2.5 Принцип включения и исключения

Теорема 2.8(комбинаторный принцип сложения):

Пусть множества A и B могут пересекаться. Тогда количество элементов, которые можно выбрать из A или B, определяется по формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Пример. В месяце было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных дня, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 3 , ветреных и холодных – 2, дождливых, ветреных и холодных – 1 день. Сколько дней была плохая погода?

<u>Теорема 2.9</u> (принцип включения и исключения)

$$|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \bigcap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_m|$$

Пусть $|A| = N$, и имеется m одноместных отношений (свойств) $P_1, P_2, \ldots P_m$

Обозначим $N_{i1,i2,\ldots ik}$ число элементов, обладающих свойствами $P_{i1}, P_{i2}, \ldots P_{ik}$ и, м.б некоторыми другими

N(0)- число элементов, не обладающих ни одним из свойств $P_1, P_2, \ldots P_m$

$$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^m S_m$$

где $S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} N_{i_1 \ldots i_k} \, (k = 1, \ldots, m)$

Число *N*(*r*) элементов, обладающих ровно *r* свойствами 1≤ r ≤ m вычисляется по формуле:

N(r) =$\sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k C_{r+k}^{r} S_{r+k}$

Определим функцию $[x]$, $x \in R$, как наибольшее целое число, не превосходящее x.

Число $[x]$ называется целой частью числа x.

Для положительных чисел a и b значение функции равно количеству чисел из множества $\{1, 2, \ldots, b\}$, которые делятся на a.

Пример. Сколько положительных трехзначных чисел делятся ровно на одно из чисел 3, 5 или 7?

Пример: $A=\{1, 2, 3\}$. $R \subseteq A^2$. Сколько существует различных отношений, обладающих свойством рефлексивности? Симметричности?