3.4. Представление графов в ЭВМ

3.4.1 Требования к представлению графов

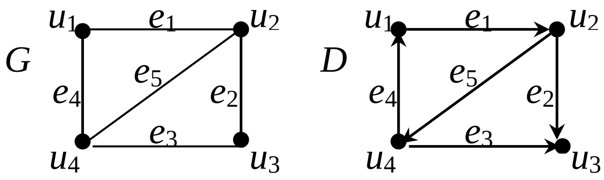
Чтобы задать граф, нужно каким-либо способом описать множество его вершин, множество его ребер, а также указать, какие вершины и ребра инцидентны (или смежны), т.е. задать отношение инцидентности (смежности).

Рассмотрим несколько способов представления графа в ЭВМ. Они различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций над графами. Представление выбирается по потребностям конкретной задачи.

Напоминание: число вершин графа обозначаем через *n*, а число ребер – через *m*. Характеристика *M(n,m)*, приведенная для каждого представления, означает требуемый для него объем памяти.

∇ Указанные представления пригодны для графов и орграфов, а после некоторой модификации – для псевдографов, мультиграфов и гиперграфов.

Все представления будем иллюстрировать на конкретных примерах графа *G* и орграфа *D* (см. рисунок.).



3.4.2 Способы представления графа

1) Матрица смежности.

Матрица смежности A(G’) графа (орграфа) – это квадратная матрица размера n×n, у которой для любых $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ элемент в *i*-й строке и *j*-м столбце равен 1, если *i*-я и *j*-я вершины соединены ребром (дугой с началом в вершине *i*), и равен 0 в противном случае.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j - \text{смежные (для орграфа дуга идет из } v_i \text{ в } v_j) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

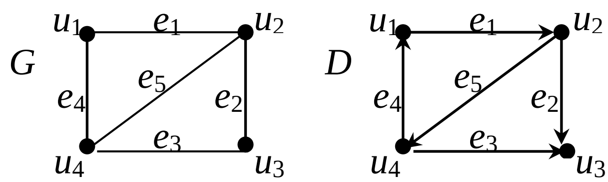
Память $M(n,m)=O(n^2)$.

Фактически это уже знакомая нам матрица бинарного отношения. Очевидно, что матрица смежности неориентированного графа является симметричной, элементы главной диагонали равны нулю, а количество единиц в каждой строке равно степени вершины, которой соответствует эта строка. По матрице смежности легко построить диаграмму графа.

Матрица смежности орграфа, не являющегося мультиграфом, не может быть симметричной, т.к. при ее составлении вершины орграфа играют различные роли.

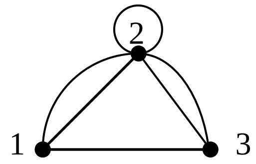
Пример 3.1 Матрицы смежности для заданных графа *G* и орграфа *D*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



∇ В матрице смежности мультиграфа или псевдографа число, находящееся на пересечении i-й строки и j-го столбца, совпадает с числом ребер, соединяющих вершины i и j, при этом каждая петля считается двумя ребрами.

Пример 3.2 Псевдограф, изображенный на рисунке, имеет матрицу смежности следующего вида: $A(P)=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&2&2\\1&2&0\end{pmatrix}$



2) Матрица инцидентности.

Другой способ задать граф – определить *матрицу инцидентности* (или *инциденций*) *I(G)*, имеющую *n* строк и *m* столбцов, элементы которой задаются следующим образом:

$$i_{k\,l}=\begin{cases}1, & \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$i_{k\,l}=\begin{cases}1, \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \text{ и является его концом}\\ 0, \text{если вершина } v_k \text{ и ребро } e_l \text{ не инцидентны}\\ -1, \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \text{ и является его началом.}\end{cases}$$

Пример 3.3 Матрицы инцидентности для заданных графа *G* и орграфа *D*

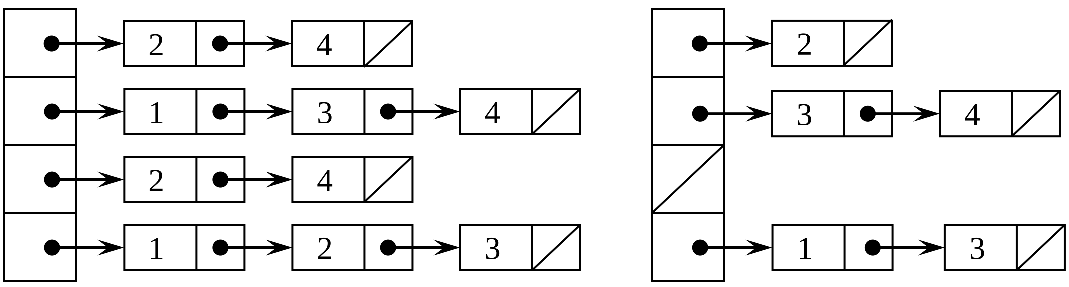
$$I(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\quad I(D)=\begin{pmatrix}-1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&0\\0&0&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Очевидно, что в каждом столбце матрицы инцидентности только два элемента отличны от 0 (или один, если ребро является петлей), т.к. ребро может быть инцидентно не более чем двум вершинам (а столбец соответствует ребру). Поэтому матрица содержит много нулей и такой способ описания неэкономен. *M(n,m)=O(n·m).*

3) Списки смежности.

Граф представляется с помощью списочной структуры (списка смежности), отражающей смежность вершин и состоящей из массива указателей на списки смежных вершин. Элемент списка представлен структурой с двумя полями: номер вершины и указатель. Для неориентированных графов *M(n,m)=O(n+2m)*, для орграфов *M(n,m)=O(n+m)*.

Пример 3.4 Списки смежности для заданных графа *G* и орграфа *D:*



4) Массив ребер (дуг).

Отношение инцидентности можно задать также списком ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, в ней записаны номера вершин, инцидентных ему. $M=O(2m)$.

Пример 3.5 Представление с помощью массива ребер (дуг) для заданных: графа G (левый столбец) и орграфа D (правый столбец). В массиве перечислены ребра (дуги) путем указания инцидентных им вершин.

нач	кон	нач	кон
1	2	1	2
1	4	2	3
2	3	2	4
2	4	4	1
3	4	4	3

По списку ребер графа легко построить матрицу инцидентности, т.к. каждое ребро этого списка соответствует столбцу матрицы, а номера вершин в каждом элементе списка – это номера строк матрицы инцидентности, элементы в которых равны 1. Для орграфа координата начала – номер строки, где стоит –1, а координата конца – номер строки, где стоит 1.