Глава 3 *Элементы теории графов*

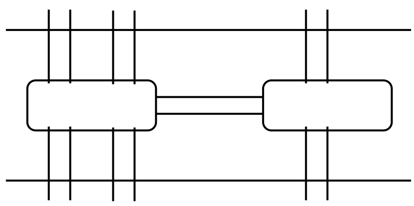
3.1 *Определения графов*

Часто бывает полезно и наглядно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунка, состоящего из точек (вершин), представляющих основные элементы ситуации и линий (ребер), отражающих связи между элементами. Такие рисунки называются *графами*.

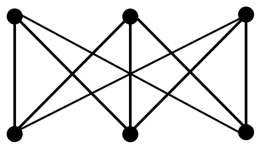
Между рассмотренным ранее понятием отношения и понятием графа существует тесная связь. Теория графов представляет собой удобный язык для описания программных и других моделей. Граф – это удобный способ изображения различных взаимосвязей (отношений). Граф может изображать сеть улиц в городе (вершины – перекрестки, улицы – ребра), блок-схемы программ, электрические цепи, географические карты и т.д.

3.1.1 *История теории графов*

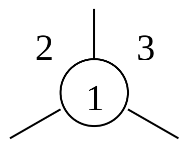
Теория графов возникла из решения различных прикладных задач. Первые задачи были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок. Рассмотрим эти задачи.



1. Задача о Кенигсбергских мостах. Необходимо обойти все 4 части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Развитие этой задачи привело к циклу задач об обходах графов (Решена Леонардом Эйлером в 1736 г.).



2. Задача о трех домах и трех колодцах. Есть три дома и три колодца. Жители домов поссорились. Требуется от каждого дома проложить тропинку к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались. (Решена Куратовским в 1930)



3. Задача о четырех красках. Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одинаково. Эта задача была сформулирована в середине XIX века, и попытки ее решить привели к появлению некоторых исследований графов, имеющих теоретическое и прикладное значение.

Многие результаты середины XIX века были получены при решении практических проблем. Например, Кирхгоф: система уравнений токов и напряжений в электротехнической схеме представлялась графом и решалась с помощью методов теории графов; химия… Задача о перевозках, решение которой привело к созданию эффективных методов решения транспортных задач … В XX веке задачи, связанные с графами, получили распространение не только в физике, электротехнике, химии, биологии, экономике, но и внутри различных разделов математики (алгебра, теория чисел, теория вероятностей и другие области).

В проблематике теории графов можно выделить направления комбинаторного и геометрического характера. К первому относятся задачи о построении графов с заданными свойствами, о подсчете и перечислении таких графов. Геометрический характер носят, например, задачи, связанные с обходами графов. Характерным специфическим направлением теории графов является цикл проблем, связанных с раскрасками, в которых изучаются разбиения множества вершин, обладающие определенными свойствами.

3.1.2 Основные понятия

Граф G определяется как упорядоченная пара $\langle V, E\rangle$, где V – непустое множество *вершин*, отношение $E \subset V^2$– множество *ребер* (набор неупорядоченных или упорядоченных пар вершин). Вершины и ребра графа называются его *элементами*.

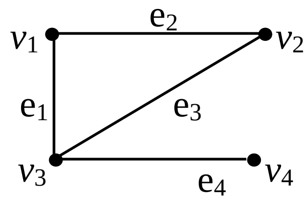
Граф, содержащий конечное число элементов, называется *конечным*. Число вершин конечного графа называется его *порядком* и обозначается $|V|$, число ребер обозначается как $|E|$: $G(V,E) = \langle V, E\rangle$, $V \neq \varnothing$, $E \subset V\times V$, $E = E^{-1}$.

Граф порядка n, имеющий m ребер, называется *(n,m)-графом*.

Обычно граф изображают *диаграммой*: вершины – точками или кружками, ребра – линиями (нарисовать).

Такой способ задания графа является самым простым и наглядным, хотя и годится только для простейших случаев. Кроме того, затруднительно обрабатывать такой граф с помощью ЭВМ. Поэтому существуют специальные способы представления графа в ЭВМ, которые мы рассмотрим чуть позже.

Пусть v_1 и v_2 – вершины, e – соединяющее их ребро. Тогда ребро e и каждая из этих вершин называются *инцидентными* друг другу, вершины v_1 и v_2 называются *смежными*. Два ребра, имеющие одну общую вершину (инцидентные одной вершине), также называются *смежными*.



Пример 3.1 Вершины v_1 и v_2 являются смежными, вершина v_1 инцидентна ребрам $e_2= (v_1,v_2)$ и $e_1= (v_1,v_3)$. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3),(v_3,v_4)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Ребра e_1, e_2, e_3 являются попарно смежными, а ребра e_2, e_4 – несмежными, так же как и вершины v_1, v_4 и v_2, v_4.

Множество вершин, смежных с вершиной v, называется *множеством смежности* (*окружением*) вершины v и обозначается $\Gamma^+(v) =\{u\in V| (u,v)\in E\}$, $\Gamma(v)=\Gamma^*(v) =\Gamma^+(v)\cup\{v\}$. Очевидно, что: $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$. Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^+ и обозначается просто Γ.

Если A – множество вершин, то $\Gamma(A)$ – множество вершин, смежных с вершинами из A: $\Gamma(A) = \{u\in V|\ \exists v\in A\ \ u\in\Gamma(v)\} = \cup\Gamma(v)\ \forall v\in A$.

3.1.3 Другие определения графов и бинарные отношения

Часто рассматриваются следующие разновидности графов.

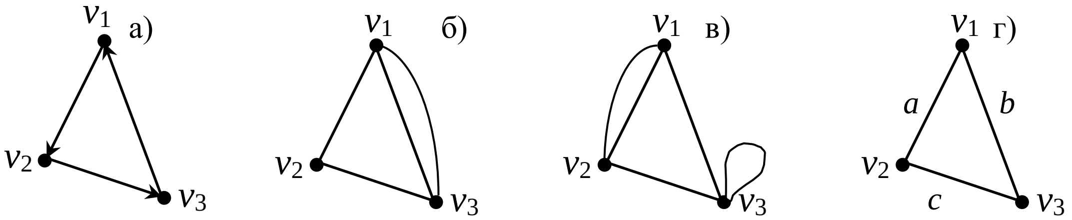
1. В некоторых задачах инцидентные ребру вершины рассматриваются в определенном порядке. Тогда элементами множества E={(u,v)|u,v∈V} являются упорядоченные пары, т.е. ребру приписывается направление от одной вершины к другой, и ребра называются *дугами* (говорят, что дуга *выходит* из вершины *u* и *заходит* в вершину *v*). Вершины в таком графе называются *узлами*, а сам граф, все ребра которого являются дугами, называется *ориентированным* графом, или *орграфом* (см. рис. а)). Иногда рассматриваются и *смешанные* графы, имеющие как дуги, так и неориентированные ребра.

2. Различные ребра графа могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются *кратными* ребрами, а сам граф – *мультиграфом* (см. рис. б)).

3. Если элементом множества E является пара одинаковых элементов V, то такое ребро соединяет вершину саму с собой. Тогда это ребро называется *петлей*, а граф – *псевдографом* (рис. в)). В псевдографе возможно также наличие кратных ребер.

4. В отличие от мультиграфа и псевдографа, граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

5. Если задана функция $F:V \to M$ или $F:E \to M$, то множество M называется *множеством пометок*, а сам граф называется *размеченным* (т.е. всем его вершинам или всем ребрам присвоены некоторые метки, в качестве которых обычно используются буквы или целые числа – г)).



Далее, говоря «граф G(V,E)», будем иметь в виду неориентированный непомеченный граф без петель и кратных ребер.

Фактически, графы и бинарные отношения – это один и тот же класс объектов, описанный разными средствами. Отношения (в частности, функции) являются базовыми средствами для построения большинства математических моделей, используемых при решении практических задач. С другой стороны, графы допускают наглядное представление в виде диаграмм. Это объясняет широкое использование графов при кодировании и проектировании программ.

Любой граф с петлями, но без кратных ребер, задает бинарное отношение E на множестве V, и обратно. Пара элементов принадлежит отношению: $(a,b) \in E \subset V \times V \Leftrightarrow$ в графе есть G ребро (a,b). Неориентированный граф соответствует симметричному отношению. Изменение направления всех дуг соответствует обратному отношению. Мультиграф, все вершины которого имеют петли, задает рефлексивное отношение.

3.1.4 *Изоморфизм графов*

При изображении графа точки, обозначающие его вершины, берутся совершенно произвольно, поэтому рисунки одного и того же графа могут быть совершенно непохожими. Как же понять, одинаковы ли графы, изображенные разными чертежами? Решение проблемы стандартное – если можно взаимно однозначно отобразить множество вершин одного графа на множество вершин другого так, чтобы сохранилось отношение смежности, то это две копии графа. Дадим формальное определение такого отображения.

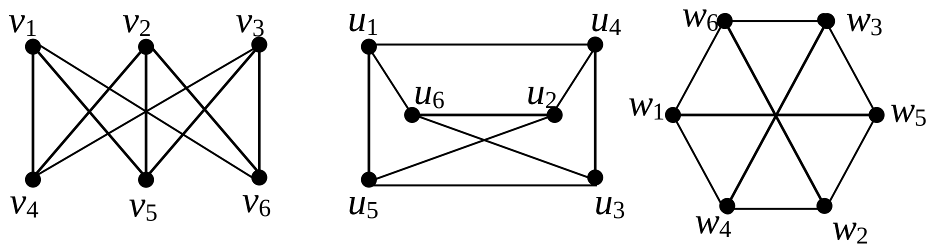
Говорят, что два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ *изоморфны*: $G_1\sim G_2$, если существует биекция (1-1 соответствие) h: $V_1\rightarrow V_2$, сохраняющая отношение инцидентности (при которой смежные вершины (ребра) графа G_1 переходят в смежные вершины (ребра) графа G_2): $e_1=(u,v)\in E_1 \Rightarrow e_2=(h(u),h(v))\in E_2$;
$e_2=(u,v)\in E_2 \Rightarrow e_1=(h^{-1}(u),h^{-1}(v))\in E_1$;

Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, являются *изоморфными*.

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:
1) рефлексивность – G~G, где требуемая биекция есть тождественная функция;
2) симметричность – если $G_1\sim G_2$ с биекцией h, то $G_2\sim G_1$ с биекцией h^{-1};
3) транзитивность – если $G_1\sim G_2$ с биекцией h, а $G_2\sim G_3$ с биекцией g; то $G_1\sim G_3$ с биекцией $g\circ h$.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, т.е. рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

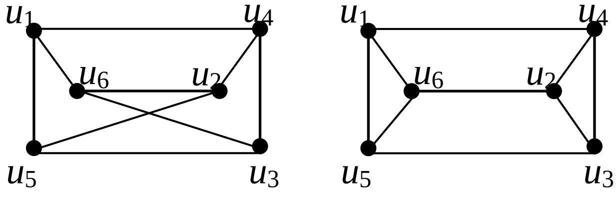
Пример 3.2 Три внешне различные диаграммы, приведенные на рисунке, являются диаграммами одного и того же графа (с точностью до изоморфизма).



Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа. В частности, количество вершин и количество ребер – инварианты графа G.

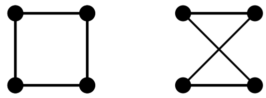
∇ Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Пример 3.3 Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф (см. рисунок) – графы различны, хотя все эти параметры у них совпадают.



3.1.5 Контрольные вопросы

1. Что такое граф? Какие вершины (ребра) называются смежными?
2. Какие элементы графа называются инцидентными?
3. Что такое порядок графа?
4. Как связаны графы и бинарные отношения, рассмотренные ранее в нашем курсе? Какое отношение и почему задает простой граф? Псевдограф?
5. Чем мультиграф отличается от простого графа?
6. Чем дуги отличаются от ребер? В каком случае вершины графа называют узлами?
7. Изоморфны ли графы на рисунке?



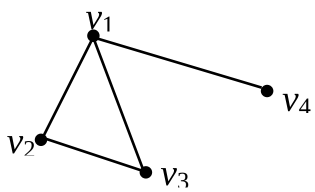
3.2 Элементы графов

После рассмотрения определений, относящихся к графам как к цельным объектам, дадим определения различным составным элементам графов.

3.2.1 Валентность

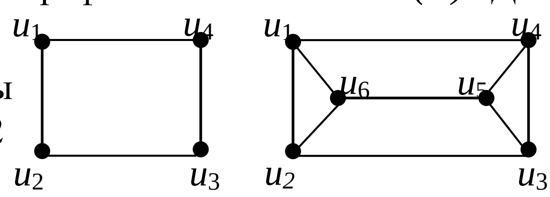
Степенью (или *валентностью*) *вершины* v называется число инцидентных ей ребер. Степень вершины обозначается $deg(v)$. Очевидно, что для любой вершины $v \in V$ справедливо: $0 \le deg(v) \le |V| - 1$; $deg(v) = |\Gamma(v)|$.

Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а вершина со степенью 1 – *висячей*, или *концевой*.



Пример 3.4 В показанном на рисунке графе вершина v_4 является висячей: $deg(v_4) = 1$. Степени остальных вершин: $deg(v_1) = 3$; $deg(v_2) = deg(v_3) = 2$.

Если степени всех вершин графа одинаковы и равны некоторому числу k, то такой граф называется *регулярным* графом степени k. Степень регулярности является инвариантом графа и обозначается $r(G)$. Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.



Пример 3.5 На рисунке показаны регулярные графы соответственно степени 2 и 3.

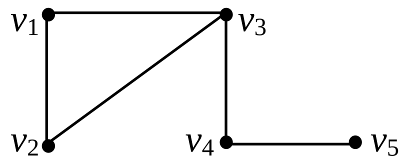
Для орграфа число дуг, исходящих из вершины v, называется *полустепенью исхода*, а число входящих – *полустепенью захода*. Эти числа соответственно обозначаются $deg^{-}(v)$ и $deg^{+}(v)$: $deg(v) = deg^{-}(v) + deg^{+}(v)$.

Теорема Эйлера (**Лемма *"о рукопожатиях"***). ***Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу его ребер, т.е.*** $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. ***Для орграфа:*** $\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) + \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = 2|E|$.

Действительно, при подсчете данной суммы каждое ребро считается дважды: при определении степени одного конца и при определении степени другого конца. ■

Последовательность степеней всех вершин графа, записанных в каком-либо порядке, называется *степенной последовательностью*.

<u>Пример 3.6</u> Найдем степенную последовательность для графа G. Выпишем степени всех вершин графа в соответствии с их номерами (2,2,3,2,1).



3.2.2 Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом от вершины u к вершине v или (u,v)-*маршрутом* в графе G называется всякая последовательность вида $u = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n = v$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, т.е. e_k – ребро, соединяющее вершины v_{k-1} и v_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

∇ Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. В случае орграфа v_{k-1} – *начало* ребра e_k , а v_k – его *конец*.

При этом вершину u называют *началом маршрута*, а вершину v – его *концом*. В маршруте некоторые вершины и ребра могут совпадать. Если $u = v$, то маршрут *замкнут*, а иначе *открыт*.

Для «обычного» графа маршрут можно задавать только последовательностью вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$ или ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

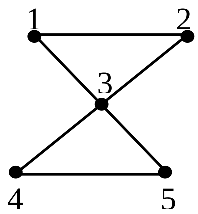
Маршрут называется *цепью*, если в нем нет совпадающих ребер, и *простой цепью* – если дополнительно нет совпадающих вершин, кроме, может быть, начала и конца цепи. Про цепь $u{=}v_0, v_1, \ldots, v_n{=}v$ говорят, что она *соединяет* вершины u и v и обозначают $\langle u,v\rangle$.

Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

Замкнутая цепь называется *циклом*; замкнутая простая цепь – *простым циклом*. Число циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется *ациклическим*.

Для орграфов цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

<u>Пример 3.7</u> (1,2,3,4,5,3,2) – маршрут, не являющийся цепью; (1,2,3,4,5,3) – цепь, не являющаяся простой; (1,2,3,4) – простая цепь; (1,2,3,4,5,3,1) – цикл, не являющийся простым; (1,2,3,1) – простой цикл.



Число ребер в маршруте M (возможно, с повторениями) называется его *длиной*, обозначается |M|.

Расстоянием между вершинами u и v (обозначается $d(u,v)$) называется длина кратчайшей цепи $\langle u,v\rangle$, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*.

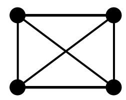
∇ Если не существует цепи, соединяющей вершины u и v, то по определению $d(u,v) = +\infty$.

Диаметром графа G (обозначается $D(G)$) называется длина длиннейшей геодезической.

Максимальным удалением в графе G *от вершины* v называется $r(v) = max\ d(v,v'),\ \forall\ v' \in V$. Вершина v графа G является его *центром*, если максимальное удаление от нее до всех вершин принимает наименьшее значение.

Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии n от вершины v, называется *ярусом* (обозначается $D(v,n)$): $D(v,n) = \{u \in V \mid d(v,u) = n\}$.

Пример 3.8 Граф, любая из вершин которого является его центром – максимальное удаление до всех вершин от любой =1.



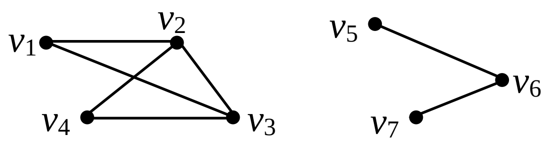
3.2.3 Связность

Если две вершины u и v в графе можно соединить цепью, то такие вершины *связаны*. Граф называется *связным*, если в нем связаны все вершины.

Легко видеть, что отношение связности на множестве вершин является отношением эквивалентности. Данное отношение разбивает множество вершин графа на классы, объединяющие вершины, связанные друг с другом. Такие классы называются *компонентами связности*; число компонент связности обозначается $k(G)$.

Граф G является связным тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту связности: $k(G) = 1$. Если $k(G) > 1$, то это *несвязный* граф. Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G)=|V|$, $r(G)=0$), называется *вполне несвязным*.

Пример 3.9 Граф на рисунке имеет две компоненты связности.



Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется *разделяющей* или *точкой сочленения*.

Ориентированный граф $G(V,E)$ является *слабо связным* (*слабым*), если симметричное замыкание множества E определяет связный граф (иными словами, если после замены всех дуг графа G ребрами полученный граф будет связным).

Ориентированный граф является *сильно связным* (*сильным*), если для любой пары вершин $u,v \in V$ существует ориентированный путь из u в v (т.е. из любой вершины графа достижимы все его остальные вершины).

Если для любой пары вершин по крайней мере одна достижима из другой, то такой граф является *односторонне связным*, или *односторонним*. Граф, состоящий из одной вершины, по определению считается сильно связным.

∇ Множества вершин связных компонент образуют разбиение множества вершин графа.

3.2.4 *Подграфы*

Граф *G'(V',E')* называется *подграфом* графа *G(V,E)*: $G'(V',E') \subseteq G(V,E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, и каждое из ребер *E'* инцидентно только вершинам из *V'*.

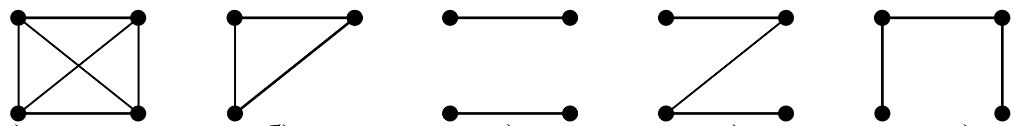
Если $G' \subseteq G$ и множества вершин этих графов не равны, как и множества ребер, то подграф *G'* является *собственным подграфом* графа *G* (Прим. 3.10, б).

Если множества вершин этих графов совпадают и в графе *G'* нет циклов, то *G'* называется *остовным подграфом* (*остовом*, *каркасом*) графа *G* (т.е. он содержит все вершины исходного графа и некоторый поднабор его ребер).

∇ Очевидно, что остов существует в каждом графе. Для его получения нужно удалить «лишние» ребра, разрушив циклы в каждой связной компоненте.

Остовный подграф для графа *G* можно построить не единственным образом. В общем, если *(n,m)*-граф *G* имеет *k* компонент связности, то для получения его остова из графа необходимо удалить (m–n+k) ребер.

Пример 3.10 *(4,6)*-граф *G* (а), его подграфы (б, в), причем б) – собственный подграф; 2 различных каркаса (г, д). Удаление ребер для получения остовного подграфа: (m–n+k) = 6 – 4 + 1 = 3. ⇒ из исходного графа требуется удалить 3 ребра (так, чтобы сохранились все вершины исходного графа и не стало циклов).



а) б) в) г) д)

3.2.5 *Контрольные вопросы*

1. Что такое степень вершины? Чем висячая вершина отличается от изолированной?
2. Какой граф называется регулярным?
3. Как связаны степень вершины и полустепень исхода, полустепень захода?
4. Что такое маршрут? Чем отличается замкнутый маршрут от открытого?
5. Какой маршрут называется цепью? Какая цепь является простой?
6. Чем цикл отличается от пути? А от контура?
7. Как определить длину маршрута? В чем она выражается?
8. Что такое расстояние между вершинами?
9. Что такое геодезическая? Как определяется диаметр графа?
10. Какой граф называется связным? Как называются классы эквивалентности вершин графа по отношению связности?
11. Может ли граф состоять из одних изолированных вершин и не иметь ребер? Сколько компонент связности имеет такой граф?
12. В чем различие между сильной и слабой связностью орграфа?
13. Что такое собственный подграф?
14. Какой подграф называется каркасом?