

# 高等数学 (I)

李铮

高等数学

主讲教师：李铮





## 上一次课程内容回顾

高等数学 李铮



### 3.4 高阶导数

#### 3.4.1 高阶导数的定义

##### 1. 二阶导数的定义

设函数  $y = f(x)$  在任意点  $x$  的导数  $f'(x)$  仍是  $x$  的函数,

如果极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$  存在, 则称此极限值为函数

$y = f(x)$  在点  $x$  的**二阶导数**, 记作:  $f''(x)$ ,

二阶导数也可记作:  $y''$  或  $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ 。

即: 导数的导数称为二阶导数。 **注意:**  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df(x)}{dx} \right)$ 。

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 2. $n$ 阶导数的定义

设函数  $y = f(x)$  的  $(n-1)$  阶导数  $f^{(n-1)}(x)$  存在, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \text{ 存在, 则称此极限值为函数 } y = f(x)$$

在点  $x$  的  $n$  阶导数, 记作:  $f^{(n)}(x)$ ,

$n$  阶导数也可记作:  $y^{(n)}$  或  $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ 。

为了形式上的统一, 定义  $y^{(0)} = y$  或  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ,

把  $f'(x)$  称为  $f(x)$  一阶导数。

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



- 二阶及二阶以上阶导数统称为高阶导数。

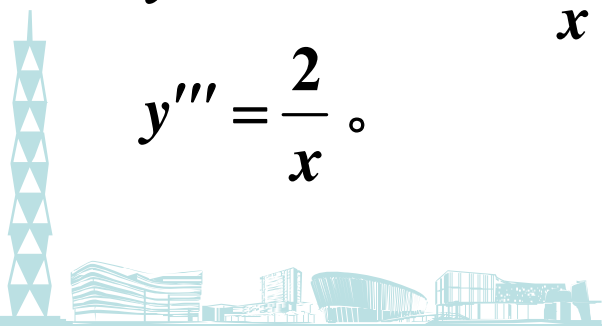
若  $f^{(n)}(x)$  在区间  $I$  上连续, 则称  $f(x)$  在  $I$  上  $n$  阶连续可导, 记作:  $f \in C^{(n)}(I)$ 。

【例题1】设  $y = x^2 \ln x$ , 求  $y'', y'''$ 。

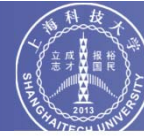
解:  $y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$

$$y'' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3,$$

$$y''' = \frac{2}{x}.$$



## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

**【例题2】** 设  $y=x^\mu$ , 求  $y^{(n)}$ 。

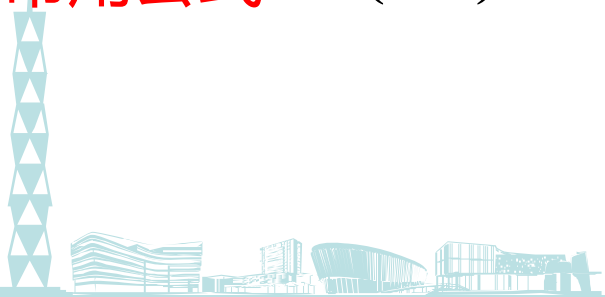
**解:**  $y' = \mu x^{\mu-1}$ ,  $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$ , ...

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}。$$

特别:  $(x^n)^{(n)} = n!$ 。

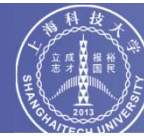
**常用公式1:**  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}。$

**常用公式2:**  $(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}。$



立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

**【例题3】** 设  $y = \sin x$ , 求  $y^{(n)}$ 。

**解:**  $y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(4)} = \sin x,$

**问题:** 分别讨论  $n = 4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$  吗?

注意到  $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}), \dots$$

**常用公式3:**  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$

同理得

**常用公式4:**  $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题4】 设  $y = \ln(x^2 + x - 2)$ , 求  $y^{(n)}$ 。

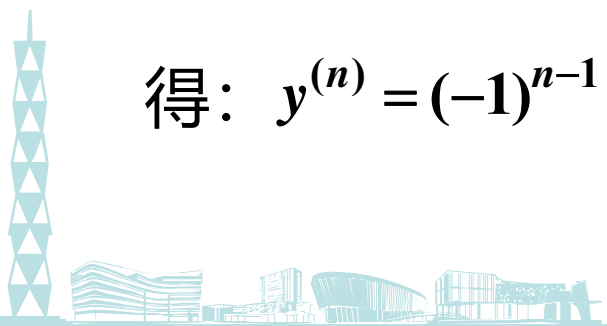
解:  $y' = \frac{2x+1}{x^2+x-2}, \quad y'' = \frac{2(x^2+x-2) - (2x+1)^2}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2},$

问题: 怎么办? 再求导吗?

注意到:  $y' = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1},$

利用公式  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}},$

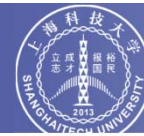
得:  $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x+2)^n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)^n}。$



立志成才 报国裕民



## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 3.4.2. 高阶导数的运算法则

1.  $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$

2. 莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \\ + \cdots + C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} + u \cdot v^{(n)}$$

或  $[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x)$



立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

**【例题5】** 设  $y = x^2 \sin x$ , 求  $y^{(100)}$ 。

**解:** 注意到,  $(x^2)' = 2x, (x^2)'' = 2, (x^2)''' = 0$ ,

所以, 由莱布尼兹公式可得:

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= x^2 \cdot (\sin x)^{(100)} + C_{100}^1 \cdot (x^2)' \cdot (\sin x)^{(99)} + C_{100}^2 \cdot (x^2)'' \cdot (\sin x)^{(98)} \\ &= x^2 \cdot \sin(x + 50\pi) + 100 \cdot 2x \cdot \sin(x + \frac{99}{2}\pi) + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 \cdot \sin(x + 49\pi) \\ &= x^2 \cdot \sin x - 200x \cdot \cos x - 9900 \cdot \sin x. \end{aligned}$$

**【例题6】** 设  $y = \sin x \cos 2x$ , 求  $y^{(n)}$ 。

**问题:** 直接令  $u = \sin x, v = \cos 2x$  然后利用莱布尼兹公式吗?

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题6】解：

利用三角函数积化和差公式  $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$

$$\begin{aligned}\text{所以: } y^{(n)} &= \frac{1}{2}[(\sin 3x)^{(n)} - (\sin x)^{(n)}] \\ &= \frac{1}{2}[3^n \sin(3x + \frac{n}{2}\pi) - \sin(x + \frac{n}{2}\pi)].\end{aligned}$$

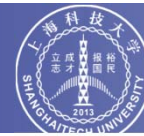
【例题7】设  $y = e^{ax} \sin bx$ , 求  $y^{(n)}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot b \cdot \cos bx = \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos bx \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + \varphi), \text{ 其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\end{aligned}$$

$$\text{因此, } y^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx + n\varphi).$$

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

**【例题8】** 设  $f(x) = (x^2 - 1)^n \cos \frac{\pi}{4} x$ , 求  $f^{(n)}(1)$ 。

**解:** 记  $f(x) = (x-1)^n g(x)$ ,  $g(x) = (x+1)^n \cos \frac{\pi}{4} x$ ,

而  $[(x-1)^n]^{(k)}$  在  $x=1$  处, 当  $k \neq n$  时, 均为零,

当  $k=n$  时,  $[(x-1)^n]^{(n)} = n!$ , 所以  $f^{(n)}(1) = n! \cdot g(1) = n! \cdot 2^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

**【例题9】** 设  $f(x) = \arctan x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ 。

**解:**  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ,  $f''(0) = 0$ ,

**问题:** 怎么办?

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题9】解(续):

$$(1+x^2) \cdot f'(x) = 1,$$

上式两边求  $(n-1)$  导数, 得

$$(1+x^2) \cdot f^{(n)}(x) + (n-1) \cdot (2x) \cdot f^{(n-1)}(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-2)}(x) = 0,$$

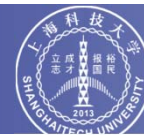
用  $x=0$  代入上式, 得  $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ ,

而  $f'(0)=1, f''(0)=0$ , 因此,  $f^{(2k)}(0)=0$ ,

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!.$$

**问题:** 设  $f(x) = \arcsin x$ , 如何求  $f^{(n)}(0) = 0$ ?

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 3.4.3 隐函数、参数方程及反函数的二阶导数

#### 1. 隐函数的二阶导数

通过例题来说明如何求隐函数的二阶导数。

【例题10】 设方程  $e^y + xy = e$  确定了隐函数  $y = y(x)$ , 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 。

解：当  $x = 0$  由方程知  $y(0) = 1$

方程两边对  $x$  求导数, 把  $y$  看成  $x$  的函数,

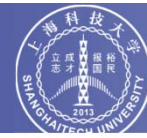
得  $e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \cdots (*)$  由  $x = 0, y(0) = 1$  得  $y'(0) = -e^{-1}$ ,

对  $(*)$  式求导数, 得  $e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + y' + y' + x \cdot y'' = 0$

由  $x = 0, y(0) = 1, y'(0) = -e^{-1}$  得  $y''(0) = e^{-2}$ 。

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 2. 参数方程所确定函数的二阶导数

设参数方程为  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , 由于  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ ,

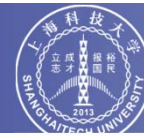
所以 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t) \cdot \varphi'(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

【例题11】求由参数方程  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  确定的函数的二阶导数。

解: 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \cot \frac{t}{2} \right)}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a} \csc^4 \frac{t}{2}.$$

立志成才 报国裕民

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题12】设  $t = \tan x$ ，变换方程

$$\cos^4 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cos^2 x \cdot (1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = \sec^2 x。$$

解法1:  $t = \tan x, x = \arctan t$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \left( \cos^2 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \cos x \sin x \cdot \frac{dy}{dx} \right) \cdot \cos^2 x$$

故方程可变换为:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + t^2。$



立志成才 报国裕民



## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 【例题12】解法2:

$$t = \tan x, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = (1+t^2) \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = (1+t^2) \cdot \left[ 2t \frac{dy}{dt} + (1+t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} \right]$$

代入原方程整理得:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + t^2$ 。

## 3.4 高阶导数



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 3. 反函数的二阶导数

设函数  $x = \varphi(y)$  是严格单调可导函数  $y = f(x)$  的反函数,

且  $f'(x) \neq 0$ , 则  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$ ,

进一步有:  $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{dx}{dy} \right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$ 。



立志成才 报国裕民

## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 3.5 微分及其应用

微分是微积分学中又一个基本概念，它与导数有着及其密切的关系。

#### 3.5.1. 微分的定义

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义，当自变量在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  时，相应的函数有增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，

若  $\Delta y$  可以表示为  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，其中  $A$  与  $\Delta x$  无关， $o(\Delta x)$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小，则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处微分存在，

把  $A\Delta x$  称为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的微分，记作： $dy|_{x=x_0}$ 。

立志成才 报国裕民

## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

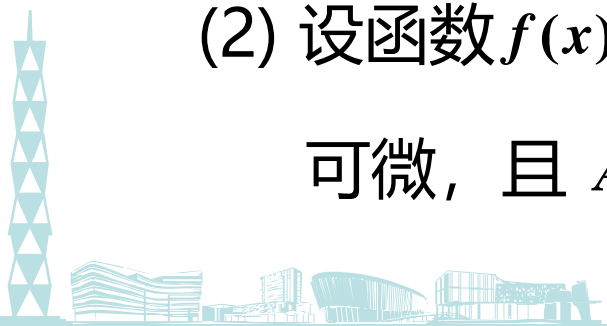
### • 微分的定义

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处微分存在, 也称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 把微分  $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$  称为  $\Delta y$  的线性主部。

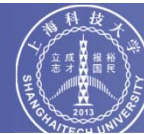
### 3.5.2. 微分与导数的关系

定理: (1) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = A$ ; 即: 可微  $\Rightarrow$  可导

(2) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可微, 且  $A = f'(x_0)$ 。 即: 可导  $\Rightarrow$  可微



立志成才 报国裕民



## 3.5 微分及其应用

- 微分与导数的关系：可微  $\Leftrightarrow$  可导

(1) 证明：由微分定义  $\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x)$ ,

$$\text{知 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A, \text{ 即 } f'(x_0) = A;$$

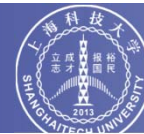
(2) 证明：设  $f'(x_0) = A$ , 即  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ ,

由极限与无穷小的关系可得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

$$\text{其中 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x),$$

故函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微分, 且  $A = f'(x_0)$ 。



## 3.5 微分及其应用

当函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处微分存在时，其微分为：

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

任意点  $x$  处的微分称为函数  $f(x)$  的微分，记作： $dy$

或  $df(x)$ ，即： $dy = f'(x)\Delta x$ 。

为了形式上统一，记  $\Delta x = dx$ ，则  $dy = f'(x)dx$ ，

或  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ，所以，**导数**又可称为**微商**。





## 3.5 微分及其应用

### 3.5.3. 基本微分表与微分运算法则

#### 1. 基本微分表:

$$dC = 0, \quad d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx,$$

$$d(a^x) = a^x \ln a \, dx, \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx, \quad d(\cos x) = -\sin x \, dx,$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x \, dx, \quad d(\cot x) = -\csc^2 x \, dx,$$

$$d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x \, dx, \quad d(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x \, dx,$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx,$$



## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

### 2. 微分运算法则

$$d[u(x) \pm v(x)] = [u'(x) \pm v'(x)]dx = d[u(x)] \pm d[v(x)],$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = [v(x)u'(x) + u(x)v'(x)]dx = v(x) \cdot d[u(x)] + u(x) \cdot d[v(x)]$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}dx = \frac{v(x)d[u(x)] - u(x)d[v(x)]}{v^2(x)}.$$

#### • 复合函数的微分运算法则:

设函数  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  可微, 则复合函数  $y = f[g(x)]$

可微, 且  $dy = [f'(u) \cdot g'(x)]dx = f'(u) \cdot [g'(x) \cdot dx] = f'(u) \cdot du$ ,

这个性质称为**一阶微分形式不变性**。

立志成才 报国裕民



## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题1】 设  $y = \cos(x^3 + e^{\frac{1}{x}})$ , 求  $dy$ 。

解:  $dy = -\sin(x^3 + e^{\frac{1}{x}}) \cdot [3x^2 + e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})] \cdot dx$ 。

【例题2】 设  $xy = x^3 + e^{x-y} - 1$ , 求  $dy$ 。

解法1: 方程两边对  $x$  求导,  $y + x \cdot y' = 3x^2 + e^{x-y} \cdot (1 - y')$

解得:  $y' = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}}$ , 所以有  $dy = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}} dx$ 。

解法2: 方程两边直接求微分  $ydx + xdy = 3x^2dx + e^{x-y} \cdot (dx - dy)$ ,

解得:  $dy = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}} dx$ 。

立志成才 报国裕民

## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

由于导数又可称为**微商**，即  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ，

所以，导数运算法则可直接看成微分之间的运算：

如：复合函数运算法则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ；

反函数运算法则  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ；

参数方程运算法则  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 。



立志成才 报国裕民

## 3.5 微分及其应用



上海科技大学  
ShanghaiTech University

【例题3】求  $\frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^3)}$ 。

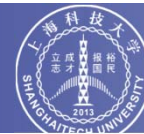
解法1: 令  $u = x^3$ , 则  $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}}$ , 需要求  $\frac{d(\frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{du}$ ,

$$\frac{d(\frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{du} = \frac{\cos \sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot \sqrt[3]{u} - \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot \sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u^2}} = \frac{x \cos x - \sin x}{3x^4}。$$

解法2:

直接求微商  $\frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^3)} = \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx}{3x^2 dx} = \frac{x \cos x - \sin x}{3x^4}。$

立志成才 报国裕民



## 3.5 微分及其应用

### 3.5.4. 微分的应用

如果函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 由微分定义知

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}y|_{x_0} + o(\Delta x),$$

当  $|\Delta x|$  很小时,  $\Delta y \approx \mathrm{d}y|_{x_0}$ ,

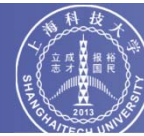
即  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$  或  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ 。

如果取  $x_0 = 0$ , 记  $\Delta x = x$ ,

则当  $|x|$  很小时, 有  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ 。

• 几个常用的近似等式:

$$\sin x \approx x, \ln(1+x) \approx x, e^x \approx 1+x, \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x. (|x| \text{ 很小})$$



## 3.5 微分及其应用

**注意：**近似等式与等价无穷小的区别。

**【例题4】** 计算  $\sqrt[4]{80}$  的近似值。

**解：**  $\sqrt[4]{80} = 3 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{81}} \approx 3 \cdot [1 + 4 \cdot (-\frac{1}{81})] \approx 2.997$ 。

**【例题5】** 计算  $\sin(31^\circ)$  的近似值。

**解：**  $\sin(31^\circ) = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}) \approx \sin \frac{\pi}{6} + (\cos \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.515$ 。

**注：** 随着计算机的发展，微分的近似计算使用较少，  
主要问题是精确度不够，常用方法将在下一章中介绍。

## 第三章 导数与微分



上海科技大学  
ShanghaiTech University

本次课程内容小结

下次课程内容预告

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民



谢谢!

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民