

# Rechenoperationen mit Vektoren

## Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist orthogonal zu der Ebene, die von beiden Vektoren aufgespannt werde.
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}$

## Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_x \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_y + \vec{a}_z \cdot \vec{b}_z$$

- Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren 0 ist, so sind diese Vektoren orthogonal zueinander.

## Lotfuspunkt bestimmen

$$P(x|y|z)$$

$$g : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{u}$$

Der Lotfuspunkt ist der Schnittpunkt der Geraden die Orthogonal zu  $g$  ist und durch  $P$  geht mit der Geraden  $g$ .

- Stelle die Gleichung einer Ebene auf, die von der Gerade  $g$  orthogonal geschnitten wird, und die durch  $P$  geht
- Der Schnittpunkt von der Ebene und der Gerade  $g$  ist der Lotfuspunkt.

## Ebenengleichung aufstellen

Der Normalvektor  $\vec{n}$  einer Ebene ist Orthogonal zur Ebene. Das heißt, dieser kann einfach der Richtungsvektor  $\vec{u}$  der Gerade sein.

$$\vec{n} = \vec{u}$$

Das ist schon fast alles für die Ebene:

$$E : \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = d$$

$d$  entspricht einem Skalarprodukt des Normalvektors  $\vec{n}$  und einem beliebigen Punkt auf der Ebene. Da die Ebene durch  $P$  gehen soll folgt:

$$d = 0\vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$E : \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = 0\vec{P} \cdot \vec{n}$$

## Schnittpunkte

### Gerade mit Ebene

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Um den Schnittpunkt zu finden braucht man zuerst den Wert des Parameters  $t$  der Gerade  $g$ . Hat man diesen Wert, kann man ihn in die Geradengleichung einsetzen und der resultierende Punkt ist der Schnittpunkt.

Um den Wert für  $t$  zu finden, muss man folgende Gleichung aufstellen, und nach  $t$  umstellen:  
 $a \cdot (\vec{p}_x + t \cdot \vec{u}_x) + b \cdot (\vec{p}_y + t \cdot \vec{u}_y) + c \cdot (\vec{p}_z + t \cdot \vec{u}_z) = d$

## Schnittgerade

Gegeben sind folgende Ebenen:

$$E_1 : a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \quad E_2 : a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

Das Finden der Schnittgeraden ist sehr einfach. Man muss die beiden Geraden einfach gleichsetzen. Dies macht man einfach mit einem linearen Gleichungssystem.

$$I : \quad a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1$$

$$II : \quad a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

## Spiegelung

### Punkt an Ebene

Gespiegelt wird der Punkt  $P$  an der Ebene  $E$ .

$$E : a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$$

$$P(x_1|x_2|x_3)$$

1. Eine Gerade aufstellen, bei der der Stützvektor gleich  $P$  ist, und der Richtungsvektor gleich dem Normalvektor von  $E$  ist  $\vec{u} = \vec{n}_E$   
 $g : \vec{x} = P + s \cdot \vec{n}_E$
2. Den Schnittpunkt von der Ebene  $E$  mit der Geraden  $g$  finden.
3. Der gespiegelte Punkt ist dann der Parameter  $s$  für den Schnittpunkt verdoppelt.

$$P' = P + 2s_S \cdot \vec{n}$$

## Flächeninhalt

### Parallelogramm / Dreieck

Für den Flächeninhalt  $A$  eines Parallelogramms, das von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird, gilt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Da ein Dreieck ein *halbes Parallelogramm* ist, ist der Flächeninhalt eines Dreiecks die Hälfte von dem Flächeninhalt eines Parallelogramms.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

## Winkel

$\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind die Richtungsvektoren der Geraden  $g$  und  $h$ .

$\vec{n}_E$  und  $\vec{n}_F$  sind die Normalvektoren der Ebenen  $E$  und  $F$ .

$\alpha$  entspricht dem resultierenden Winkel. Für diesen gilt generell:

$$0 \leq \alpha \leq 90$$

## Gleiches mit Gleichem

Wenn sich *gleiches mit gleichem* schneidet, so berechnet man den Winkel mit Cosinus.

*Gleiches mit gleichem* bedeutet entweder eine Ebene mit einer Ebene, oder eine Gerade mit einer Geraden.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

## Gerade mit Ebene

Bei einer Geraden und einer Ebene funktioniert das genauso, nur mit Sinus anstatt Cosinus.

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|}$$

## Abstand

### Ebene mit Punkt (mit Lotfußpunkt)

$$E : ax + by + cz = d \quad P(x|y|z)$$

- Zuerst muss man eine Gerade  $g$  aufstellen, die orthogonal zu  $E$  ist und durch Punkt  $P$  geht. Dafür kann man einfach den Normalvektor  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  als Richtungsvektor nehmen und der Punkt  $P$  als Stützvektor.

$$g : \vec{x} = P + t \cdot \vec{n}$$

- Damit kann man dann den **Lotfußpunkt** berechnen (*der Schnittpunkt von  $E$  und  $g$* )
- der Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Ebene  $E$  entspricht dann dem Betrag zwischen  $P$  und dem Lotfußpunkt.

### Ebene mit Punkt (Koordinatenform)

Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben und wird der Lotfußpunkt nicht gebraucht so kann man auch einen anderen, einfacheren Weg gehen. Gegeben ist Folgendes:

$$P(x|y|z) \quad E : ax + by + cz = d \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. Setzt man den Punkt in die Ebene ein der nicht auf der Ebene ist, kommt eine Zahl ungleich  $d$  heraus. Berechnet man dann die Differenz zwischen  $d$  und dem Ergebnis, so bekommt man den Wert um den man den **Stützvektor** der Ebene in Koordinatenform hätte multiplizieren müsste.

$$aP_x + bP_y + cP_z - d = t$$

2. Um dann den Abstand herauszufinden, muss man den Wert  $t$  durch den Betrag des Normalvektors teilen.

$$d(P, E) = \frac{t}{|\vec{n}_E|}$$

Dies ergibt dann folgende generelle Formel für den Abstand:

$$d(P, E) = \frac{aP_x + bP_y + cP_z - d}{|\vec{n}_E|}$$

## Ebene mit Gerade

Das Berechnen des Abstandes einer Ebene und einer Gerade macht nur Sinn, wenn die beiden parallel zueinander sind (*in dem dreidimensionalen Raum*). Somit kann man einfach irgendein Punkt auf der Gerade nehmen und den Abstand von diesem Punkt zur Ebene berechnen. Der Stützvektor der Gerade bietet sich dafür an.

*Note:* Die Gerade muss Parallel zur Ebene sein, sonst ist der Abstand automatisch 0 da es dann ein Schnittpunkt gibt. *Sind diese nicht parallel, bricht auch diese Methode zusammen.*

## Zwei windschiefe Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} \quad h : \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$d(g; h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

wobei  $\vec{n}_0$  der Normaleinheitsvektor von  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$  ist.