2.2.4 **Размещения и сочетания с повторениями**

Размещениями с повторениями (или упорядоченными выборками с возвращениями) из n элементов по k называются упорядоченные наборы из *k* элементов множества *M*, в которых элементы множества могут повторяться.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

<u>Теорема 2.3(о мощности булеана)</u>

Для конечного множества M мощность булеана равна $2^{|M|}$.

<u>Следствие</u>: Можно сгенерировать все подмножества конечного множества M, перечислив некоторым способом все наборы из нулей и единиц длины n.

Определим отношение эквивалентности на множестве размещений с повторениями из n элементов по k:

$(a_1,a_2,\dots,a_k) \sim (b_1,b_2,\dots,b_k) \Leftrightarrow \forall c \in M$ число элементов $a_i = c$ совпадает с числом элементов $b_j = c$.

Тогда сочетанием с повторениями из n элементов по k (неупорядоченной выборкой с возвращениями из n элементов по k) является множество, которое состоит из элементов, выбранных k раз из множества M, причем один и тот же элемент допускается выбирать повторно.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!*(n-1)!}$$

2.3 Биномиальные коэффициенты

Числа

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

называются биномиальными коэффициентами

2.3.1 Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 2.4 (Бином Ньютона)

При любых x, y ∈ R

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Следствие 1.

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Следствие 2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$$

Теорема 2.5

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = k2^{n-1}$$

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$$

Теорема 2.6 Число C_n^k

обладает следующими свойствами:

1. $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

2. $$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

3. $$C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$$

2.3.2 Треугольник Паскаля

Следует из п.2 Теоремы 2.6

2.4 Обобщенные перестановки и разбиения

2.4.1 Перестановки с повторениями

X содержит n объектов k различных типов, причем имеется n_1 неразличимых объектов типа 1, n_2 неразличимых объектов типа 2, …, n_i неразличимых объектов типа i. Тогда такие размещения называются перестановками с повторениями

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$