1.4 Функции

1.4.1 Определение функций

Отношение $f \subseteq A \times B$ называется функцией из A в B ($f : A \to B$), если:

а) $\forall x \in A \; \exists\, y \in B \mid (x,y) \in f$;

б) если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$

$(x,y) \in f$ обозначают $y = f(x)$

x – аргумент, y – значение функции f.

$Dom(f) \equiv \{x \in A \mid \exists\, y \in B \mid y = f(x)\}$ область определения,

$Codom(f) \equiv \{y \in B \mid \exists\, x \in A \mid y = f(x)\}$ область значений.

$y = f(x)$, то y - образ элемента x, x – прообраз элемента y.

Функция $f{:}A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется функцией n аргументов, или n-местной функцией.

1.4.2 Классификация функций

$f : A \to B$

инъективное (инъекция), если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

сюръективное (сюръекция), или отображением на, если $\forall y \in B \ \exists x \in A \mid f(x) = y$;

биективное (биекция), или взаимно однозначное соответствие, если оно является одновременно инъекцией и сюръекцией;

перестановка множества A, если $A = B$ и функция $f : A \to A$ является биекцией

Если $I : A \to A$ определена как $I(a)=a\ a \in A$, то I тождественная функция на множестве A.

Множество называется счетным, если существует биекция между элементами этого множества и множеством натуральных чисел.

Если f^{-1} является функцией, то ее называют обращением функции, или обратной функцией.

Теорема 1.3 (об обратной функции):

Если функция $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ - биекция, то f^{-1} также является функцией из B в A, причем биекцией. Обратно, если f^{-1} – функция из B в A, то f является биекцией.

<u>Теорема 1.4</u>:

Если функция $f : A \to B$ является биекцией, то:

а) $\forall\ b \in B \quad f(f^{-1}(b))=b$,

б) $\forall\ a \in A \quad f^{-1}(f(a))=a$.

<u>Теорема 1.5</u>:

Если функция $f : A \to A$ и I – тождественная функция на A, то $I \circ f = f \circ I = f$. Если для f существует обратная функция, то $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$.

Теорема 1.6: Пусть функции $g : A \to B$ и $f : B \to C$.

Тогда:

Если g и f – инъекции, то $g \circ f$ – инъекция;

Если g и f – сюръекции, то $g \circ f$ – сюръекция;

Если g и f –биекции, то $g \circ f$ – биекция;

1.5 Метод математической индукции

1. Проверить верность исходного утверждения P(n) для минимально возможного значения

   $n = n_0$ (базис)

2. Предположить верность P(n) при n=k (индукционное предположение)

3. Доказать справедливость утверждения P(n) для n=k+1, используя индукционное предположение (вывод).

4. Тогда утверждение P(n) верно для всех $n \geq n_0$

Пример: доказать 7^n -1 делится на 6

Глава 2. Комбинаторика

2.1 Комбинаторные задачи и основные принципы

Утверждение 2.1 Если множества $A \cap B = \varnothing$ и

$|A| = m$, $|B| = n$, то $|A \cup B| = m + n$, т.е

$|A \cup B| = |A| + |B|$.

Теорема 2.1(о произведении множеств):

Для любых множеств A и B $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Правило суммы (**комбинаторный принцип сложения**) Если объект $\alpha \in A$ можно выбрать *m* способами, а объект $\beta \in B$, отличный от α, *n* способами, причем α и β нельзя выбрать одновременно, то осуществить выбор «либо α, либо β» можно $m+n$ способами.

Правило произведения (**комбинаторный принцип умножения**) Если объект $\alpha \in A$ можно выбрать *m* способами, а после каждого такого выбора можно выбрать *n* способами объект $\beta \in B$, отличный от α, то выбор обоих объектов α и β в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

2.2 Комбинаторные конфигурации

2.2.1 Перестановки и подстановки

Дано множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Перестановкой элементов множества M называется любой упорядоченный набор из n различных элементов множества M.

Перестановки различаются только порядком входящих в них элементов.

Перестановка элементов множества M может быть задана посредством функции подстановки.

Подстановка - биекция $\sigma : M \to M$,и задается с помощью матрицы, состоящей из двух строк.

Число перестановок объема *n* обозначим P_n.

Утверждение 2.3 $P_n = n!$

2.2.2 ***Понятие выборки***

Дано $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, $m \leq n$. Набор, состоящий из m элементов множества *M,* называется выборкой объема m из n элементов.

Выборки классифицируются по:

1) По критерию <u>повторяемости элементов</u>:

- с возвращением объема (с повторениями)

- без возвращения объема (без повторений).

2)По критерию <u>упорядоченности</u>:

- упорядоченные (размещения)

- неупорядоченные (сочетания).

2.2.3 **Размещения и сочетания без повторений**

Размещениями из n элементов по m называются упорядоченные выборки без повторений элементов множества, которые отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-m)!} = n*(n-1)*(n-2)...(n-m+1)$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются неупорядоченные выборки без повторений элементов множества, которые отличаются одна от другой только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$