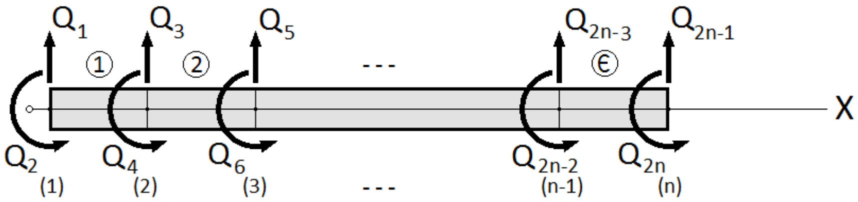
1 MODELADO DE LA VIGA Y LOS GRADOS DE LIBERTAD



2 MATRICES DE RIGIDEZ LOCALES

$$k_{sr}^{e} = \left(\frac{E\,I}{l_e^3}\right)\begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

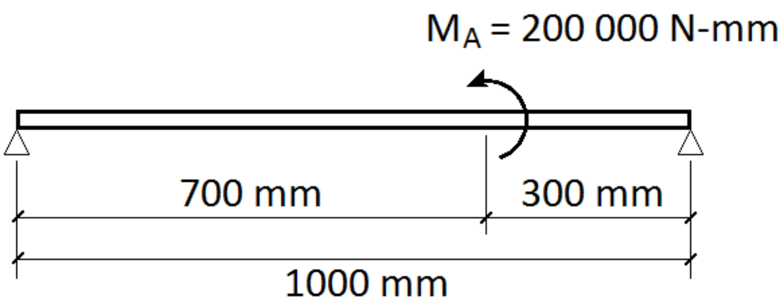
3 LOS ESFUERZOS

$$\sigma_x^e = -\left(\frac{E\,y}{l_e^2}\right)[6\xi q_1 + (3\xi - 1)l_e q_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)l_e q_4]$$

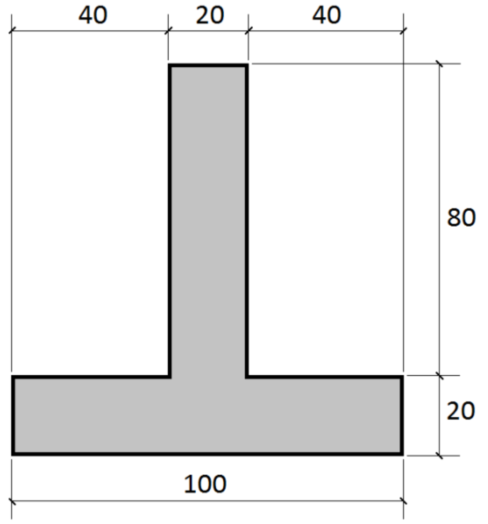
$$\tau_{máx}^{e} = \alpha_S\left(\frac{6\,E\,I}{A l_e^3}\right)[2q_1 + l_e q_2 - 2q_3 + l_e q_4]$$

4 TEMA DE LA PRÁCTICA

La viga mostrada en la figura tiene dos apoyos simples, y está sometida a un momento externo concentrado; tal como se indica.



SECCIÓN DE LA VIGA:



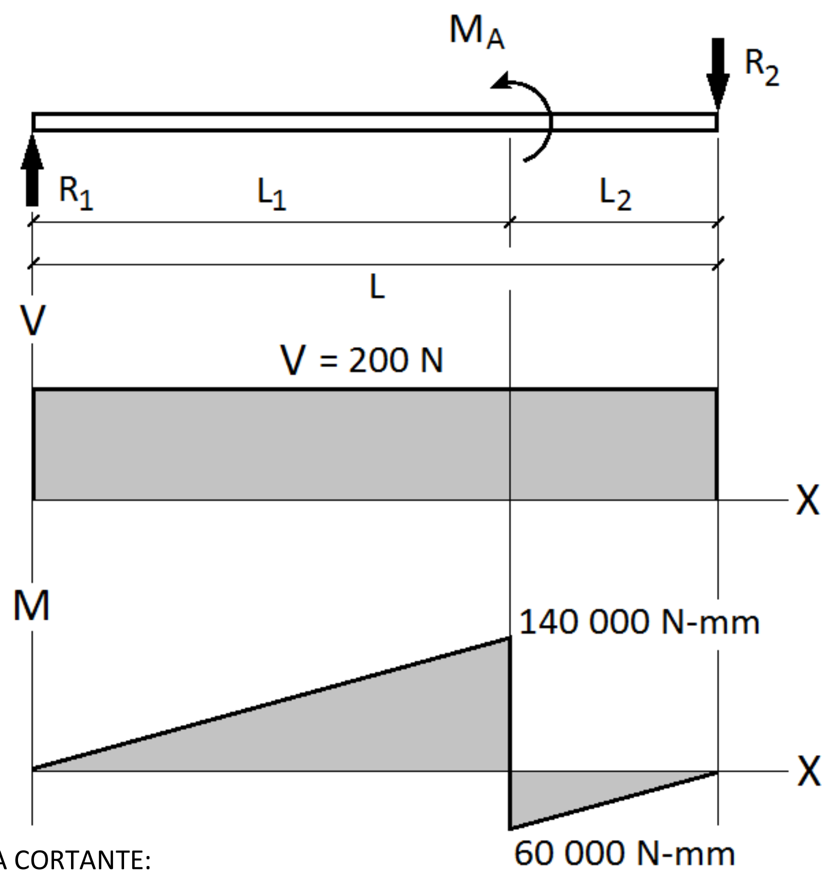
SOLUCIÓN (ANALITICA)

a) DIAGRAMA DE CARGAS EXTERNAS (CUERPO LIBRE)

Las reacciones en los apoyos; mediante el equilibrio de fuerzas verticales y de momentos en el plano del papel:

$$R_1 = -R_2 = \frac{M_A}{L} = 200\ N$$

b) DIAGRAMA DE LA CORTANTE Y DEL MOMENTO FLECTOR



EL DIAGRAMA DE LA CORTANTE:

En todo (x):

$$V = +R_1 = 200\ N$$

En $x \rightarrow \;(0, 700)$:

$$M_1 \;=\; R_1 x \;=\; 200\,x\;\; N - mm$$

En $x \rightarrow (700, 1000)$:

$$M_2 \;=\; R_1 x \;-\; M_A \;=\; 200\,x \;-\; 200\,000\;\; N - mm$$

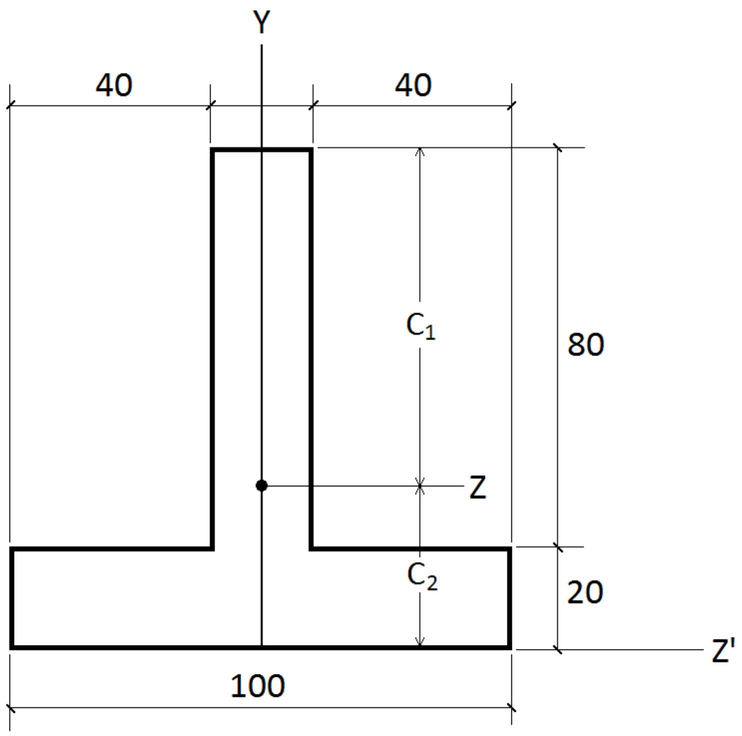
c) SECCIÓN DE LA VIGA (PROPIEDADES)

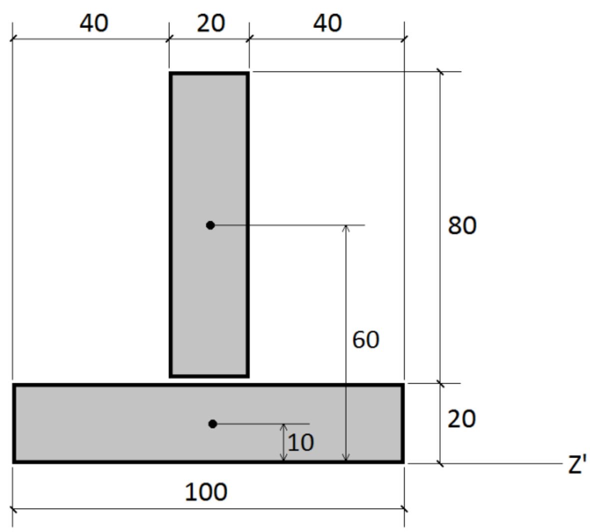
EL CENTROIDE (ubicación):

El momento de primer orden de la sección respecto al eje (Z'), es el siguiente:

$$C_2 \;=\; \frac{\int_0^A y'dA}{A}$$

En la figura siguiente se puede apreciar la ubicación del centroide del área de la sección de la viga.





Reemplazando:

$$C_2 \;=\; \frac{(2*8*6)+(2*10*1)}{(2*8)+(2*10)}\;\frac{10^3}{10^2} \;=\; 32{,}2 \text{ mm}$$

EL MOMENTO DE INERCIA (Respecto al eje Z):

El momento de segundo orden de un rectángulo con respecto a uno de sus bordes:

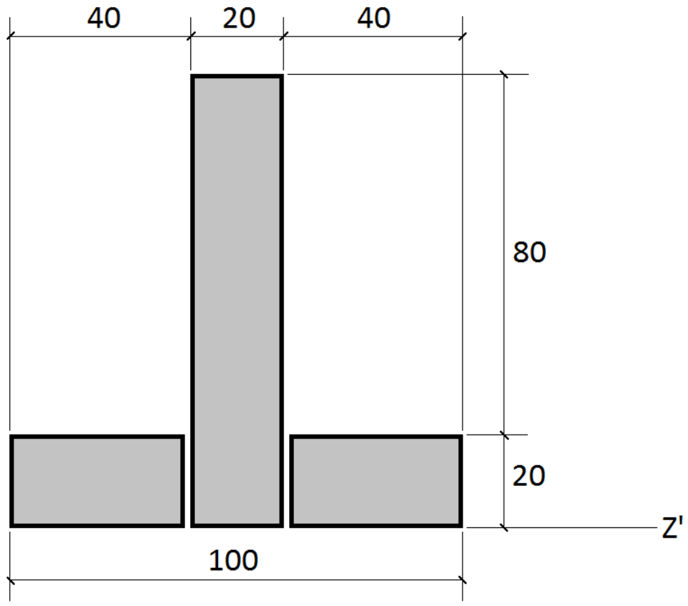
$$I' \;=\; \int_0^A y^2 dA \;=\; b\int_0^c y'^2 dy' \;=\; \frac{1}{3} b[y'^3]_0^c$$

$$I' \;=\; \frac{1}{3} b\, c^3$$

El momento de segundo orden de los rectángulos que forman el área de la sección de la viga, con respecto al borde común en (Z'):

$$I' \;=\; \tfrac{1}{3}[2(4*2^3) + \;(2*10^3)]\,10^4 \;=\; 688*10^4\, mm^4$$

En la figura siguiente se puede apreciar la descomposición del área de la sección de la viga, en rectángulos simples:



El momento de segundo orden respecto al centroide (teorema se Steiner):

$$I \;=\; I' \;-\; A\, C_2^2$$

Reemplazando valores en los tres rectángulos:

$$I \;=\; [688 - \;(80*2 \;+\; 2*10)(3{,}22)^2]10^4$$

Resultando el momento de inercia respecto a eje (Z):

$$I \;=\; 315*10^4 \quad mm^4$$

d) LOS ESFUERZOS EN LA SECCIÓN DE LA VIGA

El esfuerzo normal a la sección de la viga:

$$\sigma_x \;=\; \frac{M\,y}{I}$$

La fibra más alejada del centroide:

$$C_1 \;=\; 100 \;-\; C_2 \;=\; 67{,}8\ \text{mm}$$

El esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{x\ máx} = \frac{M\,C_1}{I} = \frac{140\,000*67{,}8}{315*10^4} = -3{,}0130 \quad \text{MPa}$$

El esfuerzo cortante o tangencial a la sección de la viga:

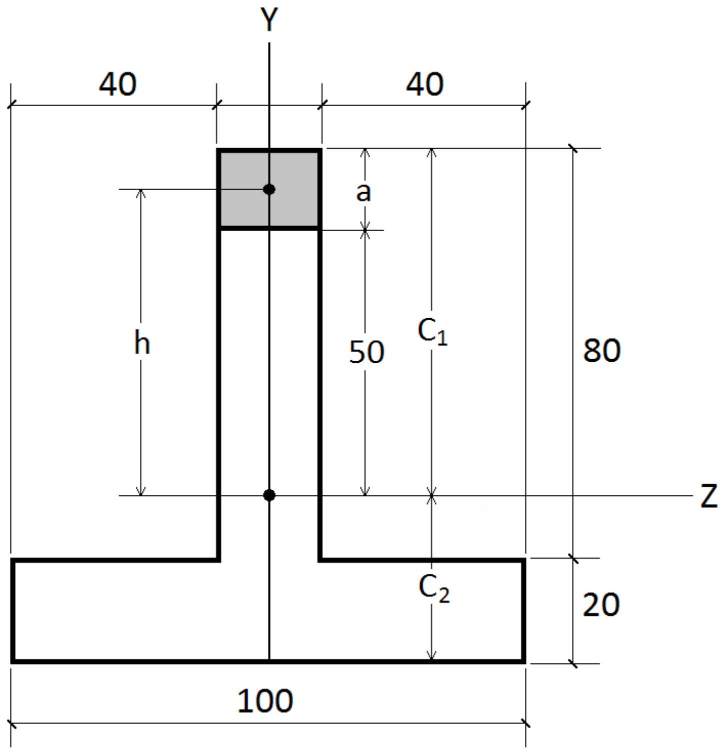
$$\tau_V = \frac{V}{I\,b}\int_0^{A'} y'\,dA'$$

En la figura siguiente hallaremos el esfuerzo cortante para $(y = 50\ mm)$ a título de ejemplo:

En donde:

a = 17,8 mm

h = 58,9 mm



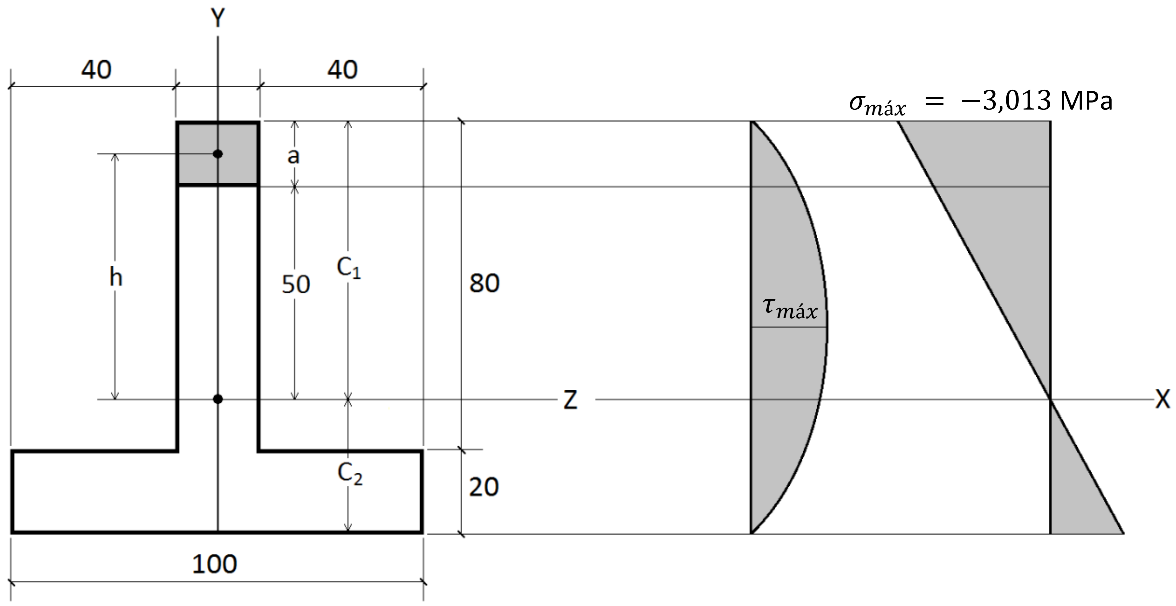
La integral de la ecuación de la cortante, es el momento de primer orden del área sombreada:

$$\int_0^{A'} y'\,dA = (17{,}8*20)58{,}9 = 2{,}097\ mm^3$$

Reemplazando en la ecuación del esfuerzo cortante; para $y = 50\ mm$:

$$\tau_V = \frac{200\ N}{315*10^4(mm^4)*20\ mm}\,2{,}097*10^3(mm^3)$$

$$\tau_V = 6{,}657*10^{-2}\ \text{MPa}$$



e) LA DEFORMADA DE LA VIGA

En la zona $(0 \rightarrow \ x \ \rightarrow \ L_1)$:

$$v_1 = \frac{M_A}{6EIL}x^3 + \left(\frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_A L_1}{EI} + \frac{M_A L_1^2}{2EIL}\right)x$$

En la zona $(L_1 \ \rightarrow x \ \rightarrow \ L)$:

$$v_2 = \frac{M_A}{6EIL}x^3 - \frac{M_A}{2EI}x^2 + \left(\frac{M_A L}{2EI} + \frac{M_A L_1^2}{2EIL}\right)x - \frac{M_A L_1^2}{2EI}$$

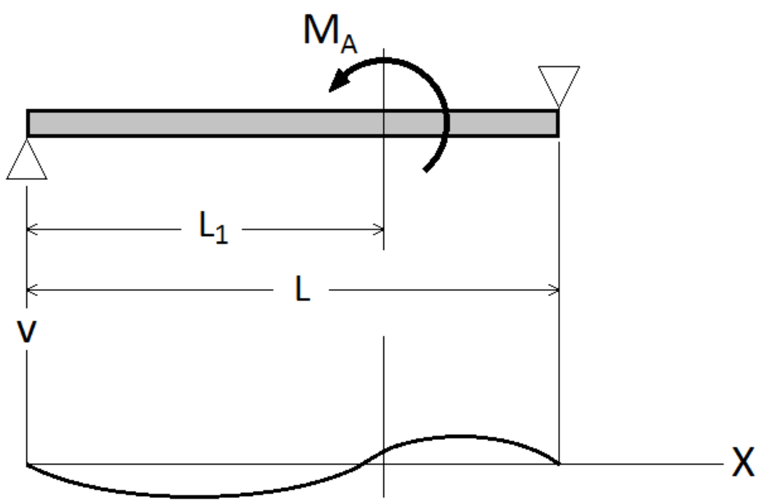
f) LA PENDIENTE

En $(x = 0)$:

$$v' = \frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_A L_1}{EI} + \frac{M_A L_1^2}{2EIL}$$

En $(x = L_1)$:

$$v' = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_A L_1^2}{2EIL}$$



SOLUCIÓN NUMÉRICA

Utilizando el CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS, y eligiendo el número de elementos finitos para el modelo de la viga mostrada.

HALLAR:

- Las fuerzas de reacción en los apoyos.
- Los gráficos del momento flector y de la fuerza cortante.
- Los esfuerzos máximos en cada elemento finito (σ_x).
- Las pendientes de la deformada en $(x = 0)$ y en $(x = L_1)$.
- La deformada de la viga.

MATERIAL DE LA VIGA:

$$E = 3{,}0 * 10^5 \ \frac{N}{mm^2}$$

DIMENSIONES Y CARGAS APLICADAS:

Ver en el croquis de la página 1

NOTA: Comparar los resultados numéricos con los resultados analíticos.