

Schwere Aufgaben

- Abi 2021 (WTR) Pflichtteil 2 Aufgabe 4 - Integral
- Abi 2021 (WTR) Pflichtteil 2 Aufgabe 6.b - Vektor (machbar)
- Abi 2021 (WTR) Wahlteil A1 Aufgabe A 1.3 - unnötig komplex formuliert

Bruchrechnen

Das ist **ESSENZIELL**, und ich kann es immer noch nicht auswendig. ;-;

Addition

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

1. Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
2. Zähler der Brüche addieren.
3. Den Bruch kürzen.

Subtraktion

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

1. Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
2. Zähler subtrahieren.
3. Den Bruch kürzen.

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

1. Zähler multiplizieren.
2. Nenner multiplizieren.
3. Den Bruch kürzen.

Division

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

1. Den Kehrbruch von einem der Brüche bilden.
2. Die beiden Brüche multiplizieren.

Zum Beispiel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Rechenoperationen

Potenzen

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Folgende Regel sollte man im Kontext substitution im Kopf haben.

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Logarithmus

Mit dem Logarithmus (*Wikipedia*) kann man so etwas lösen:

$$a = b^x \quad x = \log_b a \quad \log_b (b^x) = x \quad b^{\log_b(x)} = x$$

Produkte

Eine wichtige Eigenschaft des Logarithmus ist es, dass wenn man zwei Logarithmusfunktionen mit der gleichen Basis b addiert, so kann man diese in ein Logarithmus schreiben. Die Formel ist wie folgt:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

Dies bedingt auch das man Funktionen wie die folgende recht einfach lösen kann.

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 7e^x \quad | \ln \\ \ln(e^{2x}) &= \ln(7 \cdot e^x) \\ 2x &= \ln(7) + \ln(e^x) = \ln(7) + x \quad | -x \\ x &= \ln 7 \end{aligned}$$

natürlicher Logarithmus

$$a = e^x \quad x = \log_e a = \ln a \quad \ln(e^x) = x \quad e^{\ln x} = x$$

$$e^{c \cdot \ln(x)} = x^c$$

$$\ln 1 = 0$$

Ableitungen

Die Ableitung ist die Funktion, die die Änderung einer anderen Funktion beschreibt.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$3 \cdot x^4$	$12 \cdot x^3$
$4x$	4
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$
e^x	e^x
$n \cdot e^x$	$n \cdot e^x$
$e^{g(x)}$	$g'(x) \cdot e^{g(x)}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\frac{4}{x}$	$-\frac{4}{x^2}$

$$f = \sin \quad f' = \cos \quad f'' = -\sin \quad f''' = -\cos \quad f'''' = \sin$$

Wichtig für sowohl Ableitungen, als auch Stammfunktionen ist das die Regel für Potenzen auch auf Wurzeln anwendbar ist, da: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Summen regel

Sind Teile einer Funktion von $+$ oder $-$ getrennt, so wird jeder dieser Teile abgeleitet:

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Produktregel

Sind Teile einer Funktion von \cdot abgetrennt, so wird die Produktregel angewandt:

$$f(x) = u \cdot v \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiele

$$\bullet \quad f(x) = x^2 \cdot e^{-5x} \quad f'(x) = 2x \cdot e^{-5x} + x^2 \cdot (-5e^{-5x})$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad f'(x) = \frac{u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

Hilfreiches Umstellen

$$\frac{c}{x^n} = c \cdot x^{-n}$$

Kurvendiskussion

Referenz

Definitionsbereich

y-Achsenabschnitt

x-Achsenabschnitt (Nullstellen)

Die Nullstellen sind die Punkte, an denen der Graph die x-Achse schneidet.

Der x Wert ergibt sich, wenn man die Funktion mit 0 gleichstellt, und nach x auflöst:

$$f(x) = 0 \quad P(x \mid 0)$$

Quadratische Funktion (ABC-Formel)

Hat man eine quadratische Funktion, lässt sich die Nullstelle mithilfe der ABC-Formel ermitteln:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ausklammern

Angenommen man hat folgende Gleichung:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x = 0$$

Wichtig hierbei ist, dass jeder *Teil* der Gleichung ein Faktor von x ist, also z.B. nicht so: $3x^2 + x^3 + 1 = 0$. Wenn man also eine solche Gleichung hat, kann man einfach umstellen, und x ausklammern:

$$x \cdot (ax^2 + b) = 0$$

Da irgendetwas mit 0 multipliziert **IMMER** auch 0 ergibt, kann man die erste Lösung für x ablesen: $x_1 = 0$. Für die zweite Lösung muss man das in der Klammer nach 0 umstellen:

$$ax^2 + b = 0$$

So kann man die zweite Lösung x_2 herausfinden.

Substitution

Dies werde ich anhand eines echten Beispiels zeigen:

$$y = 4x^4 - 9x^2 + 1 = 0$$

Da man hier weder Ausklammern, noch die ABC-Formel anwenden kann, muss man **Substituieren**. Das heißt man ersetzt ein Teil einer Funktion mit einer Variable. Hier ersetzen wir x^2 mit u :

$$u = x^2 \quad y = 4u^2 - 9u + 1 = 0$$

Dadurch bekommt man eine Quadratische Funktion (in diesem Fall aber man kann das auch mit Funktionen machen, die man dann anders lösen kann). Diese kann man dann mit der ABC-Formel lösen. Dies werde ich jetzt hier nicht zeigen.

$$u = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8} \quad u_1 \approx 2,13 \quad u_2 \approx 0,12$$

Da $u = x^2$ muss man jetzt, um die Lösung für x zu bekommen, die Wurzel von u ziehen:

$$x_1 = \sqrt{u_1} \approx 1,46 \quad x_2 = \sqrt{u_2} \approx 0,34$$

Verhalten im Unendlichen

Hier betrachtet man lediglich den Term mit dem höchsten Exponent:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} +x^2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} +x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} +x^3 = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} +x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \end{array}$$

Symmetrie verhalten

Extrempunkte

Extrempunkte sind alle Hoch/Tiefpunkte einer Funktion. Folgendes ist bei einem Extrempunkt gegeben:

- $f'(x) = 0$

Bedingung	Art d. Punktes
$f''(x) < 0$	Hochpunkt
$f''(x) = 0$	Sattelpunkt
$f''(x) > 0$	Tiefpunkt

Monotonieverhalten

Wendepunkte

Bei einem Wendepunkt ändert sich die Richtung. Die Richtung kann man durch die erste Ableitung beschreiben. Diese geht vom positiven ins Negative oder anders herum. In beiden Fällen impliziert das jedoch, dass die Änderung der Richtung (*die zweite Ableitung*) Null sein muss.

$$f''(x) = 0 \quad W(x|f(x))$$

Tangente Aufstellen

Man hat die Funktion $f(x)$ und will die Tangente an dem x-Wert P_x finden.

Eine Lineare Funktion hat folgende Form:

$$y = a \cdot x + c$$

Steigung

Um die Steigung a der Tangente zu berechnen, muss man die Ableitung der Funktion f berechnen. Dann setzt man P_x ein:

$$a = f'(P_x)$$

Verschiebungs

Als Erstes muss man den Punkt bekommen, durch den die Tangente durchgehen soll. Da man den x-Wert schon hat, ist dies einfach:

$$f(P_x) = P_x \quad P(P_x|P_y)$$

Jetzt c zu finden ist einfach. Man setzt ein und löst für c auf.

$$P_y = a \cdot P_x + c$$

$$c = P_y - a \cdot P_x$$

Stammfunktionen

Stammfunktionen sind essenziell für Integrale. Die beste Beschreibung wäre das Gegenteil einer **Ableitung**, eine “*Aufleitung*”.

$f(x)$	$F(x) + C$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^4	$\frac{1}{5} \cdot x^5$
$9 \cdot x^7$	$\frac{9}{8} \cdot x^8$
$n \cdot e^x$	$n \cdot e^x$
$e^{g(x)}$	$\frac{1}{g'(x)} \cdot e^{g(x)} = \frac{e^{g(x)}}{g'(x)}$
e^{3x+4}	$\frac{1}{3} e^{3x+4} = \frac{e^{3x+4}}{3}$
$10 \cdot e^{4x-8}$	$\frac{10}{4} \cdot e^{4x-8}$
$\frac{k}{x^n}$	$\frac{-n \cdot k + k}{x^{n-1}}$
$\frac{4}{x^2}$	$-\frac{4}{x}$
$\sqrt{ax+c}$	$\frac{2}{3 \cdot a} (ax+c)^{\frac{3}{2}}$

Für Sinus und Cosinus siehe Ableitungen.

“Kettenregel”

Bei Stammfunktionen funktioniert die *Kettenregel* etwas anders als bei Ableitungen. Hierfür ziehe ich am besten ein real-Beispiel heran:

$$f(x) = \sqrt{4x-7} = (4x-7)^{\frac{1}{2}} \quad u(x) = 4x-7 \quad u'(x) = 4$$

$$F(x) = \frac{\frac{2}{3}(4x-7)^{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{1}{6}(4x-7)^{\frac{3}{2}}$$

Generell kann man sagen:

$$f(x) = (u(x))^n \quad F(x) = \frac{1}{(n+1) \cdot u'(x)} \cdot (u(x))^{n+1}$$

Wichtig: Das funktioniert aber nur, wenn $u(x)$ linear ist, das heißt, wenn der größte Exponent 1 ist.



Figure 1: Beispiel Graph

Integrale

Ein Integral berechnet den Flächeninhalt unter einer Funktion.
Die größere Zahl steht bei einem Integral *meist* oben: $n > k$.

Funktion und x-Achse

$$\int_k^n g(x) dx = \left[G(x) \right]_k^n = G(n) - G(k)$$

Die Form die ich hier angegeben habe gilt, wenn man den Flächeninhalt der Funktion $g(x)$ in dem Intervall $n - k$, und der X-Achse finden will. Die nötigen Schritte sind:

1. man berechnet die Stammfunktion von $g(x)$
2. man setzt beide Zahlen des Abschnitts in diese ein und rechnet das Ergebnis der größeren Zahl minus dem Ergebniss der kleineren Zahl:
 $G(n) - G(k)$

Funktion und y-Achse

Will man das gleiche mit der y-Achse machen, so bildet man die Kehrfunktion,

$$y = x + 1 \quad x = y - 1$$

und macht die gleichen Schritte mit dieser.

Visuell dreht man einfach die Funktion um.

Funktion und eine andere Funktion

Möchte man den Flächeninhalt berechnen von 2 Funktionen in einem bestimmten Intervall, wie Beispielsweise die graue Fläche in dem obigen Bild so ist dies auch nicht viel schwerer. Man muss in dem Intervall die Funktion mit dem größeren Flächeninhalt minus die Funktion mit dem kleineren berechnen. Weiß man dies nicht, kann man auch den Betrag einer Funktion minus der anderen berechnen.

$$\int_k^n (g(x) - f(x)) dx = \left[G(x) - F(x) \right]_k^n = (G(n) - F(n)) - (G(k) - F(k))$$

Hier ist es besonders sinnvoll zu vereinfachen wo man kann, sonst wird es sehr schnell zu komplex.

Gebrochen Rationale Funktionen

Es geht hier um folgende Funktionen:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

- $u(x)$: Zähler
- $v(x)$: Nenner

Asymptoten

Polgeraden

Die Polgerade ist ein Sonderfall der Asymptoten. Diese Asymptoten sind senkrecht, und beschreiben eine Definitionslücke. Somit kann man diese finden wenn man den Nenner gleich 0 setzt, weil *division by 0*.

1. $v(x_i) = 0$ den Nenner gleich Null setzen
2. Die Polgerade ist: $x = x_i$

die Asymptote

Die anderen Asymptoten, die nicht Senkrecht sind, kann man mit der Polynomdivision finden. Man kann aber keine Polgerade damit finden.

$$u(x) : v(x) = A(x) + \frac{r(x)}{v(x)}$$

wobei die Asymptote $y = A(x)$ ist.

$\frac{r(x)}{v(x)}$ ist der Rest, bei dem der Grad von $r(x)$ kleiner als der Grad von $v(x)$ ist.

Grad

Der Grad bezeichnet die höchste Potenz in einer Funktion.

Polynomdivision