta_3 = 81.37^\circ$

沿着 z 轴平移 50，绕着 x 轴旋转 -45° 的齐次变换矩阵： ${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

沿着 x 轴平移 50，绕着 x 轴旋转 90° 的齐次变换矩阵： ${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

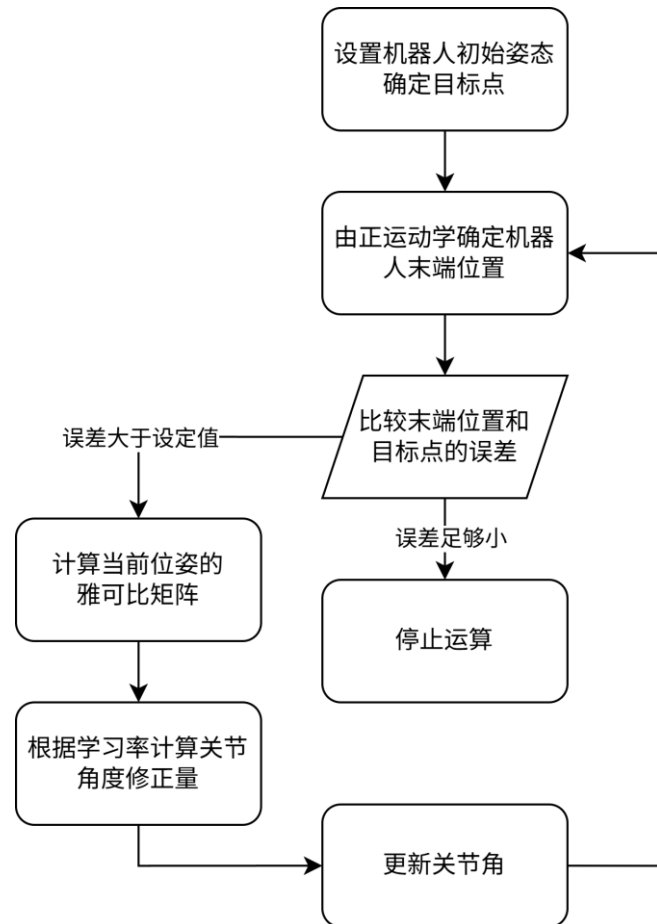
齐次变换矩阵公式： ${}^0T_3 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3$

求逆解实际上使用的是相对于基座的坐标 1T_3 ，而已知的是相对于世界坐标系的坐标 0T_3 。在基座没偏移时，基座与世界坐标系重合 ${}^0T_3 = {}^1T_3$ （此时 ${}^0T_1 = 1$ ），相对于基座的坐标与相对于世界坐标系的坐标相等，可以直接求逆。但基座发生偏移，坐标不再相等，无法直接求逆，需要求得 1T_3 。

$${}^1T_3 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^0T_1^{-1} \cdot {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^0T_1^{-1} \cdot {}^0T_3$$

任务二：三自由度机械臂数值解逆解算法

2.1 解法的流程图

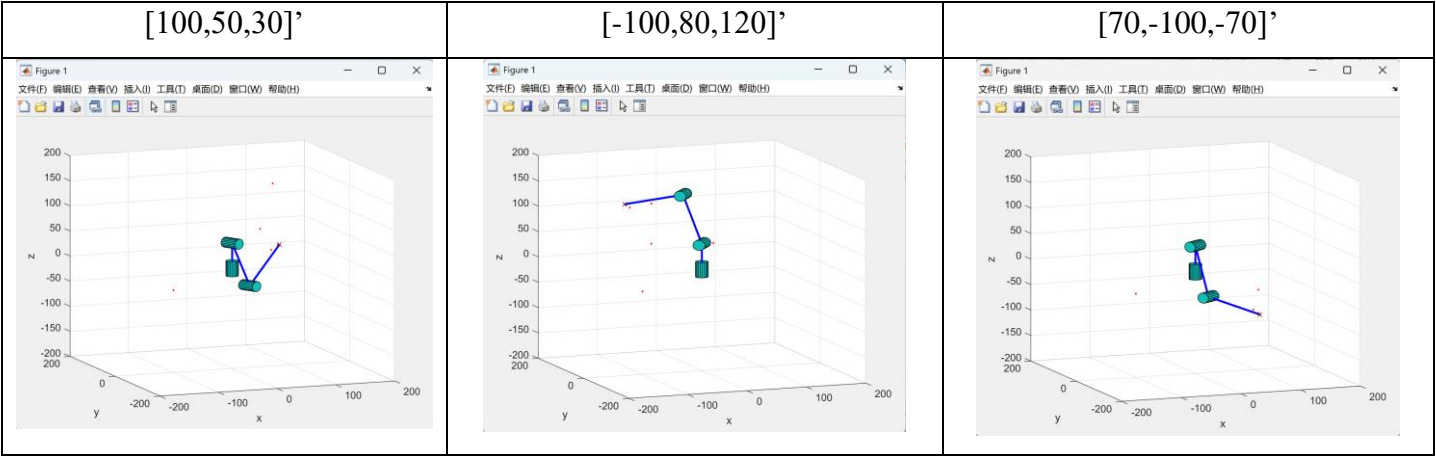


2.2 期望位置对应的关节角

实验条件：初始关节角（30°,-120°,-70°）

末端期望位置	θ_1	θ_2	θ_3
[100,50,30]'	26.5651°	-65.5388°	-249.2066°
[-100,80,120]'	141.3402°	71.7980°	-86.2732°
[70,-100,-70]'	484.9920°	-104.3440°	-62.2898°

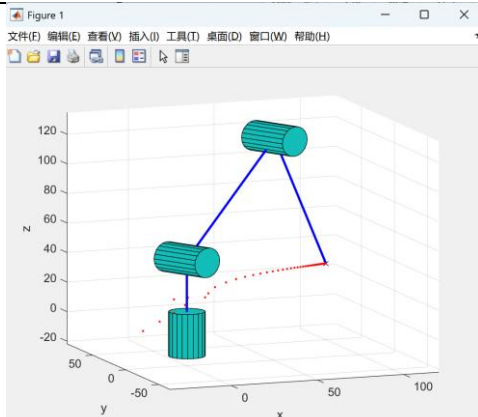
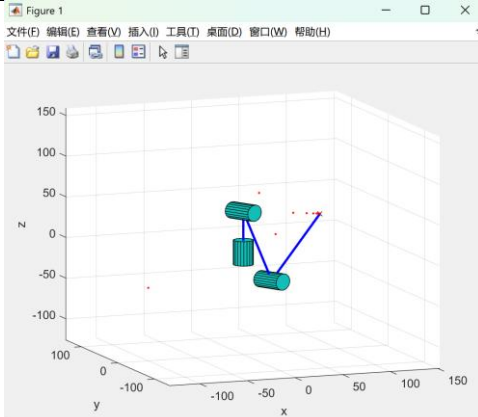
机械臂运动仿真图：

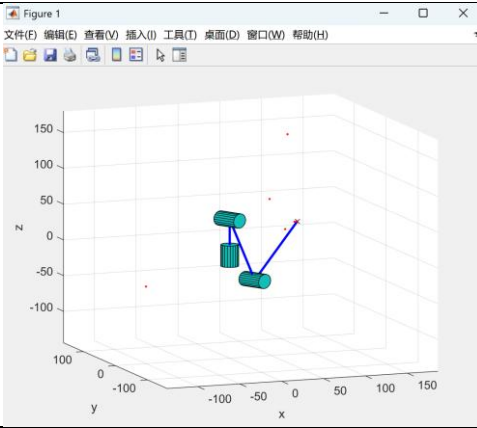
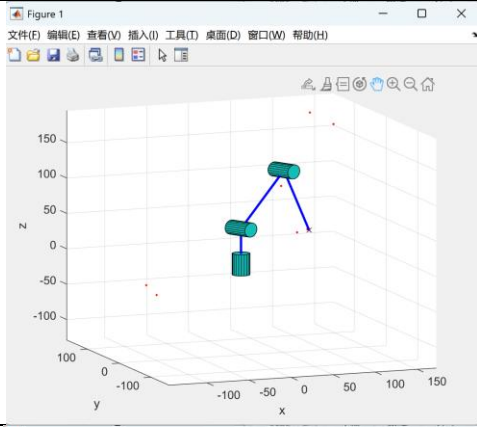
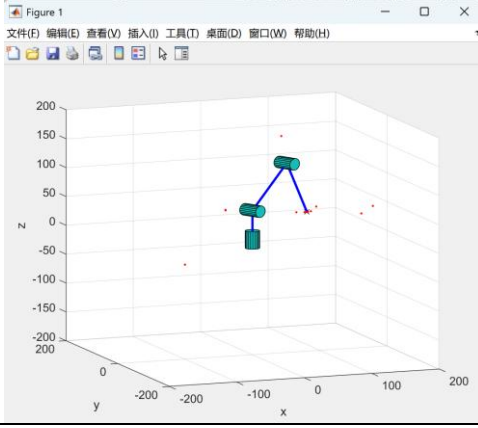


2.3 不同的学习率的求解速度和求解过程

较小的学习率保证稳定收敛，但需要更多迭代次数。学习率过小，每次迭代的更新量很小，收敛速度慢，需要更多迭代次数才能达到目标精度。较大的学习率收敛速度快，但可能导致震荡甚至发散。学习率过大，更新步长过大，可能导致误差在最小值附近波动，无法收敛，或者误差越来越大，算法失效。

（末端期望位置： $[100,50,30]'$ ）

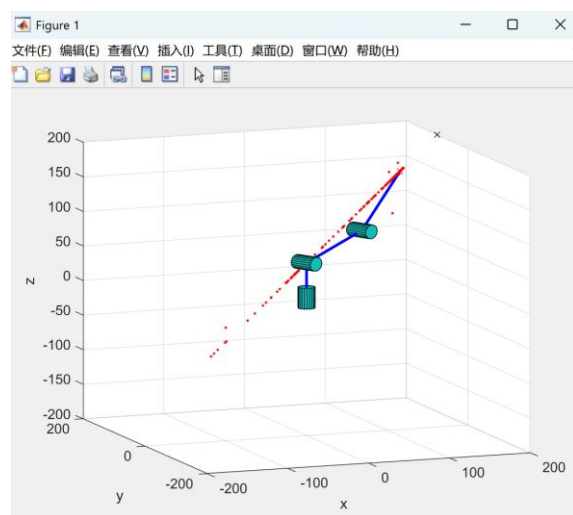
学习率	求解时间(s)	误差评价	机械臂运动仿真图
0.1	8.526037	9.0448e-06	
0.5	1.683022	9.3423e-06	

0.8	0.757773	2.4561e-06	
1	0.617672	3.8581e-06	
1.5	1.524826	9.9124e-06	

2.4 超出工作空间的期望位置

给出超出工作空间的期望位置，机械臂会尝试尽可能接近目标点，但是因为 while (1)的终止条件 $Loss < 1e-5$ 无法满足，算法无限循环。

我想到两种判断超过工作空间的判断方法，一是计算欧拉距离 $\|T_{pos}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，然后判断是否位于机器人工作空间内半径（机械臂完全收缩时的长度）和外半径（机械臂完全伸展时的长度）之间。二是设置最大迭代次数，迭代超过一定次数则停止，防止无限循环。



2.5 对比解析解算法和数值解算法的计算速度

实验条件：初始关节角（30， -120， -70）

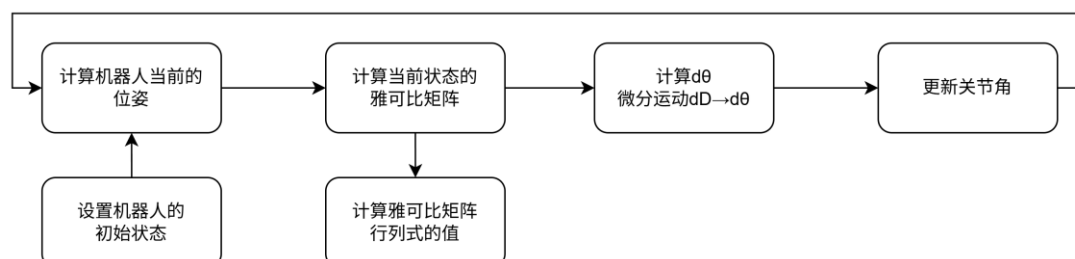
末端期望位置	θ_1	θ_2	θ_3	解析解时间	数值解时间
[100,-120,90]'	129.81	129.37	72.54	0.0960s	0.9593s
[-10,120,30]'	-85.24	137.04	104.77	0.1026s	1.0444s
[-140,10,60]'	-4.09	-130.64	-90.57	0.1031s	0.6663s

求解析解的速度明显要快。原因是解析解是通过数学推导得出精确解，只需要进行代数运算求值，而数值解是通过迭代逼近的方式来求解，需要进行多次重复的计算逐步逼近真实解，所以计算速度慢。

同时发现，解析解得到的关节角在 $(-\pi, \pi)$ ，而数值解得到的关节角是解析解得到的关节角加 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

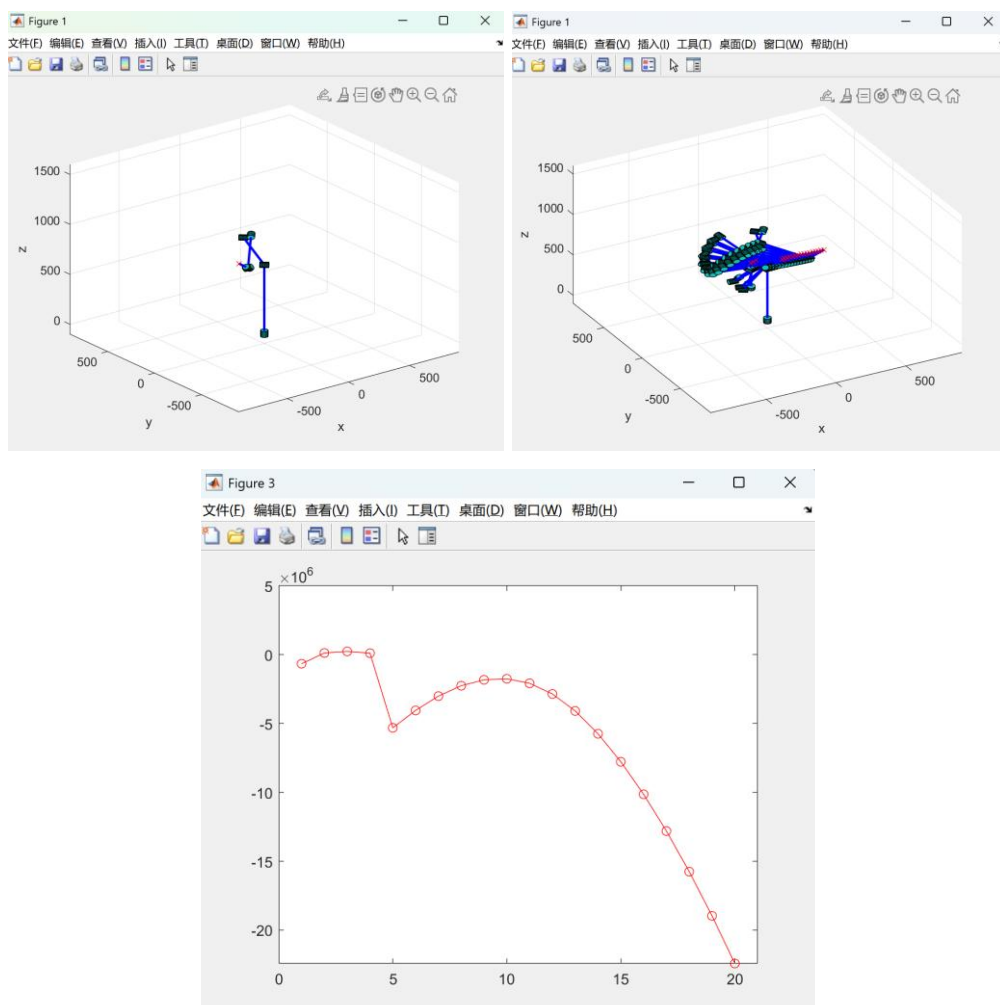
任务三：机械臂末端微分运动

3.1 微分运动的动作流程



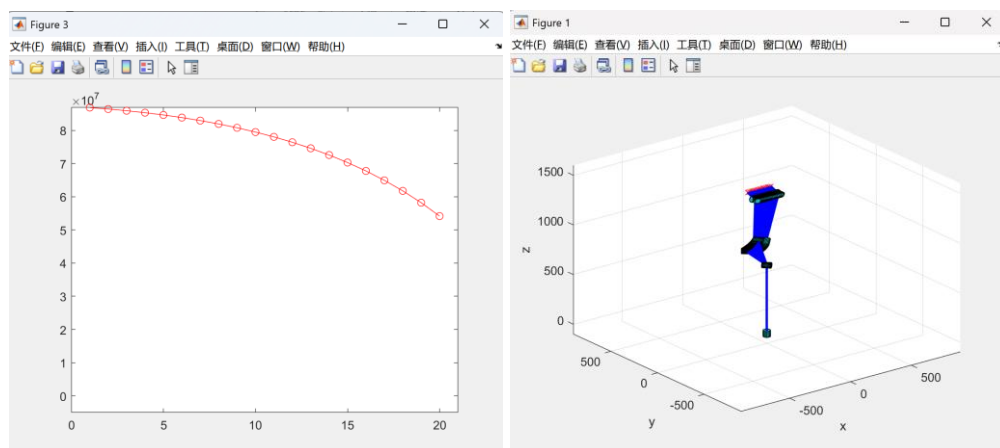
3.2 微分运动截图

例程计算了初始状态的雅可比矩阵，并按照该雅可比矩阵计算运动一段距离对应的各关节转动的角度，更新关节角，由正运动学得到机器人新的位姿。



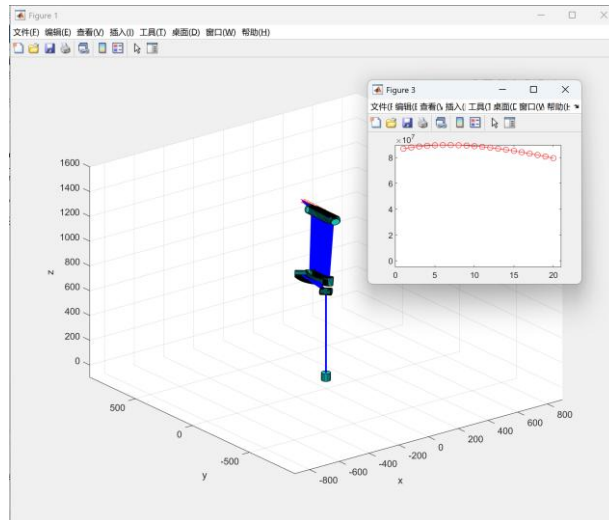
因为当雅可比矩阵的行列式值接近 0 时，机器人可能处于奇异位形。在图中看到行列式值发生了符号的跳变，可以判断机器人经过了奇异点。

选取合适的机械臂初始角度可以避免奇异。

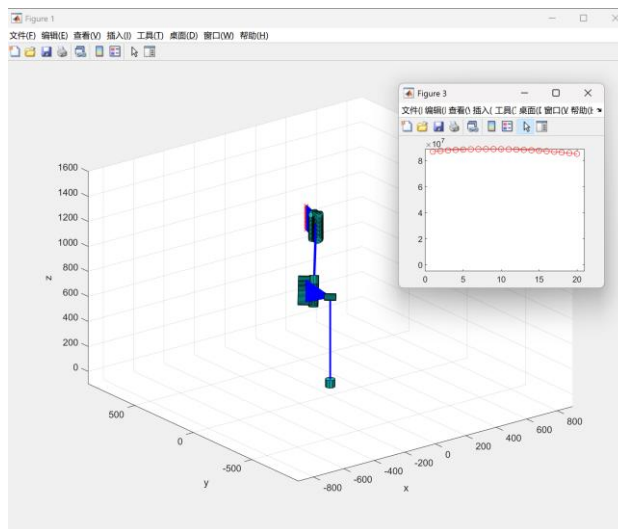


除了 x 轴，还可以进行 y、z 轴和 rpy 姿态的微分运动。

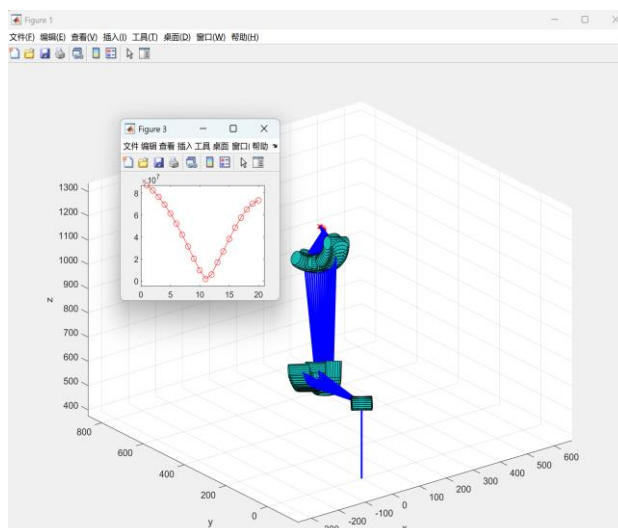
y 轴：



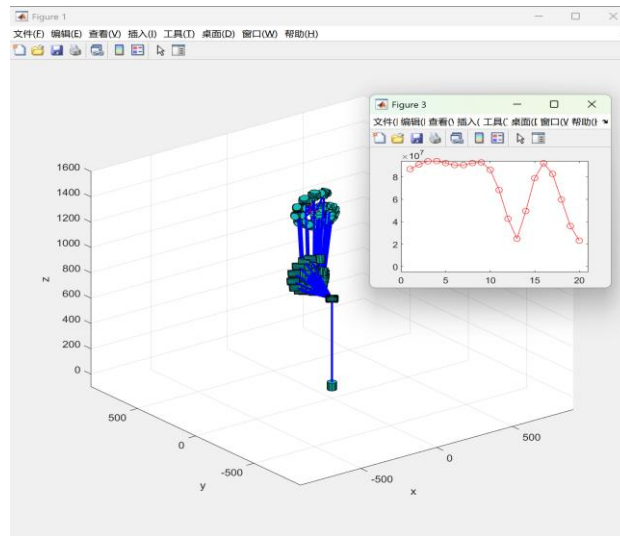
z 轴：



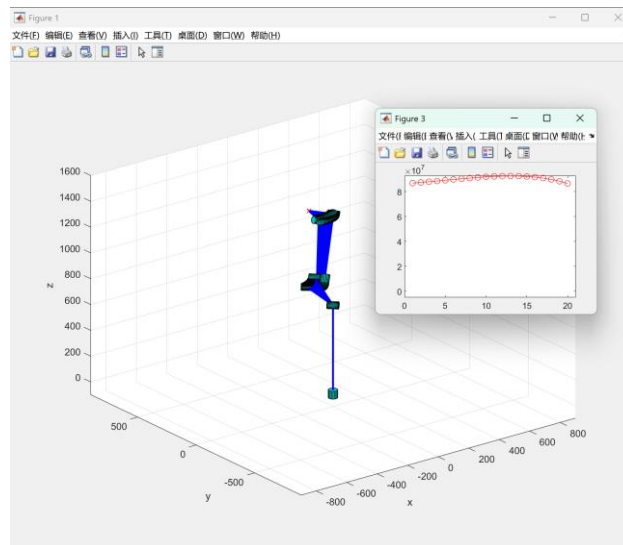
roll:



pitch:



yaw:



3.3 绘制圆圈的运动仿真

修改 dD 的参数，保持其他坐标不变，在 xoy 面上画圆，有：

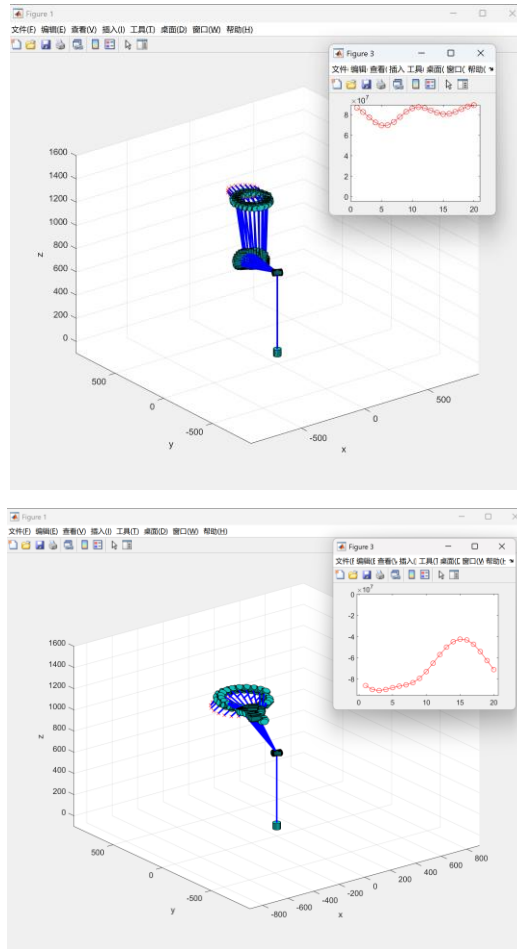
$$\begin{cases} x = x_c + r \cos(\theta) \\ y = y_c + r \sin(\theta) \\ z = z_c \quad (\text{保持恒定}) \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -v \sin(\theta) \\ v_y = v \cos(\theta) \\ v_z = 0 \end{cases}$$

% 计算当前角度（假设初始角度为0）

theta = omega * (i-1);

% 设置切向速度方向

dD = [-v * sin(theta); v * cos(theta); 0; 0; 0; 0];



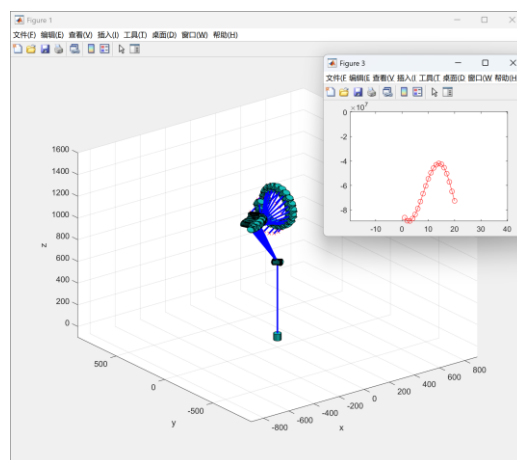
也可以在 yoz、xoz 平面上画圆，下面在 yoz 平面画。

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -v \sin(\theta) \\ v_z = v \cos(\theta) \end{cases}$$

% 计算当前角度（假设初始角度为0）
theta = omega * (i-1);

% 设置切向速度方向

dD = [0; -v * sin(theta) ; v * cos(theta); 0; 0; 0];

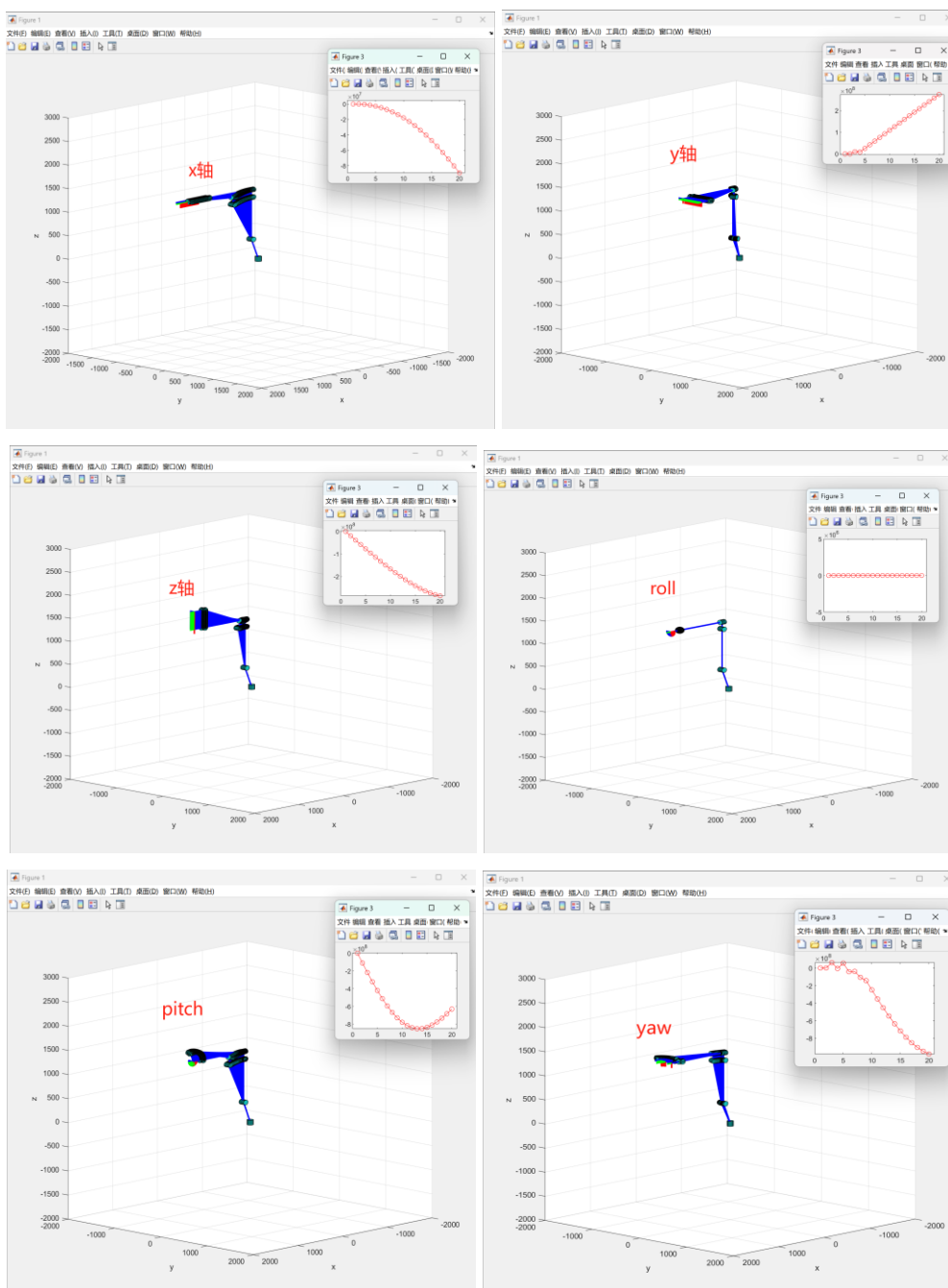


3.4 误差及误差来源

微分运动和期望路点间的误差来源于雅可比矩阵的近似性，由于把 dD 看作一段很小的距离，所以 dD 到 $d\theta$ 的计算使用相同的雅可比矩阵，但实际上雅可比矩阵随着位姿的变化而不断变化，近似计算导致了误差，尤其是 dD 较大或者机器人接近奇异点时。

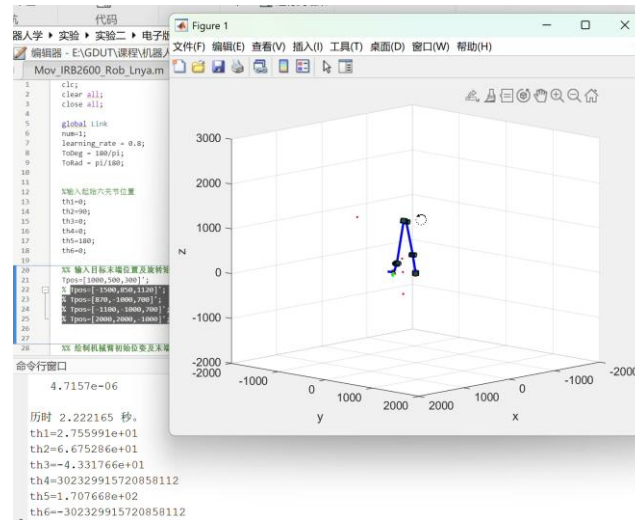
任务四：附加任务

4.1 IRB2600 微分运动验证仿真

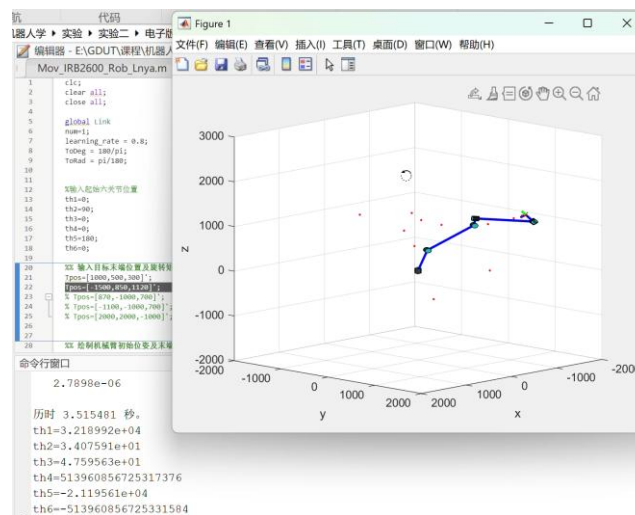


4.2 不同期望位姿的 IRB2600 数值逆解迭代过程

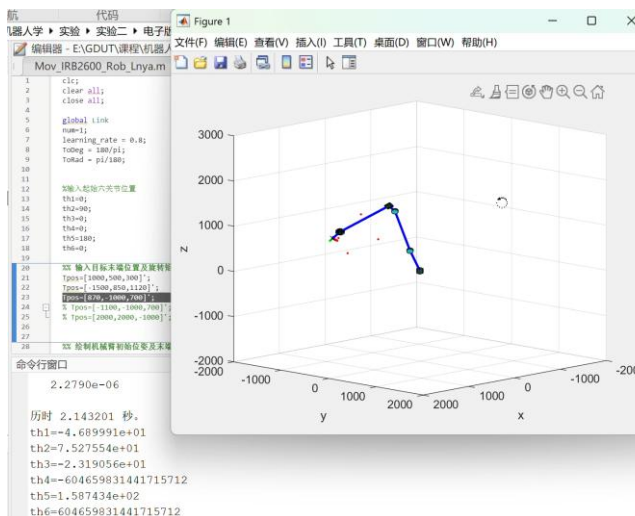
期望位姿 1[1000, 500, 300]'



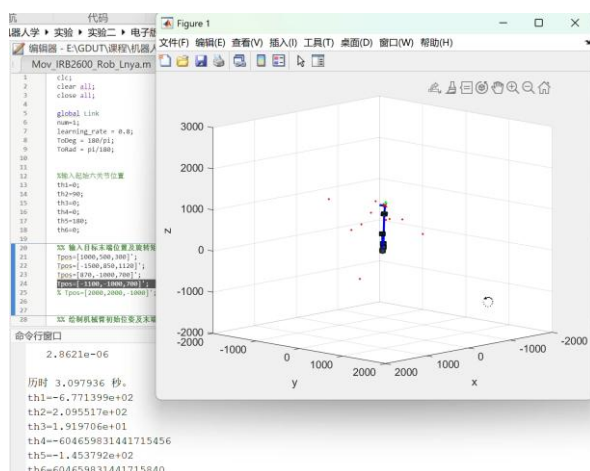
期望位姿 2[-1500, 850, 1120]'



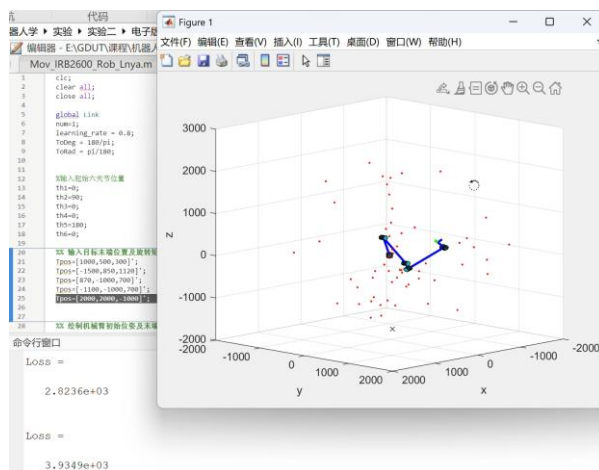
期望位姿 3[870, -1000, 700]'



期望位姿 $4[-1100, -1000, 700]'$



超出工作空间的位置 $[2000, 2000, -1000]'$



心得体会

参与本次实验，我对机器人逆运动学的认识也上升到了一个新的高度。

首先通过解析解逆解算法的例程，我了解了求解关节角的原理，在处理基座偏移求解逆解的问题时，世界坐标系与基座坐标系不再重合，需要通过齐次变换矩阵进行变换。这一过程极大地提升了我对坐标变换和矩阵运算的理解。

对数值解逆解算法的学习，让我接触到了一种全新的求解思路。通过不断迭代逼近真实解的方式，虽然计算速度相对较慢，但在一些复杂情况下具有更强的适用性。我还探索了学习率对求解速度和结果的影响，在实际应用中，需要根据具体情况选择合适的学习率，以平衡求解速度和精度。

对比解析解算法和数值解算法，我清晰地认识到两者的优缺点。解析解速度快且结果精确，但推导过程复杂，对机器人结构和运动模型的要求较高；数

值解虽计算速度慢，但具有更强的通用性，能处理一些解析解难以解决的复杂问题。

而在机械臂末端微分运动的实验中，通过计算雅可比矩阵来实现微小位移与关节转动角度的转换。在实验过程中，我观察到雅可比矩阵行列式值与机器人奇异的关系，而选取合适的初始角度可以避免奇异，这在实际应用中就是选取机器人的放置位置。此外，通过在不同平面绘制圆圈的运动仿真，我学会了如何通过调整参数实现特定的运动轨迹，同时也认识到微分运动误差的来源主要是雅可比矩阵的近似性。

本次实验极大地提升了我的编程和调试能力。在 Matlab 中运行例程、分析代码以及根据实验需求进行代码修改，让我积累了 Matlab 在机器人运动学仿真中的应用的经验。

从整体实验过程来看，我意识到自己在数学基础方面还存在一些不足。在处理复杂的数学推导和理解机器人运动原理时，有时会感到吃力。在今后的学习中，我将加强数学知识的学习，尤其是线性代数、三角函数等与机器人运动学密切相关的内容，同时进一步深入学习机器人运动学理论，提升自己的专业素养。

这次机器人逆运动学分析实验的确是一次非常宝贵的学习经历。