Принцип двойственности.

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества *U*, автоматически может быть получено другое, двойственное, равенство, путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, объединений множеств – пересечениями, пересечений множеств – объединениями.

1.3 Отношения на множествах

1.3.1 Прямое произведение множеств

Прямым (или *декартовым*) *произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ таких, что $x_i \in A_i$ при $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

1.3.2 Отношения

n-местным отношением R или *n-местным предикатом R* на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_i \in A_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ *связаны отношением R* тогда и только тогда, когда упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$.

При $n = 1$ отношение R является подмножеством множества A_1 и называется *унарным отношением* или *свойством*.

При $n = 2$, $R \subseteq A \times B$, R называется *бинарным отношением* R из множества A в множество B, или *соответствием*.

Запись: $(a,b) \in R$ *или* aRb

Если $R \subseteq A \times A$ (т.е. $A=B$), то R называется *бинарным отношением на множестве* A.

Соответственно, отношение $R \subseteq A^n$ называется *n-местным предикатом на множестве* A.

Пусть R есть отношение на множестве A: $R \subseteq A \times A$, $a,b \in A$

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Дополнение отношения: $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$

Тождественное отношение: $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Универсальное (или полное) отношение: $U_A = \{(a,b) \mid a \in A \text{ и } b \in A\}$

область определения $\delta_R = \{x \mid (x,y) \in R$ для некоторого $y\}$,

и *множество значений* $\rho_R = \{y \mid (x,y) \in R$ для некоторого $x\}$.

Пусть имеются множества A, B, C и отношения $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$.

Определим отношение $R \subseteq A \times C$ следующим образом:

$R = R_2 \circ R_1 = \{(x,y) \mid \exists\, z \in B,\ (x,z) \in R_1,\ (z,y) \in R_2\}$

Такое отношение называется *составным* (*композицией*), или *произведением отношений*

Внимание! В разных источниках обозначения могут отличаться:

$\{(x,y) \mid \exists\, z \in B,\ (x,z) \in R_1,\ (z,y) \in R_2\} = R_1 \circ R_2$

Пусть A={1,2,3,4}, на множестве A определим два отношения:

$R_1 = \{(x,y) \mid 2{\cdot}x \le y\}$

и $R_2 = \{(x,y) \mid x+3{\cdot}y$ делится на $2\}$.

Найдем графические представления отношений R_1, R_2, $R = R_2 \circ R_1$.

1.3.3 Свойства отношений

<u>Теорема 1.1</u>: *Для любых бинарных отношений P, Q, R выполняются следующие свойства:*

1. $(P^{-1})^{-1}=P$;
2. $(P \circ Q)^{-1}= Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3. $(P \circ Q) \circ R=P \circ (Q \circ R)$ *(ассоциативность композиции)*

Желающие доказать теорему могут это сделать на следующей консультации и получить 5 баллов

Пусть $R \subseteq A \times A$

1. Отношение называется *рефлексивным*, если $\forall a \in A \quad aRa$.
2. Отношение называется *антирефлексивным*, если $\forall\ a,b \quad aRb \ \Rightarrow\ a \neq b$.
3. Отношение называется *симметричным*, если $\forall\ a, b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa.$
4. Отношение называется *антисимметричным*, если $\forall\ a, b \in A \quad aRb$ и $bRa \Rightarrow a = b$.
5. Отношение называется *транзитивным*, если $\forall\ a, b, c \in A \quad (aRb$ и $bRc) \Rightarrow aRc$.
6. Отношение называется *полным (линейным)*, если $\forall\ a, b \in A \mid a \neq b \Rightarrow aRb$ или $bRa.$

Другое определение антисимметричности: Отношение антисимметрично, если одновременно aRb и bRa невозможно при $a \neq b$

Пример: R задано на множестве натуральных чисел: $R = \{(x,y) \mid x$ – делитель $y\}$.