Rechenoperationen mit Vektoren

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_y \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist orthogonal zu der Ebene, die von beiden Vektoren aufgespannt werde.
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}$

Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_x \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_y + \vec{a}_z \cdot \vec{b}_z$

- Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren 0 ist, so sind diese Vektoren orthogonal zueinander.

Lotfuspunkt bestimmen

$P(x|y|z)$
$g : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{u}$

Der Lotfuspunkt ist der Schnittpunkt der Geraden die Orthogonal zu g ist und durch P geht mit der Geraden g.

- Stelle die Gleichung einer Ebene auf, die von der Gerade g orthogonal geschnitten wird, und die durch P geht
- Der Schnittpunkt von der Ebene und der Gerade g ist der Lotfuspunkt.

Ebenengleichung aufstellen

Der Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene ist Orthogonal zur Ebene. Das heißt, dieser kann einfach der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade sein.
$\vec{n} = \vec{u}$

Das ist schon fast alles für die Ebene:
$E : \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = d$

d entspricht einem Skalarprodukt des Normalvektors $\vec{n}$ und einem beliebigen Punkt auf der Ebene. Da die Ebene durch P gehen soll folgt:
$d = 0\vec{P} \cdot \vec{n}$
$E : \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = 0\vec{P} \cdot \vec{n}$

Schnittpunkte

Gerade mit Ebene

$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$
$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

Um den Schnittpunkt zu finden braucht man zuerst den Wert des Parameters t der Gerade g. Hat man diesen Wert, kann man ihn in die Geradengleichung einsetzten und der resultierende Punkt ist der Schnittpunkt.

Um den Wert für t zu finden, muss man folgende Gleichung aufstellen, und nach t umstellen:
$a \cdot (\vec{p}_x + t \cdot \vec{u}_x) + b \cdot (\vec{p}_y + t \cdot \vec{u}_y) + c \cdot (\vec{p}_z + t \cdot \vec{u}_x) = d$

Schnittgerade

Gegeben sind folgende Ebenen:
$E_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_2 = d_1$ $\qquad$ $E_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_2 = d_2$

Das Finden der Schnittgeraden ist sehr einfach. Man muss die beiden geraden einfach gleichsetzten. Dies macht man einfach mit einem linearen Gleichungssystem.

$$I: \quad a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_2 = d_1$$

$$II: \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_2 = d_2$$

Spiegelung

Punkt an Ebene

Gespiegelt wird der Punkt P an der Ebene E.

$E : a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$
$P(x_1|x_2|x_3)$

1. Eine Gerade aufstellen, bei der der Stützvektor gleich P ist, und der Richtungsvektor gleich dem Normalvektor von E ist $\vec{u} = \vec{n_E}$
   $g : \vec{x} = P + s \cdot \vec{n_E}$
2. Den Schnittpunkt von der Ebene E mit der Geraden g finden.

3. Der gespiegelte Punkt ist dann der Parameter s für den Schnittpunkt verdoppelt.

$P' = P + 2s_S \cdot \vec{n}$

Flächeninhalt

Parallelogramm / Dreieck

Für den Flächeninhalt A eines Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:
$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Da ein Dreieck ein *halbes Parallelogramm* ist, ist der Flächeninhalt eines Dreiecks die Hälfte von dem Flächeninhalt eines Parallelogramms.
$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

Winkel

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Richtungsvektoren der Geraden g und h.
$\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ sind die Normalvektoren der Ebenen E und F.

α entspricht dem resultierenden Winkel. Für diesen gilt generell:
$0 \leq \alpha \leq 90$

Gleiches mit Gleichem

Wenn sich *gleiches mit gleichem* Schneidet, so berechnet man den Winkel mit Cosinus.
Gleiches mit gleichem bedeutet entweder eine Ebene mit einer Ebene, oder eine Gerade mit einer Geraden.

$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ $\qquad$ $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{N}_E| \cdot |\vec{N}_F|}$

Gerade mit Ebene

Bei einer Geraden und einer Ebene funktioniert das genauso, nur mit Sinus anstatt Cosinus.

$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{N}_E| \cdot |\vec{u}|}$

Abstand

Ebene mit Punkt (mit Lotfußpunkt)

$E : ax + by + cz = d$ $\qquad$ $P(x|y|z)$

- Zuerst muss man eine Gerade g aufstellen, die Orthogonal zu E ist und durch Punkt P geht. Dafür kann man einfach den Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene E als Richtungsvektor nehmen und der Punkt P als Stützvektor.

$g : \vec{x} = P + t \cdot \vec{n}$

- Damit kann man dann den **Lotfußpunkt** berechnen *(der Schnittpunkt von E und g)*
- der Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E entspricht dann dem Betrag zwischen P und dem Lotfuspunkt.

Ebene mit Punkt (Koordinatenform)

Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben und wird der Lotfuspunkt nicht gebrauch so kann man auch einen anderen, einfacheren Weg gehen. Gegeben ist Folgendes:

$$P(x|y|z) \qquad E : ax + by + cz = d \qquad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. Setzt man den Punkt in die Ebene ein der nicht auf der Ebene ist, kommt eine Zahl ungleich d heraus. Berrechnet man dann die differenz zwischen d und dem Ergebnis, so bekommt man den Wert um den man den **Stützvektor** der Ebene in Koordinatenform hätte multiplitzieren müsste.

$$aP_x + bP_y + cP_z - d = t$$

2. Um dann den Abstand herauszufinden, muss man den Wert t durch den Betrag des Normalvektors teilen.

$$d(P, E) = \frac{t}{|\vec{n}_E|}$$

Dies Ergibt dann folgende generelle Formel für den Abstand:

$$d(P, E) = \frac{aP_x + bP_y + cP_z - d}{|\vec{n}_E|}$$

Ebene mit Gerade

Das Berechnen des Abstandes einer Ebene und einer Gerade mach nur Sinn, wenn die beiden parallel zueinander sind *(in dem dreidimensionalen Raum).* Somit kann man einfach irgendein Punkt auf der Gerade nehmen und den Abstand von diesem Punkt zur Ebene berechnen. Der Stützvektor der Gerade bietet sich dafür an.

Note: Die Gerade muss Parallel zur Ebene sein, sonst ist der Abstand automatisch 0 da es dann ein Schnittpunkt gibt. *Sind diese nicht parallel, bricht auch diese Methode zusammen.*

Zwei windschiefe Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} \qquad h : \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \qquad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$d(g;h) = |(\vec{q} - \vec{p}) - \vec{n}_0|$$

wobei $\vec{n}_0$ der Normaleinheitsvektor von $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist.