Теорема 1.2 (о проверке свойств отношения):

Отношение R на множестве A^2:

1. R рефлексивно $\Leftrightarrow$ $I \subseteq R$;
2. R симметрично $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$;
3. R транзитивно $\Leftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$;
4. R антисимметрично $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I$;
5. R полно $\Leftrightarrow$ $R \cup I \cup R^{-1} = U$;

доказательство теоремы – 10 баллов

Матричный способ представления отношений

Основные свойства матриц бинарных отношений:

1. Если бинарные отношения $P,Q \subseteq A\times B$,

$[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то

$[P\cup Q] = (p_{ij}+q_{ij})$, $[P\cap Q] = (p_{ij}\cdot q_{ij})$,

где умножение осуществляется обычным образом, а сложение – по логическим формулам (т.е. 0+0=0, во всех остальных случаях 1).

$[P\cup Q] = [P]+[Q]$, $[P\cap Q] = [P]*[Q]$.

2. Если бинарные отношения $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $[Q \circ P] = [Q] \cdot [P]$,

где умножение матриц [P] и [Q] осуществляется по обычному правилу, а произведение и сумма элементов из [P] и [Q] – по правилам пункта 1.

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P:

$[P^{-1}] = [P]^{T}$.

4. Если $P \subseteq Q$, $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$,

то $p_{ij} \le q_{ij}$. $\forall i,j$.

5. Матрица тождественного отношения единична:

$[I_A] = (I_{ij})$: $I_{ij} =1 \Leftrightarrow i=j$.

6. Пусть R – бинарное отношение на A^2. Отношение R является рефлексивным, если $\forall x \in A$ $(x,x) \in R$, т.е. $I_A \in R$ (на главной диагонали R стоят единицы).

Отношение R является *симметричным*, если $\forall x,y \in A \ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, т.е. $R^{-1}=R$, или $[R]=[R]^T$ (матрица симметрична относительно главной диагонали).

Отношение R является *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, т.е. в матрице $[R \cap R^{-1}]=[R]*[R]^T$ вне главной диагонали все элементы равны 0.

Отношение R является *транзитивным*, если $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$, т.е. $R \circ R \subseteq R$.

1.3.4 Отношение эквивалентности

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A.

Класс эквивалентности $[x]$ для $x \in A$: $[x] = \{y \mid xRy\}$, т.е. это множество всех элементов A, которые R-эквивалентны x.

<u>Утверждение 1.1</u>.

Всякое отношение эквивалентности на множестве *M* определяет разбиение множества *M*, причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества *M*, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве *M*

Пусть E – эквивалентность на множестве *M*. Тогда семейство классов эквивалентности множества *M* называется *фактор-множеством* множества *M* по отношению E и обозначается

$M/\mathrm{E} = \{\mathrm{E}(x) \mid x \in M\}$.

1.3.5 Отношение порядка

Бинарное отношение R на множестве A называется отношением порядка, если оно антисимметрично и транзитивно.

Если отношение порядка рефлексивно, тогда оно называется отношением нестрогого порядка (обозначается $\leq$).

Если отношение порядка антирефлексивно, то оно называется отношением строгого порядка (обозначается $<$).

Если отношение порядка полное (линейное), тогда оно называется отношением линейного порядка, а множество – вполне упорядоченным.

Если отношение порядка не обладает свойством полноты, то оно называется отношением частичного порядка, а множество с заданным на нем отношением частичного порядка называется частично упорядоченным множеством (чум).

Пусть дано ч.у.м. M с отношением порядка $\leq$:

Ữ $=\{M,\leq\}$.

Элемент $a \in$ Ữ называется максимальным, если $\forall y \in M \mid a \leq y \Rightarrow a = y$;

(во всем множестве нет элемента, большего чем a).

Элемент $a \in$ Ữ называется минимальным, если $\forall y \in M \mid y \leq a \Rightarrow a = y$

(во всем множестве нет элемента меньшего чем a).

Элемент b ч.у.м. Ữ называется наибольшим,

если $x \leq$ b $\forall x \in M$

(т.е. любой другой элемент множества меньше либо равен b).

Элемент b называется наименьшим,

если $b \leq x \quad \forall x \in M$ (т.е. любой другой элемент множества больше либо равен b).

Наибольший (наименьший) элемент ч.у.м. Ữ обычно обозначают **max Ữ (min Ữ)**.

Наибольший элемент обычно называют единицей, а наименьший – нулем множества M.

Пример. Отношение порядка:

$1 \le 1,\ 1 \le 2,\ 2 \le 2,\ 3 \le 2,\ 3 \le 3.$

Для ч.у.м. Ũ $=\{M,\le\}$ и подмножеством $A \subseteq M$ элемент $a \in M$ называется верхней гранью множества A, если $\forall x \in A\ x \le a$.

элемент $b \in M$ называется нижней гранью множества A, если $\forall y \in A\ \ b \le y$.

Элемент $a \in M$ называется наименьшей верхней гранью множества A **(sup A)**, если a является верхней гранью и для любого другого элемента a', являющегося верхней гранью, верно $a \le a'$.

Элемент $b \in$ M называется наибольшей нижней гранью множества A **(inf A)**, если b является нижней гранью и для любого другого элемента b', являющегося нижней гранью, верно $b' \leq b$.

Наименьший элемент множества A является **inf** A.

Пусть A – вполне упорядоченное множество. Введем отношение порядка на множестве упорядоченных наборов из A:

$(a_1, \ldots, a_m) \le (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow$

$m \le n$ и $\forall i = 1,..,m$ $a_i = b_i$ или

$\exists\, k \le \min(n,m) \mid a_k \le b_k$ и $a_i = b_i$ $\forall i < k$.

Такое отношение называется лексикографическим, или алфавитным порядком.

Пример:

$(2,4,5) \le (2,4,5,2)$, $(2,4,3,2,1) \le (2,4,5,2)$