运筹学

Operations Research

何大义
hedy@cugb.edu.cn
工商管理教研室
经济管理学院

课程内容

1. 绪论
2. 线性规划与单纯形法
3. 对偶理论与灵敏度分析
4. 整数规划
5. 运输问题
6. 动态规划
7. 图论
8. 网络规划
9. 存贮论
10. 决策论
11. 对策论

Section 1

绪论

本章内容

1. 绪论
   - 概述
   - 运筹学模型的建立
   - 运筹学的应用

目录

1 绪论
- 概述
- 运筹学模型的建立
- 运筹学的应用

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。
- 从数学模型求出的解不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的系统处理提供了有用的可以作为决策基础的信息。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。
- 从数学模型求出的解不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的系统处理提供了有用的可以作为决策基础的信息。
- 运筹的思想与实践历史久远。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。
- 从数学模型求出的解不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的系统处理提供了有用的可以作为决策基础的信息。
- 运筹的思想与实践历史久远。
- 运筹学作为科学名词出现于 20 世纪 30 年代末。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。
- 从数学模型求出的解不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的系统处理提供了有用的可以作为决策基础的信息。
- 运筹的思想与实践历史久远。
- 运筹学作为科学名词出现于 20 世纪 30 年代末。
- 到 60 年代，运筹学的基本框架形成。

什么是运筹学？

- 运筹学是给出问题的不坏的答案的艺术，不然问题的结果会更坏。
- 定性研究是定量研究的基础。
- 定量研究是定性研究的支持。
- 从数学模型求出的解不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的系统处理提供了有用的可以作为决策基础的信息。
- 运筹的思想与实践历史久远。
- 运筹学作为科学名词出现于 20 世纪 30 年代末。
- 到 60 年代，运筹学的基本框架形成。
- 我国在 50 年代中期开始出现了运筹学的推广、运用与研究工作。

田忌赛马

最为经典的对策论问题。

孙子兵法

《孙子兵法》是世界上最早的兵书之一。在中国被奉为兵家经典，后世的兵书大多受到它的影响，对中国的军事学发展影响非常深远。它也被翻译成多种语言，在世界军事实上也具有重要的地位。

孙子兵法

《孙子兵法》是世界上最早的兵书之一。在中国被奉为兵家经典，后世的兵书大多受到它的影响，对中国的军事学发展影响非常深远。它也被翻译成多种语言，在世界军事实上也具有重要的地位。

作者之谜

《孙子兵法》是从战国时期起就风靡流传的军事著作，古今中外的军事家们都使用其中论述的军事理论来指导战争，而且，其中论述的基本理论和思想还被运用到了现代经营决策和社会管理方面。然而，这部著作者是谁呢？学术界议论纷纷，一种认为是春秋时期吴国的孙武所著，一种认为是孙膑整理而成，一种认为是战国初年某位山林处士编写，还有的说是三国时代曹操编撰的。直到 1972 年 4 月间，在山东临沂银雀山发掘的两座汉代墓葬中同时发现了用竹简写成的《孙子兵法》和《孙膑兵法》，这样，数百年的争论方告结束，《孙子兵法》的作者被确认为春秋时期吴国的将军孙武。

丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。

丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。
- 面临的困难

1. 清理废墟；

丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。
- 面临的困难

1. 清理废墟；
2. 挖土烧砖；

丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。
- 面临的困难

1. 清理废墟；
2. 挖土烧砖；
3. 调运大量的建筑材料；

丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。
- 面临的困难

1. 清理废墟；
2. 挖土烧砖；
3. 调运大量的建筑材料；
4. 建筑垃圾的清理。

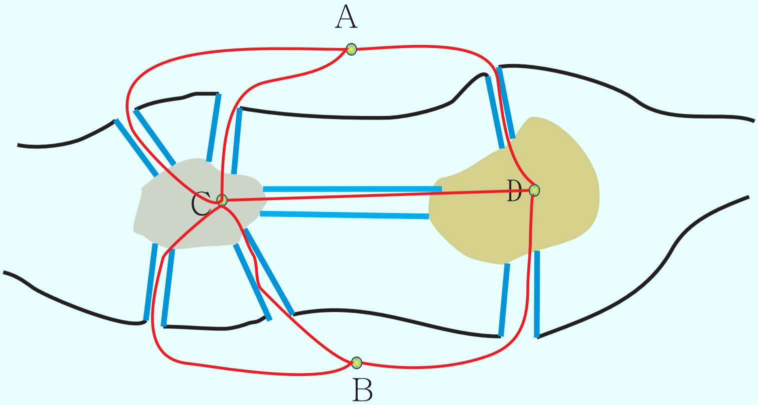
丁谓造城，一举三得

- 北宋年间，一日京城汴梁突发大火，整座皇宫都成了断垣残壁，一片瓦砾。灾后皇帝命当时在朝为官的丁谓主持皇宫的修复工作。
- 面临的困难

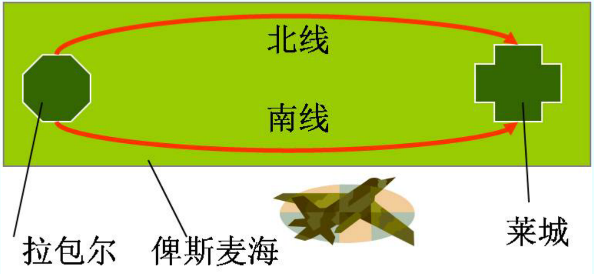
1. 清理废墟；
2. 挖土烧砖；
3. 调运大量的建筑材料；
4. 建筑垃圾的清理。

- “一举三得”方案：首先把宫前大街开挖成一条河，挖出来的土用来烧砖制瓦。然后把这条河跟汴水接通，使大船可以直接从水路运来大批建筑材料。皇宫修复以后，再把建筑垃圾回填河中，恢复原来的大街。

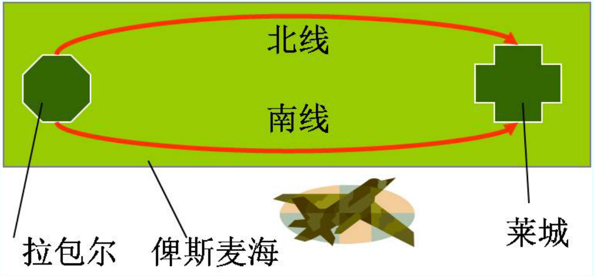
哥尼斯堡七桥问题



俾斯麦海的海空对抗

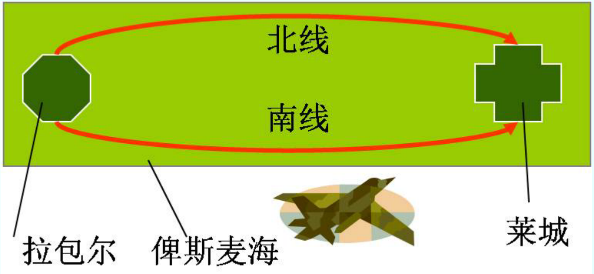


俾斯麦海的海空对抗



- 从拉包尔到莱城的海上航线有南线和北线两条，通过时间均为 3 天。

俾斯麦海的海空对抗



- 从拉包尔到莱城的海上航线有南线和北线两条，通过时间均为 3 天。
- 气象预报表明，未来 3 天中，北线阴雨，能见度差；而南线则天气晴好，能见度佳。

运筹学在管理中的应用

- 联合航空在满足乘客需求的前提下以最低成本进行订票及机场工作班次安排，每年节约成本 \$600 万；

运筹学在管理中的应用

- 联合航空在满足乘客需求的前提下以最低成本进行订票及机场工作班次安排，每年节约成本 \$600 万；
- IBM重组全球供应链，保持最小库存的同时满足客户需求，第一年节约成本 \$7.5 亿；

运筹学在管理中的应用

- 联合航空在满足乘客需求的前提下以最低成本进行订票及机场工作班次安排，每年节约成本 \$600 万；
- IBM重组全球供应链，保持最小库存的同时满足客户需求，第一年节约成本 \$7.5 亿；
- 宝洁公司重新设计北美生产和分销系统以降低成本并加快市场进入速度，每年节约成本 \$2 亿

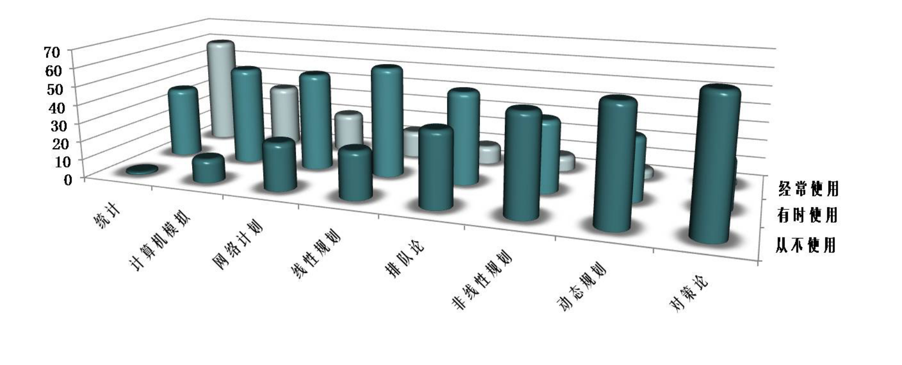
运筹学在管理中的应用

- 联合航空在满足乘客需求的前提下以最低成本进行订票及机场工作班次安排，每年节约成本 \$600 万；
- IBM重组全球供应链，保持最小库存的同时满足客户需求，第一年节约成本 \$7.5 亿；
- 宝洁公司重新设计北美生产和分销系统以降低成本并加快市场进入速度，每年节约成本 \$2 亿
- 施乐公司通过战略调整，缩短维修机器的反应时间和改进维修人员的生产率，生产率提高 50%以上

运筹学在管理中的应用

- 联合航空在满足乘客需求的前提下以最低成本进行订票及机场工作班次安排，每年节约成本 \$600 万；
- IBM重组全球供应链，保持最小库存的同时满足客户需求，第一年节约成本 \$7.5 亿；
- 宝洁公司重新设计北美生产和分销系统以降低成本并加快市场进入速度，每年节约成本 \$2 亿
- 施乐公司通过战略调整，缩短维修机器的反应时间和改进维修人员的生产率，生产率提高 50%以上
- 标准品牌控制成品库存（制定最优再订货点和订购量确保安全库存），每年节约成本 \$380 万

运筹学方法使用情况 (美 1983)



运筹学的性质和特点

- 运筹学是一门应用科学。

运筹学的性质和特点

- 运筹学是一门应用科学。
- “运筹学是为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。”

运筹学的性质和特点

- 运筹学是一门应用科学。
- “运筹学是为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。”
- “运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。”

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则:

- 合伙原则:运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则:

- 合伙原则:运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。
- 催化原则:在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法;

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则：

- 合伙原则：运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。
- 催化原则：在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法；
- 互相渗透原则：彼此渗透地考虑问题，而不要局限于本部门；

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则:

- 合伙原则:运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。
- 催化原则:在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法;
- 互相渗透原则:彼此渗透地考虑问题，而不要局限于本部门;
- 独立原则:不受他人或部门特殊政策和影响

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则:

- 合伙原则:运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。
- 催化原则:在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法;
- 互相渗透原则:彼此渗透地考虑问题，而不要局限于本部门;
- 独立原则:不受他人或部门特殊政策和影响
- 宽容原则:解决问题的思路要宽，方法要多，不能局限于某些特定方法;

运筹学的基本原则

前英国运筹学会会长托姆林森提出了运筹学研究中的几项基本原则:

- 合伙原则:运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。
- 催化原则:在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法;
- 互相渗透原则:彼此渗透地考虑问题，而不要局限于本部门;
- 独立原则:不受他人或部门特殊政策和影响
- 宽容原则:解决问题的思路要宽，方法要多，不能局限于某些特定方法;
- 平衡原则:考虑各种矛盾平衡，关系的平衡。

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- **提出和形成问题**:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- **提出和形成问题**:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；
- **建立模型**:即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示；

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- **提出和形成问题**:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；
- **建立模型**:即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示；
- **求解**:用各种手段求模型的解，包括最优解、次优解、满意解等；

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- 提出和形成问题:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；
- 建立模型:即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示；
- 求解:用各种手段求模型的解，包括最优解、次优解、满意解等；
- 解的检验:不检查解的求解过程和结果有无错误，能否反映现实问题；

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- 提出和形成问题:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料；
- 建立模型:即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示；
- 求解:用各种手段求模型的解，包括最优解、次优解、满意解等；
- 解的检验:不检查解的求解过程和结果有无错误，能否反映现实问题；
- 解的控制:通过对解的控制来实现对问题目标的调整和控制；

运筹学的工作步骤

提出和形成问题 → 建立模型 → 求解 → 解的检验 → 解的控制 → 解的实施

- 提出和形成问题:即是要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料;
- 建立模型:即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示;
- 求解:用各种手段求模型的解，包括最优解、次优解、满意解等;
- 解的检验:不检查解的求解过程和结果有无错误，能否反映现实问题;
- 解的控制:通过对解的控制来实现对问题目标的调整和控制;
- 解的实施:考虑各种矛盾平衡，关系的平衡。

目录

1 绪论

- 概述
- 运筹学模型的建立
- 运筹学的应用

运筹学模型的主要类型

- 形象模型 :形象模型包括实体模型和比例模型。实体模型就是将研究对象本身作为研究模型；比例模型即是将研究对象按照一定的比例加以放大或缩小建立的模型。

运筹学模型的主要类型

- 形象模型：形象模型包括实体模型和比例模型。实体模型就是将研究对象本身作为研究模型；比例模型即是将研究对象按照一定的比例加以放大或缩小建立的模型。
- 模拟模型：模拟模型即是根据相似性原理，通过对某一对象状态和运行机理的研究来达到对本研究对象进行研究的目的。

运筹学模型的主要类型

- 形象模型:形象模型包括实体模型和比例模型。实体模型就是将研究对象本身作为研究模型；比例模型即是将研究对象按照一定的比例加以放大或缩小建立的模型。
- 模拟模型:模拟模型即是根据相似性原理，通过对某一对象状态和运行机理的研究来达到对本研究对象进行研究的目的。
- 数学模型:即是用数学符号和数学方法描述变量之间相互作用和因果关系的模型，它是运筹学中最为常见的模型形式。

运筹学模型的主要构建方法

- 直接分析法

运筹学模型的主要构建方法

- 直接分析法
- 类比法

运筹学模型的主要构建方法

- 直接分析法
- 类比法
- 数据分析法

运筹学模型的主要构建方法

- 直接分析法
- 类比法
- 数据分析法
- 实验分析法

运筹学模型的主要构建方法

- 直接分析法
- 类比法
- 数据分析法
- 实验分析法
- 构想法

运筹学模型构建时应注意的问题

鸡兔同笼问题

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？[a]

[a]我国古代《孙子算经》共三卷，成书大约在公元 5 世纪。

鸡兔同笼问题

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？[a]

[a]我国古代《孙子算经》共三卷，成书大约在公元 5 世纪。

设鸡有 x 只，兔有 y 只，则可以得到：

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

鸡兔同笼问题

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？[a]

[a]我国古代《孙子算经》共三卷，成书大约在公元 5 世纪。

设鸡有 x 只，兔有 y 只，则可以得到：

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

可以解得： $x=23, y=12$。

鸡兔同笼问题

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？[a]

[a]我国古代《孙子算经》共三卷，成书大约在公元 5 世纪。

设鸡有 x 只，兔有 y 只，则可以得到：

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

可以解得： $x=23, y=12$。

这样求解有问题吗？

目录

1 绪论
- 概述
- 运筹学模型的建立
- 运筹学的应用

运筹学的应用

- 运筹学的早期应用主要在军事领域，二战后转向民间应用。

运筹学的应用

- 运筹学的早期应用主要在军事领域，二战后转向民间应用。
- 现代运筹学的应用十分广泛。

市场销售	生产计划	库存管理	运输问题
财政和会计	人事管理	设备管理	工程的优化设计
计算机和信息系统	城市管理		

课程内容简介 · 线性规划

- 运筹学理论中最为成熟和完善的分支。

课程内容简介 · 线性规划

- 运筹学理论中最为成熟和完善的分支。
- 目标函数和所有的约束条件都是线性的。

课程内容简介 · 线性规划

- 运筹学理论中最为成熟和完善的分支。
- 目标函数和所有的约束条件都是线性的。
- $$\min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
  $$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

课程内容简介 · 整数规划

- 与线性规划类似，区别在于所有或部分的变量是整数的。

- 与线性规划类似，区别在于所有或部分的变量是整数的。
- $$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}$$

课程内容简介 · 运输问题

- 线性规划的进一步延伸。

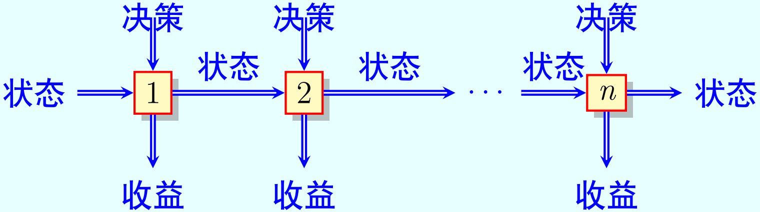
课程内容简介 · 运输问题

- 线性规划的进一步延伸。
- 解决物资调运问题的基本方法。

- 线性规划的进一步延伸。
- 解决物资调运问题的基本方法。
-

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3	10	7
A2	1	9	2	8	4
A3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法。



课程内容简介 · 图论与网络分析

图是最为直接的数学语言。
图论是运筹学中相对独立的一个分支。

- 最短路问题

课程内容简介 · 图论与网络分析

图是最为直接的数学语言。
图论是运筹学中相对独立的一个分支。

- 最短路问题
- 网络最大流

课程内容简介 · 图论与网络分析

图是最为直接的数学语言。
图论是运筹学中相对独立的一个分支。

- 最短路问题
- 网络最大流
- 最小费用最大流

图是最为直接的数学语言。
图论是运筹学中相对独立的一个分支。

- 最短路问题
- 网络最大流
- 最小费用最大流
- 中国邮递员问题

课程内容简介 · 图论与网络分析

图是最为直接的数学语言。
图论是运筹学中相对独立的一个分支。

- 最短路问题
- 网络最大流
- 最小费用最大流
- 中国邮递员问题
- 网络计划与优化

“管理就是决策”。[1]

决策论研究的是行为选择的理论。

- 确定型决策

[1] Simon，诺贝尔奖获得者，决策论的奠基者。

课程内容简介 · 决策论

"管理就是决策"。[1]
决策论研究的是行为选择的理论。

- 确定型决策
- 不确定型决策

[1] Simon, 诺贝尔奖获得者，决策论的奠基者。

课程内容简介 · 决策论

"管理就是决策"。[1]
决策论研究的是行为选择的理论。

- 确定型决策
- 不确定型决策
- 风险型决策

[1] Simon，诺贝尔奖获得者，决策论的奠基者。

对策论研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。

表: 囚徒困境

A\B	坦白	抵赖
坦白	-8,-8	0,-10
抵赖	-10,0	-1,-1

课程内容简介 · 存贮论

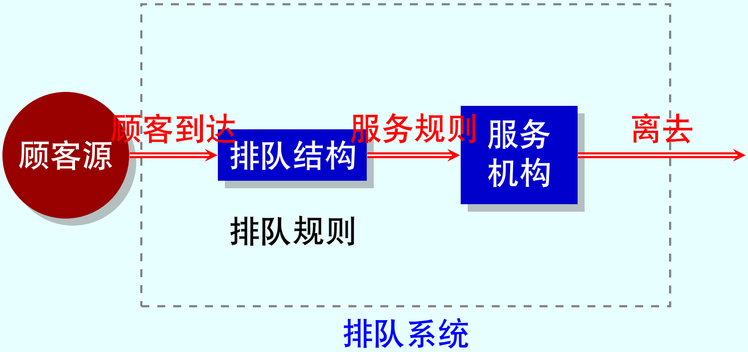
存贮论是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法。

课程内容简介 · 存贮论

存贮论是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法。
用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。

存贮论是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法。
用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。

研究排队现象的理论。



Section 2

线性规划与单纯形法

本章内容

2 线性规划与单纯形法

- 线性规划问题及其数学模型
- 单纯形法
- 线性规划模型的建立

目录

2 线性规划与单纯形法
- 线性规划问题及其数学模型
- 单纯形法
- 线性规划模型的建立

概述

- 线性规划是运筹学中的一个重要分支。

概述

- 线性规划是运筹学中的一个重要分支。
- 前苏联数学家康托洛维奇，20 世纪 30 年代，《生产组织与计划的数学方法》

概述

- 线性规划是运筹学中的一个重要分支。
- 前苏联数学家康托洛维奇，20 世纪 30 年代，《生产组织与计划的数学方法》
- 1940 年数学家劳莱发展并建立了线性规划模型

概述

- 线性规划是运筹学中的一个重要分支。
- 前苏联数学家康托洛维奇，20 世纪 30 年代，《生产组织与计划的数学方法》
- 1940 年数学家劳莱发展并建立了线性规划模型
- 1947 年丹捷格（G.B.Dantizg)提出了一般线性规划问题的求解方法——单纯形法，使得线性规划理论日臻成熟。

概述

- 线性规划是运筹学中的一个重要分支。
- 前苏联数学家康托洛维奇，20 世纪 30 年代，《生产组织与计划的数学方法》
- 1940 年数学家劳莱发展并建立了线性规划模型
- 1947 年丹捷格（G.B.Dantizg)提出了一般线性规划问题的求解方法——单纯形法，使得线性规划理论日臻成熟。
- 计算机技术的发展为变量众多的复杂线性规划问题的求解成为可能，也使得线性规划方法有了更为广阔的应用空间。

引例 1

某企业准备生产甲乙两种产品，需要消耗 A、B、C 三种资源，生产每单位产品对各种资源的消耗量，三种资源的总拥有量，产品的单位利润如表所示，假设企业追求利润最大化，试建立该问题的线性规划模型。

表: 线性规划引例 1

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

表: 线性规划引例 1

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

解:设甲乙两个产品的产量分别为 x_1，x_2，则可建立如下的线性规划模型

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

某企业生产甲、乙、丙三种型号手机，其产量主要受原料 A 和工时的限制，基本情况如下表所示，试建立该问题的线性规划模型。

表: 线性规划引例 2

资源 \ 产品	甲	乙	丙	资源总量（公斤）
原料 A	2	2	4	2000
工时	2	3	3	1500
最低生产量	100	200	200	–
单位利润（元）	40	50	100	–

引例 2 · 解

资源 \ 产品	甲	乙	丙	资源总量（公斤）
原料 A	2	2	4	2000
工时	2	3	3	1500
最低生产量	100	200	200	–
单位利润（元）	40	50	100	–

解:设甲、乙、丙三种产品的产量分别为 x_1，x_2，x_3，则可建立如下的线性规划模型

$$\max \quad z = 40x_1 + 50x_2 + 100x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 2000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 1500 \\ x_1 \geqslant 100 \\ x_2 \geqslant 200 \\ x_3 \geqslant 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划问题的共性特征

- 每一问题都用一组决策变量（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量值是非负的；

线性规划问题的共性特征

- 每一问题都用一组决策变量（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量值是非负的；
- 存在一定的约束条件，它们可用线性等式或不等式表示；

线性规划问题的共性特征

- 每一问题都用一组决策变量（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量值是非负的；
- 存在一定的约束条件，它们可用线性等式或不等式表示；
- 都有一个要求达到的目标，它们可用决策变量的线性函数表示，称目标函数。根据问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

线性规划问题的共性特征

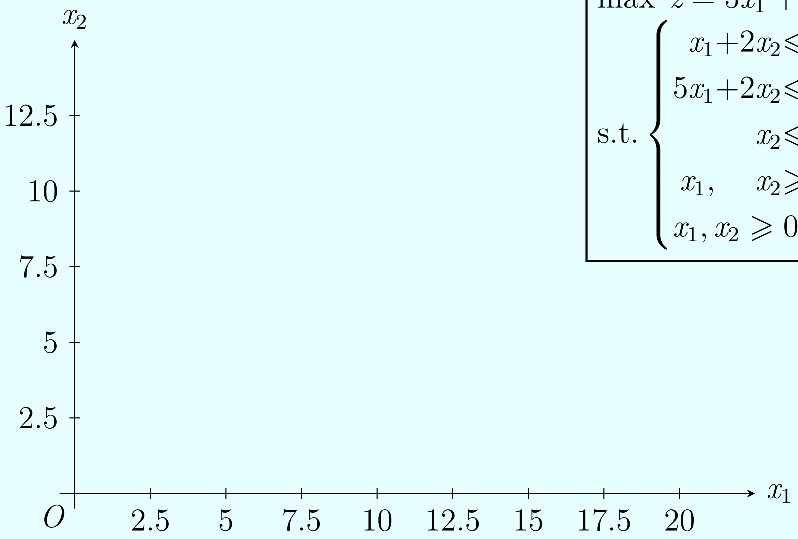
- 每一问题都用一组决策变量（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量值是非负的；
- 存在一定的约束条件，它们可用线性等式或不等式表示；
- 都有一个要求达到的目标，它们可用决策变量的线性函数表示，称目标函数。根据问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。
- 线性规划模型的一般形式

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leqslant, =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leqslant, =, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leqslant, =, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$
\max\ z = 5x_1 + 4x_2
$$

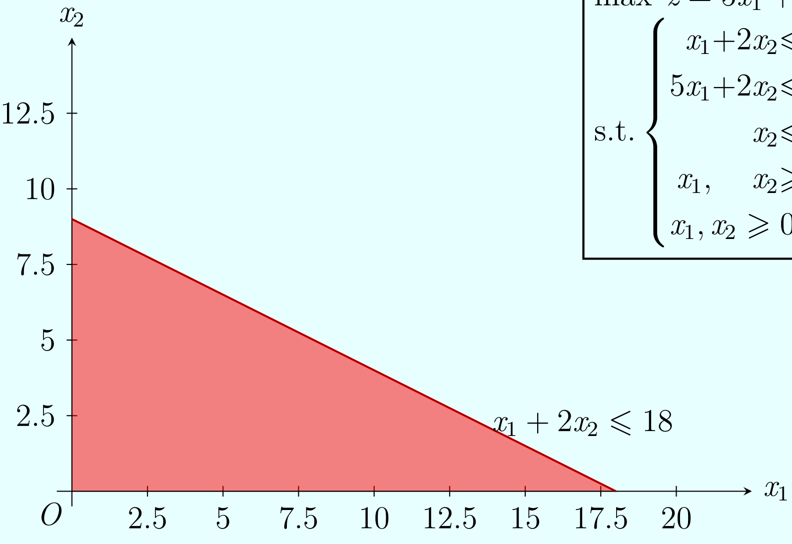
$$
\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 & (2) \\ x_2 \leqslant 8 & (3) \\ x_1,\quad x_2 \geqslant 0 & (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$



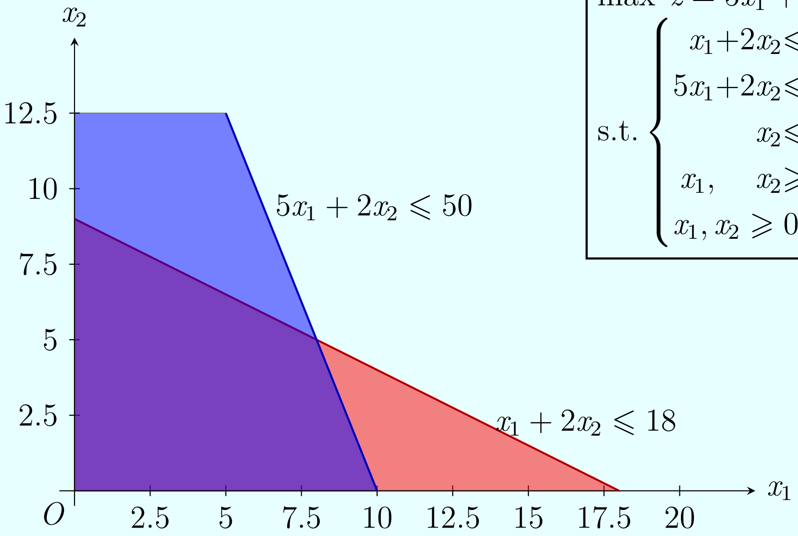
线性规划问题的图解法

$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \ \ (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

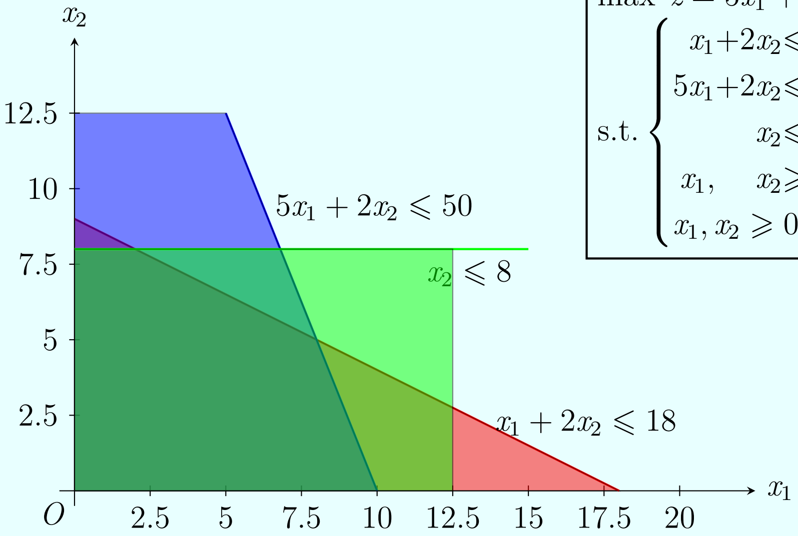


线性规划问题的图解法



$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \quad (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

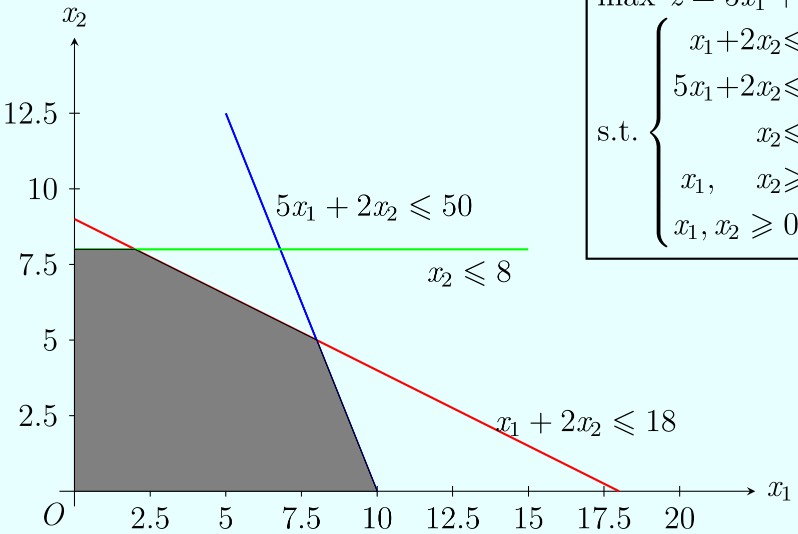
线性规划问题的图解法



$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$

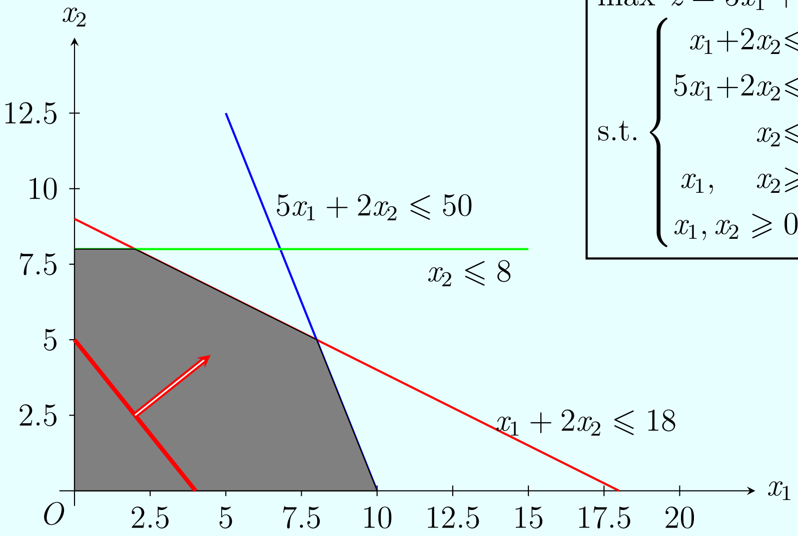
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \ \ (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划问题的图解法



$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$

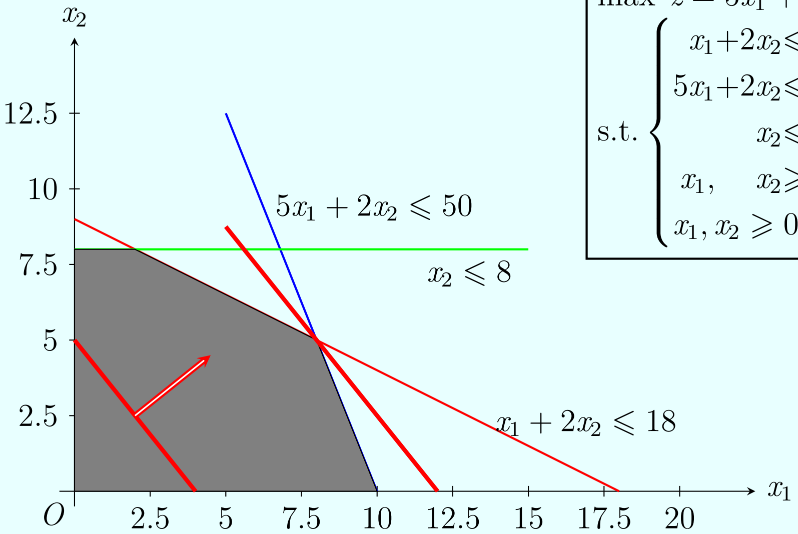
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \quad (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \quad (2) \\ x_2 \leqslant 8 \quad (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \quad (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

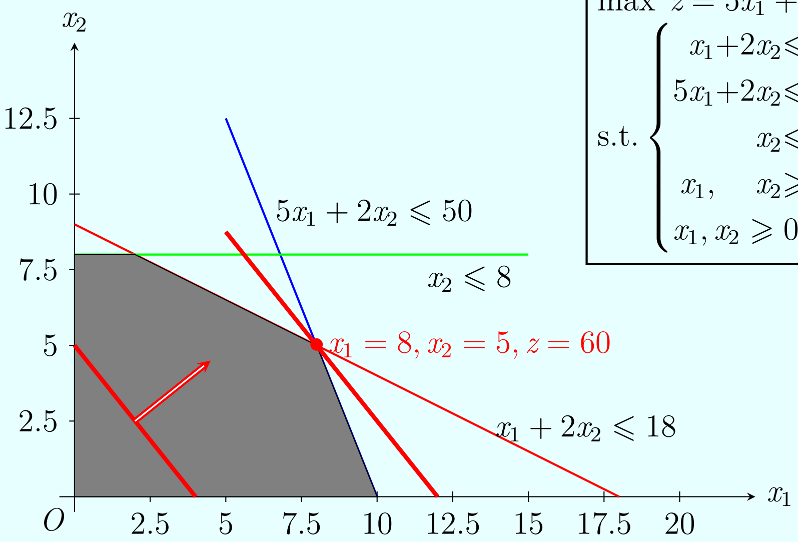
线性规划问题的图解法



$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$

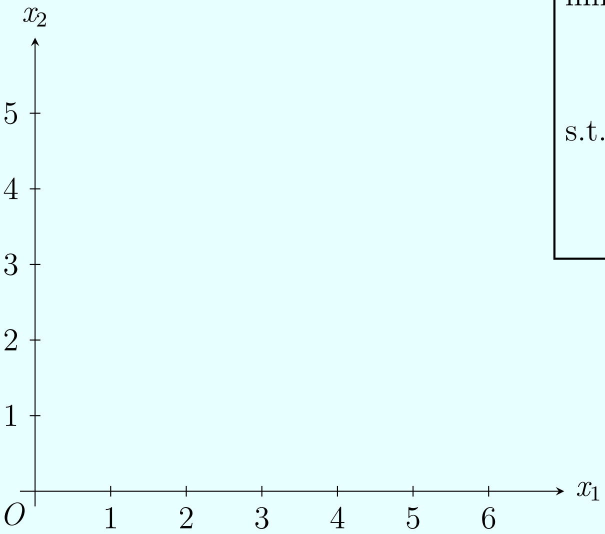
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 (2) \\ x_2 \leqslant 8 \quad (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划问题的图解法



$$
\max\ z = 5x_1 + 4x_2
$$

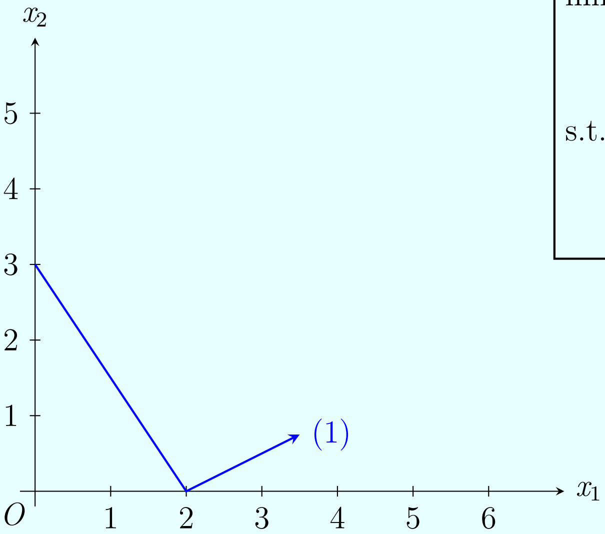
$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \leqslant 18 & (1) \\
5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 & (2) \\
x_2 \leqslant 8 & (3) \\
x_1,\quad x_2 \geqslant 0 & (4) \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$



$$
\min\ z = 2x_1 + 3x_2
$$

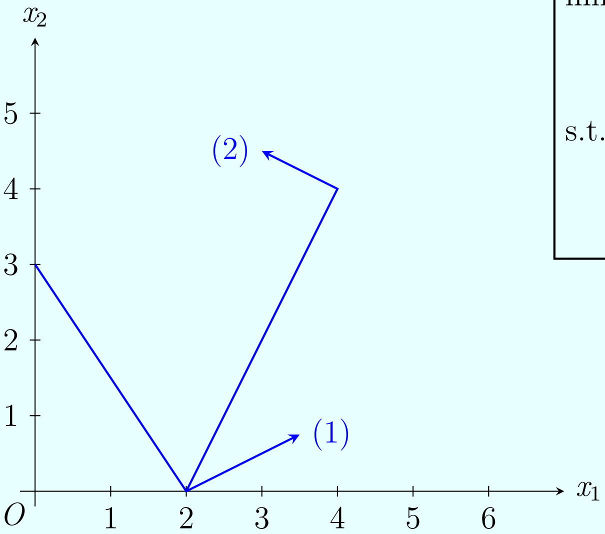
$$
\text{s.t.}\begin{cases}
3x_1+2x_2\geqslant 6 & (1)\\
4x_1-2x_2\leqslant 8 & (2)\\
x_1\leqslant 3 & (3)\\
x_2\leqslant 5 & (4)\\
x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

线性规划问题的图解法



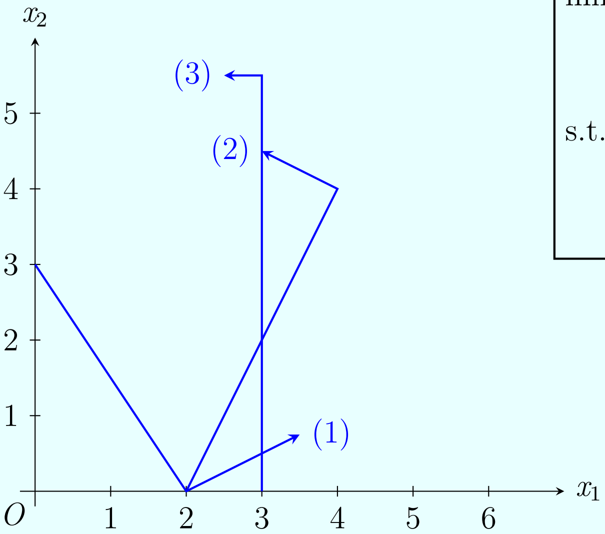
$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \quad (1) \\ 4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 \quad (2) \\ x_1 \leqslant 3 \quad (3) \\ x_2 \leqslant 5 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



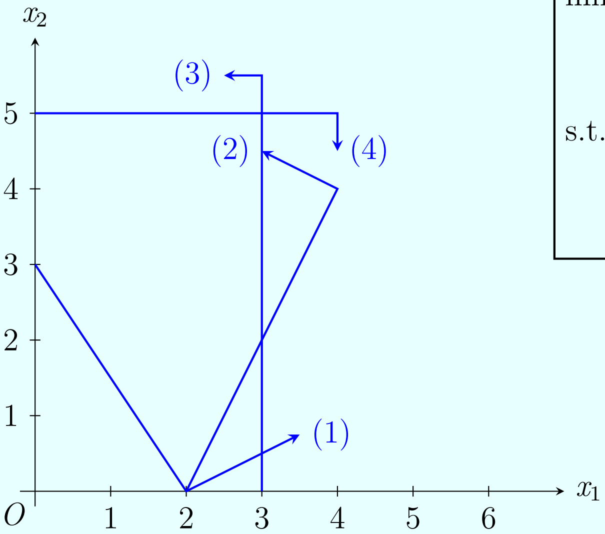
$$\min \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 (1) \\ 4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 (2) \\ x_1 \leqslant 3 (3) \\ x_2 \leqslant 5 (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



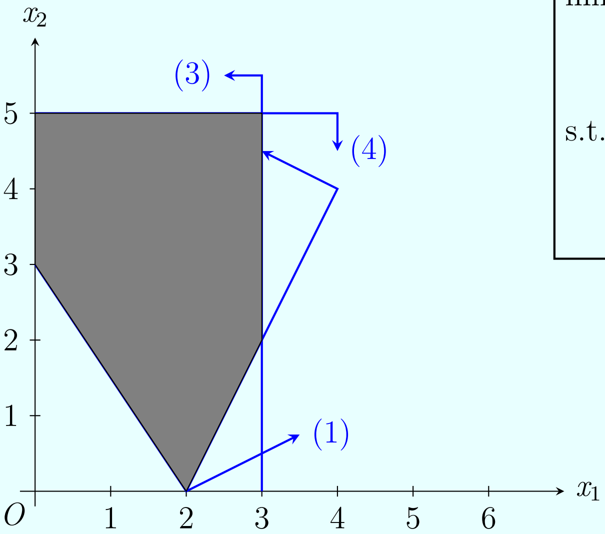
$$
\min \quad z = 2x_1 + 3x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \, (1) \\ 4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 \, (2) \\ x_1 \leqslant 3 \, (3) \\ x_2 \leqslant 5 \, (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$



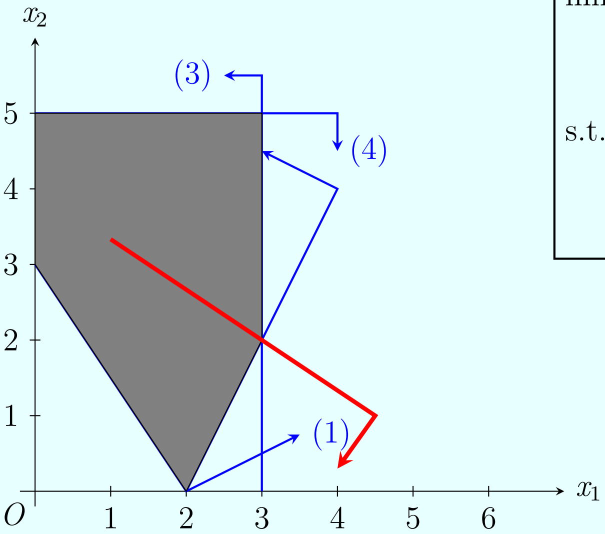
$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 & (1) \\
4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 & (2) \\
x_1 \leqslant 3 & (3) \\
x_2 \leqslant 5 & (4) \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

线性规划问题的图解法



$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2$$

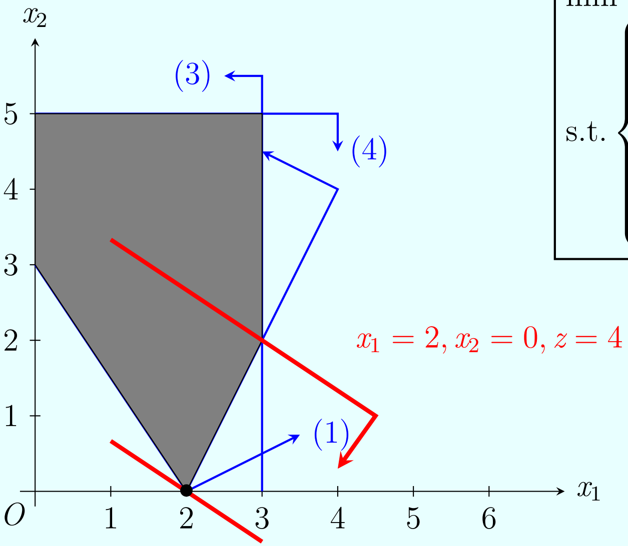
$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1+2x_2 \geqslant 6 & (1) \\ 4x_1-2x_2 \leqslant 8 & (2) \\ x_1 \leqslant 3 & (3) \\ x_2 \leqslant 5 & (4) \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



$$
\min \quad z = 2x_1 + 3x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 (1) \\ 4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 (2) \\ x_1 \leqslant 3 (3) \\ x_2 \leqslant 5 (4) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

线性规划问题的图解法



$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 & (1) \\
4x_1 - 2x_2 \leqslant 8 & (2) \\
x_1 \leqslant 3 & (3) \\
x_2 \leqslant 5 & (4) \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；
- 线性规划最优解不可能在凸集内的点上实现；

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；
- 线性规划最优解不可能在凸集内的点上实现；
- 线性规划问题有可能存在无穷多最优解；

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；
- 线性规划最优解不可能在凸集内的点上实现；
- 线性规划问题有可能存在无穷多最优解；
- 如果可行域无界，则最优解可能是无界解；

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；
- 线性规划最优解不可能在凸集内的点上实现；
- 线性规划问题有可能存在无穷多最优解；
- 如果可行域无界，则最优解可能是无界解；
- 如果不存在可行域，则没有可行解，也一定不存在最优解；

线性规划问题的图解法 · 总结

- 可行域一定是凸集，即该区域内任意两点间连线上的点仍在该区域内；
- 线性规划最优解不可能在凸集内的点上实现；
- 线性规划问题有可能存在无穷多最优解；
- 如果可行域无界，则最优解可能是无界解；
- 如果不存在可行域，则没有可行解，也一定不存在最优解；
- 图解法只适用于两个决策变量的情况。

规定具有下述条件的线性规划问题为**标准型式的线性规划问题**：[2]

- 目标函数为求最大；

$$
\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcccrcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \cdots & & \cdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
x_1, & & x_2 & & \ldots & & x_n & \geqslant 0 &
\end{array} \right.
$$

[2]事实上，一般情况下也要求等式右端项非负。

线性规划问题标准形式

规定具有下述条件的线性规划问题为**标准型式的线性规划问题**：[2]

- 目标函数为求最大；
- 约束条件为等式约束；

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \; & \left\{
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \cdots & & \cdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
x_1, & & x_2 & & \ldots & & x_n & \geqslant 0 &
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

[2] 事实上，一般情况下也要求等式右端项非负。

线性规划问题标准形式

规定具有下述条件的线性规划问题为标准型式的线性规划问题：[2]

- 目标函数为求最大；
- 约束条件为等式约束；
- 决策变量为非负。

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\ x_1, & & x_2 & & \ldots & & x_n & \geqslant 0 & \end{cases}$$

[2] 事实上，一般情况下也要求等式右端项非负。

线性规划问题的其他形式

标准型线性规划模型有时也可写成:

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i=1,2,\ldots,m\\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

线性规划问题的其他形式

对于标准型线性规划模型，若令 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\ldots,c_n),\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$，$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^T$，则可得

$$\max \quad z=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b} & \\ x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

线性规划问题的其他形式

对于标准型线性规划模型，若令 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,...,c_n),\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$，$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},...,a_{mj})^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,...,b_m)^T$，$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^T$，则可得

$$\max \quad z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

或矩阵形式：

$$\max \quad z=\boldsymbol{CX}$$
$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{X}\geqslant 0$$

其中 A 称为系数矩阵，C 称为价值系数向量，X 称为决策变量向量，b 称为资源向量。

线性规划问题的标准化

- 情况 I：目标函数为最小化时，令

$$z' = -z$$

线性规划问题的标准化

- 情况 I：目标函数为最小化时，令

$$z' = -z$$

- 情况 II：约束为不等式时
  $\leqslant$：左端加上一个非负松弛变量
  $\geqslant$：左端减去一个非负剩余变量

线性规划问题的标准化

- 情况 I：目标函数为最小化时，令

$$z' = -z$$

- 情况 II：约束为不等式时
  $\leqslant$：左端加上一个非负松弛变量
  $\geqslant$：左端减去一个非负剩余变量
- 情况 III：存在某个变量 $x_k \in \mathbb{R}$ 时，令

$$x_k = x'_k - x''_k$$

其中，$x'_k, x''_k \geqslant 0$。

线性规划问题的标准化 · 例

原模型

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & \begin{cases}
\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leqslant & 7 \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geqslant & 2 \\
-3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5
\end{array} \\
x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \in \mathbb{R}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

线性规划问题的标准化 · 例

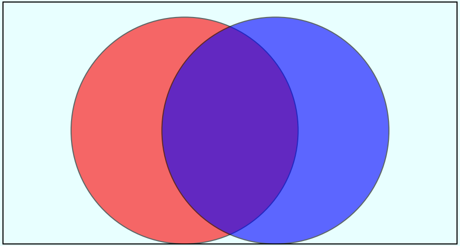
原模型

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} & \begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\
x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\
x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \in \mathbb{R}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

标准化模型

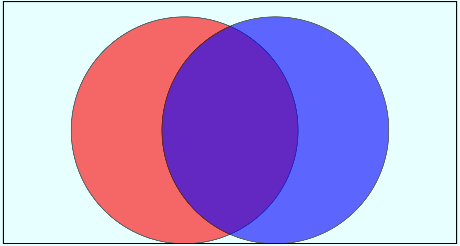
$$
\begin{aligned}
\max\ & z' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\text{s.t.} & \begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 2 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 6
\end{cases}
\end{aligned}
$$

- 可行解：满足资源约束和非负约束条件的解为可行解。



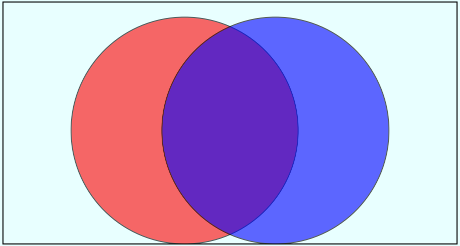
线性规划问题解的概念

- 可行解：满足资源约束和非负约束条件的解为可行解。
- 最优解：使目标函数达到极值的解为最优解。



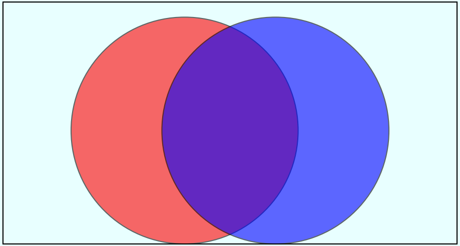
线性规划问题解的概念

- 可行解：满足资源约束和非负约束条件的解为可行解。
- 最优解：使目标函数达到极值的解为最优解。
- 基：



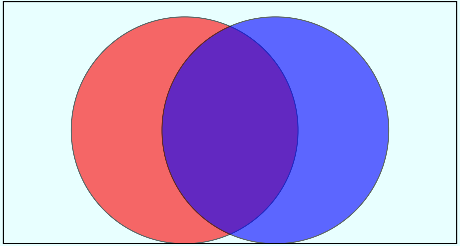
线性规划问题解的概念

- 可行解：满足资源约束和非负约束条件的解为可行解。
- 最优解：使目标函数达到极值的解为最优解。
- 基：
- 基可行解：满足非负约束条件的基解称为基可行解。



线性规划问题解的概念

- 可行解：满足资源约束和非负约束条件的解为可行解。
- 最优解：使目标函数达到极值的解为最优解。
- 基：
- 基可行解：满足非负约束条件的基解称为基可行解。
- 可行基：对应于基可行解的基称为可行基。



目录

2 线性规划与单纯形法
- 线性规划问题及其数学模型
- 单纯形法
- 线性规划模型的建立

- 凸集：设 K 是 n 维欧氏空间的一点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$ 的连线上所有点 $\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \in K, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则称 K 为凸集。

单纯形法的基本概念

- **凸集**：设 K 是 n 维欧氏空间的一点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$ 的连线上所有点 $\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \in K, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$ 则称 K 为凸集。
- **凸组合**：设 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 中的 k 个点。若存在 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$，且 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, k$；$\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，使

$$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$$

则称 X 为 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ 的凸组合。（当 $0 < \mu_i < 1$ 时，称为严格凸组合）

单纯形法的基本概念

- **凸集**：设 K 是 n 维欧氏空间的一点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$ 的连线上所有点 $\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \in K, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则称 K 为凸集。
- **凸组合**：设 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 中的 k 个点。若存在 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$，且 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, k$；$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，使

$$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$$

则称 X 为 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ 的凸组合。（当 $0 < \mu_i < 1$ 时，称为严格凸组合）
- **顶点**：设 K 是凸集，$X \in K$；若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)} \in K$ 和 $X^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X 为 K 的一个顶点（或极点）。

单纯形法的基本定理

- **定理 1**：若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\left\{X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0\right\}$$

是凸集。

单纯形法的基本定理

- **定理 1**：若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D = \left\{ X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0 \right\}$$

是凸集。

- **引理 1**：线性性规划问题的可行解 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

单纯形法的基本定理

- 定理 1：若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\left\{X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0\right\}$$

是凸集。

- 引理 1：线性规划问题的可行解 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- 定理 2：线性规划问题的基可行解 X 对应于可行域 D 的顶点。

单纯形法的基本定理

- 定理 1：若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\left\{X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0\right\}$$

是凸集。
- 引理 1：线性规划问题的可行解 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- 定理 2：线性规划问题的基可行解 X 对应于可行域 D 的顶点。
- 引理 2：若 K 是有界凸集，则任何一点 $X \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。

单纯形法的基本定理

- 定理 1：若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D = \left\{ X \mid \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0 \right\}$$

  是凸集。
- 引理 1：线性规划问题的可行解 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- 定理 2：线性规划问题的基可行解 X 对应于可行域 D 的顶点。
- 引理 2：若 K 是有界凸集，则任何一点 $X \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。
- 定理 3：若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。
- 其基本思路是首先确定一个初始基可行解，然后判断该基可行解是否为最优解。

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。
- 其基本思路是首先确定一个初始基可行解，然后判断该基可行解是否为最优解。
- 如果是最优解，则求解过程结束；

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。
- 其基本思路是首先确定一个初始基可行解，然后判断该基可行解是否为最优解。
- 如果是最优解，则求解过程结束；
- 如果不是最优解，则在此基础上变换找出另一个基可行解，该基可行解的目标函数值应该优于原基可行解。

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。
- 其基本思路是首先确定一个初始基可行解，然后判断该基可行解是否为最优解。
- 如果是最优解，则求解过程结束；
- 如果不是最优解，则在此基础上变换找出另一个基可行解，该基可行解的目标函数值应该优于原基可行解。
- 再判断新的基可行解是否为最优解，如果是最优解，则求解过程结束；

单纯形法的基本思路

- 单纯形法是一种求解多变量线性规划模型的有效方法。
- 其基本思路是首先确定一个初始基可行解，然后判断该基可行解是否为最优解。
- 如果是最优解，则求解过程结束；
- 如果不是最优解，则在此基础上变换找出另一个基可行解，该基可行解的目标函数值应该优于原基可行解。
- 再判断新的基可行解是否为最优解，如果是最优解，则求解过程结束；
- 如果不是最优解，则在此基础上变换再找出另一个新基可行解，如此进行下去，直到找到最优解为止。

单纯形法的基本思路

原模型

$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

单纯形法的基本思路

原模型

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

标准化模型

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

单纯形法的基本思路

原模型

$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

标准化模型

$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}
$$

x_3, x_4, x_5 的技术系数向量对应一个 3×3 的单位阵，是线性独立的，即可以得到一个基 $B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$。

单纯形法的基本思路

$B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$, 所以有,

单纯形法的基本思路

$B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$，所以有，

$$X_B^{(0)} = (x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}, X_N^{(0)} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

单纯形法的基本思路

$B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$, 所以有,

$$X_B^{(0)} = (x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}, X_N^{(0)} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

将非基变量移到等式的右端，有

单纯形法的基本思路

$B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$，所以有，

$$X_B^{(0)} = (x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}, X_N^{(0)} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

将非基变量移到等式的右端，有

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 18 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 50 & - & 5x_1 & - & 2x_2 \\ x_5 & = & 8 & & & - & x_2 \end{array}\right.$$

$B^{(0)}=(P_3,P_4,P_5)$，所以有，

$$X_B^{(0)}=(x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}},X_N^{(0)}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$$

将非基变量移到等式的右端，有

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 50 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - x_2 \end{cases}$$

令 $x_1=x_2=0$，得到 $X^{(0)}=(0,0,18,50,8)^{\mathrm{T}}$，$z^{(0)}=5x_1+4x_2=0.$

$B^{(0)} = (P_3, P_4, P_5)$，所以有，

$$X_B^{(0)} = (x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}, X_N^{(0)} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

将非基变量移到等式的右端，有

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 50 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - x_2 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_2 = 0$，得到 $X^{(0)} = (0, 0, 18, 50, 8)^{\mathrm{T}}$，$z^{(0)} = 5x_1 + 4x_2 = 0$. 这个解对应企业不生产的情况，两个产品的产量为 0，三种资源全部剩余，因为不生产，所以没有利润。

注意到，现在的目标函数表达式为：$z^{(0)} = 5x_1 + 4x_2 = 0$，只要赋予 x_1, x_2 一定的值，由于其价值系数为正，所以目标函数值 z 就一定可以增大，即是无论生产产品甲或乙，利润总会提高。

单纯形法的基本思路

注意到，现在的目标函数表达式为：$z^{(0)} = 5x_1 + 4x_2 = 0$，只要赋予 x_1, x_2 一定的值，由于其价值系数为正，所以目标函数值 z 就一定可以增大，即是无论生产产品甲或乙，利润总会提高。
因为产品甲的价值系数 5 大于产品乙的价值系数 4，故生产产品甲可能会比生产产品乙利润增长的更快，所以要优先考虑产品甲的生产。

单纯形法的基本思路

注意到，现在的目标函数表达式为：$z^{(0)} = 5x_1 + 4x_2 = 0$，只要赋予 x_1, x_2 一定的值，由于其价值系数为正，所以目标函数值 z 就一定可以增大，即是无论生产产品甲或乙，利润总会提高。

因为产品甲的价值系数 5 大于产品乙的价值系数 4，故生产产品甲可能会比生产产品乙利润增长的更快，所以要优先考虑产品甲的生产。

投入产品甲的生产后，必须要保证 x_3, x_4, x_5 不能为负，因为产品乙的产量 x_2 仍然为 0，则有

$$\left\{\begin{array}{rcrrrcl} x_3 & = & 18 & -x_1 & -2x_2 & \geqslant & 0 \\ x_4 & = & 50 & -5x_1 & -2x_2 & \geqslant & 0 \\ x_5 & = & 8 & & -x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right. \xRightarrow{x_2=0} \left\{\begin{array}{l} x_1 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 10 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 \leqslant 10$$

单纯形法的基本思路

注意到，现在的目标函数表达式为：$z^{(0)} = 5x_1 + 4x_2 = 0$，只要赋予 x_1, x_2 一定的值，由于其价值系数为正，所以目标函数值 z 就一定可以增大，即是无论生产产品甲或乙，利润总会提高。

因为产品甲的价值系数 5 大于产品乙的价值系数 4，故生产产品甲可能会比生产产品乙利润增长的更快，所以要优先考虑产品甲的生产。

投入产品甲的生产后，必须要保证 x_3, x_4, x_5 不能为负，因为产品乙的产量 x_2 仍然为 0，则有

$$\left\{\begin{array}{rcrrrcc} x_3 & = & 18 & -x_1 & -2x_2 & \geqslant & 0 \\ x_4 & = & 50 & -5x_1 & -2x_2 & \geqslant & 0 \\ x_5 & = & 8 & & -x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{x_2=0} \left\{\begin{array}{l} x_1 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 10 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 \leqslant 10$$

所以，x_1 入基，x_4 出基。

新基为 $B^{(1)} = (P_3, P_1, P_5)$，对应的基变量为 $X_B^{(1)} = (x_3, x_1, x_5)^{\mathrm{T}}$，非基变量为 $X_N^{(1)} = (x_4, x_2)^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$\begin{cases} x_3 = 18 - (10 - \dfrac{2}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_4) - 2x_2 = 8 - \dfrac{8}{5}x_2 + \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 10 - \dfrac{2}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_5 = 8 - x_2 \end{cases}$$

新基为 $B^{(1)} = (P_3, P_1, P_5)$，对应的基变量为 $X_B^{(1)} = (x_3, x_1, x_5)^{\mathrm{T}}$，非基变量为 $X_N^{(1)} = (x_4, x_2)^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$\begin{cases} x_3 = 18 - (10 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 2x_2 = 8 - \frac{8}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 10 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 = 8 - x_2 \end{cases}$$

令 $x_2 = x_4 = 0$，得到 $X^{(1)} = (10, 0, 8, 0, 8)^{\mathrm{T}}$，此时

$$z^{(1)} = 50 + 2x_2 - x_4 = 50$$

单纯形法的基本思路

由于在 $z^{(1)} = 50 + 2x_2 - x_4 = 50$ 中非基变量 x_2 的系数仍然非负，所以只要增大其值，目标函数值 z 还可增大，即x_2 应入基。

单纯形法的基本思路

由于在 $z^{(1)} = 50 + 2x_2 - x_4 = 50$ 中非基变量 x_2 的系数仍然非负，所以只要增大其值，目标函数值 z 还可增大，即x_2 **应入基**。
另外有，在要求其他非基变量 $x_4 = 0$ 时，同时有

$$\begin{cases} x_3 = 8 - \dfrac{8}{5}x_2 + \dfrac{1}{5}x_4 \geqslant 0 \\ x_1 = 10 - \dfrac{2}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_4 \geqslant 0 \\ x_5 = 8 - x_2 \geqslant 0 \end{cases} \xRightarrow{x_4=0} \begin{cases} x_2 \leqslant 5 \\ x_2 \leqslant 25 \\ x_2 \leqslant 8 \end{cases} \Longrightarrow x_2 \leqslant 5$$

由于在 $z^{(1)}=50+2x_2-x_4=50$ 中非基变量 x_2 的系数仍然非负，所以只要增大其值，目标函数值 z 还可增大，即x_2 **应入基**。
另外有，在要求其他非基变量 $x_4=0$ 时，同时有

$$\begin{cases} x_3=8-\dfrac{8}{5}x_2+\dfrac{1}{5}x_4\geqslant 0 \\ x_1=10-\dfrac{2}{5}x_2-\dfrac{1}{5}x_4\geqslant 0 \\ x_5=8-x_2\geqslant 0 \end{cases} \xRightarrow{x_4=0} \begin{cases} x_2\leqslant 5 \\ x_2\leqslant 25 \\ x_2\leqslant 8 \end{cases} \Longrightarrow x_2\leqslant 5$$

所以，x_3 **出基**。

单纯形法的基本思路

新基 $B^{(2)}=(P_2,P_1,P_5)$，对应的基变量 $X_B^{(2)}=(x_2,x_1,x_5)^{\mathrm{T}}$，非基变量为 $X_N^{(2)}=(x_4,x_3)^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$\begin{cases} x_2=5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4 \\ x_1=10-\frac{2}{5}(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)-\frac{1}{5}x_4=8+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ x_5=8-x_2=8-(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)=3+\frac{5}{8}x_3-\frac{1}{8}x_4 \end{cases}$$

单纯形法的基本思路

新基 $B^{(2)}=(P_2,P_1,P_5)$，对应的基变量 $X_B^{(2)}=(x_2,x_1,x_5)^{\mathrm{T}}$，非基变量为 $X_N^{(2)}=(x_4,x_3)^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$\begin{cases} x_2=5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4 \\ x_1=10-\frac{2}{5}(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)-\frac{1}{5}x_4=8+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ x_5=8-x_2=8-(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)=3+\frac{5}{8}x_3-\frac{1}{8}x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得到
$X^{(2)}=(8,5,0,0,3)^{\mathrm{T}}$，得到目标函数值为:

$$z^{(2)}=5(8+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4)+4(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)=60-\frac{5}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4=60$$

单纯形法的基本思路

新基 $B^{(2)}=(P_2,P_1,P_5)$，对应的基变量 $X_B^{(2)}=(x_2,x_1,x_5)^{\mathrm{T}}$，非基变量为 $X_N^{(2)}=(x_4,x_3)^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$\begin{cases} x_2=5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4 \\ x_1=10-\frac{2}{5}(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)-\frac{1}{5}x_4=8+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ x_5=8-x_2=8-(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)=3+\frac{5}{8}x_3-\frac{1}{8}x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得到
$X^{(2)}=(8,5,0,0,3)^{\mathrm{T}}$，得到目标函数值为:

$$z^{(2)}=5(8+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4)+4(5-\frac{5}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4)=60-\frac{5}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4=60$$

因为此时目标函数表达式中两个非基变量 x_3,x_4 的系数均为负值，则增加它们只会使目标函数减小，故得到的解为最优解 $X^{(2)}=(8,5,0,0,3)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最大值为 $z=60$。

方法一:若线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ &x_j \geqslant 0, j=1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

从 $P_j(j=1,2,\ldots,n)$ 中一般能直接观察到存在一个初始可行基

$$B=(P_1,P_2,\ldots,P_m)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

方法二:对所有约束条件是“$\leqslant$”形式的不等式，可以利用标准化的方法，在每个约束条件的左端加上一个松弛变量，经整理，重新对 x_j 及 a_{ij} 进行编号，可得到:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{1,m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{2,m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m,m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

显然得到一个 $m \times m$ 的单位矩阵

$$B = (P_1, P_2, \ldots, P_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

方法三 :对所有约束条件是“$\geqslant$”形式的不等式及等式约束情况，若不存在单位矩阵，可采用人工造基的方法。

方法三:对所有约束条件是“$\geqslant$”形式的不等式及等式约束情况，若不存在单位矩阵，可采用人工造基的方法。

对不等式约束减去一个非负的剩余变量后，再加上一个非负的人工变量；

方法三 :对所有约束条件是“$\geqslant$”形式的不等式及等式约束情况，若不存在单位矩阵，可采用人工造基的方法。
对不等式约束减去一个非负的剩余变量后，再加上一个非负的人工变量；
对于等式约束再加上一个非负的人工变量，也可得到一个单位矩阵。

当构造出单位矩阵后，

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +a_{1,m+1}x_{1,m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad\quad +a_{2,m+1}x_{2,m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad\quad\quad \cdots \\ \quad\quad x_m +a_{m,m+1}x_{m,m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

当构造出单位矩阵后，

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + a_{1,m+1}x_{1,m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad\quad + a_{2,m+1}x_{2,m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad\quad \cdots \\ \quad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m,m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad = b_1 - a_{1,m+1}x_{1,m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \quad x_2 \quad = b_2 - a_{2,m+1}x_{2,m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad\quad x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m,m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = b_1 \quad - a_{1,m+1}x_{1,m+1} \quad - \cdots - \quad a_{1n}x_n \\ \qquad x_2 \qquad\quad = b_2 \quad - a_{2,m+1}x_{2,m+1} \quad - \cdots - \quad a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\qquad x_m = b_m \quad - a_{m,m+1}x_{m,m+1} \quad - \cdots - \quad a_{mn}x_n \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1 - a_{1,m+1}x_{1,m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \qquad x_2 \qquad = b_2 - a_{2,m+1}x_{2,m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\qquad x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m,m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

令 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，可以得到

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, \ldots, x_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m})^{\mathrm{T}} \\ &= (b_1, b_2, \ldots, b_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m})^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

对线性规划问题的求解结果可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解四种情况，为此需要建立对解的判别准则。

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

对线性规划问题的求解结果可能出现**唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解**四种情况，为此需要建立对解的判别准则。

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \right) x_j$$

令

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i', \; z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}', \quad j = m+1, \cdots, n$$

对线性规划问题的求解结果可能出现**唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解**四种情况，为此需要建立对解的判别准则。

$$x_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \right) x_j$$

令

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i, \, z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}, \quad j = m+1, \cdots, n$$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

对线性规划问题的求解结果可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解四种情况，为此需要建立对解的判别准则。

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \right) x_j$$

令

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i', \; z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}', \quad j = m+1, \cdots, n$$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

$$\sigma_j = c_j - z_j \; (j = m+1, \cdots, n); \; z = z_0 + \sum^{n} \sigma_j x_j$$

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \qquad (j = m+1, \cdots, n)$$

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \qquad (j = m+1, \cdots, n)$$

最优解的判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解，称 σ_j 为**检验数**。

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \qquad (j = m+1, \cdots, n)$$

最优解的判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解，称 σ_j 为**检验数**。

无穷最多解判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

$$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \qquad (j = m+1, \cdots, n)$$

最优解的判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解，称 σ_j 为**检验数**。

无穷最多解判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

无界解的判别定理

若 $X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为一个基可行解，有一个 $\sigma_{m+k} > 0$，且对 $i = 1, 2, \cdots, m$，有 $a_{i,m+k} \leqslant 0$，那么该线性规划问题具有无界解（或称为无最优解）。

若初始基可行解 $X^{(0)}$ 不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。

单纯形法的过程 · 基变换

若初始基可行解 $X^{(0)}$ 不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。具体做法是从原可行解基中换一个列向量，得到一个新的可行基，这称为基变换。

若初始基可行解 $X^{(0)}$ 不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。具体做法是从原可行解基中换一个列向量，得到一个新的可行基，这称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一具新基可行解。

若初始基可行解 $X^{(0)}$ 不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。具体做法是从原可行解基中换一个列向量，得到一个新的可行基，这称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一具新基可行解。

1. 换入变量的确定

当某些 $\sigma_j > 0$ 时，线性规划问题未达到最优解，x_j 增加则目标函数值还可以增大，这时要将某个非基变量 x_j 换到基变量中去，若有两个以下的 $\sigma_j > 0$，为使目标函数值增加得快，从直观上一般选 $\sigma_j > 0$ 中的最大者，即

$$\max_j(\sigma_j > 0) = \sigma_k$$

则对应的 x_k 为换入变量。

若初始基可行解 $X^{(0)}$ 不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。具体做法是从原可行解基中换一个列向量，得到一个新的可行基，这称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一具新基可行解。

1. 换入变量的确定

当某些 $\sigma_j > 0$ 时，线性规划问题未达到最优解，x_j 增加则目标函数值还可以增大，这时要将某个非基变量 x_j 换到基变量中去，若有两个以下的 $\sigma_j > 0$，为使目标函数值增加得快，从直观上一般选 $\sigma_j > 0$ 中的最大者，即

$$\max_j(\sigma_j > 0) = \sigma_k$$

则对应的 x_k 为换入变量。但也可以任选或按最小足码选。

2. 换出变量的确定——最小比值规则

当确定 x_{m+t} 为入基变量后，按下述规划确定出基变量

$$\theta = \min_i \left(\frac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}} \mid \beta_{i,m+t} > 0 \right) = \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$$

单纯形法的过程 · 迭代（旋转运算）

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad x_2 \qquad\qquad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \ddots \\
\qquad\quad x_l \qquad + a_{l,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{lk}x_k + \cdots + a_{ln}x_n = b_l \\
\qquad\qquad \ddots \\
\qquad\qquad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

若 x_k 入基，x_l 出基，即是将 x_k 换入，x_l 换出，须将 P_k 变为单位向量，可通过系数矩阵的增广矩阵进行初等变换来实现。

单纯形法的计算步骤 · 单纯形表

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	
C_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	θ_i
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
z		$\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

单纯形法的计算步骤

1. 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯表；

单纯形法的计算步骤

1. 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯表；
2. 检验各非基变量 x_j 的检验数：$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若 $\sigma_j \leqslant 0$，则已得到最优解，否则转入下一步；

单纯形法的计算步骤

1. 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯表；
2. 检验各非基变量 x_j 的检验数：$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若 $\sigma_j \leqslant 0$，则已得到最优解，否则转入下一步；
3. 在 $\sigma_j > 0$ 中，若存在某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \leqslant 0$，则此问题为无界解。否则转入下一步；

单纯形法的计算步骤

1. 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯表；
2. 检验各非基变量 x_j 的检验数：$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若 $\sigma_j \leqslant 0$，则已得到最优解，否则转入下一步；
3. 在 $\sigma_j > 0$ 中，若存在某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \leqslant 0$，则此问题为无界解。否则转入下一步；
4. 根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

可确定 x_l 为换出变量，转入下一步；

单纯形法的计算步骤

1. 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯表；
2. 检验各非基变量 x_j 的检验数：$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若 $\sigma_j \leqslant 0$，则已得到最优解，否则转入下一步；
3. 在 $\sigma_j > 0$ 中，若存在某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \leqslant 0$，则此问题为无界解。否则转入下一步；
4. 根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

   可确定 x_l 为换出变量，转入下一步；
5. 以 a_{lk} 为主元素进行迭代旋转运算，把 x_k 对应的列向量变换为单位列，将 X_B 中的 x_l 换为 x_k，得到新的单纯表。重复（2）-（5），直到终止。

$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\
x_2 + x_5 = 8 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{cases}
$$

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
		18	1	2	1	0	0	
		50	5	2	0	1	0	
		8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$								

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$								

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0						

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5					

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4				

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0			

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0		

单纯形法 · 例

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\
x_2 + x_5 = 8 \\
x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5
\end{cases}
$$

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

单纯形法 · 例

$$
\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\
x_2 + x_5 = 8 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{cases}
$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

单纯形法 · 例

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	

单纯形法 · 例

	$c_j \rightarrow$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
	x_3							
	x_1							
	x_5							
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3							
5	x_1							
0	x_5							
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

	$c_j \to$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3		0					
5	x_1		1					
0	x_5		0					
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3		0		1		0	
5	x_1		1		0		0	
0	x_5		0		0		1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

	$c_j \to$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3		0		1		0	
5	x_1	10	1	$2/5$	0	$1/5$	0	
0	x_5		0		0		1	
$c_j - z_j$								

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5		0		0		1	
$c_j - z_j$								

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50						

	$c_j \rightarrow$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0					

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2				

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0			

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1		

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

	$c_j \to$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	

单纯形法 · 例

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
	x_2							
	x_1							
	x_5							
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

	$c_j \to$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2							
5	x_1							
0	x_5							
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2			1				
5	x_1			0				
0	x_5			0				
$c_j - z_j$								

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2		0	1			0	
5	x_1		1	0			0	
0	x_5		0	0			1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

	$c_j \rightarrow$		5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1			0	
5	x_1		1	0			0	
0	x_5		0	0			1	
$c_j - z_j$								

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8		0	
5	x_1		1	0			0	
0	x_5		0	0			1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1		1	0			0	
0	x_5		0	0			1	
$c_j - z_j$								

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5		0	0			1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5	3	0	0	-5/8	3/4	1	
$c_j - z_j$								

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5	3	0	0	-5/8	3/4	1	
$c_j - z_j$		60						

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5	3	0	0	-5/8	3/4	1	
$c_j - z_j$		60	0	0			0	

单纯形法 · 例

$c_j \to$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5	3	0	0	-5/8	3/4	1	
$c_j - z_j$		60	0	0	-5/4		0	

单纯形法 · 例

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	18	1	2	1	0	0	18
0	x_4	50	5	2	0	1	0	10
0	x_5	8	0	1	0	0	1	-
$c_j - z_j$		0	5	4	0	0	0	
0	x_3	8	0	8/5	1	-1/5	0	5
5	x_1	10	1	2/5	0	1/5	0	25
0	x_5	8	0	1	0	0	1	8
$c_j - z_j$		50	0	2	0	-1	0	
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	
0	x_5	3	0	0	-5/8	3/4	1	
$c_j - z_j$		60	0	0	-5/4	-3/4	0	

$$\min \quad z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leqslant & 11 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geqslant & 3 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$
\min \quad z = -3x_1 + x_2 + x_3
$$
$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\
-2x_1 + x_3 = 1 \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
$$

为了使用单纯形表法求解，在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_4，剩余变量 x_5，人工变量 x_6, x_7，得到

$$
\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7
$$
$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
-2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0
\end{cases}
$$

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 11 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_5 & + & x_6 & & & & & = & 3 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & + & x_7 & = & 1 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$										

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M								

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3							

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M						

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M					

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0				

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M			

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0		

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4M	6M-3	1-M	1-3M	0	M	0	0	

- **第一阶段**:不考虑原问题是否存在基可行解，给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。如:

$$
\min \quad \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0
\end{cases}
$$

然后用单纯形法求解上述模型，若得到 $\omega = 0$，这说明原问题存在基可行解，可以进行第二段计算，否则原问题无可行解，停止计算。

- 第一阶段:不考虑原问题是否存在基可行解，给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。如:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

然后用单纯形法求解上述模型，若得到 $\omega = 0$，这说明原问题存在基可行解，可以进行第二段计算，否则原问题无可行解，停止计算。

- 第二阶段:将第一阶段计算得到的最终表，除去人工变量。将目标函数行的系数，换原问题的目标函数系数，作为第二阶段的计算的初始表。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t} \quad & \begin{cases}
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leqslant & 11 \\
-4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geqslant & 3 \\
-2x_1 & & & + & x_3 & = & 1
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\min \quad z=-3x_1+x_2+x_3
$$
$$
\text{s.t}\begin{cases}
\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leqslant & 11\\
-4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geqslant & 3\\
-2x_1 & & & + & x_3 & = & 1
\end{array}\\
x_1,x_2,x_3\geqslant 0
\end{cases}
$$

先在上述线性规划问题的约束方程中加入人工变量，给出第一阶段的数学模型为：

$$
\min z=x_6+x_7
$$
$$
\text{s.t}\begin{cases}
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 11\\
-4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_5 & + & x_6 & & & = & 3\\
-2x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_7 & = & 1
\end{array}\\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0
\end{cases}
$$

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$										

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$		4							

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6							

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1						

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3					

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0				

第一阶段

$$
\min z = x_6 + x_7
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
-2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0
\end{cases}
$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1			

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0		

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$		4	6	-1	-3	0	1	0	0	

第一阶段

$$\min z = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	1	1	

第一阶段

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	1	1

$c_j \to$			-3	1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	12	3	0	0	1	-2
1	x_2	1	0	1	0	0	-1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0
$c_j - z_j$		2	-1	0	0	0	1

单纯形法的进一步讨论 · 退化

在单纯形法计算中用 θ 规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现了退化解。

[3] 1974 年提出，现被称为“勃兰特规则”或“字典序法”

单纯形法的进一步讨论 · 退化

在单纯形法计算中用 θ 规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现了退化解。
退化解可能导致无限循环，从而使得线性规划问题永远达不到最优解。

[3] 1974 年提出，现被称为“勃兰特规则”或“字典序法”

在单纯形法计算中用 θ 规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现了退化解。
退化解可能导致无限循环，从而使得线性规划问题永远达不到最优解。
勃兰特 (Bland)[3] 提出一种规则可以避免上述现象的出现：

- 选取 $c_j - z_j > 0$ 中下标最小的非基变量 x_k 为换入变量，即

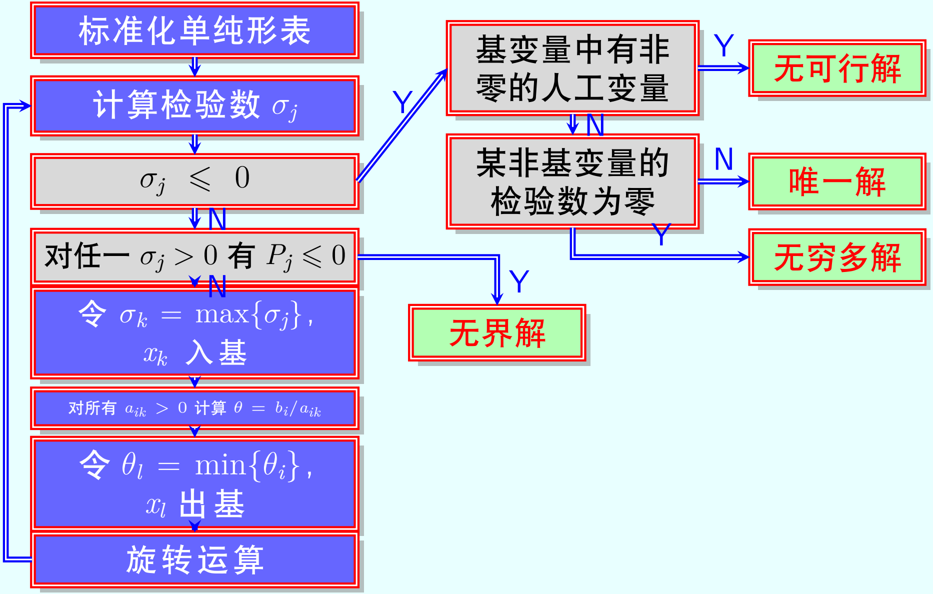
$$k = \min(j \mid c_j - z_j > 0)$$

- 当按 θ 规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

可以证明，按勃兰特规则计算时，一定能避免出现循环。

[3] 1974 年提出，现被称为“勃兰特规则”或“字典序法”

变量	$x_j \geqslant 0$		不需要处理
	$x_j \leqslant 0$		令 $x_j' = -x_j; x_j' \geqslant 0$
	x_j 无约束		令 $x_j = x_j' - x_j''; x_j', x_j'' \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$		不需要处理
	$b < 0$		约束条件两端同乘 -1
	$\leqslant$		加松弛变量 x_{si}
	$=$		加人工变量 x_{ai}
	$\geqslant$		减去剩余（松弛）变量 x_{si} 加人工变量 x_{ai}
目标函数	$\max \quad z$		不需要处理
	$\min \quad z$		令 $z' = -z$，求 $\max \quad z'$
	加入变量的系数	松弛变量 x_{si}	0
		人工变量 x_{ai}	M


标准化单纯形表
计算检验数 σ_j
$\sigma_j \leqslant 0$
Y
基变量中有非零的人工变量
Y
无可行解
N
某非基变量的检验数为零
N
唯一解
Y
无穷多解
N
对任一 $\sigma_j > 0$ 有 $P_j \leqslant 0$
Y
无界解
N
令 $\sigma_k = \max\{\sigma_j\}$，$x_k$ 入基
对所有 $a_{ik} > 0$ 计算 $\theta = b_i / a_{ik}$
令 $\theta_l = \min\{\theta_i\}$，$x_l$ 出基
旋转运算

目录

2 线性规划与单纯形法

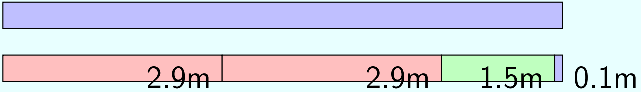
- 线性规划问题及其数学模型
- 单纯形法
- 线性规划模型的建立

合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？

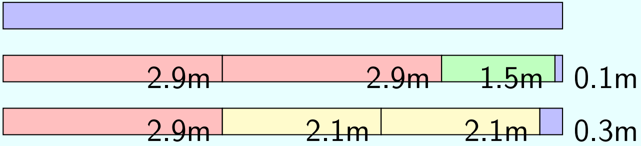
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



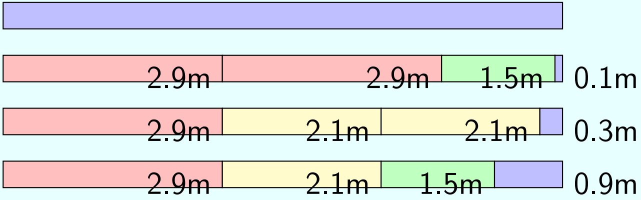
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



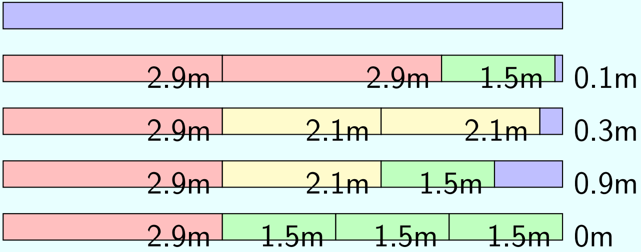
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



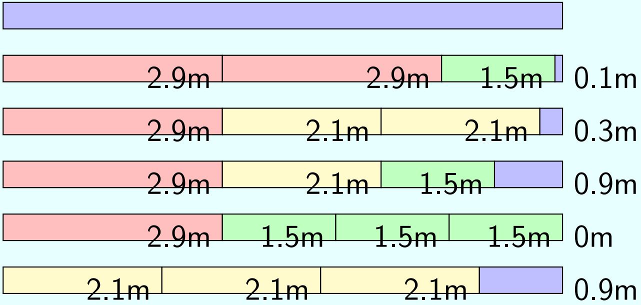
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



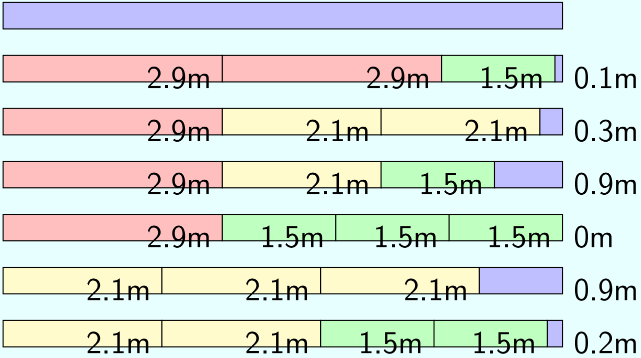
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



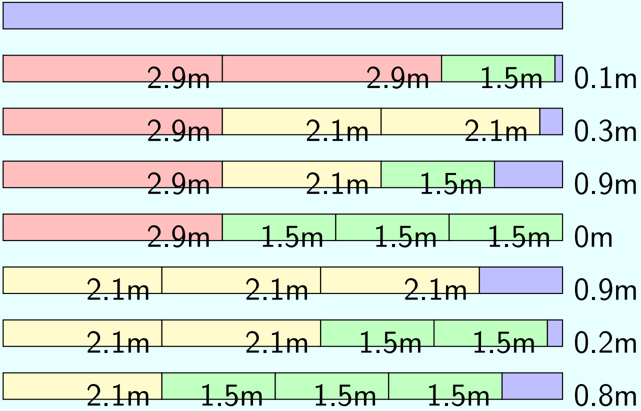
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



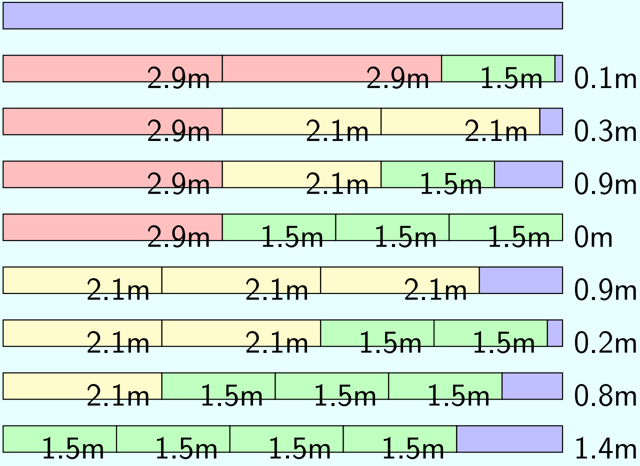
合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



合理利用线材问题

某企业要做 100 套钢架，每套含 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问如何下料最省原材料？



合理利用线材问题

模型

设按第 j 种方案剪裁的圆钢数为 $x_j, j = 1, 2, \cdots, 8$ 根，则可以得到

$$\min \quad z = 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.9x_3 + 0x_4 + 1.1x_5 + 0.2x_6 + 0.8x_7 + 1.4x_8$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 100 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 100 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

模型

设按第 j 种方案剪裁的圆钢数为 $x_j, j = 1, 2, \cdots, 8$ 根，则可以得到

$$\min \quad z = 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.9x_3 + 0x_4 + 1.1x_5 + 0.2x_6 + 0.8x_7 + 1.4x_8$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 100 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 100 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

面材或立体材料应如何处理？

合理配料问题

数据

产品	规格要求	单价
甲	A 不少于 50% B 不超过 20%	30
乙	A 不少于 40% C 不超过 20%	25
丙	C 不少于 10%	20

原材料	日供应量 (公斤)	单价 (元/公斤)
A	200	20
B	180	18
C	300	10

合理配料问题

数据

产品	规格要求	单价
甲	A 不少于 50% B 不超过 20%	30
乙	A 不少于 40% C 不超过 20%	25
丙	C 不少于 10%	20

原材料	日供应量(公斤)	单价(元/公斤)
A	200	20
B	180	18
C	300	10

产品规格约束

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\geqslant 0.5(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
x_{21} &\leqslant 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
x_{12} &\geqslant 0.4(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{32} &\leqslant 0.2(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{33} &\geqslant 0.1(x_{13}+x_{23}+x_{33})
\end{aligned}
$$

合理配料问题

数据

产品	规格要求	单价
甲	A 不少于 50% B 不超过 20%	30
乙	A 不少于 40% C 不超过 20%	25
丙	C 不少于 10%	20

原材料	日供应量 (公斤)	单价 (元/公斤)
A	200	20
B	180	18
C	300	10

产品规格约束

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\geqslant 0.5(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
x_{21} &\leqslant 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
x_{12} &\geqslant 0.4(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{32} &\leqslant 0.2(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{33} &\geqslant 0.1(x_{13}+x_{23}+x_{33})
\end{aligned}
$$

供应量约束

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13} &\leqslant 200 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23} &\leqslant 180 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33} &\leqslant 300
\end{aligned}
$$

合理配料问题

数据

产品	规格要求	单价
甲	A 不少于 50% B 不超过 20%	30
乙	A 不少于 40% C 不超过 20%	25
丙	C 不少于 10%	20

原材料	日供应量(公斤)	单价(元/公斤)
A	200	20
B	180	18
C	300	10

产品规格约束

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\geqslant 0.5(x_{11}+x_{21}+x_{31})\\
x_{21} &\leqslant 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31})\\
x_{12} &\geqslant 0.4(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\
x_{32} &\leqslant 0.2(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\
x_{33} &\geqslant 0.1(x_{13}+x_{23}+x_{33})
\end{aligned}
$$

供应量约束

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13} &\leqslant 200\\
x_{21}+x_{22}+x_{23} &\leqslant 180\\
x_{31}+x_{32}+x_{33} &\leqslant 300
\end{aligned}
$$

目标函数

$$
\min \quad z = 10x_{11}+5x_{12}+0x_{13}+ 12x_{21}+7x_{22}+2x_{23}+20x_{31}+15x_{32}+
$$

多项目投资问题

问题

某企业现有资金 50 万元，今后五年面临如下的投资项目：
项目 A：每年初投资于公债，当年末归还，年息 6%；
项目 B：第二年初投资，第五年末收回本利和 140%；
项目 C：第三年初投资，第五年末收回本利和 130%。

多项目投资问题

问题

某企业现有资金 50 万元，今后五年面临如下的投资项目：
项目 A：每年初投资于公债，当年末归还，年息 6%；
项目 B：第二年初投资，第五年末收回本利和 140%；
项目 C：第三年初投资，第五年末收回本利和 130%。

参数选择

设 x_{ij} 表示第 j 年初投资于第 i 个投资项目的资金数 $(i=1,2,3;j=1,2,3,4,5)$

多项目投资问题

问题

某企业现有资金 50 万元，今后五年面临如下的投资项目：
项目 A：每年初投资于公债，当年末归还，年息 6%；
项目 B：第二年初投资，第五年末收回本利和 140%；
项目 C：第三年初投资，第五年末收回本利和 130%。

参数选择

设 x_{ij} 表示第 j 年初投资于第 i 个投资项目的资金数 $(i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5)$

模型建立

$$\max \quad z = 1.06x_{15} + 1.4x_{22} + 1.3x_{33}$$

$$\begin{cases} x_{11} = 50 \\ x_{12} + x_{22} = 50 \times 1.06 \\ x_{13} + x_{33} = 1.06x_{12} \\ x_{14} = 1.06x_{13} \\ x_{15} = 1.06x_{14} \\ x_{ij} \geqslant 0, (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

Section 3

对偶理论与灵敏度分析

本章内容

3. 对偶理论与灵敏度分析
   - 单纯形法的矩阵描述
   - 改进单纯形法
   - 对偶问题的提出
   - 线性规划的对偶理论
   - 对偶问题的经济解释
   - 对偶单纯形法
   - 灵敏度分析

目录

3 对偶理论与灵敏度分析
- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

单纯形法的矩阵描述

已知线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = CX \\
&AX \leqslant b \\
&X \geqslant 0
\end{aligned}
$$

单纯形法的矩阵描述

已知线性规划问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = CX \\ & AX \leqslant b \\ & X \geqslant 0 \end{aligned}$$

引入 m 个松弛变量 $X_s = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})^T$ 后，得到线性规划的标准模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = CX \\ & AX + IX_s = b \\ & X \geqslant 0, X_s \geqslant 0 \end{aligned}$$

单纯形法的矩阵描述

已知线性规划问题为

$$\begin{aligned}&\max \quad z = CX\\&AX \leqslant b\\&X \geqslant 0\end{aligned}$$

引入 m 个松弛变量 $X_s = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})^T$ 后，得到线性规划的标准模型为

$$\begin{aligned}&\max \quad z = CX\\&AX + IX_s = b\\&X \geqslant 0, X_s \geqslant 0\end{aligned}$$

若将 (A, I) 分为 (B, N) 两部分，同时将 (X, X_s) 划分为 X_B 和 X_N，其中 X_B 为基变量，X_N 为非基变量。不妨设：$X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T, X_N = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)^T$，同时价值系数矩阵 C 也被分成 C_B, C_N 两块，可以得到

$$\begin{aligned}&\max \quad z = C_B X_B + C_N X_N\\&BX_B + NX_N = b\\&X_B \geqslant 0, X_N \geqslant 0\end{aligned}$$

单纯形法的矩阵描述

$$\begin{aligned} &\max \quad z = C_B X_B + C_N X_N && (1) \\ &B X_B + N X_N = b && (2) \\ &X_B \geqslant 0, X_N \geqslant 0 \end{aligned}$$

由 (2) 式可得:

$$X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N$$

单纯形法的矩阵描述

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = C_B X_B + C_N X_N \quad && (1)\\
&B X_B + N X_N = b && (2)\\
&X_B \geqslant 0, X_N \geqslant 0
\end{aligned}
$$

由 (2) 式可得:

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

将上式代入目标函数 (1) 可得:

$$Z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \quad (3)$$

单纯形法的矩阵描述

$$
\begin{array}{ll}
\max \quad z = C_B X_B + C_N X_N & (1) \\
B X_B + N X_N = b & (2) \\
X_B \geqslant 0, X_N \geqslant 0 &
\end{array}
$$

由 (2) 式可得:

$$X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N$$

将上式代入目标函数 (1) 可得:

$$Z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \quad (3)$$

令 $X_N = 0$，得到 $X_B = B^{-1}b$，即 $X = (B^{-1}b, 0)^T, z = C_B^B{-1}b$。

单纯形法的矩阵描述

$$\begin{array}{ll} \max \quad z = C_B X_B + C_N X_N & (1) \\ B X_B + N X_N = b & (2) \\ X_B \geqslant 0, X_N \geqslant 0 & \end{array}$$

由 (2) 式可得:

$$X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N$$

将上式代入目标函数 (1) 可得:

$$Z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \quad (3)$$

令 $X_N = 0$，得到 $X_B = B^{-1}b$，即 $X = (B^{-1}b, 0)^T, z = C_B^B{-1}b$。
同时由 (3) 式可以得到:

$$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N, \theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(BP_{j*})_i} \mid (BP_{j*}) > 0 \right\}$$

单纯形法的矩阵描述

$$
\begin{aligned}
&z = C_B X_B + C_N X_N \\
&X_B + B^{-1} N X_N = B^{-1} b
\end{aligned}
$$

单纯形法的矩阵描述

$$z = C_B X_B + C_N X_N$$
$$X_B + B^{-1} N X_N = B^{-1} b$$

如果将非基变量分为其它变量 X_{Nl} 和松弛变量 X_{Ns} 两类，则

$$X_B + B^{-1} N_l X_{Nl} + B^{-1} X_{Ns} = B^{-1} b$$
$$-C_B B^{-1} b = -Z + (C_{Nl} - C_B B^{-1} N_l) X_{Nl} - C_B B^{-1} X_{Ns}$$

单纯形法的矩阵描述

$$
\begin{aligned}
z &= C_B X_B + C_N X_N \\
X_B + B^{-1} N X_N &= B^{-1} b
\end{aligned}
$$

如果将非基变量分为其它变量 X_{Nl} 和松弛变量 X_{Ns} 两类，则

$$
\begin{aligned}
& X_B + B^{-1} N_l X_{Nl} + B^{-1} X_{Ns} = B^{-1} b \\
& -C_B B^{-1} b = -Z + (C_{Nl} - C_B B^{-1} N_l) X_{Nl} - C_B B^{-1} X_{Ns}
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{bmatrix} 0 & I & B^{-1} N_l & B^{-1} \\ 1 & 0 & C_{Nl} - C_B B^{-1} N_l & -C_B B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Z \\ X_B \\ X_{Nl} \\ X_{Ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} b \\ -C_B B^{-1} b \end{bmatrix}
$$

单纯形法的矩阵描述

$$\begin{bmatrix} 0 & I & B^{-1}N_l & B^{-1} \\ 1 & 0 & C_{Nl} - C_B B^{-1} N_l & -C_B B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Z \\ X_B \\ X_{Nl} \\ X_{Ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ -C_B B^{-1} b \end{bmatrix}$$

基变量 X_B	非基变量 X_N		资源常数 b 目标函数值 z
	X_{Nl}	X_{Ns}	
I	$B^{-1}N_l$	B^{-1}	$B^{-1}b$
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$	$-C_B B^{-1} b$

目录

3 对偶理论与灵敏度分析

- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

改进单纯形法的计算步骤

- (1) 根据线性规划模型，观察到初始基 B、初始基变量 X_B、计算出 B^{-1}，$X_B = B^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y = C_B B^{-1}$；

改进单纯形法的计算步骤

- (1) 根据线性规划模型，观察到初始基 B、初始基变量 X_B、计算出 B^{-1}，$X_B = B^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y = C_B B^{-1}$；
- (2) 计算非基变量检验数 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$，若所有的 $\sigma_N \leqslant 0$，问题得到最优解，否则进入下一步；

改进单纯形法的计算步骤

- (1) 根据线性规划模型，观察到初始基 B、初始基变量 X_B、计算出 B^{-1}，$X_B = B^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y = C_B B^{-1}$；
- (2) 计算非基变量检验数 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$，若所有的 $\sigma_N \leqslant 0$，问题得到最优解，否则进入下一步；
- (3) 选择 $\max\limits_j\{\sigma_j | \sigma_j > 0\} = \sigma_{j*}$ 对应的非基变量 x_{j*} 为入基变量，计算 $B^{-1}b$ 和 $B^{-1}P_{j*}$，若所有的 $B^{-1}P_{j*} \leqslant 0$，问题为无界解，否则进入下一步；

改进单纯形法的计算步骤

- (1) 根据线性规划模型，观察到初始基 B、初始基变量 X_B、计算出 B^{-1}，$X_B = B^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y = C_B B^{-1}$；
- (2) 计算非基变量检验数 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$，若所有的 $\sigma_N \leqslant 0$，问题得到最优解，否则进入下一步；
- (3) 选择 $\max\limits_j\{\sigma_j|\sigma_j > 0\} = \sigma_{j*}$ 对应的非基变量 x_{j*} 为入基变量，计算 $B^{-1}b$ 和 $B^{-1}P_{j*}$，若所有的 $B^{-1}P_{j*} \leqslant 0$，问题为无界解，否则进入下一步；
- (4) 计算 θ 值，$\theta = \min\limits_i \left\{ \dfrac{(B^{-1}b)_i}{(BP_{j*})_i} \mid (BP_{j*}) > 0 \right\}$，确定出基变量 X_{Bi^*}。

改进单纯形法的计算步骤

- (1) 根据线性规划模型，观察到初始基 B、初始基变量 X_B、计算出 B^{-1}，$X_B=B^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y=C_BB^{-1}$；
- (2) 计算非基变量检验数 $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N$，若所有的 $\sigma_N\leqslant 0$，问题得到最优解，否则进入下一步；
- (3) 选择 $\max\limits_j\{\sigma_j|\sigma_j>0\}=\sigma_{j*}$ 对应的非基变量 x_{j*} 为入基变量，计算 $B^{-1}b$ 和 $B^{-1}P_{j*}$，若所有的 $B^{-1}P_{j*}\leqslant 0$，问题为无界解，否则进入下一步；
- (4) 计算 θ 值，$\theta=\min\limits_i\left\{\dfrac{(B^{-1}b)_i}{(BP_{j*})_i}\mid (BP_{j*})>0\right\}$，确定出基变量 X_{Bi^*}。
- (5) 确定新基 B_1，基变量 X_{B_1}，$X_{B_1}=B_1^{-1}b$ 和单纯形乘子 $Y_1=C_{B_1}B_1^{-1}$，回第 2 步。

新基逆矩阵 B_1^{-1} 的求法

已知 B_0、B_0^{-1} 和 B_1，求新基逆矩阵 B_1^{-1}?
设 m 阶的单位阵表示为 $I_m = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$，$x_{j^*}$ 为入基变量，$x_{_{Bi^*}}$ 为出基变量，则有 $B_1^{-1} = EB_0^{-1}$，其中 $E = (e_1, e_2, \cdots, e_{l-1}, \xi, e_{l+1}, \cdots, e_m)$，

$$\xi = \begin{bmatrix} -a_{1j*}/a_{i*j*} \\ -a_{2j*}/a_{i*j*} \\ \vdots \\ 1/a_{i*j*} \\ \vdots \\ -a_{mj*}/a_{i*j*} \end{bmatrix}$$

例

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{s.t.} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 18 \\
5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 50 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\
\multicolumn{11}{l}{x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5,}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

例

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, \end{cases}$$

解：

$B_0 = (P_3, P_4, P_5)$, $X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T$, $X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$, $C_{B_0} = (0, 0, 0)$, $C_{N_0} = (5, 4)$

例

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\
x_2 + x_5 = 8 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解：

$B_0 = (P_3, P_4, P_5)$,$X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T$,$X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$, $C_{B_0} = (0, 0, 0)$,$C_{N_0} = (5, 4)$
$\sigma_{N_0} = C_{N_0} - C_{B_0} B_0^{-1} N_0 = (5, 4)$，所以 x_1 为换入变量，即 $j^* = 1$.

改进单纯形法 · 例

例

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\
x_2 + x_5 = 8 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解：

$B_0 = (P_3, P_4, P_5), X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T, X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$, $C_{B_0} = (0, 0, 0), C_{N_0} = (5, 4)$
$\sigma_{N_0} = C_{N_0} - C_{B_0} B_0^{-1} N_0 = (5, 4)$，所以 x_1 为换入变量，即 $j^* = 1$.

$$
B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_0^{-1} b = \begin{bmatrix} 18 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix}, B_0^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

解：

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{B_0^{-1} b}{B_0^{-1} P_1} \right\} = \min_i \left\{ \frac{18}{1}, \frac{50}{5}, - \right\} = 10$$

即 $i^* = 2, x_4$ 为换出变量。

解：

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{B_0^{-1} b}{B_0^{-1} P_1} \right\} = \min_i \left\{ \frac{18}{1}, \frac{50}{5}, - \right\} = 10$$

即 $i^* = 2$,x_4 为换出变量。

新基： $B_1 = (P_3, P_1, P_5)$,$X_{B_1} = (x_3, x_1, x_5)^T$,$X_{N_1} = (x_4, x_2)^T$, $C_{B_1} = (0, 5, 0)$,$C_{N_1} = (0, 4)$

改进单纯形法 · 例

解：

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{B_0^{-1} b}{B_0^{-1} P_1} \right\} = \min_i \left\{ \frac{18}{1}, \frac{50}{5}, - \right\} = 10$$

即 $i^* = 2, x_4$ 为换出变量。

新基：$B_1 = (P_3, P_1, P_5), X_{B_1} = (x_3, x_1, x_5)^T, X_{N_1} = (x_4, x_2)^T$，$C_{B_1} = (0, 5, 0), C_{N_1} = (0, 4)$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{B_0^{-1} b}{B_0^{-1} P_1} \right\} = \min_i \left\{ \frac{18}{1}, \frac{50}{5}, - \right\} = 10$$

即 $i^* = 2$,x_4 为换出变量。

新基：$B_1 = (P_3, P_1, P_5)$,$X_{B_1} = (x_3, x_1, x_5)^T$,$X_{N_1} = (x_4, x_2)^T$, $C_{B_1} = (0, 5, 0)$,$C_{N_1} = (0, 4)$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{N_1} = C_{N_1} - C_{B_1} B_1^{-1} N_1 = (0, 4) - (0, 5, 0) \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1, 2)$$

x_2 入基，$j^* = 2$。

解：

$$B_1^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & -1/5 & 0\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\50\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\10\\8\end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1}P_2=\begin{bmatrix}1 & -1/5 & 0\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8/5\\2/5\\1\end{bmatrix}$$

$$\theta=\min_i\left\{\frac{B_1^{-1}b}{B_1^{-1}P_2}\right\}=\min_i\left\{\frac{8}{8/5},\frac{10}{2/5},\frac{8}{1}\right\}=5$$

所以， $i^*=1, x_3$ 为换出变量。

解：

$$B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 50 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{B_1^{-1}b}{B_1^{-1}P_2} \right\} = \min_i \left\{ \frac{8}{8/5}, \frac{10}{2/5}, \frac{8}{1} \right\} = 5$$

所以，$i^* = 1$, x_3 为换出变量。

$B_2 = (P_2, P_1, P_5)$, $X_{B_2} = (x_2, x_1, x_5)^T$, $X_{N_2} = (x_4, x_3)^T$, $C_{B_2} = (4, 5, 0)$, $C_{N_2} = (0, 0)$

解：

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -1/4 \\ -5/8 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$\xi_2=\begin{bmatrix}5/8\\-1/4\\-5/8\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}5/8&0&0\\-1/4&1&0\\-5/8&0&1\end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1}=E_2B_1^{-1}=\begin{bmatrix}5/8&0&0\\-1/4&1&0\\-5/8&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/5&0\\0&1/5&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/8&-1/8&0\\-1/4&1/4&0\\-5/8&1/8&1\end{bmatrix}$$

解：

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -1/4 \\ -5/8 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{N_2} = C_{N_2} - C_{B_2} B_2^{-1} N_2 = (-3/4, -5/4) \leqslant 0$$

所以线性规划得到最优解。

解：

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -1/4 \\ -5/8 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{N_2} = C_{N_2} - C_{B_2} B_2^{-1} N_2 = (-3/4, -5/4) \leqslant 0$$

所以线性规划得到最优解。

$$X_{B_2} = B_2^{-1} b = (5, 8, 3)^T, z = C_{B_2} X_{B_2} = 60$$

目录

3 对偶理论与灵敏度分析

- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶问题的提出

Example

某企业准备生产甲乙两种产品，需要消耗 A、B、C 三种资源，生产每单位产品对各种资源的消耗量，三种资源的总拥有量，产品的单位利润如表所示，假设企业追求利润最大化，试建立该问题的线性规划模型。

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, \; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	−

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

模型

设三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，则可以得到：

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

模型

设三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，则可以得到：

$$\min \quad \omega = 18y_1 + 50y_2 + 8y_3$$

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

模型

设三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，则可以得到:

$$\min \quad \omega = 18y_1 + 50y_2 + 8y_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 + 5y_2 \geqslant 5 \\ \\ \end{cases}$$

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

模型

设三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，则可以得到：

$$\min \quad \omega = 18y_1 + 50y_2 + 8y_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 + 5y_2 \geqslant 5 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 4 \end{cases}$$

对偶问题的提出

问题

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润（元）	5	4	–

模型

设三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，则可以得到：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 18y_1 + 50y_2 + 8y_3 \\
\text{s.t.} & \left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
y_1 & + & 5y_2 & & & \geqslant & 5 \\
2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geqslant & 4 \\
\multicolumn{7}{l}{y_1, y_2, y_3 \geqslant 0}
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

对偶问题的数学描述

原问题

$$\begin{aligned} &\max \quad z = CX \\ &AX \leqslant b \\ &X \geqslant 0 \end{aligned}$$

对偶问题的数学描述

原问题

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = CX \\
&AX \leqslant b \\
&X \geqslant 0
\end{aligned}
$$

转换过程

最优性条件: $\left\{\begin{array}{l} C_N - C_B B^{-1} N \leqslant 0 \\ -C_B B^{-1} \leqslant 0 \\ C_B - C_B B^{-1} B = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$C - C_B B^{-1} A \leqslant 0$

令 $Y = C_B B^{-1}$，得到 $Y \geqslant 0, YA \geqslant C$。[a]此外, $Yb = C_B B^{-1} b = C_B X_B = z$

---

[a] Y 称为单纯形乘子

对偶问题的数学描述

原问题

$$\max \quad z = CX$$
$$AX \leqslant b$$
$$X \geqslant 0$$

转换过程

最优性条件: $\left\{\begin{array}{l} C_N - C_B B^{-1} N \leqslant 0 \\ -C_B B^{-1} \leqslant 0 \\ C_B - C_B B^{-1} B = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$C - C_B B^{-1} A \leqslant 0$

令 $Y = C_B B^{-1}$，得到 $Y \geqslant 0, YA \geqslant C$。[a]此外, $Yb = C_B B^{-1} b = C_B X_B = z$

[a] Y 称为单纯形乘子

对偶问题

$$\min \omega = Yb$$
$$\left\{\begin{array}{l} YA \geqslant C \\ Y \geqslant 0 \end{array}\right.$$

目录

3. 对偶理论与灵敏度分析
   - 单纯形法的矩阵描述
   - 改进单纯形法
   - 对偶问题的提出
   - 线性规划的对偶理论
   - 对偶问题的经济解释
   - 对偶单纯形法
   - 灵敏度分析

原问题与对偶问题的关系

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数	max	目标函数	min
变量	n 个	约束条件	n 个
	$\geqslant 0$		$\geqslant$ 型
	$\leqslant 0$		$\leqslant$ 型
	无约束		$=$ 型
约束条件	m 个	变量	m 个
	$\leqslant$ 型		$\geqslant 0$
	$\geqslant$ 型		$\leqslant 0$
	$=$ 型		无约束
约束条件的右端项		目标函数中的价值系数	
目标函数中的价值系数		约束条件的右端项	

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。

[4] 该性质也称为松紧定理。

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。
- 2. 弱对偶性
  若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则 $C\hat{X} \leqslant \hat{Y}b$。

[4]该性质也称为松紧定理。

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。
- 2. 弱对偶性
  若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则 $C\hat{X} \leqslant \hat{Y}b$。
- 3. 无界性
  若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。

[4] 该性质也称为松紧定理。

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。
- 2. 弱对偶性
  若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则 $C\hat{X} \leqslant \hat{Y}b$。
- 3. 无界性
  若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
- 4. 最优解性质[4]
  设 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，当 $C\hat{X} = \hat{Y}b$ 时，$\hat{X}, \hat{Y}$ 为最优解。

[4]该性质也称为松紧定理。

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。
- 2. 弱对偶性
  若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则 $C\hat{X} \leqslant \hat{Y}b$。
- 3. 无界性
  若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
- 4. 最优解性质
  设 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，当 $C\hat{X} = \hat{Y}b$ 时，$\hat{X}, \hat{Y}$ 为最优解。
- 5. 对偶定理
  若原问题有最优解，则对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。

[4]该性质也称为松紧定理。

对偶问题的基本性质

- 1. 对称性
  对偶问题的对偶问题是原问题。
- 2. 弱对偶性
  若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则 $C\hat{X} \leqslant \hat{Y}b$。
- 3. 无界性
  若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
- 4. 最优解性质
  设 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，当 $C\hat{X} = \hat{Y}b$ 时，$\hat{X}, \hat{Y}$ 为最优解。
- 5. 对偶定理
  若原问题有最优解，则对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。
- 6. 互补松弛性[4]
  $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则当且仅当 $\hat{X}, \hat{Y}$ 为最优解时存在 $\hat{Y}X_s = 0,\ Y_s\hat{X} = 0$。

[4]该性质也称为松紧定理。

- 7. 原问题与对偶问题解和检验数间的对应关系

X_B	X_N	X_s
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{s1}	$-Y_{s2}$	$-Y$

对偶问题的基本性质

- 7. 原问题与对偶问题解和检验数间的对应关系

X_B	X_N	X_s
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{s1}	$-Y_{s2}$	$-Y$

对偶性质的应用 · 例

已知线性规划问题

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

问题

已知线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\
\text{s.t.} \quad & \left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leqslant & 8 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leqslant & 12 \\
\multicolumn{9}{l}{x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4}
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

的对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4$， $y_2^* = 1$， 试用对偶问题的性质求原问题的最优解。

解

原问题的对偶问题为：

$$
\min \quad \omega = 8y_1 + 12y_2
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\ 2y_2 \geqslant 1 \\ y_1 + y_2 \geqslant 5 \\ y_1 + 2y_2 \geqslant 6 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

解

原问题的对偶问题为:

$$
\min \quad \omega = 8y_1 + 12y_2
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} \begin{array}{rcrcr} 2y_1 & + & 2y_2 & \geqslant & 2 \\ & & 2y_2 & \geqslant & 1 \\ y_1 & + & y_2 & \geqslant & 5 \\ y_1 & + & 2y_2 & \geqslant & 6 \end{array} \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

将 $y_1^* = 4$, $y_2^* = 1$ 代入对偶问题的约束条件可知，前两个约束条件为严格不等式，根据互补松弛性:

对偶性质的应用 · 例

解

原问题的对偶问题为：

$$
\min \quad \omega = 8y_1 + 12y_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\ \qquad\;\; 2y_2 \geqslant 1 \\ y_1 + y_2 \geqslant 5 \\ y_1 + 2y_2 \geqslant 6 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

将 $y_1^* = 4$，$y_2^* = 1$ 代入对偶问题的约束条件可知，前两个约束条件为严格不等式，根据互补松弛性：

$$
Y_s \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1^* = x_2^* = 0
$$

解

原问题的对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 8y_1 + 12y_2 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
2y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\
2y_2 \geqslant 1 \\
y_1 + y_2 \geqslant 5 \\
y_1 + 2y_2 \geqslant 6 \\
y_1, y_2 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

将 $y_1^* = 4$，$y_2^* = 1$ 代入对偶问题的约束条件可知，前两个约束条件为严格不等式，根据互补松弛性：

$$Y_s \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1^* = x_2^* = 0$$

另外，由于 $(y_1^*, y_2^*) \cdot X_s = 0$，所以

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

解

原问题的对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 8y_1 + 12y_2 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\ \quad\quad\;\; 2y_2 \geqslant 1 \\ y_1 + y_2 \geqslant 5 \\ y_1 + 2y_2 \geqslant 6 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

将 $y_1^* = 4$，$y_2^* = 1$ 代入对偶问题的约束条件可知，前两个约束条件为严格不等式，根据互补松弛性：

$$
Y_s \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1^* = x_2^* = 0
$$

另外，由于 $(y_1^*, y_2^*) \cdot X_s = 0$，所以

$$
\begin{cases} x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 4 \end{cases}
$$

所以原问题的最优解为 $X = (0, 0, 4, 4)^T$。

目录

3 对偶理论与灵敏度分析

- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶问题的经济解释

数学分析

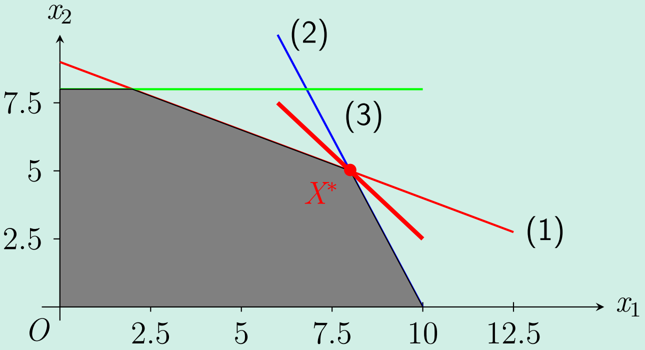
$$z = C_B B^{-1} b = Yb \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y$$

对偶问题的经济解释

数学分析

$$z = C_B B^{-1} b = Yb \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y$$

图示



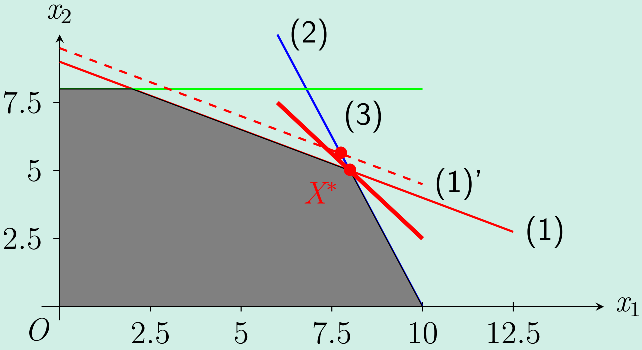
$$
\begin{aligned}
&\max \ z = 5x_1 + 4x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

对偶问题的经济解释

数学分析

$$z = C_B B^{-1} b = Yb \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y$$

图示



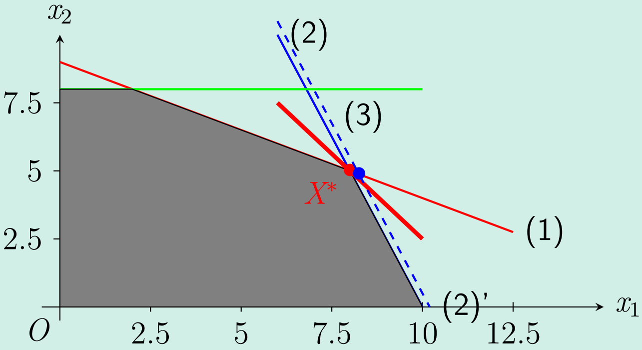
$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对偶问题的经济解释

数学分析

$$z = C_B B^{-1} b = Yb \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y$$

图示



$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2$$

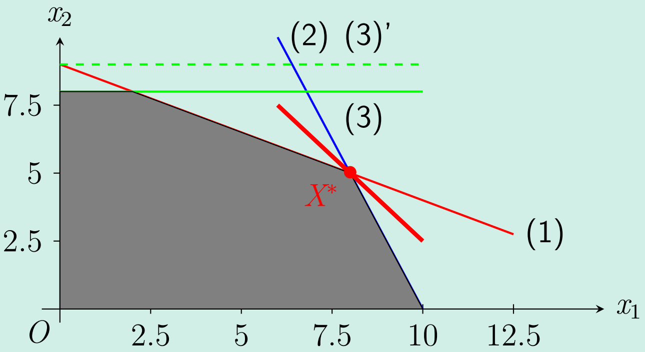
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对偶问题的经济解释

数学分析

$$z = C_B B^{-1} b = Yb \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y$$

图示



$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \ (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \ (2) \\ x_2 \leqslant 8 \ \ (3) \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

目录

3 对偶理论与灵敏度分析
- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶单纯形法的基本原理

对偶单纯形法的基本原理

由原问题与对偶问题之间的关系知道，在单纯形表中进行迭代时，在 b 列得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。经过迭代计算，当检验数行得到的对偶问题的解也是基可行解时，则得到最优解。

对偶单纯形法的基本原理

由原问题与对偶问题之间的关系知道，在单纯形表中进行迭代时，在 b 列得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。经过迭代计算，当检验数行得到的对偶问题的解也是基可行解时，则得到最优解。

根据对偶问题的对称性，如果对偶问题的解是基可行解，即 $c_j - z_j \leqslant 0$，而原问题在非可行解的基础上通过迭代达到基可行解，问题也可以得到最优解。

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表；

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表；
2. 若 $B^{-1}b \geqslant 0$，$c_j - z_j \leqslant 0$，则问题得到最优解，否则进入下一步；

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表;
2. 若 $B^{-1}b \geqslant 0$，$c_j - z_j \leqslant 0$，则问题得到最优解，否则进入下一步;
3. 取 $\min\limits_{i} \{B^{-1}b \mid B^{-1}b < 0\} = (B^{-1}b)_{i^*}$ 对应的基变量 x_{i^*} 为换出变量;

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表；
2. 若 $B^{-1}b \geqslant 0$，$c_j - z_j \leqslant 0$，则问题得到最优解，否则进入下一步；
3. 取 $\min\limits_{i}\{B^{-1}b \mid B^{-1}b < 0\} = (B^{-1}b)_{i^*}$ 对应的基变量 x_{i^*} 为换出变量；
4. 由 $\theta = \min\limits_{j}\left\{\dfrac{c_j - z_j}{a_{i^*j}} \mid a_{i^*j} < 0\right\} = \dfrac{c_{j^*} - z_{j^*}}{a_{i^*j^*}}$，确定换入变量$x_{j^*}$，当所有的 $a_{i^*j^*} \geqslant 0$ 时问题无可行解；

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表；
2. 若 $B^{-1}b \geqslant 0$，$c_j - z_j \leqslant 0$，则问题得到最优解，否则进入下一步；
3. 取 $\min\limits_{i}\{B^{-1}b \mid B^{-1}b < 0\} = (B^{-1}b)_{i^*}$ 对应的基变量 x_{i^*} 为**换出变量**；
4. 由 $\theta = \min\limits_{j}\left\{\dfrac{c_j - z_j}{a_{i^*j}} \mid a_{i^*j} < 0\right\} = \dfrac{c_{j^*} - z_{j^*}}{a_{i^*j^*}}$，确定**换入变量**$x_{j^*}$，当所有的 $a_{i^*j^*} \geqslant 0$ 时问题无可行解；
5. **以 $a_{i^*j^*}$ 为主元素，按原单纯形法进行迭代运算，得到新的计算表；**

对偶单纯形法的计算步骤

1. 列出初始单纯形表；
2. 若 $B^{-1}b \geqslant 0$，$c_j - z_j \leqslant 0$，则问题得到最优解，否则进入下一步；
3. 取 $\min\limits_i \{B^{-1}b \mid B^{-1}b < 0\} = (B^{-1}b)_{i^*}$ 对应的基变量 x_{i^*} 为**换出变量**；
4. 由 $\theta = \min\limits_j \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{a_{i^*j}} \mid a_{i^*j} < 0 \right\} = \dfrac{c_{j^*} - z_{j^*}}{a_{i^*j^*}}$，确定**换入变量**$x_{j^*}$，当所有的 $a_{i^*j^*} \geqslant 0$ 时问题无可行解；
5. 以 $a_{i^*j^*}$ 为主元素，按原单纯形法进行**迭代运算**，得到新的计算表；
6. **重复 (2)–(6) 步。**

对偶单纯形法 · 例

问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & \begin{cases}
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geqslant & 3 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geqslant & 4
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

问题

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geqslant & 3 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geqslant & 4
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

标准化 I

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - Mx_6 - Mx_7 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 3 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + x_7 = 4 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, 7
\end{cases}
\end{aligned}
$$

对偶单纯形法 · 例

问题

$$\min \quad \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

标准化 I

$$\max \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

标准化 II

$$\max \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

标准化 II

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} & \begin{cases}
-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\
x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, 5
\end{cases}
\end{aligned}
$$

标准化 II

$$\max \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

求解

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$		0	-2	-3	-4	0	0	

求解

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$		0	-2	-3	-4	0	0	

对偶单纯形法 · 例

求解

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$		0	-2	-3	-4	0	0	
0	x_4	-1	0	-5/2	1/2	1	-1/2	
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2	
$c_j - z_j$		-4	0	-4	-1	0	-1	

求解

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$		0	-2	-3	-4	0	0	
0	x_4	-1	0	-5/2	1/2	1	-1/2	
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2	
$c_j - z_j$		-4	0	-4	-1	0	-1	

求解

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$		0	-2	-3	-4	0	0	
0	x_4	-1	0	-5/2	1/2	1	-1/2	
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2	
$c_j - z_j$		-4	0	-4	-1	0	-1	

对偶单纯形法的优点

- (1)　初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。

对偶单纯形法的优点

- (1) 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。
- (2) 当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。

对偶单纯形法的优点

- (1)　初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。
- (2)　当变量多于约束条件，对这样的线性规划问题，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。
- (3)　在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化。对偶单纯形法的局限性主要是，对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独应用。

目录

3 对偶理论与灵敏度分析

- 单纯形法的矩阵描述
- 改进单纯形法
- 对偶问题的提出
- 线性规划的对偶理论
- 对偶问题的经济解释
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

引言

线性规划模型中涉及到三类参数：价值系数、技术系数、资源，单纯形法求解过程及最优解中都与这三个参数密切相关，但是这些参数在现实过程中经常时会发生变化的。灵敏度分析就是讨论这些参数发生变化后，对最优解会产生什么样的变化。

- 资源数量 b 变化的分析

灵敏度分析

引言

线性规划模型中涉及到三类参数：价值系数、技术系数、资源，单纯形法求解过程及最优解中都与这三个参数密切相关，但是这些参数在现实过程中经常时会发生变化的。灵敏度分析就是讨论这些参数发生变化后，对最优解会产生什么样的变化。

- 资源数量 b 变化的分析
- 技术系数 a_{ij} 变化的分析

灵敏度分析

引言

线性规划模型中涉及到三类参数：价值系数、技术系数、资源，单纯形法求解过程及最优解中都与这三个参数密切相关，但是这些参数在现实过程中经常时会发生变化的。灵敏度分析就是讨论这些参数发生变化后，对最优解会产生什么样的变化。

- 资源数量 b 变化的分析
- 技术系数 a_{ij} 变化的分析
- 价值系数 c_j 变化的分析

灵敏度分析

引言

线性规划模型中涉及到三类参数：价值系数、技术系数、资源，单纯形法求解过程及最优解中都与这三个参数密切相关，但是这些参数在现实过程中经常时会发生变化的。灵敏度分析就是讨论这些参数发生变化后，对最优解会产生什么样的变化。

- 资源数量 b 变化的分析
- 技术系数 a_{ij} 变化的分析
- 价值系数 c_j 变化的分析
- 其它相关变化的分析

资源数量 b 变化的分析

假设资源数量变化：

$$b_r' = b_r + \Delta b_r$$

并假设其他系数都不变。

资源数量 b 变化的分析

假设资源数量变化:

$$b'_r = b_r + \Delta b_r$$

并假设其他系数都不变。最终表中原问题的解相应地变化为:

$$X'_B = B^{-1}(b + \Delta b)$$

其中 $\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, 0, \cdots, 0)^T$。

资源数量 b 变化的分析

假设资源数量变化：

$$b_r' = b_r + \Delta b_r$$

并假设其他系数都不变。最终表中原问题的解相应地变化为：

$$X_B' = B^{-1}(b + \Delta b)$$

其中 $\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, 0, \cdots, 0)^T$。只要 $X_B' \geqslant 0$，因最终表中检验数不变，故最优基不变，但最优值发生了变化，

资源数量 b 变化的分析

假设资源数量变化：

$$b'_r = b_r + \Delta b_r$$

并假设其他系数都不变。最终表中原问题的解相应地变化为：

$$X'_B = B^{-1}(b + \Delta b)$$

其中 $\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, 0, \cdots, 0)^T$。只要 $X'_B \geqslant 0$，因最终表中检验数不变，故最优基不变，但最优值发生了变化，所以 X'_B 为新的最优解。

$$\begin{aligned} X'_B = B^{-1}(b + \Delta b) = & \quad B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \\ = & \quad B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = X_B + B^{-1}\Delta b \end{aligned}$$

资源数量 b 变化的分析 · 例

问题

保持例 2-1 中最优基不变，求 b_1 的变化范围。

资源数量 b 变化的分析 · 例

问题

保持例 2-1 中最优基不变，求 b_1 的变化范围。

求解

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2, P_1, P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

问题

保持例 2-1 中最优基不变，求 b_1 的变化范围。

求解

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2, P_1, P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'_B = & \quad X_B + B^{-1}\Delta b \\ = & \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0 \end{aligned}$$

资源数量 b 变化的分析 · 例

问题

保持例 2-1 中最优基不变，求 b_1 的变化范围。

求解

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2, P_1, P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B' = X_B + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

所以有：

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 + \frac{5}{8}\Delta b_1 \geqslant 0 \\ 8 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \geqslant 0 \\ 3 - \frac{5}{8}\Delta b_1 \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

资源数量 b 变化的分析 · 例

问题

保持例 2-1 中最优基不变，求 b_1 的变化范围。

求解

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2, P_1, P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'_B = X_B + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

所以有：

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 + \frac{5}{8}\Delta b_1 \geqslant 0 \\ 8 - \frac{1}{4}\Delta b_1 \geqslant 0 \\ 3 - \frac{5}{8}\Delta b_1 \geqslant 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -8 \leqslant \Delta b_1 \leqslant 4.8$$

技术系数 a_{ij} 变化的分析

问题

在例 2-1 中，现假设有第三种产品，其技术系数向量为 $P=(4,2,1)$，单位利润为 8，问该厂应否生产该种产品？如果生产，生产多少？

技术系数 a_{ij} 变化的分析

问题

在例 2-1 中，现假设有第三种产品，其技术系数向量为 $P=(4,2,1)$，单位利润为 8，问该厂应否生产该种产品？如果生产，生产多少？

解：

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2,P_1,P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

问题

在例 2-1 中，现假设有第三种产品，其技术系数向量为 $P=(4,2,1)$，单位利润为 8，问该厂应否生产该种产品？如果生产，生产多少？

解：

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2, P_1, P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

设生产第三种产品的产量为 x_3'，则其在最终表中的检验数为

$$\sigma_3' = c_3' - C_B B^{-1} P_3 = 1.5 > 0$$

技术系数 a_{ij} 变化的分析

问题

在例 2-1 中，现假设有第三种产品，其技术系数向量为 $P=(4,2,1)$，单位利润为 8，问该厂应否生产该种产品？如果生产，生产多少？

解：

由最优单纯形表可知，最优基为 (P_2,P_1,P_5)，其逆矩阵为

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

设生产第三种产品的产量为 x_3'，则其在最终表中的检验数为

$$\sigma_3'=c_3'-C_BB^{-1}P_3=1.5>0$$

所以生产第三种产品有利。

技术系数 a_{ij} 变化的分析

解：

计算第三种产品在最终表中的技术系数向量，并加入到最终表中进行迭代计算

$$B^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ -1/2 \\ -5/4 \end{bmatrix}$$

解：

计算第三种产品在最终表中的技术系数向量，并加入到最终表中进行迭代计算

$$B^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} 5/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -5/8 & 1/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ -1/2 \\ -5/4 \end{bmatrix}$$

$c_j \rightarrow$			5	4	0	0	0	8	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'	θ_i
4	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0	9/4	
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0	-1/2	
0	x_5	3	0	0	-5/8	1/8	1	-5/4	
$c_j - z_j$			5	4	0	0	0	-5/4	

价值系数 c_j 变化的分析

价值系数变化后，对检验数会产生影响。当是非基变量的价值系数变化时，只会对其自身的检验数产生影响，这时只需让其检验数不大于 0 即可。而当基变量的价值系数变化时，情况略为复杂一些。

价值系数 c_j 变化的分析

价值系数变化后，对检验数会产生影响。当是非基变量的价值系数变化时，只会对其自身的检验数产生影响，这时只需让其检验数不大于 0 即可。而当基变量的价值系数变化时，情况略为复杂一些。

当第 r 个基变量的价值系数发生变化时，它会影响到 $C_B B^{-1}$，从而影响到所有检验数的值，设其有一个增量 Δc_r，则所有的检验数可表示为

$$\sigma_j' = C - (C_B + \Delta C_B)B^{-1}A = \sigma - \Delta C_B B^{-1}A$$

只要 $\sigma' \leqslant 0$，则最优基就不会发生变化。

问题

例 2-1 中，求在不影响最优基时，第二个产品的价值系数的变化范围。

问题

例 2-1 中，求在不影响最优基时，第二个产品的价值系数的变化范围。

解：

当第二个产品的价值系数有增量 Δc_2 时，最终单纯形表变为：

问题

例 2-1 中，求在不影响最优基时，第二个产品的价值系数的变化范围。

解：

当第二个产品的价值系数有增量 Δc_2 时，最终单纯形表变为：

$c_j \rightarrow$			5	$4+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$4+\Delta c_2$	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0
0	x_5	3	0	0	-5/8	1/8	1
$c_j - z_j$			0	0	$-\frac{5}{4}-\frac{5}{8}\Delta c_2$	$-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\Delta c_2$	0

价值系数 c_j 变化的分析 · 例

问题

例 2-1 中，求在不影响最优基时，第二个产品的价值系数的变化范围。

解：

当第二个产品的价值系数有增量 Δc_2 时，最终单纯形表变为：

$c_j \to$			5	$4+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$4+\Delta c_2$	x_2	5	0	1	5/8	-1/8	0
5	x_1	8	1	0	-1/4	1/4	0
0	x_5	3	0	0	-5/8	1/8	1
$c_j - z_j$			0	0	$-\frac{5}{4}-\frac{5}{8}\Delta c_2$	$-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\Delta c_2$	0

$$-5/4 - 5/8\Delta c_2 \leqslant 0, -3/4 + 1/8\Delta c_2 \leqslant 0 \Rightarrow -2 \leqslant \Delta c_2 \leqslant 6$$

灵敏度分析

Example

现有线性规划问题

$$\max \quad z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 20 & (1) \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leqslant 90 & (2) \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解的变化？

（1）约束条件 (1) 的右端常数由 20 变为 30；

（2）约束条件 (2) 的右端常数由 90 变为 70；

（3）目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

（4）x_1 的系数列向量由 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$；

（5）增加一个约束条件 (3)$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 50$；

（6）将原约束条件 (2) 改变为 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leqslant 100$；

Section 4

整数规划

本章内容

4 整数规划

- 整数规划问题的数学模型及其解法
- 0 - 1 型整数规划
- 指派问题

目录

4 整数规划
- 整数规划问题的数学模型及其解法
- 0 - 1 型整数规划
- 指派问题

整数规划问题的提出

引例

某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表所示。

货物	体积 (米 ^{3}/ 箱)	重量 (百公斤/箱)	利润 (百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24 米 ^{3}	13 百公斤	

引例

某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表所示。

货物	体积 (米 ^{3}/ 箱)	重量 (百公斤/箱)	利润 (百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24 米 ^{3}	13 百公斤	

模型的建立

整数规划问题的提出

引例

某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表所示。

货物	体积 (米 ^{3}/ 箱)	重量 (百公斤/箱)	利润 (百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24 米 ^{3}	13 百公斤	

模型的建立

设 x_1, x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数，可以得到：

整数规划问题的提出

引例

某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如下表所示。

货物	体积 (米 ^{3}/ 箱)	重量 (百公斤/箱)	利润 (百元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24 米 ^{3}	13 百公斤	

模型的建立

设 x_1, x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数，可以得到：

$$\begin{array}{ll} \max & z = 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 24 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leqslant & 13 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I}} \end{array} \right. \end{array}$$

整数规划问题的提出

图解

$$
\max \quad z = 20x_1 + 10x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
$$

图解

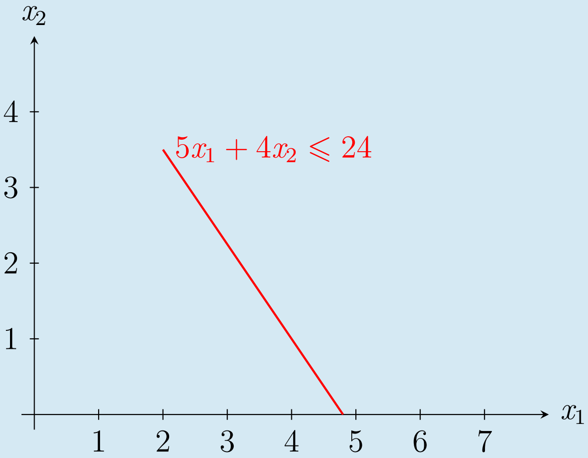
$$
\max \quad z = 20x_1 + 10x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1+4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1+5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
$$

图解

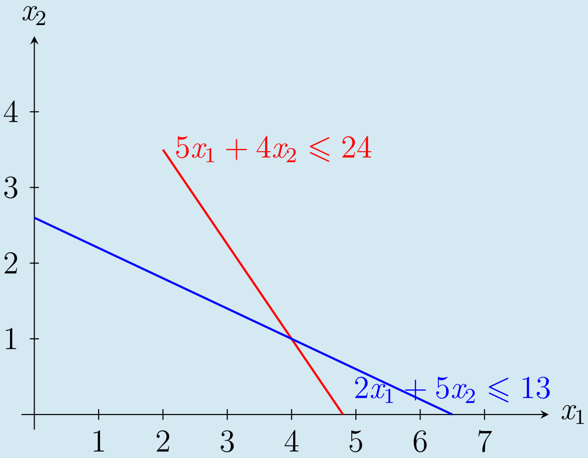
$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}$$



图解

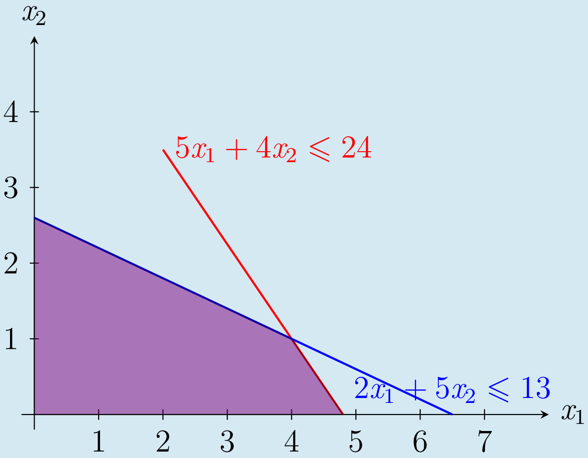
$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 20x_1 + 10x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}
$$



图解

$$
\max \quad z = 20x_1 + 10x_2
$$

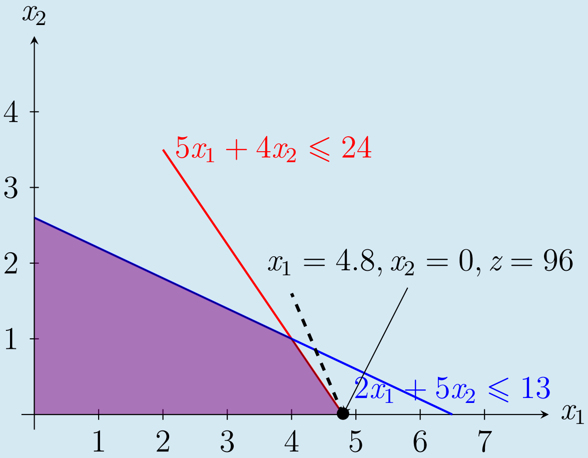
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
$$



图解

$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

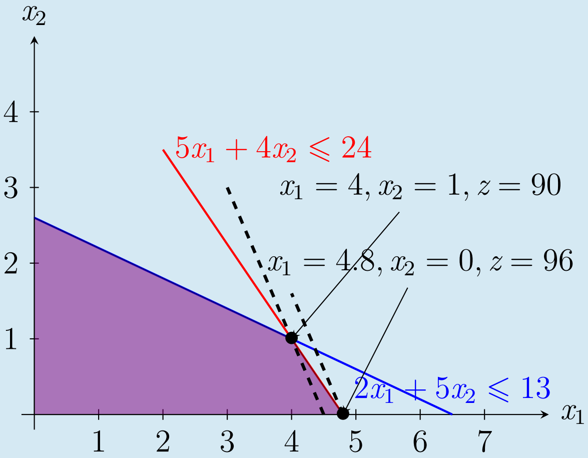
$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}$$



图解

$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}$$



分支定界法 (Branch and Bound Method)[5]

基本思路

先根据约束条件不考虑整数约束，直接求出最优解；如果解为整数，那么所求的解就是整数条件下的最优解；如果 x_j 不是整数解，那么根据解的值分别增加约束条件纳入到原模型中求解，直到得到整数最优解为止。

[5] 20 世纪 60 年代初由 Land Doig 和 Dakin 等人提出。

分支定界法 (Branch and Bound Method)[5]

基本思路

先根据约束条件不考虑整数约束，直接求出最优解；如果解为整数，那么所求的解就是整数条件下的最优解；如果 x_j 不是整数解，那么根据解的值分别增加约束条件纳入到原模型中求解，直到得到整数最优解为止。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\
\qquad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_{1n} = b_m \\
x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

[5] 20 世纪 60 年代初由 Land Doig 和 Dakin 等人提出。

具体方法

首先考虑整数约束条件，设其最优解 $X=(d_1,x_2,\cdots,d_n)^T$。若该解为非整数解，设 $d_j=u_j+v_j$，其中 u_j,v_j 分别是 d_j 整数部分和小数部分，然后将原问题分为两枝：

具体方法

首先考虑整数约束条件，设其最优解 $X=(d_1, x_2, \cdots, d_n)^T$。若该解为非整数解，设 $d_j = u_j + v_j$，其中 u_j, v_j 分别是 d_j 整数部分和小数部分，然后将原问题分为两枝：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_{1n} = b_m \\
\color{red}{x_j \geqslant u_j + 1} \\
x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

分支定界法 (Branch and Bound Method)

具体方法

首先考虑整数约束条件，设其最优解 $X=(d_1,x_2,\cdots,d_n)^T$。若该解为非整数解，设 $d_j=u_j+v_j$，其中 u_j,v_j 分别是 d_j 整数部分和小数部分，然后将原问题分为两枝：

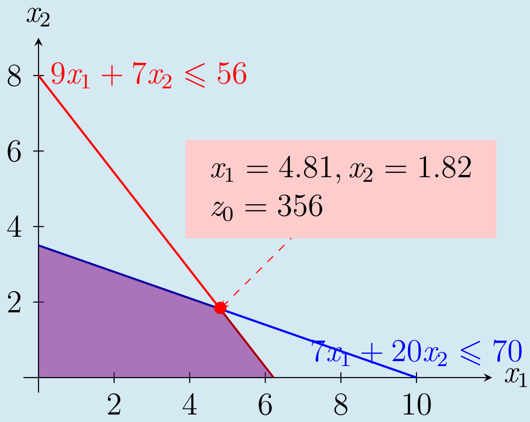
$$\begin{aligned}
\max \quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_{1n}=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_{2n}=b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_{1n}=b_m \\
x_j\geqslant u_j+1 \\
x_j\geqslant 0,x_j\in\mathbb{I}
\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_{1n}=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_{2n}=b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_{1n}=b_m \\
x_j\leqslant u_j \\
x_j\geqslant 0,x_j\in\mathbb{I}
\end{cases}
\end{aligned}$$

例

$$\max \quad z = 40x_1 + 90x_2$$

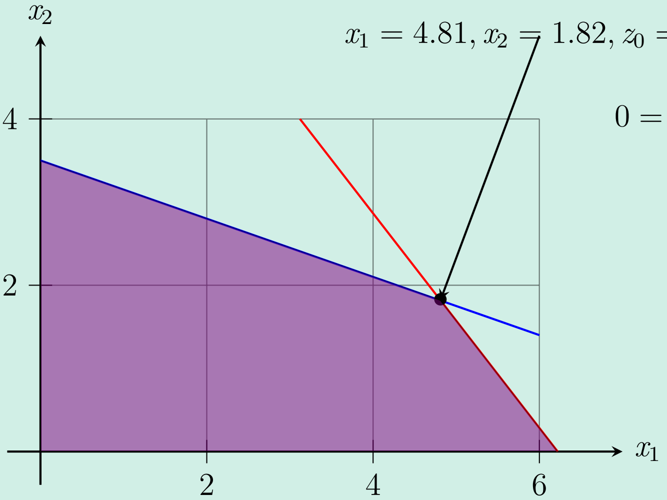
$$\text{s.t.} \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 = 56 \\ 7x_1 + 20x_2 = 70 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \in \mathbb{I} \end{cases}$$



得到的是非整数解，但是可肯定的是：

$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

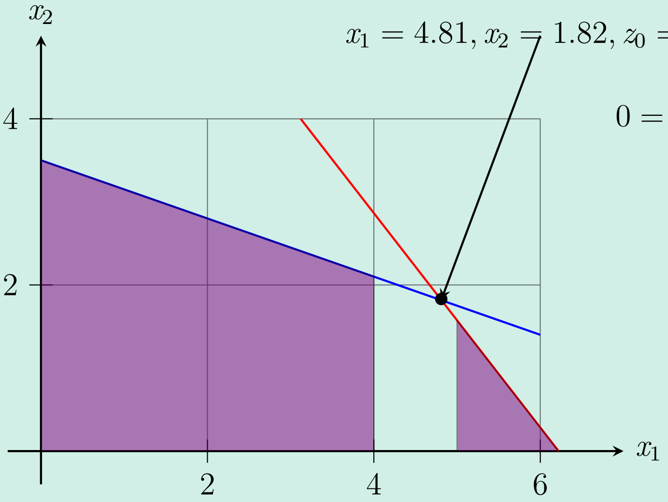
例



$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82, z_0 = 356$

$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$

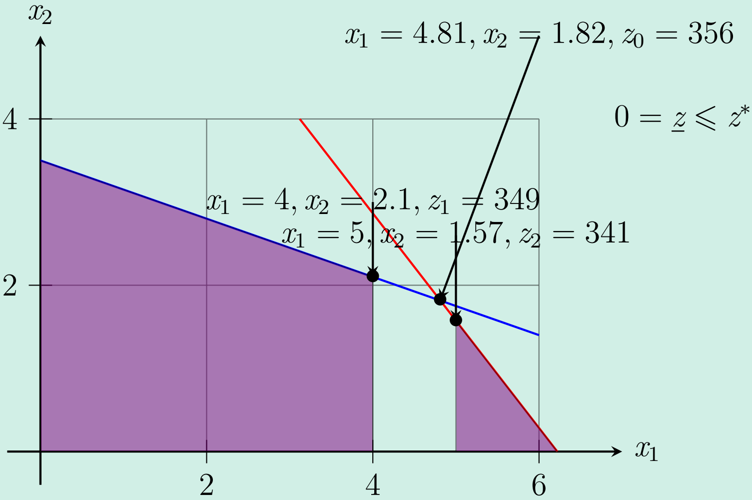
例



$x_1 = 4.81, x_2 = 1.82, z_0 = 356$

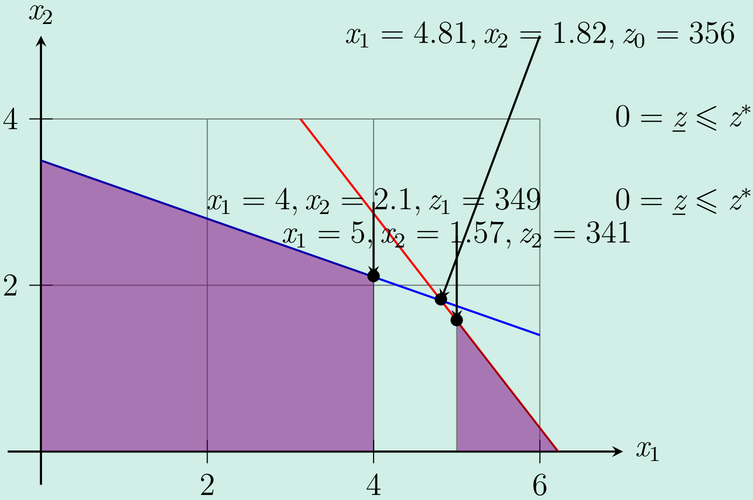
$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$

例



$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

例

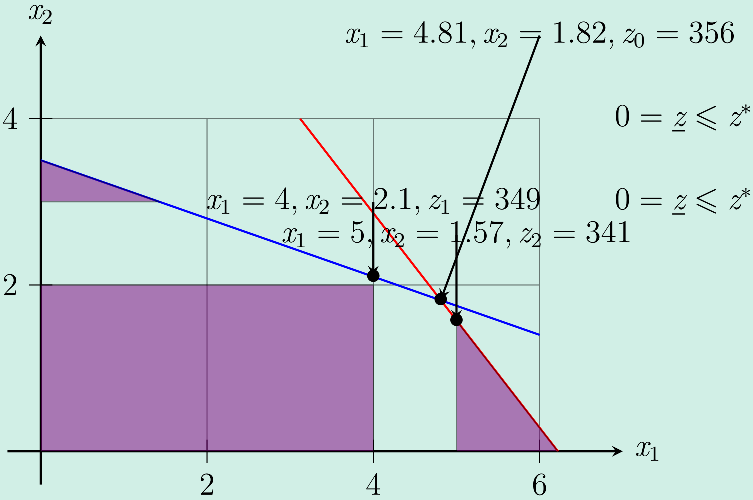


$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 349$$

分支定界法 (Branch and Bound Method)

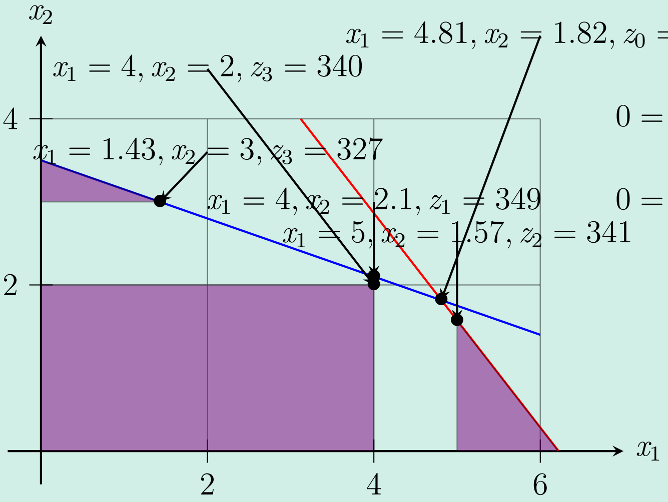
例



$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 349$$

例

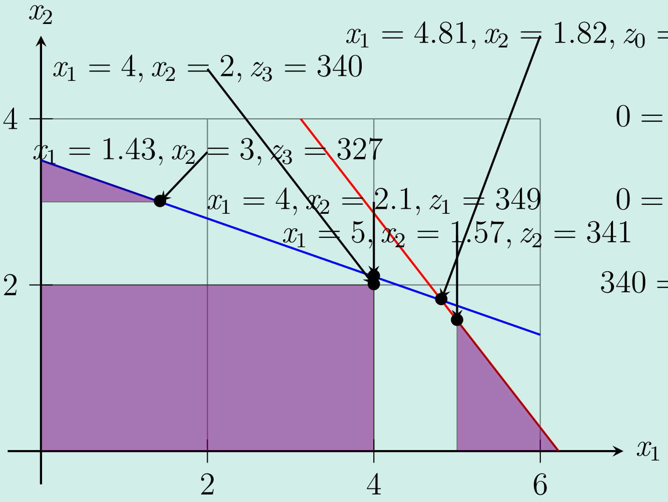


$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 349$$

分支定界法 (Branch and Bound Method)

例

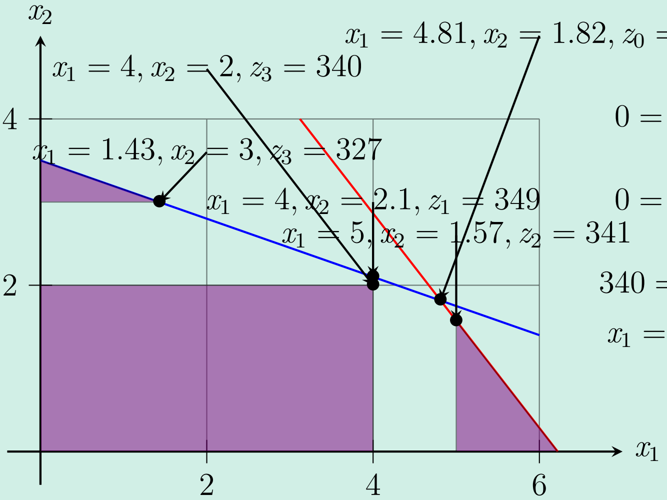


$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$$

$$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 349$$

$$340 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 341$$

例



$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 356$

$0 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 349$

$340 = \underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z} = 341$

$x_1 = 4, x_2 = 2, z = 340$

分支定界法的步骤

- (1) 解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。

分支定界法的步骤

- (1) 解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；

分支定界法的步骤

- (1)　解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；
  - B 有整数最优解，则该解也为 A 的最优解。

分支定界法的步骤

- (1)　解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；
  - B 有整数最优解，则该解也为 A 的最优解。
  - B 有最优解，但不符合整数条件，记其目标函数值为 $\bar{z}_0$。

分支定界法的步骤

- (1)　解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；
  - B 有整数最优解，则该解也为 A 的最优解。
  - B 有最优解，但不符合整数条件，记其目标函数值为 $\bar{z}_0$。
- (2)　用观察法找问题 A 的一个整数可行解 (如 $x_j = 0$)，记其目标函数值为 $\underline{z}$，则有 $\underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z}$。

分支定界法的步骤

- (1) 解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；
  - B 有整数最优解，则该解也为 A 的最优解。
  - B 有最优解，但不符合整数条件，记其目标函数值为 $\bar{z}_0$。
- (2) 用观察法找问题 A 的一个整数可行解 (如 $x_j = 0$)，记其目标函数值为 $\underline{z}$，则有 $\underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z}$。
- (3) 分支与定界 :$x_j \leqslant [b_j], x_j \geqslant [b_j] + 1$

分支定界法的步骤

- (1) 解整数规划 A 对应的线性规划问题 B。
  - B 无可行解，A 也无可行解；
  - B 有整数最优解，则该解也为 A 的最优解。
  - B 有最优解，但不符合整数条件，记其目标函数值为 $\bar{z}_0$。
- (2) 用观察法找问题 A 的一个整数可行解（如 $x_j = 0$)，记其目标函数值为 $\underline{z}$，则有 $\underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z}$。
- (3) 分支与定界:$x_j \leqslant [b_j], x_j \geqslant [b_j] + 1$
- (4) 比较与剪支:得到整数解则修改下界，得到非整数解则修改上界。

割平面法[6]

思路

该方法的基础仍然是用解线性规划的方法去解整数规划问题，首先不考虑变量的整数约束，但增加线性约束条件（割平面）使得原可行域中切割掉一部分，这部分只包含非整数解，但没有切割任何整数可行解。这个方法就是指出怎样找到适当的割平面，使切割后最终得到这样的可行域，它的一个有整数坐标的极点恰好是问题的最优解。

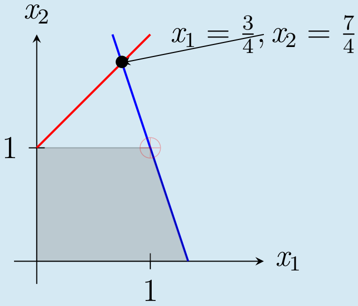
[6] 由 R.E.Gomory 在 1958 年提出，所以也称为 Gomory 割平面法

割平面法[6]

思路

该方法的基础仍然是用解线性规划的方法去解整数规划问题，首先不考虑变量的整数约束，但增加线性约束条件（割平面）使得原可行域中切割掉一部分，这部分只包含非整数解，但没有切割任何整数可行解。这个方法就是指出怎样找到适当的割平面，使切割后最终得到这样的可行域，它的一个有整数坐标的极点恰好是问题的最优解。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}
$$



[6] 由 R.E.Gomory 在 1958 年提出，所以也称为 Gomory 割平面法

割平面法

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}
$$

割平面法

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \\ 3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}
$$

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2 \qquad\qquad \max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \\ 3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	x_4	4	3	1	0	1
σ_j			1	1	0	0

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2 \qquad\qquad \max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	x_4	4	3	1	0	1
σ_j			1	1	0	0
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2

割平面法

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2

割平面法

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2

由最终计算表得到变量间的关系式：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}, x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

割平面法

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2

由最终计算表得到变量间的关系式：

$$x_1-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4},x_2+\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{7}{4}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项后以上两式变为

$$x_1-x_3=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right),x_2-1=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right)$$

割平面法

$$
\max \quad z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0,\, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}
$$

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \leqslant 0$$

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \leqslant 0$$

$$-3x_3 - x_4 \leqslant -3 \Rightarrow -3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \leqslant 0$$

$$-3x_3 - x_4 \leqslant -3 \Rightarrow -3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

	c_j		1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
	σ_j		0	0	-1/2	-1/2	0

割平面法

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

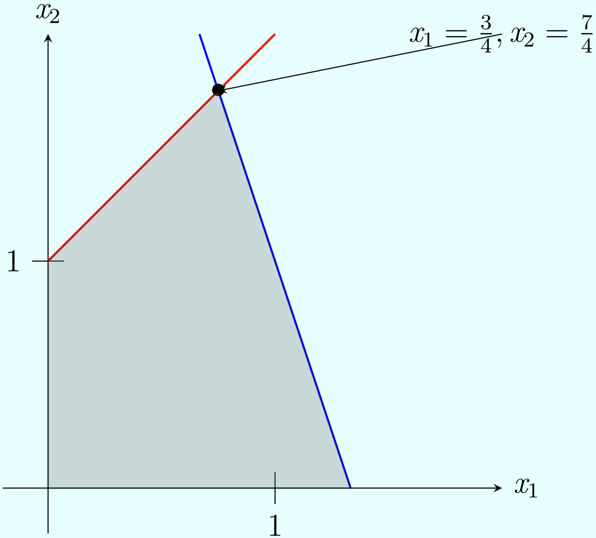
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geqslant 0, x_j \in \mathbb{I} \end{cases}$$

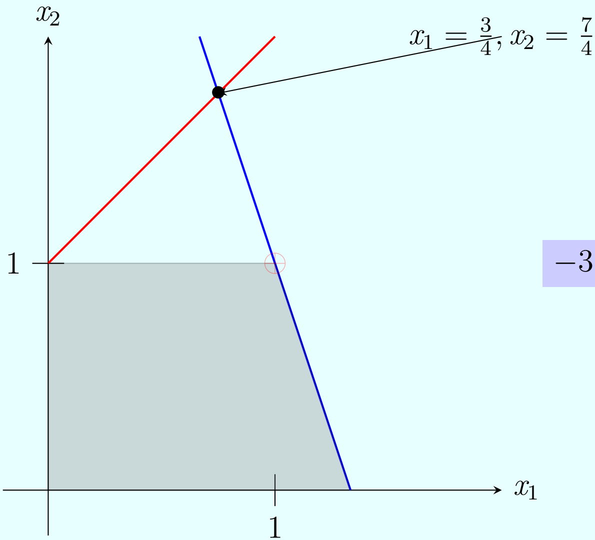
$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \leqslant 0$$

$$-3x_3 - x_4 \leqslant -3 \Rightarrow -3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

	c_j		1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
	σ_j		0	0	-1/2	-1/2	0
1	x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	-1	-1/3
	σ_j		0	0	0	-1/3	-1/6

割平面法





$$-3x_3 - x_4 \leqslant -3 \rightarrow x_2 \leqslant 1$$

割平面法

- (1) 令 x_i 是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量，由最终单纯形表得到

$$x_i + \sum_k \alpha_{ik} x_k = b_i$$

其中 $i \in Q, k \in K$，Q 为构成基变量号码的集合，K 为构成非基变量号码的集合。

割平面法

- (1) 令 x_i 是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量，由最终单纯形表得到

$$x_i + \sum_k \alpha_{ik} x_k = b_i$$

其中 $i \in Q, k \in K$，Q 为构成基变量号码的集合，K 为构成非基变量号码的集合。

- (2)　将 b_i 和 α_{ik} 都分解成整数部分 N 与非负真分数 f 之和，即

$$b_i = N_i + f_i, \alpha_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$$

其中，$0 < f_i < 1, 0 \leqslant f_{ik} < 1$。$N$ 表示不超过 b 的最大整数。这样可以得到

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_{ik} - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_{ik}$$

割平面法

- (1) 令 x_i 是相应线性规划最优解中为分数值的一个基变量，由最终单纯形表得到

$$x_i + \sum_k \alpha_{ik} x_k = b_i$$

其中 $i \in Q, k \in K$，Q 为构成基变量号码的集合，K 为构成非基变量号码的集合。

- (2) 将 b_i 和 α_{ik} 都分解成整数部分 N 与非负真分数 f 之和，即

$$b_i = N_i + f_i, \alpha_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$$

其中，$0 < f_i < 1, 0 \leqslant f_{ik} < 1$。$N$ 表示不超过 b 的最大整数。这样可以得到

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_{ik} - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_{ik}$$

- (3) 由上式可以得到切割方程：

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leqslant 0$$

目录

4 整数规划

- 整数规划问题的数学模型及其解法
- 0 - 1 型整数规划
- 指派问题

独立方案的选择——多仓库选址问题

某公司决定在秦皇岛市建立四个仓库，拟案中有 7 个位置 $A_j(j=1,2,\cdots,7)$ 可供选择，规定：

海港区——由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选择两个；

山海关区——由 A_4, A_5 两个点中至少选择一个；

北戴河区——由 A_6, A_7 两个点中至少选择一个。

如果选择 A_j 点，建设投资为 b_j，每年的增量收益为 c_j，但投资总额不超过 B 元，问如何选址可使年总量收益最大？

模型的建立

设 $x_j = \begin{cases} 1 & A_j\text{选中} \\ 0 & A_j\text{未中} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, 7)$

0-1 型整数规划问题的提出与模型建立

模型的建立

设 $x_j = \begin{cases} 1 & A_j\text{选中} \\ 0 & A_j\text{未中} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, 7)$

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{7} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{7} b_j x_j \leqslant B \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ x_4 + x_5 \geqslant 1 \\ x_5 + x_7 \geqslant 1 \\ \sum_{j=1}^{7} x_j = 4 \\ x_j = 0\text{或}1 \end{cases}$$

互斥方案的选择

某公司决定在甲销售区域销售 A, B 两种产品，其外包装体积分别为 $1m^3$ 和 $2m^3$，采用成品整车直运的方式至设在甲区的仓库。运输工具有火车、汽车、飞机三种，其最大运输体积限制分别为 $200m^3, 50m^3, 40m^3$，假设只能选择其中某一种运输工具，试写出约束条件。

模型的建立

设 x_1, x_2 分别表示 A, B 两种产品的运输量，则

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqslant 200 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 40
\end{aligned}
$$

模型的建立

设 x_1, x_2 分别表示 A, B 两种产品的运输量，则

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 200 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 40 \end{aligned}$$

因为三种运输工具只能选择其中一种，

0-1 型整数规划问题的提出与模型建立

模型的建立

设 x_1, x_2 分别表示 A, B 两种产品的运输量，则

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqslant 200 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 40
\end{aligned}
$$

因为三种运输工具只能选择其中一种，则可设 $y_i = \begin{cases} 0 & \text{选中} \\ 1 & \text{未中} \end{cases}$，则

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqslant 200 + y_1 M \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 50 + y_2 M \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 40 + y_3 M \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 2
\end{aligned}
$$

问题

$$\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

问题

$$\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

易知 $X = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 为一可行解，此时 $z = 3$，所以可以考虑增加一个 过滤条件$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geqslant 3$。

问题

$$
\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases}
$$

易知 $X = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 为一可行解，此时 $z = 3$，所以可以考虑增加一个 过滤条件$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geqslant 3$。而且此过滤条件应随着 z 的变化而更新。

问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 & (1) \\
x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 & (2) \\
x_1 + x_2 \leqslant 3 & (3) \\
4x_2 + x_3 \leqslant 6 & (4) \\
x_1, x_2, x_3 = 0 \text{或} 1
\end{cases}
\end{aligned}
$$

易知 $X = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 为一可行解，此时 $z = 3$，所以可以考虑增加一个过滤条件$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geqslant 3$。而且此过滤条件应随着 z 的变化而更新。
如果变量按其目标函数中系数大小进行递增排列，即 $\max \quad z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$。

0-1 型整数规划问题的解法 · 隐枚举法

问题

$$\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

易知 $X = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 为一可行解，此时 $z = 3$，所以可以考虑增加一个 过滤条件$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geqslant 3$。而且此过滤条件应随着 z 的变化而更新。

如果变量按其目标函数中系数大小进行递增排列，即 $\max \quad z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$。变量取值也按递增排列，可以加快找到最优解的速度。

求解

(x_2, x_1, x_3)	过滤条件	约束 1 2	约束 2 4	约束 3 3	约束 4 6	过滤掉？	max z
(0,0,0)	0					是	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	否	5
(0,1,1)	8	0	2	1	1	否	8
(1,1,1)	6					是	
(1,0,1)	3					是	
(1,1,0)	1					是	
(0,1,0)	3					是	
(1,0,0)	-2					是	

目录

4 整数规划

- 整数规划问题的数学模型及其解法
- 0 - 1 型整数规划
- 指派问题

指派问题

问题的提出

指派问题是一种特殊的 0 - 1 规划问题，它最初研究的是：有 n 个工作而恰好有 n 个人去完成的情况，要求每个完成其中一项工作，而每项工作也只能由一个人来完成。

指派问题

问题的提出

指派问题是一种特殊的 0 - 1 规划问题，它最初研究的是：有 n 个工作而恰好有 n 个人去完成的情况，要求每个完成其中一项工作，而每项工作也只能由一个人来完成。
由于不同人从事不同工作任务的效率不同，所以不同的任务分派会产生不同的效果。指派问题就是求解最佳的分派以使总的效率最大，或所用的总时间最短。

问题的提出

指派问题是一种特殊的 0 - 1 规划问题，它最初研究的是：有 n 个工作而恰好有 n 个人去完成的情况，要求每个完成其中一项工作，而每项工作也只能由一个人来完成。
由于不同人从事不同工作任务的效率不同，所以不同的任务分派会产生不同的效果。指派问题就是求解最佳的分派以使总的效率最大，或所用的总时间最短。

表: 效率矩阵 (单位: 分钟)

	车	钳	铣	刨	磨
甲	6	8	10	12	9
乙	7	12	6	10	8
丙	11	7	5	6	10
丁	9	10	9	6	5
戊	8	9	5	7	7

模型的建立

设： $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当工人}i\text{完成第}j\text{项工作}\\ 0 & \text{当工人}i\text{不完成第}j\text{项工作}\end{cases}$，则得到

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad j=1,2,\cdots,n$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad i=1,2,\cdots,n$$
$$x_{ij}=0\text{或}1$$

- 相对特长的概念
- 效率矩阵中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。[7]

[7] 该性质由匈牙利数学家 D.König 提出，1955 年，W.W.Kuhn 将这一性质应用于求解指派问题。所以该方法也称为匈牙利法。

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	min
甲	6	8	10	12	9	
乙	7	12	6	10	8	
丙	11	7	5	6	10	
丁	9	10	9	6	5	
戊	8	9	5	7	7	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	min
甲	6	8	10	12	9	6
乙	7	12	6	10	8	6
丙	11	7	5	6	10	5
丁	9	10	9	6	5	5
戊	8	9	5	7	7	5

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	min
甲	6	8	10	12	9	6
乙	7	12	6	10	8	6
丙	11	7	5	6	10	5
丁	9	10	9	6	5	5
戊	8	9	5	7	7	5

	车	钳	铣	刨	磨
甲	0	2	4	6	3
乙	1	6	0	4	2
丙	6	2	0	1	5
丁	4	5	4	1	0
戊	3	4	0	2	2

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	min
甲	6	8	10	12	9	6
乙	7	12	6	10	8	6
丙	11	7	5	6	10	5
丁	9	10	9	6	5	5
戊	8	9	5	7	7	5

	车	钳	铣	刨	磨
甲	0	2	4	6	3
乙	1	6	0	4	2
丙	6	2	0	1	5
丁	4	5	4	1	0
戊	3	4	0	2	2
min	0	2	0	1	0

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	0	0	5	5	3	
乙	1	4	0	3	2	
丙	6	0	0	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	0	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	0	0	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	0	0	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	0	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	0	0	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	0	$\emptyset$	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	0	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	0	0	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	0	$\emptyset$	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	0	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	0	$\emptyset$	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	0	$\emptyset$	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	0	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	0	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	0	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	$\surd$
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	$\surd$
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	⊙	∅	5	5	3	
乙	1	4	⊙	3	2	√
丙	6	⊙	∅	∅	5	
丁	4	3	4	⊙	∅	
戊	3	2	∅	1	2	√
			√			

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	$\odot$	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	$\odot$	3	2	$\surd$
丙	6	$\odot$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	$\odot$	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	⊙	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	⊙	3	2	$\surd$
丙	6	⊙	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	⊙	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	⊙	$\emptyset$	5	5	3	
乙	1	4	⊙	3	2	$\surd$
丙	6	⊙	$\emptyset$	$\emptyset$	5	
丁	4	3	4	⊙	$\emptyset$	
戊	3	2	$\emptyset$	1	2	$\surd$
			$\surd$			

指派问题

	车	钳	铣	刨	磨	
甲	⊙	∅	5	5	3	
乙	1	4	⊙	3	2	√
丙	6	⊙	∅	∅	5	
丁	4	3	4	⊙	∅	
戊	3	2	∅	1	2	√
			√			

√ 行减去最小元素，√ 列加上最小元素。

	车	钳	铣	刨	磨
甲	0	0	5	5	3
乙	0	3	0	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	0	0
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	0	0	5	5	3
乙	0	3	0	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	0	$\odot$
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	0	0	5	5	3
乙	0	3	0	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	0	3	0	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	0	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	$\odot$	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	0	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	$\odot$	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	$\emptyset$	0	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	$\odot$	2	1
丙	6	0	1	0	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	$\emptyset$	$\odot$	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	$\odot$	2	1
丙	6	0	1	$\emptyset$	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	$\emptyset$	$\odot$	1

	车	钳	铣	刨	磨
甲	$\odot$	0	5	5	3
乙	$\emptyset$	3	$\odot$	2	1
丙	6	$\odot$	1	$\emptyset$	5
丁	4	3	5	$\emptyset$	$\odot$
戊	2	1	$\emptyset$	$\odot$	1

Section 5

运输问题

本章内容

5 运输问题

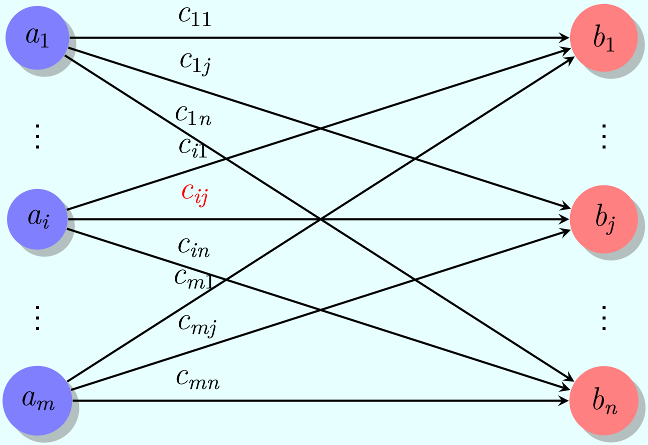
- 运输问题的提出
- 运输问题的解法 - 表上作业法
- 运输问题的 Excel 求解
- 运输问题求解时可能遇到的问题

目录

5 运输问题

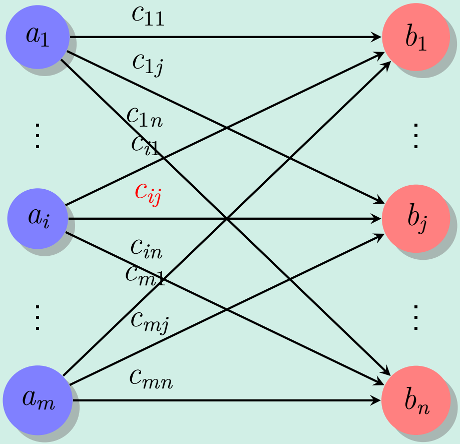
- 运输问题的提出
- 运输问题的解法 - 表上作业法
- 运输问题的 Excel 求解
- 运输问题求解时可能遇到的问题

运输问题（Hitchcock Problem）模型是解决物资调运问题的一般方法。运输问题是运筹学中的著名问题，有许多有效算法，其中我国学者（华罗庚、王元）依据单纯形法提出的表上作业法最具特色。



运输问题的数学模型

图示

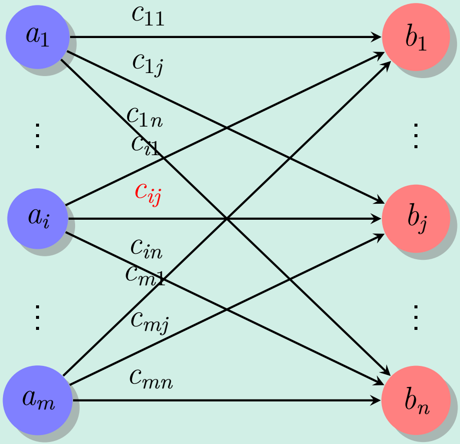


数学模型

基本假设：总产量＝总销量

运输问题的数学模型

图示



数学模型

基本假设：总产量＝总销量

设 x_{ij} 为从产地 A_i 调运到销地 B_j 产量。

则可以得到如下的运输问题的数学模型：

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

运输问题的特征

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

[8] e_i 为第 i 个元素为 1 的单位列

运输问题的特征

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

1. 运输问题本质上是线性规划问题，但总是存在着可行解。

[8] e_i 为第 i 个元素为 1 的单位列

运输问题的特征

$$
\min \ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}
$$

1. 运输问题本质上是线性规划问题，但总是存在着可行解。
2. 运输问题的系数矩阵是稀疏矩阵，$p_{ij} = (e_i; e_{m+j})^{\mathrm{T}}$ 表示变量 x_{ij} 的系数列。[8]

[8] e_i 为第 i 个元素为 1 的单位列

运输问题的特征

$$
\begin{aligned}
&\min\ \ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\
&\text{s.t.}\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,m\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n\\
x_{ij}\geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

1. 运输问题本质上是线性规划问题，但总是存在着可行解。
2. 运输问题的系数矩阵是稀疏矩阵，$p_{ij}=(e_i;\,e_{m+j})^{\mathrm{T}}$ 表示变量 x_{ij} 的系数列。[8]
3. 运输问题的有效约束只有 $m+n-1$ 个。

[8] e_i 为第 i 个元素为 1 的单位列

目录

5 运输问题
- 运输问题的提出
- 运输问题的解法 - 表上作业法
- 运输问题的 Excel 求解
- 运输问题求解时可能遇到的问题

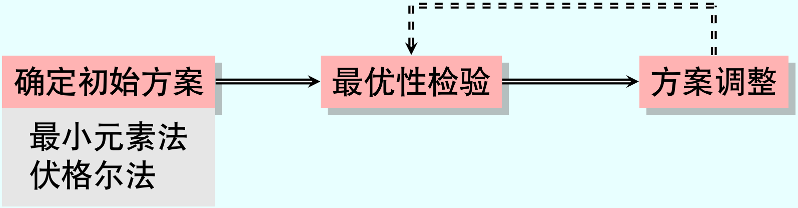
表上作业法的思路

表上作业法是解决运输问题简单有效的方法，它是由华罗庚和王元首先提出来的，然后他人在此基础上作了少许优化和调整。由于运输问题本质上是线性规划问题，所以表上作业法只是单纯形法不同表现形式而已。

表上作业法的步骤

确定初始方案 ⟹ 最优性检验 ⟹ 方案调整

表上作业法的步骤



表上作业法的步骤

确定初始方案 → 最优检验 → 方案调整

确定初始方案：
- 最小元素法
- 伏格尔法

最优检验：
- 闭回路法
- 位势法

表上作业法的步骤

确定初始方案 → 最优检验 → 方案调整

最小元素法
伏格尔法

闭回路法
位势法

闭回路调整法

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5			3			8		5
A_2		2			5			6		10
A_3		1			4			3		15
销量	8			13			9			

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	5	3	8	5
A_2	2	5	6	10
A_3	1	4	3	15
销量	8	13	9	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5			3			8		5
A_2		2			5			6		10
A_3	8	1			4			3		7
销量	0			13			9			

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
A_1		3	8	5
A_2		5	6	10
A_3	8	4	3	7
销量		13	9	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
A_1		3	8	5
A_2		5	6	10
A_3	8	4	3	7
销量		13	9	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

				B_2			B_3			产量
A_1				5	3			8		0
A_2					5			6		10
A_3	8				4			3		7
销量				8			9			

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
		$\boxed{5}$		
A_2		5	6	10
A_3	$\boxed{8}$	4	3	7
销量		8	9	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
		5		
A_2		5	6	10
A_3	8	4	3	7
销量		8	9	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
		5		
A_2		5	6	10
A_3	8	4	7 3	0
销量		8	2	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
		5		
A_2		5	6	10
	8		7	
销量		8	2	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

		B_2	B_3	产量
		5		
A_2		8 5	2 6	0
	8		7	
销量		0	0	

方法一：最小元素法

基本思想

最小元素法的思想是就近供应，即从单位运价中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5		5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法二：伏格尔法

基本思想

用最小元素法确定的初始基可行解仅考虑了最小运费，但有时选择了最小运费的机会成本很大，即选择了一种调运路径，必然放弃其他可能的选择，这样有可能因其他运输路径单位运费增长过大从而使总的运费加大。所以要进行最小运费路径与其他可能运输路径间的协调。

方法二：伏格尔法

	B_1			B_2			B_3			产量	行差
A_1		5			3			8		5	
A_2		2			5			6		10	
A_3		1			4			3		15	
销量	8			13			9				
列差											

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	
A_3	1	4	3	15	
销量	8	13	9		
列差					

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	
销量	8	13	9		
列差					

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差					

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差	1				

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差	1	1			

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差	1	1	3		

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差	1	1	3		

方法二：伏格尔法

	B_1	B_2	B_3	产量	行差
A_1	5	3	8	5	2
A_2	2	5	6	10	3
A_3	1	4	3	15	2
销量	8	13	9		
列差	1	1	3		

	B_1			B_2			B_3			产量	行差
A_1		5			3			8		5	2
A_2	8	2			5			6		2	3
A_3		1			4			3		15	2
销量	0			13			9				
列差	1			1			3				

方法二：伏格尔法

				B_2	B_3	产量	行差
A_1				3	8	5	2
A_2	8			5	6	2	3
A_3				4	3	15	2
销量				13	9		
列差				1	3		

方法二：伏格尔法

		B_2	B_3	产量	行差
A_1		3	8	5	5
A_2	8	5	6	2	3
A_3		4	3	15	2
销量		13	9		
列差		1	3		

方法二：伏格尔法

				B_2	B_3	产量	行差
A_1				3	8	5	5
A_2	$\boxed{8}$			5	6	2	1
A_3				4	3	15	2
销量				13	9		
列差				1	3		

				B_2	B_3	产量	行差
A_1				3	8	5	5
A_2	8			5	6	2	1
A_3				4	3	15	1
销量				13	9		
列差				1	3		

方法二：伏格尔法

				B_2	B_3	产量	行差
A_1				3	8	5	5
A_2	8			5	6	2	1
A_3				4	3	15	1
销量				13	9		
列差				1	3		

方法二：伏格尔法

				B_2	B_3	产量	行差
A_1				3	8	5	5
A_2	8			5	6	2	1
A_3				4	3	15	1
销量				13	9		
列差				1	3		

方法二：伏格尔法

					B_2			B_3		产量	行差
A_1				5	3			8		0	5
A_2	8				5			6		2	1
A_3					4			3		15	1
销量					8			9			
列差					1			3			

方法二：伏格尔法

				B_2	B_3	产量	行差
				5			
A_2	8			5	6	2	1
A_3				4	3	15	1
销量				8	9		
列差				1	3		

方法二：伏格尔法

		B_2	B_3	产量	行差
		5			
A_2	8	5	6	2	1
A_3		4	3	15	1
销量		8	9		
列差		1	3		

方法二：伏格尔法

		B_2	B_3	产量	行差
		5			
A_2	8	5	6	2	1
A_3		4	3	15	1
销量		8	9		
列差		1	3		

方法二：伏格尔法

		B_2	B_3	产量	行差
		5			
A_2	8	5	6	2	1
A_3		4	9 3	6	1
销量		8	0		
列差		1	3		

方法二：伏格尔法

				B_2						产量	行差
				5							
A_2	8				5					2	1
A_3					4		9			6	1
销量					8						
列差					1						

方法二：伏格尔法

										产量	行差
					B_2						
				5							
A_2	8			2	5					2	1
A_3					4		9			6	1
销量					8						
列差					1						

方法二：伏格尔法

				B_2						产量	行差
				5							
A_2	8			2	5					2	1
A_3				6	4		9			6	1
销量				8							
列差				1							

方法二：伏格尔法

	B_1		B_2		B_3		产量	行差
A_1		5	5	3		8	5	5
A_2	8	2	2	5		6	10	1
A_3		1	6	4	9	3	15	1
销量	8		13		9			
列差	1		1		3			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5		$\boxed{5}$	3			8		5
A_2		2		$\boxed{8}$	5		$\boxed{2}$	6		10
A_3	$\boxed{8}$	1			4		$\boxed{7}$	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1	●	5		$\boxed{5}$	3			8		5
A_2		2		$\boxed{8}$	5		$\boxed{2}$	6		10
A_3	$\boxed{8}$	1			4		$\boxed{7}$	3		15
销量	8			13			9			

方法一： 闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1	●	5	$\boxed{5}$	3		8	5
A_2		2	$\boxed{8}$	5	$\boxed{2}$	6	10
A_3	$\boxed{8}$	1		4	$\boxed{7}$	3	15
销量	8		13		9		

方法一：闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1		5	5	3		8	5
A_2		2	8	5	2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

方法一：闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1		5	5	3		8	5
A_2		2	8	5	2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5		5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5		5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1		5	5	3		8	5
A_2		2	8	5	2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

方法一： 闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1	(+)	5		5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1	(+)	5	(-) 5	3		8	5
A_2		2	8	5	2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1	(+)	5	(-) 5	3		8	5
A_2		2	(+) 3	5	2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

方法一：闭回路法

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1	(+)	5	(-) 5	3		8	5
A_2		2	(+) 3	5	(-) 2	6	10
A_3	8	1		4	7	3	15
销量	8		13		9		

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	(+) ● 5	(-) 5 3	8	5
A_2	2	(+) 3 5	(-) 2 6	10
A_3	8 1	4	(+) 7 3	15
销量	8	13	9	

	B_1		B_2		B_3		产量
A_1	(+) ●	5	(−) 5	3		8	5
A_2		2	(+) 3	5	(−) 2	6	10
A_3	(−) 8	1		4	(+) 7	3	15
销量	8		13		9		

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一： 闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8		5
A_2		2		8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8		5
A_2		2	-2	8	5		2	6		10
A_3	8	1			4		7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8	4	5
A_2		2	-2	8	5		2	6		10
A_3	8	1			4	2	7	3		15
销量	8			13			9			

方法一：闭回路法

	B_1			B_2			B_3			产量
A_1		5	3	5	3			8	4	5
A_2		2	-2	8	5		2	6		10
A_3	8	1			4	2	7	3		15
销量	8			13			9			

闭回路存在且唯一是该方法的基础。

方法二：位势法

位势法的原理

设 $u_1, u_2, \ldots, u_m; v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是对应运输问题的 $m+n$ 个约束条件的对偶变量，B 为基矩阵。

方法二：位势法

位势法的原理

设 $u_1, u_2, \ldots, u_m; v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是对应运输问题的 $m+n$ 个约束条件的对偶变量，B 为基矩阵。
由对偶理论可知，

$$C_B B^{-1} = (u_i; v_j)$$

方法二：位势法

位势法的原理

设 $u_1, u_2, \ldots, u_m; v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是对应运输问题的 $m+n$ 个约束条件的对偶变量，B 为基矩阵。

由对偶理论可知，

$$C_B B^{-1} = (u_i; v_j)$$

而每个决策变量 x_{ij} 的系数向量 $P_{ij} = e_i + e_{m+j}$，所以，

$$C_B B^{-1} P_{ij} = u_i + v_j$$

于是检验数为

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

方法二：位势法

位势法的原理

设 $u_1, u_2, \ldots, u_m; v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是对应运输问题的 $m+n$ 个约束条件的对偶变量，B 为基矩阵。
由对偶理论可知，

$$C_B B^{-1} = (u_i; v_j)$$

而每个决策变量 x_{ij} 的系数向量 $P_{ij} = e_i + e_{m+j}$，所以，

$$C_B B^{-1} P_{ij} = u_i + v_j$$

于是检验数为

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

所以，可以根据 $\sigma_B = 0$ 得到 u_i 和 v_j 的值，然后由上式即可得到所有非基变量（空格）的检验数。进而可以判断调运方案是否到达最优。

方法二：位势法

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	
A_2		2		8	5		2	6		10	
A_3	8	1			4		7	3		15	
销量	8			13			9				
v_j											

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	
A_3	8	1			4		7	3		15	
销量	8			13			9				
v_j											

方法二：位势法

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	
A_3	8	1			4		7	3		15	
销量		8			13			9			
v_j					3						

方法二：位势法

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	
销量		8			13			9			
v_j					3						

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	
销量	8			13			9				
v_j					3			4			

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	-1
销量		8			13			9			
v_j					3			4			

方法二：位势法

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	-1
销量		8			13			9			
v_j		2			3			4			

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8		5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	-1
销量		8			13			9			
v_j		2			3			4			

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8	4	5	0
A_2		2		8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	-1
销量	8			13			9				
v_j		2			3			4			

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8	4	5	0
A_2		2	-2	8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4		7	3		15	-1
销量		8			13			9			
v_j		2			3			4			

位势法的过程

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8	4	5	0
A_2		2	-2	8	5		2	6		10	2
A_3	8	1			4	2	7	3		15	-1
销量	8			13			9				
v_j		2			3			4			

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8	4	5	
A_2		2	-2	8	5		2	6		10	
A_3	8	1			4	2	7	3		15	
销量	8			13			9				
v_j											

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	3	5	3			8	4	5	
A_2		2	-2	8	5		2	6		10	
A_3	8	1			4	2	7	3		15	
销量	8			13			9				
v_j											

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	
A_2	2	2		8	5			6		10	
A_3	6	1			4		9	3		15	
销量		8			13			9			
v_j											

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	
A_3	6	1			4		9	3		15	
销量	8			13			9				
v_j											

方法：闭回路调整法

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	
A_3	6	1			4		9	3		15	
销量		8			13			9			
v_j					3						

方法：闭回路调整法

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	
销量		8			13			9			
v_j					3						

方法：闭回路调整法

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	
销量	8			13			9				
v_j		0			3						

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	1
销量	8			13			9				
v_j		0			3						

方法：闭回路调整法

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5		5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	1
销量		8			13			9			
v_j		0			3			2			

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	5	5	3			8		5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	1
销量		8			13			9			
v_j		0			3			2			

方法：闭回路调整法

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	5	5	3			8	6	5	0
A_2	2	2		8	5			6		10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	1
销量	8			13			9				
v_j		0			3			2			

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	5	5	3			8	6	5	0
A_2	2	2		8	5			6	2	10	2
A_3	6	1			4		9	3		15	1
销量		8			13			9			
v_j		0			3			2			

闭回路调整法的过程

	B_1			B_2			B_3			产量	u_i
A_1		5	5	5	3			8	6	5	0
A_2	2	2		8	5			6	2	10	2
A_3	6	1			4	0	9	3		15	1
销量		8			13			9			
v_j		0			3			2			

目录

5 运输问题

- 运输问题的提出
- 运输问题的解法 - 表上作业法
- 运输问题的 Excel 求解
- 运输问题求解时可能遇到的问题

Excel 解法的过程

1. 建立模型
2. 设定参数
3. 求解
4. 解的分析

总结

表上作业法的过程

确定初始方案 ⟹ 最优性检验 ⟹ 方案调整

确定初始方案：
最小元素法
伏格尔法

最优性检验：
闭回路法
位势法

方案调整：
闭回路调整法

表上作业法的适用条件

1. 费用型问题
2. 产销平衡

目录

5 运输问题
- 运输问题的提出
- 运输问题的解法 - 表上作业法
- 运输问题的 Excel 求解
- 运输问题求解时可能遇到的问题

退化问题

- 初始基可行解中出现退化及处理方法
  在寻找初始基可行解的过程，每次都会划去一行或一列（除最后一步外），但有时在中间过程中可能会出现需要同时划去一行和一列的情形，这是运输问题的第一种退化现象。
  处理方法：在所划去的行或列的任意位置添加一个0 方案。

退化问题

- 初始基可行解中出现退化及处理方法
  在寻找初始基可行解的过程，每次都会划去一行或一列（除最后一步外），但有时在中间过程中可能会出现需要同时划去一行和一列的情形，这是运输问题的第一种退化现象。
  处理方法：在所划去的行或列的任意位置添加一个0 方案。
- 迭代过程中出现退化及处理方法
  在进行运量调整时，可能出现多个原来方案点的运量变为 0，这是运输问题的第二种退化现象。
  处理方法：只能去掉一个 0，而保留剩余的 0 作为基变量。

退化问题

- 初始基可行解中出现退化及处理方法
  在寻找初始基可行解的过程，每次都会划去一行或一列（除最后一步外），但有时在中间过程中可能会出现需要同时划去一行和一列的情形，这是运输问题的第一种退化现象。
  处理方法：在所划去的行或列的任意位置添加一个0 方案。
- 迭代过程中出现退化及处理方法
  在进行运量调整时，可能出现多个原来方案点的运量变为 0，这是运输问题的第二种退化现象。
  处理方法：只能去掉一个 0，而保留剩余的 0 作为基变量。
- 两种处理方法的核心就是要保证运输问题的方案点（基变量）要有 $m+n-1$ 个。

产销不平衡问题

- 供过于求
  $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$。增加一个虚拟销地，其需要量为 $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$，且无论由哪个产地向其运输，因实际并不发生，故单位运价为 0；

产销不平衡问题

- 供过于求

  $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$。增加一个虚拟销地，其需要量为 $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$，且无论由哪个产地向其运输，因实际并不发生，故单位运价为 0；
- 供不应求

  $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$。增加一个虚拟产地，其产量为为 $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$，单位运价为 0 。

产销不平衡问题

- 供过于求
  $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$。增加一个虚拟销地，其需要量为 $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$，且无论由哪个产地向其运输，因实际并不发生，故单位运价为 0；
- 供不应求
  $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$。增加一个虚拟产地，其产量为为 $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$，单位运价为 0 。

例

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	1	5	6	15
A_2	3	6	4	2	20
A_3	1	8	2	4	20
销量	10	15	10	20	

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	1	5	6	15
A_2	3	6	4	2	20
A_3	1	8	2	4	20
A_4	0	0	0	0	5

有特殊要求的运输问题

例

甲、乙、丙三个城市每年分别需要煤炭 320、250、350 万吨，由 A、B 两处煤矿负责供应，已知煤炭年供应量为 A–400 万吨，B–450 万吨，由煤矿至各城市的单位运价（万元/万吨）见下表，由于供大于需，经研究平衡决定，甲城市供应量可减少 0–30 万吨，乙城市需要量应全部满足，丙城市供应量不少于 270 万吨。试求将供应量分配完又使总运费为最低的调运方案。

	甲	乙	丙
A	15	18	22
B	21	25	16

有特殊要求的运输问题

解

	甲 1	甲 2	乙	丙 1	丙 2	产量
A	15	15	18	22	22	400
B	21	21	25	16	16	450
C	M	21	M	M	16	30
需求量	290	30	250	270	40	880

Section 6

动态规划

本章内容

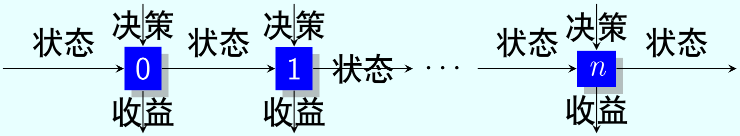
6 动态规划
- 动态规划问题的提出
- 动态规划的基本概念和基本解法
- 动态规划应用举例
- 动态规划与静态规划的关系

目录

6 动态规划
- 动态规划问题的提出
- 动态规划的基本概念和基本解法
- 动态规划应用举例
- 动态规划与静态规划的关系

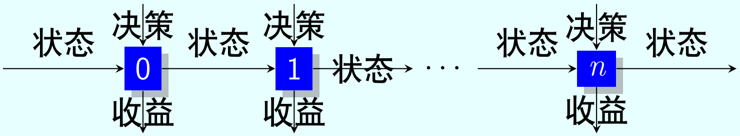
动态规划概述

- 动态规划是运筹学的一个分支，它是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法，大约产生于 50 年代。



动态规划概述

- 动态规划是运筹学的一个分支，它是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法，大约产生于 50 年代。
- Bellman(1951) 等人根据多阶段决策问题的特点，把多阶段决策问题变换为一系列互相联系单阶段问题，然后逐个加以解决，并提出了解决这类问题的“最优性原理”。



多阶段决策过程

- 在生产和科学实验中，有一类活动的过程，由于它的特殊性，可将过程分为若干个互相联系的阶段，在它的每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最好的活动效果。

多阶段决策过程

- 在生产和科学实验中，有一类活动的过程，由于它的特殊性，可将过程分为若干个互相联系的阶段，在它的每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最好的活动效果。
- 因此，各个阶段决策的选取不是任意确定的，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展。

多阶段决策过程

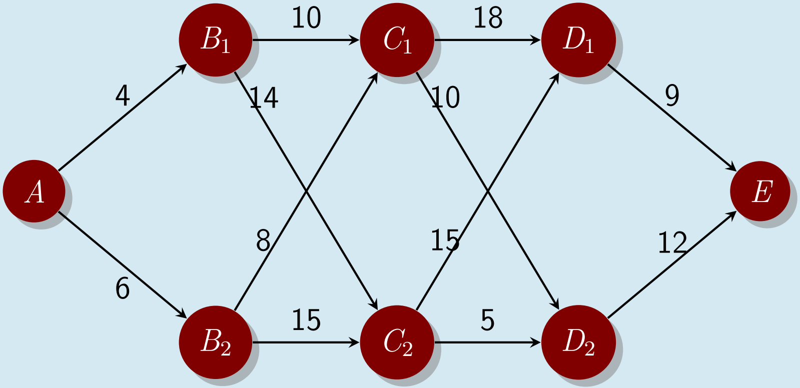
- 在生产和科学实验中，有一类活动的过程，由于它的特殊性，可将过程分为若干个互相联系的阶段，在它的每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最好的活动效果。
- 因此，各个阶段决策的选取不是任意确定的，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展。
- 当各个阶段的决策确定后，就组成一个决策序列，因而也就决定了整个过程的一条活动路线。

多阶段决策过程

- 在生产和科学实验中，有一类活动的过程，由于它的特殊性，可将过程分为若干个互相联系的阶段，在它的每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最好的活动效果。
- 因此，各个阶段决策的选取不是任意确定的，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展。
- 当各个阶段的决策确定后，就组成一个决策序列，因而也就决定了整个过程的一条活动路线。
- 这种把一个问题可看作是一个前后关联具有链状结构的多阶段过程就称为多阶段决策过程。

多阶段决策举例

最短路问题



多阶段决策举例

机器负荷分配问题

某机器可以在高低两种不同的负荷下进行生产，在高负荷下生产进的产量 g_1 与其投入的机器数 u_1 之间的关系为 $g_1 = g(u_1) = 10u_1$，且机器在高负荷下生产的年完好率为 $a = 50\%$。

机器也可以在低负荷下生产，产量函数为 $g_2 = g(u_2) = 6u_2$，完好率为 $b = 80\%$。

假定开始时拥有的完好机器数为 1000 台，要求制定一个 5 年计划，使 5 年内的总产量最大。

目录

6 动态规划

- 动态规划问题的提出
- 动态规划的基本概念和基本解法
- 动态规划应用举例
- 动态规划与静态规划的关系

动态规划的基本概念

1. 阶段 k

动态规划的基本概念

1. 阶段 k
   - 把所给问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便能按一定的次序去求解。

动态规划的基本概念

1. 阶段 k
   - 把所给问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便能按一定的次序去求解。
   - 描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。

1. **阶段 k**

   - 把所给问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便能按一定的次序去求解。
   - 描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。
   - 阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来划分，但要便于问题的过程能转化为多阶段决策的过程。

2. 状态 S_k

2. 状态 S_k

- 状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件，它描述了研究问题过程的状况，也称为不可控因素。

动态规划的基本概念

2. **状态 S_k**

- 状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件，它描述了研究问题过程的状况，也称为不可控因素。
- 描述过程状态的变量称为状态变量，常用 S_k 表示第 k 阶段的状态变量。

动态规划的基本概念

2. **状态 S_k**
   - 状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件，它描述了研究问题过程的状况，也称为不可控因素。
   - 描述过程状态的变量称为状态变量，常用 S_k 表示第 k 阶段的状态变量。
   - 状态的无后效性：如果某阶段状态给定后，则在这阶段以后过程的发展不受这阶段以前各阶段状态的影响。过程的过去的历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展，当前的状态是以往历史的一个总结。

动态规划的基本概念

3. 决策 $u_k(s_k)$

3. **决策 $u_k(s_k)$**
   - 决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定（或选择），从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。

动态规划的基本概念

3. **决策 $u_k(s_k)$**

   - 决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定（或选择），从而确定下一阶段的状态，这种决策称为决策。
   - 描述决策的变量称为决策变量，它可用一个数、一组数或一向量来描述。

3. **决策 $u_k(s_k)$**

- 决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定（或选择），从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。
- 描述决策的变量称为决策变量，它可用一个数、一组数或一向量来描述。
- 常用 $u_k(s_k)$ 表示第 k 阶段当状态处于 s_k 时的决策变量，它是状态变量的函数。

动态规划的基本概念

3. **决策 $u_k(s_k)$**

   - 决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定（或选择），从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。
   - 描述决策的变量称为决策变量，它可用一个数、一组数或一向量来描述。
   - 常用 $u_k(s_k)$ 表示第 k 阶段当状态处于 s_k 时的决策变量，它是状态变量的函数。
   - 在实际问题中，决策变量的取值往往限制在某一范围内，称此范围为允许决策集合，常用 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合。

动态规划的基本概念

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

- 策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

- 策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。
- 由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程（或称为 k 子过程）。

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

- 策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。
- 由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程（或称为 k 子过程）。
- 由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列 $\{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$ 称为 k 子过程策略，简称子策略，记为

$$p_{k,n}(s_k) = \{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$$

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

- 策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。
- 由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程（或称为 k 子过程）。
- 由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列 $\{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$ 称为 k 子过程策略，简称子策略，记为

$$p_{k,n}(s_k) = \{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$$

- 当 $k = 1$ 时，此决策函数序列称为全过程的一个策略，简称为策略，记为

$$p_{1,n}(S_1) = \{u_1(s_1k), \cdots, u_n(s_n)\}$$

4. **策略 $p_{k,n}(s_k)$**

- 策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。
- 由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程（或称为 k 子过程）。
- 由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列 $\{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$ 称为 k 子过程策略，简称子策略，记为

$$p_{k,n}(s_k) = \{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$$

- 当 $k = 1$ 时，此决策函数序列称为全过程的一个策略，简称为策略，记为

$$p_{1,n}(S_1) = \{u_1(s_1 k), \cdots, u_n(s_n)\}$$

- 在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，此范围称为允许策略集合 P，从 P 中找出达到最优效果的策略称为最优策略。

5. **状态转移方程 T_k**

5. **状态转移方程 T_k**

- 状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。

5. **状态转移方程 T_k**

- 状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。
- 若给定第 k 阶段状态变量 s_k 的值，如果该段的决策变量 u_k 一经确定，第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 的值也就完全确定了。

5. **状态转移方程 T_k**

- 状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。
- 若给定第 k 阶段状态变量 s_k 的值，如果该段的决策变量 u_k 一经确定，第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 的值也就完全确定了。
- $s_{k=1}$ 的值随 s_k 和 u_k 的值变化而变化，即

$$s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$$

5. **状态转移方程 T_k**

- 状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。
- 若给定第 k 阶段状态变量 s_k 的值，如果该段的决策变量 u_k 一经确定，第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 的值也就完全确定了。
- $s_{k=1}$ 的值随 s_k 和 u_k 的值变化而变化，即

$$s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$$

- 该式描述了由 k 阶段到 $k+1$ 阶段的状态转移规律，称为状态转移方程，T_k 称为状态转移函数。

动态规划的基本概念

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。
- 它是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，即

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), k = 1, 2, \cdots, n$$

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。
- 它是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，即

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), k = 1, 2, \cdots, n$$

- 动态规划模型的指标函数应具有可分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。
- 它是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，即

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), k = 1, 2, \cdots, n$$

- 动态规划模型的指标函数应具有可分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

- 常见的指标函数的形式有：

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。
- 它是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，即

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), k = 1, 2, \cdots, n$$

- 动态规划模型的指标函数应具有可分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

- 常见的指标函数的形式有：
  - 和：

$$V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$$

6. **指标函数 $V_{k,n}$**

- 用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。
- 它是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，即

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), k = 1, 2, \cdots, n$$

- 动态规划模型的指标函数应具有可分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

- 常见的指标函数的形式有：
  - 和：

$$V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$$

  - 积：

$$V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$$

7. 最优值函数 $f_k(s_k)$

7. **最优值函数 $f_k(s_k)$**

- 指标函数的最优值，称为最优值函数，记为 $f_k(s_k)$。

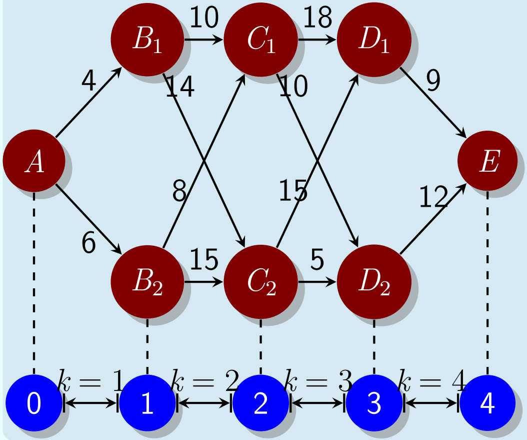
7. **最优值函数 $f_k(s_k)$**

- 指标函数的最优值，称为最优值函数，记为 $f_k(s_k)$。
- 它表示从第 k 阶段的状态 s_k 开始到第 n 阶段的终止状态的过程，采取最优策略所得到的指标函数值。

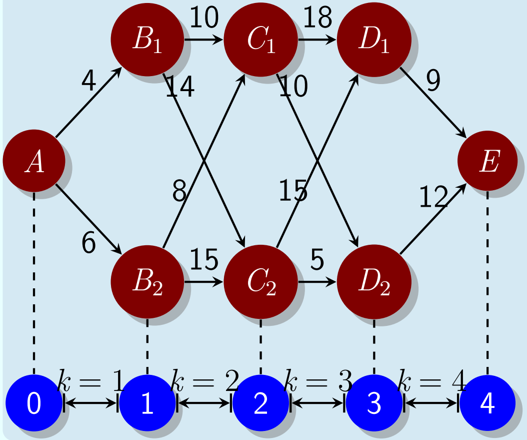
$$f_k(s_k) = \underset{\{u_k,\ldots,u_n\}}{\text{opt}} V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$$

动态规划的基本思想

最短路问题 · 逆序解法



最短路问题 · 逆序解法



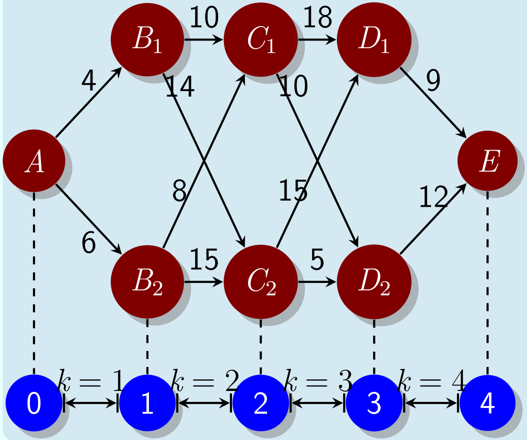
当 $k=4$ 时，由 D_1 到终点 E 只有一条线路，所以

$$f_4(D_1)=9$$

同理

$$f_4(D_2)=12$$

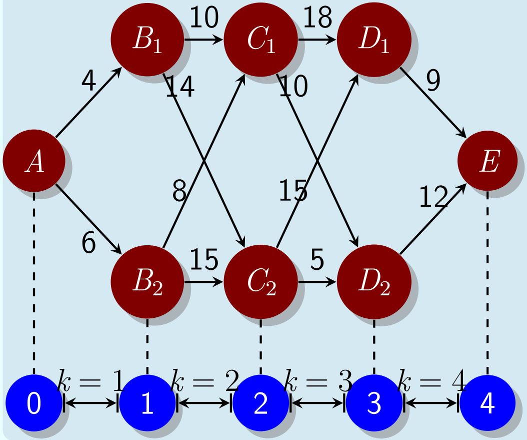
最短路问题 · 逆序解法



当 $k=3$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f_3(C_1) \\
& = \min\left\{\begin{array}{l} d_3(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_1, D_2) + f_4(D_2) \end{array}\right\} \\
& = \min\left\{\begin{array}{c} 18+9 \\ 10+12 \end{array}\right\} \\
& = 22
\end{aligned}
$$

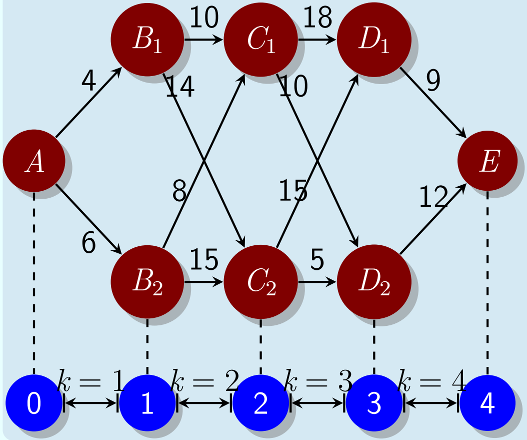
最短路问题 · 逆序解法



当 $k=3$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f_3(C_2) \\
&= \min \begin{Bmatrix} d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \end{Bmatrix} \\
&= \min \begin{Bmatrix} 15 + 9 \\ 5 + 12 \end{Bmatrix} \\
&= 17
\end{aligned}
$$

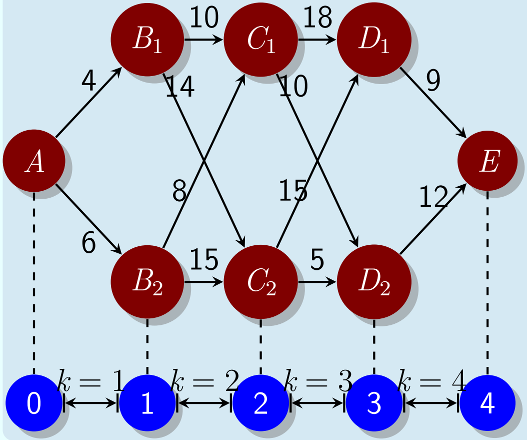
最短路问题 · 逆序解法



当 $k=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f_2(B_1) \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} d_3(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d_3(B_1,C_2)+f_3(C_2) \end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} 10+22 \\ 14+17 \end{array}\right\} \\
&= 31
\end{aligned}
$$

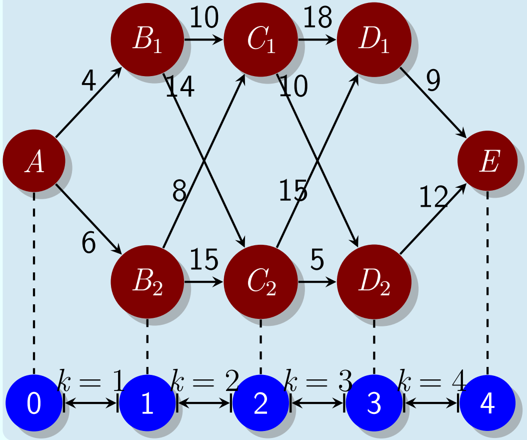
最短路问题 · 逆序解法



当 $k = 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f_2(B_2) \\
&= \min \left\{ \begin{array}{c} d_3(B_2, C_1) + f_3(C_1) \\ d_3(B_2, C_2) + f_3(C_2) \end{array} \right\} \\
&= \min \left\{ \begin{array}{c} 8 + 22 \\ 15 + 17 \end{array} \right\} \\
&= 30
\end{aligned}
$$

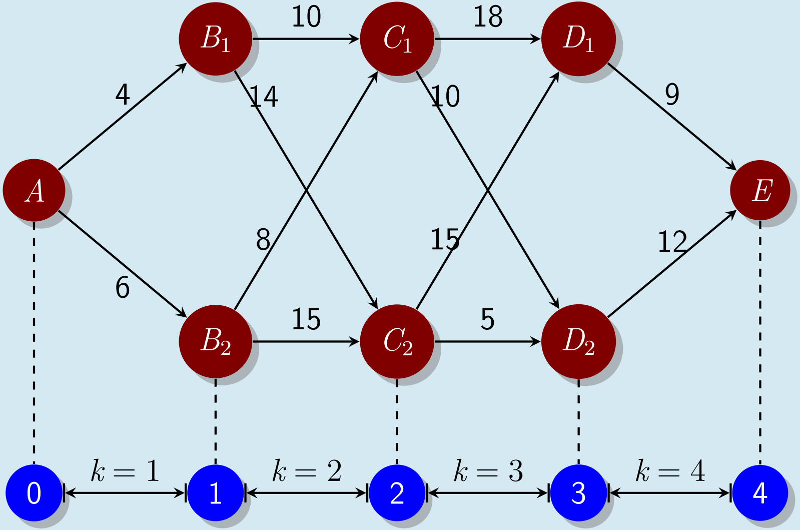
最短路问题 · 逆序解法



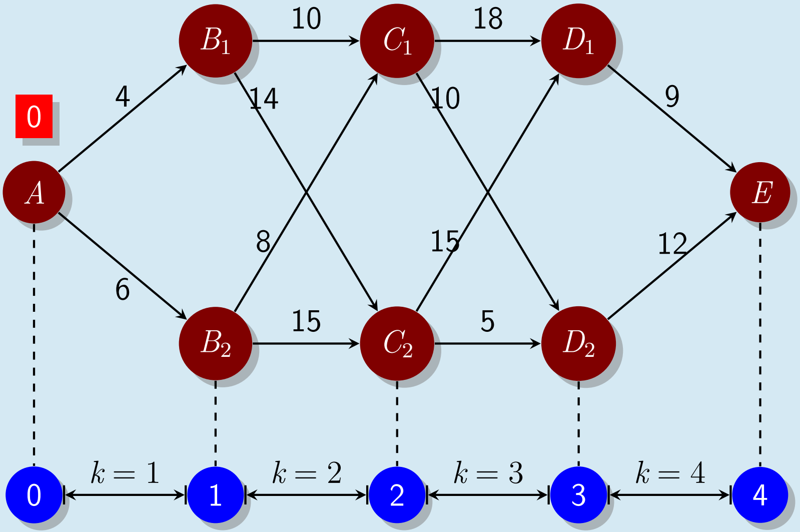
当 $k=1$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f_1(A) \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} d_3(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d_3(A,B_2)+f_2(B_2) \end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} 4+31 \\ 6+30 \end{array}\right\} \\
&= 35
\end{aligned}
$$

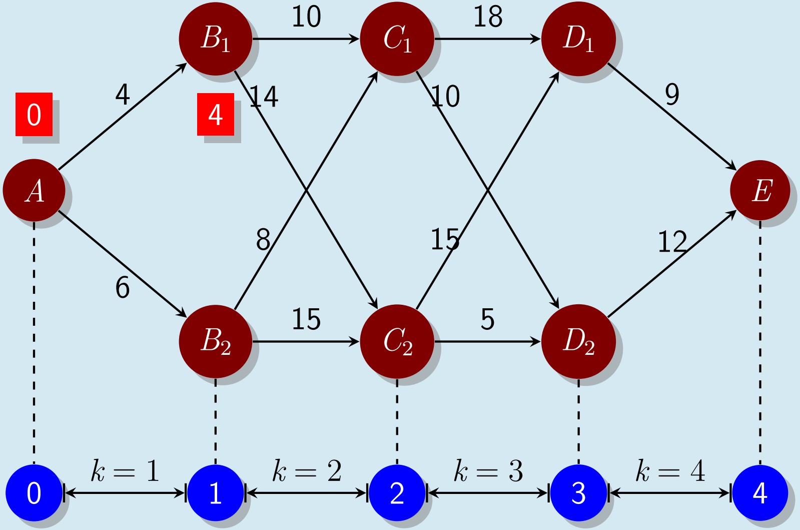
最短路问题 · 顺序解法



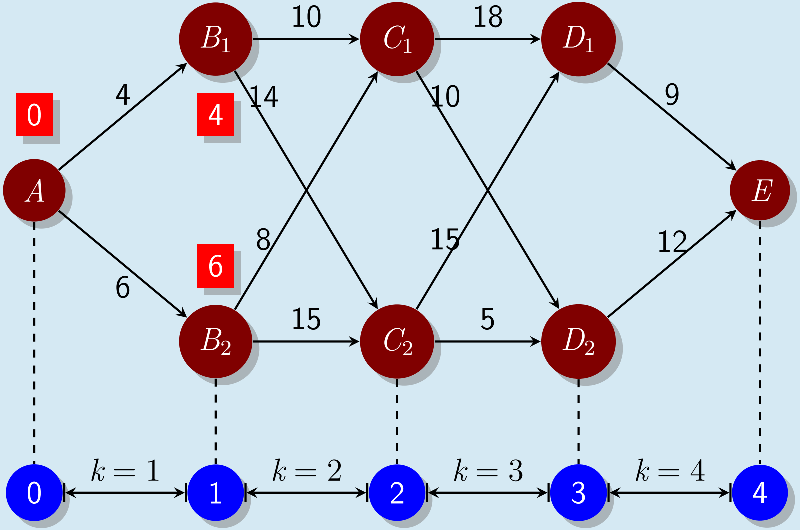
最短路问题 · 顺序解法



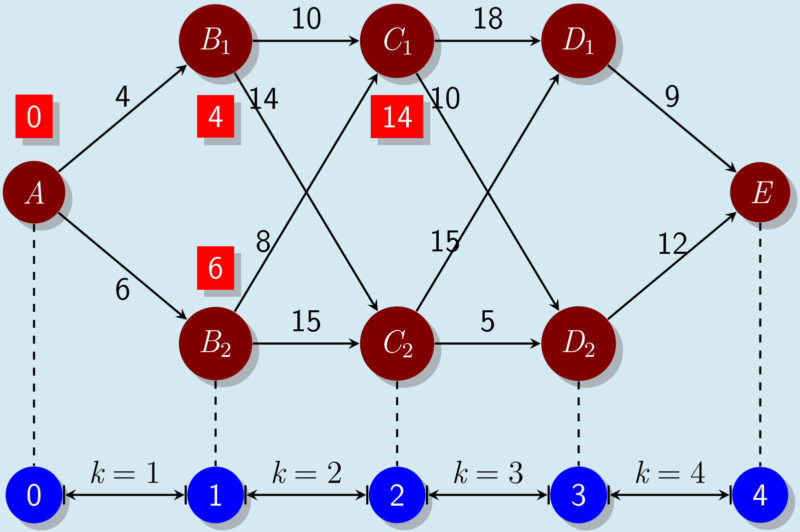
最短路问题 · 顺序解法



最短路问题 · 顺序解法

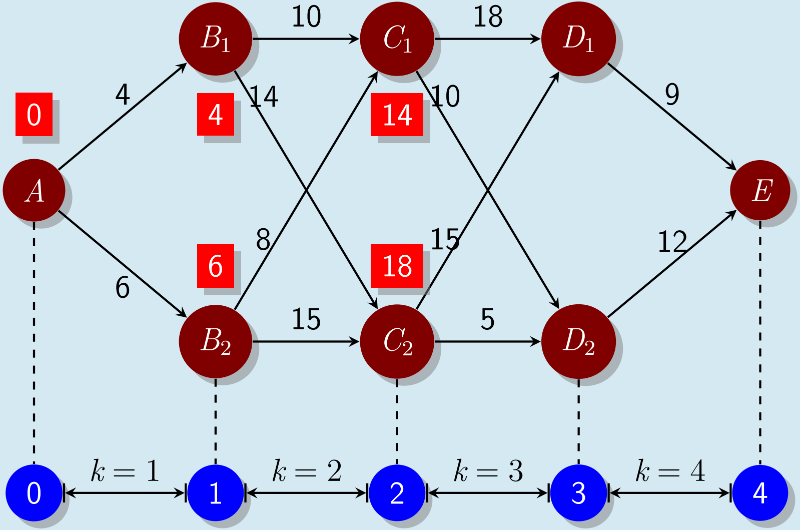


最短路问题 · 顺序解法



B_1
C_1
D_1
A
E
B_2
C_2
D_2
10
18
4
14
10
9
0
4
14
8
15
12
6
6
15
5
$k=1$
$k=2$
$k=3$
$k=4$
0
1
2
3
4

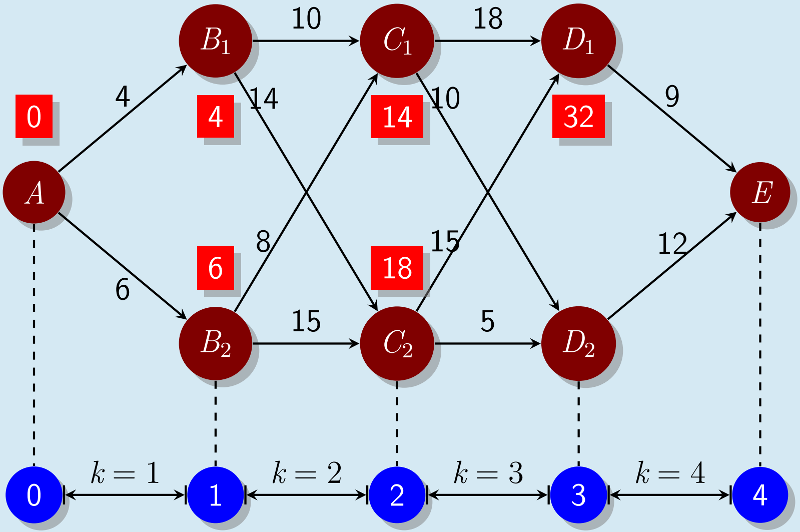
最短路问题 · 顺序解法



0
4
14
6
18
A
B_1
B_2
C_1
C_2
D_1
D_2
E
10
18
4
14
10
9
8
15
6
12
15
5
0
1
2
3
4
$k=1$
$k=2$
$k=3$
$k=4$

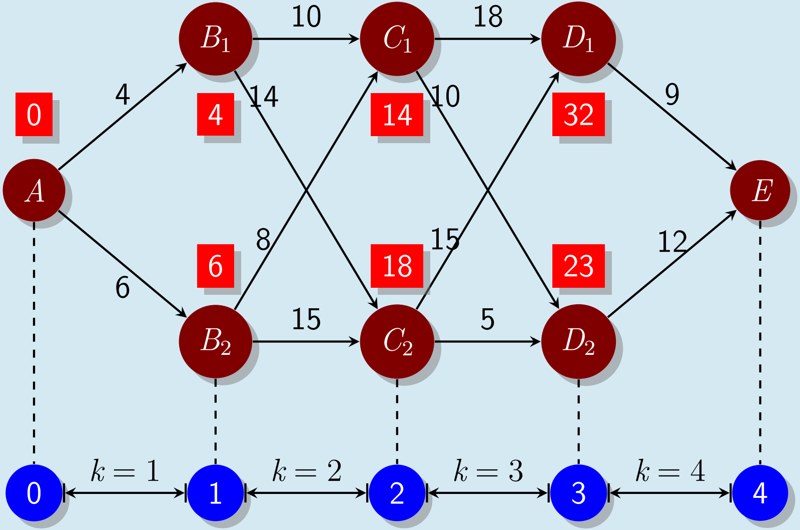
动态规划的基本思想

最短路问题 · 顺序解法



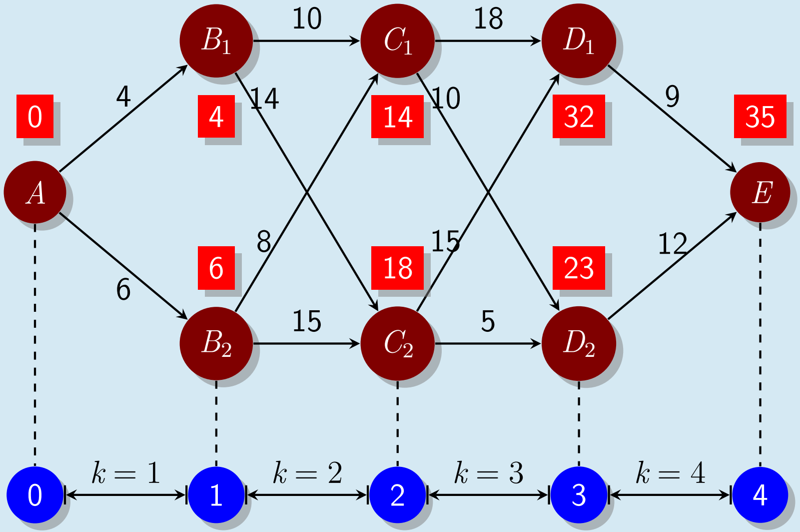
动态规划的基本思想

最短路问题 · 顺序解法



动态规划的基本思想

最短路问题 · 顺序解法



动态规划的基本思想

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；

动态规划的基本思想

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；

动态规划的基本思想

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；

动态规划的基本思想

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段;
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性;
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$;
4. 正确写出状态转移方程;

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；
4. 正确写出状态转移方程；
5. 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系，它应满足三个性质：

动态规划的基本思想

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；
4. 正确写出状态转移方程；
5. 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系，它应满足三个性质：
    - 是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数；

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；
4. 正确写出状态转移方程；
5. 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系，它应满足三个性质：
    - 是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数；
    - 要具有分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

动态规划模型的建立

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又要满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；
4. 正确写出状态转移方程；
5. 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系，它应满足三个性质：
    - 是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数；
    - 要具有分离性，并满足递推关系，即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

    - 函数 $\psi_k(s_k, u_k, V_{k+1,n})$ 对于变量 $V_{k+1,n}$ 要严格单调。

动态规划的基本思想

逆序解法的基本方程

$$
\begin{aligned}
&f_k(s_k) = \operatorname*{opt}_{u_k \in D_k(s_k)} \left[v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \right] \quad k = n, n-1, \cdots, 1 \\
&f_{n+1}(s_{n+1}) = 0
\end{aligned}
$$

动态规划的基本思想

逆序解法的基本方程

$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} \left[v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \right] \quad k = n, n-1, \cdots, 1$$

$$f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$$

顺序解法的基本方程

$$f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k^r(s_{k+1})}{\text{opt}} \left[v_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k) \right] \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$f_0(s_1) = 0$$

动态规划的最优性定理

Theorem (动态规划的最优性定理)

设阶段数为 n 的多阶段决策过程，其阶段编号为 $k=0,1,\cdots,n-1$，允许策略 $p_{0,n-1}^*=(u_0^*,u_1^*,\cdots,u_{n-1}^*)$ 为最优策略的充要条件是对任意一个 k，$0<k<n-1$ 和 $s_0\in S_0$ 有，

$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0,p_{0,n-1}^*) &= \operatorname*{opt}_{p_{0,k-1}\in p_{0,k-1}(s_0)}\{V_{0,k-1}(s_0,p_{0,k-1}) \\ &+ \operatorname*{opt}_{p_{k,n-1}\in p_{k,n-1}(s_k)} V_{k,n-1}(s_k,p_{k,n-1})\} \end{aligned}$$

动态规划的最优性定理

Theorem (动态规划的最优性定理)

设阶段数为 n 的多阶段决策过程，其阶段编号为 $k = 0, 1, \cdots, n-1$，允许策略 $p^*_{0,n-1} = (u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{n-1})$ 为最优策略的充要条件是对任意一个 k，$0 < k < n-1$ 和 $s_0 \in S_0$ 有，

$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0, p^*_{0,n-1}) &= \underset{p_{0,k-1}\in p_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{ V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) \\ &+ \underset{p_{k,n-1}\in p_{k,n-1}(s_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(s_k, p_{k,n-1}) \} \end{aligned}$$

推论

若允许策略 $p^*_{0,n-1}$ 是最优策略，则对任意的 $0 < k < n-1$，它的子策略 $p^*_{k,n-1}$ 对于以 $s^*_k = T_{k-1}(s^*_{k-1}, u^*_{k-1})$ 为起点的 k 到 $n-1$ 子过程来说，必是最优策略。

Example (逆序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Example (逆序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Solution

按问题的变量个数划分阶段，把它看作为一个三阶段决策问题。设状态变量为 s_1, s_2, s_3, s_4，并记 $s_1 = c$；取问题中的变量 x_1, x_2, x_3 为决策变量；各阶段指标函数按乘积方式结合。令最优值函数$f_k(s_k)$ 表示为第 k 阶段的初始状态为 s_k，从 k 阶段到 3 阶段所得到的最大值。

设 $\quad s_3 = x_3, s_3 + x_2 = s_2, s_2 + x_1 = s_1 = c$

则有 $\quad x_3 = s_3, 0 \leqslant x_2 \leqslant s_2, 0 \leqslant x_1 \leqslant s_1 = c$

Example (逆序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

当 $k = 3$ 时，

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 = s_3}(x_3) = s_3, x_3^* = s_3$$

Example (逆序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

当 $k = 3$ 时，

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 = s_3}(x_3) = s_3, x_3^* = s_3$$

当 $k = 2$ 时，

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}[x_2^2 \cdot f_3(s_3)] = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}[x_2^2(s_2 - x_2)] = \frac{4}{27}s_2^3$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}s_2$$

动态规划的最优性原理

Example (逆序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant s_1} [x_1 \cdot f_2(s_2)] = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant s_1} [x_1 \cdot \frac{4}{27}(s_1 - x_1)^3] = \frac{1}{64} s_1^4$$

$$x_1^* = \frac{1}{4} s_1$$

动态规划的最优性原理

Example (逆序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Solution

$$x_1^* = \frac{1}{4} s_1 = \frac{1}{4} c, f_1(c) = \frac{1}{64} c^4 = \max \quad z$$

动态规划的最优性原理

Example (逆序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

$$x_1^* = \frac{1}{4}s_1 = \frac{1}{4}c, f_1(c) = \frac{1}{64}c^4 = \max \quad z$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}s_2 = \frac{1}{2}c, f_2(s_2) = \frac{1}{16}c^3$$

Example (逆序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Solution

$$x_1^* = \frac{1}{4}s_1 = \frac{1}{4}c, f_1(c) = \frac{1}{64}c^4 = \max \quad z$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}s_2 = \frac{1}{2}c, f_2(s_2) = \frac{1}{16}c^3$$

$$x_3^* = s_3 = \frac{1}{4}c, f_3(s_3) = \frac{1}{4}c$$

Example (顺序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

动态规划的最优性原理

Example (顺序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

设 $s_1 = c$，令最优值函数 $f_k(s_{k+1})$ 表示第 k 阶段末的结束状态为 s_{k+1} ，从 *1* 阶段到 k 阶段的最大值。

设 $\quad s_2 = x_1, s_2 + x_2 = s_3, s_3 + x_3 = s_4 = c$

则有 $\quad x_1 = s_2, 0 \leqslant x_2 \leqslant s_3, 0 \leqslant x_3 \leqslant s_4$

动态规划的最优性原理

Example (顺序解法)

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Solution

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2}(s_1) = x_2, x_1^* = s_2$$

动态规划的最优性原理

Example (顺序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2}(s_1) = x_2, x_1^* = s_2$$

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_3} [x_2^2 \cdot (s_3 - x_2)] = \frac{4}{27} x_3^3, x_2^* = \frac{2}{3} s_3$$

Example (顺序解法)

$$
\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
$$

Solution

$$
f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2}(s_1) = x_2, x_1^* = s_2
$$

$$
f_2(s_3) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_3}[x_2^2 \cdot (s_3 - x_2)] = \frac{4}{27}x_3^3, x_2^* = \frac{2}{3}s_3
$$

$$
f_3(s_4) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_4}[x_3 \cdot \frac{4}{27}(s_4 - x_3)^3] = \frac{1}{64}s_4^4, x_3^* = \frac{1}{4}s_3
$$

动态规划的最优性原理

Example (顺序解法)

$$\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c & (c > 0) \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Solution

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2}(s_1) = x_2, x_1^* = s_2$$

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_3}[x_2^2 \cdot (s_3 - x_2)] = \frac{4}{27}x_3^3, x_2^* = \frac{2}{3}s_3$$

$$f_3(s_4) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_4}[x_3 \cdot \frac{4}{27}(s_4 - x_3)^3] = \frac{1}{64}s_4^4, x_3^* = \frac{1}{4}s_3$$

$$x_1^* = \frac{1}{4}c, x_2^* = \frac{1}{2}c, x_3^* = \frac{1}{4}c; \max z = \frac{1}{64}c^4$$

动态规划的最优性原理

练习

用动态规划方法解下面问题：

$$\max \quad F = 4x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 12$$
$$\text{s.t}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 9 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

动态规划的最优性原理

练习

用动态规划方法解下面问题：

$$\max \quad F = 4x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 12$$
$$\text{s.t} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 9 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

答案

$$x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 9; \max F = 174$$

目录

6 动态规划

- 动态规划问题的提出
- 动态规划的基本概念和基本解法
- 动态规划应用举例
- 动态规划与静态规划的关系

动态规划应用举例

一维资源分配问题

设有总量为 a 的某种原料，用于生产 n 种产品。假设用于生产第 k 种产品生产的数量为 x_k，并获得收益 $\varphi_k(x_k)$，问应该如何分配 n 种产品的资源使用量使得总收益最大。

动态规划应用举例

一维资源分配问题

设有总量为 a 的某种原料，用于生产 n 种产品。假设用于生产第 k 种产品生产的数量为 x_k，并获得收益 $\varphi_k(x_k)$，问应该如何分配 n 种产品的资源使用量使得总收益最大。

Solution (解决思路)

k 表示生产第 k 种产品的决策阶段；
x_k 表示投入到第 k 种产品生产的资源数；
s_k 表示第 k 阶段开始时拥有的资源数量，则状态转移方程为 $s_{k+1} = s_k - x_k$；
$\varphi_k(x_k)$ 表示生产第 k 种产品所获得的收益；
$f_k(s_k)$ 表示从第 k 种产品开始一直到第 n 种产品生产完的最大总收益；

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{\varphi_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Example

某企业现有资金 5000 万元准备对 A，B，C 三个项目投资。假设对各项目的投资额只能取 1000 万元的整数倍，各种情况下的利润（单位：万元）如下表所示。问对三个项目的投资额各为多少时，总利润为最大？

投资额 \ 项目	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

一维资源分配问题

Solution

设 $k=1,2,3$ 分别表示对投资项目 A，B，C 的投资阶段；
s_k 表示投资到第 k 个项目时所拥有的资金总数；
x_k 表示对第 k 个项目的投资额，$0 \leqslant x_k \leqslant s_k$，状态转移方程为 $s_{k+1}=s_k-x_k$；
$d_k(s_k,x_k)$ 表示第 k 阶段开始状态为 s_k，采取投资额 x_k 时的直接利润；
$f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段开始状态为 s_k，一直到对所有项目投资完的最大总利润；

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}\{d_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

一维资源分配问题

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{d_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{d_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

$k = 3$ 时，

$S_3 \backslash x_3$	0	1	2	3	4	5	x_3^*	$f_3^*(S_3)$
0	0						0	0
1	0	80					1	80
2	0	80	180				2	180
3	0	80	180	300			3	300
4	0	80	180	300	420		4	420
5	0	80	180	300	420	420	4,5	420

一维资源分配问题

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{d_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

$k = 2$ 时，

	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

$S_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	x_2^*	$f_2^*(S_2)$
0	0						0	0
1	80	100					1	100
2	180	180	200				2	200
3	300	280	280	300			0,3	300
4	420	400	380	380	400		0	420
5	420	520	500	480	480	400	1	520

一维资源分配问题

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}\{d_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

$k=1$ 时，

$S_1\backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	x_1^*	$f_1^*(S_1)$
5	520	460	500	520	500	380	0,3	520

一维资源分配问题

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}\{d_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

	A	B	C
0	0	0	0
1	40	100	80
2	200	200	180
3	320	300	300
4	400	400	420
5	380	400	420

$k = 1$ 时，

$S_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	x_1^*	$f_1^*(S_1)$
5	520	460	500	520	500	380	0,3	520

可以得到最优分配方案为：
A-0，B-1，C-4 或 A-3,B-2,C-0，最大利润为 520 万元。

一维资源分配问题

Example (机器负荷分配问题)

某种机器可在高低两种不同的负荷下进行生产，机器在高负荷下生产的产量函数为 $g = 8u_1$，其中 u_1 为投入生产的机器数量，年完好率为 $a = 0.7$；在低负荷下生产的产量函数为 $h = 5y$，其中 y 为投入生产的机器数量，年完好率为 $b = 0.9$。
假定开始生产时完好的机器数量 $s_1 = 1000$ 台，问每年如何安排机器在高、低负荷下的生产，使在五年内生产的产品总产量最高。

动态规划模型的建立

1. 设阶段序数 k 表示年度。
2. 状态变量 s_k 为第 k 年度初拥有的完好机器数量，同时也是第 $k-1$ 年度末时的完好机器数量。

一维资源分配问题

动态规划模型的建立

1. 设阶段序数 k 表示年度。
2. 状态变量 s_k 为第 k 年度初拥有的完好机器数量，同时也是第 $k-1$ 年度末时的完好机器数量。
3. 决策变量 u_k 为第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，那么 $s_k - u_k$ 为该年度中分配在低负荷下生产的机器数量。

动态规划模型的建立

1. 设阶段序数 k 表示年度。
2. 状态变量 s_k 为第 k 年度初拥有的完好机器数量，同时也是第 $k-1$ 年度末时的完好机器数量。
3. 决策变量 u_k 为第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，那么 s_k-u_k 为该年度中分配在低负荷下生产的机器数量。
4. 状态转移方程为：

$$s_{k+1}=au_k+b(s_k-u_k)=0.7u_k+0.9(s_k-u_k),k=1,2,\cdots,5$$

k 阶段的允许决策集为：$D_k(s_k)=\{u_k|0\leqslant u_k\leqslant s_k\}$

一维资源分配问题

动态规划模型的建立

1. 设阶段序数 k 表示年度。
2. 状态变量 s_k 为第 k 年度初拥有的完好机器数量，同时也是第 $k-1$ 年度末时的完好机器数量。
3. 决策变量 u_k 为第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，那么 $s_k - u_k$ 为该年度中分配在低负荷下生产的机器数量。
4. 状态转移方程为：

$$s_{k+1} = au_k + b(s_k - u_k) = 0.7u_k + 0.9(s_k - u_k), k = 1, 2, \cdots, 5$$

   k 阶段的允许决策集为：$D_k(s_k) = \{u_k | 0 \leqslant u_k \leqslant s_k\}$
5. 第 k 年度的产量为：$v_k(s_k, u_k) = 8u_k + 5(s_k - u_k)$。

动态规划模型的建立

1. 设阶段序数 k 表示年度。
2. 状态变量 s_k 为第 k 年度初拥有的完好机器数量，同时也是第 $k-1$ 年度末时的完好机器数量。
3. 决策变量 u_k 为第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，那么 $s_k - u_k$ 为该年度中分配在低负荷下生产的机器数量。
4. 状态转移方程为：

$$s_{k+1} = au_k + b(s_k - u_k) = 0.7u_k + 0.9(s_k - u_k), k = 1, 2, \cdots, 5$$

   k 阶段的允许决策集为：$D_k(s_k) = \{u_k | 0 \leqslant u_k \leqslant s_k\}$
5. 第 k 年度的产量为：$v_k(s_k, u_k) = 8u_k + 5(s_k - u_k)$。
6. 基本方程为：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{u_k \in D_k(s_k)} \{8u_k = 5(s_k - u_k) + f_{k+1}[0.7u_k + 0.9(s_k - u_k)]\} \\ \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ f_6(s_6) = 0 \end{cases}$$

Solution

$k = 5$

$$
\begin{aligned}
f_5(s_5) &= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{8u_5 + 5(s_5 - u_5) + f_6[0.7u_5 + 0.9(s_5 - u_5)]\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{8u_5 + 5(s_5 - u_5)\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{3u_5 + 5s_5\}
\end{aligned}
$$

Solution

$k = 5$

$$
\begin{aligned}
f_5(s_5) &= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{8u_5 + 5(s_5 - u_5) + f_6[0.7u_5 + 0.9(s_5 - u_5)]\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{8u_5 + 5(s_5 - u_5)\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{3u_5 + 5s_5\}
\end{aligned}
$$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

一维资源分配问题

Solution

$k=5$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
f_4(s_4) &= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + f_5[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\
&= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + 8[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\
&= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{13.6u_4 + 12.2(s_4 - u_4)\} \\
&= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{1.4u_4 + 12.2s_4\}
\end{aligned}$$

一维资源分配问题

Solution

$k = 5$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

$k = 4$

$$\begin{aligned} f_4(s_4) &= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + f_5[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\ &= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + 8[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\ &= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{13.6u_4 + 12.2(s_4 - u_4)\} \\ &= \max_{0\leqslant u_4\leqslant s_4} \{1.4u_4 + 12.2s_4\} \end{aligned}$$

$$u_4^* = s_4, f_4(s_4) = 13.6s_4$$

一维资源分配问题

Solution

$k = 5$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

$k = 4$

$$u_4^* = s_4, f_4(s_4) = 13.6s_4$$

$k = 3$

$$u_3^* = s_3, f_3(s_3) = 17.5s_3$$

Solution

$k=5$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

$k=4$

$$u_4^* = s_4, f_4(s_4) = 13.6s_4$$

$k=3$

$$u_3^* = s_3, f_3(s_3) = 17.5s_3$$

$k=2$

$$u_2^* = 0, f_2(s_2) = 20.8s_2$$

一维资源分配问题

Solution

$k = 5$

$$u_5^* = s_5, f_5(s_5) = 8s_5$$

$k = 4$

$$u_4^* = s_4, f_4(s_4) = 13.6s_4$$

$k = 3$

$$u_3^* = s_3, f_3(s_3) = 17.5s_3$$

$k = 2$

$$u_2^* = 0, f_2(s_2) = 20.8s_2$$

$k = 1$

$$u_1^* = 0, f_1(s_1) = 23.7s_1 = 23700$$

一维资源分配问题

练习

某公司打算向它的三个营业区增设六个销售店，每个营业区至少增设一个。从各区赚取的利润与增设的销售店个数有关，其数据如下：

销售店增加数	A 区利润	B 区利润	C 区利润
0	100	200	150
1	200	210	160
2	280	220	170
3	330	225	180
4	340	230	200

试求各区应该分配几个增设的销售店，才能使总利润最大？其值是多少？

二维资源分配问题

Example (问题描述)

设有两种原料，数量各为 a 和 b 单位，需要分配用于生产 n 种产品。如果第一种原料以数量 x_i 为单位，第二种原料以数量 y_i 分单位，用于生产第 i 种产品，其收入为 $g_i(x_i, y_i)$。问应如何分配这两种原料于 n 种产品的生产使总收入最大？

二维资源分配问题

Example (问题描述)

设有两种原料，数量各为 a 和 b 单位，需要分配用于生产 n 种产品。如果第一种原料以数量 x_i 为单位，第二种原料以数量 y_i 分单位，用于生产第 i 种产品，其收入为 $g_i(x_i, y_i)$。问应如何分配这两种原料于 n 种产品的生产使总收入最大？

静态规划模型

$$\begin{cases} \max[g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \cdots + g_n(x_n, y_n)] \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = b \\ x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0 \end{cases}$$

二维资源分配问题

Solution (动态规划模型)

状态变量 (x, y)

x 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第一种原料的单位数量。
y 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第二种原料的单位数量。

二维资源分配问题

Solution (动态规划模型)

状态变量 (x, y)

x 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第一种原料的单位数量。
y 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第二种原料的单位数量。

决策变量 (x_k, y_k)

x_k 表示分配给第 k 种产品用的第一种原料的单位数量。
y_k 表示分配给第 k 种产品用的第二种原料的单位数量。

二维资源分配问题

Solution (动态规划模型)

状态变量 (x, y)

x 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第一种原料的单位数量。
y 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的第二种原料的单位数量。

决策变量 (x_k, y_k)

x_k 表示分配给第 k 种产品用的第一种原料的单位数量。
y_k 表示分配给第 k 种产品用的第二种原料的单位数量。

状态转移关系

$$\tilde{x} = x - x_k$$
$$\tilde{y} = y - y_k$$

二维资源分配问题

Solution (动态规划模型)

允许决策集合

$$D_k(x, y) = \{u_k | 0 \leqslant x_k \leqslant x, 0 \leqslant y_k \leqslant y\}$$

二维资源分配问题

Solution (动态规划模型)

允许决策集合

$$D_k(x, y) = \{u_k | 0 \leqslant x_k \leqslant x, 0 \leqslant y_k \leqslant y\}$$

基本方程

$$\begin{cases} f_k(x, y) = \max\limits_{\substack{0\leqslant x_k\leqslant x \\ 0\leqslant y_k\leqslant y}} [g_k(x_k, y_k) + f_{k+1}(x - x_k, y - y_k)] \\ \qquad k = n-1, \cdots, 1 \\ f_n(x, y) = g_n(x, y) \end{cases}$$

Example

地质仪器厂生产某种化学试验鉴定仪用于化学探矿。预计该产品在今后 4 个月的产品成本及销售量如下表所示，每月每单位的存贮费为 2 元。该工厂每月最大的生产能力为 100 台，并以 10 为单位的倍数生产和存贮，月末供货。要求库存在整个计划期初和期末为 0，试安排月生产计划使产品总成本为最低。

月份	阶段	产品单位成本 (元)	月销售量 (个)
1	1	70	60
2	2	72	70
3	3	80	120
4	4	76	60

生产计划问题

Solution (模型建立)

1. 设 $k = 1, 2, 3, 4$ 表示该 4 个月的决策阶段；

Solution (模型建立)

1. 设 $k = 1, 2, 3, 4$ 表示该 4 个月的决策阶段;
2. c_k 表示第 k 月的单位生产成本;

生产计划问题

Solution (模型建立)

1. 设 $k = 1, 2, 3, 4$ 表示该 4 个月的决策阶段;
2. c_k 表示第 k 月的单位生产成本;
3. x_k 表示第 k 月的生产量，$0 \leqslant x_k \leqslant 100$，$y_k$ 表示第 k 月的销售量;

生产计划问题

Solution (模型建立)

1. 设 $k=1,2,3,4$ 表示该 4 个月的决策阶段；
2. c_k 表示第 k 月的单位生产成本；
3. x_k 表示第 k 月的生产量，$0 \leqslant x_k \leqslant 100$，$y_k$ 表示第 k 月的销售量；
4. s_k 表示第 k 月开始时拥有的库存量，则状态转移方程为：$s_{k+1} = s_k + x_k - y_k$；

Solution (模型建立)

1. 设 $k = 1, 2, 3, 4$ 表示该 4 个月的决策阶段；
2. c_k 表示第 k 月的单位生产成本；
3. x_k 表示第 k 月的生产量，$0 \leqslant x_k \leqslant 100$，$y_k$ 表示第 k 月的销售量；
4. s_k 表示第 k 月开始时拥有的库存量，则状态转移方程为：$s_{k+1} = s_k + x_k - y_k$；
5. $d_k(s_k, x_k)$ 表示第 k 月的总成本，则 $d_k(s_k, x_k) = c_k x_k + 2s_k$；

生产计划问题

Solution (模型建立)

1. 设 $k=1,2,3,4$ 表示该 4 个月的决策阶段；
2. c_k 表示第 k 月的单位生产成本；
3. x_k 表示第 k 月的生产量，$0 \leqslant x_k \leqslant 100$，$y_k$ 表示第 k 月的销售量；
4. s_k 表示第 k 月开始时拥有的库存量，则状态转移方程为：$s_{k+1}=s_k+x_k-y_k$；
5. $d_k(s_k,x_k)$ 表示第 k 月的总成本，则 $d_k(s_k,x_k)=c_kx_k+2s_k$；
6. $f_k(s_k)$ 表示由第 k 月开始到第 4 月末的最小总成本，则

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\min\limits_{0\leqslant x_k\leqslant 100}\{c_kx_k+2s_k+f_{k+1}(s_{k+1})\}, k=1,2,3,4 \\ f_5(s_5)=0 \end{cases}$$

生产计划问题

Solution (求解)

$\boxed{k = 4}$

生产计划问题

Solution (求解)

$k=4$

$$y_4 = s_4 + x_4 = 60, s_4 = 0, 10, 20, 30, 40, 50$$

生产计划问题

Solution (求解)

$k=4$

$$y_4 = s_4 + x_4 = 60, s_4 = 0, 10, 20, 30, 40, 50$$

$$\begin{aligned} f_4(s_4) &= \min_{0\leqslant x_4\leqslant 100}\{c_4x_4 + 2s_4 + f_5(s_5)\} \\ &= \min_{0\leqslant x_4\leqslant 100}\{76x_4 + 2s_4\} \end{aligned}$$

Solution (求解)

$k = 4$

$$y_4 = s_4 + x_4 = 60, s_4 = 0, 10, 20, 30, 40, 50$$

$$\begin{aligned} f_4(s_4) &= \min_{0 \leqslant x_4 \leqslant 100} \{c_4 x_4 + 2s_4 + f_5(s_5)\} \\ &= \min_{0 \leqslant x_4 \leqslant 100} \{76x_4 + 2s_4\} \end{aligned}$$

s_4	x_4^*	$f_4(s_4)$
0	60	$76 \times 60 + 2 \times 0 = 4560$
10	50	$76 \times 50 + 2 \times 10 = 3820$
20	40	$76 \times 40 + 2 \times 20 = 3080$
30	30	$76 \times 30 + 2 \times 30 = 2340$
40	20	$76 \times 20 + 2 \times 40 = 1600$
50	10	$76 \times 10 + 2 \times 50 = 860$

生产计划问题

Solution (求解)

$k = 3$

生产计划问题

Solution (求解)

$k = 3$

$$s_3 = \{20, 30, 40, 50, 60, 70\}, x_3 = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

生产计划问题

Solution (求解)

$k=3$

$$s_3=\{20,30,40,50,60,70\},\ x_3=\{50,60,70,80,90,100\}$$

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \min_{50\leqslant x_3\leqslant 100}\{c_3x_3+2s_3+f_4(s_4)\} \\ &= \min_{50\leqslant x_3\leqslant 100}\{80x_3+2s_3+f_4(s_4)\} \end{aligned}$$

生产计划问题

Solution (求解)

$k=3$

$$s_3=\{20,30,40,50,60,70\},\ x_3=\{50,60,70,80,90,100\}$$

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \min_{50\leqslant x_3\leqslant 100}\{c_3x_3+2s_3+f_4(s_4)\} \\ &= \min_{50\leqslant x_3\leqslant 100}\{80x_3+2s_3+f_4(s_4)\} \end{aligned}$$

$s_3\backslash x_3$	50	60	70	80	90	100	x_3^*	$f_3(s_3)$
20						12600	100	12600
30					11820	11880	90	11820
40				11040	11100	11160	80	11040
50			10260	10320	10380	10440	70	10260
60		9480	9540	9600	9660	9720	60	9480
70	8700	8760	8820	8880	8940	9000	50	8700

生产计划问题

Solution (求解)

$k = 2$

$s_2 \backslash x_2$	50	60	70	80	90	100	x_2^*	$f_2(s_2)$
0					10980	19020	100	19020
10				18380	18320	18260	100	18260
20			17680	17620	17560	17500	100	17500
30		16980	16920	16860	16800	16740	100	16740
40	16280	16220	16160	16100	16040	15980	100	15980

生产计划问题

Solution (求解)

$k = 1$

$s_1 \backslash x_1$	60	70	80	90	100	x_1^*	$f_1(s_1)$
0	23220	23160	23100	23040	22980	100	22980

Solution (求解)

$k = 1$

$s_1 \backslash x_1$	60	70	80	90	100	x_1^*	$f_1(s_1)$
0	23220	23160	23100	23040	22980	100	22980

阶段 k	1	2	3	4
需求量 d_k	60	70	120	60
生产量 x_k	100	100	50	60
库存量 v_k	0	40	70	0

Example

某厂生产上需要在近五周内必须采购一批原料，而估计在未来五周内有波动，其浮动价格和概率如下表所示。试求在哪一周以什么价格购入，使其采购价格的数学期望值最小，并求出期望值。

单价	概率
500	0.3
600	0.3
700	0.4

不确定性采购问题

Example

某厂生产上需要在近五周内必须采购一批原料，而估计在未来五周内有波动，其浮动价格和概率如下表所示，试求

单价	概率

Solution

y_k 为状态变量，表示第 k 周的实际价格；
$x_k = 0$或1，决策变量，$x_k = 1$ 表示第 k 周决策采购；$x_k = 0$ 表示第 k 决定等待；
y_{kE} 表示第 k 周决定等待，而在以后采取最优决策时采购价格的期望值；
$f_k(y_k)$ 表示第 k 周实际价格为 y_k 时，从第 k 周至第 5 周采取最优决策所得到的最小期望值。

$$\begin{cases} f_k(y_k) = \min\{y_k, y_{kE}\}, & y_k \in s_k = \{500, 600, 700\} \\ f_5(y_5) = y_5, & y_5 \in s_5 = \{500, 600, 700\} \end{cases}$$

不确定性采购问题

Solution

k=5

$$f_5(y_5) = y_5 \Longrightarrow f_5(y_5) = \begin{cases} 500, & y_5 = 500 \\ 600, & y_5 = 600 \\ 700, & y_5 = 700 \end{cases}$$

不确定性采购问题

Solution

$k=5$

$$f_5(y_5) = y_5 \Longrightarrow f_5(y_5) = \begin{cases} 500, & y_5 = 500 \\ 600, & y_5 = 600 \\ 700, & y_5 = 700 \end{cases}$$

即在第五周时，若所需的原料尚未买入，则无论市场价格如何，都必须采购，不能再等。

Solution

k=4

$$
\begin{aligned}
y_{4E} &= 0.3f_5(500) + 0.3f_5(600) + 0.4f_5(700) \\
&= 0.3 \times 500 + 0.3 \times 600 + 0.4 \times 700 \\
&= 610
\end{aligned}
$$

不确定性采购问题

Solution

k=4

$$\begin{aligned} y_{4E} &= 0.3f_5(500) + 0.3f_5(600) + 0.4f_5(700) \\ &= 0.3 \times 500 + 0.3 \times 600 + 0.4 \times 700 \\ &= 610 \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} f_4(y_4) &= \min_{y_4 \in s_4} \{y_4, y_{4E}\} = \min_{y_4 \in s_4} \{y_4, 610\} \\ &= \begin{cases} 500 & y_4 = 500 \\ 600 & y_4 = 600 \\ 610 & y_4 = 700 \end{cases} \end{aligned}$$

不确定性采购问题

Solution

k=4

$$
\begin{aligned}
y_{4E} &= 0.3f_5(500) + 0.3f_5(600) + 0.4f_5(700) \\
&= 0.3 \times 500 + 0.3 \times 600 + 0.4 \times 700 \\
&= 610
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
f_4(y_4) &= \min_{y_4 \in s_4}\{y_4, y_{4E}\} = \min_{y_4 \in s_4}\{y_4, 610\} \\
&= \begin{cases} 500 & y_4 = 500 \\ 600 & y_4 = 600 \\ 610 & y_4 = 700 \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以第 4 周的最优决策为:

$$
x_4 = \begin{cases} 1(\text{采购}) & y_4 = 500\text{或}600 \\ 0(\text{等待}) & y_4 = 700 \end{cases}
$$

Solution

k=3

$$f_3(y_3) = \min_{y_3 \in s_3}\{y_3, y_{3E}\} = \min_{y_3 \in s_3}\{y_3, 574\}$$

$$= \begin{cases} 500 & y_3 = 500 \\ 574 & y_3 = 600\text{或}700 \end{cases}$$

决策为:

$$x_3 = \begin{cases} 1 & y_3 = 500 \\ 0 & y_3 = 600\text{或}700 \end{cases}$$

Solution

k=2

$$
\begin{aligned}
f_2(y_2) &= \min_{y_2 \in s_2}\{y_2, y_{2_E}\} = \min_{y_2 \in s_2}\{y_2, 551.8\} \\
&= \begin{cases} 500 & y_2 = 500 \\ 551.8 & y_2 = 600\text{或}700 \end{cases}
\end{aligned}
$$

决策为:

$$
x_2 = \begin{cases} 1 & y_2 = 500 \\ 0 & y_2 = 600\text{或}700 \end{cases}
$$

不确定性采购问题

Solution

k=1

$$
\begin{aligned}
f_1(y_1) &= \min_{y_1 \in s_1}\{y_1, y_{1E}\} = \min_{y_1 \in s_1}\{y_1, 536.3\} \\
&= \begin{cases} 500 & y_1 = 500 \\ 536.3 & y_1 = 600\text{或}700 \end{cases}
\end{aligned}
$$

决策为:

$$
x_1 = \begin{cases} 1 & y_1 = 500 \\ 0 & y_1 = 600\text{或}700 \end{cases}
$$

不确定性采购问题

Solution

最优采购策略为：在第一、二、三周时，若价格为 *500* 就采购，否则应该等待；在第四周时，价格为 *500* 或 *600* 应采购，否则就等待；在第五周时，无论什么价格都要采购。

不确定性采购问题

Solution

最优采购策略为：在第一、二、三周时，若价格为 *500* 就采购，否则应该等待；在第四周时，价格为 *500* 或 *600* 应采购，否则就等待；在第五周时，无论什么价格都要采购。

采购价格的数学期望值为：

$$
\begin{aligned}
&500 \times 0.3[1 + 0.7 + 0.7^2 + 0.7^3 + 0.7^3 \times 0.4]+\\
&\quad 600 \times 0.3[0.7^3 + 0.4 \times 0.7^3]+\\
&\quad\quad 700 \times 0.4^2 \times 0.7^3\\
&\quad\quad \approx 525
\end{aligned}
$$

动态规划练习

练习一

某商店在未来的 4 个月里，准备利用商店里一个仓库专门经销某种商品，该仓库最多能装这种商品 1000 单位。假定商店每月只能卖出它仓库现有的货。当商店决定在某个月购货时，只有在该月的下个月开始才能得到该货。据估计未来 4 个月这种商品买卖价格如下表所示。假定商店在 1 月开始经销时，仓库贮存商品有 500 单位。如何制订这 4 个月的订购与销售计划，使获得利润最大？(不考虑存贮费用)

月份 (k)	买价 (c_k)	卖价 (p_k)
1	10	12
2	9	9
3	11	13
4	15	17

练习二

某科研项目由三个小组用不同方法独立进行研究，它们失败的概率分别为 0.40，0.60 和 0.80。为了减少三个小组都失败的可能性，现决定暂派两名高级科学家参加这一科研项目。把这两人分配到各组后，各小组失败的概率如下表所示。问应如何分派这两名高级科学家以使三个小组都失败的概率最小？

高级科学家人数	小组		
	1	2	3
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

练习三

为保证某一设备的正常运转，需备有三种不同的零件 E_1, E_2, E_3。若增加备用零件的数量，可提高设备正常运转的可靠性，但增加了费用，而投资额仅为 8000 元。已知备用零件数与它的可靠性和费用的关系如下表所示。

	增加的可靠性			设备的费用 (千元)		
备件数	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3
$z = 1$	0.3	0.2	0.1	1	3	2
$z = 2$	0.4	0.5	0.2	2	5	3
$z = 3$	0.5	0.9	0.7	3	6	4

目录

6 动态规划

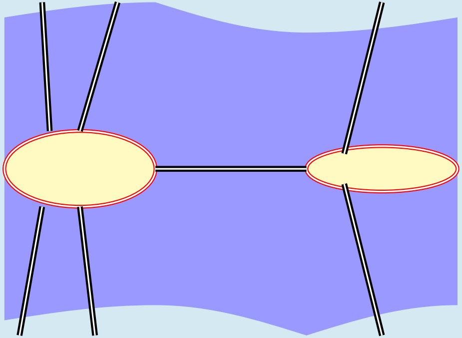
- 动态规划问题的提出
- 动态规划的基本概念和基本解法
- 动态规划应用举例
- 动态规划与静态规划的关系

动态规划与静态规划的关系

动态规划与静态规划的关系

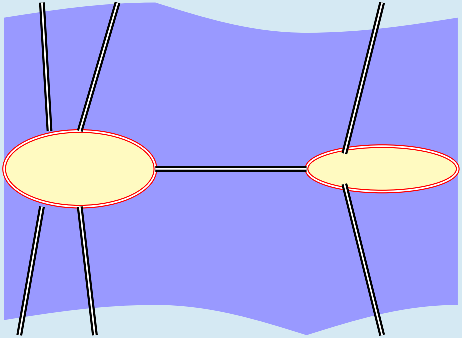
线性规划、非线性规划、动态规划都属于数学规划的范畴，都是在一定的条件下求给定问题的极值。线性规划和非线性规划所研究的问题多与时间无关，所以也称为静态规划，动态规划研究的问题多与时间因素有关，或者可以将其视为一个时间上可以划分为多阶段的决策问题。对于某些静态规划问题可以通过引入时间因素而将其视为动态规划问题，这样在求解时可能会显得简便。

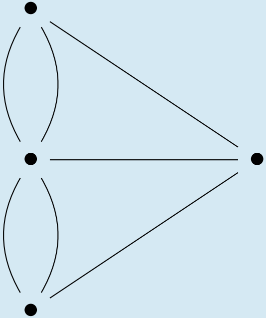
哥尼斯堡七桥问题



引言

哥尼斯堡七桥问题





Section 7

图论

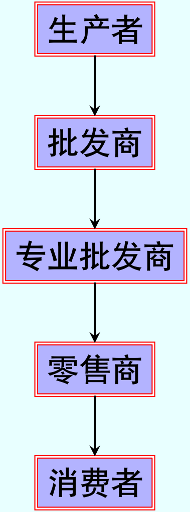
本章内容

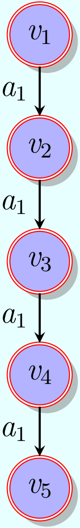
7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

目录

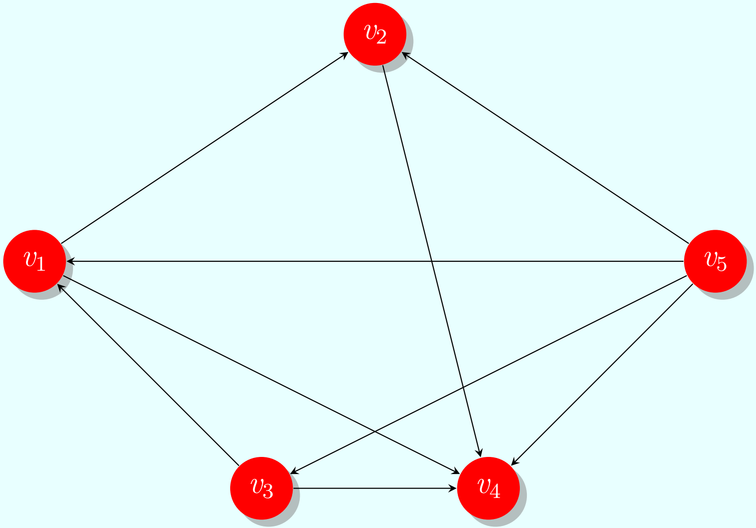
7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

有向图





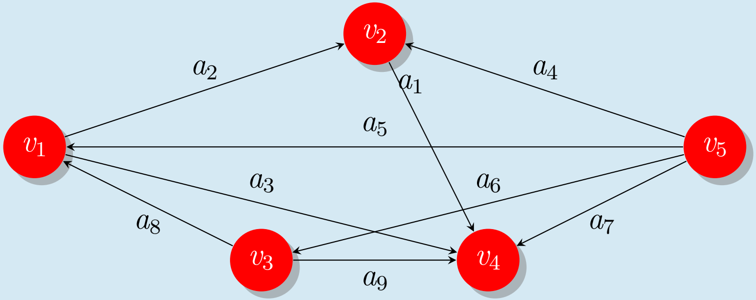
有向图



有向图的定义

有向图是一个由点和弧构成的图，表示为 $D=(V,A)$，其中 $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ 是点的集合，$A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ 为弧的集合。弧表示为 $a_i=(v_i,v_j)$。

例

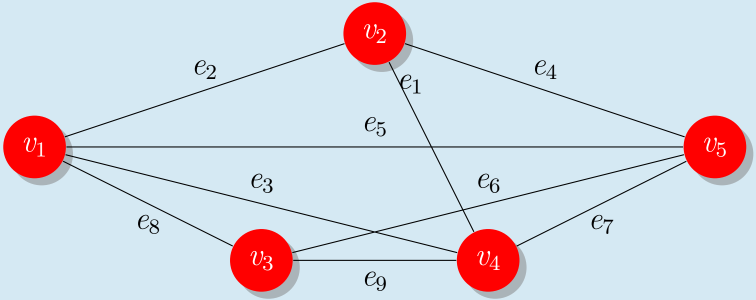


无向图

无向图的定义

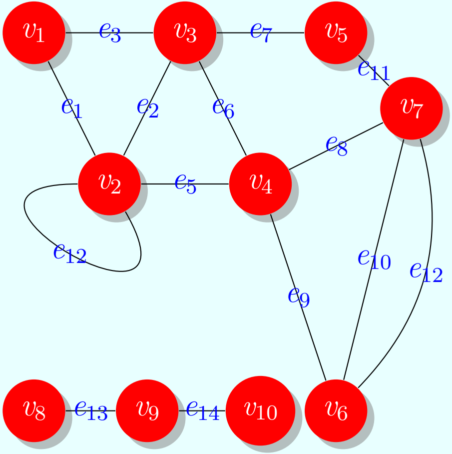
无向图是一个由点和边构成的图，表示为 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 是点的集合，$E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ 为边的集合，边表示为 $e_i=[e_i,e_j]$ 或 $e_i=[e_j,e_i]$。

例

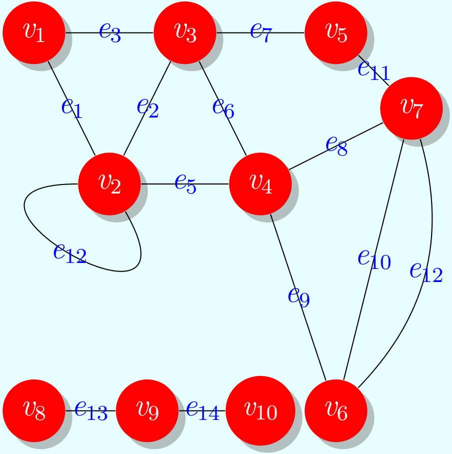


图的相关概念

- 相邻、端点、关联边



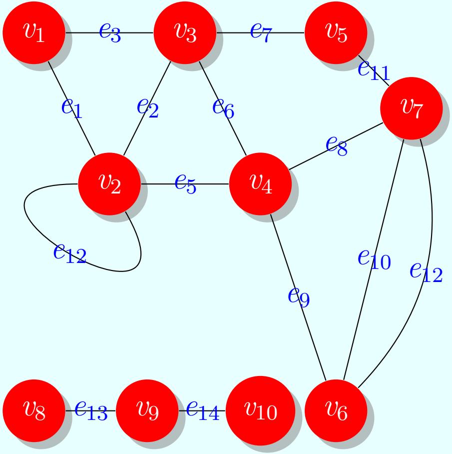
- 相邻、端点、关联边
- 环



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
v_{10}
e_1
e_2
e_3
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{12}
e_{13}
e_{14}

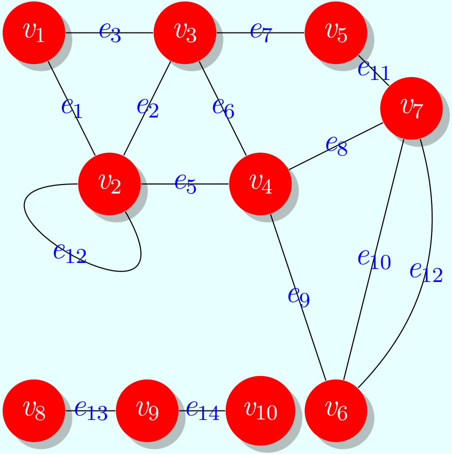
图的相关概念

- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图

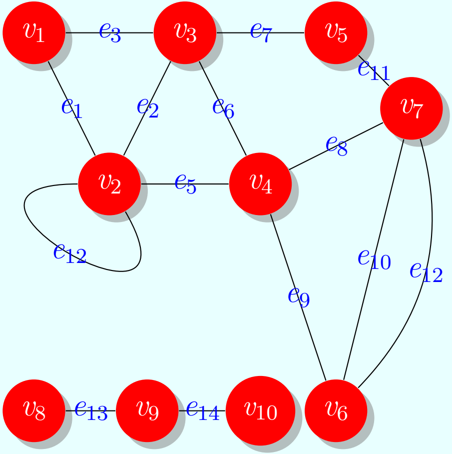


图的相关概念

- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图
- 次、奇点、偶点

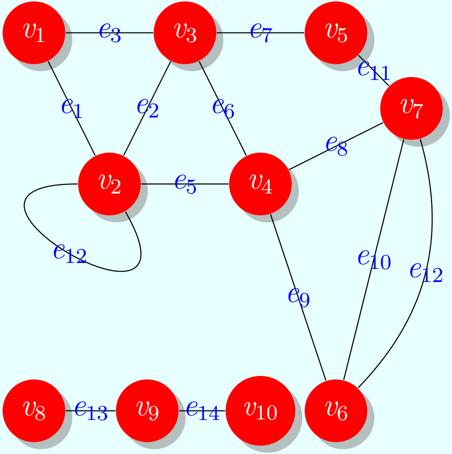


- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图
- 次、奇点、偶点
- 链、初等链、简单链

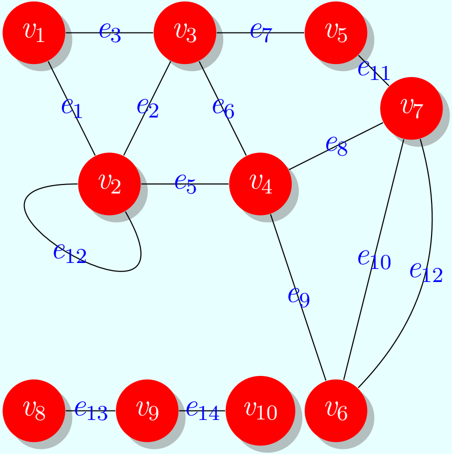


图的相关概念

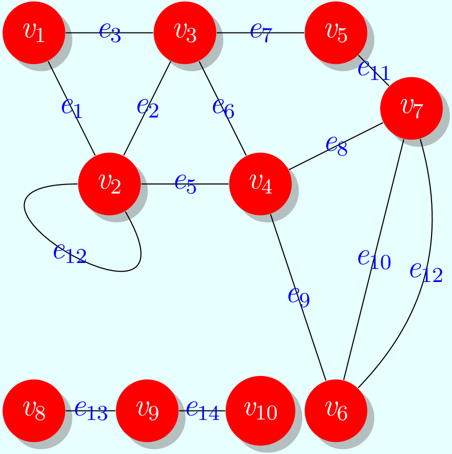
- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图
- 次、奇点、偶点
- 链、初等链、简单链
- 圈、初等圈、简单圈



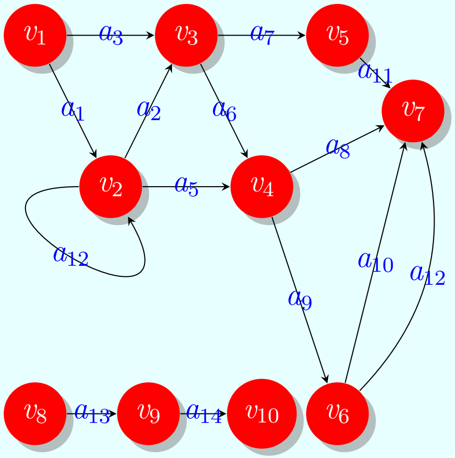
- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图
- 次、奇点、偶点
- 链、初等链、简单链
- 圈、初等圈、简单圈
- 连通图、不连通图、连通分图



- 相邻、端点、关联边
- 环
- 多重边、简单图、多重图
- 次、奇点、偶点
- 链、初等链、简单链
- 圈、初等圈、简单圈
- 连通图、不连通图、连通分图
- 支撑子图

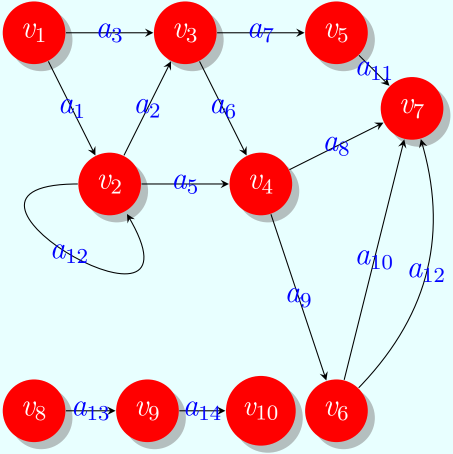


- 基础图



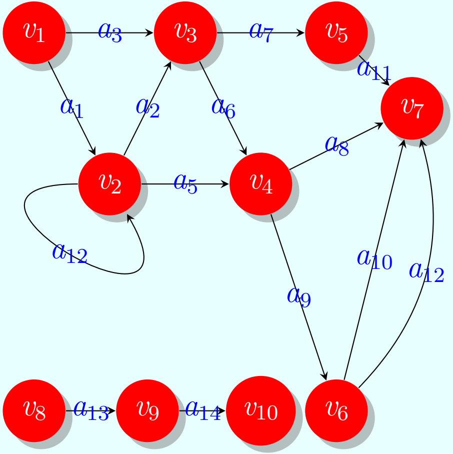
v_1
a_3
v_3
a_7
v_5
a_{11}
v_7
a_1
a_2
a_6
a_8
v_2
a_5
v_4
a_{12}
a_{10}
a_{12}
a_9
v_8
a_{13}
v_9
a_{14}
v_{10}
v_6

- 基础图
- 始点、终点、弧

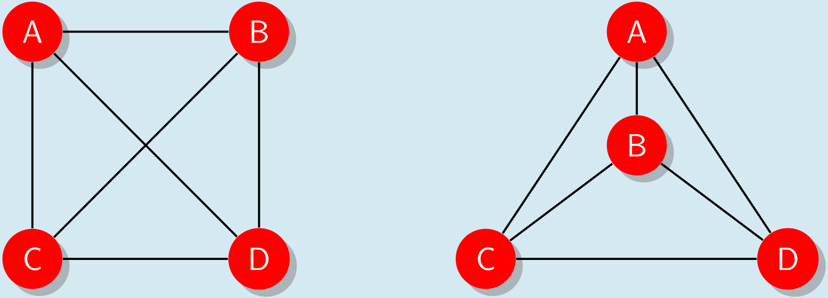

v_1
a_3
v_3
a_7
v_5
a_{11}
v_7
a_1
a_2
a_6
a_8
v_2
a_5
v_4
a_{12}
a_{10}
a_{12}
a_9
v_8
a_{13}
v_9
a_{14}
v_{10}
v_6

图的相关概念

- 基础图
- 始点、终点、弧
- 路、回路



图的同构



图的基本性质

- 图 $G = (V, E)$ 中所有点的次之和是边数的两倍。

图的基本性质

- 图 $G = (V, E)$ 中所有点的次之和是边数的两倍。
- 任意一个图中，奇点的个数为偶数。

问题

下列序列是否为某个简单图的次的序列：

7,6,5,4,3,2

7,6,5,4,3,2,1

6,5,5,4,3,2,1

图的基本性质的运用

例

已知九个人 $v_1, v_2, \cdots, v_9$ 中，v_1 和两人握过手，v_2，v_3 各和四个人握过手，v_4、v_5、v_6、v_7 各和五个握过手，v_8、v_9 和六个人握过手。证明这九个人中一定可以找出三个互相握过手。

目录

7 图论

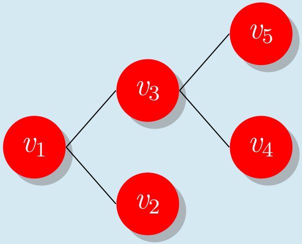
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

树的定义

定义

无圈的连通图称为树。

例子



树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，且 $q=p-1$。

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，且 $q=p-1$。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中任意两点之间恰有一条链。

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，且 $q=p-1$。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中任意两点之间恰有一条链。
- 结论

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，且 $q=p-1$。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中任意两点之间恰有一条链。
- 结论
  - 从一个树上去掉任意一条边，则剩下的图是不连通图；

树的性质

- 设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中没有圈，且恰有 $p-1$ 条边。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，且 $q=p-1$。
- 图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 中任意两点之间恰有一条链。
- 结论
  - 从一个树上去掉任意一条边，则剩下的图是不连通图；
  - 在树中不相邻的两点间增加一条边，则恰好得到一个圈；而从这个圈上任意去掉一条边则又得到一个树。

图的支撑树

- **定义**
  设图 $T=(V,E')$ 是图 $G=(V,E)$ 的支撑子图，如果图 $T=(V,E')$ 是一个树，则称 T 是 G 的支撑树。

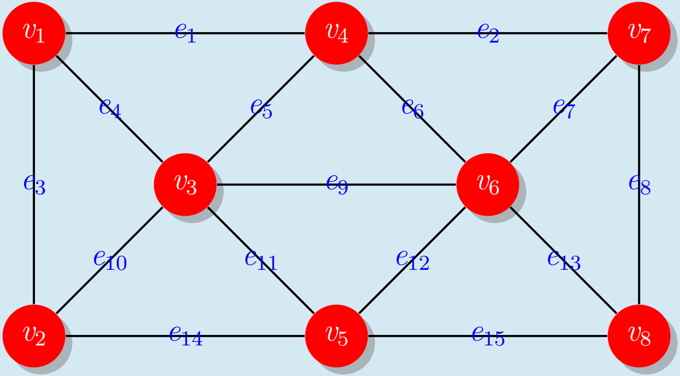
图的支撑树

- **定义**
  设图 $T=(V,E')$ 是图 $G=(V,E)$ 的支撑子图，如果图 $T=(V,E')$ 是一个树，则称 T 是 G 的支撑树。

- **性质**
  图 $G=(V,E)$ 有支撑树的必要条件是 G 是连通的。

图的支撑树

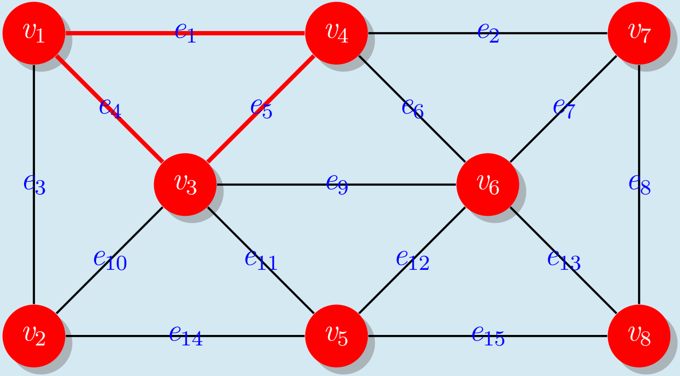
破圈法



v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

图的支撑树

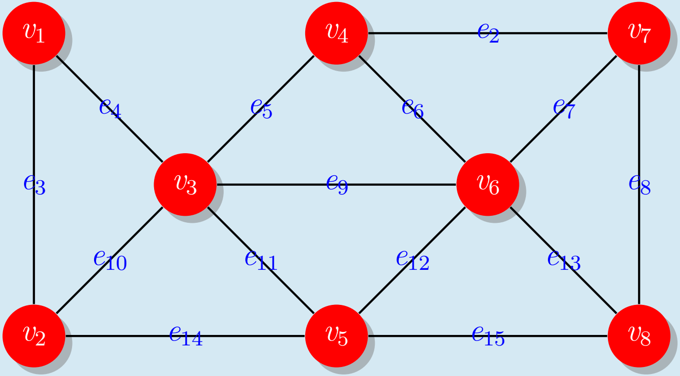
破圈法



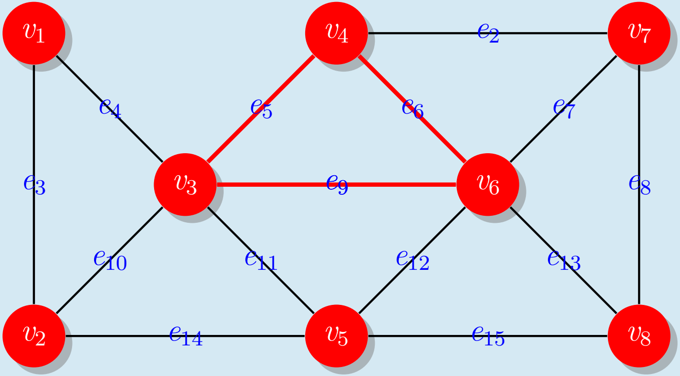
v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

图的支撑树

破圈法

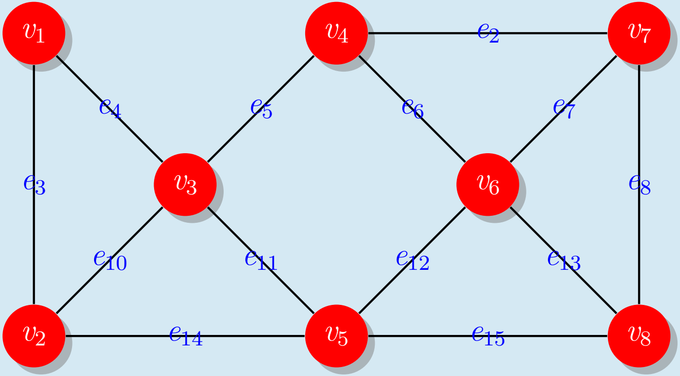

v_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

破圈法


v_1
v_4
v_7
e_2
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

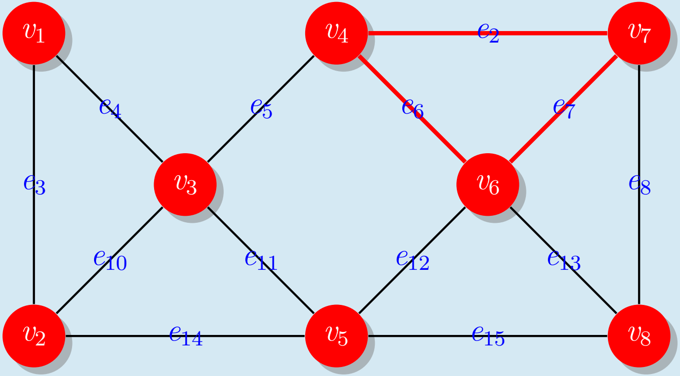
图的支撑树

破圈法

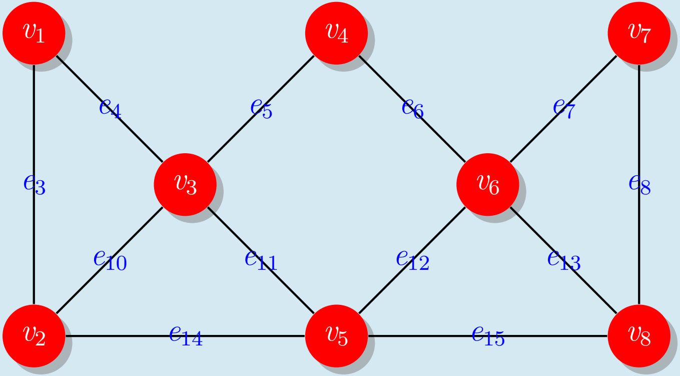


图的支撑树

破圈法

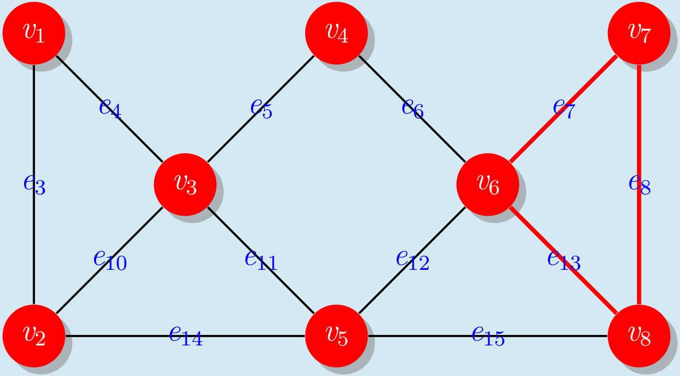


破圈法



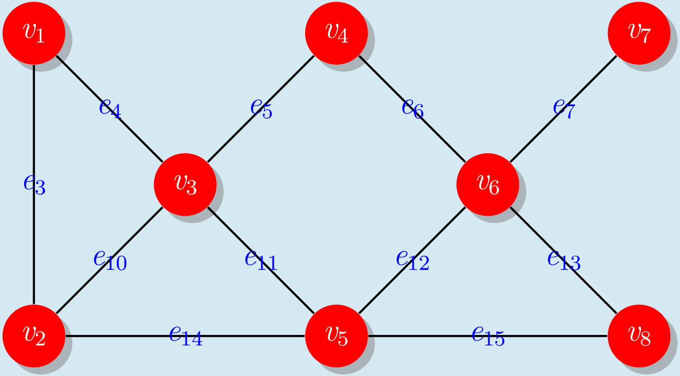
图的支撑树

破圈法

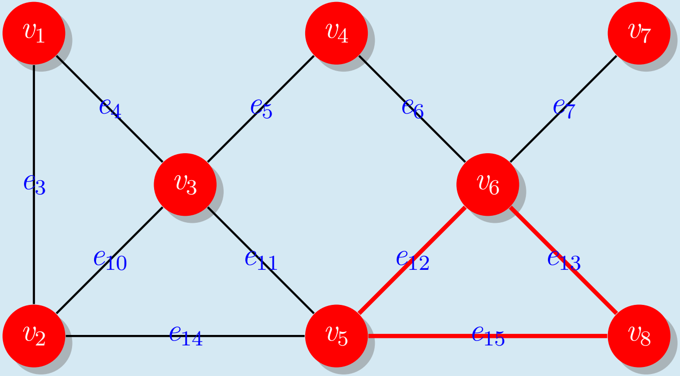


图的支撑树

破圈法

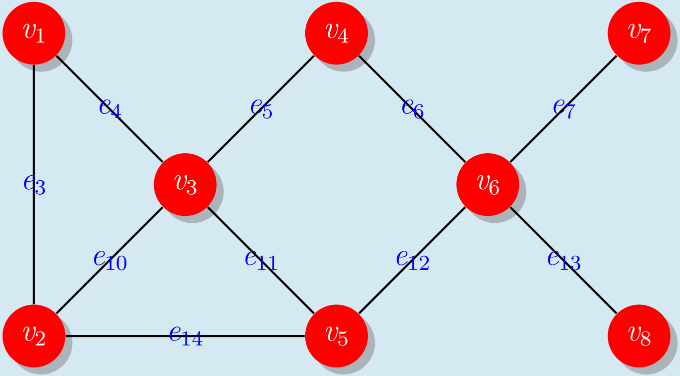


破圈法



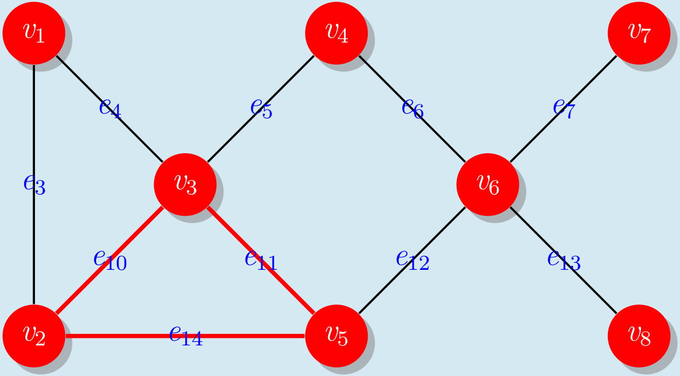
图的支撑树

破圈法



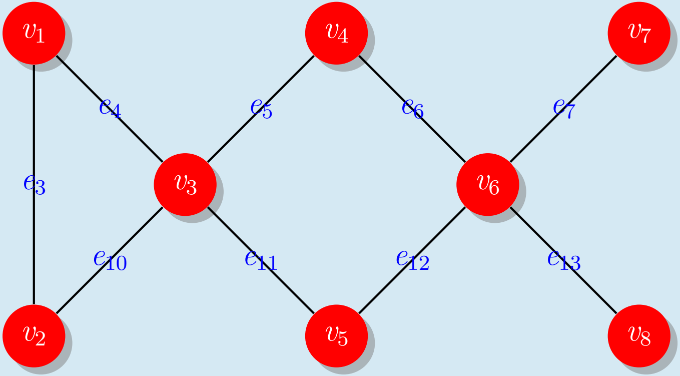
图的支撑树

破圈法



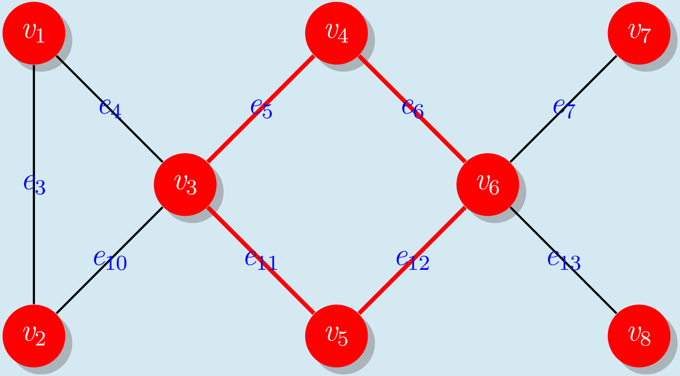
图的支撑树

破圈法

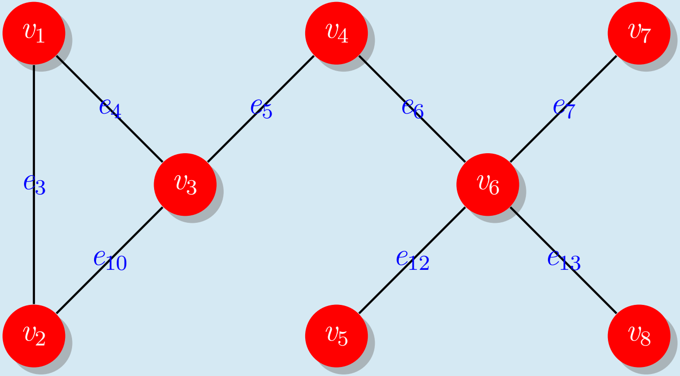


图的支撑树

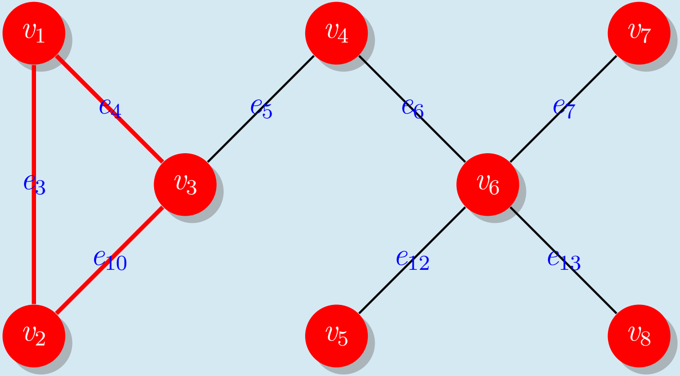
破圈法



破圈法

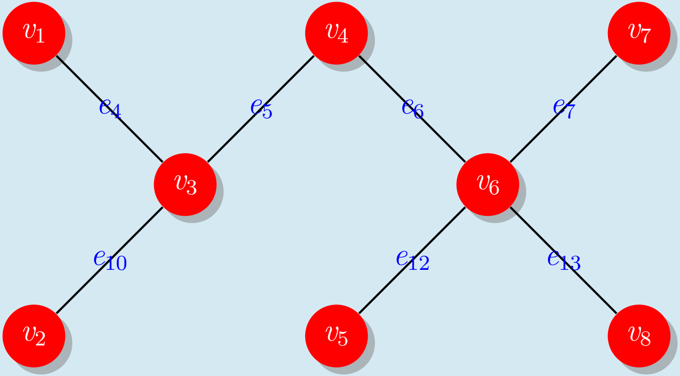


破圈法



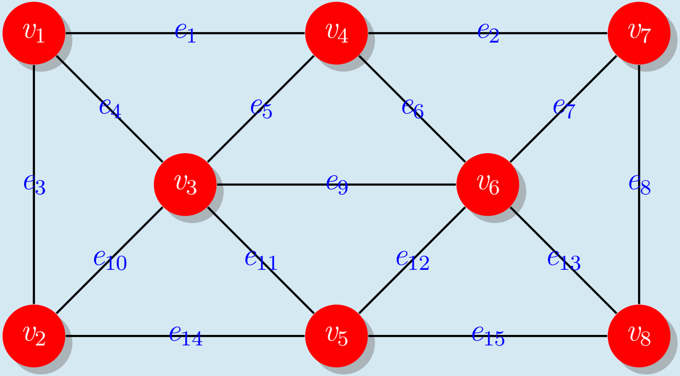
图的支撑树

破圈法

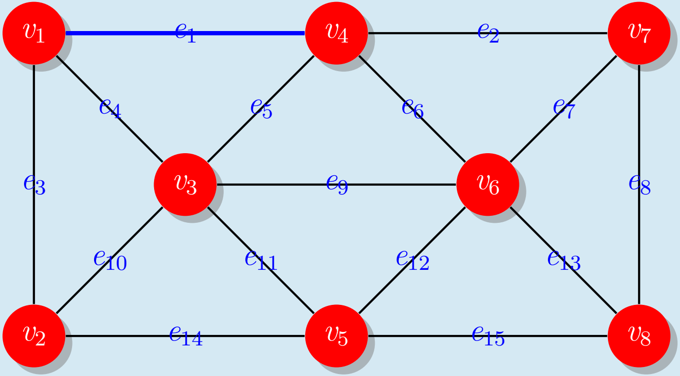


图的支撑树

避圈法

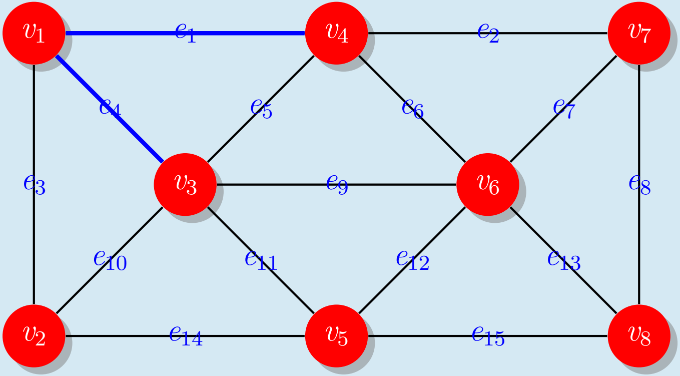

v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

避圈法


v_1
v_4
v_7
v_3
v_6
v_2
v_5
v_8
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
e_{14}
e_{15}

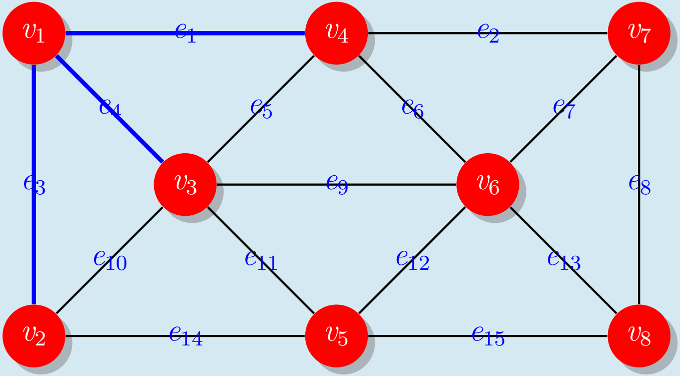
图的支撑树

避圈法


v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

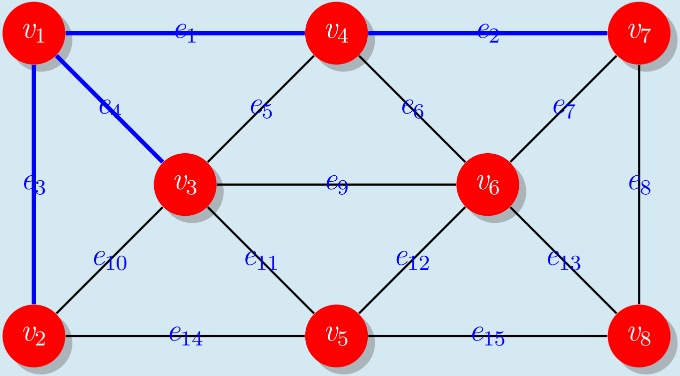
图的支撑树

避圈法



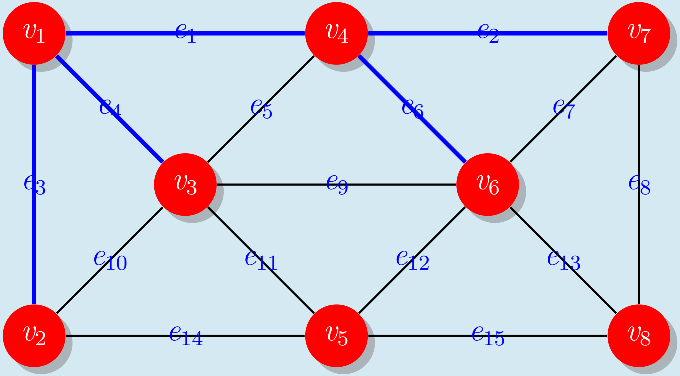
v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

避圈法


v_1
v_4
v_7
v_3
v_6
v_2
v_5
v_8
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
e_{14}
e_{15}

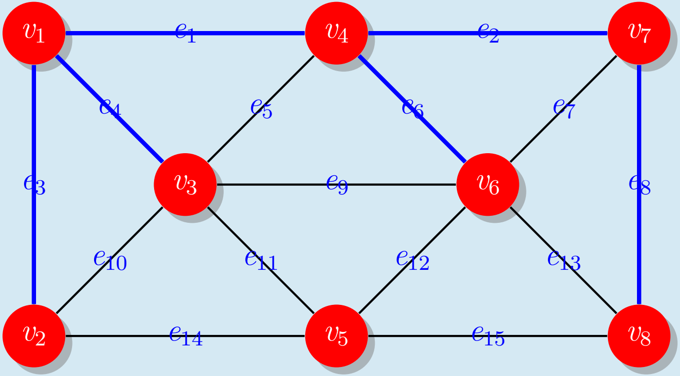
图的支撑树

避圈法



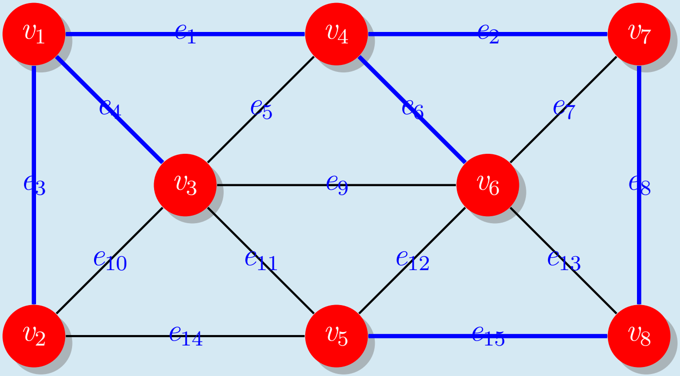
v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

避圈法

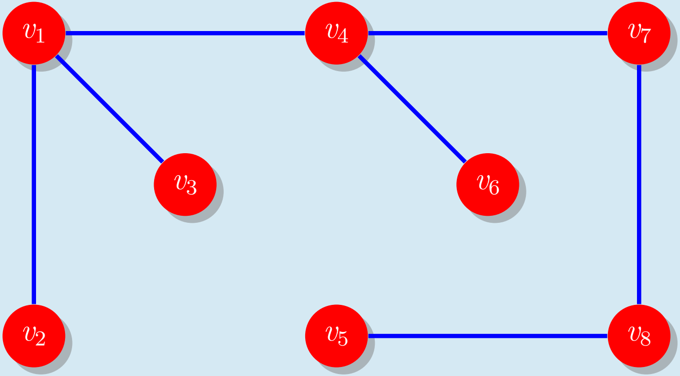


v_1
e_1
v_4
e_2
v_7
e_4
e_5
e_6
e_7
e_3
v_3
e_9
v_6
e_8
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
v_2
e_{14}
v_5
e_{15}
v_8

避圈法


v_1
v_4
v_7
v_3
v_6
v_2
v_5
v_8
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
e_{14}
e_{15}

避圈法



最小支撑支撑树

基本概念

设 $G=(V,E)$ 的每一条边 $[v_i,v_j]$ 上有一个权 w_{ij}，则称这样的图为 $G=(v,E)$ 的**赋权图**，w_{ij} 为边 $[v_i,v_j]$ 上的权。

基本概念

设 $G=(V,E)$ 的每一条边 $[v_i,v_j]$ 上有一个权 w_{ij}，则称这样的图为 $G=(v,E)$ 的赋权图，w_{ij} 为边 $[v_i,v_j]$ 上的权。

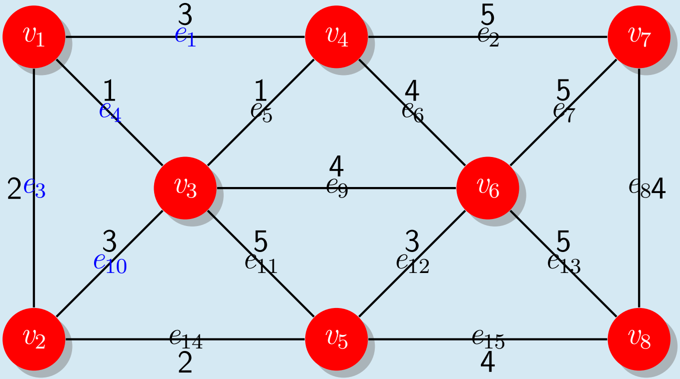
设连通图 $G=(V,E)$ 中每一条边上有一个非负的权 w_{ij}，如果 $T=(V,E')$ 是 $G=(V,E)$ 的一个支撑树，则树 $T=(V,E')$ 的权 $w(T)$ 定义为

$$w(T)=\sum_{[v_i,v_j]\in T} w_{ij}$$

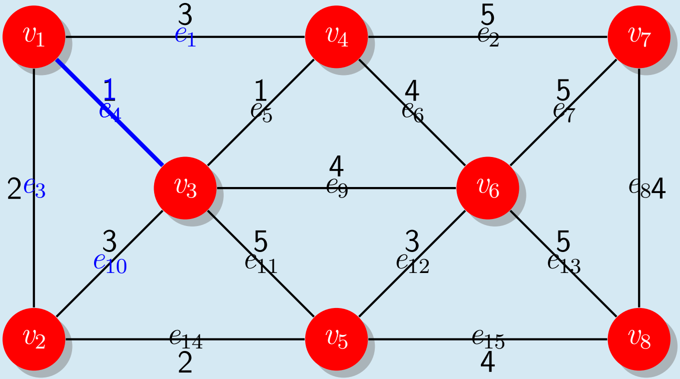
即树 $T=(V,E')$ 的树为该树上所有边的权之和。求 $w(T*)=\min\limits_{T\in G}\sum\limits_{[v_i,v_j]\in T} w_{ij}=\min\limits_{T}\sum w(T)$ 的问题称为最小支撑树问题。

最小支撑支撑树

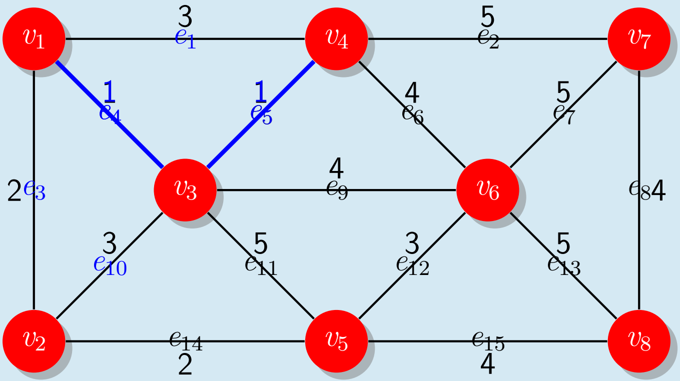
避圈法 (Kruskal 法)



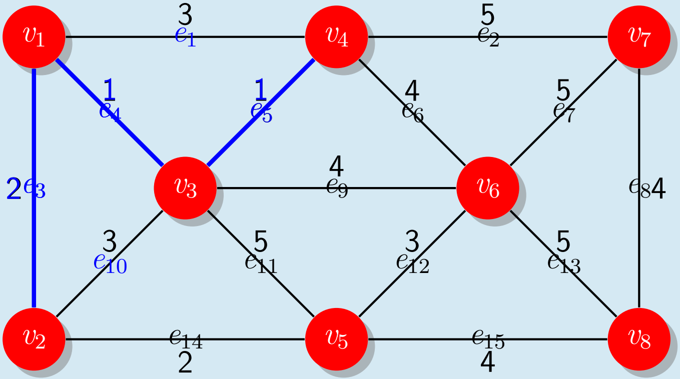
避圈法 (Kruskal 法)



避圈法 (Kruskal 法)

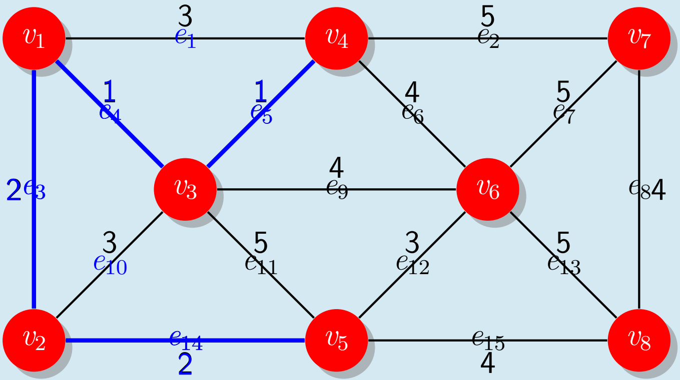


避圈法 (Kruskal 法)



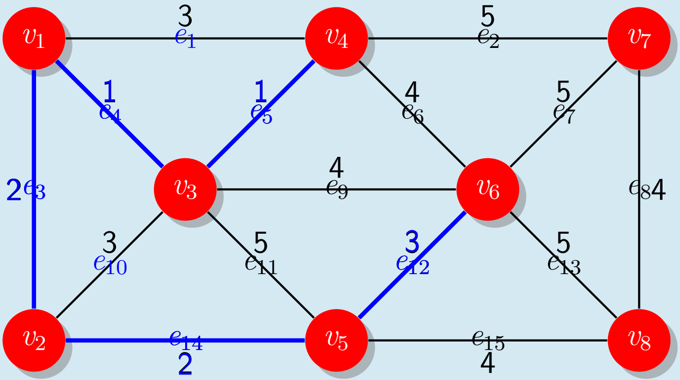
最小支撑支撑树

避圈法 (Kruskal 法)

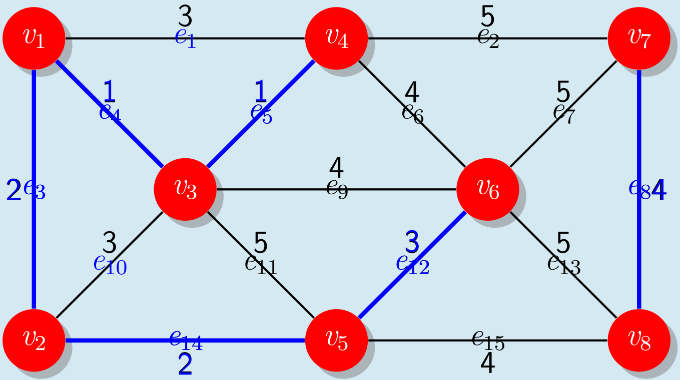


最小支撑支撑树

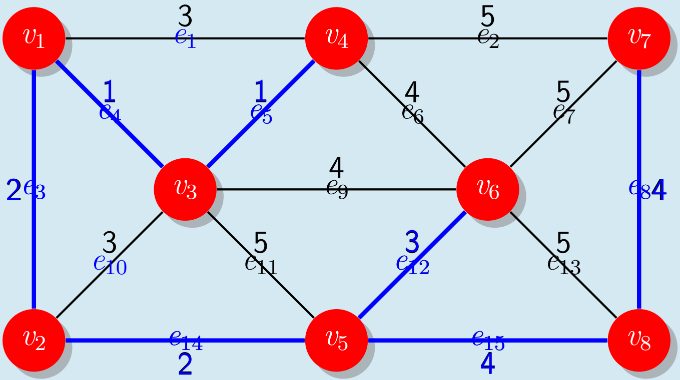
避圈法 (Kruskal 法)



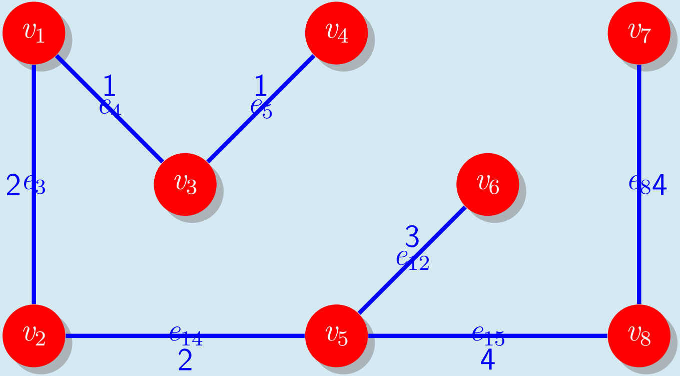
避圈法 (Kruskal 法)



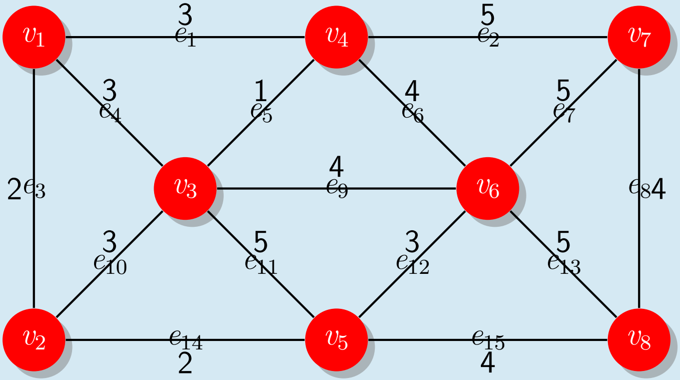
避圈法 (Kruskal 法)



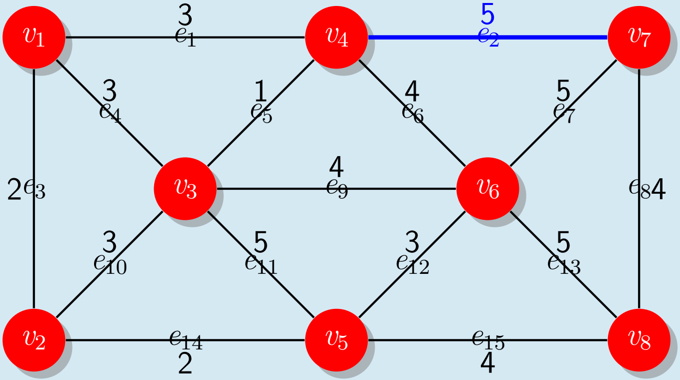
避圈法 (Kruskal 法)



破圈法


v_1
v_4
v_7
v_3
v_6
v_2
v_5
v_8
3 e_1
5 e_2
2 e_3
3 e_4
1 e_5
4 e_6
5 e_7
e_8 4
4 e_9
3 e_{10}
5 e_{11}
3 e_{12}
5 e_{13}
e_{14} 2
e_{15} 4

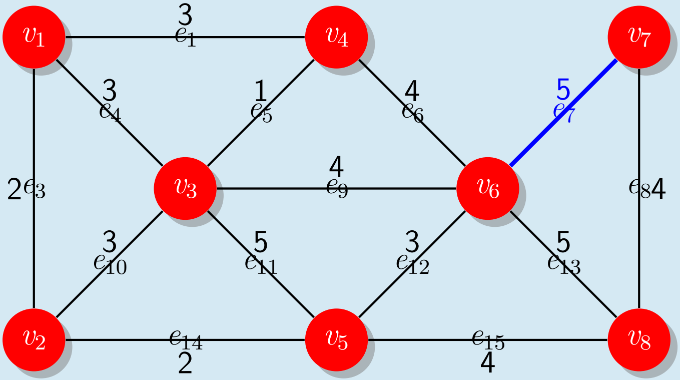
破圈法



3
e_1
5
e_2
v_1
v_4
v_7
3
e_4
1
e_5
4
e_6
5
e_7
2 e_3
v_3
4
e_9
v_6
e_8 4
3
e_{10}
5
e_{11}
3
e_{12}
5
e_{13}
v_2
e_{14}
2
v_5
e_{15}
4
v_8

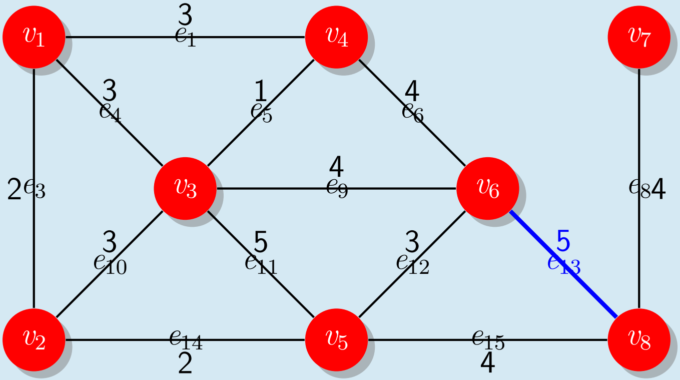
最小支撑支撑树

破圈法



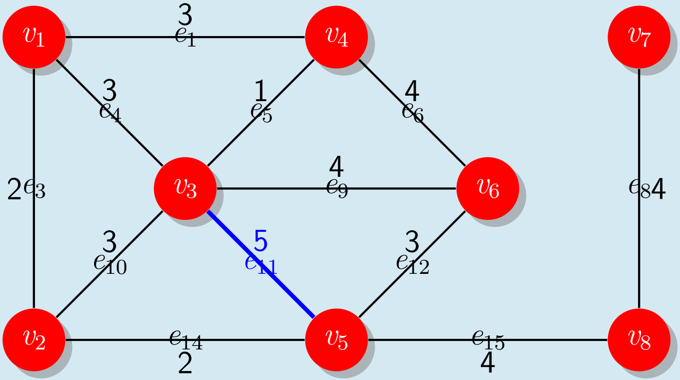
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
3 e_1
2 e_3
3 e_4
1 e_5
4 e_6
5 e_7
e_8 4
4 e_9
3 e_{10}
5 e_{11}
3 e_{12}
5 e_{13}
e_{14} 2
e_{15} 4

破圈法


v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
3 e_1
3 e_4
1 e_5
4 e_6
2 e_3
4 e_9
e_8 4
3 e_{10}
5 e_{11}
3 e_{12}
5 e_{13}
e_{14} 2
e_{15} 4

最小支撑支撑树

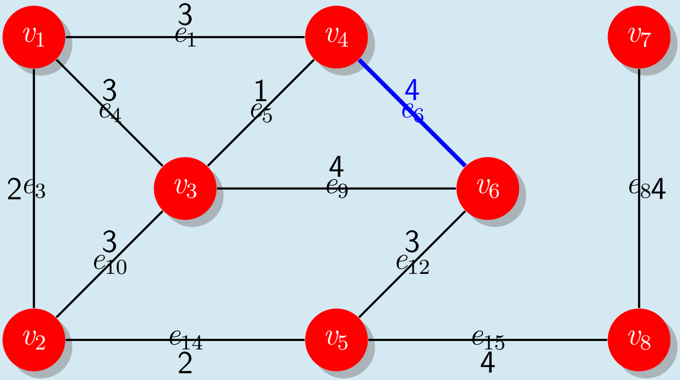
破圈法



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
3 e_1
3 e_4
1 e_5
4 e_6
2 e_3
4 e_9
e_8 4
3 e_{10}
5 e_{11}
3 e_{12}
e_{14} 2
e_{15} 4

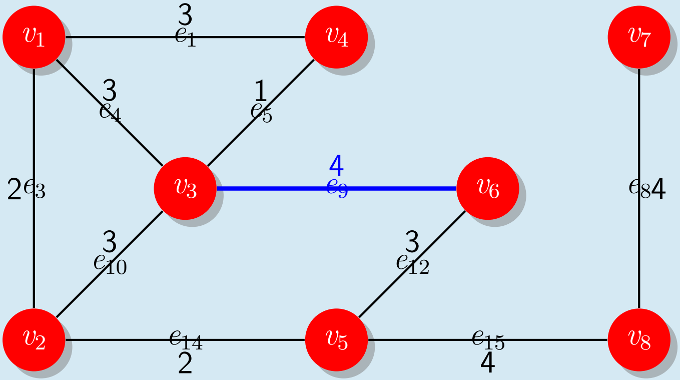
最小支撑支撑树

破圈法

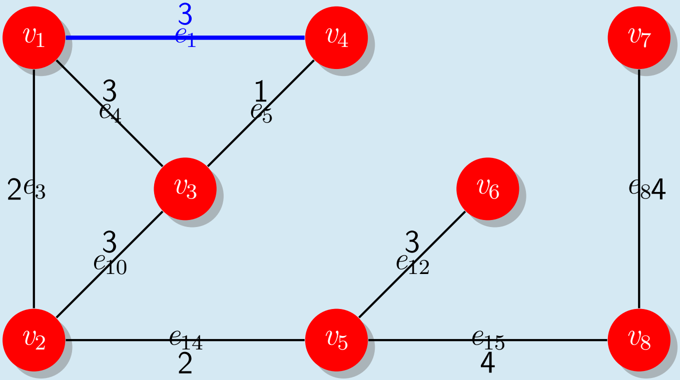


v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
3 e_1
3 e_4
1 e_5
4 e_6
2 e_3
4 e_9
e_8 4
3 e_{10}
3 e_{12}
e_{14} 2
e_{15} 4

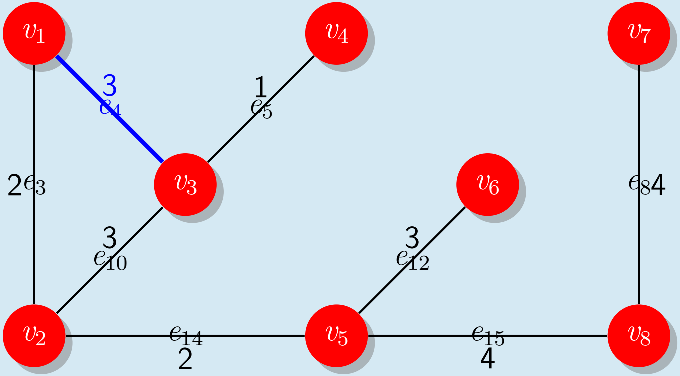
破圈法


v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
3 e_1
3 e_4
1 e_5
2 e_3
4 e_9
e_8 4
3 e_{10}
3 e_{12}
e_{14} 2
e_{15} 4

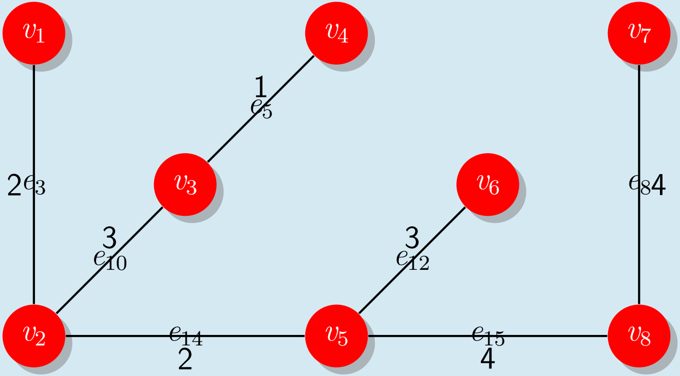
破圈法



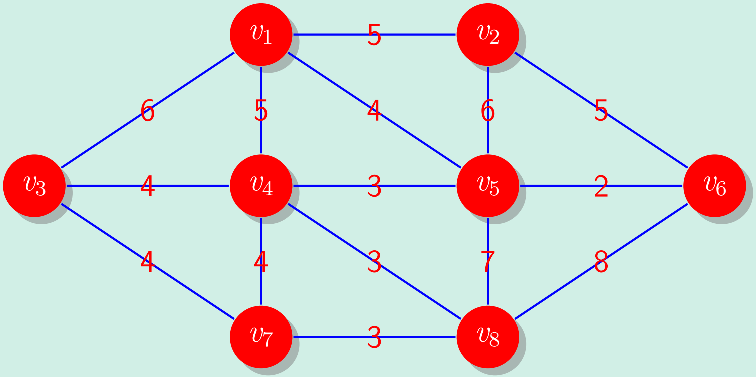
破圈法



破圈法



练习：用破圈法和避圈法求下图的最小支撑树。



最小支撑树

已知某公司在六个城市设立了分部，各城市之间的距离由下表给出。试确定连接这六个城市的最小树。

	Pe	T	Pa	M	N	L
Pe	-	13	51	77	68	50
T	13	-	60	70	67	59
Pa	51	60	-	57	36	2
M	77	70	57	-	20	55
N	68	67	36	20	-	34
L	50	59	2	55	34	-

最小支撑支撑树

Prim 法

1. 根据网路写出边权矩阵，两点间若没有边，则用 ∞ 表示；

最小支撑支撑树

Prim 法

1. 根据网路写出边权矩阵，两点间若没有边，则用 ∞ 表示；
2. 从 v_1 开始标记，在第一行打 $\surd$，划去第一列；

最小支撑支撑树

Prim 法

1. 根据网路写出边权矩阵，两点间若没有边，则用 ∞ 表示；
2. 从 v_1 开始标记，在第一行打 $\surd$，划去第一列；
3. 从所有打 $\surd$ 的行中找出尚未划掉的最小元素，对该元素画圈，划掉该元素所在列，与该列数对应的行打 $\surd$；

最小支撑支撑树

Prim 法

1. 根据网路写出边权矩阵，两点间若没有边，则用 ∞ 表示；
2. 从 v_1 开始标记，在第一行打 $\surd$，划去第一列；
3. 从所有打 $\surd$ 的行中找出尚未划掉的最小元素，对该元素画圈，划掉该元素所在列，与该列数对应的行打 $\surd$；
4. 若所有列都划掉，则已找到最小生成树 (所有画圈元素所对应的边)；否则，返回第 3 步。

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	$\surd$

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	$\surd$

最小支撑支撑树

Prim 法

从 \ 到	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
v_1	-	2	1	3	∞	∞	∞	∞	$\surd$
v_2	2	-	3	∞	2	∞	∞	∞	$\surd$
v_3	1	3	-	1	5	4	∞	∞	$\surd$
v_4	3	∞	1	-	∞	4	5	∞	$\surd$
v_5	∞	2	5	∞	-	3	∞	4	$\surd$
v_6	∞	∞	4	4	3	-	5	5	$\surd$
v_7	∞	∞	∞	5	∞	5	-	4	
v_8	∞	∞	∞	∞	4	5	4	-	$\surd$

目录

7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

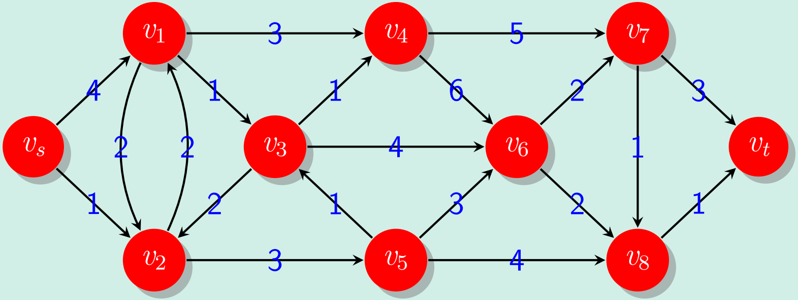
最短路问题

问题的提出

最短路问题最早是用于探讨在一个交通网中，从某点出发到达指定的点，如何选择行走路线以使总的路长为最短，类似的有时间最短、费用最低、所耗资源最少等在网络中求最小值的优化问题，都可视为最短路问题。

问题的提出

最短路问题最早是用于探讨在一个交通网中，从某点出发到达指定的点，如何选择行走路线以使总的路长为最短，类似的有时间最短、费用最低、所耗资源最少等在网络中求最小值的优化问题，都可视为最短路问题。



最短路问题——Dijkstra 算法[9]

原理

如果 P 是有向图 D 中由 v_s 到 v_t 的最短路，那么从 P 上的任意一点 v_i 到 v_t 的路就一定是最短的。
该算法的前提条件是 $w_{ij} \geqslant 0$。

步骤

从 v_s 出发，逐步地向外探寻最短路。执行过程中，与每个点对应，记录下一个数(称为这个点的标号)，它或者表示从 v_s 到该点的最短路的权（称为 P 标号或永久标号)，或者表示从 v_s 到该点最短路的权的上界（称为 T 标号或临时标号)，方法的每一步是修改 T 标号，并且把某一个具有 T 标号的点改变为具有 P 标号的点，从而使 D 中具有 P 标号的点数多一个，这样至多经过 $p-1$ 步，就可求出从 v_s 到各点的最短路。

[9] Dijkstra 于 1959 年提出。

最短路问题——Dijkstra 算法

步骤

1. 给 v_s 以 P 标号 0，其它点给 T 标号 M;

步骤

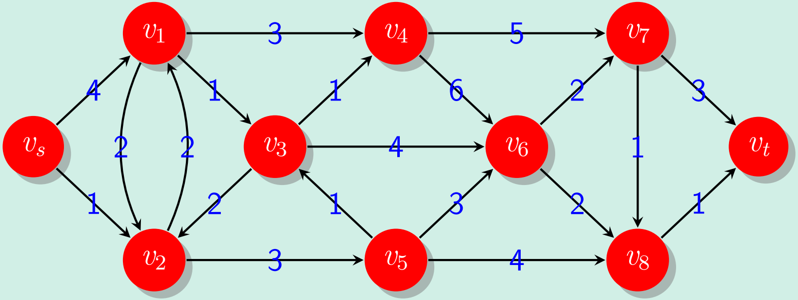
1. 给 v_s 以 P 标号 0，其它点给 T 标号 M;
2. 从刚得到 P 标号的点（v_k）出发，按下式修改与其相邻的所有具有 T 标号的点的标号:

$$\min\left\{T\left(v_j\right), P\left(v_k\right)+w_{kj}\right\}$$

步骤

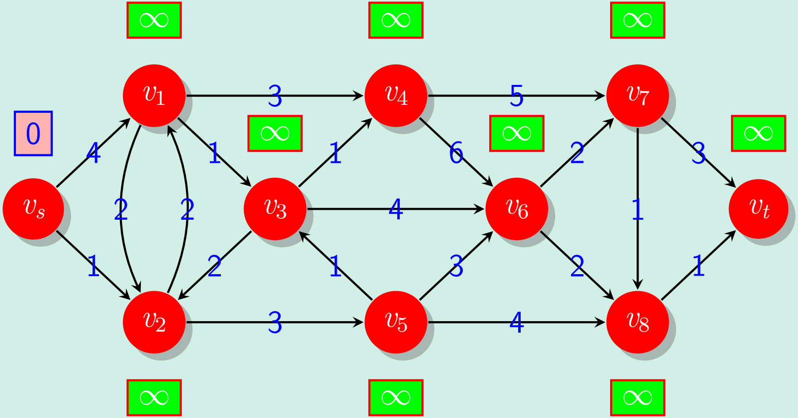
1. 给 v_s 以 P 标号 0，其它点给 T 标号 M;
2. 从刚得到 P 标号的点（v_k）出发，按下式修改与其相邻的所有具有 T 标号的点的标号:
$$\min\{T(v_j), P(v_k)+w_{kj}\}$$
3. 从所有具有 T 标号点中选取一个最小值，将其改为 P 标号，然后重复步骤，直至所有点都得到 P 标号。

算例

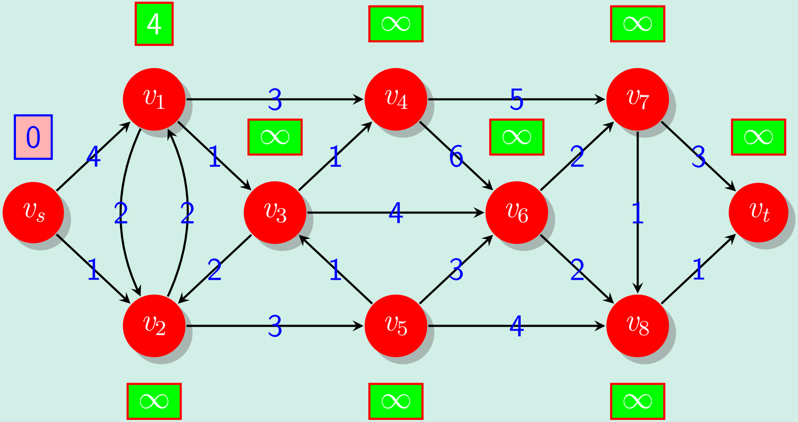


最短路问题–Dijkstra 算法

算例

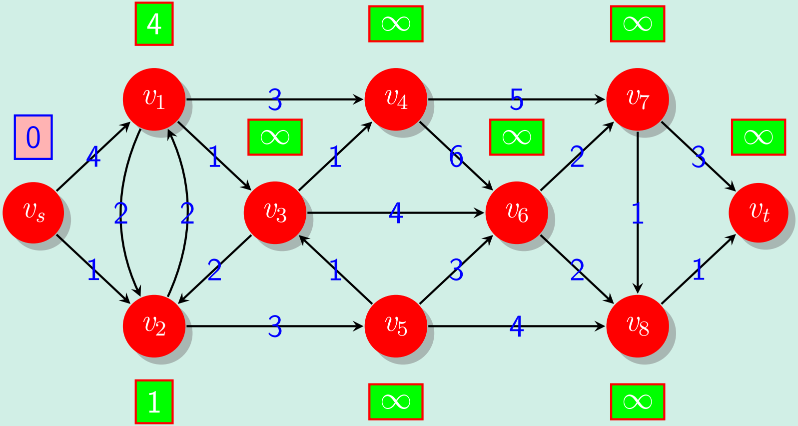


算例



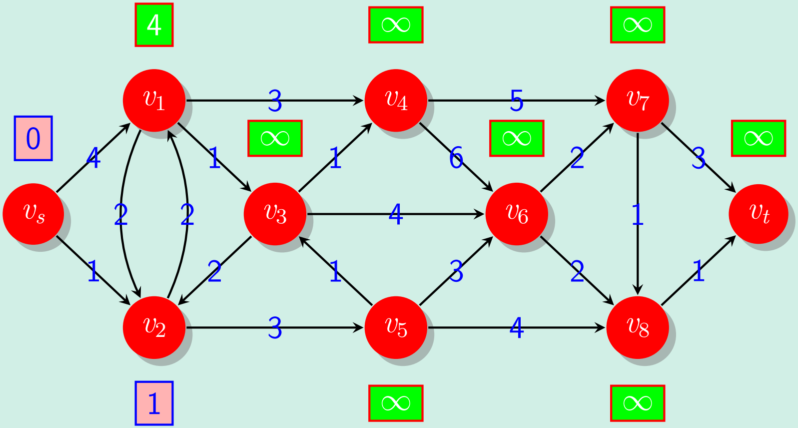
最短路问题–Dijkstra 算法

算例

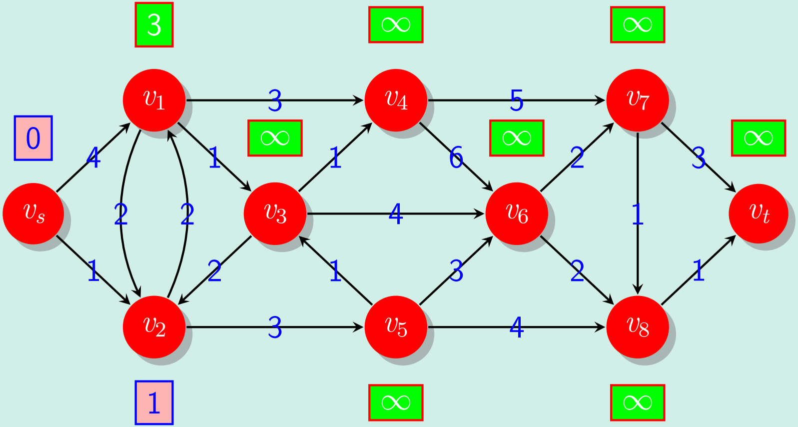


最短路问题–Dijkstra 算法

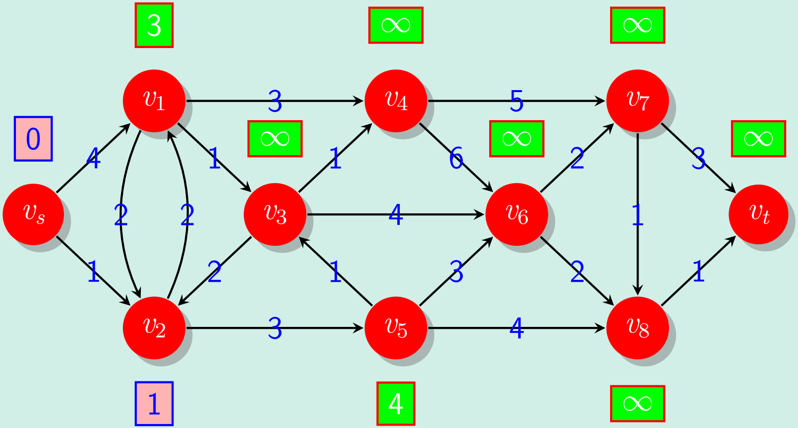
算例



算例

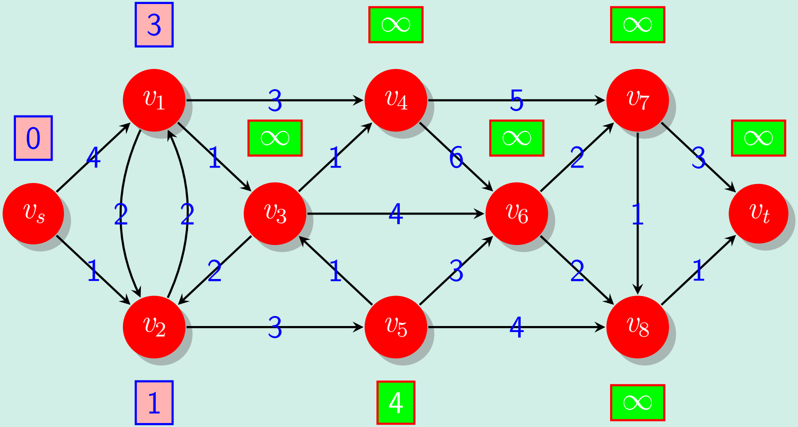


算例

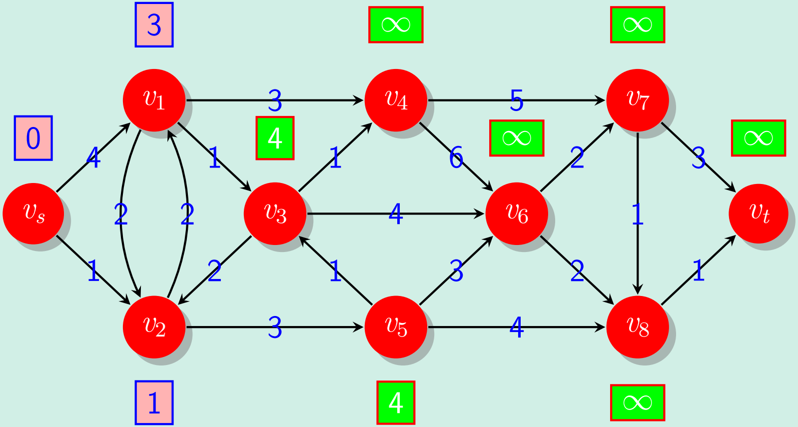


最短路问题–Dijkstra 算法

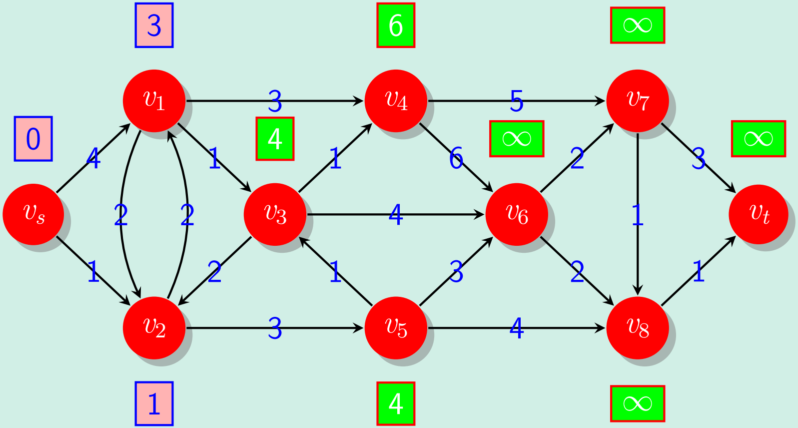
算例



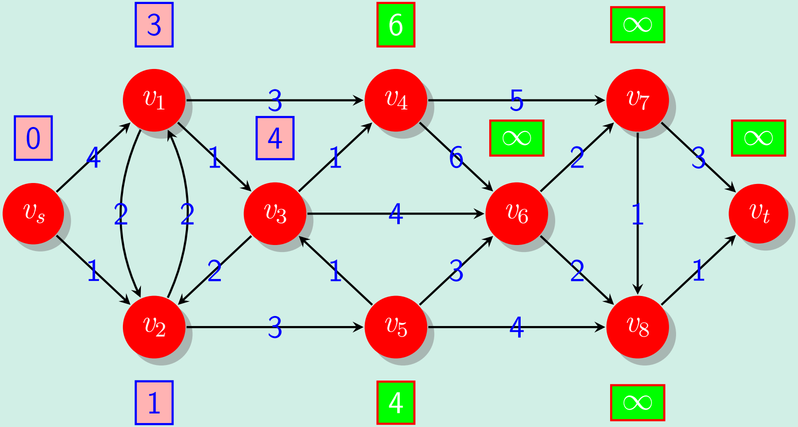
算例



算例

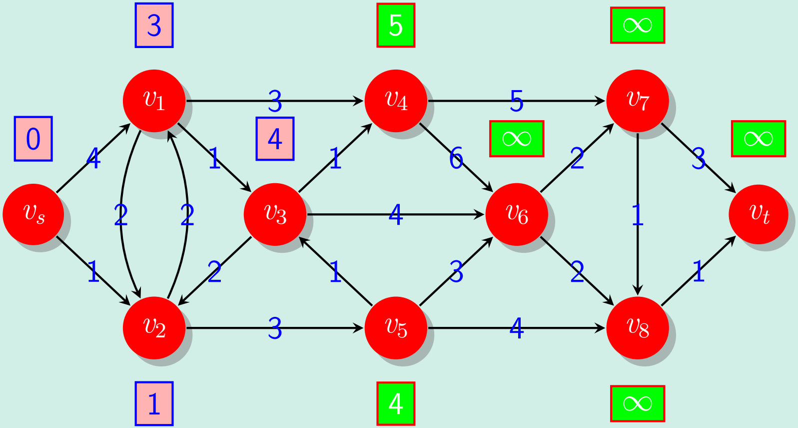


算例

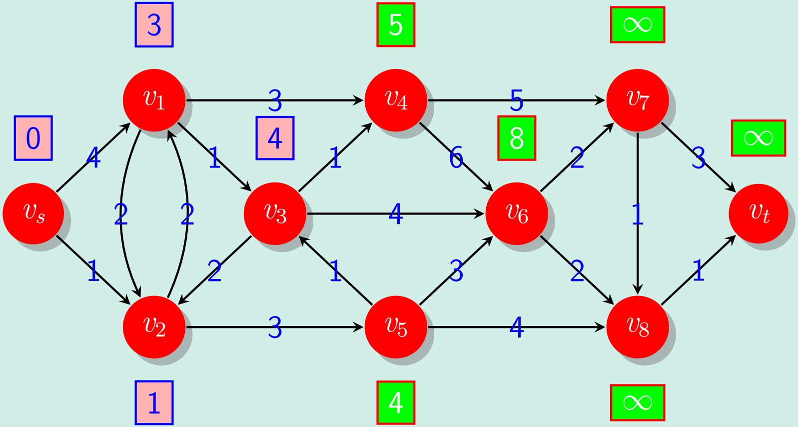


最短路问题–Dijkstra 算法

算例

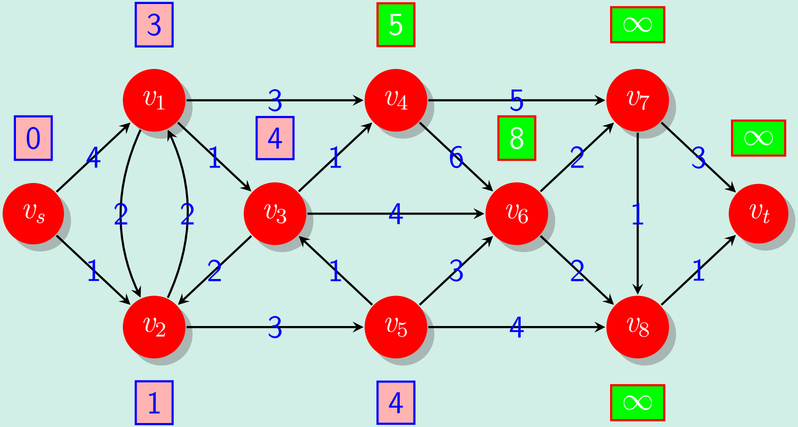


算例

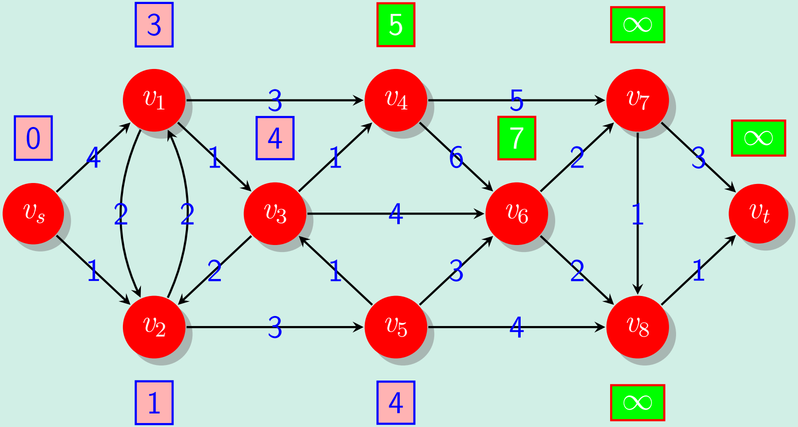


最短路问题–Dijkstra 算法

算例

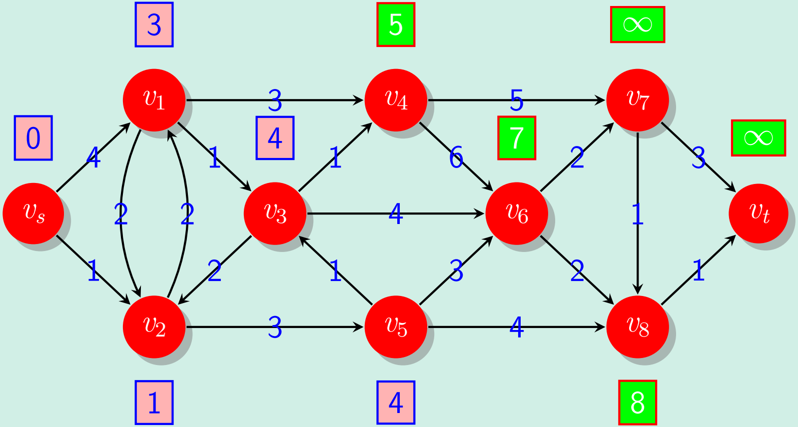


算例



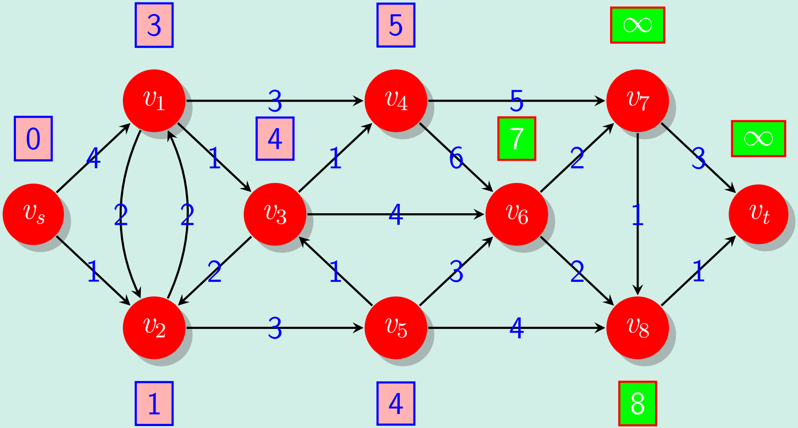
最短路问题–Dijkstra 算法

算例

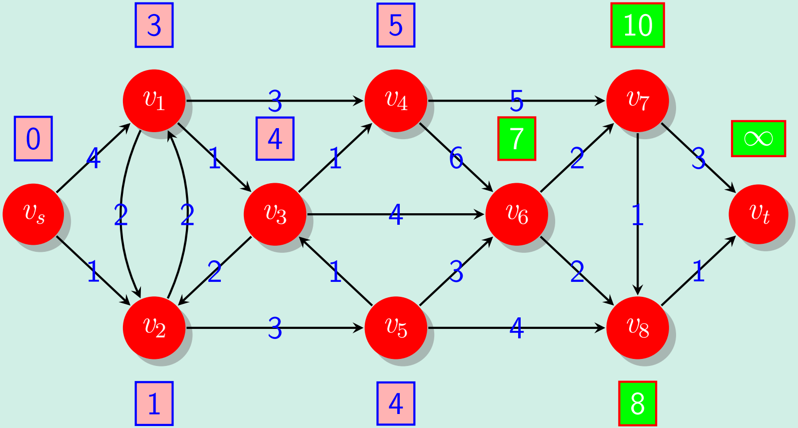


最短路问题–Dijkstra 算法

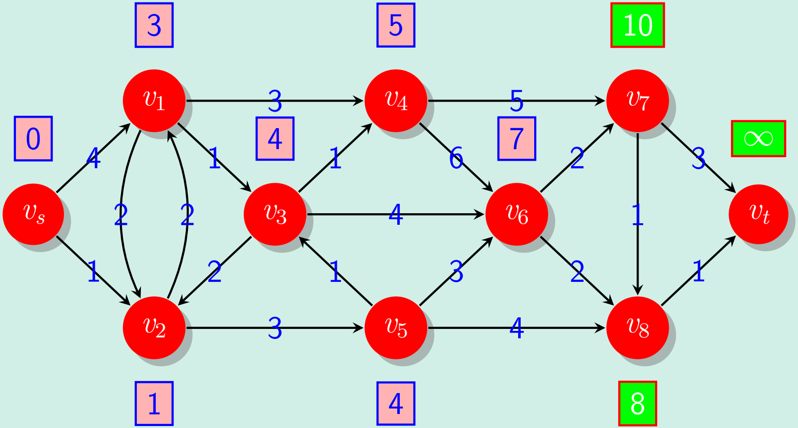
算例



算例


3
5
10
0
4
7
∞
v_1
v_4
v_7
v_s
v_3
v_6
v_t
v_2
v_5
v_8
1
4
8
3
5
4
1
1
6
2
3
2
2
4
1
1
2
1
3
2
3
4

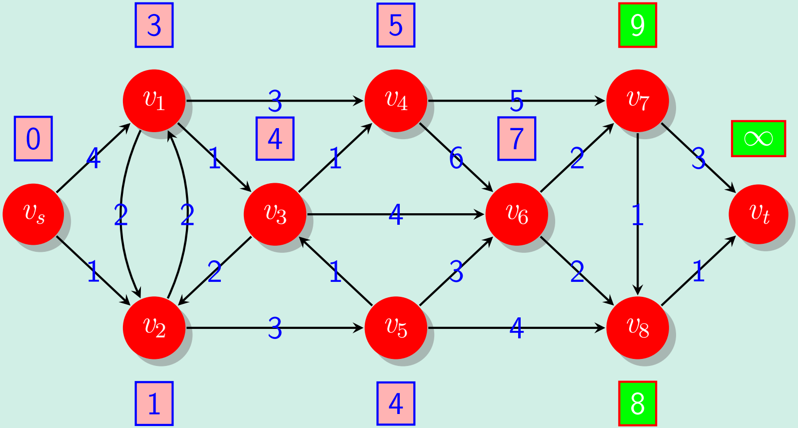
算例



3
5
10
0
4
7
∞
1
4
8
v_s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_t
4
1
2
2
3
1
2
3
1
4
1
3
5
6
4
2
2
1
3
1

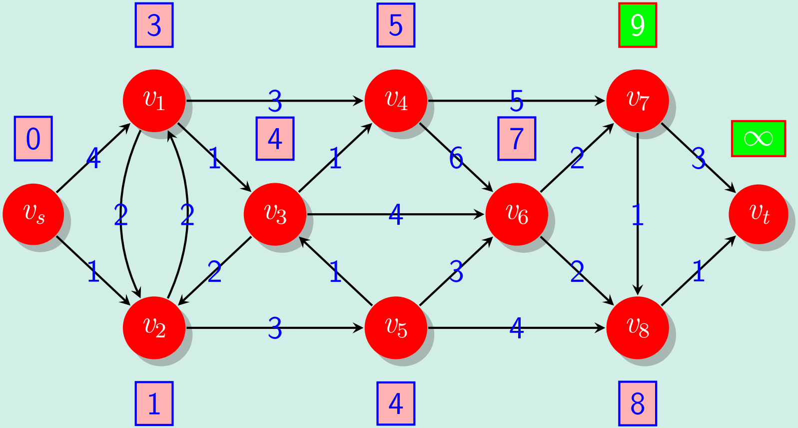
最短路问题–Dijkstra 算法

算例

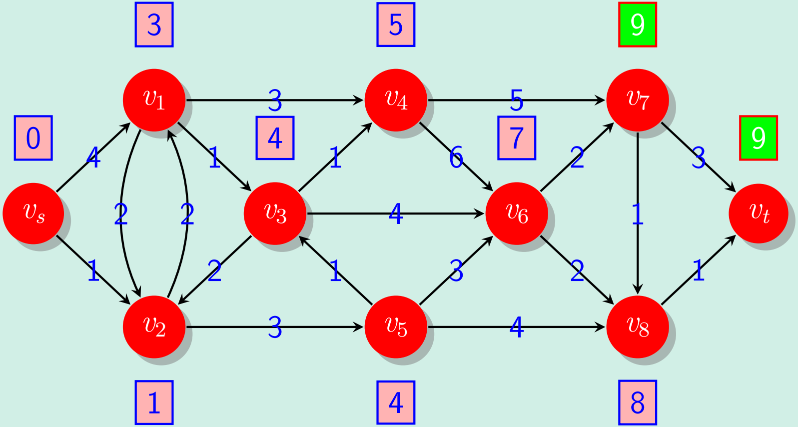


最短路问题–Dijkstra 算法

算例

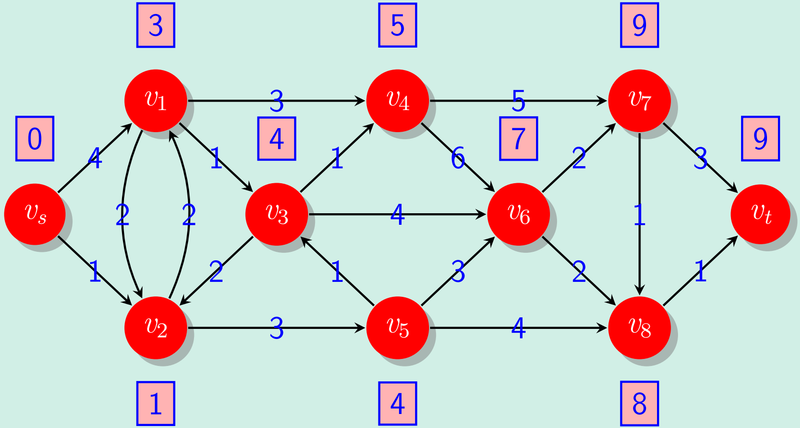


算例

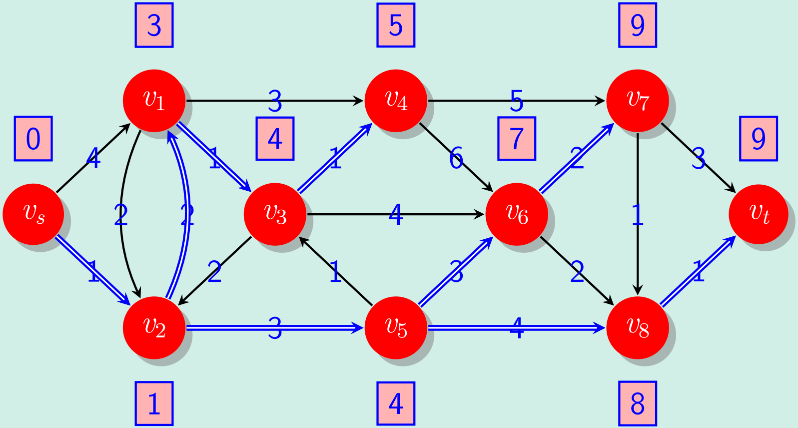

3
5
9
v_1
3
v_4
5
v_7
0
4
7
9
4
1
1
6
2
3
v_s
2
2
v_3
4
v_6
1
v_t
1
2
1
3
2
1
v_2
3
v_5
4
v_8
1
4
8

最短路问题–Dijkstra 算法

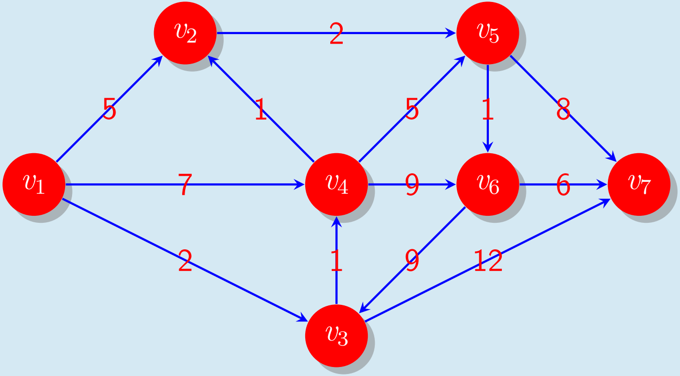
算例



算例

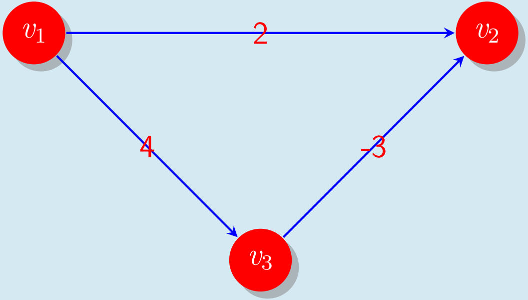


练习：用标号法 (Dijkstra 法) 求下图中 v_1 到 v_7 的最短路。



最短路问题–有负权时的算法

引例



当赋权图中存在负权时，Dijkstra 算法失效。

最短路问题–有负权时的算法

步骤

1. 开始时，令 $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \cdots, p$

最短路问题–有负权时的算法

步骤

1. 开始时，令 $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \cdots, p$
2. 对 $t = 2, 3, \cdots,$ 时，

$$d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \left\{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$

最短路问题–有负权时的算法

步骤

1. 开始时，令 $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \cdots, p$
2. 对 $t = 2, 3, \cdots,$ 时，

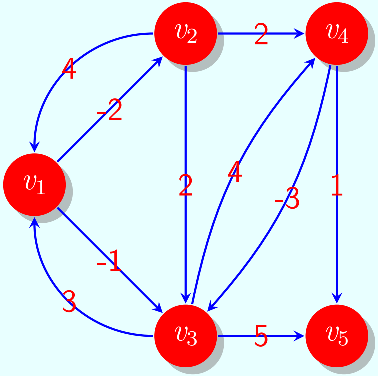
$$d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \left\{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$

3. 若进行到第 k 步时，对所有 $j = 1, 2, \cdots, p$，有：

$$d^{(k)}(v_s, v_j) = d^{(k-1)}(v_s, v_j)$$

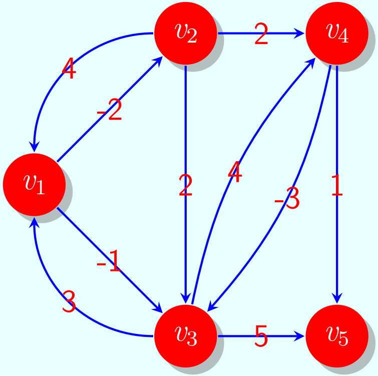
则 $\left\{ d^{(k)}(v_s, v_j) \right\}_{j=1,2,\cdots,p}$ 为到各点的最短路的权。

$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞				
v_2	4	0	2	2	∞				
v_3	3	∞	0	4	5				
v_4	∞	∞	-3	0	1				
v_5	∞	-2	∞	∞	0				

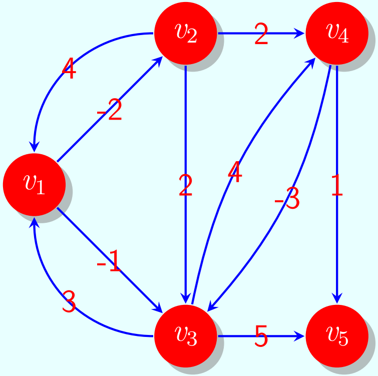
$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞				
v_3	3	∞	0	4	5				
v_4	∞	∞	-3	0	1				
v_5	∞	-2	∞	∞	0				

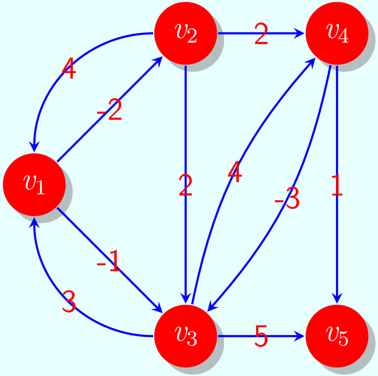
最短路问题–有负权时的算法

$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5				
v_4	∞	∞	-3	0	1				
v_5	∞	-2	∞	∞	0				

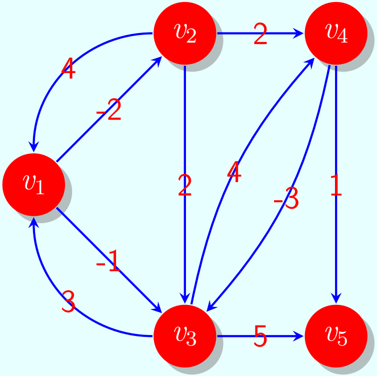
$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1				
v_5	∞	-2	∞	∞	0				

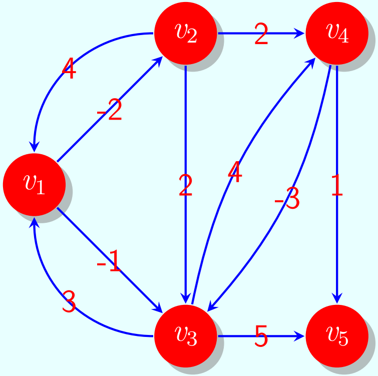
最短路问题–有负权时的算法

$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



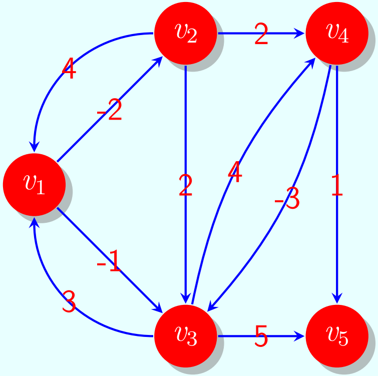
	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0				

$$d^{(0)}(v_1, v_j) = w_{ij}, j = 1, 2, \ldots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

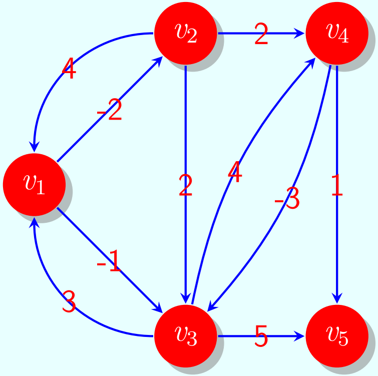
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_{i} \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0			
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

最短路问题–有负权时的算法

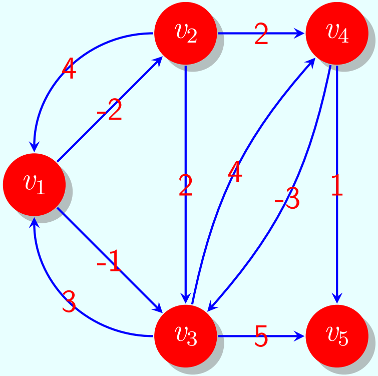
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2			
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

最短路问题–有负权时的算法

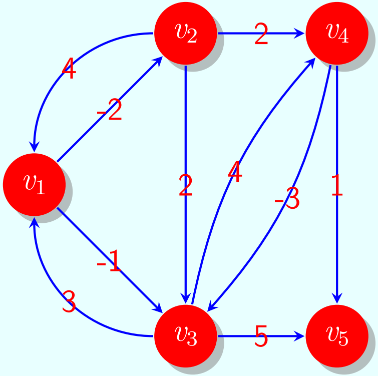
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1			
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

最短路问题–有负权时的算法

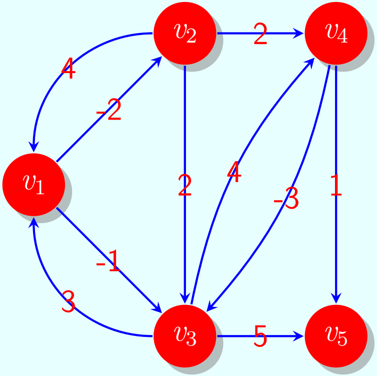
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞			
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

最短路问题–有负权时的算法

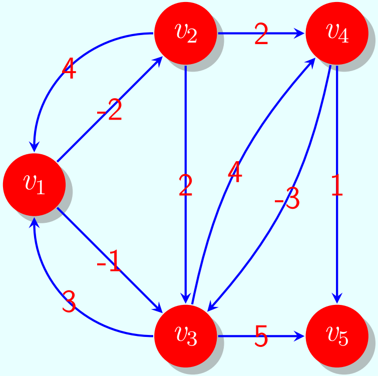
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞			

最短路问题–有负权时的算法

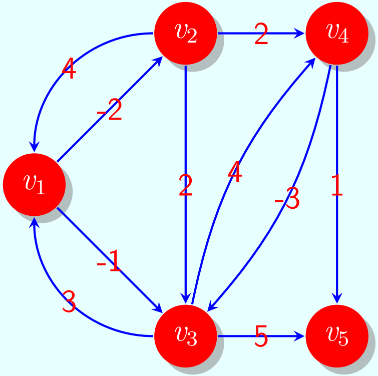
$$d^{(1)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(0)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

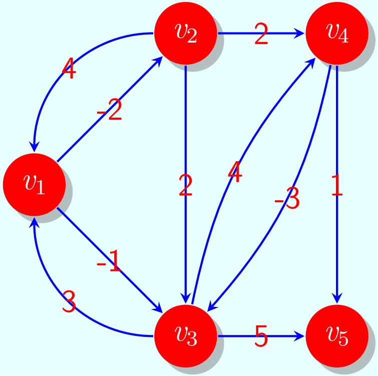
最短路问题–有负权时的算法

$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0		
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

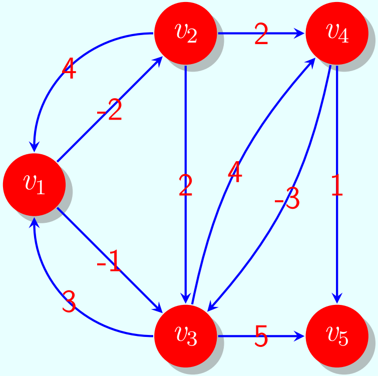
$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2		
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

最短路问题–有负权时的算法

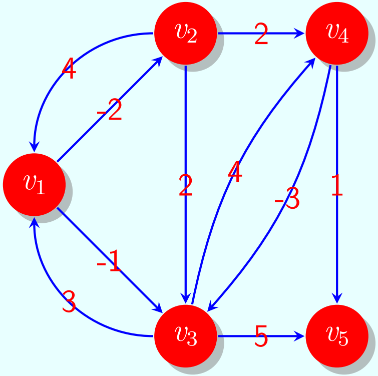
$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1		
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

最短路问题–有负权时的算法

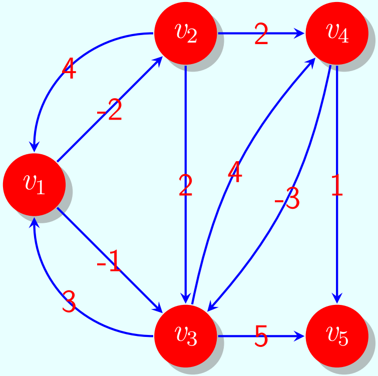
$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0		
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

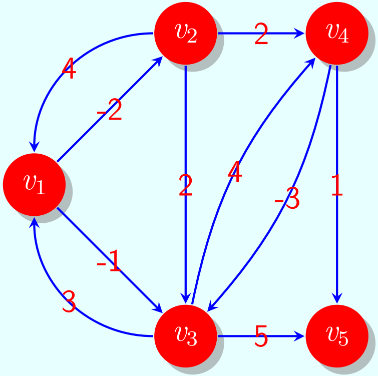
最短路问题–有负权时的算法

$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



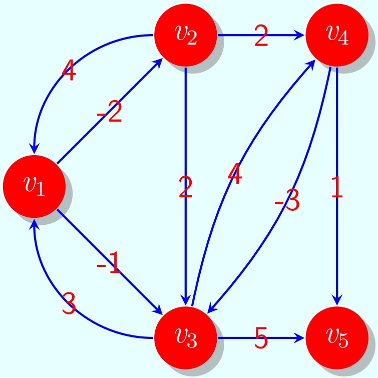
	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4		

$$d^{(2)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(1)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

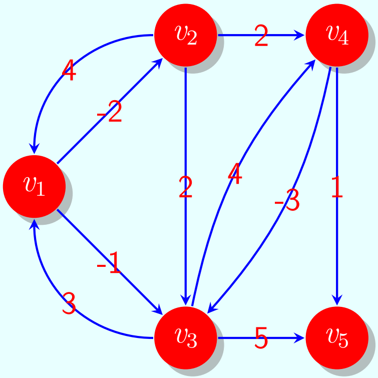
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

最短路问题–有负权时的算法

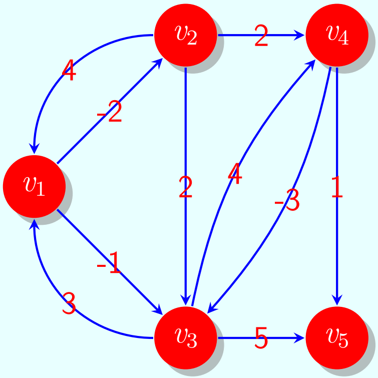
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

最短路问题–有负权时的算法

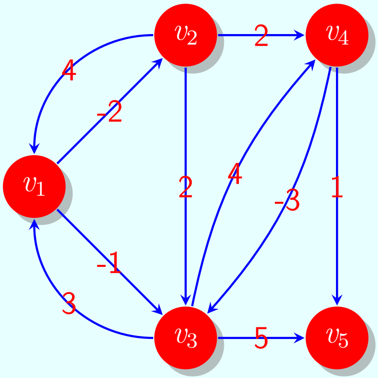
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	-2
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

最短路问题–有负权时的算法

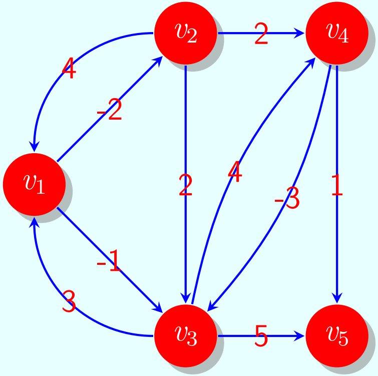
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	-2
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	-3
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

最短路问题–有负权时的算法

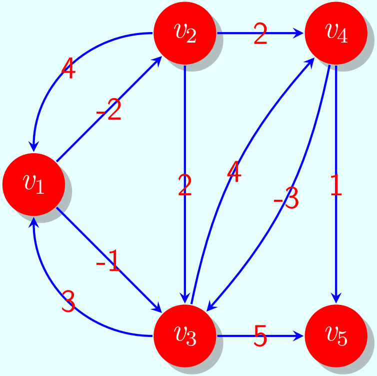
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	-2
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	-3
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	0
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	

最短路问题–有负权时的算法

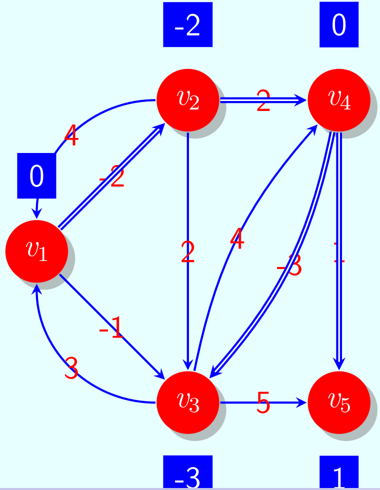
$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_{i}\left\{d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij}\right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$



	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	-2
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	-3
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	0
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	1

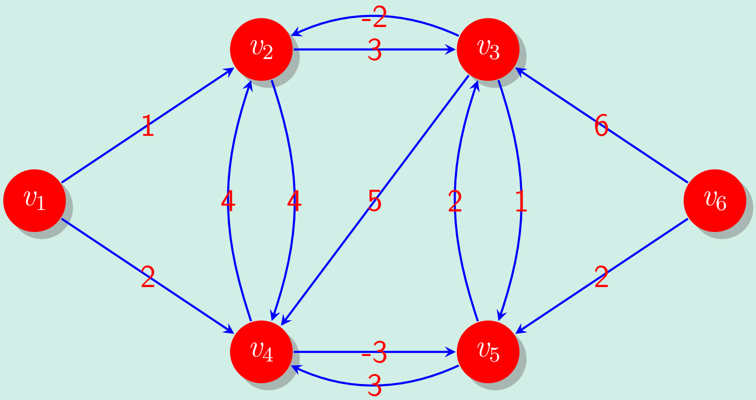
最短路问题–有负权时的算法

$$d^{(3)}(v_1, v_j) = \min_i \left\{ d^{(2)}(v_1, v_i) + w_{ij} \right\}, j = 1, 2, \cdots, p$$

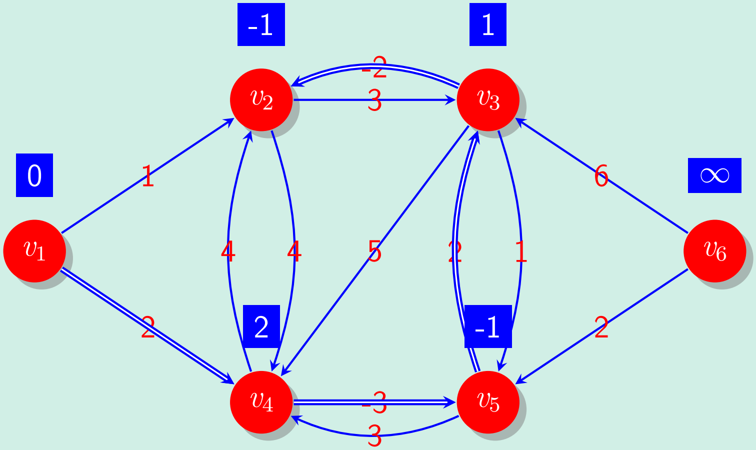


	w_{ij}					$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
v_1	0	-2	-1	∞	∞	0	0	0	0
v_2	4	0	2	2	∞	-2	-2	-2	-2
v_3	3	∞	0	4	5	-1	-1	-3	-3
v_4	∞	∞	-3	0	1	∞	0	0	0
v_5	∞	-2	∞	∞	0	∞	4	1	1

练习：求下图中 v_1 到各点的最短路。



练习：求下图中 v_1 到各点的最短路。

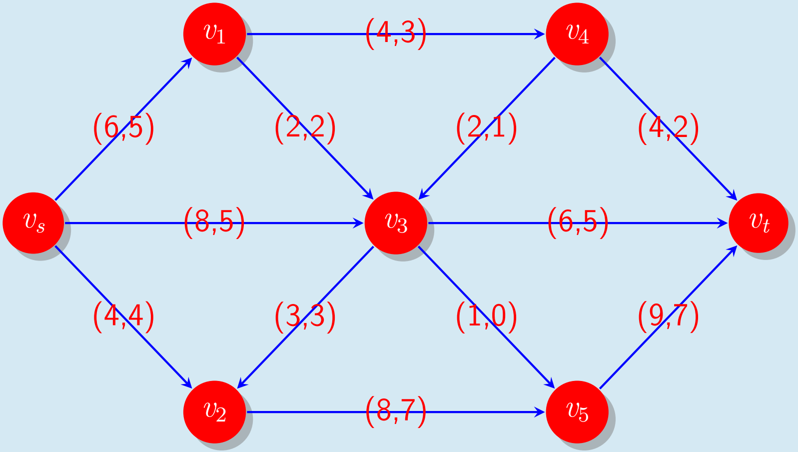


目录

7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

问题的提出

引例



网络与流

1. 网络
给定一个有向图 $D=(V,A)$，在 V 中指定了一个点为发点 v_s，又指定一个收点 v_t，其余的点都称为中间点。
对于每条弧 $(v_i,v_j)\in A$，对应有一个 $c(v_i,v_j)\geqslant 0$（可记为 $c_{ij}\geqslant 0$），称之为弧的容量，这样的图称为网络，记为 $D=(V,A,C)$。

基本概念

网络与流

1. 网络
   给定一个有向图 $D=(V,A)$，在 V 中指定了一个点为发点 v_s，又指定一个收点 v_t，其余的点都称为中间点。
   对于每条弧 $(v_i,v_j)\in A$，对应有一个 $c(v_i,v_j)\geqslant 0$（可记为 $c_{ij}\geqslant 0$），称之为弧的容量，这样的图称为网络，记为 $D=(V,A,C)$。

2. 流
   网络上的流是定义在弧集合上 A 上的一个函数 $f=\{f(v_i,v_j)\}$，称 $f(v_i,v_j)$ 为弧 (v_i,v_j) 上的流量，或记为 f_{ij}。

可行流与最大流

1. 可行流

可行流与最大流

1. 可行流
   - 容量限制条件。

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in A$$

基本概念

可行流与最大流

1. 可行流
   - 容量限制条件。

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in A$$

   - 平衡条件。

中间点：$\sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} f_{ij} - \sum\limits_{(v_j,v_i)\in A} f_{ji} = 0, i \neq s, t$

发点 v_s：$\sum\limits_{(v_s,v_j)\in A} f_{sj} - \sum\limits_{(v_j,v_s)\in A} f_{js} = D(f)$

收点 v_t：$\sum\limits_{(v_t,v_j)\in A} f_{tj} - \sum\limits_{(v_j,v_t)\in A} f_{jt} = -D(f)$

基本概念

可行流与最大流

1. 可行流
   - 容量限制条件。
   $$0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in A$$
   - 平衡条件。
   中间点：$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} f_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in A} f_{ji} = 0, i \neq s, t$$
   发点 v_s：$$\sum_{(v_s,v_j)\in A} f_{sj} - \sum_{(v_j,v_s)\in A} f_{js} = D(f)$$
   收点 v_t：$$\sum_{(v_t,v_j)\in A} f_{tj} - \sum_{(v_j,v_t)\in A} f_{jt} = -D(f)$$
2. 最大流
   在所有可行流中使得网络流量 $D(f)$ 最大的 $\{f_{ij}\}$。

基本概念

增广链

1. 若给定一个可行流 $f = \{f_{ij}\}$，把网络中使 $f_{ij} = c_{ij}$ 的弧的称为饱和弧，使 $f_{ij} < c_{ij}$ 的弧称为非饱和弧。使 $f_{ij} = 0$ 的弧称为零流弧，使 $f_{ij} > 0$ 的弧称为非零流弧。

基本概念

增广链

1. 若给定一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，把网络中使 $f_{ij}=c_{ij}$ 的弧的称为饱和弧，使 $f_{ij}<c_{ij}$ 的弧称为非饱和弧。使 $f_{ij}=0$ 的弧称为零流弧，使 $f_{ij}>0$ 的弧称为非零流弧。
2. 若 μ 是网络中联结发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，定义链的方向为从 v_s 到 v_t，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫做前向弧，记为 μ^+，另一类弧与链的方向相反，称为后向弧，记为 μ^-。

增广链

1. 若给定一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，把网络中使 $f_{ij}=c_{ij}$ 的弧的称为**饱和弧**，使 $f_{ij}<c_{ij}$ 的弧称为**非饱和弧**。使 $f_{ij}=0$ 的弧称为**零流弧**，使 $f_{ij}>0$ 的弧称为**非零流弧**。
2. 若 μ 是网络中联结发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，定义链的方向为从 v_s 到 v_t，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫做**前向弧**，记为 μ^+，另一类弧与链的方向相反，称为**后向弧**，记为 μ^-。
3. **设 f 是一个可行流，μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，若 μ 满足下列条件，称之为（关于可行流 f 的）的增广链。**

增广链

1. 若给定一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，把网络中使 $f_{ij}=c_{ij}$ 的弧的称为**饱和弧**，使 $f_{ij}<c_{ij}$ 的弧称为**非饱和弧**。使 $f_{ij}=0$ 的弧称为**零流弧**，使 $f_{ij}>0$ 的弧称为**非零流弧**。
2. 若 μ 是网络中联结发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，定义链的方向为从 v_s 到 v_t，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫做**前向弧**，记为 μ^+，另一类弧与链的方向相反，称为**后向弧**，记为 μ^-。
3. 设 f 是一个可行流，μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，若 μ 满足下列条件，称之为（关于可行流 f 的）的增广链。
   1. 在弧 $(v_i, v_j)\in\mu^+$ 上，$0\leqslant f_{ij}<c_{ij}$，即 μ^+ 中每一弧是非饱和弧。

基本概念

增广链

1. 若给定一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，把网络中使 $f_{ij}=c_{ij}$ 的弧的称为**饱和弧**，使 $f_{ij}<c_{ij}$ 的弧称为**非饱和弧**。使 $f_{ij}=0$ 的弧称为**零流弧**，使 $f_{ij}>0$ 的弧称为**非零流弧**。
2. 若 μ 是网络中联结发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，定义链的方向为从 v_s 到 v_t，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫做**前向弧**，记为 μ^+，另一类弧与链的方向相反，称为**后向弧**，记为 μ^-。
3. 设 f 是一个可行流，μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，若 μ 满足下列条件，称之为（关于可行流 f 的）的增广链。
   1. 在弧 $(v_i, v_j)\in\mu^+$ 上，$0\leqslant f_{ij}<c_{ij}$，即 μ^+ 中每一弧是非饱和弧。
   2. 在弧 $(v_i, v_j)\in\mu^-$ 上，$0<f_{ij}\leqslant c_{ij}$，即 μ^- 中每一弧是非零流弧。

截集与截量

设 $S, T \subset V, S \cap T = \varnothing$，把始点在 S 中，终点在 T 中的所有弧构成的集合，记为 (S, T)。

1. 给定网络 $D = (V, A, C)$，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V_1}$，使 $v_s \in V_1, v_t \in \overline{V_t}$，则把弧集 $(V_1, \overline{V_1})$ 称为是（分离 v_s 和 v_t 的）截集。

基本概念

截集与截量

设 $S, T \subset V, S \cap T = \varnothing$，把始点在 S 中，终点在 T 中的所有弧构成的集合，记为 (S, T)。

1. 给定网络 $D = (V, A, C)$，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V_1}$，使 $v_s \in V_1, v_t \in \overline{V}_t$，则把弧集 $(V_1, \overline{V_1})$ 称为是（分离 v_s 和 v_t 的）**截集**。
2. **给一截集 $(V_1, \overline{V_1})$，把截集 $(V_1, \overline{V_1})$ 中所有弧的容量之和称为这个截集的容量，简称为截量，记为 $c(V_1, \overline{V_1})$，即**

$$c(V_1, \overline{V_1}) = \sum_{(v_i, v_j) \in (V_1, \overline{V_1})} c_{ij}$$

基本概念

截集与截量

设 $S,T\subset V, S\cap T=\varnothing$，把始点在 S 中，终点在 T 中的所有弧构成的集合，记为 (S,T)。

1. 给定网络 $D=(V,A,C)$，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V_1}$，使 $v_s\in V_1, v_t\in\overline{V_t}$，则把弧集 $(V_1,\overline{V_1})$ 称为是（分离 v_s 和 v_t 的）**截集**。
2. 给一截集 $(V_1,\overline{V_1})$，把截集 $(V_1,\overline{V_1})$ 中所有弧的容量之和称为这个截集的容量，简称为**截量**，记为 $c(V_1,\overline{V_1})$，即

$$c(V_1,\overline{V_1})=\sum_{(v_i,v_j)\in(V_1,\overline{V_1})} c_{ij}$$

3. **可行流 f^* 是最大流，当且仅当不存在关于 f^* 的增广链。**

基本概念

截集与截量

设 $S, T \subset V, S \cap T = \varnothing$，把始点在 S 中，终点在 T 中的所有弧构成的集合，记为 (S, T)。

1. 给定网络 $D = (V, A, C)$，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V_1}$，使 $v_s \in V_1, v_t \in \overline{V_t}$，则把弧集 $(V_1, \overline{V_1})$ 称为是（分离 v_s 和 v_t 的）截集。
2. 给一截集 $(V_1, \overline{V_1})$，把截集 $(V_1, \overline{V_1})$ 中所有弧的容量之和称为这个截集的容量，简称为截量，记为 $c(V_1, \overline{V_1})$，即

$$c(V_1, \overline{V_1}) = \sum_{(v_i, v_j) \in (V_1, \overline{V_1})} c_{ij}$$

3. 可行流 f^* 是最大流，当且仅当不存在关于 f^* 的增广链。
4. 最大流量最小截量定理：任一个网络 D 中，从 v_s 到 v_t 的最大流的流量等于分离 v_s, v_t 的最小截集的容量。

确定网络最大流的方法

标号法

1. 标号过程

确定网络最大流的方法

标号法

1. 标号过程
   1. 给 v_s 标上 $(0, +\infty)$;

确定网络最大流的方法

标号法

1. 标号过程
   1. 给 v_s 标上 $(0,+\infty)$；
   2. 若在弧 (v_i,v_j) 上，$f_{ij}<c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i,l(v_j))$，其中 $l(v_j)=\min[l(v_i),c_{ij}-f_{ij}]$；

标号法

1. 标号过程
   1. 给 v_s 标上 $(0,+\infty)$；
   2. 若在弧 (v_i,v_j) 上，$f_{ij}<c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i,l(v_j))$ ，其中 $l(v_j)=\min[l(v_i),c_{ij}-f_{ij}]$；
   3. 若在弧 (v_j,v_i) 上，$f_{ji}>0$，则给 v_j 标号 $(-v_i,l(v_j))$ ，其中 $l(v_j)=\min[l(v_i),f_{ji}]$；

确定网络最大流的方法

标号法

1. 标号过程
   1. 给 v_s 标上 $(0,+\infty)$；
   2. 若在弧 (v_i,v_j) 上，$f_{ij}<c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i,l(v_j))$，其中 $l(v_j)=\min[l(v_i),c_{ij}-f_{ij}]$；
   3. 若在弧 (v_j,v_i) 上，$f_{ji}>0$，则给 v_j 标号 $(-v_i,l(v_j))$，其中 $l(v_j)=\min[l(v_i),f_{ji}]$；
   4. 重复上述步骤，一旦 v_t 被标上号，表明得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ，转入调整过程。

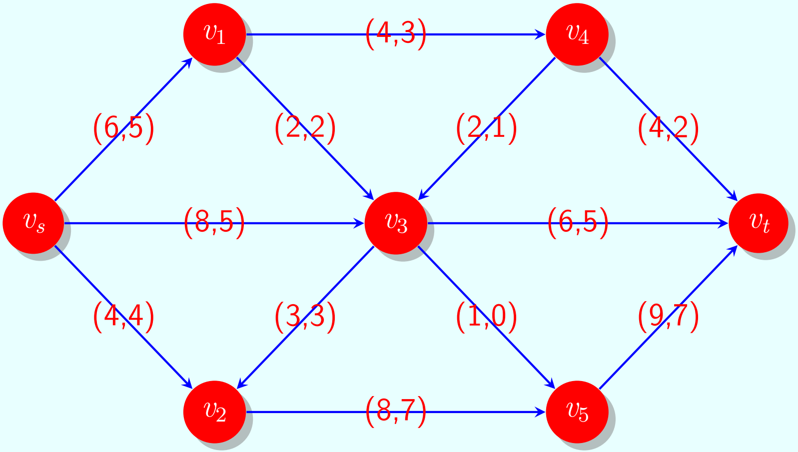
确定网络最大流的方法

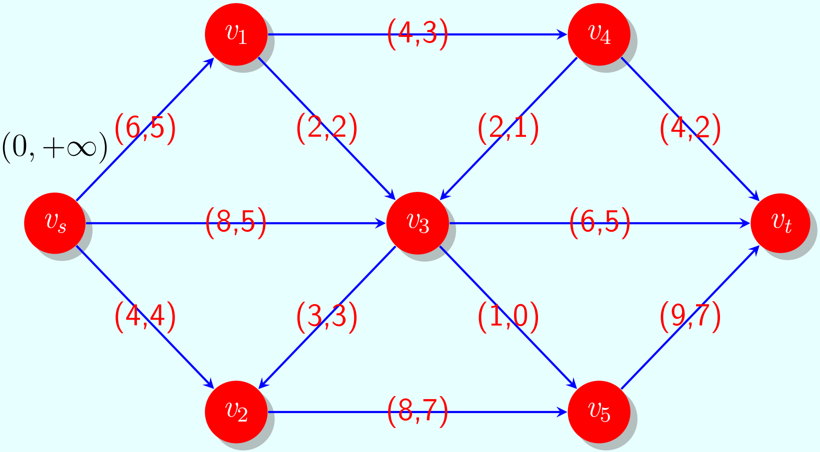
标号法

1. 标号过程
   1. 给 v_s 标上 $(0, +\infty)$；
   2. 若在弧 (v_i, v_j) 上，$f_{ij} < c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i, l(v_j))$，其中 $l(v_j) = \min[l(v_i), c_{ij} - f_{ij}]$；
   3. 若在弧 (v_j, v_i) 上，$f_{ji} > 0$，则给 v_j 标号 $(-v_i, l(v_j))$，其中 $l(v_j) = \min[l(v_i), f_{ji}]$；
   4. 重复上述步骤，一旦 v_t 被标上号，表明得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ，转入调整过程。
2. 调整过程

$$f_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij} & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$$

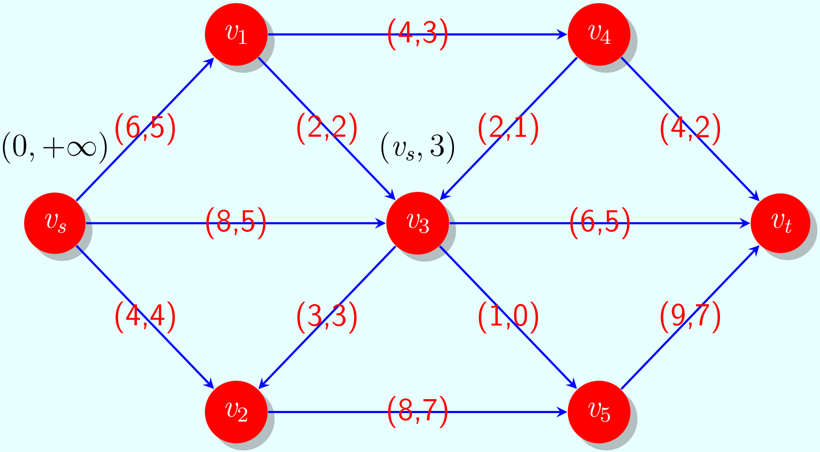
确定网络最大流的方法　标号法

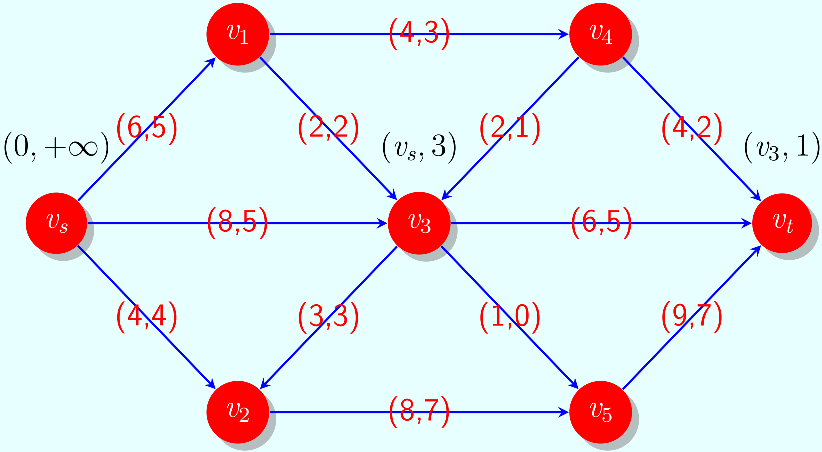


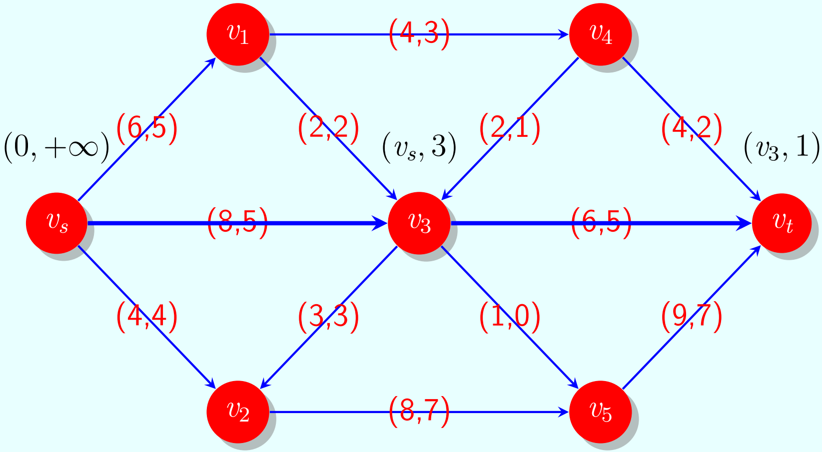


$(0,+\infty)$
v_s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_t
(6,5)
(8,5)
(4,4)
(4,3)
(2,2)
(3,3)
(8,7)
(2,1)
(6,5)
(1,0)
(4,2)
(9,7)

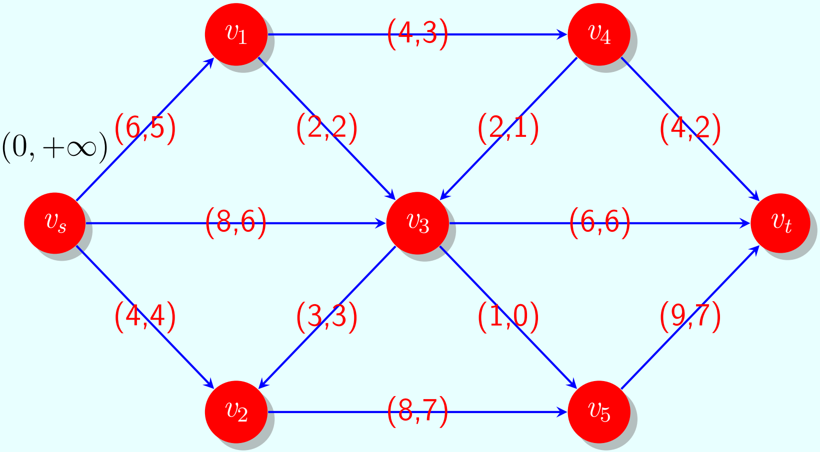
确定网络最大流的方法　标号法

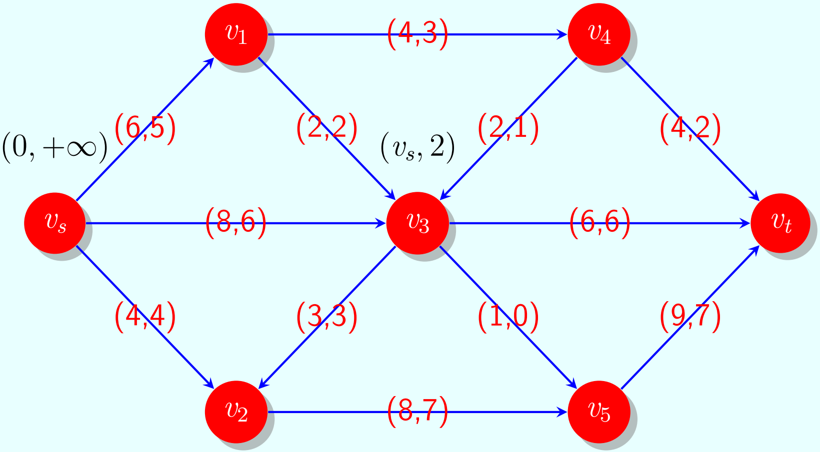



$(0,+\infty)$
v_s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_t
(6,5)
(4,4)
(8,5)
(4,3)
(2,2)
(3,3)
(8,7)
(2,1)
(1,0)
(6,5)
(4,2)
(9,7)
$(v_s,3)$
$(v_3,1)$

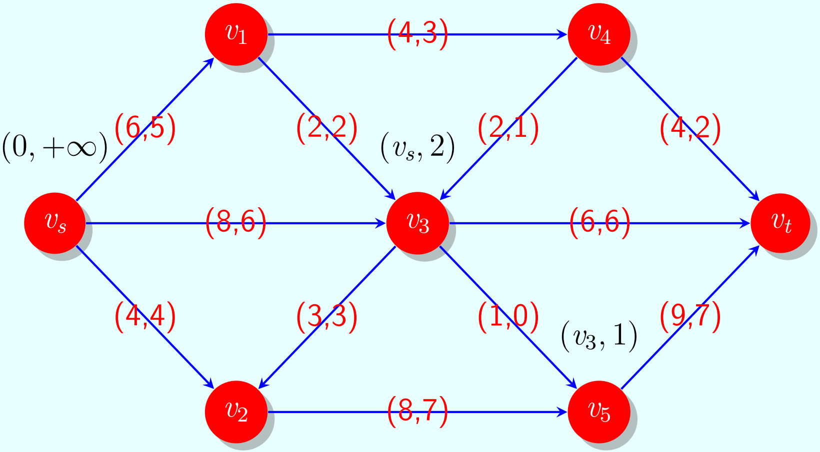

v_1
v_4
v_s
v_3
v_t
v_2
v_5
(4,3)
(6,5)
(2,2)
(2,1)
(4,2)
(8,5)
(6,5)
(4,4)
(3,3)
(1,0)
(9,7)
(8,7)
$(0,+\infty)$
$(v_s,3)$
$(v_3,1)$

确定网络最大流的方法　标号法



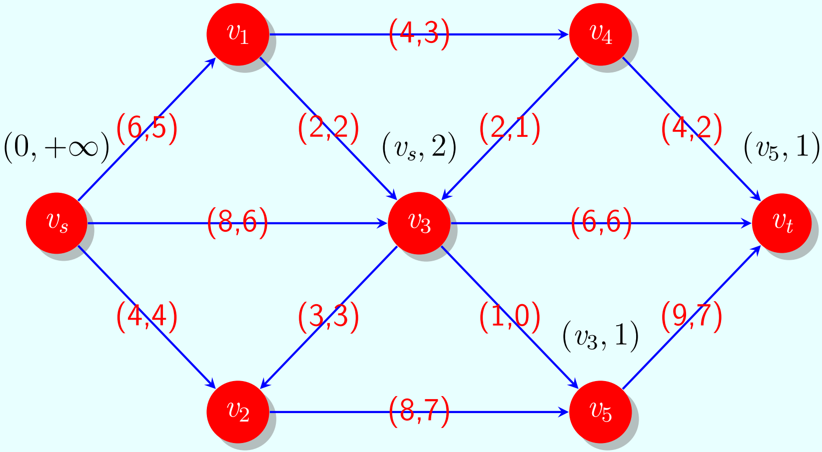


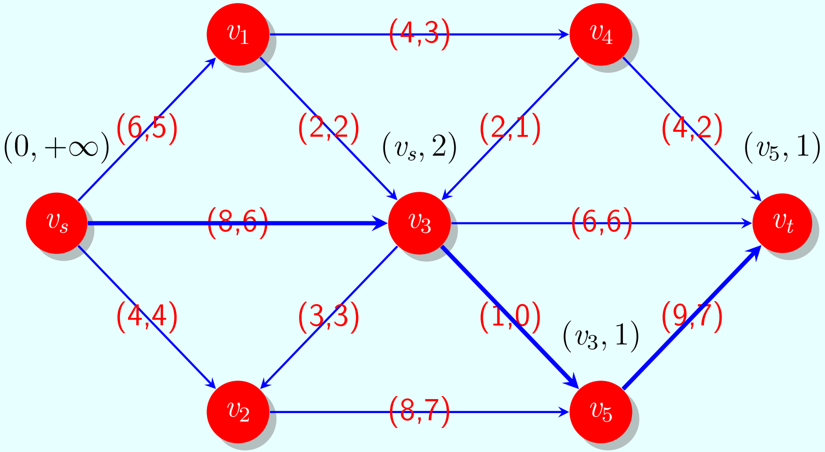
v_1
v_4
v_s
v_3
v_t
v_2
v_5
(4,3)
(6,5)
(2,2)
(2,1)
(4,2)
$(0, +\infty)$
$(v_s, 2)$
(8,6)
(6,6)
(4,4)
(3,3)
(1,0)
(9,7)
(8,7)



v_1
$(4,3)$
v_4
$(6,5)$
$(2,2)$
$(2,1)$
$(4,2)$
$(0,+\infty)$
$(v_s,2)$
v_s
$(8,6)$
v_3
$(6,6)$
v_t
$(4,4)$
$(3,3)$
$(1,0)$
$(v_3,1)$
$(9,7)$
v_2
$(8,7)$
v_5

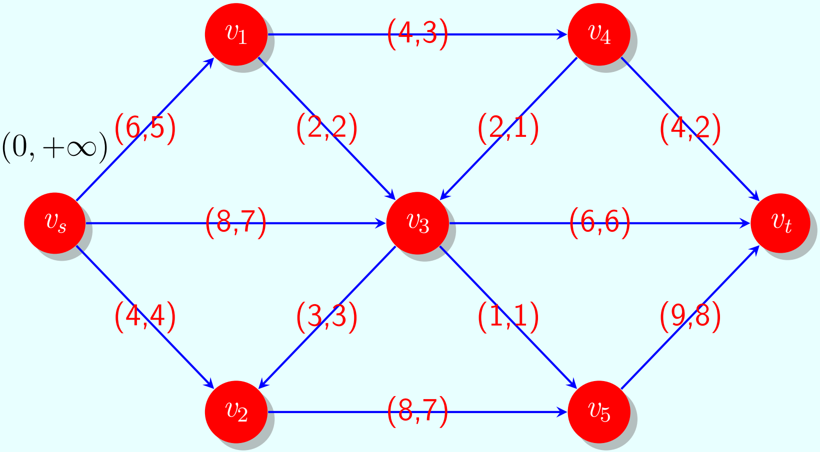
确定网络最大流的方法　标号法



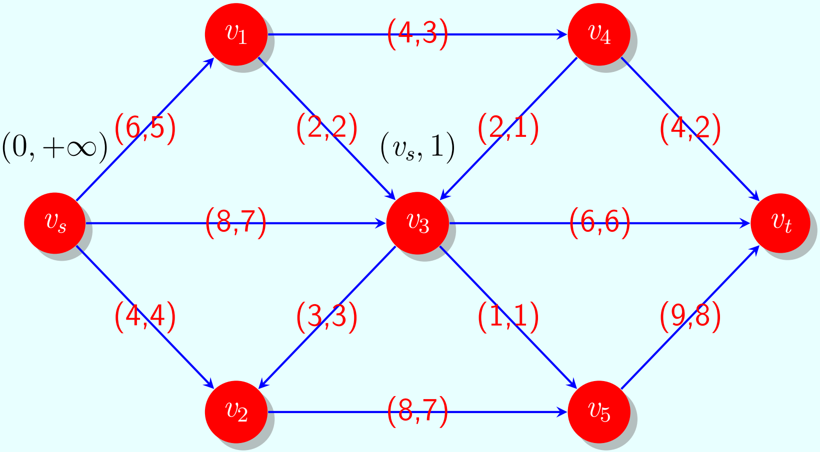


v_1
(4,3)
v_4
(6,5)
(2,2)
(2,1)
(4,2)
$(0,+\infty)$
$(v_s,2)$
$(v_5,1)$
v_s
(8,6)
v_3
(6,6)
v_t
(4,4)
(3,3)
(1,0)
(9,7)
$(v_3,1)$
v_2
(8,7)
v_5

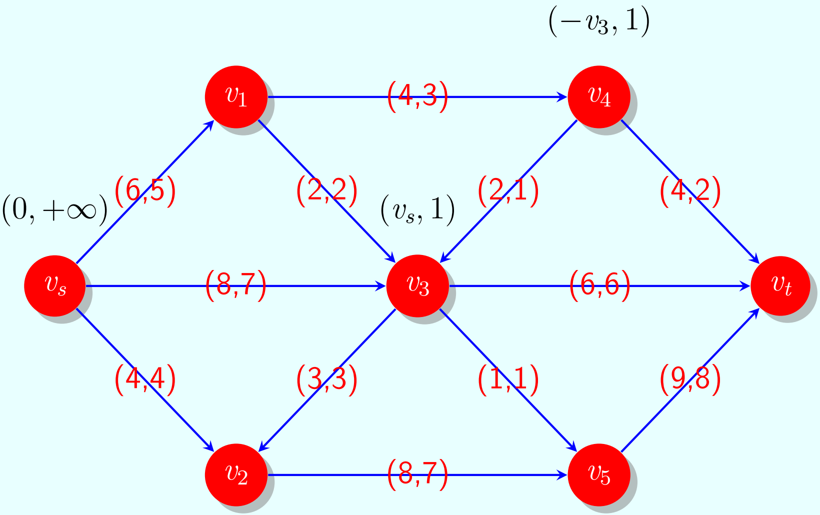
确定网络最大流的方法　标号法



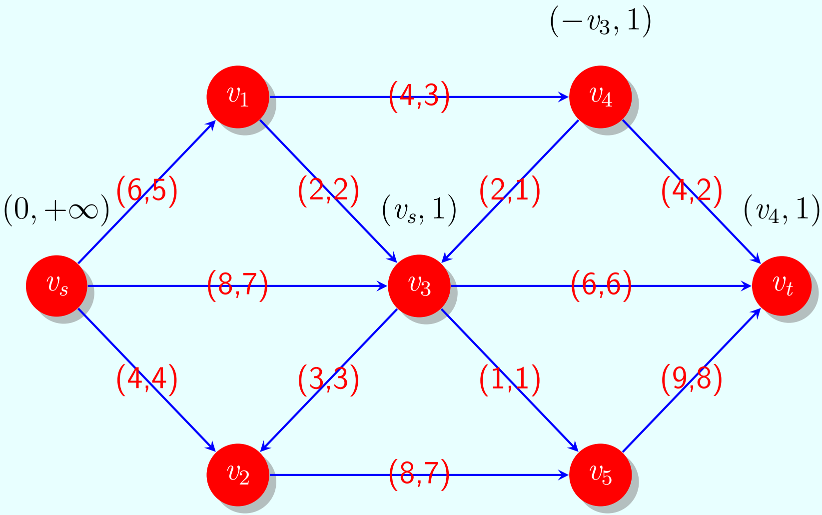
确定网络最大流的方法　标号法



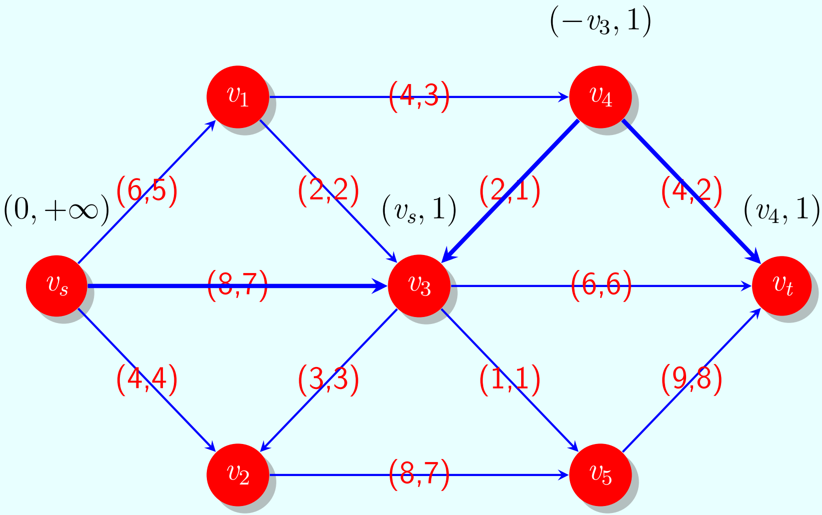
确定网络最大流的方法　标号法



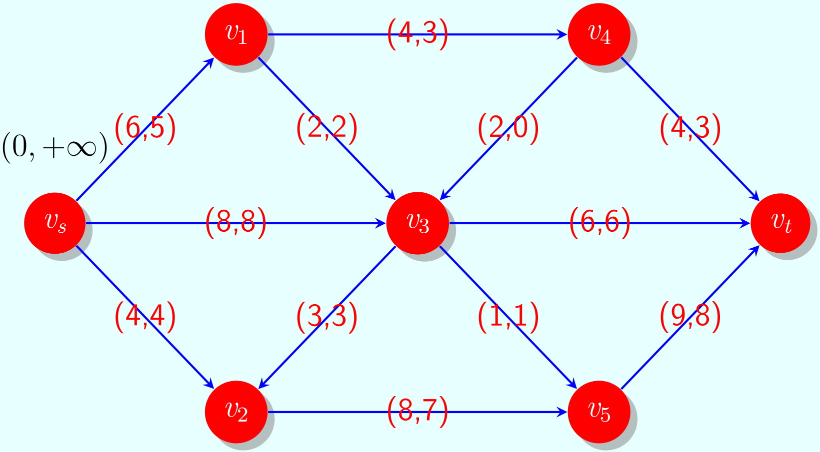
确定网络最大流的方法　标号法

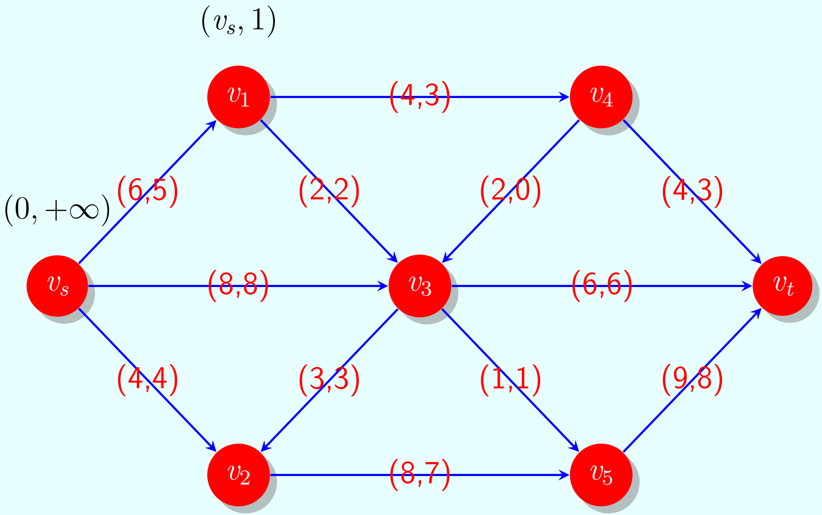


确定网络最大流的方法 标号法



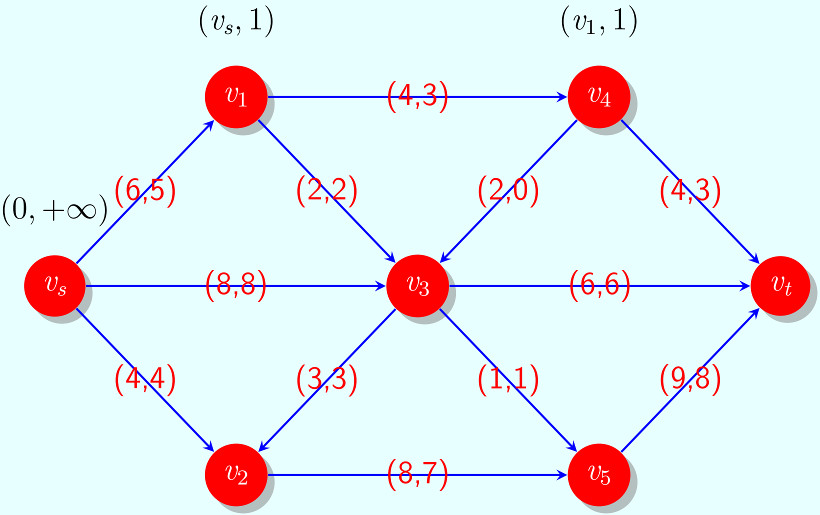
确定网络最大流的方法　标号法

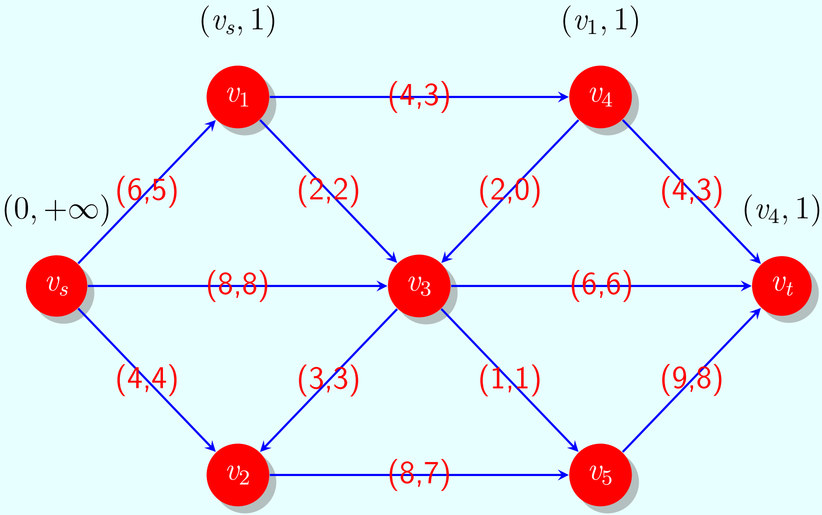




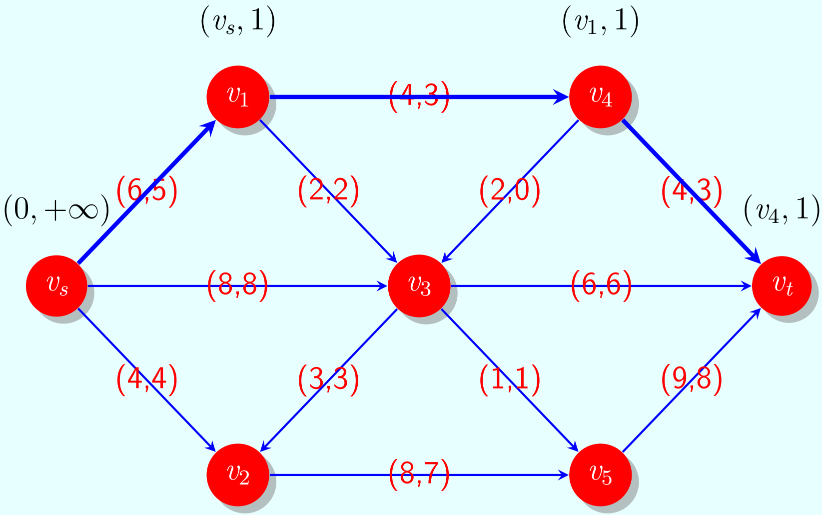
$(v_s, 1)$
$(0, +\infty)$
v_1
v_4
v_s
v_3
v_t
v_2
v_5
(4,3)
(6,5)
(2,2)
(2,0)
(4,3)
(8,8)
(6,6)
(4,4)
(3,3)
(1,1)
(9,8)
(8,7)

确定网络最大流的方法　标号法

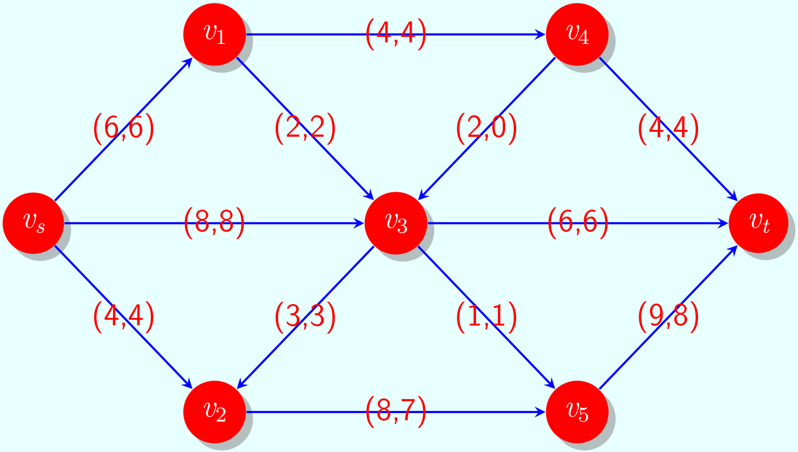



$(v_s, 1)$
$(v_1, 1)$
v_1
(4,3)
v_4
(6,5)
(2,2)
(2,0)
(4,3)
$(0, +\infty)$
$(v_4, 1)$
v_s
(8,8)
v_3
(6,6)
v_t
(4,4)
(3,3)
(1,1)
(9,8)
v_2
(8,7)
v_5

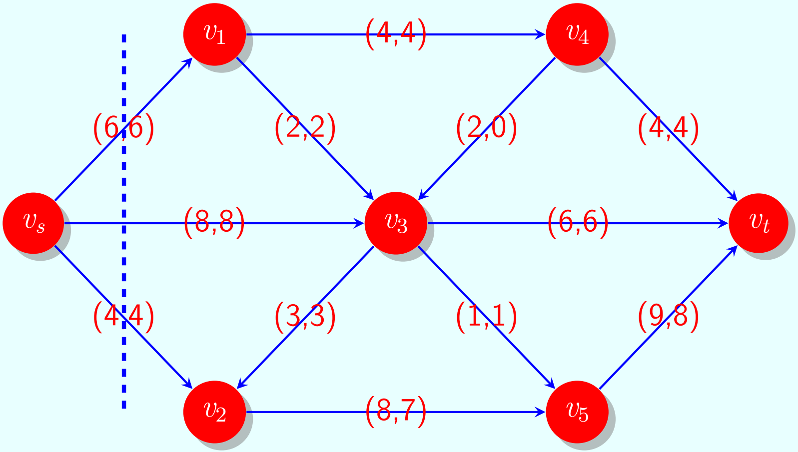
确定网络最大流的方法　标号法



确定网络最大流的方法 标号法



确定网络最大流的方法　标号法



目录

7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

最小费用最大流

问题的提出

对于网络 $D=(V,A,C)$，当网络流量达到最大时，每条弧上的分配 f_{ij}^* 是不同的，若加上流在每个弧上的费用 b_{ij} 也不同，那么在最大流 $D(f^*)$ 下的总费用 $\sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} b_{ij}f_{ij}^*$ 便不同，最小费用最大流问题就是要确定最大流在不同弧上的分配，使得总费用最小，即

$$B(f^*)=\min\sum_{(v_i,v_j)\in A} b_{ij}f_{ij}^*$$

问题的解法

1. 费用最小对应于从发点到收点的最短路。所以，应该考虑在最短路上调整流量，带来费用的增长是最少。

问题的解法

1. 费用最小对应于从发点到收点的最短路。所以，应该考虑在最短路上调整流量，带来费用的增长是最少。
2. 但是非增广链是没有办法调整流量的。所以，要在所有增广链中寻找最短路。

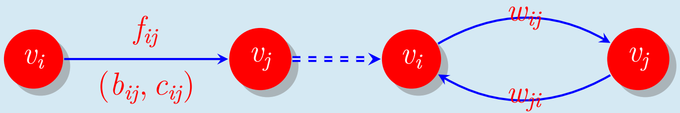
最小费用最大流

问题的解法

1. 费用最小对应于从发点到收点的最短路。所以，应该考虑在最短路上调整流量，带来费用的增长是最少。
2. 但是非增广链是没有办法调整流量的。所以，要在所有增广链中寻找最短路。
3. 另外最大流时网络中也不存在增广链，所以，当无增广链时，也不应该存在从发点到收点的最短路。

问题的解法

1. 费用最小对应于从发点到收点的最短路。所以，应该考虑在最短路上调整流量，带来费用的增长是最少。
2. 但是非增广链是没有办法调整流量的。所以，要在所有增广链中寻找最短路。
3. 另外最大流时网络中也不存在增广链，所以，当无增广链时，也不应该存在从发点到收点的最短路。
4. 实现方法：



$$w_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & f_{ij} < c_{ij} \\ +\infty, & f_{ij} = c_{ij} \end{cases} \quad w_{ji} = \begin{cases} -b_{ij}, & f_{ij} > 0 \\ +\infty, & f_{ij} = 0 \end{cases}$$

最小费用最大流 · 求解步骤

1. 取 $f^{(0)} = 0$ 为初始可行流。

最小费用最大流 · 求解步骤

1. 取 $f^{(0)} = 0$ 为初始可行流。
2. 若在第 $k-1$ 步得到最小费用流 $f^{(k-1)}$，则构造赋权有向图 $W(f^{(k-1)})$，在 $W(f^{(k-1)})$ 中寻找从 v_s 到 v_t 的最短路。

最小费用最大流 · 求解步骤

1. 取 $f^{(0)} = 0$ 为初始可行流。
2. 若在第 $k-1$ 步得到最小费用流 $f^{(k-1)}$, 则构造赋权有向图 $W(f^{(k-1)})$, 在 $W(f^{(k-1)})$ 中寻找从 v_s 到 v_t 的最短路。
3. 若不存在最短路，则 $f^{(k-1)}$ 为最小费用最大流。

最小费用最大流 · 求解步骤

1. 取 $f^{(0)} = 0$ 为初始可行流。
2. 若在第 $k-1$ 步得到最小费用流 $f^{(k-1)}$，则构造赋权有向图 $W(f^{(k-1)})$，在 $W(f^{(k-1)})$ 中寻找从 v_s 到 v_t 的最短路。
3. 若不存在最短路，则 $f^{(k-1)}$ 为最小费用最大流。
4. 若存在最短路，则在原网络 D 中得到相应的增广链 μ，在增广链 μ 上对 $f^{(k-1)}$ 进行调整，调整量为：

$$\theta = \min\left[\min_{\mu^+}(c_{ij} - f_{ij}^{(k-1)}), \min_{\mu^-}(f_{ij}^{(k-1)})\right]$$

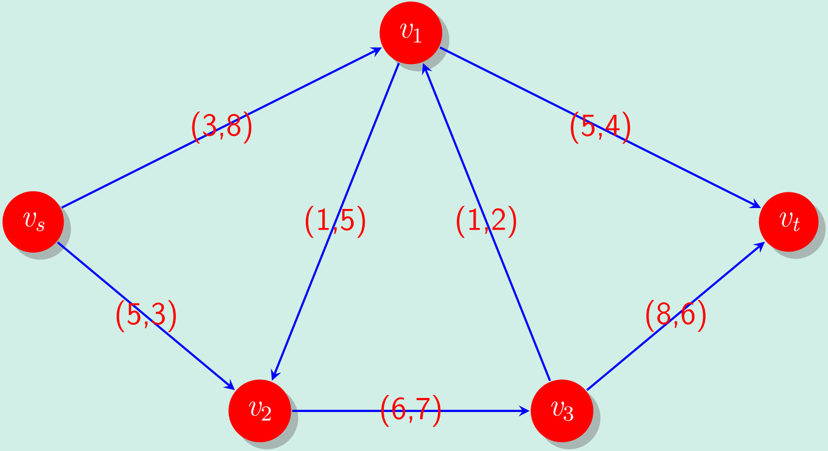
令

$$f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} f_{ij}^{(k-1)} + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(k-1)} - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}^{(k-1)} & (v_i, v_j) \notin \mu^- \end{cases}$$

得到新的可流 $f^{(k)}$，再对 $f^{(k)}$ 重复上述步骤。

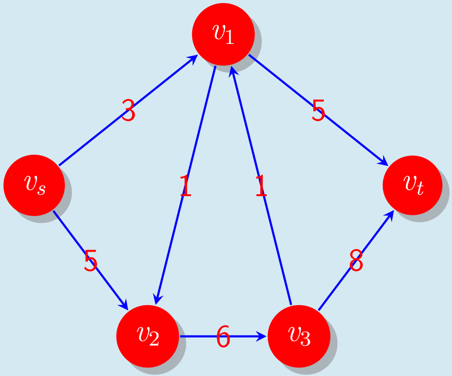
最小费用最大流

算例：弧旁数字为 (b_{ij}, c_{ij})。

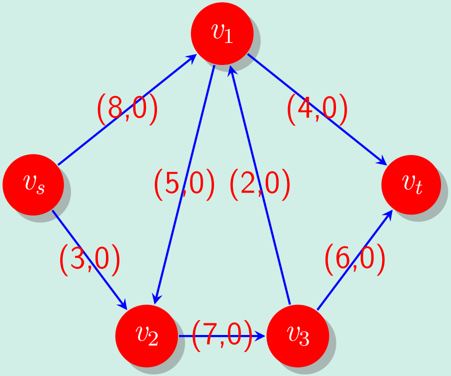


最小费用最大流

费用图

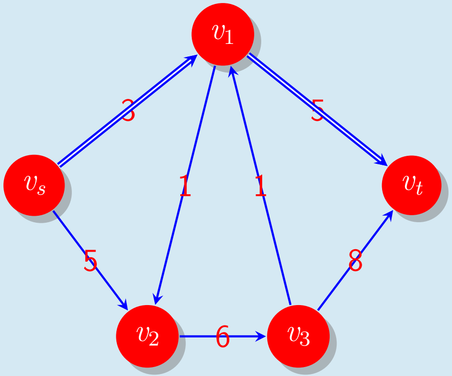


流量图

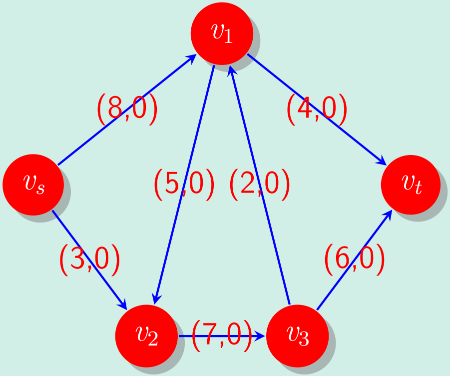


最小费用最大流

费用图

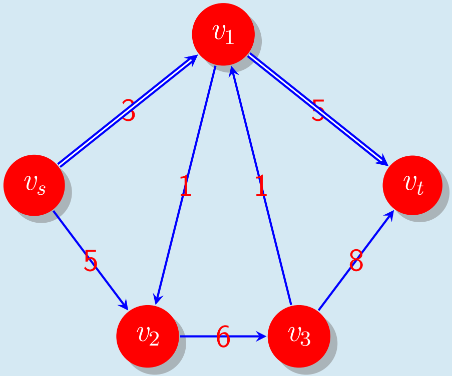


流量图

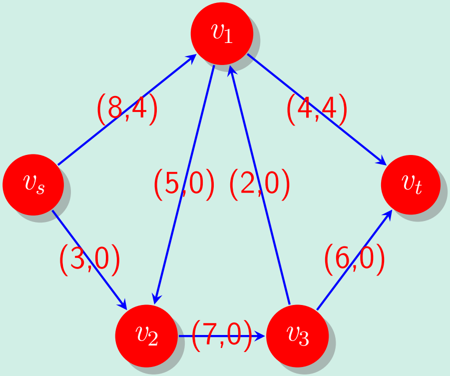


最小费用最大流

费用图

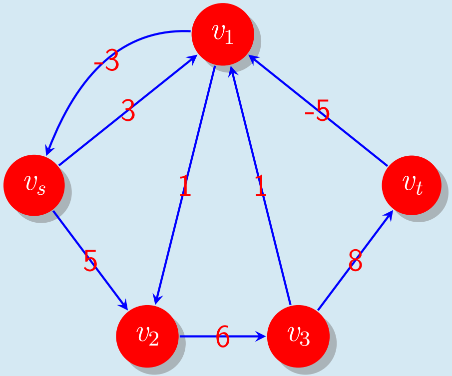


流量图

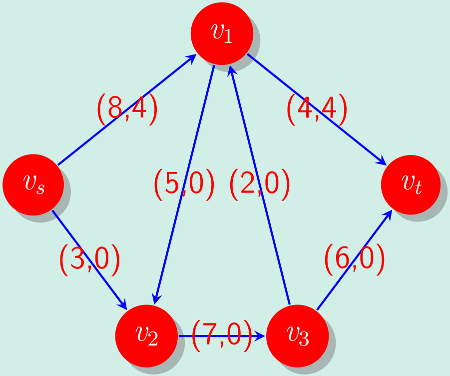


最小费用最大流

费用图

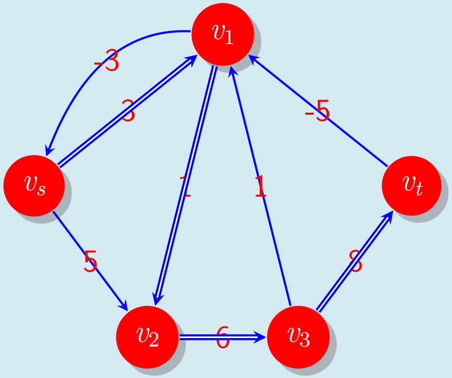


流量图

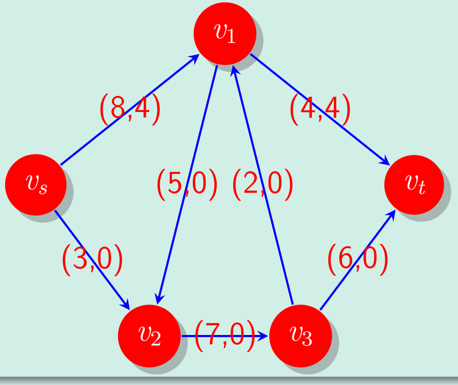


最小费用最大流

费用图

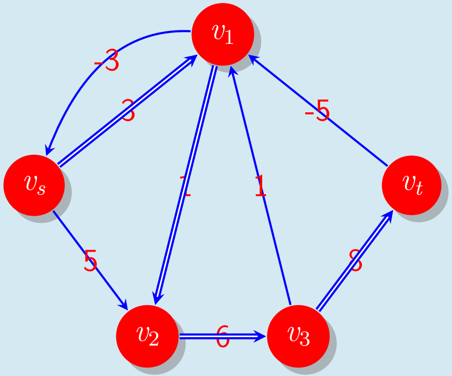


流量图

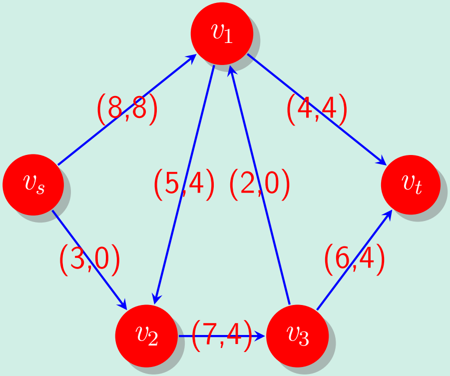


最小费用最大流

费用图

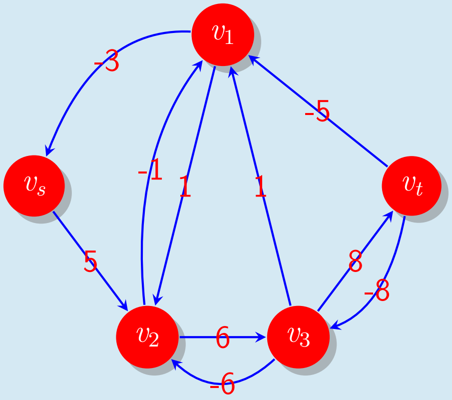


流量图

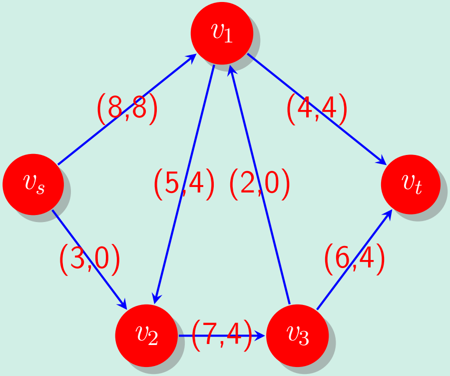


最小费用最大流

费用图

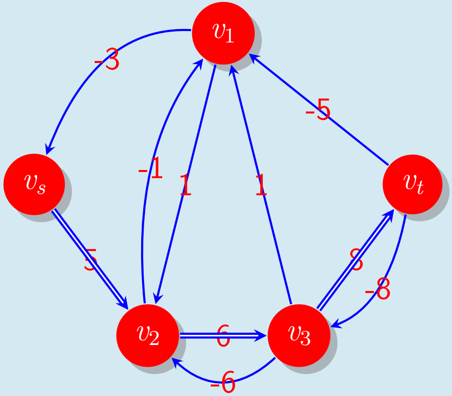


流量图

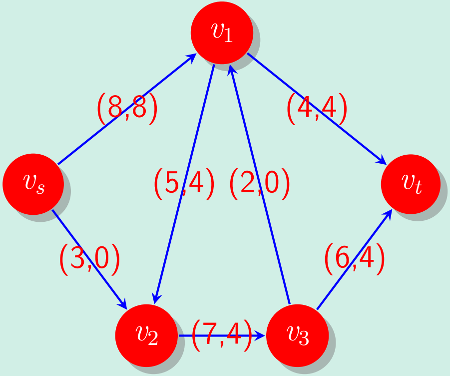


最小费用最大流

费用图

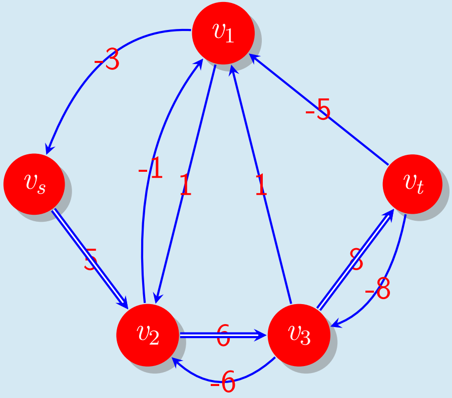


流量图

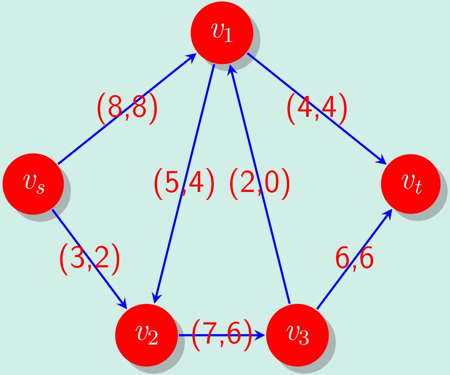


最小费用最大流

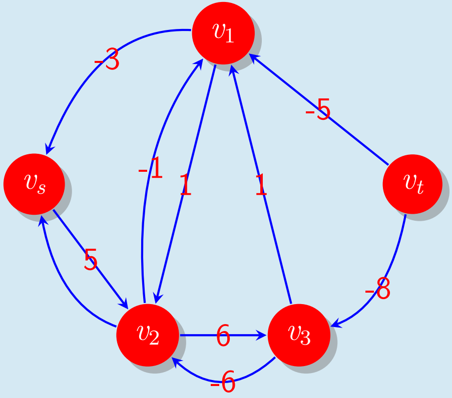
费用图



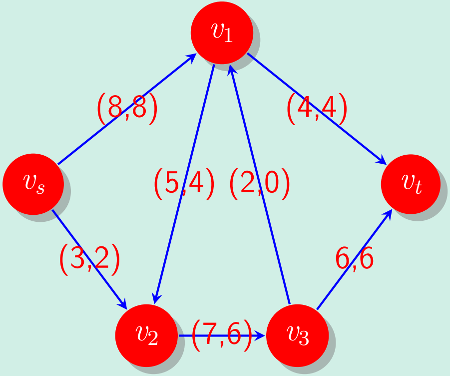
流量图



费用图



流量图

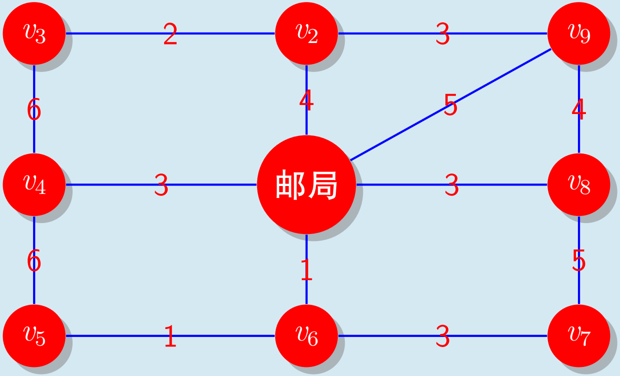


目录

7 图论
- 图的基本概念
- 树
- 最短路问题
- 网络最大流问题
- 最小费用最大流问题
- 中国邮递员问题

问题的提出

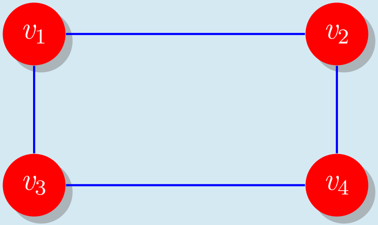
我国学者管梅谷在 1962 年提出了邮递员问题，国际上一般通称为“中国邮递员问题”。



一笔画问题

给定一个连通图 G，若存在一条链，过每条边一次且仅一次，则称这条链为欧拉链。若存在一个简单圈，过每条边一次且仅一次，称此圈为欧拉圈。一个图若有欧拉圈，则称为欧拉图。

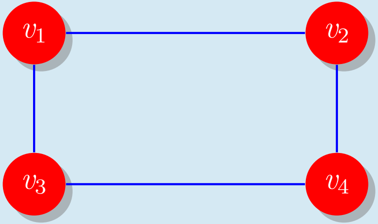
1. 连通多重图是欧拉图，当且仅当图中无奇点。



一笔画问题

给定一个连通图 G，若存在一条链，过每条边一次且仅一次，则称这条链为欧拉链。若存在一个简单圈，过每条边一次且仅一次，称此圈为欧拉圈。一个图若有欧拉圈，则称为欧拉图。

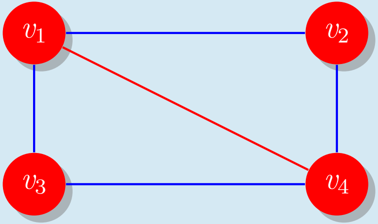
1. 连通多重图是欧拉图，当且仅当图中无奇点。
2. 连通多重图有欧拉链，当且仅当图中有两个奇点。



一笔画问题

给定一个连通图 G，若存在一条链，过每条边一次且仅一次，则称这条链为**欧拉链**。若存在一个简单圈，过每条边一次且仅一次，称此圈为**欧拉圈**。一个图若有欧拉圈，则称为**欧拉图**。

1. 连通多重图是欧拉图，当且仅当图中无奇点。
2. 连通多重图有欧拉链，当且仅当图中有两个奇点。



中国邮递员问题

奇偶点图上作业法

1. 配对图中所有奇点。

中国邮递员问题

奇偶点图上作业法

1. 配对图中所有奇点。
2. 每对奇点确定一条链，并在这条链上所有的边加重复边。

中国邮递员问题

奇偶点图上作业法

1. 配对图中所有奇点。
2. 每对奇点确定一条链，并在这条链上所有的边加重复边。
3. 删除多余的边。依据有：

中国邮递员问题

奇偶点图上作业法

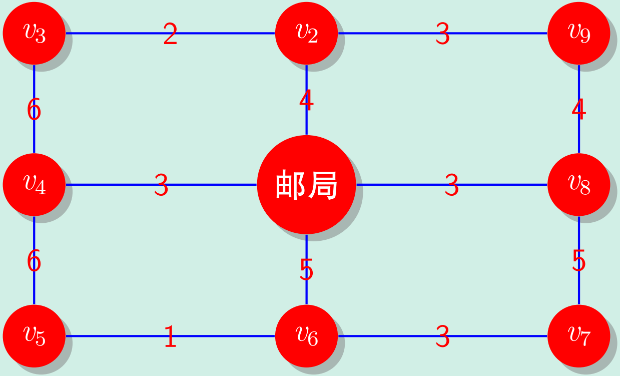
1. 配对图中所有奇点。
2. 每对奇点确定一条链，并在这条链上所有的边加重复边。
3. 删除多余的边。依据有：
   - 在最优方案中，每条边上最多有一条重复边。

中国邮递员问题

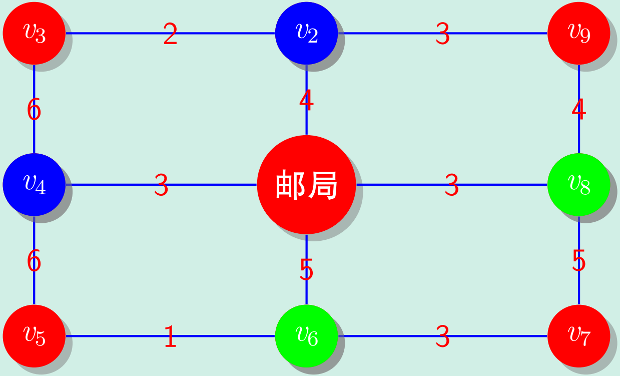
奇偶点图上作业法

1. 配对图中所有奇点。
2. 每对奇点确定一条链，并在这条链上所有的边加重复边。
3. 删除多余的边。依据有：
   - 在最优方案中，每条边上最多有一条重复边。
   - 在最优方案中，每个圈中重复边的总权数不大于该圈总权的一半。

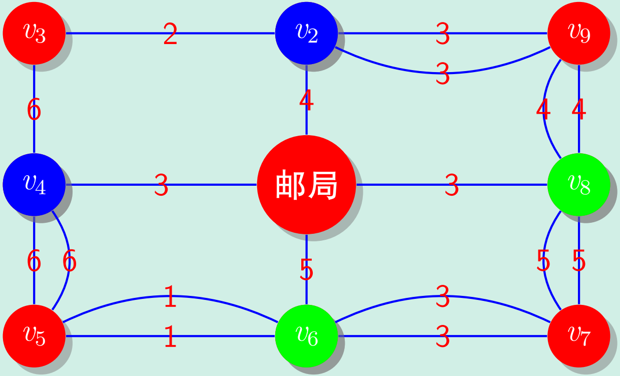
奇偶点图上作业法



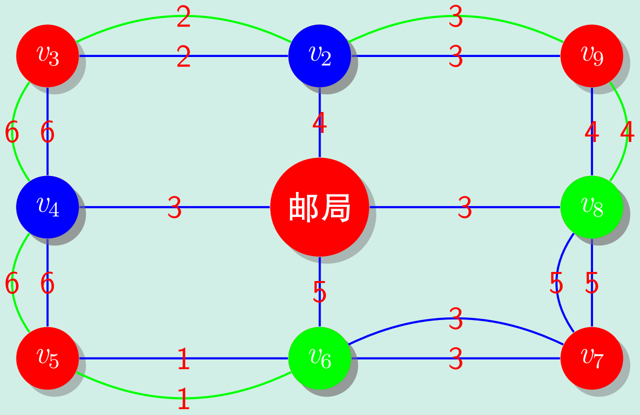
奇偶点图上作业法



奇偶点图上作业法

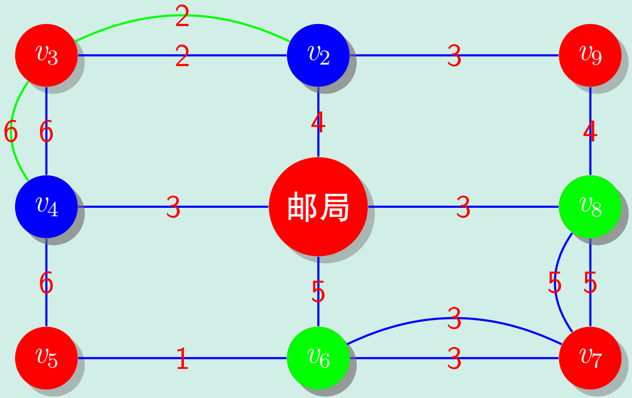


奇偶点图上作业法

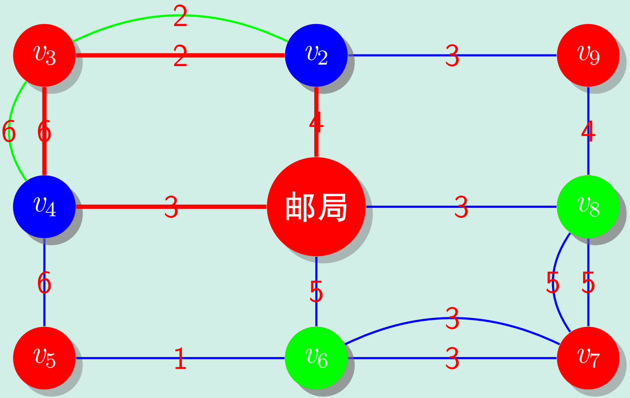


中国邮递员问题

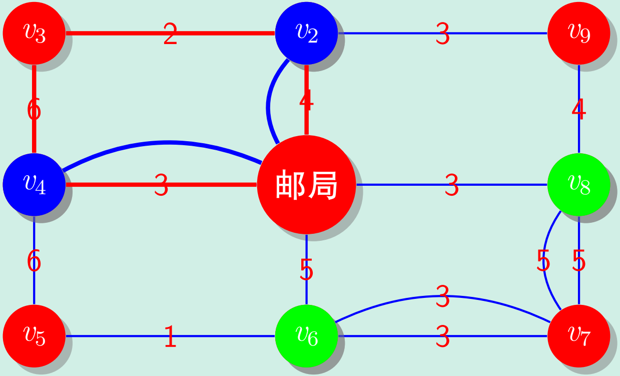
奇偶点图上作业法



奇偶点图上作业法

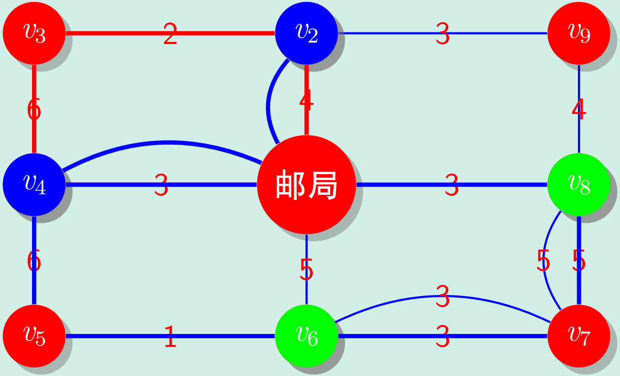


奇偶点图上作业法

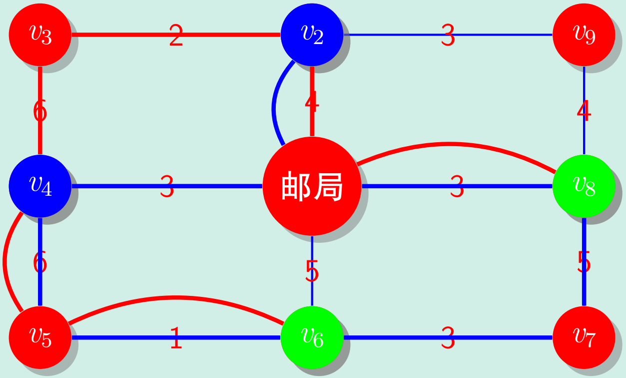


中国邮递员问题

奇偶点图上作业法



奇偶点图上作业法



Section 8

网络规划

本章内容

8 网络规划
- 工程网络图
- 时间参数和关键线路的确定
- 网络计划的优化
- 网络计划软件

概述

引言

1. 用网络分析的方法编制的计划称为网络计划。

概述

引言

1. 用网络分析的方法编制的计划称为网络计划。
2. 它是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。

概述

引言

1. 用网络分析的方法编制的计划称为网络计划。
2. 它是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。
3. 随后，国外陆续出现了一些计划管理的新方法，如关键路线法（critical path method，缩写为 CPM）、计划评审法（program evaluation and review technique，缩写为 PERT）等，这些方法都是建立在网络模型基础上，称为网络计划技术。

引言

1. 用网络分析的方法编制的计划称为网络计划。
2. 它是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。
3. 随后，国外陆续出现了一些计划管理的新方法，如关键路线法（critical path method，缩写为 CPM）、计划评审法（program evaluation and review technique，缩写为 PERT）等，这些方法都是建立在网络模型基础上，称为网络计划技术。
4. 20 世纪 60 年代，我国已故著名数学家华罗庚将这些方法总结概括称为统筹方法，并且身体力行地进行推广应用。

概述

引言

1. 用网络分析的方法编制的计划称为网络计划。
2. 它是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。
3. 随后，国外陆续出现了一些计划管理的新方法，如关键路线法（critical path method，缩写为 CPM）、计划评审法（program evaluation and review technique，缩写为 PERT）等，这些方法都是建立在网络模型基础上，称为网络计划技术。
4. 20 世纪 60 年代，我国已故著名数学家华罗庚将这些方法总结概括称为统筹方法，并且身体力行地进行推广应用。
5. 目前，这些方法被世界各国广泛应用于工业、农业、国防、科研等计划管理中，对缩短工期，节约人力、物力和财力，提高经济效益发挥了重要作用。

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。

概述

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。

概述

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

概述

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

概述

引言

1. 统筹方法的基本原理是：从需要管理的任务的总进度着眼，以任务中各工作所需要的工时为时间因素，按照工作的先后顺序和相互关系做出网络图，以反映任务全貌，实现管理过程的模型化。
2. 然后进行时间参数计算，找出计划中的关键工作和关键路线，对任务的各项工作所需的人、财、物通过改善网络计划作出合理安排，得到最优先方案并付诸实施。
3. 还可对各种评价指标进行定量化分析，在计划的实施过程中，进行有效的监督与控制，以保证任务优质优量地完成。

目录

8 网络规划
- 工程网络图
- 时间参数和关键线路的确定
- 网络计划的优化
- 网络计划软件

工程网络图的概念

概念

工程网络图就是对一项工程，从整体出发，用系统的观点分析有哪些工序，以及这些工序之间的相互关系和先后排列顺序，应用点、线连结成网状结构的箭头图。借助网络图，可以计算有关的时间参数，决定工程的关键路线和关键工序。以便更合理地使用已有的人力、物力和资金，进行统筹安排，利用较短时间和较少费用完成全部任务。所以，研究和运用网络计划技术，首先必须从工程网络图开始。

工程网络图的绘制

Example (工程网络图的绘制)

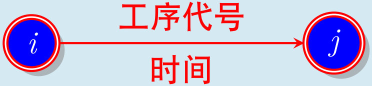
工序名称	工序代号	所需时间（天）	紧后工序
产品外包装设计制作	a	15	e
采购原材料	b	10	c,d
加工配套产品	c	15	e
加工	d	20	e
包装	e	10	–

工程网络图的绘制

Example (工程网络图的绘制)

工序名称	工序代号	所需时间（天）	紧后工序
产品外包装设计制作	a	15	e
采购原材料	b	10	c,d
加工配套产品	c	15	e
加工	d	20	e
包装	e	10	–

双代号网络图 (Activity on Arrow, AOA)

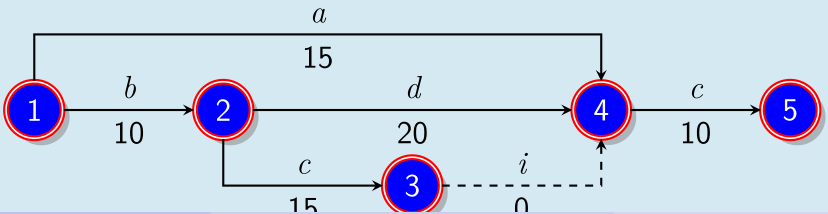


箭尾事项　　箭头事项

Example (工程网络图的绘制)

工序名称	工序代号	所需时间 (天)	紧后工序
产品外包装设计制作	a	15	e
采购原材料	b	10	c,d
加工配套产品	c	15	e
加工	d	20	e
包装	e	10	–

双代号网络图 (Activity on Arrow, AOA)



工程网络图的绘制

Example (工程网络图的绘制)

工序名称	工序代号	所需时间（天）	紧后工序
产品外包装设计制作	a	15	e
采购原材料	b	10	c,d
加工配套产品	c	15	e
加工	d	20	e
包装	e	10	–

工程网络图的绘制

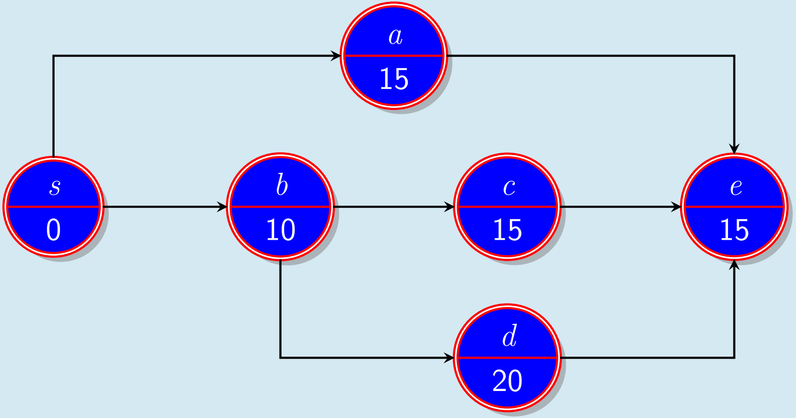
Example (工程网络图的绘制)

工序名称	工序代号	所需时间 (天)	紧后工序
产品外包装设计制作	a	15	e
采购原材料	b	10	c,d
加工配套产品	c	15	e
加工	d	20	e
包装	e	10	–

单代号网络图 (Activity on Node, AON)

工程网络图的绘制

单代号网络图 (Activity on Node, AON)



工程网络图的绘制

绘制网络图应遵循的规则

方向、时序与结点编号

网络图是有向图，按照工艺流程的顺序，规定工序从左向右排列。网络图中的各个结点都有一个时，一般按各个结点的时间顺序编号。始点编号可以从 1 开始，也可以从 0 开始。

工程网络图的绘制

绘制网络图应遵循的规则

方向、时序与结点编号

网络图是有向图，按照工艺流程的顺序，规定工序从左向右排列。网络图中的各个结点都有一个时，一般按各个结点的时间顺序编号。始点编号可以从 1 开始，也可以从 0 开始。

紧前工序与紧后工序

紧后工序表示只有在前一项工序完成后才能开始的工序，前一项工序称为紧前工序。

绘制网络图应遵循的规则

方向、时序与结点编号

网络图是有向图，按照工艺流程的顺序，规定工序从左向右排列。网络图中的各个结点都有一个时，一般按各个结点的时间顺序编号。始点编号可以从 1 开始，也可以从 0 开始。

紧前工序与紧后工序

紧后工序表示只有在前一项工序完成后才能开始的工序，前一项工序称为紧前工序。

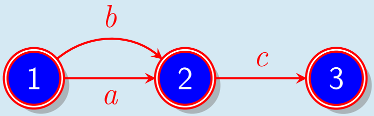
虚工序

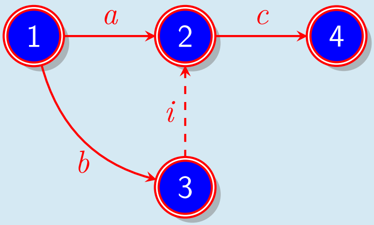
为了用来表达相邻工序之间的衔接关系，是实际上并不存在的而虚设的工序。用虚箭线来表示。虚工序不需要人力、物力等资源和时间，只表示在某工序结束后，下一工序才能开始。

绘制网络图应遵循的规则

相邻两个结点之间只能有一条弧

一个工序用确定的两个相关事项表示，某两个相邻结点只能是一个工序的相关事项。





引入虚工序的条件

情况 I

当多个工序都有一个共同的紧后（或紧前）工序的同时，这多个工序中的一个或几个工序还另有其他的紧后（或紧前）工序。

引入虚工序的条件

情况 I

当多个工序都有一个共同的紧后（或紧前）工序的同时，这多个工序中的一个或几个工序还另有其他的紧后（或紧前）工序。

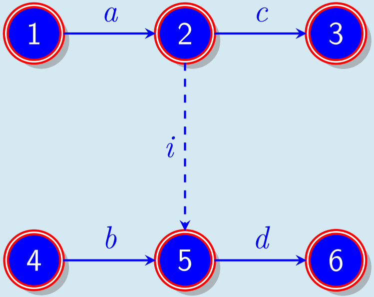
例：a 的紧后工序为 c，d，b 的紧后工序为 d

引入虚工序的条件

情况 I

当多个工序都有一个共同的紧后（或紧前）工序的同时，这多个工序中的一个或几个工序还另有其他的紧后（或紧前）工序。

例：a 的紧后工序为 c，d，b 的紧后工序为 d



工程网络图的绘制

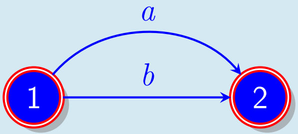
引入虚工序的条件

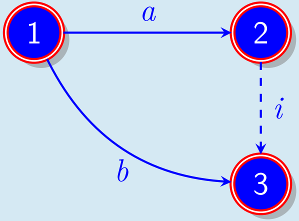
情况 I

当多个工序都有一个共同的紧后（或紧前）工序的同时，这多个工序中的一个或几个工序还另有其他的紧后（或紧前）工序。

情况 II

当两工序有着共同的起始节点和完成节点时。





工程网络图的绘制

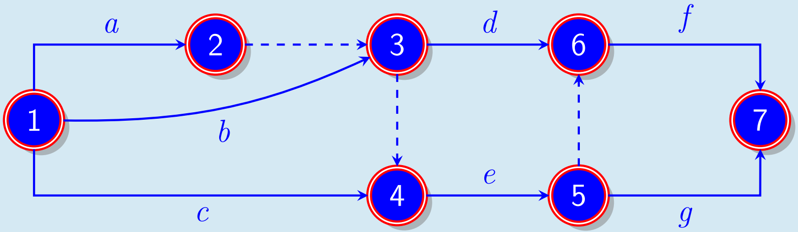
练习

工序	紧后工序	紧前工序	工序	紧后工序	紧前工序
a	d, e	–	d	f	a, b
b	d, e	–	e	f, g	a, b, c
c	e	–	f	–	d, e
g	–	e			

工程网络图的绘制

练习

工序	紧后工序	紧前工序	工序	紧后工序	紧前工序
a	d, e	–	d	f	a, b
b	d, e	–	e	f, g	a, b, c
c	e	–	f	–	d, e
g	–	e			



目录

8 网络规划
- 工程网络图
- 时间参数和关键线路的确定
- 网络计划的优化
- 网络计划软件

时间参数和关键线路的确定

网络图的关键路线

1. 图络图中从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断地到达终点的一条通路称为路线。

网络图的关键路线

1. 图络图中从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断地到达终点的一条通路称为**路线**。
2. **在各条路线上，完成各个工序的时间之和是不完全相等的。其中，完成各个工序需要时间最长的路线称为关键路线，又称主要矛盾线。组成关键路线的工序称为关键工序。**

时间参数和关键线路的确定

网络图的关键路线

1. 图络图中从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断地到达终点的一条通路称为**路线**。
2. 在各条路线上，完成各个工序的时间之和是不完全相等的。其中，完成各个工序需要时间最长的路线称为**关键路线**，又称**主要矛盾线**。组成关键路线的工序称为**关键工序**。
3. **要缩短工程的完工时间，需要缩短关键工序所需的时间。**

时间参数和关键线路的确定

网络图的关键路线

1. 图络图中从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断地到达终点的一条通路称为**路线**。
2. 在各条路线上，完成各个工序的时间之和是不完全相等的。其中，完成各个工序需要时间最长的路线称为**关键路线**，又称**主要矛盾线**。组成关键路线的工序称为**关键工序**。
3. 要缩短工程的完工时间，需要缩短关键工序所需的时间。
4. **在网络图中找出关键路线是编制网络计划的基本思想。**

时间参数和关键线路的确定

网络图的关键路线

1. 图络图中从始点开始，按照各个工序的顺序，连续不断地到达终点的一条通路称为**路线**。
2. 在各条路线上，完成各个工序的时间之和是不完全相等的。其中，完成各个工序需要时间最长的路线称为**关键路线**，又称**主要矛盾线**。组成关键路线的工序称为**关键工序**。
3. 要缩短工程的完工时间，需要缩短关键工序所需的时间。
4. 在网络图中找出关键路线是编制网络计划的基本思想。
5. **关键路线是相对的，是可以变化的，在采取一定措施后，关键路线有可能变为非关键路线，非关键路线也有可能变为关键路线。**

时间参数

工作持续时间 T_{ij}

单时估计法（定额法）

每项工作只估计或规定一个确定的持续时间值的方法。

时间参数

工作持续时间 T_{ij}

单时估计法（定额法）

每项工作只估计或规定一个确定的持续时间值的方法。

三时估计法

1. 乐观时间——在一切顺利时，完成工作需要的最小时间，记作 a。
2. 最可能时间——在正常条件下，完成工作所需要的时间，记作 m。
3. 悲观时间——在不顺利时，完成工作需要最多的时间，记作 b。
4.
$$T_{ij} = \frac{a + 4m + b}{6}, \sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

1. 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最早时间为各工序的最早可能开始时间。

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

1. 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最早时间为各工序的最早可能开始时间。
2. 若事项为某一工序或若干工序的箭头事项时，事项最早时间为各工序的最早可能结束时间。

事项时间参数

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

1. 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最早时间为各工序的最早可能开始时间。
2. 若事项为某一工序或若干工序的箭头事项时，事项最早时间为各工序的最早可能结束时间。
3. 通常是按箭头事项计算最早时间，用 $T_E(j)$ 表示，它等于从始点事项起到本事项最长路线的时间长度。

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

1. 若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项最早时间为各工序的最早可能开始时间。
2. 若事项为某一工序或若干工序的箭头事项时，事项最早时间为各工序的最早可能结束时间。
3. 通常是按箭头事项计算最早时间，用 $T_E(j)$ 表示，它等于从始点事项起到本事项最长路线的时间长度。
4. $$\begin{aligned} &T_E(1) = 0 \\ &T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

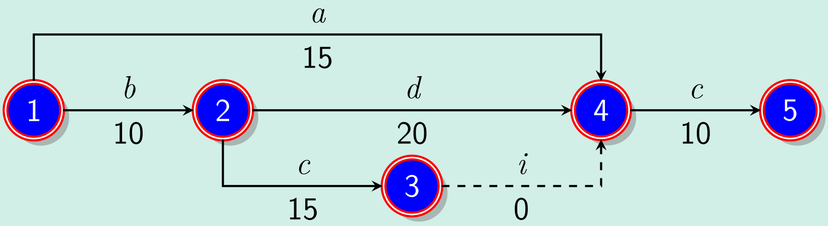
事项时间参数

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$
\begin{aligned}
&T_E(1) = 0 \\
&T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

Example (事项最早时间的计算)

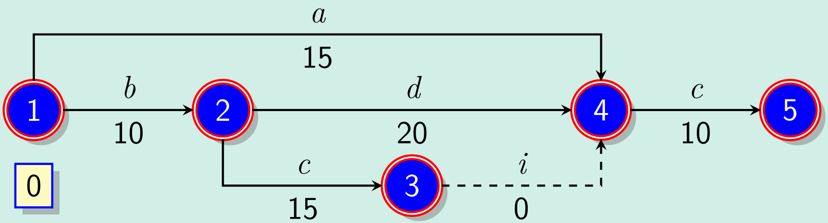


事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最早时间的计算)



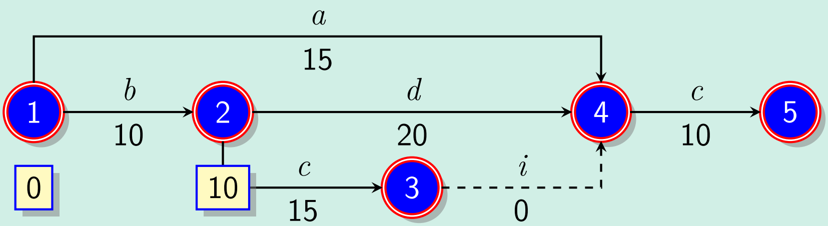
事项时间参数

事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$
\begin{aligned}
&T_E(1) = 0 \\
&T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

Example (事项最早时间的计算)

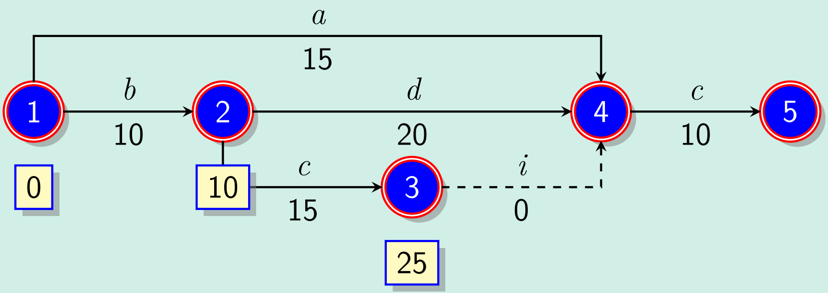


事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最早时间的计算)

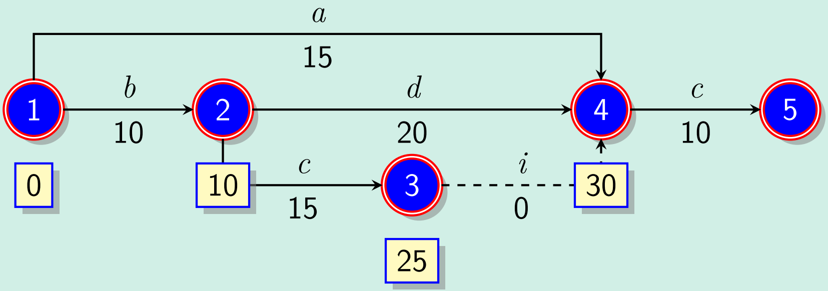


事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最早时间的计算)

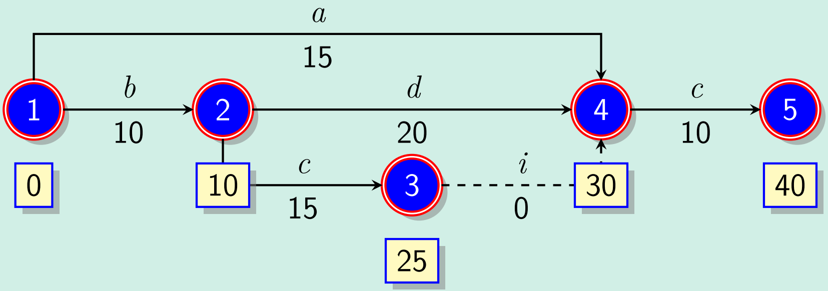


事项时间参数

事项最早时间 $T_E(j)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最早时间的计算)



事项时间参数

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

事项时间参数

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

1. 箭头事项各工序的最迟必须结束时间，或箭尾事项各工序的最迟必须开始时间。

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

1. 箭头事项各工序的最迟必须结束时间，或箭尾事项各工序的最迟必须开始时间。
2. 事项最迟时间通常按箭尾事项的最迟时间计算，从右向左反顺序进行。

事项时间参数

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

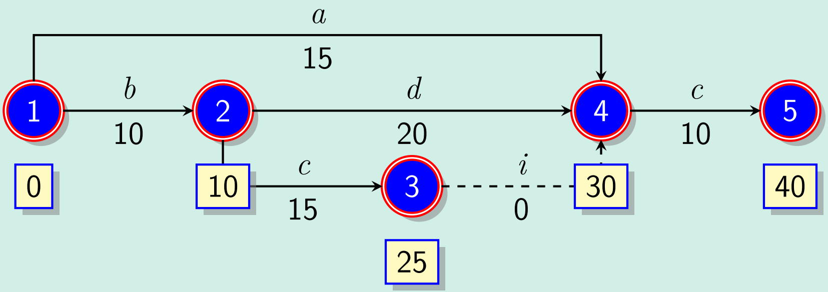
1. 箭头事项各工序的最迟必须结束时间，或箭尾事项各工序的最迟必须开始时间。
2. 事项最迟时间通常按箭尾事项的最迟时间计算，从右向左反顺序进行。
3. $$\begin{aligned} T_L(n) &= T_E(n) \quad (n\text{为终点事项}) \\ T_L(i) &= \min\{T_L(j) - T_{ij}\} \quad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{aligned}$$

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)

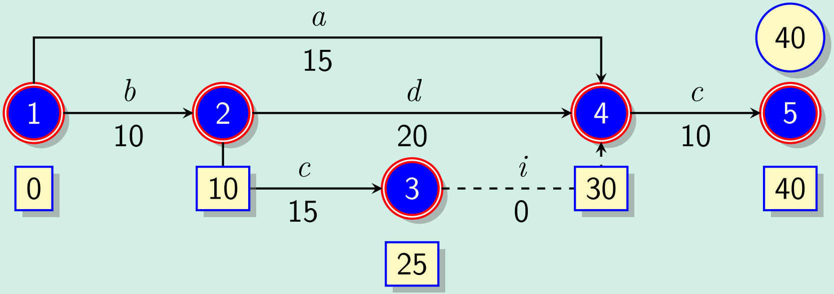


事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)

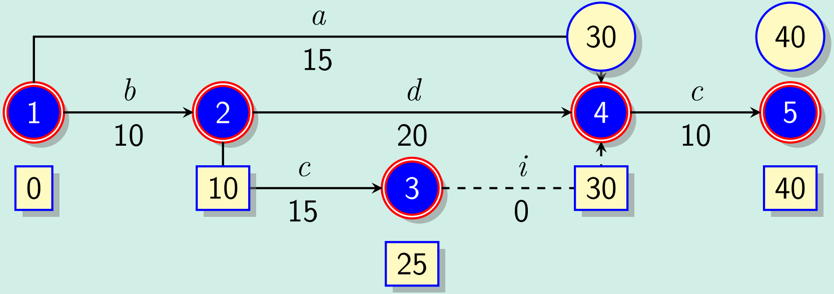


事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)

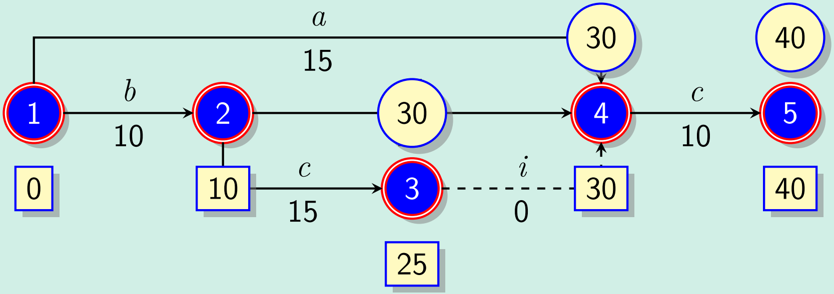


事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)



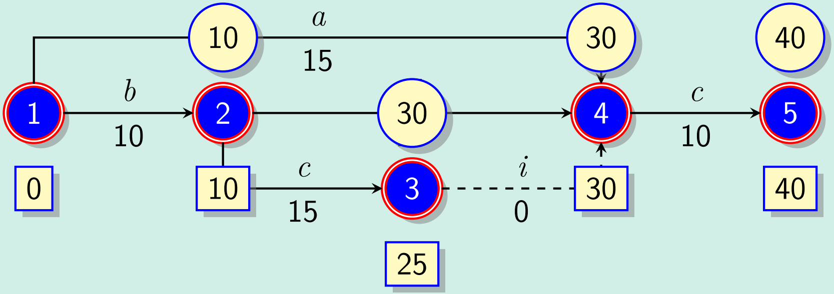
事项时间参数

事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)

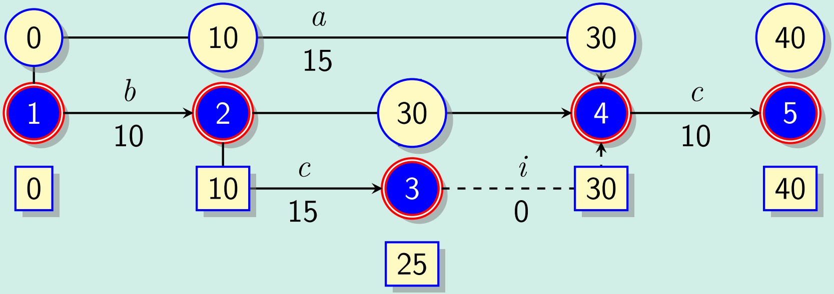


事项时间参数

事项最迟时间 $T_L(i)$

$$T_E(1) = 0$$
$$T_E(j) = \max\{T_E(i) + T_{ij}\} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

Example (事项最迟时间的计算)



工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i, j)$

1. 任何一个工序都必须在其紧前工序结束后才能开始。

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

1. 任何一个工序都必须在其紧前工序结束后才能开始。
2. 紧前工序最早结束时间即为工序最早可能开始时间，简称工序最早开始时间。

工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

1. 任何一个工序都必须在其紧前工序结束后才能开始。
2. 紧前工序最早结束时间即为工序最早可能开始时间，简称工序最早开始时间。
3. 它等于该工序箭尾事项的最早时间，即

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序最早结束时间 $T_{EF}(i,j)$

$$T_{EF}(i,j) = T_{ES}(i,j) + T_{ij}$$

工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序最早结束时间 $T_{EF}(i,j)$

$$T_{EF}(i,j) = T_{ES}(i,j) + T_{ij}$$

工序最迟结束时间 $T_{LF}(i,j)$

$$T_{LF}(i,j) = T_L(j)$$

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序最早结束时间 $T_{EF}(i,j)$

$$T_{EF}(i,j) = T_{ES}(i,j) + T_{ij}$$

工序最迟结束时间 $T_{LF}(i,j)$

$$T_{LF}(i,j) = T_L(j)$$

工序最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$

$$T_{LS}(i,j) = T_{LF}(i,j) - T_{ij}$$

工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序最早结束时间 $T_{EF}(i,j)$

$$T_{EF}(i,j) = T_{ES}(i,j) + T_{ij}$$

工序最迟结束时间 $T_{LF}(i,j)$

$$T_{LF}(i,j) = T_L(j)$$

工序最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$

$$T_{LS}(i,j) = T_{LF}(i,j) - T_{ij}$$

工序总时差 $TF(i,j)$

$$TF(i,j) = T_{LF} - T_{EF} = T_{LS} - T_{ES}$$

工序时间参数

工序时间参数

工序最早开始时间 $T_{ES}(i,j)$

$$T_{ES}(i,j) = T_E(i)$$

工序最早结束时间 $T_{EF}(i,j)$

$$T_{EF}(i,j) = T_{ES}(i,j) + T_{ij}$$

工序最迟结束时间 $T_{LF}(i,j)$

$$T_{LF}(i,j) = T_L(j)$$

工序最迟开始时间 $T_{LS}(i,j)$

$$T_{LS}(i,j) = T_{LF}(i,j) - T_{ij}$$

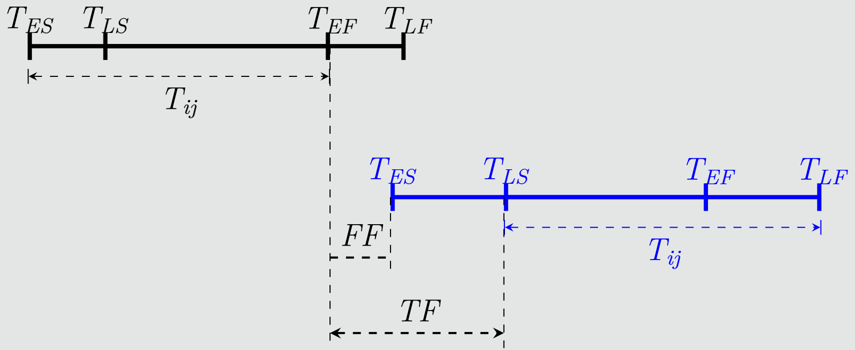
工序总时差 $TF(i,j)$

$$TF(i,j) = T_{LF} - T_{EF} = T_{LS} - T_{ES}$$

工序单时差 $FF(i,j)$

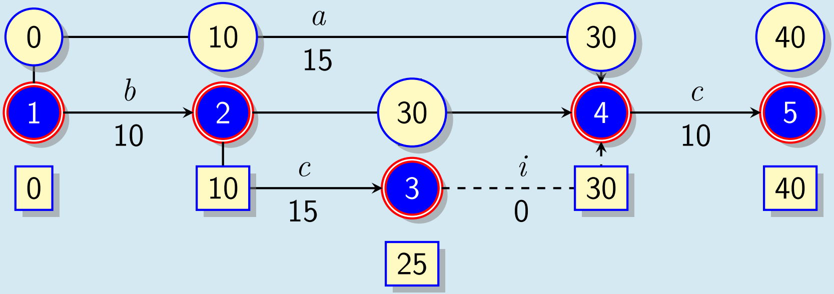
$$FF(i,j) = T_{ES}(j,k) - T_{EF}(i,j)$$

工序时间参数间的关系

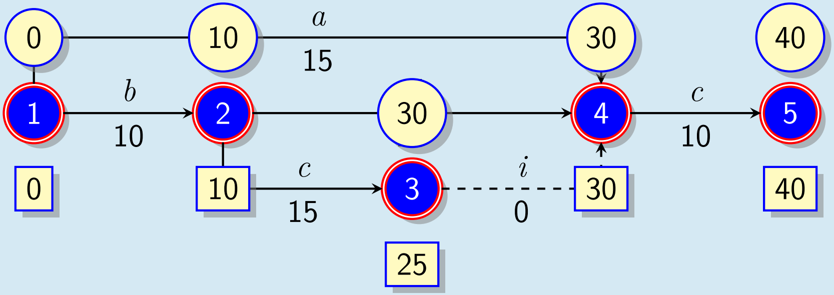


工序时间参数

工序时间参数的图上计算

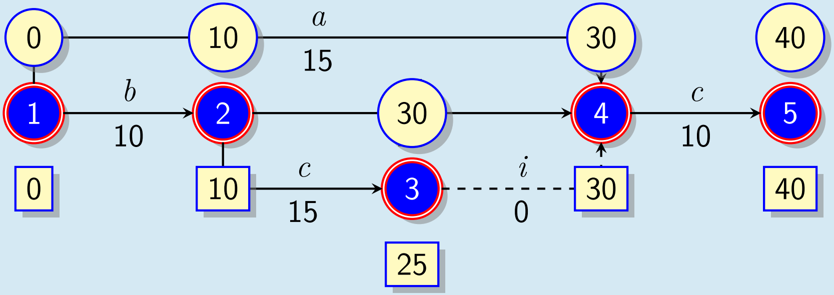


工序时间参数的图上计算



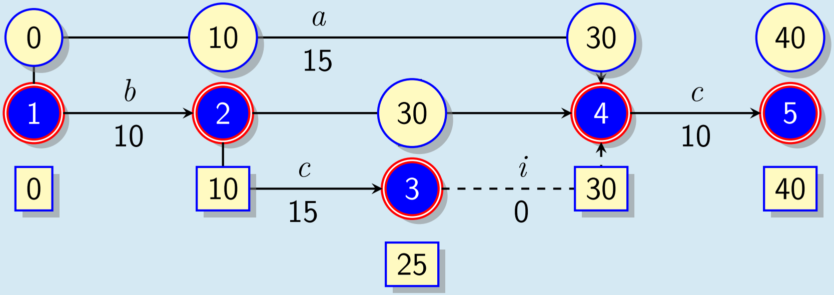
工序代号		
T_{ES}	TF	T_{EF}
T_{LS}	FF	T_{LF}

工序时间参数的图上计算



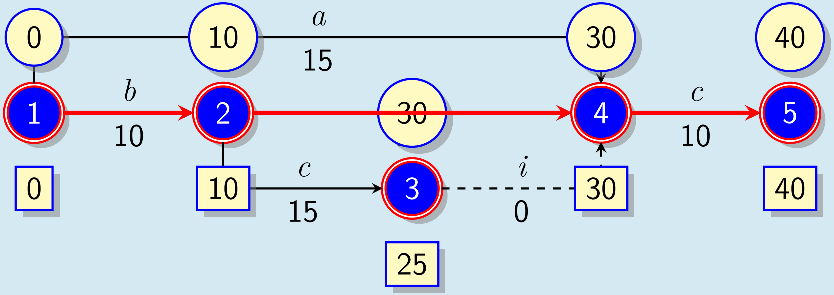
工序代号			*a*		
T_{ES}	TF	T_{EF}	0	15	15
T_{LS}	FF	T_{LF}	15	15	30

工序时间参数的图上计算



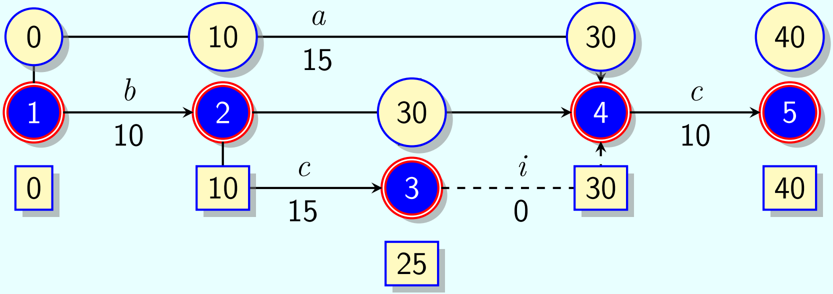
工序代号			a			e		
T_{ES}	TF	T_{EF}	0	15	15	30	0	40
T_{LS}	FF	T_{LF}	15	15	30	30	-	40

工序时间参数的图上计算

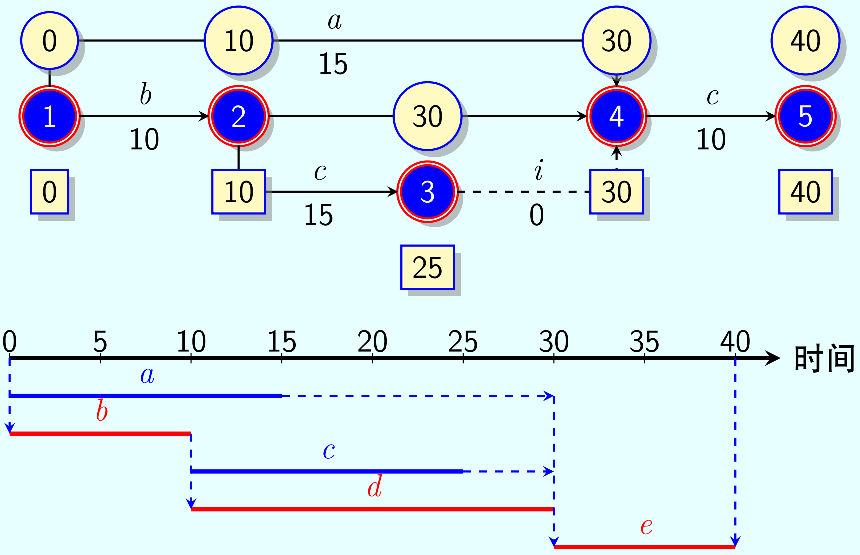


工序代号			a			e		
T_{ES}	TF	T_{EF}	0	15	15	30	0	40
T_{LS}	FF	T_{LF}	15	15	30	30	-	40

工序时间参数



工序时间参数



0
10
a
15
30
40
1
b
10
2
30
4
c
10
5
0
10
c
15
3
i
0
30
40
25
0 5 10 15 20 25 30 35 40
时间
a
b
c
d
e

目录

8 网络规划

- 工程网络图
- 时间参数和关键线路的确定
- 网络计划的优化
- 网络计划软件

1. 总工期优化

网络计划的优化

1. 总工期优化

2. 总工期——成本优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
2. 总工期——成本优化
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；

2. 总工期——成本优化

3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
2. 总工期——成本优化
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
   - 在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
   - 在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；
   - 在限制费用的条件下，工程完工时间最短。
3. 总工期——资源优化

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
   - 在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；
   - 在限制费用的条件下，工程完工时间最短。
3. 总工期——资源优化
   - 优先安排关键工序所需要的资源；

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
   - 在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；
   - 在限制费用的条件下，工程完工时间最短。
3. 总工期——资源优化
   - 优先安排关键工序所需要的资源；
   - 利用非关键工序的总时差，错开各工序的开始时间，拉平资源需要量的高峰；

网络计划的优化

1. 总工期优化
   - 采取技术措施，缩短关键工序的作业时间；
   - 采取组织措施，充分利用非关键工序的总时差，合理调配技术力量及人、财、物力等资源，缩短关键工序的作业时间；
   - 研究关键路线上串联的每个工作，将其改为平行工作或交叉进行的工作，以缩短作业时间。
2. 总工期——成本优化
   - 编制网络计划过程中，研究如何使得工程完工时间短、费用少；
   - 在保证既定的工程完工时间的条件下，所需要的费用最少；
   - 在限制费用的条件下，工程完工时间最短。
3. 总工期——资源优化
   - 优先安排关键工序所需要的资源；
   - 利用非关键工序的总时差，错开各工序的开始时间，拉平资源需要量的高峰；
   - 在确实受到资源限制，或者在考虑综合经济效益的条件下，也可以适当的推迟工作的完工时间。

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用

2. 间接费用

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用
   - 包括直接生产工人的工资及附加费、设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工程有关的费用；
2. 间接费用

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用
    - 包括直接生产工人的工资及附加费、设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工程有关的费用;
    - 为缩短工序的作业时间,需要采取一定的技术组织措施,相应地要增加一部分直接费用;
2. 间接费用

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用
   - 包括直接生产工人的工资及附加费、设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工程有关的费用；
   - 为缩短工序的作业时间，需要采取一定的技术组织措施，相应地要增加一部分直接费用；
   - 在一定条件下和一定范围内，工序的作业时间越短，直接费用越少。
2. 间接费用

总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用
   - 包括直接生产工人的工资及附加费、设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工程有关的费用；
   - 为缩短工序的作业时间，需要采取一定的技术组织措施，相应地要增加一部分直接费用；
   - 在一定条件下和一定范围内，工序的作业时间越短，直接费用越少。
2. 间接费用
   - 包括管理人员的工资、办公费等；

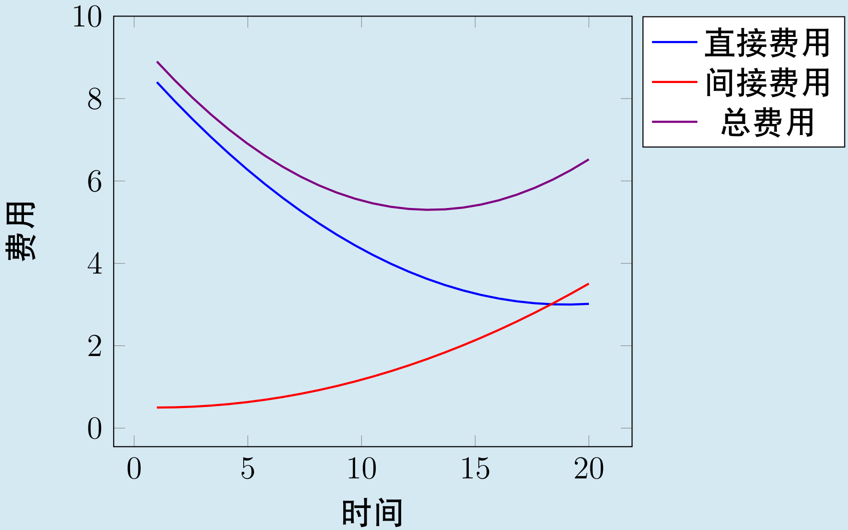
总工期——成本优化

成本构成

1. 直接费用
   - 包括直接生产工人的工资及附加费、设备、能源、工具及材料消耗等直接与完成工程有关的费用；
   - 为缩短工序的作业时间，需要采取一定的技术组织措施，相应地要增加一部分直接费用；
   - 在一定条件下和一定范围内，工序的作业时间越短，直接费用越少。
2. 间接费用
   - 包括管理人员的工资、办公费等；
   - 间接费用通常按照工期长短分摊，在一定的生产规模内，工序的作业时间越短，分摊的间接费用越少，工期越长，间接费用越大。

总工期——成本优化

成本与作业时间的关系

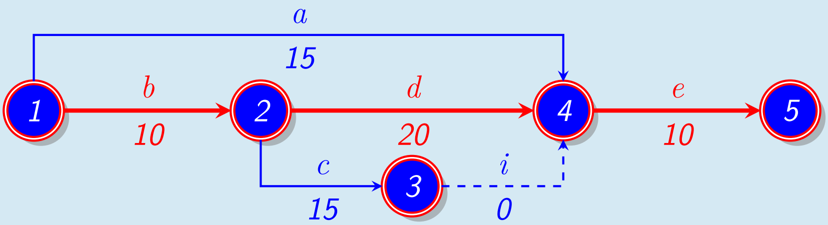


Example (成本优化)

已知例 8-1 的工程项目每天的间接费用为 110 元，各工序在正常时间和极限时间下的直接费用如下表所示。

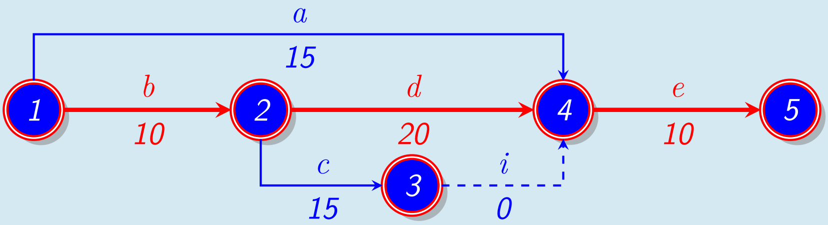
工序	正常情况下		采取措施后		费用变动率
	正常时间	直接费用	极限时间	直接费用	c_{ij} 元/天
a	15	2500	10	3000	100
b	10	1500	6	1960	115
c	15	1400	10	2000	120
d	20	1200	17	1470	90
e	10	900	10	900	-

Solution



总工期 - 成本优化

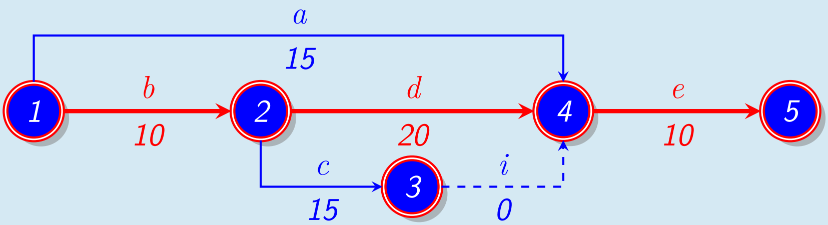
Solution



所有工序均以正常时间开始，计算得到：工程的总工期为 40 天，工程直接费用之和为 7500 元，间接费用为 4400 元，总费用为 11900 元。

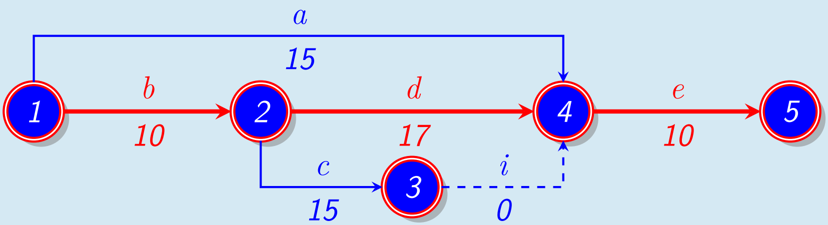
总工期 - 成本优化

Solution



所有工序均以正常时间开始，计算得到：工程的总工期为 40 天，工程直接费用之和为 7500 元，间接费用为 4400 元，总费用为 11900 元。
由于当前关键工序为 b，d，e，它们的费用变动率分别为 115，90，∞，而且只有工序 d 的费用变动率小于每天的间接费用，所以为了达到缩短工期而又不增加费用的目的，应考虑缩短工序 d 的工期。

Solution

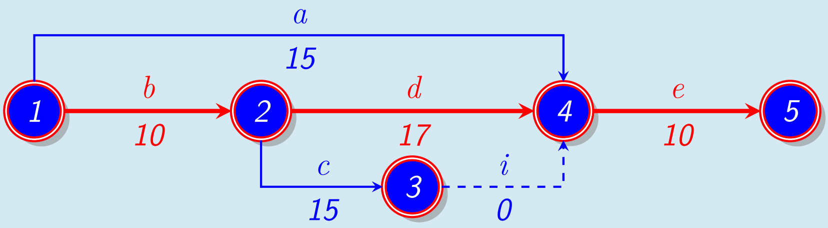


由于当前关键工序为 b，d，e，它们的费用变动率分别为 115，90，∞，而且只有工序 d 的费用变动率小于每天的间接费用，所以为了达到缩短工期而又不增加费用的目的，应考虑缩短工序 d 的工期。

工序 d 的可缩短时间为 3 天，小于其他相关支路的单时差。所以缩短工序 d 的工序到 17 天。

总工期 - 成本优化

Solution



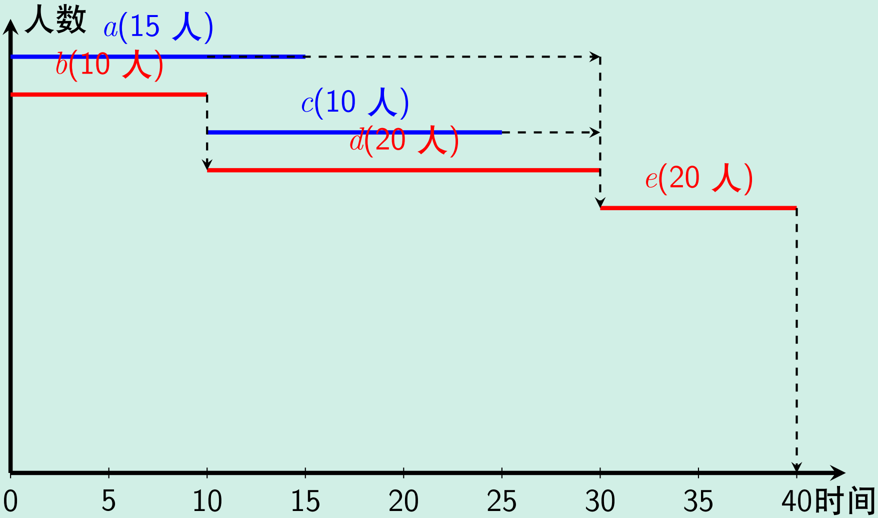
由于当前关键工序为 b，d，e，它们的费用变动率分别为 115，90，∞，而且只有工序 d 的费用变动率小于每天的间接费用，所以为了达到缩短工期而又不增加费用的目的，应考虑缩短工序 d 的工期。
工序 d 的可缩短时间为 3 天，小于其他相关支路的单时差。所以缩短工序 d 的工序到 17 天。工序 d 工期缩短后，总工期为 37 天，总费用降为 11840，关键路线未发生变化，所以无法再进一步优化。当前日程安排为最低成本日程。

Example

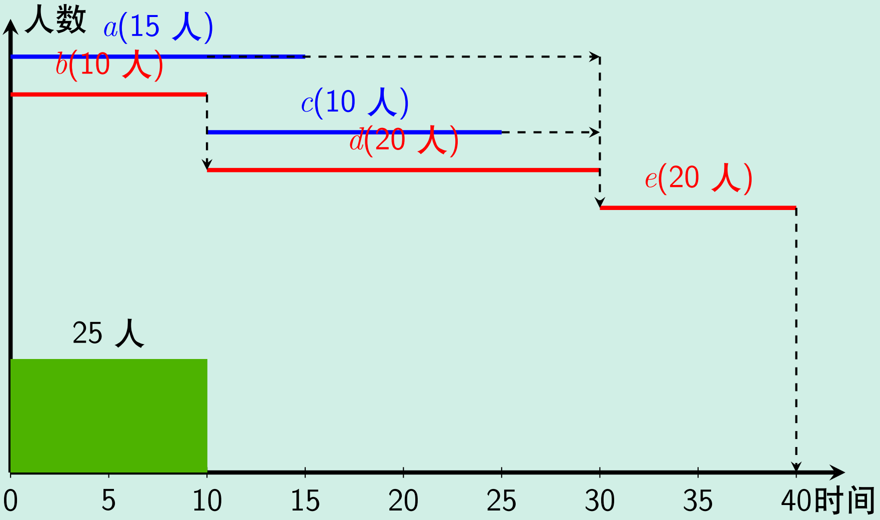
在例 8-1 中，假设已知工人总人数为 35 人，这些工人可以完成上述五个工序中的任何一个工序。

工序	所需时间（天）	所需工人数	总时差
a	15	15	15
b	10	10	0
c	15	10	5
d	20	20	0
e	10	20	0

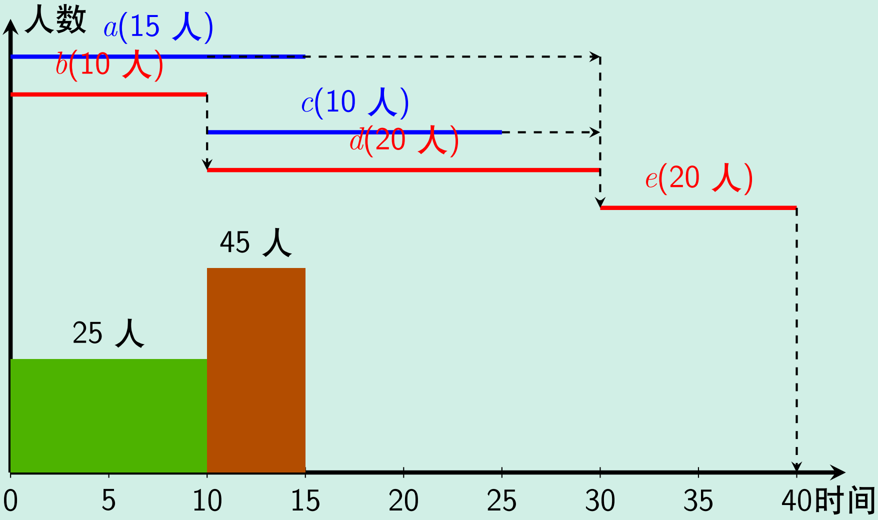
总工期 - 资源优化



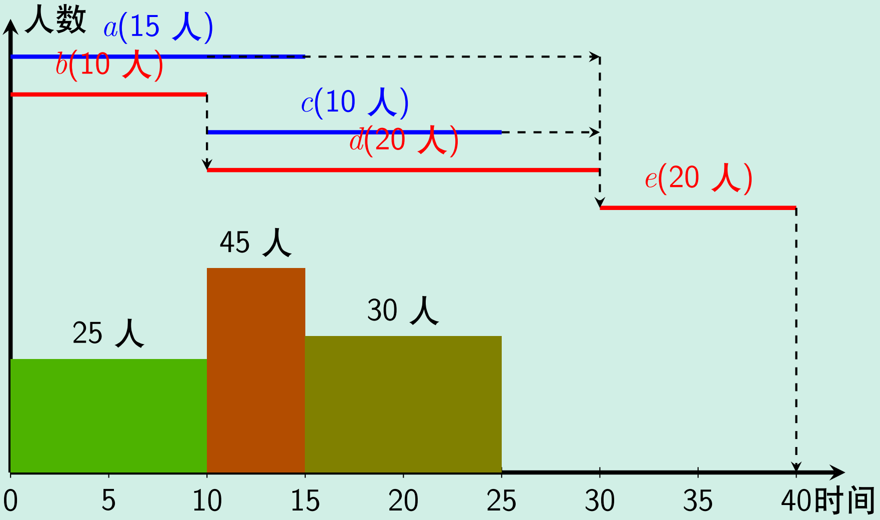
总工期 - 资源优化



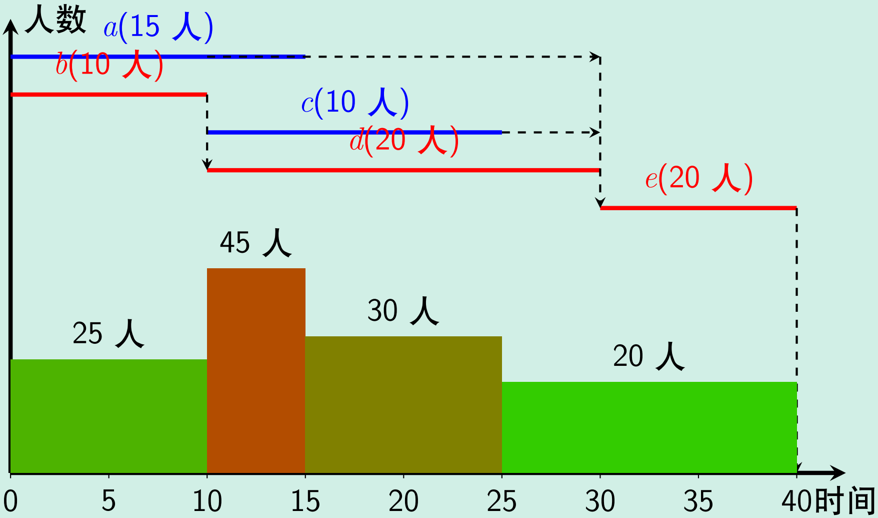
总工期 - 资源优化



总工期 - 资源优化

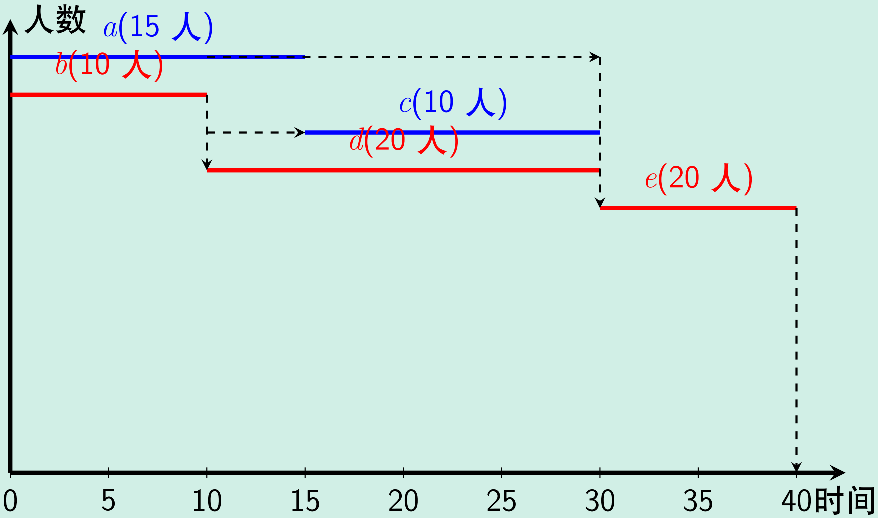


总工期 - 资源优化

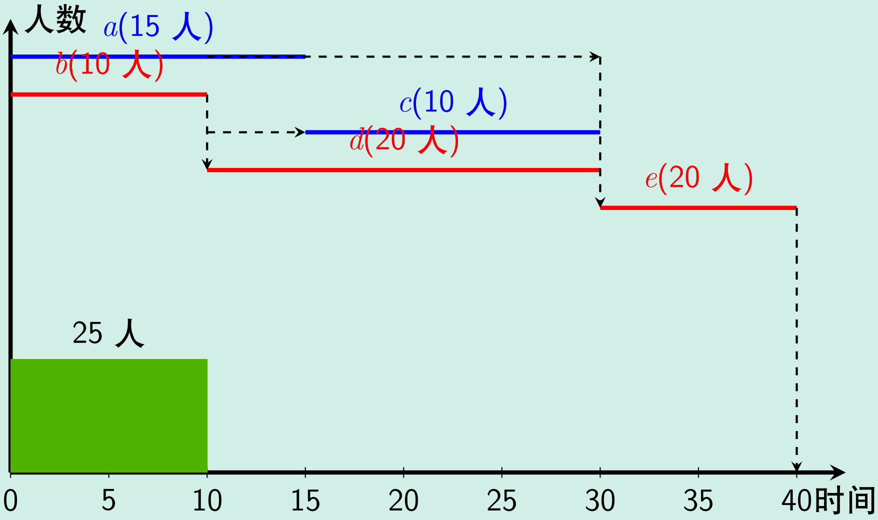


人数
a(15 人)
b(10 人)
c(10 人)
d(20 人)
e(20 人)
45 人
25 人
30 人
20 人
0
5
10
15
20
25
30
35
40时间

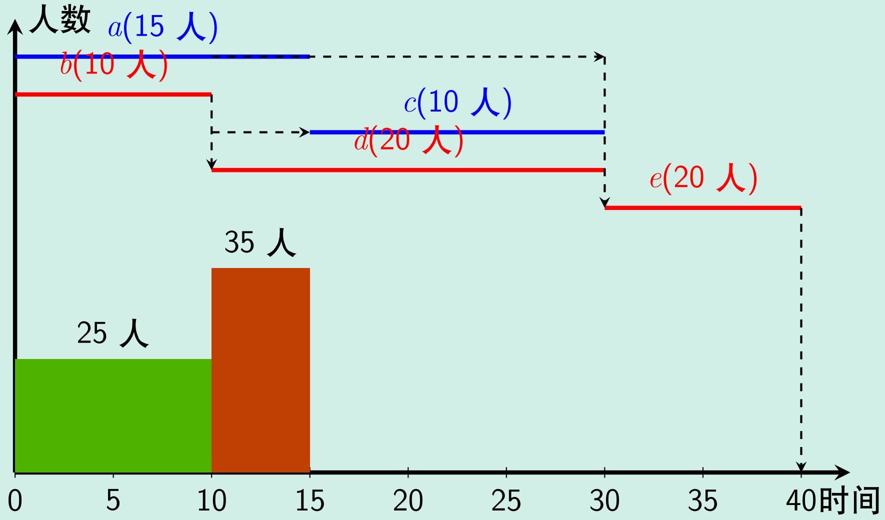
总工期 - 资源优化



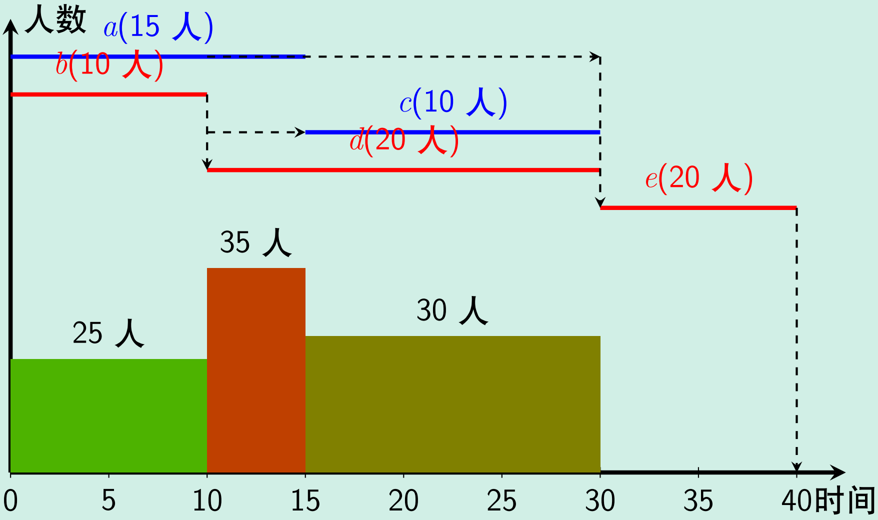
总工期 - 资源优化



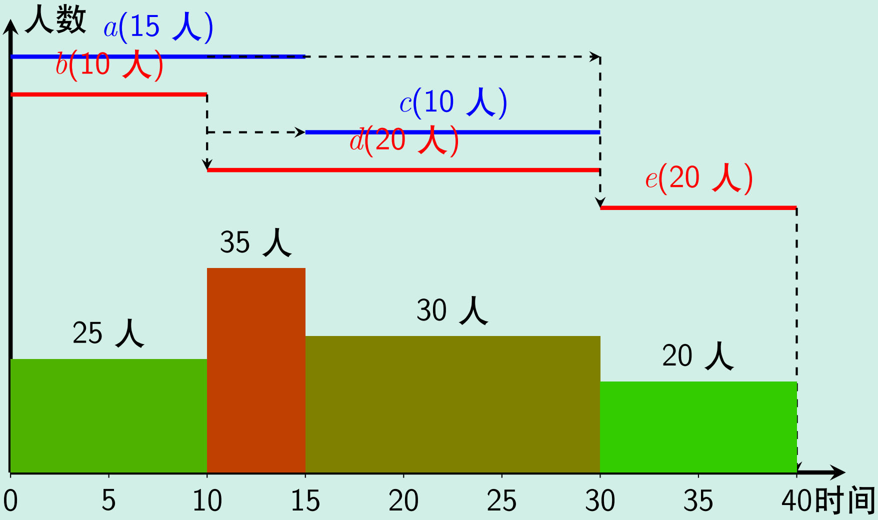
总工期 - 资源优化



总工期 - 资源优化



总工期 - 资源优化


人数
a(15 人)
b(10 人)
c(10 人)
d(20 人)
e(20 人)
35 人
25 人
30 人
20 人
0
5
10
15
20
25
30
35
40
时间

目录

8 网络规划

- 工程网络图
- 时间参数和关键线路的确定
- 网络计划的优化
- 网络计划软件

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构（WBS[10]）编码；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；
4. 分配资源，输入固定成本，计算时间参数、关键线路、资源消耗等；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；
4. 分配资源，输入固定成本，计算时间参数、关键线路、资源消耗等；
5. 计划优化调整；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；
4. 分配资源，输入固定成本，计算时间参数、关键线路、资源消耗等；
5. 计划优化调整；
6. 设置监控计划的基准，输入实际数据，跟踪计划进度；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；
4. 分配资源，输入固定成本，计算时间参数、关键线路、资源消耗等；
5. 计划优化调整；
6. 设置监控计划的基准，输入实际数据，跟踪计划进度；
7. 调整优化后续计划；

[10] Work Breakdown Structure

项目进度管理软件的使用步骤

1. 确定项目对象，设置新计划项目基本信息；
2. 建立工作任务清单，确定项目分解结构 (WBS[10]) 编码；
3. 输入详细任务名称和持续时间，确立任务间的逻辑依赖关系，确定外界约束；
4. 分配资源，输入固定成本，计算时间参数、关键线路、资源消耗等；
5. 计划优化调整；
6. 设置监控计划的基准，输入实际数据，跟踪计划进度；
7. 调整优化后续计划；
8. 打印报告，进行沟通。

[10] Work Breakdown Structure

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。
3. 1915 年 Harris：银行货币贮备问题

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。
3. 1915 年 Harris：银行货币贮备问题
4. 1934 年 Wilson：经济订购批量公式

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。
3. 1915 年 Harris：银行货币贮备问题
4. 1934 年 Wilson：经济订购批量公式
5. 1958 年 Whitin："存贮管理的理论"

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。
3. 1915 年 Harris：银行货币贮备问题
4. 1934 年 Wilson：经济订购批量公式
5. 1958 年 Whitin：“存贮管理的理论”
6. 1958 年 Arrow：“存贮和生产的数学理论研究”

引言

1. 存贮论（Inventory）是专门研究经济资源最佳存贮策略的理论与方法，它用定量方法描述存贮物品的存贮状态和动态供求关系，研究不同状态和不同供应关系情况下的存贮费用结构，从而确定经济上最为合理的存贮策略。
2. 是运筹学各个分支中在实际应用方面获得成效最为显著的分支之一。
3. 1915 年 Harris：银行货币贮备问题
4. 1934 年 Wilson：经济订购批量公式
5. 1958 年 Whitin：“存贮管理的理论”
6. 1958 年 Arrow：“存贮和生产的数学理论研究”
7. 1959 年 Moran：“存贮理论”

Section 9

存贮论

本章内容

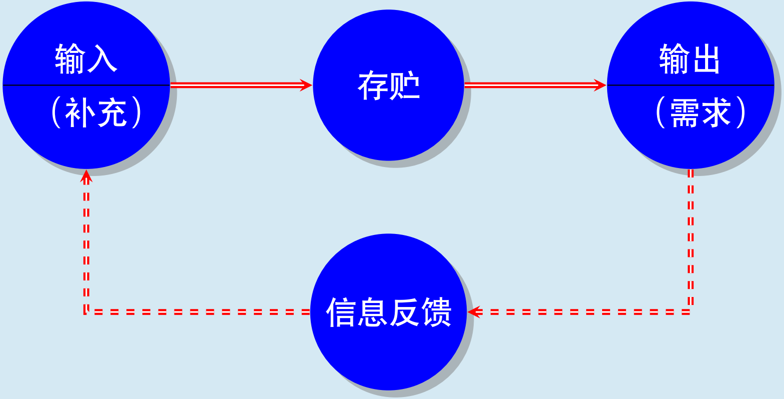
9 存贮论
- 存贮论的基本概念
- 确定性存贮模型
- 随机性存贮模型

目录

9 存贮论
- 存贮论的基本概念
- 确定性存贮模型
- 随机性存贮模型

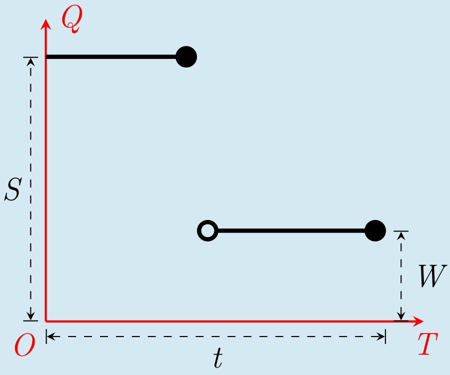
存贮论的基本概念

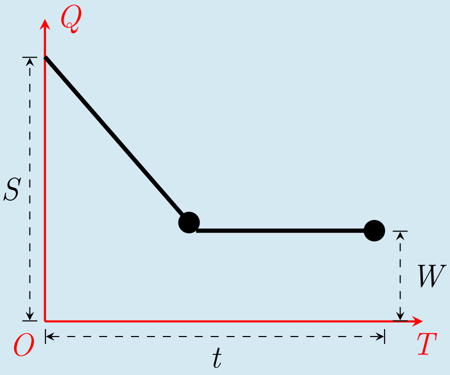
存贮系统模型



需求

对于存贮系统来说，由于需求，从存贮中取出一定的数量，使存贮量减少，这便是存贮的输出。存贮系统的需求呈现出多种形态。有的需求是间断式的，有的是连续均匀的。有的是确定的，有的是随机的。





存贮论的基本概念

补充 (订货或生产)

1. 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。

存贮论的基本概念

补充 (订货或生产)

1. 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。
2. 补充的办法可能是向其他工厂订货，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，我们称之为**备货时间**。

存贮论的基本概念

补充 (订货或生产)

1. 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。
2. 补充的办法可能是向其他工厂订货，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，我们称之为备货时间。
3. 从另一个方面来看，为了在某一时刻能补充存储，必须提前订货，那么这段时间也称之为提前时间。

存贮论的基本概念

补充 (订货或生产)

1. 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。
2. 补充的办法可能是向其他工厂订货，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，我们称之为**备货时间**。
3. 从另一个方面来看，为了在某一时刻能补充存储，必须提前订货，那么这段时间也称之为**提前时间**。
4. 补充的另外一种方式就是生产，工厂向市场提供商品以保证供应，这个生产也可看作是对储存的补充。

存贮论的基本概念

补充 (订货或生产)

1. 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法满足需求。补充就是存储的输入。
2. 补充的办法可能是向其他工厂订货，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，我们称之为**备货时间**。
3. 从另一个方面来看，为了在某一时刻能补充存储，必须提前订货，那么这段时间也称之为**提前时间**。
4. 补充的另外一种方式就是生产，工厂向市场提供商品以保证供应，这个生产也可看作是对储存的补充。
5. 备货时间可能很长，也可能很短，可能是随机性的，也可以是确定性的。

存贮策略

决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

存贮论的基本概念

存贮策略

决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

1. t_0-循环策略，即每隔 t_0 时间补充固定存储量 Q_0。这是一种最简单的存贮策略；

存贮论的基本概念

存贮策略

决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

1. t_0-循环策略，即每隔 t_0 时间补充固定存储量 Q_0。这是一种最简单的存贮策略；
2. (s, S) 策略，每当存贮量 $x > s$ 不时补充，而一旦当 $x \leqslant x$ 时补充存贮，补充量为 $Q = S - x$，即将存贮补充到 S。这种策略要求实时监测存贮量的变化；

存贮策略

决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

1. t_0-循环策略，即每隔 t_0 时间补充固定存储量 Q_0。这是一种最简单的存贮策略；
2. (s, S) 策略，每当存贮量 $x > s$ 不时补充，而一旦当 $x \leqslant x$ 时补充存贮，补充量为 $Q = S - x$，即将存贮补充到 S。这种策略要求实时监测存贮量的变化；
3. (t, s, S) 策略，这是前述 2 种策略的混合形式，每经过 t 时间检查系统存贮量，当存贮量 $x > s$ 时不补充，而一旦当 $x \leqslant s$ 时补充存贮，即将存贮量补充到 S。

存贮策略

决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

1. t_0-循环策略，即每隔 t_0 时间补充固定存储量 Q_0。这是一种最简单的存贮策略；
2. (s, S) 策略，每当存贮量 $x > s$ 不时补充，而一旦当 $x \leqslant x$ 时补充存贮，补充量为 $Q = S - x$，即将存贮补充到 S。这种策略要求实时监测存贮量的变化；
3. (t, s, S) 策略，这是前述 2 种策略的混合形式，每经过 t 时间检查系统存贮量，当存贮量 $x > s$ 时不补充，而一旦当 $x \leqslant s$ 时补充存贮，即将存贮量补充到 S。
4. 不同的存贮策略的费用是不同的，一个好的存贮策略，既可以使总费用小，又应避免因缺货影响生产（或对顾客失去信用）。

存贮论的基本概念

费用

1. 存储费，包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；

存贮论的基本概念

费用

1. 存储费，包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
2. 订货费，包括两项费用：一项是订购费用（固定费用）如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用。订购费与订货次数有关而与订货数量无关。另一项是货物的成本费用，它与订货数量（可变费用），如货物的本身的价格、运输费用等。

存贮论的基本概念

费用

1. 存储费，包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
2. 订货费，包括两项费用：一项是订购费用（固定费用）如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用。订购费与订货次数有关而与订货数量无关。另一项是货物的成本费用，它与订货数量（可变费用），如货物的本身的价格、运输费用等。
3. 生产费，补充存贮时，如果不需向外厂订货，由本厂自行生产，这时仍需要支出两项费用。一项是装配费用（或称准备、费用），属于固定费用；另一项是与生产产品的数量有关的费用，如材料费、加工费等，属于可变费用。

存贮论的基本概念

费用

1. 存储费，包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
2. 订货费，包括两项费用：一项是订购费用（固定费用）如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用。订购费与订货次数有关而与订货数量无关。另一项是货物的成本费用，它与订货数量（可变费用），如货物的本身的价格、运输费用等。
3. 生产费，补充存贮时，如果不需向外厂订货，由本厂自行生产，这时仍需要支出两项费用。一项是装配费用（或称准备、费用），属于固定费用；另一项是与生产产品的数量有关的费用，如材料费、加工费等，属于可变费用。
4. 缺货费，当存储供不应求时所引起的损失。如失去销售机会的损失、停工待料的损失以及不能履行合同而缴纳的赔偿金等。

存贮论的基本概念

费用

1. 存储费，包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
2. 订货费，包括两项费用：一项是订购费用（固定费用）如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用。订购费与订货次数有关而与订货数量无关。另一项是货物的成本费用，它与订货数量（可变费用），如货物的本身的价格、运输费用等。
3. 生产费，补充存贮时，如果不需向外厂订货，由本厂自行生产，这时仍需要支出两项费用。一项是装配费用（或称准备、费用），属于固定费用；另一项是与生产产品的数量有关的费用，如材料费、加工费等，属于可变费用。
4. 缺货费，当存储供不应求时所引起的损失。如失去销售机会的损失、停工待料的损失以及不能履行合同而缴纳的赔偿金等。
5. 费用是存贮论研究的核心问题，它也是判断存贮策略优劣的标准。

目录

9 存贮论
- 存贮论的基本概念
- 确定性存贮模型
- 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
2. 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
2. 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
2. 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
   - 模型三：允许缺货，备货时间很短
2. 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
   - 模型三：允许缺货，备货时间很短
   - 模型四：允许缺货，生产需一定时间
2. 随机性存贮模型

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
   - 模型三：允许缺货，备货时间很短
   - 模型四：允许缺货，生产需一定时间
2. 随机性存贮模型
   - 模型五：需求是随机离散

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
   - 模型三：允许缺货，备货时间很短
   - 模型四：允许缺货，生产需一定时间
2. 随机性存贮模型
   - 模型五：需求是随机离散
   - 模型六：需求是连续的随机变量

确定性存贮模型

引言

通常把存贮模型中需求、补充、费用等一些数据皆为确定的数值的模型称为确定性存贮模型，把模型中含有随机变量的称为随机存贮模型。

1. 确定性存贮模型
   - 模型一：不允许缺货，备货时间很短
   - 模型二：不允许缺货，生产需一定时间
   - 模型三：允许缺货，备货时间很短
   - 模型四：允许缺货，生产需一定时间
2. 随机性存贮模型
   - 模型五：需求是随机离散
   - 模型六：需求是连续的随机变量
   - 模型七：(s, S) 型存贮策略

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；
2. 当存贮量降至 0 时，可以立即得到补充；

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；
2. 当存贮量降至 0 时，可以立即得到补充；
3. 需求是连续的、均匀的，即若需求速度为 R，则 t 时间内的需求量为 Rt；

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；
2. 当存贮量降至 0 时，可以立即得到补充；
3. 需求是连续的、均匀的，即若需求速度为 R，则 t 时间内的需求量为 Rt；
4. 每次订货量固定，订购费不变；

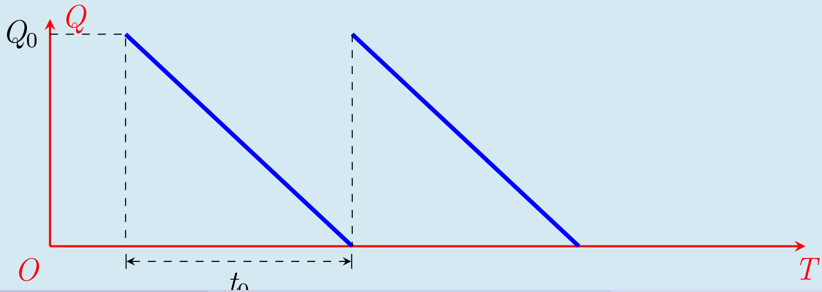
确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；
2. 当存贮量降至 0 时，可以立即得到补充；
3. 需求是连续的、均匀的，即若需求速度为 R，则 t 时间内的需求量为 Rt；
4. 每次订货量固定，订购费不变；
5. 单位存贮费不变。

模型一：不允许缺货，备货时间很短

1. 缺货费用为无穷大；
2. 当存贮量降至 0 时，可以立即得到补充；
3. 需求是连续的、均匀的，即若需求速度为 R，则 t 时间内的需求量为 Rt；
4. 每次订货量固定，订购费不变；
5. 单位存贮费不变。



模型一：不允许缺货，备货时间很短

参数假定

t: 订货周期
R: 需求速度
C_3: 订货的固定费用
K: 货物单价

费用构成

t 时间内的平均订货费：$\dfrac{C_3}{t} + KR$

t 时间内的平均存贮费：$\dfrac{1}{2}RtC_1$

总费用

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

参数假定

t：订货周期
R：需求速度
C_3：订货的固定费用
K：货物单价

费用构成

t 时间内的平均订货费：$\dfrac{C_3}{t} + KR$

t 时间内的平均存贮费：$\dfrac{1}{2}RtC_1$

总费用

$$C(t) = \frac{C_3}{t} + KR + \frac{1}{2}C_1 Rt$$

模型一：不允许缺货，备货时间很短

参数假定

t：订货周期
R：需求速度
C_3：订货的固定费用
K：货物单价

费用构成

t 时间内的平均订货费：$\dfrac{C_3}{t} + KR$

t 时间内的平均存贮费：$\dfrac{1}{2}RtC_1$

总费用

$$C(t) = \frac{C_3}{t} + KR + \frac{1}{2}C_1Rt$$

令：$\dfrac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{C_3}{t^2} + \dfrac{1}{2}C_1R = 0 \Longrightarrow t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}$

确定性存贮模型

模型一：不允许缺货，备货时间很短

参数假定

t：订货周期
R：需求速度
C_3：订货的固定费用
K：货物单价

费用构成

t 时间内的平均订货费：$\dfrac{C_3}{t} + KR$

t 时间内的平均存贮费：$\dfrac{1}{2}RtC_1$

总费用

可以验证：$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 C(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0} > 0$，每隔 t_0 时间订货一次可使 $C(t)$ 最小，订货批量为：

$$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

模型一：不允许缺货，备货时间很短

参数假定

t：订货周期
R：需求速度
C_3：订货的固定费用
K：货物单价

费用构成

t 时间内的平均订货费：$\dfrac{C_3}{t} + KR$

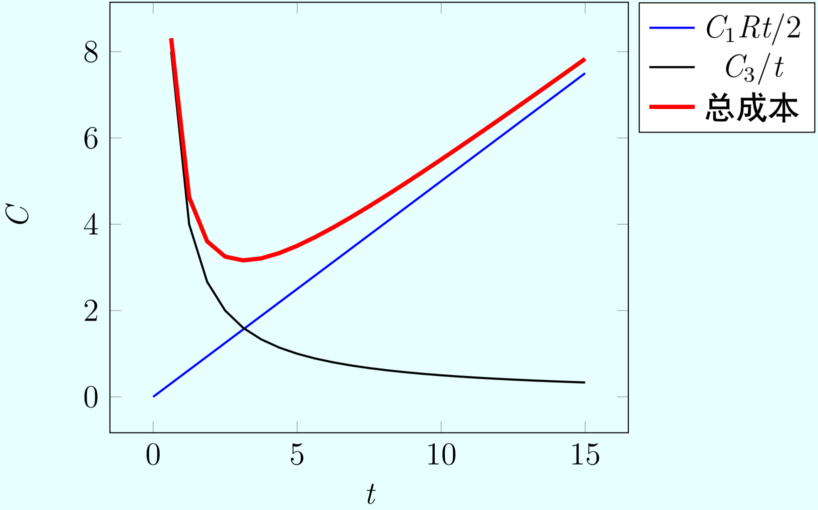
t 时间内的平均存贮费：$\dfrac{1}{2}RtC_1$

总费用

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}$$

$$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

确定性存贮模型



Example (模型一：不允许缺货，备货时间很短)

若某产品中有一外购件，年需求量为 10000 件，单价为 100 元。由于该件可在市场采购，故订货提前期为 0，并不允许缺货。已知每组织一次采购需 2000 元，每件每年的存贮费为该件单价的 20%，试求经济订货批量及每年最小的存贮费用。

Example (模型一：不允许缺货，备货时间很短)

Solution

由题设条件可知，该问题符合模型一的假设。其中
$R = 10000$件/年, $K = 100$元/件, $C_3 = 2000$元, $C_1 = 100 \times 20\% = 20$元/年，由经济订货批量公式可得：
订货周期为

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{20 \times 10000}} = 0.1414\text{年}$$

订货批量为

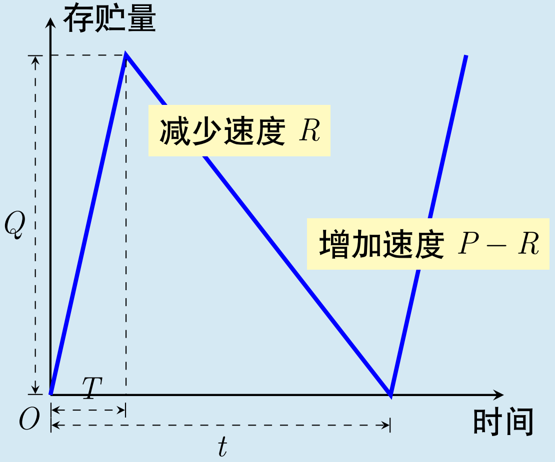
$$Q_0 = Rt_0 = 1414\text{件}$$

最低费用为

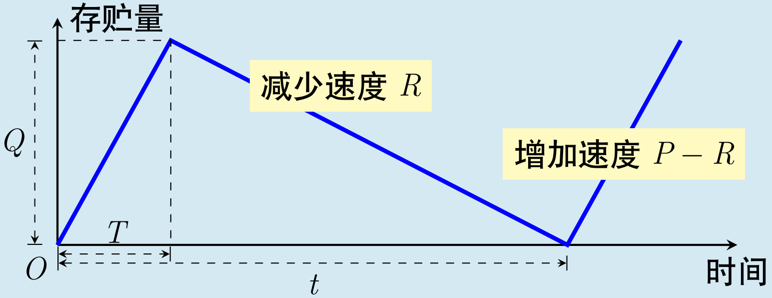
$$C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2 \times 20 \times 2000 \times 10000} = 28284.27\text{元/年}$$

模型二：不允许缺货，生产需一定时间

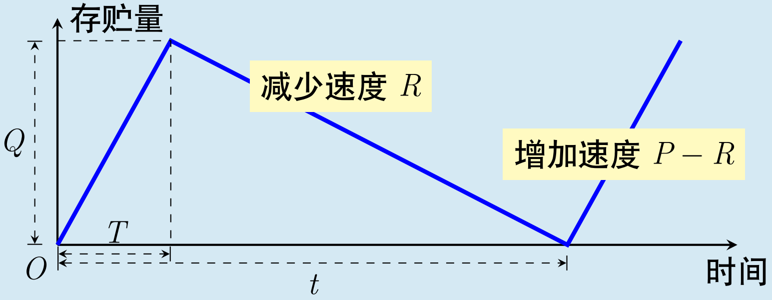
模型二的假设条件与模型一相比而言，除生产需要一定时间的条件外，其余皆与模型一的相同。设生产批量为 Q，所需生产时间为 T，则生产速度为 $P = Q/T$。已知需求速度为 R（$R < P$）。生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存储。



模型二：不允许缺货，生产需一定时间

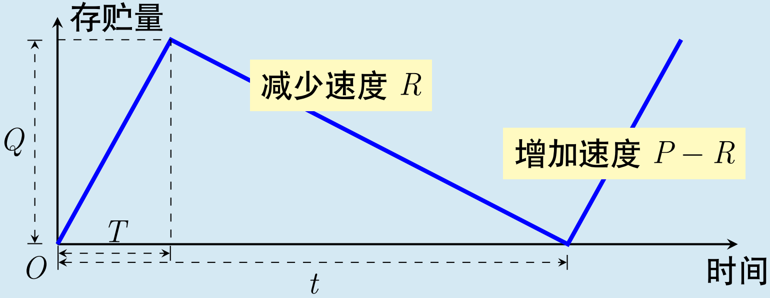


模型二：不允许缺货，生产需一定时间



$$(P-R)T = R(t-T) \Longrightarrow PT = Rt$$

模型二：不允许缺货，生产需一定时间

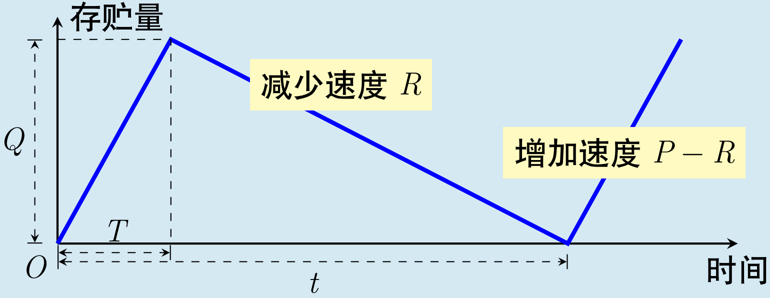


$$(P-R)T = R(t-T) \Longrightarrow PT = Rt$$

t 时间内的平均存贮量为：$\frac{1}{2}(P-R)T$

确定性存贮模型

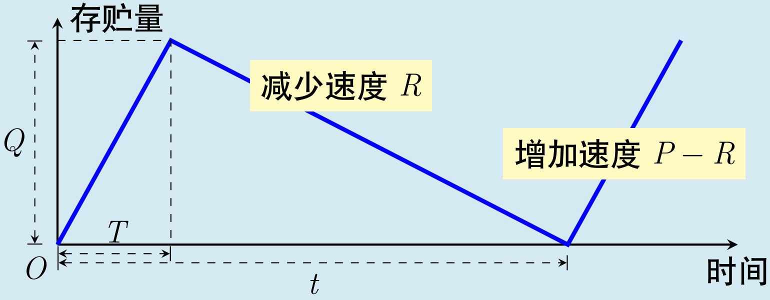
模型二：不允许缺货，生产需一定时间



t 时间内的平均存贮量为：$\dfrac{1}{2}(P-R)T$

t 时间内的所需的存贮费：$\dfrac{1}{2}C_1(P-R)T$

模型二：不允许缺货，生产需一定时间



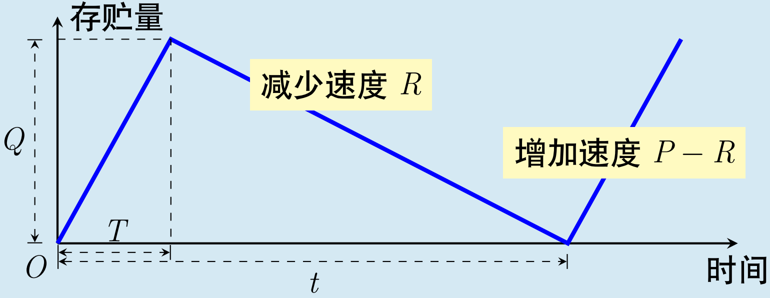
t 时间内的平均存贮量为：$\frac{1}{2}(P-R)T$

t 时间内的所需的存贮费：$\frac{1}{2}C_1(P-R)T$

t 时间内的所需的装配费：C_3

确定性存贮模型

模型二：不允许缺货，生产需一定时间



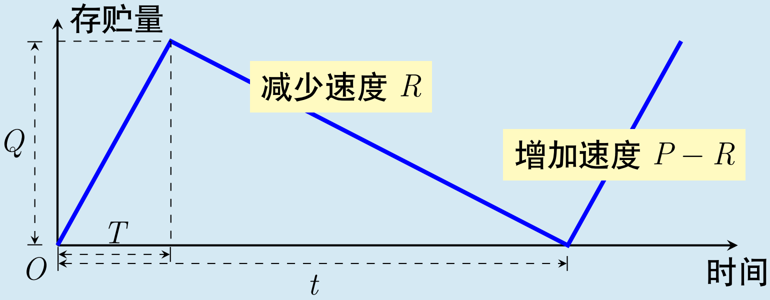
t 时间内的所需的存贮费：$\dfrac{1}{2}C_1(P-R)T$

t 时间内的所需的装配费：C_3

单位时间总费用（平均费用）为：

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt + C_3\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{Rt^2}{P} + C_3\right]$$

模型二：不允许缺货，生产需一定时间



$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}} \qquad Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$$

$$C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R\frac{(P-R)}{P}} \qquad T_0 = \frac{Rt_0}{P} = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$$

确定性存贮模型

Example (模型二：不允许缺货，生产需一定时间)

某厂按合同每月需供应某电子元件 100 件，每月生产率为 500 件，每批装配费为 5 元，每件产品每月需存贮费为 0.4 元。试确定该厂的经济生产批量、生产周期，最佳生产时间及最低费用。

确定性存贮模型

Example (模型二：不允许缺货，生产需一定时间)

某厂按合同每月需供应某电子元件 100 件，每月生产率为 500 件，每批装配费为 5 元，每件产品每月需存贮费为 0.4 元。试确定该厂的经济生产批量、生产周期，最

Solution

易知题充条件符合模型二的假设，且 $C_3 = 5$，$C_1 = 0.4$，$P = 500$，$R = 100$，所以有：

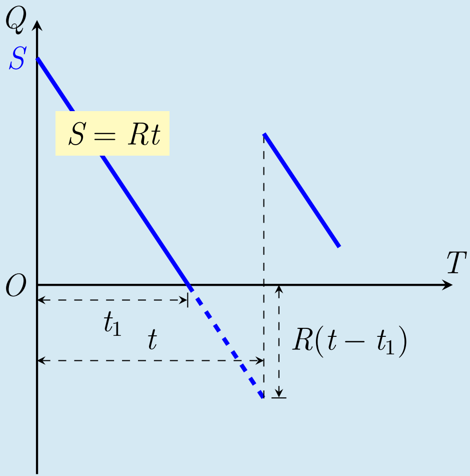
经济生产批量：$Q_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} = \sqrt{3125} \approx 56$（件）

生产周期为：$t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3P}{C_1R(P-R)}} = 0.559$ （月）

最佳生产时间：$T = \dfrac{Rt_0}{P} = \sqrt{\dfrac{2C_3P}{C_1P(P-R)}} = 0.1118$（月）

最低费用：$C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R\dfrac{(P-R)}{P}} = 17.8885$（元/月）

模型三：允许缺货，备货时间很短



在 t 时间内所需存贮费：$C_1 \frac{1}{2} S t_1 = \frac{1}{2} C_1 \frac{S^2}{R}$

在 t 时间内的缺货费：$C_2 \frac{1}{2} R(t-t_1)^2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{(Rt-S)^2}{R}$

订购费：C_3

平均总费用：

$$C(t, S) = \frac{1}{t}\left[C_1 \frac{S^2}{2R} + C_2 \frac{(Rt-S)^2}{2R} + C_3\right]$$

确定性存贮模型

模型三：允许缺货，备货时间很短

$$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]$$

确定性存贮模型

模型三：允许缺货，备货时间很短

$$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial S}=\dfrac{1}{t}\left[C_1\dfrac{S}{R}-C_2\dfrac{(Rt-S)}{R}\right]=0\\ \dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{1}{t^2}\left[C_1\dfrac{S^2}{2R}+C_2\dfrac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]+\dfrac{1}{t}\left[C_2(Rt-S)\right]=0\end{cases}$$

模型三：允许缺货，备货时间很短

$$C(t,S)=\frac{1}{t}\left[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial S}=\dfrac{1}{t}\left[C_1\dfrac{S}{R}-C_2\dfrac{(Rt-S)}{R}\right]=0\\ \dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{1}{t^2}\left[C_1\dfrac{S^2}{2R}+C_2\dfrac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]+\dfrac{1}{t}\left[C_2(Rt-S)\right]=0\end{cases}$$

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}}$$

$$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\times\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

$$C_0(t_0,S_0)=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}$$

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}$$

$$B=Q_0-S_0=\sqrt{\frac{2RC_1C_3}{C_2(C_1+C_2)}}$$

Example (模型三：允许缺货，备货时间很短)

某电子设备厂对一种元件的需求为 $R = 2000$ 件/年，订货提前期为 0，每次订货费为 25 元。该元件每件成本为 50 元，年存贮费为成本的 20%。如发生供应短缺，可在下批货到达时补上，但缺货损失为每件每年 30 元。求经济订货批量及全年的总费用。

确定性存贮模型

Example (模型三：允许缺货，备货时间很短)

某电子设备厂对一种元件的需求为 $R = 2000$ 件/年，订货提前期为 0，每次订货费为 25 元。该元件每件成本为 50 元，年存贮费为成本的 20%。如发生供应短缺，可在下批货到达时补上，但缺货损失为每件每年 30 元。求经济订货批量及全年的总费用。

Solution

题设条件符合模型三的假设。

$R = 2000$ 件/年，$C_1 = 50 \times 20\% = 10$ 元/件/年，$C_2 = 30$ 元/件/年，$C_3 = 25$ 元/次

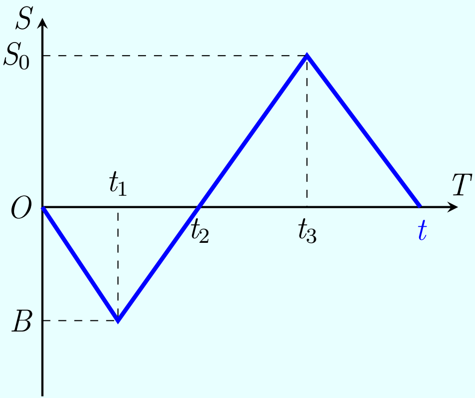
所以，

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1} \times \frac{C_1 + C_2}{C_2}} = 115 \text{ 件}$$

$$C_0\left(t_0, S_0\right) = \sqrt{\frac{2\,C_1\,C_2\,C_3\,R}{C_1 + C_2}} = 886 \text{ 元/年}$$

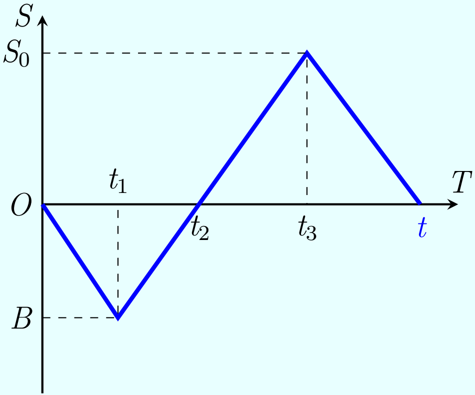
模型四：允许缺货，生产需一定时间

假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



模型四：允许缺货，生产需一定时间

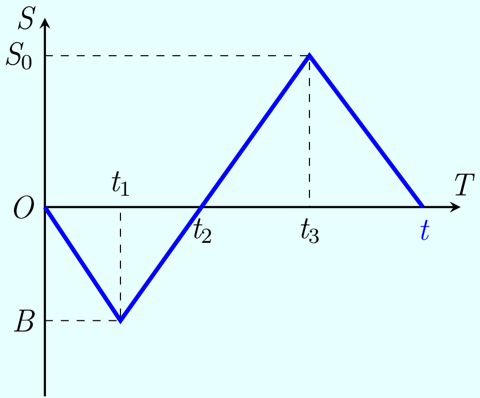
假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



t 为一个周期，t_1 时刻开始生产。
$[0, t_2]$：存贮量为 0，B 为最大缺货量；
$[t_1, t_2]$：除满足当前需求外，补足 $[0, t_1]$ 时间内的缺货量；
$[t_2, t_3]$：满足需求后的产品进入存贮，增加速度为 $(P - R)$；
S_0 表示最大存贮量，t_3 时刻停止生产；
$[t_3, t]$：存贮量以速度 R 减少。

模型四：允许缺货，生产需一定时间

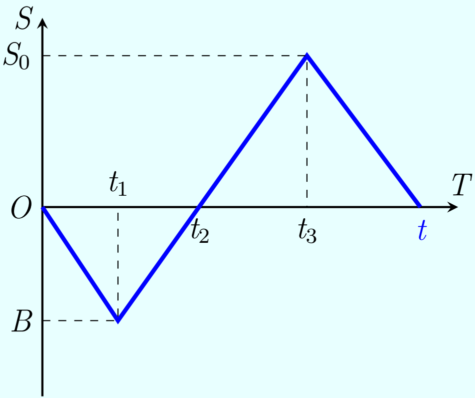
假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



最大缺货量：$B = Rt_1$，**或** $B = (P-R)(t_2 - t_1)$，**所以** $t_1 = \dfrac{(P-R)}{P} t_2$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



最大缺货量：$B = Rt_1$，或 $B = (P-R)(t_2-t_1)$，所以 $t_1 = \dfrac{(P-R)}{P}t_2$

最大存贮量：

$S = (P-R)(t_3-t_2)$，或

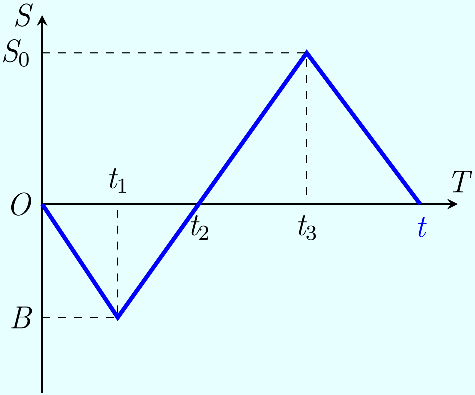
$S = R(t-t_3)$，所以

$$t_3 = \frac{R}{P}t + \left(1-\frac{R}{P}\right)t_2,$$ 或

$$t_3 - t_2 = \frac{R}{P}(t-t_2)$$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



在 $[0,t]$ 时间内所需费用：

存贮费：

$$\frac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)=\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2$$

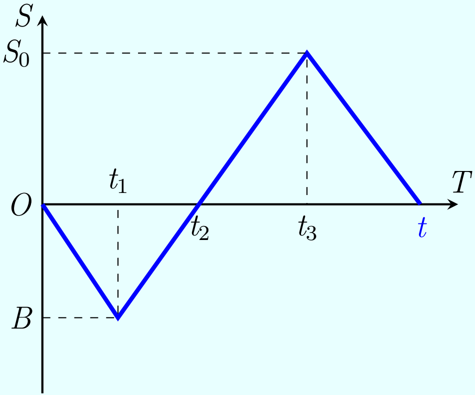
缺货费：

$$\frac{1}{2}C_2Rt_1t_2=\frac{1}{2}C_2R\frac{(P-R)}{P}t_2^2$$

装配费： C_3

模型四：允许缺货，生产需一定时间

假设条件除允许缺货生产需一定时间外其余条件与模型一相同。



在 $[0, t]$ 时间平均费用为：

$$C(t, t_2) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{(P-R)R}{P}(t-t_2)^2 + \frac{1}{2}C_2\frac{(P-R)R}{P}t_2^2 + C_3\right]$$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

$$C(t, t_2) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{(P-R)R}{P}(t-t_2)^2 + \frac{1}{2}C_2\frac{(P-R)R}{P}t_2^2 + C_3\right]$$

确定性存贮模型

模型四：允许缺货，生产需一定时间

$$C(t,t_2)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{(P-R)R}{P}(t-t_2)^2+\frac{1}{2}C_2\frac{(P-R)R}{P}t_2^2+C_3\right]$$

令：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=0\\ \dfrac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=0\end{cases}$$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P - R}}$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1 R}}\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}}\sqrt{\dfrac{P}{P - R}}$

缺货时间：$t_2 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} t_0 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1 R}}\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}}\sqrt{\dfrac{P}{P - R}}$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

缺货时间：$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0=\frac{C_1}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最佳生产量：$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

缺货时间：$t_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}t_0 = \frac{C_1}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最佳生产量：$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最大存贮量：$S_0 = R(t_0 - t_3) = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

缺货时间：$t_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}t_0 = \frac{C_1}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最佳生产量：$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最大存贮量：$S_0 = R(t_0-t_3) = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

最大缺货量：$B_0 = Rt_1 = \frac{R(P-R)}{P}t_2 = \sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

模型四：允许缺货，生产需一定时间

得到：

订货周期：$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

缺货时间：$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0=\frac{C_1}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最佳生产量：$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$

最大存贮量：$S_0=R(t_0-t_3)=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

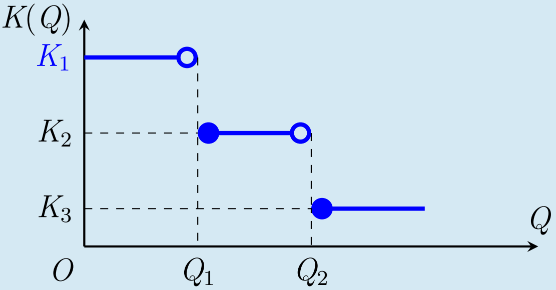
最大缺货量：$B_0=Rt_1=\frac{R(P-R)}{P}t_2=\sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

最低费用：$\min C(t_0,t_2)=\sqrt{2C_1C_3R}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$

价格有折扣的存贮问题

令货物单价为 $K(Q)$。如 $K(Q)$ 按三个数量级变化，

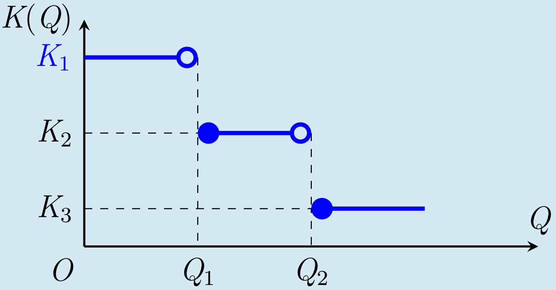
$$K(Q)=\begin{cases} K_1 & 0 \leqslant Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \leqslant Q < Q_2 \\ K_3 & Q_2 \leqslant Q \end{cases}$$



价格有折扣的存贮问题

令货物单价为 $K(Q)$。如 $K(Q)$ 按三个数量级变化，

$$K(Q)=\begin{cases} K_1 & 0\leqslant Q<Q_1 \\ K_2 & Q_1\leqslant Q<Q_2 \\ K_3 & Q_2\leqslant Q \end{cases}$$



当订货量为 Q 时，一个周期内所需费用为：

$$C(Q)=\frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R}+C_3+K(Q)Q$$

确定性存贮模型

价格有折扣的存贮问题

当订货量为 Q 时，一个周期内所需费用为:

$$C(Q) = \frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R} + C_3 + K(Q)Q$$

价格有折扣的存贮问题

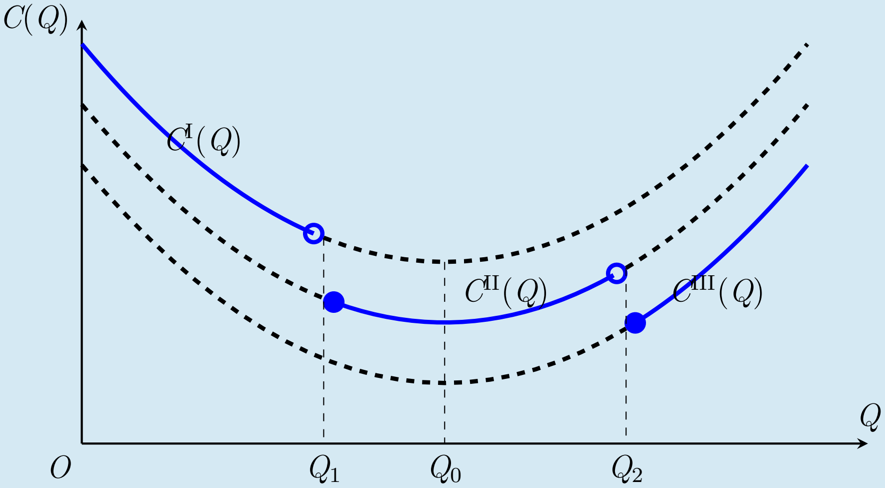
当订货量为 Q 时，一个周期内所需费用为:

$$C(Q) = \frac{1}{2}C_1 Q\frac{Q}{R} + C_3 + K(Q)Q$$

平均每单位货物所需费用为:

$$C(Q) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K(Q)$$

价格有折扣的存贮问题



价格有折扣的存贮问题

1. 对 $C^{\mathrm{I}}(Q)$ 求得极值点为 Q_0（不考虑定义域）;

价格有折扣的存贮问题

1. 对 $C^{\mathrm{I}}(Q)$ 求得极值点为 Q_0（不考虑定义域）；
2. 若 $Q_0 < Q_1$，计算

$$C^{\mathrm{I}}(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1$$

$$C^{\mathrm{II}}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2$$

$$C^{\mathrm{III}}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$

由 $\min\left\{C^{\mathrm{I}}(Q_0), C^{\mathrm{II}}(Q_1), C^{\mathrm{III}}(Q_2)\right\}$ 得到单位货物最小费用的订购批量 Q^*。

价格有折扣的存贮问题

1. 对 $C^{\mathrm{I}}(Q)$ 求得极值点为 Q_0（不考虑定义域）；
2. 若 $Q_0 < Q_1$，计算
$$C^{\mathrm{I}}(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1$$
$$C^{\mathrm{II}}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2$$
$$C^{\mathrm{III}}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$
由 $\min\left\{C^{\mathrm{I}}(Q_0), C^{\mathrm{II}}(Q_1), C^{\mathrm{III}}(Q_2)\right\}$ 得到单位货物最小费用的订购批量 Q^*。
3. 若 $Q_1 \leqslant Q_0 < Q_2$，计算 $C^{\mathrm{II}}(Q_0)$、$C^{\mathrm{III}}(Q_2)$，由 $\min\left\{C^{\mathrm{II}}(Q_0), C^{\mathrm{III}}(Q_2)\right\}$ 决定 Q^*。

确定性存贮模型

价格有折扣的存贮问题

1. 对 $C^{\text{I}}(Q)$ 求得极值点为 Q_0（不考虑定义域）;
2. 若 $Q_0 < Q_1$，计算
$$C^{\text{I}}(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1$$
$$C^{\text{II}}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2$$
$$C^{\text{III}}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$
由 $\min\left\{C^{\text{I}}(Q_0), C^{\text{II}}(Q_1), C^{\text{III}}(Q_2)\right\}$ 得到单位货物最小费用的订购批量 Q^*。
3. 若 $Q_1 \leqslant Q_0 < Q_2$，计算 $C^{\text{II}}(Q_0)$、$C^{\text{III}}(Q_2)$，由 $\min\left\{C^{\text{II}}(Q_0), C^{\text{III}}(Q_2)\right\}$ 决定 Q^*。
4. 若 $Q_2 \leqslant Q_0$，则 $Q^* = Q_0$。

Example

某报社必须定期补充纸张的库存量，假定新闻纸以大型卷筒进货。每次订货费用为 25 元，纸张的价格按下列进货批量进行折扣：
买 1–9 筒，单价为 12 元；
买 10–49 筒，单价为 10 元；
买 50–99 筒，单价为 9.5 元；
买 100 筒以上，单价为 9 元；
另外，车间的消耗为每周 32 筒，存贮纸张的费用为每周每筒 1 元。求最佳订货批量和每周的最小费用。

确定性存贮模型

Example

某报社必须定期补充纸张的库存量，假定新闻纸以大型卷筒进货。每次订货费用为 25 元，纸张的价格按下列进货批量进行折扣：
买 1–9 筒，单价为 12 元；
买 10–49 筒，单价为 10 元；
买 50–99 筒，单价为 9.5 元；
买 100 筒以上，单价为 9 元；
另外，车间的消耗为每周 32 筒，存贮纸张的费用为每周每筒 1 元。求最佳订货批量和每周的最小费用。

Solution

由题设条件可知，$R = 32, C_1 = 1, C_3 = 25$，由经济订购批量公式可得：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = 40$$

确定性存贮模型

Solution

由题设条件可知，$R=32, C_1=1, C_3=25$，由经济订购批量公式可得：

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=40$$

Solution

由题设条件可知，$R = 32, C_1 = 1, C_3 = 25$，由经济订购批量公式可得：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = 40$$

因为 Q_0 落在 *10–49* 之间，每筒的价格为 *10* 元，所以每周的平均费用为：

$$C(Q_0) = \sqrt{2C_3C_1R} + RK = 360$$

Solution

由题设条件可知，$R = 32, C_1 = 1, C_3 = 25$，由经济订购批量公式可得：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = 40$$

因为 Q_0 落在 *10–49* 之间，每筒的价格为 *10* 元，所以每周的平均费用为：

$$C(Q_0) = \sqrt{2C_3C_1R} + RK = 360$$

而

$$C(50) = 345, C(100) = 346$$

所以最佳订货批量应为 *50* 筒，费用为 *345* 元/周。

目录

9 存贮论
- 存贮论的基本概念
- 确定性存贮模型
- 随机性存贮模型

随机性存贮模型

在前面的一些存贮模型中，我们把需求率看成一个已知常量，但在现实的情况中，需求通常是不确定或随机的。随机性存贮模型的重要特点是需求为随机的，其概率或分布为已知。在这种情况下可供选择的策略主要有三种：

1. 定期订货，但订货数量需要根据上一个周期剩下货物的数量决定订货量。如果剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多则可以少订或不订货。这种策略称为定期订货法。

随机性存贮模型

在前面的一些存贮模型中，我们把需求率看成一个已知常量，但在现实的情况中，需求通常是不确定或随机的。**随机性存贮模型的重要特点是需求为随机的，其概率或分布为已知**。在这种情况下可供选择的策略主要有三种：

1. 定期订货，但订货数量需要根据上一个周期剩下货物的数量决定订货量。如果剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多则可以少订或不订货。这种策略称为定期订货法。
2. **定点订货，降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间。这一数量值称为订货点，每次订货的数量不变，这种策略称为定点订货法。**

随机性存贮模型

在前面的一些存贮模型中，我们把需求率看成一个已知常量，但在现实的情况中，需求通常是不确定或随机的。随机性存贮模型的重要特点是需求为随机的，其概率或分布为已知。在这种情况下可供选择的策略主要有三种：

1. 定期订货，但订货数量需要根据上一个周期剩下货物的数量决定订货量。如果剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多则可以少订或不订货。这种策略称为定期订货法。
2. 定点订货，降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间。这一数量值称为订货点，每次订货的数量不变，这种策略称为定点订货法。
3. 把定期订货与定点订货综合起来的方法，隔一定时间检查一次存贮量，如果存储数量高于某个数值 s，则不订货；不高于 s 时则订货补充存贮量至 S，这种策略称为 (s, S) 策略。

随机性存贮模型

在前面的一些存贮模型中，我们把需求率看成一个已知常量，但在现实的情况中，需求通常是不确定或随机的。**随机性存贮模型的重要特点是需求为随机的，其概率或分布为已知**。在这种情况下可供选择的策略主要有三种：

1. 定期订货，但订货数量需要根据上一个周期剩下货物的数量决定订货量。如果剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多则可以少订或不订货。这种策略称为定期订货法。
2. 定点订货，降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间。这一数量值称为订货点，每次订货的数量不变，这种策略称为定点订货法。
3. 把定期订货与定点订货综合起来的方法，隔一定时间检查一次存贮量，如果存储数量高于某个数值 s，则不订货；不高于 s 时则订货补充存贮量至 S，这种策略称为 (s, S) 策略。

与确定性存贮模型不同，不允许缺货的条件只能从概率的意义方面理解，如不缺货的概率为 0.9 等。而存贮策略的优劣通常以赢利的期望值的大小作为衡量的标准。

随机性存贮模型

模型五：需求是随机离散

报童问题 报童每日售报数量是一个随机变量。报童每售出一份报纸赚 k 元。如报纸未能售出，每份赔 h 元。每日售出报纸份数 r 的概率 $P(r)$ 根据以往的经验是已知的，问报童每日最好准备多少份报纸？

模型五：需求是随机离散

设报童订购报纸数量为 Q。他的损失来自于两个方面：

模型五：需求是随机离散

设报童订购报纸数量为 Q。他的损失来自于两个方面：

- 供过于求（$r \leqslant Q$）因不能售出报纸而承担损失

$$\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$$

模型五：需求是随机离散

设报童订购报纸数量为 Q。他的损失来自于两个方面：

- **供过于求 $(r \leqslant Q)$** 因不能售出报纸而承担损失

$$\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$$

- **供不应求 $(r > Q)$** 因缺货而失去销售机会的损失

$$\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$$

随机性存贮模型

模型五：需求是随机离散

设报童订购报纸数量为 Q。他的损失来自于两个方面：

- 供过于求 $(r \leqslant Q)$
- 供不应求 $(r > Q)$

所以，当订货量为 Q 时，损失的期望值为：

$$C(Q) = h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

模型五：需求是随机离散

设报童订购报纸数量为 Q。他的损失来自于两个方面：

- 供过于求（$r \leqslant Q$）
- 供不应求（$r > Q$）

所以，当订货量为 Q 时，损失的期望值为：

$$C(Q) = h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

如何求得 $C(Q)$ 的最小值 $\min C(Q)$ 呢？

模型五：需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

模型五： 需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

模型五：需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r)\leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q+1}(Q+1-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+2}^{\infty}(r-Q-1)\,P(r)$$

模型五： 需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r)\leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q+1}(Q+1-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+2}^{\infty}(r-Q-1)\,P(r)$$

$$\sum_{r=0}^{Q}P(r)\geqslant\frac{k}{k+h}$$

随机性存贮模型

模型五：需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r)\leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)\,P(r)$$

$$\sum_{r=0}^{Q}P(r)\geqslant\frac{k}{k+h}$$

模型五：需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r)\leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)\,P(r)$$

$$\sum_{r=0}^{Q}P(r)\geqslant\frac{k}{k+h}$$

$$\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)\leqslant\frac{k}{k+h}$$

模型五：需求是随机离散

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q)\leqslant C(Q+1) \qquad C(Q)\leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r)\leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)\,P(r)+k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)\,P(r)$$

$$\sum_{r=0}^{Q}P(r)\geqslant\frac{k}{k+h} \qquad \boxed{\sum_{r=0}^{Q-1}P(r)<\frac{k}{k+h}\leqslant\sum_{r=0}^{Q}P(r)} \qquad \sum_{r=0}^{Q-1}P(r)\leqslant\frac{k}{k+h}$$

随机性存贮模型

模型五：需求是随机离散

$$C(Q) = h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

$$C(Q) \leqslant C(Q+1)$$

$$C(Q) \leqslant C(Q-1)$$

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)\,P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)\,P(r) \leqslant$$
$$h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)\,P(r) + k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)\,P(r)$$

$$\sum_{r=0}^{Q} P(r) \geqslant \frac{k}{k+h}$$

$$\boxed{\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \leqslant \sum_{r=0}^{Q} P(r)}$$

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leqslant \frac{k}{k+h}$$

从期望收益最大的角度也可以得到相同的结果。

随机性存贮模型

Example (模型五：需求是随机离散)

某商店拟在新年期间出售一批日历画片，每售出一千张可赢利 700 元。若在新年期间不能售出须削价处理。但由于削价一定可以售完，此时每千张赔损 400 元。根据以往的经验，市场需求的概率如下表所示。

需求量 r(千张)	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

每年只能订货一次，问应订购日历画片多少才能使获利最大？

随机性存贮模型

Example (模型五：需求是随机离散)

某商店拟在新年期间出售一批日历画片，每售出一千张可赢利 700 元。若在新年期间不能售出须削价处理。但由于削价一定可以售完，此时每千张赔损 400 元。根据以往的经验，市场需求的概率如下表所示。

需求量 r(千张)	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

Solution

$k=7, h=4$，所以，$\dfrac{k}{k+h}=0.637$，而由上表可知：

$$\sum_{r=0}^{2}=0.40<0.637<\sum_{r=0}^{3}=0.75$$

所以，该商店应订购的日历画片应为 *3* 千张。

随机性存贮模型

Example (模型五：需求是随机离散)

对某产品的需求量服从正态分布，已知 $\mu = 150$，$\sigma = 25$。又知每个产品的进价为 8 元，售价为 15 元。如销售不完按每个 5 元退回原单位。问该产品的订货量为多少个可使得预期的利润为最大。

随机性存贮模型

Example (模型五：需求是随机离散)

对某产品的需求量服从正态分布，已知 $\mu=150$，$\sigma=25$。又知每个产品的进价为 8 元，售价为 15 元。如销售不完按每个 5 元退回原单位。问该产品的订货量为多少个可使得预期的利润为最大。

Solution

$k=15-8=7, h=8-5=3$，所以，$\dfrac{k}{k+h}=0.7$，由于 r 服从正态分布，所以：

$$\Phi\left(\frac{Q^{*}-\mu}{\sigma}\right)=0.7$$

由正态分布表，得到：$\dfrac{Q^{*}-150}{25}=0.525$，所以 $Q^{*}=163$。

引言

1. 决策分析是为处理当前或未来可能发生的问题，选择最佳方案的一种过程。

引言

1. 决策分析是为处理当前或未来可能发生的问题，选择最佳方案的一种过程。
2. 决策论奠基人西蒙有句名言：”管理就是决策”，决策贯穿于管理的全过程，这也就是说，一切管理工作的核心就是决策。

引言

引言

1. 决策分析是为处理当前或未来可能发生的问题，选择最佳方案的一种过程。
2. 决策论奠基人西蒙有句名言：”管理就是决策”，决策贯穿于管理的全过程，这也就是说，一切管理工作的核心就是决策。
3. 现代决策的主要特点在于，以概率和数理统计为基础，以统计判定理论和高等数学为工具，广泛地收集和处理信号，考虑人的心理和外在环境、市场等应变因素，指导人们把各类工程技术因素与经济效益统一起来做定量分析，并以电子计算机为辅助手段，研究决策的性质和规律、模型和方法，以寻求整体的最优解或满意解（行动方案）。

引言

1. 决策分析是为处理当前或未来可能发生的问题，选择最佳方案的一种过程。
2. 决策论奠基人西蒙有句名言：”管理就是决策”，决策贯穿于管理的全过程，这也就是说，一切管理工作的核心就是决策。
3. 现代决策的主要特点在于，以概率和数理统计为基础，以统计判定理论和高等数学为工具，广泛地收集和处理信号，考虑人的心理和外在环境、市场等应变因素，指导人们把各类工程技术因素与经济效益统一起来做定量分析，并以电子计算机为辅助手段，研究决策的性质和规律、模型和方法，以寻求整体的最优解或满意解（行动方案）。
4. 决策具有目的性、信息性、经济性和实践性四大基本属性，而应变性是更高层次的属性。

Section 10

决策论

本章内容

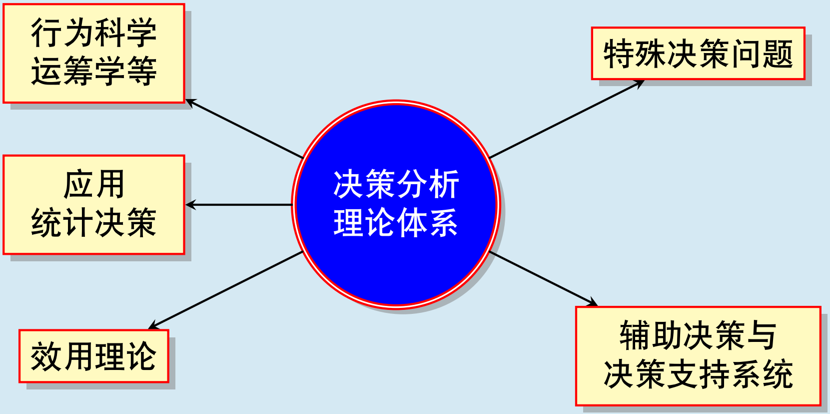
10 决策论
- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

目录

10 决策论
- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

决策论的基本概念

决策论发展的历程



决策论的基本概念

决策模型要素 $D = D(\Theta, A, V)$

不可控因素 - 自然状态

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\} = \{\theta_j\} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

决策论的基本概念

决策模型要素 $D = D(\Theta, A, V)$

不可控因素 - 自然状态

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\} = \{\theta_j\} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

可控因素 - 决策方案

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} = \{a_i\} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

决策论的基本概念

决策模型要素 $D = D(\Theta, A, V)$

不可控因素 - 自然状态

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\} = \{\theta_j\} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

可控因素 - 决策方案

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} = \{a_i\} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

损益值

$$r_{ij} = r(a_i, \theta_j) \quad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$$

决策论的基本概念

决策过程

环境分析

↑

提出问题

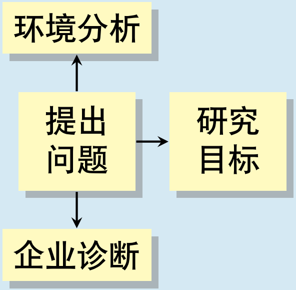
↓

企业诊断

提出问题

决策分析的第一步是要明确问题，即决策要解决什么样的问题。对于企业而言，这一过程可能包括企业的内外部环境分析。

决策过程

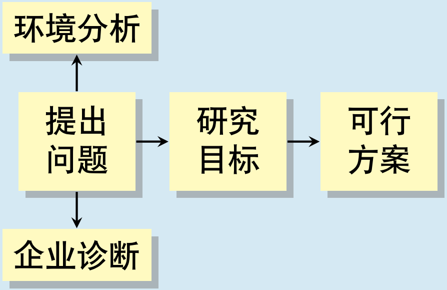


研究目标

在这一步中决策者要明确的是决策的目标是什么，什么样的目标是可以接受的，是成本最低或利润最大化，即是要确定决策的准则。

决策论的基本概念

决策过程



可行方案

在这一阶段中，决策者应该尽可能的找到解决问题所有可行的方案，通常要求方案应该尽可能的全面，甚至有时候先不要考虑方案的可行性问题，在一阶段应该强调数量而不是质量。

决策论的基本概念

决策过程

环境分析

↑

提出问题 → 研究目标 → 可行方案 → 方案评价

↓

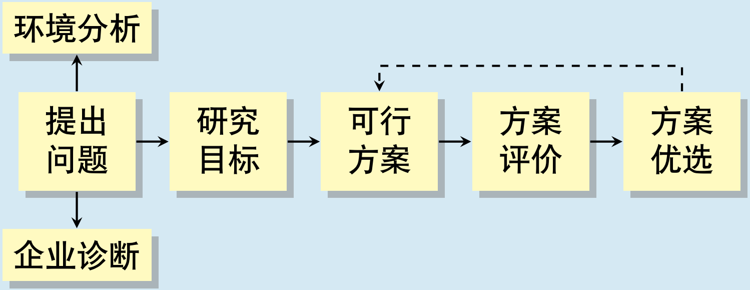
企业诊断

方案评价

在这一过程中，决策应对上述所有的方案确立一个明确的评价标准来进行评价，而评价结果通常是一个排序。在进行方案评价是要确定一个合理的、科学的、可信的评价标准。

决策论的基本概念

决策过程

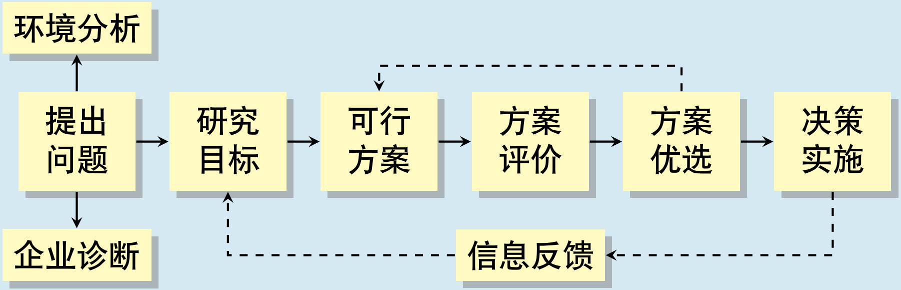


方案优选

决策应根据方案评价的结果，综合考虑多方面的因素进行方案的选择，应该遵循的依据是如何保障决策目标的实现。

决策论的基本概念

决策过程



方案实施

根据方案优选的结果，实施方案。在实施过程中，要不断地与决策目标进行对照，发现偏离，及时调整方案或者目标。

决策论的基本概念

决策分类

1. 按状态空间分类

按状态空间分类

- 确定型决策
- 不确定型决策
- 风险型决策

决策论的基本概念

决策分类

1. 按状态空间分类
2. 按性质的重要性分类

按性质的重要性分类

- 战略决策
- 策略（管理）决策
- 战术（业务）决策

决策分类

1. 按状态空间分类
2. 按性质的重要性分类
3. 按决策的结构分类

按决策的结构分类

- 程序化决策
- 非程序化决策

决策论的基本概念

决策分类

1. 按状态空间分类
2. 按性质的重要性分类
3. 按决策的结构分类
4. 按问题描述的性质分类

按问题描述的性质分类

- 定量决策
- 定性决策

决策论的基本概念

决策分类

1. 按状态空间分类
2. 按性质的重要性分类
3. 按决策的结构分类
4. 按问题描述的性质分类
5. 按目标数量和属性的多少分类

按目标数量和属性的多少分类

- 单目标决策
- 多目标决策

目录

10 决策论

- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

不确定型决策

引言

不确定型决策是指决策者所面临的状态空间不唯一，而且决策并不知道状态空间的概率分布情况。

这时由于决策者对环境情况了解较少，往往倾向于根据主观判断来进行决策。

通常根据决策者的对待不确定性的态度不同，将不确定型决策的方法划分为 5 种准则

1. 悲观主义准则

不确定型决策

引言

不确定型决策是指决策者所面临的状态空间不唯一，而且决策并不知道状态空间的概率分布情况。
这时由于决策者对环境情况了解较少，往往倾向于根据主观判断来进行决策。
通常根据决策者的对待不确定性的态度不同，将不确定型决策的方法划分为 5 种准则

1. 悲观主义准则
2. 乐观主义准则

不确定型决策

引言

不确定型决策是指决策者所面临的状态空间不唯一，而且决策并不知道状态空间的概率分布情况。
这时由于决策者对环境情况了解较少，往往倾向于根据主观判断来进行决策。
通常根据决策者的对待不确定性的态度不同，将不确定型决策的方法划分为 5 种准则

1. 悲观主义准则
2. 乐观主义准则
3. 折衷主义准则

不确定型决策

引言

不确定型决策是指决策者所面临的状态空间不唯一，而且决策并不知道状态空间的概率分布情况。
这时由于决策者对环境情况了解较少，往往倾向于根据主观判断来进行决策。
通常根据决策者的对待不确定性的态度不同，将不确定型决策的方法划分为 5 种准则

1. 悲观主义准则
2. 乐观主义准则
3. 折衷主义准则
4. 等可能性准则

不确定型决策

引言

不确定型决策是指决策者所面临的状态空间不唯一，而且决策并不知道状态空间的概率分布情况。
这时由于决策者对环境情况了解较少，往往倾向于根据主观判断来进行决策。
通常根据决策者的对待不确定性的态度不同，将不确定型决策的方法划分为 5 种准则

1. 悲观主义准则
2. 乐观主义准则
3. 折衷主义准则
4. 等可能性准则
5. 最小后悔值准则

不确定型决策

Example (悲观主义准则)

某工厂有 3 种方案可供选择，方案 a_1 是对原厂进行扩建，方案 a_2 是对原厂进行技术改造，方案 a_3 是建设新厂。而未来市场可能出现滞销（θ_1）、销路一般（θ_2）和畅销（θ_3）3 种状态。各方案在每种状态下的利润矩阵如下表所示。问该厂的决策者应如何决策？

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

不确定型决策

Example (悲观主义准则)

某工厂有 3 种方案可供选择，方案 a_1 是对原厂进行扩建，方案 a_2 是对原厂进行技术改造，方案 a_3 是建设新厂。而未来市场可能出现滞销（θ_1）、销路一般（θ_2）和畅销（θ_3）3 种状态。各方案在每种状态下的利润矩阵如下表所示。问该厂的决策者应如何决策？

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

悲观主义准则也称为保守主义准则、maxmin 准则、小中取大准则，它是保守悲观论者偏爱的决策方法。
因为保守或悲观的决策者害怕风险和损失，总是担心未来会出现最不利的状态，他只期望在这些最不利的情况下找出一个最好的决策。

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	min
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

不确定型决策

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	min
a_1	-4	13	15	-4
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	min
a_1	-4	13	15	-4
a_2	4	7	8	4
a_3	-6	12	17	

不确定型决策

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	min
a_1	-4	13	15	-4
a_2	4	7	8	4
a_3	-6	12	17	-6

悲观主义准则

先找出每个决策在各种状态下的最小收益值，再从这些每个决策的最小收益值中选一个最大值，它所对应的决策就是最优决策。

$$a^* = \max_i \min_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	min
a_1	-4	13	15	-4
a_2	4	7	8	4√
a_3	-6	12	17	-6

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

不确定型决策

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	-4	13	15	15
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	-4	13	15	15
a_2	4	7	8	8
a_3	-6	12	17	

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	-4	13	15	15
a_2	4	7	8	8
a_3	-6	12	17	17

不确定型决策

乐观主义准则

这种方法也称为 maxmax 方法，它是爱冒风险的乐观主义者偏好的方法。
乐观的决策者绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策方案。
决策者从最有利的结果去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大值收益值中选取一个最大值，相应方案即为最优方案。

$$a^* = \max_i \max_j (a_{ij})$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	-4	13	15	15
a_2	4	7	8	8
a_3	-6	12	17	17$\surd$

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j (r_{ij}) + (1-\alpha) \min_j (r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j(r_{ij}) + (1-\alpha)\min_j(r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	$\alpha = 0.8$
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j (r_{ij}) + (1-\alpha) \min_j (r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	$\alpha = 0.8$
a_1	-4	13	15	11.2
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j (r_{ij}) + (1-\alpha) \min_j (r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	$\alpha = 0.8$
a_1	-4	13	15	11.2
a_2	4	7	8	7.2
a_3	-6	12	17	

不确定型决策

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j(r_{ij}) + (1-\alpha)\min_j(r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	$\alpha = 0.8$
a_1	-4	13	15	11.2
a_2	4	7	8	7.2
a_3	-6	12	17	12.4

折衷主义准则

无论用悲观主义准则还是乐观主义准则都走向两个极端。于是提出了把这两种决策准则结合起来的方法。这种方法要求决策者给定一个乐观系数 α，它的取值介于 [0，1] 区间，所以有时这种方法也称为乐观系数法。根据给定的乐观系数，对于每一个方案都可得到一个折衷值，

$$H(a_i) = \alpha \max_j(r_{ij}) + (1-\alpha)\min_j(r_{ij}) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	$\alpha = 0.8$
a_1	-4	13	15	11.2
a_2	4	7	8	7.2
a_3	-6	12	17	12.4√

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

[a]等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

不确定型决策

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	平均值
a_1	-4	13	15	
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

[a]等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	平均值
a_1	-4	13	15	8
a_2	4	7	8	
a_3	-6	12	17	

[a]等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	平均值
a_1	-4	13	15	8
a_2	4	7	8	19/3
a_3	-6	12	17	

[a] 等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

不确定型决策

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	平均值
a_1	-4	13	15	8
a_2	4	7	8	$19/3$
a_3	-6	12	17	$23/3$

[a] 等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

等可能性准则

当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比另一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。这样每一事件发生的概率都是 $1/n$。然后计算各方案的收益期望值，再在其中选择一个最大值，它所对应的方案即为决策方案。事实上，由于各个事件发生的概率相等，期望值实际上就是算术平均值，所以该准则也被称为平均主义准则。[a]

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	平均值
a_1	-4	13	15	8√
a_2	4	7	8	19/3
a_3	-6	12	17	23/3

[a] 等可能性准则是由 19 世纪数学家 Laplace 提出的。

不确定型决策

最小后悔值准则

这个方法是由经济学 Savage 提出来的，所以又称为 Savage 准则。决策者制定决策之后，若实际情况与未能符合理想，必定后悔。这个方法就是将各自然状态下的最大收益值作理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为后悔值。即

$$r_{ij}^{'} = \max_i(r_{ij}) - r_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

最小后悔值准则要求首先得到各方案的最大后悔值，然后在其中选择最小值，它对应的策略即为决策方案。

最小后悔值准则

这个方法是由经济学 Savage 提出来的，所以又称为 Savage 准则。决策者制定决策之后，若实际情况与未能符合理想，必定后悔。这个方法就是将各自然状态下的最大收益值作理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为后悔值。即

$$r'_{ij} = \max_i(r_{ij}) - r_{ij} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

最小后悔值准则要求首先得到各方案的最大后悔值，然后在其中选择最小值，它对应的策略即为决策方案。

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

最小后悔值准则

这个方法是由经济学 Savage 提出来的，所以又称为 Savage 准则。决策者制定决策之后，若实际情况与未能符合理想，必定后悔。这个方法就是将各自然状态下的最大收益值作理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为后悔值。即

$$r_{ij}^{'} = \max_{i}(r_{ij}) - r_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

最小后悔值准则要求首先得到各方案的最大后悔值，然后在其中选择最小值，它对应的策略即为决策方案。

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	8	0	2
a_2	0	6	9
a_3	10	1	0

不确定型决策

最小后悔值准则

这个方法是由经济学 Savage 提出来的，所以又称为 Savage 准则。决策者制定决策之后，若实际情况与未能符合理想，必定后悔。这个方法就是将各自然状态下的最大收益值作理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为后悔值。即

$$r_{ij}^{'} = \max_i(r_{ij}) - r_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

最小后悔值准则要求首先得到各方案的最大后悔值，然后在其中选择最小值，它对应的策略即为决策方案。

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	8	0	2	8
a_2	0	6	9	9
a_3	10	1	0	10

不确定型决策

最小后悔值准则

这个方法是由经济学 Savage 提出来的，所以又称为 Savage 准则。决策者制定决策之后，若实际情况与未能符合理想，必定后悔。这个方法就是将各自然状态下的最大收益值作理想目标，并将该状态中的其他值与最高值之差称为后悔值。即

$$r_{ij}^{'} = \max_{i}(r_{ij}) - r_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

最小后悔值准则要求首先得到各方案的最大后悔值，然后在其中选择最小值，它对应的策略即为决策方案。

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-4	13	15
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

方案 \ 状态	θ_1	θ_2	θ_3	max
a_1	8	0	2	8$\surd$
a_2	0	6	9	9
a_3	10	1	0	10

不确定型决策

练习

某钟表公司计划通过它的销售网推销一种低价钟表，计划零售价为每块 10 元。对这种钟表有三个设计方案：方案 I 需一次投资 10 万元，投产后每块成本 5 元；方案 II 需一次投资 16 万元，投产后每块成本 4 元；方案 III 需一次投资 25 万元，投产后每块成本为 3 元。该钟表的需求量不确定，但估计有三种可能：E1—3 万，E2—12 万，E3—20 万。

分别用悲观法、乐观法、等可能法、后悔值法、折衷系数法（a=0.4）确定公司应采用哪种投资方案？

10 决策论
- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

风险型决策

引言

1. 风险型决策是指决策者对客观情况不甚了解，但对将发生各事件的概率是已知的。

风险型决策

引言

1. 风险型决策是指决策者对客观情况不甚了解，但对将发生各事件的概率是已知的。
2. 决策者往往通过调查，根据过去的经验或主观估计等途径获得这些概率。

风险型决策

引言

1. 风险型决策是指决策者对客观情况不甚了解，但对将发生各事件的概率是已知的。
2. 决策者往往通过调查，根据过去的经验或主观估计等途径获得这些概率。
3. 在风险决策中，一般采用期望值作为决策准则，常用的有最大期望收益准则和最小机会损失准则。

风险型决策

假设你要买一台手机。在广泛地收集相关资料后，在一家商店找到自己想要的型号，价格为 1000 元，而当时市价为 1100 元。

风险型决策

假设你要买一台手机。在广泛地收集相关资料后，在一家商店找到自己想要的型号，价格为 1000 元，而当时市价为 1100 元。

决策 1：买还是不买？

风险型决策

假设你要买一台手机。在广泛地收集相关资料后，在一家商店找到自己想要的型号，价格为 1000 元，而当时市价为 1100 元。

决策 1：买还是不买？

讨论

这是一个确定型决策问题。最优决策：买，获得 100 元的差价。

风险型决策

假设你要买一台手机。在广泛地收集相关资料后，在一家商店找到自己想要的型号，价格为 1000 元，而当时市价为 1100 元。

决策 1：买还是不买？

讨论

这是一个确定型决策问题。最优决策：买，获得 100 元的差价。

问题：如何理解 100 元的差价在决策中的含义？

风险型决策

正要买时听到路人甲说："买这种手机要小心。这种手机有 70% 是老厂生产的，质量好；30% 是新厂产的，质量不好"。并进一步说明：这种手机共有 10 个部件，老厂造的有 1 个部件有缺陷，而新厂造的有 6 个部件有缺陷。而且修理 1 个部件要 40 元，6 个要 200 元。

风险型决策

正要买时听到路人甲说：“买这种手机要小心。这种手机有 70% 是老厂生产的，质量好；30% 是新厂产的，质量不好”。并进一步说明：这种手机共有 10 个部件，老厂造的有 1 个部件有缺陷，而新厂造的有 6 个部件有缺陷。而且修理 1 个部件要 40 元，6 个要 200 元。

决策 2：这时买还是不买？

风险型决策

风险型决策

正要买时听到路人甲说：“买这种手机要小心。这种手机有 70% 是老厂生产的，质量好；30% 是新厂产的，质量不好”。并进一步说明：这种手机共有 10 个部件，老厂造的有 1 个部件有缺陷，而新厂造的有 6 个部件有缺陷。而且修理 1 个部件要 40 元，6 个要 200 元。

决策 2：这时买还是不买？

讨论

这是一个风险型决策问题。由于决策问题所面临的自然状态服从一定的概率分布，而使得决策的收益带有一定的风险性。

风险型决策

风险型决策

风险（Risk）：具有已知概率分布的不确定性。(Uncertainty with known probability distribution.)[a]

[a] Knight,1921

风险型决策

风险型决策

风险（Risk）：具有已知概率分布的不确定性。(Uncertainty with known probability distribution.)[a]

[a] Knight,1921

风险型决策的模型

$$\{A, \Theta, P, U\}$$
$$A = \{a_i\}, i = 1, ..., m$$
$$\Theta = \{\theta_j\}, j = 1, ..., n$$
$$P = \{p_j = P(\Theta = \theta_j)\}, j = 1, ..., n$$
$$U : A \times \Theta \to u_{ij}$$

风险型决策的描述方式

风险型决策

风险型决策的描述方式

Example (表格 (矩阵) 形式)

Example (决策树形式)

风险型决策的描述方式

Example（表格（矩阵）形式）

方案 \ 收益	状态	
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3
a_1(买)	60	-100
a_2(不买)	0	0

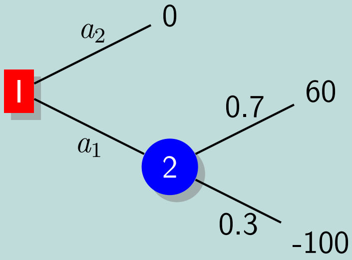
Example（决策树形式）

风险型决策的描述方式

Example (表格（矩阵）形式)

方案 \ 收益	状态	
概率 →	老厂 0.7	新厂 0.3
a_1(买)	60	-100
a_2(不买)	0	0

Example (决策树形式)



风险型决策的方法

EMV： Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij}, i = 1, ..., m$$

风险型决策

风险型决策的方法

EMV： Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij}, \, i = 1, \ldots, m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态	
概率 →	老厂 0.7	新厂 0.3
a_1(买)	60	-100
a_2(不买)	0	0

风险型决策的方法

EMV：Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij},\ i = 1, \ldots, m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态		EMV
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3	
a_1(买)	60	-100	12
a_2(不买)	0	0	0

风险型决策

风险型决策的方法

EMV：Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij},\ i = 1, \dots, m$$

Example (表格（矩阵）形式)

方案 \ 收益	状态		EMV
概率 →	老厂 0.7	新厂 0.3	
a_1(买)	60	-100	12← max
a_2(不买)	0	0	0

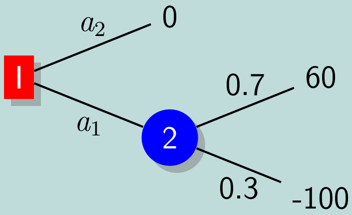
风险型决策

风险型决策的方法

EMV： Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij},\ i = 1, \ldots, m$$

Example (决策树形式)



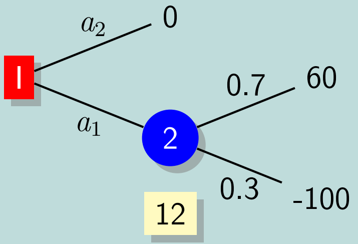
风险型决策

风险型决策的方法

EMV：Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij}, i = 1, \ldots, m$$

Example (决策树形式)



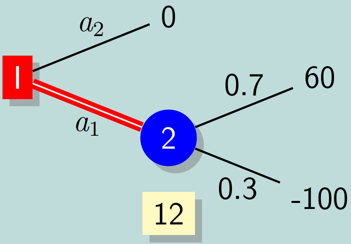
风险型决策

风险型决策的方法

EMV： Expected Monetary Value

$$EMV_i = \sum_j p_j u_{ij},\ i = 1, \ldots, m$$

Example (决策树形式)



风险型决策

风险型决策的方法

EOL： Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij},\ i = 1, \dots, m; \quad u'_{ij} = \left\{ \max_i (u_{ij}) - u_{ij} \right\},\ i = 1, \dots, m$$

风险型决策的方法

EOL： Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij}, i = 1, ..., m; \quad u'_{ij} = \left\{ \max_i (u_{ij}) - u_{ij} \right\}, i = 1, ..., m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态	
概率 $\to$	老厂 0.7	新厂 0.3
a_1(买)	60	-100
a_2(不买)	0	0

风险型决策的方法

EOL： Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij}, i = 1, \ldots, m; \quad u'_{ij} = \left\{ \max_i (u_{ij}) - u_{ij} \right\}, i = 1, \ldots, m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态	
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3
a_1(买)	0	100
a_2(不买)	60	0

风险型决策

风险型决策的方法

EOL：Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij},\ i = 1, \ldots, m; \qquad u'_{ij} = \left\{ \max_i (u_{ij}) - u_{ij} \right\},\ i = 1, \ldots, m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态		EOL
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3	
a_1(买)	60	-100	30
a_2(不买)	0	0	42

风险型决策

风险型决策的方法

EOL： Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij},\ i = 1, \ldots, m; \quad u'_{ij} = \left\{\max_i (u_{ij}) - u_{ij}\right\},\ i = 1, \ldots, m$$

Example (表格（矩阵）形式)

方案 \ 收益	状态		EOL
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3	
a_1(买)	60	-100	30$\leftarrow$ min
a_2(不买)	0	0	42

风险型决策的方法

EOL： Expected Opportunity Loss

$$EOL_i = \sum_j p_j u'_{ij}, i = 1, \ldots, m; \quad u'_{ij} = \left\{ \max_i (u_{ij}) - u_{ij} \right\}, i = 1, \ldots, m$$

Example (表格 (矩阵) 形式)

方案 \ 收益	状态		EOL
概率 $\rightarrow$	老厂 0.7	新厂 0.3	
a_1(买)	60	-100	30$\leftarrow$ min
a_2(不买)	0	0	42

EMV 准则和 EOL 准则决策的结果是一致的，是偶然还是必然？

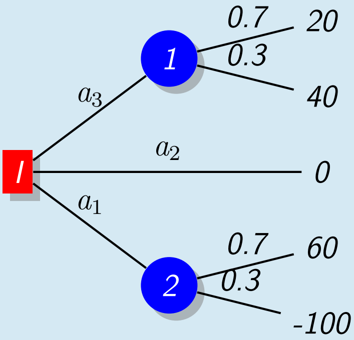
风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到："可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到：“可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

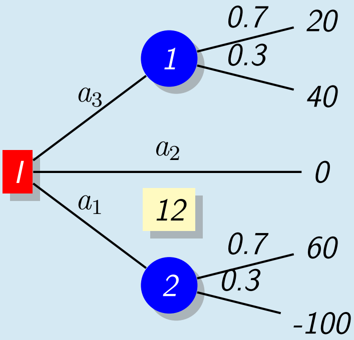
Solution



风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到："可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

Solution

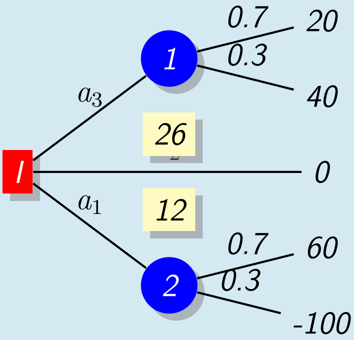


风险型决策

风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到："可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

Solution

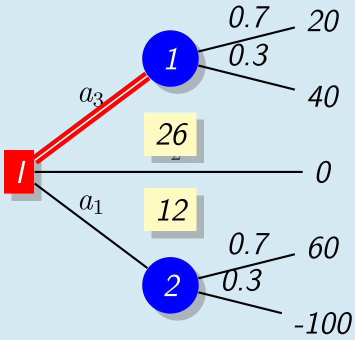


风险型决策

风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到："可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

Solution

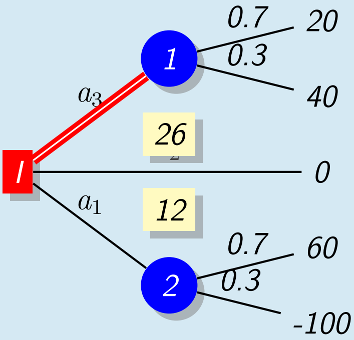


风险型决策

风险型决策的方法

售货员见你犹豫，说到：“可以开保修单，如果修理费用超过 100 元商店支付全部费用，否则双方各一半。但开保修单的话要加付 60 元。那么现在买还是不买呢？

Solution



信息对于决策有着重要影响。关于信息问题的研究成为决策分析的核心内容。

风险型决策的方法

信息带来了多的收益，所以决定进一步了解更多信息。你要求商店能让他把手机拿来试验检查，商店答应只能作 1 项检查。你进一步了解做这 1 项检查的费用为 15 元。那么现在他们应该怎么决策呢？

风险型决策的方法

信息带来了多的收益，所以决定进一步了解更多信息。你要求商店能让他把手机拿来试验检查，商店答应只能作 1 项检查。你进一步了解做这 1 项检查的费用为 15 元。那么现在他们应该怎么决策呢？

问题

请思考下列问题：

风险型决策

风险型决策的方法

信息带来了多的收益，所以决定进一步了解更多信息。你要求商店能让他把手机拿来试验检查，商店答应只能作 1 项检查。你进一步了解做这 1 项检查的费用为 15 元。那么现在他们应该怎么决策呢？

问题

请思考下列问题：

1. 检查的目的何在？

风险型决策

风险型决策的方法

信息带来了多的收益，所以决定进一步了解更多信息。你要求商店能让他把手机拿来试验检查，商店答应只能作 1 项检查。你进一步了解做这 1 项检查的费用为 15 元。那么现在他们应该怎么决策呢？

问题

请思考下列问题：

1. 检查的目的何在？
2. 检查会有什么结果？

风险型决策

风险型决策的方法

信息带来了多的收益，所以决定进一步了解更多信息。你要求商店能让他把手机拿来试验检查，商店答应只能作 1 项检查。你进一步了解做这 1 项检查的费用为 15 元。那么现在他们应该怎么决策呢？

问题

请思考下列问题：

1. 检查的目的何在？
2. 检查会有什么结果？
3. 各种检查结果出现的概率分别是多少？

风险型决策

Bayes 公式

Bayes 公式主要是用来研究事物发生的原因，即要知道在 A 发生的条件下，某个"原因" B 发生的概率。

Theorem

设 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是一组互斥的完备事件集，即所有的 B_i 互不相容且；并设 $P(B_i) > 0$，则对任一事件 A，有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\,P(A|B_i)}{\sum P(B_i)\,P(A|B_i)} = \frac{P(B_iA)}{P(A)}, i = 1, \ldots, n$$

Bayes 决策

假设

θ_1	这部手机是老厂出的	z_1	这部手机出故障
θ_2	这部手机是新厂出的	z_2	这部手机不出故障

已知条件

先验概率

$P(\theta_1) = 0.7 \quad P(\theta_2) = 0.3$

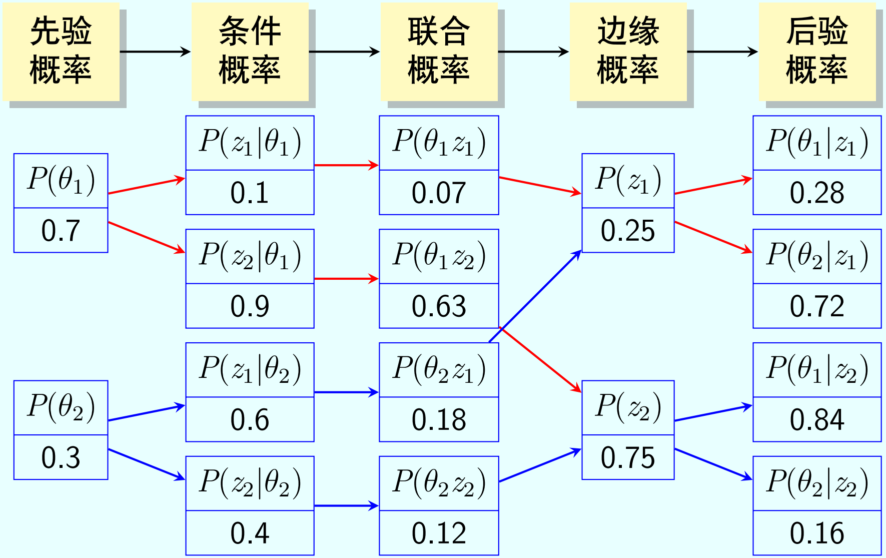
条件概率

$$P(z_1|\theta_1) = \frac{1}{10} = 0.1 \quad P(z_2|\theta_1) = \frac{10-1}{10} = 0.9$$
$$P(z_1|\theta_2) = \frac{6}{10} = 0.6 \quad P(z_2|\theta_1) = \frac{10-6}{10} = 0.4$$

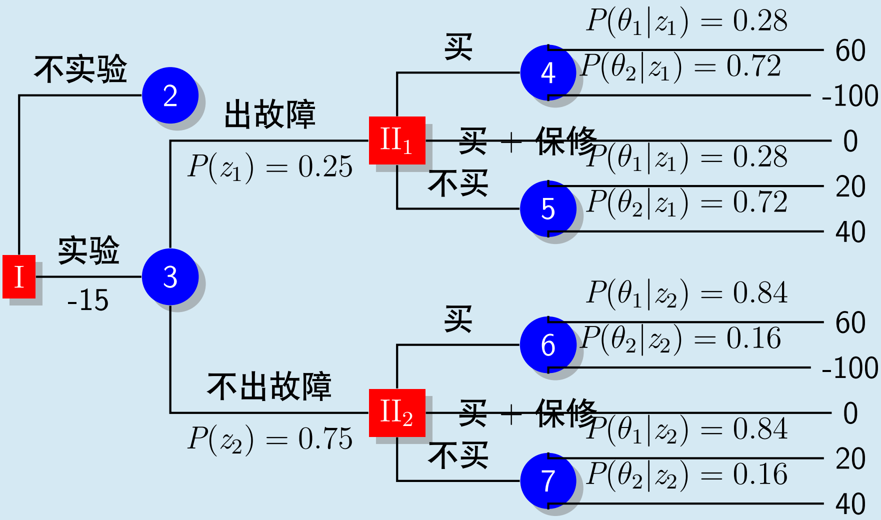
目标

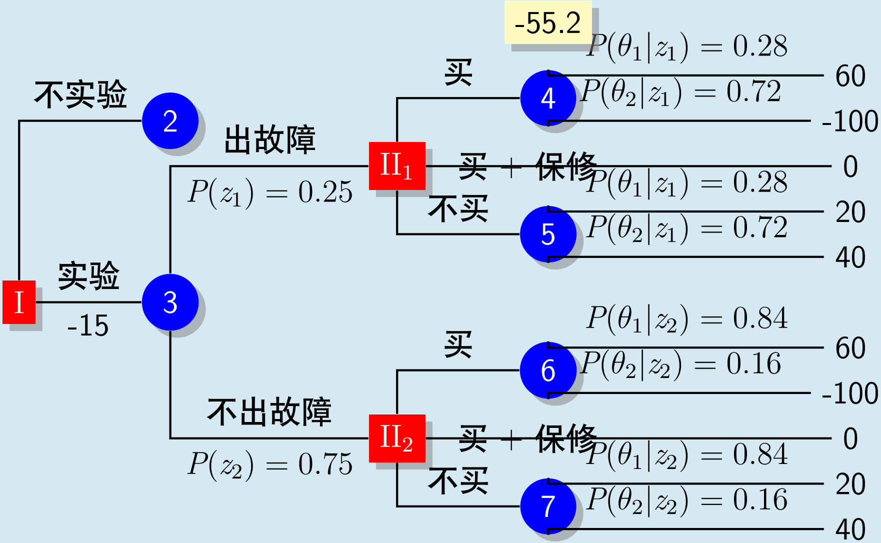
$P(\theta_1|z_1) = ?$
$P(\theta_1|z_2) = ?$
$P(\theta_2|z_1) = ?$
$P(\theta_2|z_2) = ?$

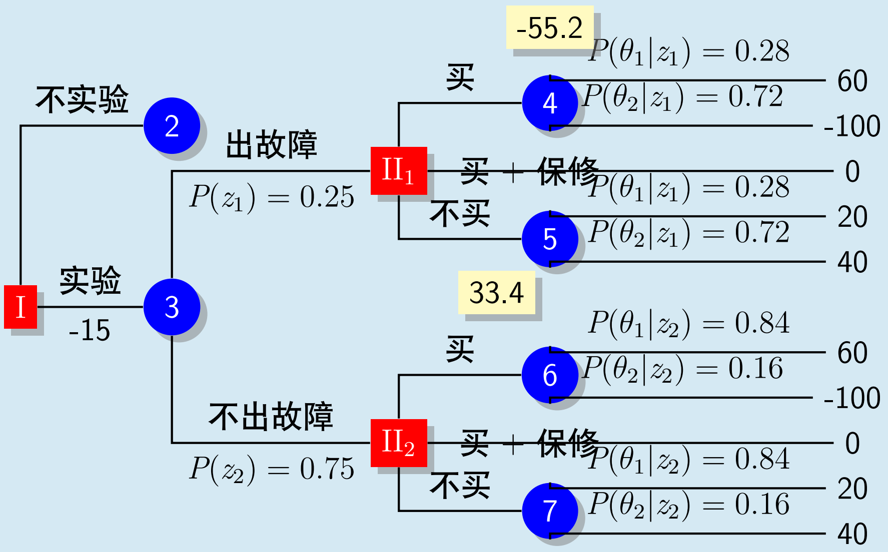
风险型决策 · 概率树



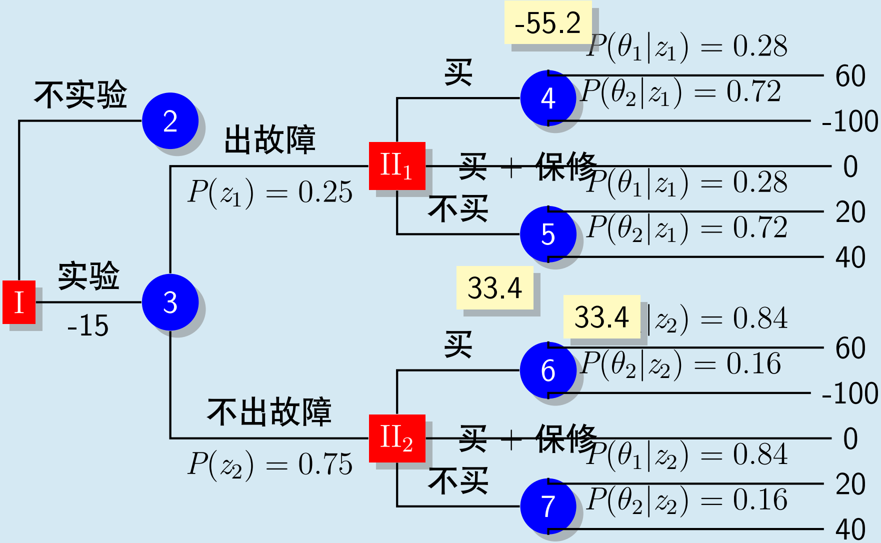
先验概率
条件概率
联合概率
边缘概率
后验概率
$P(\theta_1)$
0.7
$P(\theta_2)$
0.3
$P(z_1|\theta_1)$
0.1
$P(z_2|\theta_1)$
0.9
$P(z_1|\theta_2)$
0.6
$P(z_2|\theta_2)$
0.4
$P(\theta_1 z_1)$
0.07
$P(\theta_1 z_2)$
0.63
$P(\theta_2 z_1)$
0.18
$P(\theta_2 z_2)$
0.12
$P(z_1)$
0.25
$P(z_2)$
0.75
$P(\theta_1|z_1)$
0.28
$P(\theta_2|z_1)$
0.72
$P(\theta_1|z_2)$
0.84
$P(\theta_2|z_2)$
0.16


不实验
2
实验
-15
I
3
出故障
$P(z_1) = 0.25$
II$_1$
买
4
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
60
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
-100
买 + 保修
0
不买
5
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
20
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
40
不出故障
$P(z_2) = 0.75$
II$_2$
买
6
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
60
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
-100
买 + 保修
0
不买
7
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
20
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
40

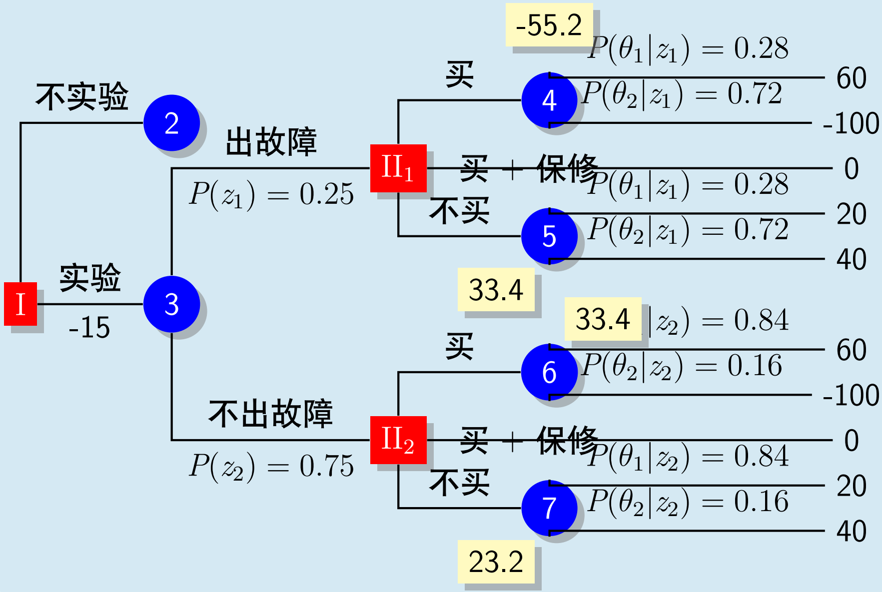

-55.2
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
买
60
不实验
2
4
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
-100
出故障
II_1
买 + 保修
0
$P(z_1)=0.25$
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
不买
20
5
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
40
实验
I
3
-15
$P(\theta_1|z_2)=0.84$
买
60
6
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
-100
不出故障
II_2
买 + 保修
0
$P(z_2)=0.75$
$P(\theta_1|z_2)=0.84$
不买
20
7
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
40



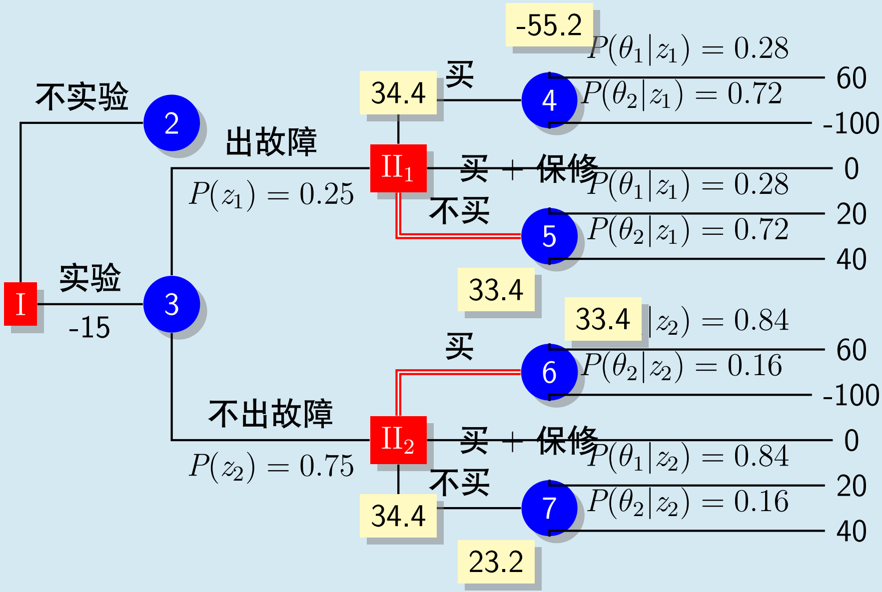
-55.2
33.4
不实验
2
出故障
$P(z_1) = 0.25$
II_1
买
4
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
60
-100
买 + 保修
0
不买
5
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
20
40
I
实验
-15
3
不出故障
$P(z_2) = 0.75$
II_2
买
6
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
60
-100
买 + 保修
0
不买
7
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
20
40



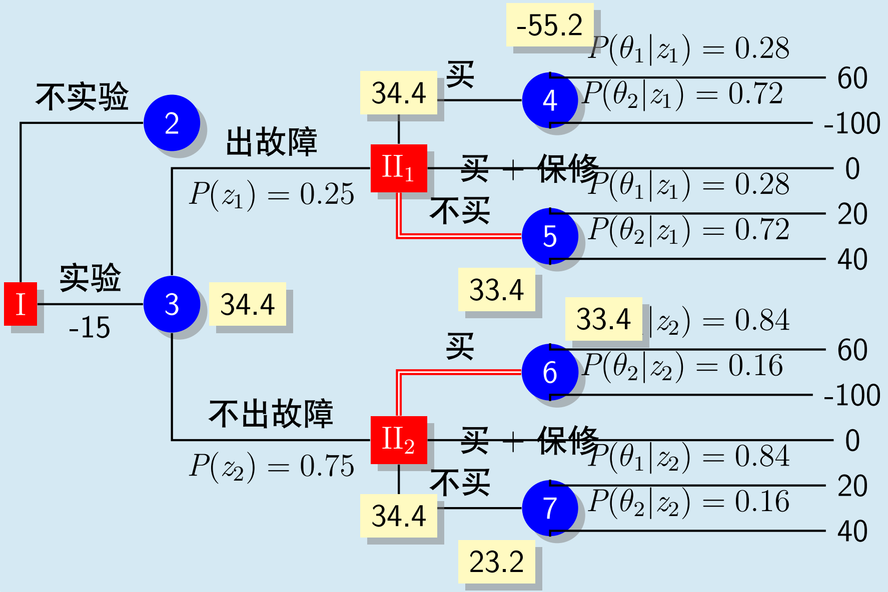
I
不实验
实验
-15
2
3
出故障
$P(z_1) = 0.25$
不出故障
$P(z_2) = 0.75$
II_1
II_2
买
买 + 保修
不买
4
5
6
7
-55.2
33.4
33.4
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
$|z_2) = 0.84$
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
60
-100
0
20
40
60
-100
0
20
40



-55.2
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
买
60
不实验
4
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
2
-100
出故障
II_1
买 + 保修
0
$P(z_1) = 0.25$
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
不买
20
5
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
40
实验
33.4
I
3
33.4
$|z_2) = 0.84$
-15
买
60
6
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
-100
不出故障
II_2
买 + 保修
0
$P(z_2) = 0.75$
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
不买
20
7
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
40
23.2

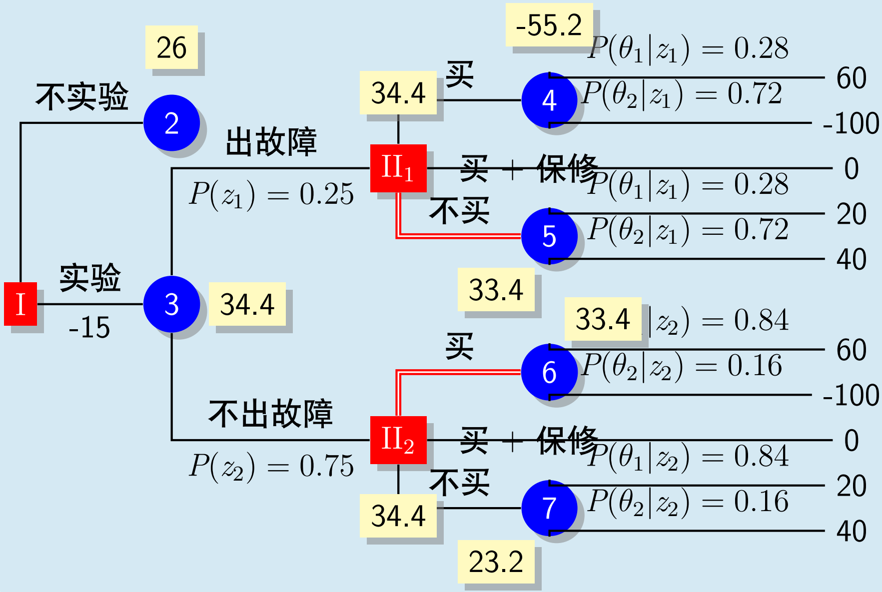

-55.2
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
买
34.4
不实验
2
4
60
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
-100
出故障
II_1
买 + 保修
0
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
$P(z_1)=0.25$
不买
20
5
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
40
实验
I
3
-15
33.4
33.4
$|z_2)=0.84$
买
6
60
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
-100
不出故障
II_2
买 + 保修
0
$P(\theta_1|z_2)=0.84$
$P(z_2)=0.75$
不买
20
34.4
7
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
40
23.2

风险型决策 · 决策树

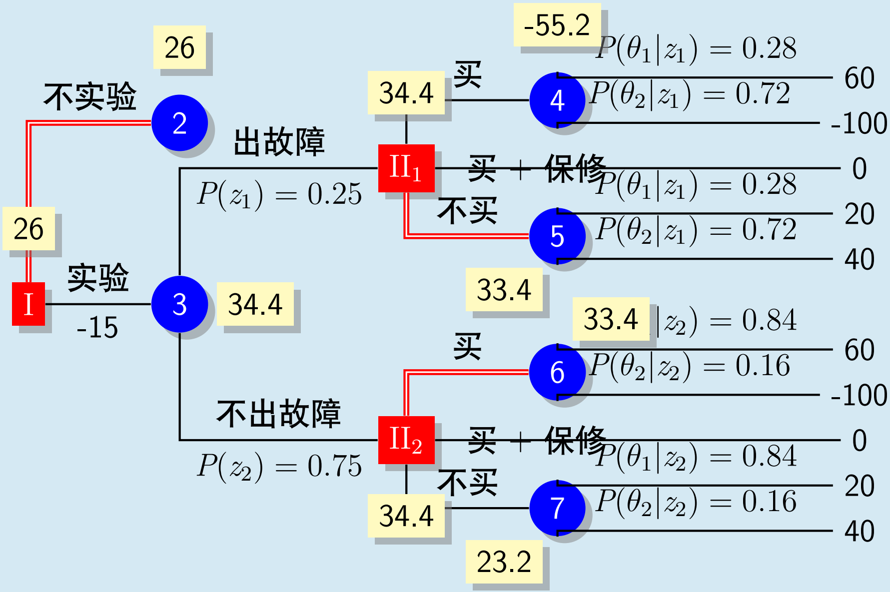


不实验
2
实验
I
-15
3
34.4
出故障
$P(z_1)=0.25$
不出故障
$P(z_2)=0.75$
II_1
II_2
34.4
-55.2
买
4
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
60
-100
买 + 保修
0
不买
5
$P(\theta_1|z_1)=0.28$
$P(\theta_2|z_1)=0.72$
20
40
33.4
33.4
买
6
$|z_2)=0.84$
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
60
-100
买 + 保修
0
不买
7
$P(\theta_1|z_2)=0.84$
$P(\theta_2|z_2)=0.16$
20
40
34.4
23.2

风险型决策 · 决策树



26
不实验
2
实验
I
-15
3
34.4
出故障
$P(z_1) = 0.25$
II_1
34.4
买
4
-55.2
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
60
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
-100
买 + 保修
0
不买
5
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
20
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
40
33.4
不出故障
$P(z_2) = 0.75$
II_2
买
6
33.4
$|z_2) = 0.84$
60
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
-100
买 + 保修
0
不买
7
34.4
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
20
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
40
23.2


26
不实验
2
26
实验
I
-15
3
34.4
出故障
$P(z_1) = 0.25$
不出故障
$P(z_2) = 0.75$
34.4
买
II_1
买 + 保修
不买
-55.2
4
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
60
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
-100
0
5
$P(\theta_1|z_1) = 0.28$
20
$P(\theta_2|z_1) = 0.72$
40
33.4
33.4
II_2
买
6
$|z_2) = 0.84$
60
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
-100
买 + 保修
0
不买
34.4
7
$P(\theta_1|z_2) = 0.84$
20
$P(\theta_2|z_2) = 0.16$
40
23.2

Bayes 决策

经过计算后，认为不用做实验检查了，决定直接购买并且要保修单。正在此时，路人乙恰巧经过，说到：我曾经在这个厂作过一段时间的 CTO，我能认出是不是老厂造的。但你们要给我 20 元。
那么你应不应该让路人乙来帮你辨识呢？

风险型决策

Bayes 决策

经过计算后，认为不用做实验检查了，决定直接购买并且要保修单。正在此时，路人乙恰巧经过，说到：我曾经在这个厂作过一段时间的 CTO，我能认出是不是老厂造的。但你们要给我 20 元。
那么你应不应该让路人乙来帮你辨识呢？

Solution

方案 \ 状态	$\frac{\theta_1}{(0.7)}$	$\frac{\theta_2}{(0.3)}$	EMV_i
a_1 买	60	-100	12
a_2 不买	0	0	0
a_3 买 + 保修	20	40	26

风险型决策

Bayes 决策

经过计算后，认为不用做实验检查了，决定直接购买并且要保修单。正在此时，路人乙恰巧经过，说到：我曾经在这个厂作过一段时间的 CTO，我能认出是不是老厂造的。但你们要给我 20 元。
那么你应不应该让路人乙来帮你辨识呢？

Solution

方案 \ 状态	$\frac{\theta_1}{(0.7)}$	$\frac{\theta_2}{(0.3)}$	EMV_i
a_1 买	60	-100	12
a_2 不买	0	0	0
a_3 买 + 保修	20	40	26

当为老厂造的，应选择 a_1 获利 60，当为新厂造的应选择 a_3 获利 40。

风险型决策

Bayes 决策

经过计算后，认为不用做实验检查了，决定直接购买并且要保修单。正在此时，路人乙恰巧经过，说到：我曾经在这个厂作过一段时间的 CTO，我能认出是不是老厂造的。但你们要给我 20 元。
那么你应不应该让路人乙来帮你辨识呢？

Solution

方案 \ 状态	θ_1 (0.7)	θ_2 (0.3)	EMV_i
a_1 买	60	-100	12
a_2 不买	0	0	0
a_3 买 + 保修	20	40	26

当为老厂造的，应选择 a_1 获利 60，当为新厂造的应选择 a_3 获利 40。

$$EPC = 60 \times 0.7 + 40 \times 0.3 = 54$$

Bayes 决策

经过计算后，认为不用做实验检查了，决定直接购买并且要保修单。正在此时，路人乙恰巧经过，说到：我曾经在这个厂作过一段时间的 CTO，我能认出是不是老厂造的。但你们要给我 20 元。
那么你应不应该让路人乙来帮你辨识呢？

Solution

方案 \ 状态	θ_1 (0.7)	θ_2 (0.3)	EMV_i
a_1 买	60	-100	12
a_2 不买	0	0	0
a_3 买 + 保修	20	40	26

当为老厂造的，应选择 a_1 获利 60，当为新厂造的应选择 a_3 获利 40。

$$EPC = 60 \times 0.7 + 40 \times 0.3 = 54$$

如果知道手机是哪个厂的，这意味着决策者具有完全信息，此时的收益为完全信息期望收益，记作 EPC。

风险型决策

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

♡2 CS： Cost of Sample

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

♡2 CS： Cost of Sample

♡3 EVPI： Expected Value of Perfect Information

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

♡2 CS： Cost of Sample

♡3 EVPI： Expected Value of Perfect Information

♡4 EVSI： Expected Value of Sample Information

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

♡2 CS： Cost of Sample

♡3 EVPI： Expected Value of Perfect Information

♡4 EVSI： Expected Value of Sample Information

♡5 ENGS： Expected Net Gain from Sample

Bayes 决策的一些概念

♡1 EPC： Expected Profit under Certainty

♡2 CS： Cost of Sample

♡3 EVPI： Expected Value of Perfect Information

♡4 EVSI： Expected Value of Sample Information

♡5 ENGS： Expected Net Gain from Sample

$$EPC = \sum_{i=1}^{m} p_j \max_j (u_{ij}) \qquad EVPI = EPC - EMV_0^*$$

$$EVSI = EMV_1^* - EMV_0^* \qquad ENGS = EVSI - CS$$

Example

某厂在考虑是否大批量投产一种新产品的决策中，根据以往经验，预计该产品大批量投入市场后有三种销售远景（表 1：单位：百万元）。因亏损的验前概率较大，故该厂还要研究是否采用"试销法"进行市场调查。经财务部门预算，进行一次试销调查花费 60 万元。而试销所得到的调查信息的可靠性是有限的，有过去产品进入市场的统计资料可借鉴（表 2）。试问在这些情况下是否值得应用试销方式进行市场调查。

表：批量生产的销售估计

销售远景	概率	条件盈利
(盈)	0.25	15
(平)	0.30	1
(亏)	0.45	-6

表：过去试销资料记录

条件概率		市场实际情况		
		盈	平	亏
调查结果	盈	0.65	0.25	0.10
	平	0.25	0.45	0.15
	亏	0.10	0.30	0.75

Solution

步骤 1：求联合概率与边缘概率

$$P(\Theta) = P(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.25, 0.35, 0.40)$$

$$P(z_i|\theta_j) = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.65 & 0.25 & 0.10 \\ 0.25 & 0.45 & 0.15 \\ 0.10 & 0.30 & 0.75 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以，联合概率和边缘概率为：

Solution

步骤 1：求联合概率与边缘概率

$$P(\Theta) = P(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.25, 0.35, 0.40)$$

$$P(z_i|\theta_j) = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.65 & 0.25 & 0.10 \\ 0.25 & 0.45 & 0.15 \\ 0.10 & 0.30 & 0.75 \end{pmatrix} \end{array}$$

所以，联合概率和边缘概率为：

$$P(z_i\theta_j) = \begin{array}{c} \\ z_1\theta_j \\ z_2\theta_j \\ z_3\theta_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & sum \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1625 & 0.0750 & 0.0450 & 0.2825 \\ 0.0625 & 0.1350 & 0.0675 & 0.2650 \\ 0.0250 & 0.0900 & 0.3375 & 0.4525 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

步骤 1： 求联合概率与边缘概率

$$P(z_i\theta_j) = \begin{array}{c} \\ z_1\theta_j \\ z_2\theta_j \\ z_3\theta_j \end{array} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{sum} \\ \begin{pmatrix} 0.1625 & 0.0750 & 0.0450 & 0.2825 \\ 0.0625 & 0.1350 & 0.0675 & 0.2650 \\ 0.0250 & 0.0900 & 0.3375 & 0.4525 \end{pmatrix} \end{array}$$

步骤 2： 利用 *Bayes* 公式修正先验概率

风险型决策

Solution

步骤 *1*： 求联合概率与边缘概率

$$P(z_i\theta_j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & sum \end{array} \\ \begin{array}{c} z_1\theta_j \\ z_2\theta_j \\ z_3\theta_j \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1625 & 0.0750 & 0.0450 & 0.2825 \\ 0.0625 & 0.1350 & 0.0675 & 0.2650 \\ 0.0250 & 0.0900 & 0.3375 & 0.4525 \end{pmatrix} \end{array}$$

步骤 *2*： 利用 *Bayes* 公式修正先验概率

$$P(z_i\theta_j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & sum \end{array} \\ \begin{array}{c} \theta_j|z_1 \\ \theta_j|z_2 \\ \theta_j|z_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5752 & 0.2655 & 0.1593 & 1 \\ 0.2358 & 0.5094 & 0.2547 & 1 \\ 0.0552 & 0.1989 & 0.7459 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

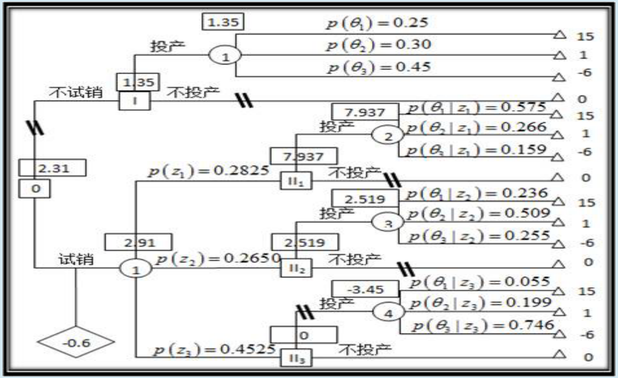
风险型决策

Solution

步骤 3：画决策树，并计算期望值

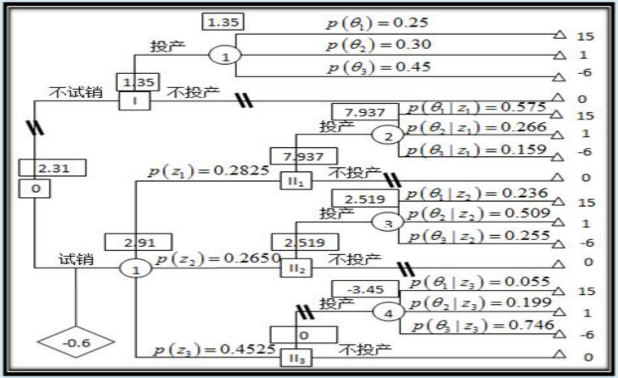
Solution

步骤 3：画决策树，并计算期望值



Solution

步骤 4：权衡分析，作出决策



灵敏度分析

♣1 在风险型决策中，方案的选择依赖于自然状态的发生概率及方案在自然状态下的收益值，而这些值通常都是估算或预测所得，不可能十分准确。

风险型决策

灵敏度分析

♣1 在风险型决策中，方案的选择依赖于自然状态的发生概率及方案在自然状态下的收益值，而这些值通常都是估算或预测所得，不可能十分准确。

♣2 灵敏度分析就是分析决策所用的数据在什么范围内变化时，原最优决策方案仍然有效。

风险型决策

灵敏度分析

♣1 在风险型决策中，方案的选择依赖于自然状态的发生概率及方案在自然状态下的收益值，而这些值通常都是估算或预测所得，不可能十分准确。

♣2 灵敏度分析就是分析决策所用的数据在什么范围内变化时，原最优决策方案仍然有效。

♣3 通常是对自然状态发生的概率进行灵敏度分析，也就是考虑自然状态发生概率的变化如何影响最优方案的选择。

风险型决策

Example (灵敏度分析)

状态 $\rightarrow$	1	2	
方案 $\downarrow$ 概率 $\rightarrow$	0.4	0.6	EMV_i
1	8	-6	-0.4
2	4	10	7.6
3	6	8	7.4

风险型决策

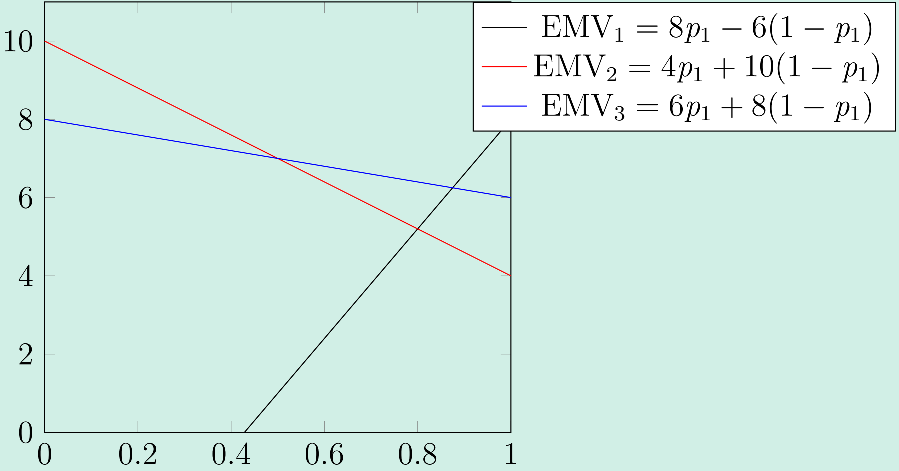
Example (灵敏度分析)

状态 →	1	2	
方案 ↓ 概率 →	0.4	0.6	EMV_i
1	8	-6	-0.4
2	4	10	7.6
3	6	8	7.4

设状态 1 的概率为 p_1，则状态 2 的概率为 $1-p_1$，所以不同方案的期望值为：

$$
\begin{aligned}
EMV_1 &= 8p_1 - 6(1-p_1) \\
EMV_2 &= 4p_1 + 10(1-p_1) \\
EMV_3 &= 6p_1 + 8(1-p_1)
\end{aligned}
$$

Example (灵敏度分析)



效用函数及其应用

问题 1

采用方案 A1，稳获 100 元；方案 B1 获得 250 元和 0 元的概率各为 50%。

效用函数及其应用

问题 1

采用方案 A1，稳获 100 元；方案 B1 获得 250 元和 0 元的概率各为 50%。

问题 2

采用方案 A2，稳获 10000 元；方案 B2 掷一枚均匀硬币直到出现正面为止。若所掷的次数为 n，则当出现正面时获 2^n 元。

风险型决策

效用函数及其应用

问题 1

采用方案 A1，稳获 100 元；方案 B1 获得 250 元和 0 元的概率各为 50%。

问题 2

采用方案 A2，稳获 10000 元；方案 B2 掷一枚均匀硬币直到出现正面为止。若所掷的次数为 n，则当出现正面时获 2^n 元。

结论

同一种货币在不同的风险情况下，对同一决策者来说具有不同的效用值；
相同的货币在不同的人看来具有不同的效用。

效用函数及其应用

偏好公理

1. **完备性**
   下面三个关系只有一个成立：$r_1 \prec r_2, r_1 \succ r_2, r_1 \sim r_2$

风险型决策

效用函数及其应用

偏好公理

1. **完备性**
   下面三个关系只有一个成立：$r_1 \prec r_2, r_1 \succ r_2, r_1 \sim r_2$
2. **传递性**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \succ r_2 \\ r_2 \succ r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 \succ r_3$$

效用函数及其应用

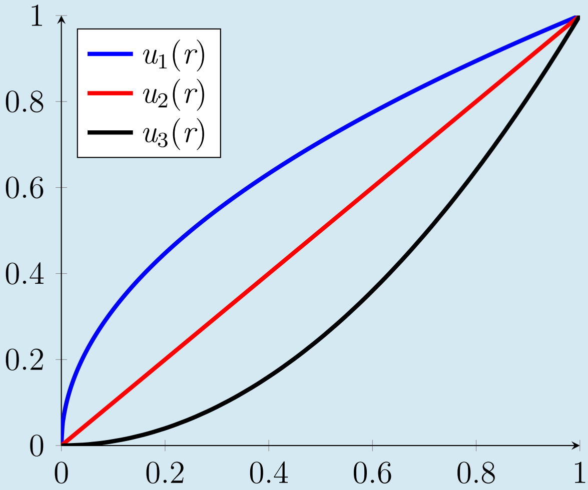
偏好公理

1. **完备性**
   下面三个关系只有一个成立：$r_1 \prec r_2, r_1 \succ r_2, r_1 \sim r_2$
2. **传递性**
   $$\left.\begin{array}{l} r_1 \succ r_2 \\ r_2 \succ r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 \succ r_3$$
3. **对称性**
   $$\left.\begin{array}{l} r_1 \preceq r_2 \\ r_1 \succeq r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 \sim r_3$$

效用函数

效用函数是定义在收益集 R 上的一个实函数 $u(r)$。

$$r_1 \prec r_2 \Rightarrow u(r_1) < u(r_2)$$
$$r_1 \sim r_2 \Rightarrow u(r_1) = u(r_2)$$



Example (效用函数的应用)

某工厂欲生产一种新产品。有两种生产方案可供选择，即年产 2 万吨和年产 5 万吨。根据市场预测知道产品销路有好、中、差、滞销四种情况。这几种情况发生的概率和两个方案在各种情况下的经济效益如下表所示。

销路 $\rightarrow$	好	中	差	滞销
生产方案 $\downarrow$	0.3	0.4	0.2	0.1
年产 2 万吨	200	200	200	-100
年产 5 万吨	500	200	-200	-500

设工厂的效用函数 u 在各收益值的效用值分别为：$u(500) = 1, u(200) = 0.5, u(-100) = 0.1, u(-200) = 0.05, u(-500) = 0$，试用效用函数选择最优方案。

目录

10 决策论

- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

层次分析法

引言

层次分析法（Analytic Hierarchy Process,AHP）是由美国运筹学家T.L.Saaty于 20 世纪 70 年代提出的，是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。层次分析法用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的每个标准的权数，利用权数求出各方案的优劣次序。

层次分析法

引言

层次分析法（Analytic Hierarchy Process,AHP）是由美国运筹学家T.L.Saaty于 20 世纪 70 年代提出的，是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。层次分析法用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的每个标准的权数，利用权数求出各方案的优劣次序。

单目标决策与多目标决策的比较

要素	单目标决策	多目标决策
目标及其值	一个目标，值唯一，最优	多于一个目标，各目标值可能冲突，不全最优
解的个数	多数唯一，可能不唯一	不唯一
解的概念	最优解	多样：Pareto 解（非劣解、有效解）锥极解、非控解、真有效解等

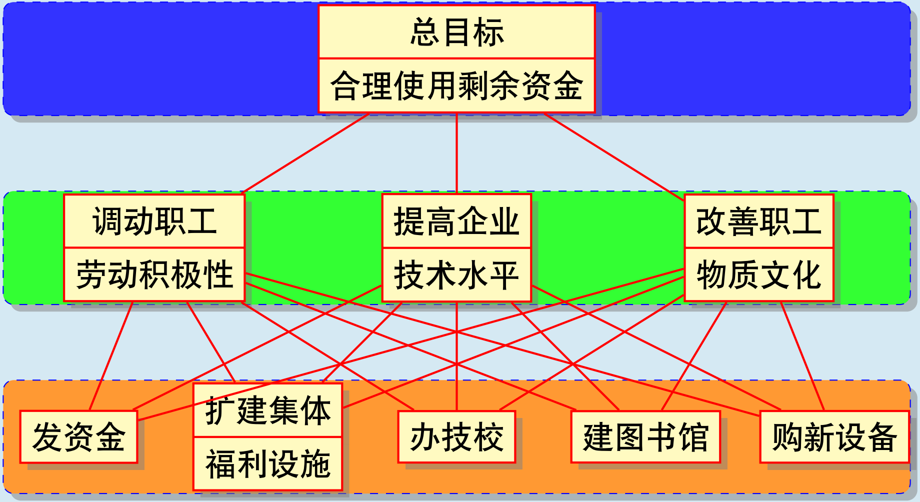
层次分析法

AHP 法原理

某工厂有一笔剩余资金欲作分配。根据各方面的反映和意见，提出可供领导决策的方案有：（1）作为奖金发给职工；（2）扩建食堂和托儿所；（3）开办职工业余技术学校和培训班；（4）建立图书馆；（5）引进新技术扩大生产规模等。领导在决策时，要考虑到调动职工劳动生产积极性，提高职工文化技术水平，改善职工物质文化生活状况等方面。对这些方案的优劣性进行评价，排除后，才能作出决策。

层次分析法

层次分析图


总目标
合理使用剩余资金
调动职工
劳动积极性
提高企业
技术水平
改善职工
物质文化
发资金
扩建集体
福利设施
办技校
建图书馆
购新设备

AHP 法原理

设有 n 个目标 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，它们的权重分别为 $w_1, w_2, \ldots, w_n$。若将它们的权重两两比较，其比值可构成 $n \times n$ 矩阵 A。

AHP 法原理

设有 n 个目标 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，它们的权重分别为 $w_1, w_2, \ldots, w_n$。若将它们的权重两两比较，其比值可构成 $n \times n$ 矩阵 A。

$$A = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

层次分析法

AHP 法原理

A 矩阵具有如下性质：若用权重向量

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{\mathrm{T}}$$

右乘 A 矩阵，得到

AHP 法原理

A 矩阵具有如下性质：若用权重向量

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^{\mathrm{T}}$$

右乘 A 矩阵，得到

$$AW = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nW$$

AHP 法原理

A 矩阵具有如下性质：若用权重向量

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$$

右乘 A 矩阵，得到

$$AW = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nW$$

即

$$(A - nI)\,W = 0$$

Theorem (AHP 法原理)

若 A 矩阵有以下特点（设 $a_{ij} = w_i/w_j$）：

(1) $a_{ii} = 1$；

(2) $a_{ij} = 1/a_{ji} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$；

(3) $a_{ij} = a_{ik}/a_{jk} \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n$。

则该矩阵具有唯一非零的最大特征值 $\lambda_{\max}$，且 $\lambda_{\max} = n$。

Theorem (AHP 法原理)

若 A 矩阵有以下特点（设 $a_{ij}=w_i/w_j$）:

(1) $a_{ii}=1$;

(2) $a_{ij}=1/a_{ji} \quad i,j=1,2,\cdots,n$;

(3) $a_{ij}=a_{ik}/a_{jk} \quad i,j,k=1,2,\cdots,n$。

则该矩阵具有唯一非零的最大特征值 $\lambda_{\max}$，且 $\lambda_{\max}=n$。

AHP 法原理

若给出的判断矩阵 $\bar{A}$ 具有上述特征，则该矩阵具有完全一致性。然而人们对复杂事物的各因素，采用两两比较时，不可能做到判断的完全一致性，而存在着估计误差，这必然导致特征值及特征向量也有偏差。

AHP 法原理

$$AW = nW \Longrightarrow \bar{A}W' = \lambda_{\max} W'$$

这里 $\lambda_{\max}$ 是矩阵 $\bar{A}$ 的最大特征值，W' 便是带有偏差的相对权重向量。这就是由判断不相容而引起的误差。为了避免误差太大，所以要衡量 $\bar{A}$ 的一致性，当 A 矩阵完全一致时，因 $a_{ii} = 1$，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n$$

AHP 法原理

而当 $\bar{A}$ 矩阵存在判别不一致时，一般是 $\lambda_{\max} \geqslant n$。这时

$$\lambda_{\max} + \sum_{i \neq \max} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n$$

由于 $\lambda_{\max} - n = -\sum\limits_{i \neq \max} \lambda_i$，以其平均值作为检验判断矩阵一致性指标（$CI$）。

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{-\sum\limits_{i \neq \max} \lambda_i}{n-1}$$

AHP 法原理

而当 $\bar{A}$ 矩阵存在判别不一致时，一般是 $\lambda_{\max} \geqslant n$。这时

$$\lambda_{\max} + \sum_{i \neq \max} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n$$

由于 $\lambda_{\max} - n = -\sum_{i \neq \max} \lambda_i$，以其平均值作为检验判断矩阵一致性指标（$CI$）。

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{-\sum_{i \neq \max} \lambda_i}{n-1}$$

判断矩阵维数 n 越大，判断的一致性将越差，故应放宽对高维判断矩阵一致性的要求。

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

层次分析法

AHP 法标度

标度 a_{ij}	定 义
1	i 因素与 j 因素相同重要
3	i 因素与 j 因素略重要
5	i 因素与 j 因素较重要
7	i 因素与 j 因素非常重要
9	i 因素与 j 因素绝对重要
2,4,6,8	为以上判断之间的中间状态对应的标度值
倒数	若 j 因素与 i 因素比较，得到判断值为 $a_{ji} = 1/a_{ij}$, $a_{ii} = 1$

修正值 RI

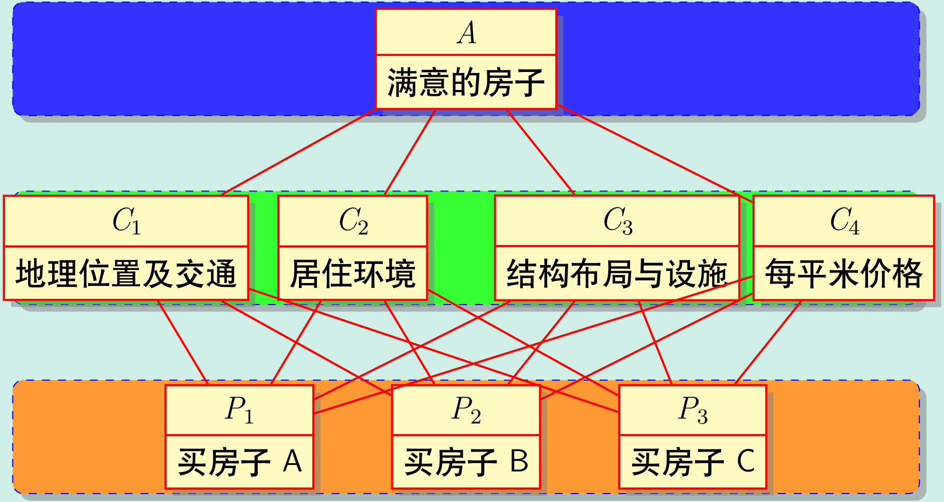
维数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

Example

一位顾客决定要购买一套新住宅，经过初步调查研究确定了三套候选的房子 A、B、C，问题是如何在这三套房子里选择一套较为满意的房子呢？顾客从房地产公司得到了有关这三套房子的资料，各套资料都给出了下面关的数据和资料：

（1）房子的地理位置	（2）房子的交通情况
（3）房子附近的商业、卫生、教育情况	（4）小区自然环境
（5）建筑结构	（6）建筑材料
（7）房子布局	（8）房子面积
（9）房子设备	（10）每平方米的单价

Example (层次结构图)



Example (判断矩阵)

$A-C$ 判断矩阵

$$\begin{array}{c|cccc} A & C_1 & C_2 & \cdots & C_k \\ \hline C_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ C_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{array}$$

C_i-P 判断矩阵

$$\begin{array}{c|cccc} C_i & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ \hline P_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ P_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

Example (判断矩阵)

$A-C$ 矩阵

目标：满意的房子	地理位置及交通	居住环境	结构布局设施	每平方米单价
地理位置及交通	1	2	3	2
居住环境	1/2	1	4	1/2
结构布局设施	1/3	1/4	1	1/4
每平方米单价	1/2	2	4	1

Example (判断矩阵)

$C_i - P$ 矩阵

房子	地理位置及交通			居住环境			结构布局设施			每平方米单价		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
A	1	2	8	1	1/3	1/4	1	1/4	1/6	1	1/3	4
B	1/2	1	6	3	1	1/2	4	1	1/3	3	1	7
C	1/8	1/6	1	4	2	1	6	3	1	1/4	1/7	1

Example (特征值的计算方法 · 方根法)

步骤 1:

计算判断矩阵每行所元素的几何平均值

$$\bar{\omega}_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

得到 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$。

Example (特征值的计算方法 · 方根法)

步骤 2:

将 $\bar{\omega}_i$ 归一化处理，即计算:

$$\omega_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

得到 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$，即为所求特征向量的近似值，这也是各因素的相对权重。

Example (特征值的计算方法 · 方根法)

步骤 3:

计算判断矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max}$,

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A\bar{\omega})_i}{n\omega_i}$$

Example (特征值的计算方法 · 方根法)

步骤 3：

计算判断矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max}$，

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A\bar{\omega})_i}{n\omega_i}$$

步骤 4：

计算判断矩阵一致性指标，检验其一致性。

Example (组合权重的计算)

P 层 $\downarrow$ 权重 C 层 $\rightarrow$	因素与权重				组合权重 $V^{(2)}$
	C_1 $\omega_1^{(1)}$	C_2 $\omega_2^{(1)}$	$\cdots$ $\cdots$	C_k $\omega_k^{(1)}$	
P_1	$\omega_{11}^{(2)}$	$\omega_{12}^{(2)}$	$\cdots$	$\omega_{1k}^{(2)}$	$v_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{1j}^{(2)}$
P_2	$\omega_{21}^{(2)}$	$\omega_{22}^{(2)}$	$\cdots$	$\omega_{2k}^{(2)}$	$v_2^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{2j}^{(2)}$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
P_n	$\omega_{n1}^{(2)}$	$\omega_{n2}^{(2)}$	$\cdots$	$\omega_{nk}^{(2)}$	$v_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{nj}^{(2)}$

Example (计算过程)

目标：满意的房子	地理位置及交通	居住环境	结构布局设施	每平方米单价
地理位置及交通	1	2	3	2
居住环境	1/2	1	4	1/2
结构布局设施	1/3	1/4	1	1/4
每平方米单价	1/2	2	4	1

层次分析法

Example (计算过程)

目标：满意的房子	地理位置及交通	居住环境	结构布局设施	每平方米单价
地理位置及交通	1	2	3	2
居住环境	1/2	1	4	1/2
结构布局设施	1/3	1/4	1	1/4
每平方米单价	1/2	2	4	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	几何平均值	相对权重
C_1	1	2	3	2	1.8612	0.3998
C_2	1/2	1	4	1/2	1.0000	0.2148
C_3	1/3	1/4	1	1/4	0.3799	0.0816
C_4	1/2	2	4	1	1.4142	0.3038
和					4.6553	1.0000

Example (计算过程 · 一致性检验)

$$\bar{\omega}^{(1)} = (0.3998, 0.2148, 0.0816, 0.3038)^{\mathrm{T}}$$

Example (计算过程 · 一致性检验)

$$\bar{\omega}^{(1)} = (0.3998, 0.2148, 0.0816, 0.3038)^{\mathrm{T}}$$

$$A\bar{\omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.3998 \\ 0.2148 \\ 0.0816 \\ 0.3038 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6818 \\ 0.8930 \\ 0.3445 \\ 1.1468 \end{bmatrix}$$

Example (计算过程 · 一致性检验)

$$A\bar{\omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.3998 \\ 0.2148 \\ 0.0816 \\ 0.3038 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6818 \\ 0.8930 \\ 0.3445 \\ 1.1468 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A\bar{\omega})_i}{n\omega_i} = 4.1813$$

Example (计算过程 · 一致性检验)

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A\bar{\omega})_i}{n\omega_i} = 4.1813$$

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = 0.0610$$

查表得 $RI = 0.90$，所以

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0.0678 < 0.1$$

判断矩阵一致性可以接受。

Example (计算过程)

同样的方法对 P 层计算得到如下表的结果。

因素	判断矩阵	几何平均值	相对权重	$\lambda_{\max}$	CI	CR
位置及交通	$\begin{matrix} 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/6 & 1 \end{matrix}$	2.5198 1.4422 0.2752	0.5947 0.3404 0.0649	3.0183	0.0091	0.0158
居住环境	$\begin{matrix} 1 & 1/3 & 1/4 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$	0.4368 1.1447 2.0000	0.1220 0.3196 0.5584	3.0183	0.0091	0.0158
布局结构	$\begin{matrix} 1 & 1/4 & 1/6 \\ 4 & 1 & 1/3 \\ 6 & 3 & 1 \end{matrix}$	0.3467 1.1006 2.6207	0.0852 0.2706 0.6442	3.0536	0.0268	0.0462
每平米单价	$\begin{matrix} 1 & 1/3 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/4 & 1/7 & 1 \end{matrix}$	1.1006 2.7589 0.3293	0.2628 0.6586 0.0786	3.0324	0.0162	0.0279

Example (计算过程 · 组合权重)

P 层 ↓ 权重 C 层 →	因素与权重 C_1	C_2	C_3	C_k	组合权重 $V^{(2)}$
	0.3998	0.2148	0.0816	0.3038	
P_1(房子 A)	0.5947	0.1220	0.0852	0.2628	$v_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{1j}^{(2)} = 0.3507$
P_2(房子 B)	0.3404	0.3196	0.2706	0.6586	$v_2^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{2j}^{(2)} = 0.4269$
P_3(房子 C)	0.0649	0.5584	0.6442	0.0786	$v_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{(1)} \omega_{nj}^{(2)} = 0.2223$

目录

10 决策论

- 决策论的基本概念
- 不确定型决策
- 风险型决策
- 层次分析法
- 多属性决策

多属性决策问题的基本概念

多属性决策是一个较新的决策问题类别，在经济管理等许多领域有着广泛的实际应用。多属性决策问题与单属性决策问题的主要区别就在于它需要决策者的偏好信息作为决策依据。

决策者的偏好取决于主观与客观因素，主观的因素如决策者个人经验、知识水平、喜好等；客观因素则受到决策目标、技术条件、实验条件等的限制。多属性决策重点研究关于离散的、有限个备选方案的决策问题，其实质是利用已有的决策信息通过一定的方式对备选方案进行排序并择优，所以有时候多属性决策与评价问题有着密切关系。

多属性决策问题的描述

多属性决策问题可以描述为：给定一组可能的备选方案 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，对于每个方案 a_i 都具有若干属性 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，决策的目的就是从这一组备选方案中找到一个使决策者达到最满意的方案，或者对这一组方案进行综合评价排序，且排序结果能够反映决策者的意图。不同备选方案 a_i 的不同的属性 c_j 的值用 x_{ij} 表示，通常将多属性决策问题描述为一个属性表格。

属性 / 备选方案	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

多属性决策问题的描述

[

多属性决策问题] 某企业需要在 6 个待选的零部件生产企业（A_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$）选择一个合作伙伴，企业在选择时主要从产品质量（如合格率）、产品价格（元/件）、售后服务（响应时间）、技术水平（先进程度）、供应能力（件/周）等 5 个属性对备选供应商进行考察，通过调查得到 6 家企业的相关情况如表??所示。

属性 / 供应商	产品质量（c_1）	产品价格（c_2）	售后服务（c_3）	技术水平（c_4）	供应能
A_1	0.83	326	3.2	0.20	2
A_2	0.90	295	2.4	0.25	1
A_3	0.99	340	2.2	0.12	3
A_4	0.92	287	2.0	0.33	2
A_5	0.87	310	0.9	0.20	1
A_6	0.95	303	1.7	0.09	1

多属性决策数据要求

- 指标重要性存在差异
- 数据量纲不同
- 数据存在方向性

属性数据的去量纲、方向调整是进行多属性决策的基础性工作，通常一并进行，有时称为数据的规范化处理。

属性数据的规范化处理

线性变换

令原始属性值矩阵为 $X=\{x_{ij}\}$，变换后的矩阵为 $Y=\{y_{ij}\}$。线性变换方法为

$$y_{ij}=\begin{cases} x_{ij}/x_{ij}^{\max}, & \text{若} j \text{为效益型属性} \\ x_{ij}^{\min}/x_{ij}, & \text{若} j \text{为成本型属性} \end{cases}$$

其中，$x_{ij}^{\max}=\max_i x_{ij}$；$x_{ij}^{\min}=\min_i x_{ij}$。

经过线性变换后，y_{ij} 为无量纲的，而且对于效益型属性和成本型属性最优值均为 1，而且越接近 1 越优。需要说明的是，上述变化中效益型属性是线性变换，而成本型属性是非线性的变换。

属性数据的规范化处理

0-1 变换

属性值经过线性变换后最优值为 1，但最差值一般不为 0；若最差值为 0，最优值往往不为 1。为了使每个属性值变换后的最优值为 1 且最差值为 0，可以使用 0-1 变换来实现。其变换方法为

$$y_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij} - x_{ij}^{\min}}{x_{ij}^{\max} - x_{ij}^{\min}}, & \text{若}j\text{为效益型属性} \\ \frac{x_{ij}^{\max} - x_{ij}}{x_{ij}^{\max} - x_{ij}^{\min}}, & \text{若}j\text{为成本型属性} \end{cases}$$

属性数据的规范化处理

向量规范化

向量规范化方法对于成本型属性和效益型性都使用相同的方法，即

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}$$

这种变换方法后从属性值的大小上无法分辨属性的优劣，它的最大特点是规范化后各方案的同一属性值的平方和为 1。

属性数据的规范化处理

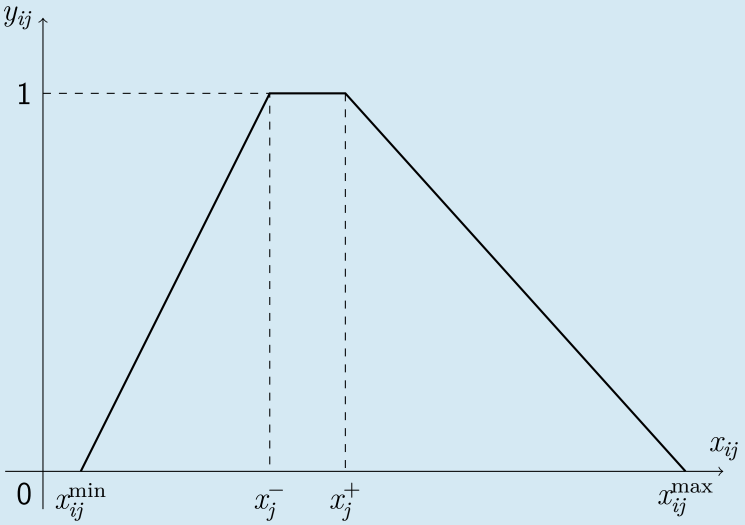
中间型属性数据的变换

中间型属性值既非效益型也不是成本型，即其值太大或太小都不好，而介于某个区间范围内最好。若对于某个属性 c_j，给定的最优属性区间为 $[x_j^-, x_j^+]$，其中 x_j^- 为该属性的最优下界，x_j^+ 为该属性的最优上界，则

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{x_j^- - x_{ij}}{x_j^- - x_{ij}^{\min}}, & \text{若} x_{ij}^{\min} \leqslant x_{ij} < x_j^- \\ 1, & \text{若} x_j^- \leqslant x_{ij} \leqslant x_j^+ \\ 1 - \frac{x_{ij} - x_j^+}{x_{ij}^{\max} - x_j^+}, & \text{若} x_j^+ < x_{ij} \leqslant x_{ij}^{\max} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

这种变换实际上是将原属性变换为一个梯形模糊数，变换后的值类似于模糊隶属度，如图??所示。当最优值为点值时（即 $x_j^- = x_j^+$ 时），得到的是一个三角模糊数。

中间型属性数据的变换



属性数据的规范化处理

在前例中，产品质量、技术水平为效益型数据，产品价格和售后服务水平为成本型数据，供应能力为中间型数据（假设最优区间为 [180,250]），则利用前述 0-1 变换和中间型数据变换的规则得到变化后的属性决策表。

属性 / 供应商	产品质量（c_1）	产品价格（c_2）	售后服务（c_3）	技术水平（c_4）	供应能
A_1	0.0000	0.2642	0.0000	0.4583	1.
A_2	0.4375	0.8491	0.3478	0.6667	1.
A_3	1.0000	0.0000	0.4348	0.1250	0.
A_4	0.5625	1.0000	0.5217	1.0000	1.
A_5	0.2500	0.5660	1.0000	0.4583	0.
A_6	0.7500	0.6981	0.6522	0.0000	0.

属性权重确定的常用方法

决策者为了在具有多个属性的备选方案作出选择，通常需要设定不同属性的权重以反映决策者在方案选择时的偏好，所以权重反映了：（1）决策者对目标属性的重视程度；（2）各目标属性值的差异程度；（3）各目标属性值的可靠程度。权重应当综合反映这三种因素的作用，而且通过权重可以使用各种方法将多属性决策问题化为单属性问题求解。

- 主观赋权法：头脑风暴法、Delphi 法等。这类方法主要缺点是主观随意性较大，权重的确定与专家的经验、知识水平等有着较大的关联性。
- 客观赋权法是指通过科学的方法对客观资料进行整理、计算、分析而得到的权重，避免了人为因素和主观因素的影响。这类方法来源于客观实际数据，有较强的客观性，其权重的准确性取决于提供数据的准确程度。

属性权重确定的常用方法-特征向量法 (AHP)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 1/2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & 2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

利用前述的方根近似法，求得权重向量为

$$w = (0.2162, 0.4210, 0.0563, 0.2242, 0.0823)^T$$

一致性判断系数 $\mathrm{CR} = 0.05129 < 0.1$，判断矩阵满足一致性要求。

属性权重确定的常用方法-最小平方和法

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} w_j - w_i)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

一元与两元的故事

美国 19 世纪有一个颇有成就的政治家，其幼年时是流浪街头的孤儿。他经常在大街上向行人讨钱，但当有人让他在一块钱和两块钱之间选择时，他选择了一块钱。于是，许多人都为了亲眼验证关于他的“犯傻”行为的传闻，专门来找他并让他在一块钱和两块钱之间选择。他依然故我地只选择一块钱，于是来找他的人愈来愈多。

终于有一天，有一位女士问他：难道你不知道两块钱比一块钱更多一些钱吗？

引言

三方对决

话说有三个仇家，分别叫做张三、李四和王五，他们决定来一场三方对决。总共有两个回合：第一回合，每人得到一次射击机会，射击次序分别为张三、李四和王五；第一回合过后，幸存者得到第二次射击机会，射击次序还是张三、李四和王五。对于每一个参与对决的人，最佳结果都是成为唯一幸存者；次佳结果则是成为两个幸存者之一；排在第三位的结果，是无人死亡，最差的结果当然是自己被对方打死。张三的枪法最糟糕，瞄准 10 次只有 3 次能够打中目标；李四的水平高一点，精确度有 80%；王五是神枪手，百发百中。那么，张三的第一回合的最优策略应该是什么？在这个问题里，谁有最大的机会幸存下来？

所罗门王的故事

所罗门王是古代以色列国的一位以智慧著称的君主。一次，两个女人为争夺一个婴儿争扯到所罗门王殿前，她们都说婴儿是自己的，请所罗门王作主。

引言

所罗门王的故事

所罗门王是古代以色列国的一位以智慧著称的君主。一次，两个女人为争夺一个婴儿争扯到所罗门王殿前，她们都说婴儿是自己的，请所罗门王作主。

所罗门王稍加思考后作出决定：将婴儿一刀劈为两段，两位妇人各得一半。

海盗分金

5 个海盗得到 100 颗钻石，个个都价值不连城。分配方案：

- （1）大家抓阄，排定次序 1,2,3,4,5
- （2）1 号提出一个分配方案，如果半数或半数以上的人同意，则按此方案执行；如果未通过则将他投入大海喂鱼；
- （3）2 号再提出分配方案，
- ……

引言

海盗分金

5 个海盗得到 100 颗钻石，个个都价值不连城。分配方案：

- （1）大家抓阄，排定次序 1,2,3,4,5
- （2）1 号提出一个分配方案，如果半数或半数以上的人同意，则按此方案执行；如果未通过则将他投入大海喂鱼；
- （3）2 号再提出分配方案，
- ……

作为 1 号他应该提出什么样的分配方案呢？

引言

策略思维方式

在决策时，不仅要考虑自己究竟有什么策略可以选择，而且也要考虑博弈对方的可供选择的策略以及他们的相互影响，在此基础上进行博弈分析，然后再做出自己的最优选择。

博弈论基础上的策略思维方式从一个独特的视角帮助我们更加深刻地理解和把握经济现象，并指导更加有效的经济、管理政策制订。

Section 11

对策论

本章内容

11 对策论

- 对策论的基本概念
- 矩阵对策问题的解法
- 其他类型的对策问题简介

目录

11 对策论

- 对策论的基本概念
- 矩阵对策问题的解法
- 其他类型的对策问题简介

经济学与囚徒困境

经济学是研究稀缺资源的有效配置的。最基本的假设：

- 理性人
- 市场竞争性
- 信息对称

囚徒困境		B	
		坦白	抵赖
A	坦白	-8,-8	0,-10
	抵赖	-10,0	-1,-1

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”

[a] 三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。

[a] 三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912) “关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。
3. Von Neumann(1928) 证明了这些结果。

[a]三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。
3. Von Neumann(1928) 证明了这些结果。
4. 1944 年由 von Neumann 和 Morgenstern 合著的《Game Theory and Economic Behavior》宣告博弈论的诞生。

[a]三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。
3. Von Neumann(1928) 证明了这些结果。
4. 1944 年由 von Neumann 和 Morgenstern 合著的《Game Theory and Economic Behavior》宣告博弈论的诞生。
5. 20 世纪 50 年代，Nash 建立了现代博弈论的理论基础与体系。

[a] 三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。
3. Von Neumann(1928) 证明了这些结果。
4. 1944 年由 von Neumann 和 Morgenstern 合著的《Game Theory and Economic Behavior》宣告博弈论的诞生。
5. 20 世纪 50 年代，Nash 建立了现代博弈论的理论基础与体系。
6. Harsany 建立不完全信息博弈理论，Selten 建立动态博弈理论。[a]

[a]三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策论的发展简史

1. E.Ermelo(1912)“关于集合论在象棋对策中的应用”
2. E.Borel(1921) 讨论了个别对策现象，引入“最优策略”的概念，证明对于对策现象存在着最优策略，并猜出了一些结果。
3. Von Neumann(1928) 证明了这些结果。
4. 1944 年由 von Neumann 和 Morgenstern 合著的《Game Theory and Economic Behavior》宣告博弈论的诞生。
5. 20 世纪 50 年代，Nash 建立了现代博弈论的理论基础与体系。
6. Harsany 建立不完全信息博弈理论，Selten 建立动态博弈理论。[a]
7. 1996、2000、2002 的诺贝尔经济学奖都发给了博弈论的研究者。

[a]三人在 1994 年获诺贝尔经济学奖。

对策论的基本概念

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I=\{1,2,\cdots,n\}$

对策论的基本概念

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I=\{1,2,\cdots,n\}$
2. 策略集合：每个局中人在竞争的过程中，总期望自己取得尽可能好的结果。这样每个局中人都在想法挑选能达到目的的“方法”，我们把这种“方法”称为局中人的策略。

对策论的基本概念

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I = \{1, 2, \cdots, n\}$
2. 策略集合：每个局中人在竞争的过程中，总期望自己取得尽可能好的结果。这样每个局中人都在想法挑选能达到目的的“方法”，我们把这种“方法”称为局中人的策略。
   - 第 i 个局中人的策略集用 S_i 表示。

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I = \{1, 2, \cdots, n\}$
2. 策略集合：每个局中人在竞争的过程中，总期望自己取得尽可能好的结果。这样每个局中人都在想法挑选能达到目的的“方法”，我们把这种“方法”称为局中人的策略。
   - 第 i 个局中人的策略集用 S_i 表示。
   - 当每个局中人在一局对策中都在自己的策略集中选定一个策略后，这局对策的结果就被决定了。每个局中人所选定的策略放在一起称为一个 局势。

对策论的基本概念

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I = \{1, 2, \cdots, n\}$
2. 策略集合：每个局中人在竞争的过程中，总期望自己取得尽可能好的结果。这样每个局中人都在想法挑选能达到目的的“方法”，我们把这种“方法”称为局中人的策略。
   - 第 i 个局中人的策略集用 S_i 表示。
   - 当每个局中人在一局对策中都在自己的策略集中选定一个策略后，这局对策的结果就被决定了。每个局中人所选定的策略放在一起称为一个 局势。
   - 策略是指局中人在整个竞争过程中对付他方的一个完整方法，并非指竞争过程中某一步所采用的局部行动。

对策模型的基本要素

1. 局中人：参加对策的每一方称为局中人，$I = \{1, 2, \cdots, n\}$
2. 策略集合：每个局中人在竞争的过程中，总期望自己取得尽可能好的结果。这样每个局中人都在想法挑选能达到目的的“方法”，我们把这种“方法”称为局中人的策略。
   - 第 i 个局中人的策略集用 S_i 表示。
   - 当每个局中人在一局对策中都在自己的策略集中选定一个策略后，这局对策的结果就被决定了。每个局中人所选定的策略放在一起称为一个 局势。
   - 策略是指局中人在整个竞争过程中对付他方的一个完整方法，并非指竞争过程中某一步所采用的局部行动。
3. 支付函数：对策的结局用数量来表示，称为支付函数（或赢得函数），所以支付函数是定义在局势集合上的数值函数，用符合 H_i 表示局中人 i 的支付函数。

对策问题建模举例

Example (齐王与田忌赛马)

齐王的策略

- α_1：（上中下）
- α_2：（上下中）
- α_3：（中上下）
- α_4：（中下上）
- α_5：（下上中）
- α_6：（下中上）

对策问题建模举例

Example (齐王与田忌赛马)

齐王的策略

- α_1：（上中下）
- α_2：（上下中）
- α_3：（中上下）
- α_4：（中下上）
- α_5：（下上中）
- α_6：（下中上）

田忌的策略

- β_1：（上中下）
- β_2：（上下中）
- β_3：（中上下）
- β_4：（中下上）
- β_5：（下上中）
- β_6：（下中上）

对策问题建模举例

Example (齐王与田忌赛马)

收益矩阵

$S_1 \setminus S_2$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	-1	1
α_2	1	3	1	1	1	-1
α_3	1	-1	3	1	1	1
α_4	-1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	1	-1	3	1
α_6	1	1	-1	1	1	3

对策问题建模举例

Example (猜硬币游戏)

两个参加者 A、B 各出示一枚硬币，在不让对方看见的情况下，将硬币放在桌上，若两个硬币都呈正面或都是反面，则 A 得 1 分，B 付出 1 分；若两个硬币一正一反，则 B 得 1 分，而 A 付出 1 分。

对策问题建模举例

Example (猜硬币游戏)

两个参加者 A、B 各出示一枚硬币，在不让对方看见的情况下，将硬币放在桌上，若两个硬币都呈正面或都是反面，则 A 得 1 分，B 付出 1 分；若两个硬币一正一反，则 B 得 1 分，而 A 付出 1 分。

Solution

$S_A \backslash S_B$	正	反
正	*1*	*-1*
反	*-1*	*1*

对策问题的分类

(1) 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策；

对策问题的分类

(1) 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策；

(2) 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策和非零对策；

对策问题的分类

(1) 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策；
(2) 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策和非零对策；
(3) 根据各局中人间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策；

对策问题的分类

(1) 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策；
(2) 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策和非零对策；
(3) 根据各局中人间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策；
(4) 根据局中人的策略集中的策略个数，分为有限对策和无限对策。

目录

11 对策论

- 对策论的基本概念
- 矩阵对策问题的解法
- 其他类型的对策问题简介

矩阵对策问题的解法

矩阵对策的数学模型

$$G = \{I, II; S_1, S_2; A\} \text{ 或 } G = \{S_1, S_2; A\}$$

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$$

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵对策的最优纯策略

设有一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

试求双方的最优策略。

矩阵对策问题的解法

矩阵对策的最优纯策略

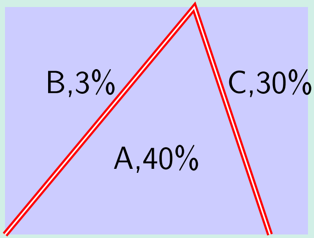
设 $G=\{S_1,S_2;A\}$ 为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$。若等式

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}=a_{i^*j^*}$$

成立，记 $V_G=a_{i^*j^*}$。则称 V_G 为对策 G 的值，称使上式成立的局势 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 为在纯策略下的解，事实上这个解是该矩阵的鞍点。α_{i^*} 与 β_{j^*} 分别称为局中人 I，II 的最优纯策略。

Example

某城市由汇合的三条河分割为三个区，如图所示。图中的比例为城市居民分布情况。目前该市还没有溜冰场，所以有两家公司准备投资建设溜冰场。其中公司甲打算建两个，而公司乙只准备建一个。每个公司都知道，如果在城市的某一个区域只有一个溜冰场，则该溜冰场独揽该区全部业务；如果有两个溜冰场则平分市场；若没有溜冰场则该区的业务将平均分散到三个溜冰场中。每个公司都想把溜冰场设在营业额最多的地方。试分析两个公司的策略及均衡结果。



矩阵对策问题的解法

Solution

表: 公司甲的策略

策略 \ 地区	A	B	C
α_1	1	1	0
α_2	1	0	1
α_3	0	1	1

表: 公司乙的策略

策略 \ 地区	A	B	C
β_1	1	0	0
β_2	0	1	0
β_3	0	0	1

Solution

表: 公司甲的策略

策略 \ 地区	A	B	C
α_1	1	1	0
α_2	1	0	1
α_3	0	1	1

表: 公司乙的策略

策略 \ 地区	A	B	C
β_1	1	0	0
β_2	0	1	0
β_3	0	0	1

甲 \ 乙	β_1	β_2	β_3	$\min\limits_j a_{ij}$
α_1	20%	25%	20%	20%
α_2	20%	20%	25%	20%
α_3	10%	22%	22%	10%
$\max\limits_i a_{ij}$	20%	25%	25%	

矩阵对策的混合策略

混合策略的概念

并不是所有的对策都存在着纯策略意义下的解。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的混合策略

混合策略的概念

并不是所有的对策都存在着纯策略意义下的解。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = 1, \min_j \max_i a_{ij} = 4$$

矩阵对策的混合策略

Definition (混合策略的概念)

设 $G=\{S_1,S_2;A\}$ 为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，记

$$S_1^*=\left\{x\in E^m|x_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}x_i=0\right\},S_2^*=\left\{y\in E^n|y_j\geqslant 0,\sum_{j=1}^{n}y_j=0,\right\}$$

则 S_1^* 和 S_2^* 分别称为局中人 I 和 II 的**混合策略集**；$x\in S_1^*$ 和 $y\in S_2^*$ 分别称为局中人 I 和 II 的**混合策略**；对 $x\in S_1^*$，$y\in S_2^*$，称 (x,y) 为一个**混合局势**，局中人 I 的赢得函数记为

$$E(x,y)=x^TAy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijx_iy_j}$$

这样得到一个新的对策记为 $G^*=\{S_1^*,S_2^*;E\}$，称其为对策 G 的**混合扩充**。

矩阵对策的混合策略

Definition (混合策略均衡的概念)

设 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 的混合扩充，如果

$$\max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(x, y)$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G^* 的值，称使得上式成立的混合局势 (x^*, y^*) 为 G 在混合策略意义下的解，x^* 和 y^* 分别称为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

矩阵对策的混合策略

Definition (混合策略均衡的概念)

设 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$ 是矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 的混合扩充，如果

$$\max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min_{y \in S_2^*} \max_{x \in S_1^*} E(x, y)$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G^* 的值，称使得上式成立的混合局势 (x^*, y^*) 为 G 在混合策略意义下的解，x^* 和 y^* 分别称为局中人 I 和 II 的最优混合策略。

有定理保证，在混合策略意义下所有对策问题都存在着至少一个解。

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{0} \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{4} & 3 & \boxed{4} & 2 \\ \boxed{0} & 4 & \boxed{0} & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

β_3 优于 β_1

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\alpha_3\ \text{优于}\ \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\beta_3\ \text{优于}\ \beta_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geqslant \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

矩阵对策的简化

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\xRightarrow{\beta_3 \text{ 优于 } \beta_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow{\beta_2 \text{ 为劣战略}} \begin{array}{c} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A=\begin{array}{c|cccc} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \hline \alpha_1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ \alpha_2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \alpha_3 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ \alpha_4 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{array} \xrightarrow{\alpha_3 \text{ 优于 } \alpha_1} \begin{array}{c|cccc} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \hline \alpha_2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \alpha_3 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ \alpha_4 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{array}$$

$$(2,3) \leqslant \tfrac{1}{2}(4,2)+\frac{1}{2}(0,8)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \hline \alpha_2 & 4 & 2 & 3 \\ \alpha_3 & 3 & 4 & 2 \\ \alpha_4 & 4 & 0 & 8 \end{array} \xrightarrow{\beta_2 \text{ 为劣战略}} \begin{array}{c|cc} \alpha_2 & 2 & 3 \\ \alpha_3 & 4 & 2 \\ \alpha_4 & 0 & 8 \end{array}$$

矩阵对策的简化

$$A=\begin{array}{c} \\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 0 & 8\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{\alpha_3\text{ 优于 }\alpha_1} \begin{array}{c} \\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 0 & 8\end{pmatrix}\end{array}$$

β_3 优于 β_1

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 0 & 8\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{\beta_2\text{ 为劣战略}} \begin{array}{c} \\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\beta_3 & \beta_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{\alpha_2\text{ 为劣战略}} \begin{array}{c} \\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\beta_3 & \beta_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{array}$$

矩阵对策的图解法

图解法适用于赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题。

Example (图解法)

求下面矩阵对策问题的解。

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。

Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。
设局中人的混合策略为 $(x,1-x)^T, x\in[0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为：

$$
\begin{aligned}
V(\beta_1) &= x+4(1-x) \\
V(\beta_2) &= 3x+2(1-x) \\
V(\beta_3) &= 5x+(1-x)
\end{aligned}
$$

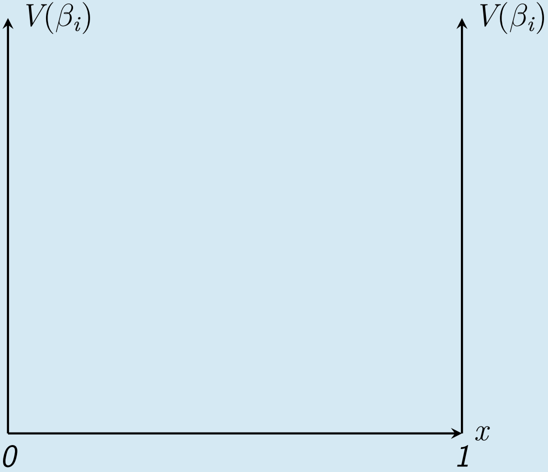
矩阵对策问题的解法

Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。

设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为:

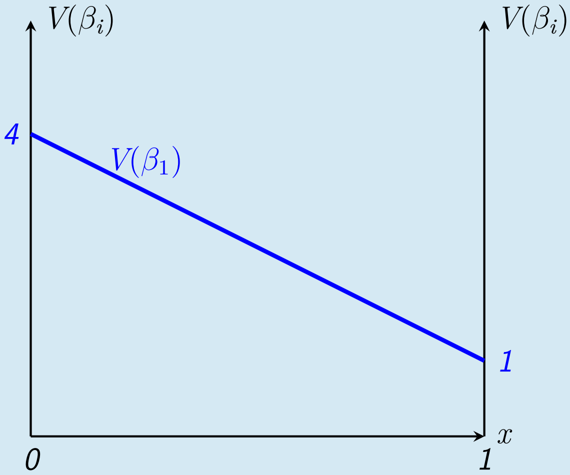
$$
\begin{aligned}
V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\
V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\
V(\beta_3) &= 5x + (1-x)
\end{aligned}
$$



Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。
设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为:

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\ V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\ V(\beta_3) &= 5x + (1-x) \end{aligned}$$

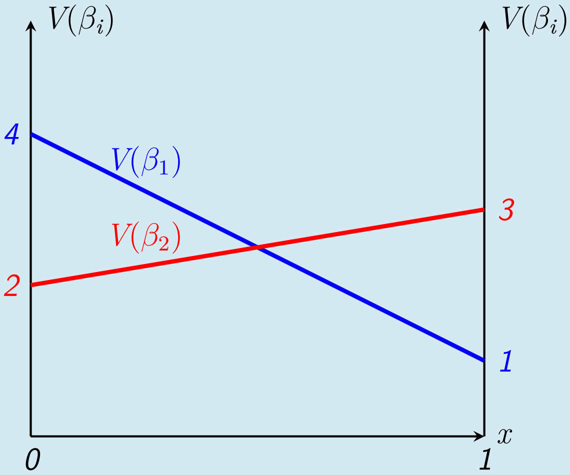


矩阵对策问题的解法

Solution（图解法）

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为：

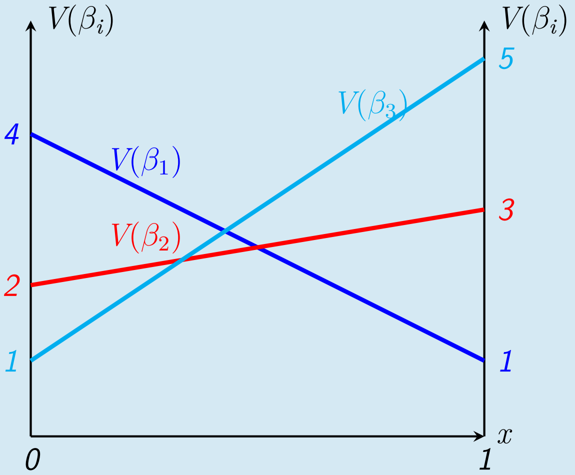
$$
\begin{aligned}
V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\
V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\
V(\beta_3) &= 5x + (1-x)
\end{aligned}
$$



Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。
设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为:

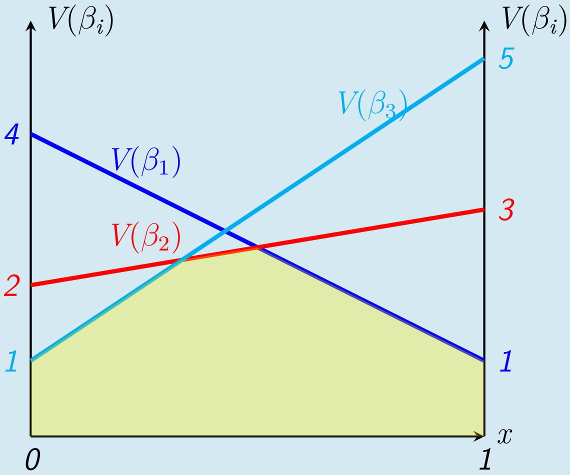
$$
\begin{aligned}
V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\
V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\
V(\beta_3) &= 5x + (1-x)
\end{aligned}
$$



Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为：

$$\begin{aligned} V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\ V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\ V(\beta_3) &= 5x + (1-x) \end{aligned}$$

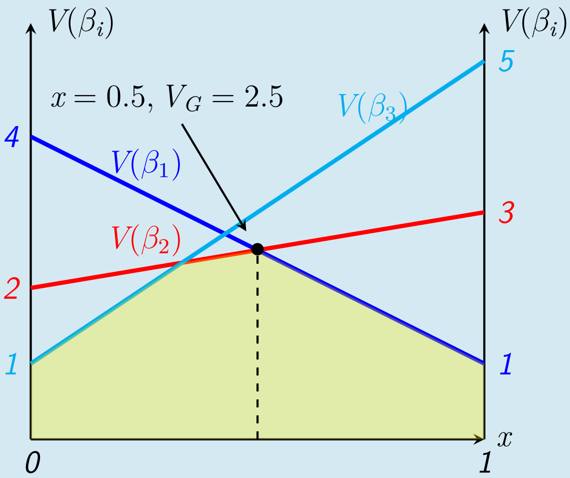


Solution (图解法)

首先判断这个矩阵对策问题已经最简化了，而且不存在纯策略意义上的解。

设局中人的混合策略为 $(x, 1-x)^T, x \in [0,1]$。这样局中人 2 的选择不同策略时的收益为:

$$
\begin{aligned}
V(\beta_1) &= x + 4(1-x) \\
V(\beta_2) &= 3x + 2(1-x) \\
V(\beta_3) &= 5x + (1-x)
\end{aligned}
$$



矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$
A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Solution

设局中人 *1* 的混合策略为 $(x_1, x_2, x_3)^T$，局中人 *2* 的混合策略为 (y_1, y_2, y_3)，V 为局中人 *2* 选择最有利的策略下局中人 *1* 的期望收益。

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

设局中人 1 的混合策略为 $(x_1, x_2, x_3)^T$，局中人 2 的混合策略为 (y_1, y_2, y_3)，V 为局中人 2 选择最有利的策略下局中人 1 的期望收益。当局中人 2 使用 β_1 时，局中人 1 的期望收益为：$x_1 + 4x_1 + 3x_3$，它应不小于 V，即

$$\beta_1 : x_1 + 4x_1 + 3x_3 \geqslant V$$

同理有：

$$\begin{array}{lrcl} \beta_2 : & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geqslant & V \\ \beta_3 : & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \geqslant & V \end{array}$$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

设局中人 1 的混合策略为 $(x_1, x_2, x_3)^T$，局中人 2 的混合策略为 (y_1, y_2, y_3)， V 为局中人 2 选择最有利的策略下局中人 1 的期望收益。当局中人 2 使用 β_1 时，局中人 1 的期望收益为：$x_1 + 4x_1 + 3x_3$，它应不小于 V，即

$$\beta_1 : x_1 + 4x_1 + 3x_3 \geqslant V$$

同理有：

$$\begin{aligned} \beta_2 : \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad &\geqslant \quad V \\ \beta_3 : \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad &\geqslant \quad V \end{aligned}$$

此外还有：$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1, x_i \geqslant 0$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

整理得:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_1 + 3x_3 \geqslant V \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant V \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant V \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

整理得：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_1 + 3x_3 \geqslant V \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant V \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant V \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

若令 $x_i^{'} = x_i / V$，则可以得到：

$$\begin{cases} x_1^{'} + x_2^{'} + x_3^{'} = \dfrac{1}{V} \\ x_1^{'} + 4x_1^{'} + 3x_3^{'} \geqslant 1 \\ 3x_1^{'} + 2x_2^{'} + 2x_3^{'} \geqslant 1 \\ 3x_1^{'} + x_2^{'} + 2x_3^{'} \geqslant 1 \end{cases}$$

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\
A = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Solution

对局中人 *1* 来说，他希望 V 值越大越好，也就是希望 $1/V$ 越小越好，这样可以建立起局中人 *1* 的最优混合策略的线性规划的模型如下：

$$
\min\ z = x_1^{'} + x_2^{'} + x_3^{'}
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ccccccc}
x_1^{'} & + & 4x_1^{'} & + & 3x_3^{'} & \geqslant & 1 \\
3x_1^{'} & + & 2x_2^{'} & + & 2x_3^{'} & \geqslant & 1 \\
3x_1^{'} & + & x_2^{'} & + & 2x_3^{'} & \geqslant & 1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'} \geqslant 0}
\end{array} \right.
$$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

$$\min\ z = x_1' + x_2' + x_3'$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1' & + & 4x_1' & + & 3x_3' & \geqslant & 1 \\ 3x_1' & + & 2x_2' & + & 2x_3' & \geqslant & 1 \\ 3x_1' & + & x_2' & + & 2x_3' & \geqslant & 1 \\ x_1', x_2', x_3' \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max\ w = y_1' + y_2' + y_3'$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1' & + & 3y_1' & + & 3y_3' & \leqslant & 1 \\ 4y_1' & + & 2y_2' & + & y_3' & \leqslant & 1 \\ 3y_1' & + & 2y_2' & + & 2y_3' & \leqslant & 1 \\ y_1', y_2', y_3' \geqslant 0 \end{cases}$$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

求解得到：

$$(y_1', y_2', y_3')^T = (1/7, 1/7, 1/7)^T$$
$$(x_1', x_2', x_3')^T = (1/7, 0, 2/7)^T$$
$$1/V = 3/7$$

矩阵对策问题的解法

线性规划解法

线性规划解法是解决对策问题的一般方法。

Example

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution

求解得到:

$$\begin{aligned} &(y'_1, y'_2, y'_3)^T = (1/7, 1/7, 1/7)^T \\ &(x'_1, x'_2, x'_3)^T = (1/7, 0, 2/7)^T \\ &1/V = 3/7 \end{aligned}$$

所以局中人 *1* 的最优策略为:

$$(x_1, x_2, x_3)^T = V \cdot (x'_1, x'_2, x'_3)^T = (1/3, 0, 2/3)$$

局中人 *2* 的最优策略为:

$$(y_1, y_2, y_3)^T = V \cdot (y'_1, y'_2, y'_3)^T = (1/3, 1/3, 1/3)$$

对策值为: $V = 7/3$

目录

11 对策论

- 对策论的基本概念
- 矩阵对策问题的解法
- 其他类型的对策问题简介

现代博弈论的分类

信息 ↓ 时间 →	静态	动态
完全信息	完全信息静态博弈 纳什均衡 Nash（1950-51）	完全信息动态博弈 子博弈精炼纳什均衡 Selten(1965)
完全信息	不完全信息静态博弈 贝叶斯纳什均衡 Harsanyi(1967-68)	不完全信息动态博弈 Selten(1975) Kreps 和 Wilson(1982) Fudenberg 和 Tirole(1991)

运筹学

Operations Research

何大义
hedy@cugb.edu.cn
工商管理教研室
经济管理学院