

Advanced Mathematics Quiz 1

2023.11.2

姓名 _____ 学号 _____

1.(15分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 用数列极限“ $\varepsilon - N$ ”定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

2.(15分) 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \cdots + \sin^2 n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}, (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2^2} \cdot \cdots \cdot \sin \frac{x}{2^n}, x \in \mathbf{R}$$

3.(15分)求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) \cdot \arctan(x^2)}{\sin x \cdot (e^{3x} - 1)^2}, (2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a + a^x - 2a^a}{x - a} (a > 0).$$

4.(15分)设 $\{a_n\}$ 是非负数列, 满足 $a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

5.(15分)设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足方程 $f(x) = f(x^2)$,且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(1)$$

试证明: $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$.

6.(15分)用确界存在定理证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$,则存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f(\xi) = 0$.

这一页是草稿纸