2.4.2 Разбиения и числа Стирлинга

Пусть $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ есть разбиение множества X из n элементов на k подмножеств:

$$\forall i \quad B_i \subset X, \cup B_i = X, B_i \neq \varnothing$$

$$B_i \bigcap B_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$$

$$|B_i| = n_i, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Тогда набор $(B_1, \ldots, B_k)$ называется упорядоченным разбиением множества X, а подмножества B_i называются блоками разбиения.

Если $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ – два разбиения X, то разбиение $\mathscr{B}_1$ есть измельчение разбиения $\mathscr{B}_2$, если каждый блок $\mathscr{B}_2$ есть объединение блоков $\mathscr{B}_1$.

Измельчение является частичным порядком на множестве разбиений.

Число упорядоченных разбиений

$$R(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

Число R(n,k) упорядоченных разбиений на k подмножеств вычисляется по формуле:

$$R(n,k)=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n;\; n_i>0} R(n;n_1,n_2,\ldots n_k)$$

Числа $R(n;\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k)$ называются полиномиальными коэффициентами.

Теорема 2.7(Полиномиальная теорема)

$\forall a_1, a_2, ... a_k \in R$ справедливо соотношение:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n;\ n_i \geq 0} R(n; n_1, n_2, ... n_k) \cdot a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot ... a_k^{n_k}$$

Если рассмотренный выше набор $(B_1, \ldots, B_k)$ рассматривать без учета порядка его блоков, то он называется неупорядоченным разбиением множества X, или просто разбиением на k блоков.

Число разбиений *n*-элементного множества на k блоков называется числом Стирлинга второго рода и обозначается **S(n,k)**.

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k) \quad (0<k<n)$$

$$S(n,0)=0 \text{ при } n>0, \quad S(n,k)=0 \text{ при } n<k,$$

$$S(n,n)=1, \ S(0,0)=1.$$

Пример. Сколькими способами можно разместить 4 человека за двумя одинаковыми столиками, что бы столики не были пустыми?

Из формул следует удобный способ рекуррентного вычисления значений чисел Стирлинга 2 рода, который можно представить в графической форме. В этом треугольнике каждое k-е в ряду число является суммой левого стоящего над ним числа с правым, умноженным на k. Тогда число Стирлинга $S(n,k)$ находится в n–м ряду на k-м месте, если начинать счет от 0.