

线性代数复习提纲

复习与考试的注意事项:

- 期末考试以计算题型为主, 因此务必保证自己计算的准确性与速度。
- 期中考试之后学习的内容(讲义第4章最后两节, 第五, 六, 七章)是期末考试考察的重点范围, 可优先复习这一部分。期中考试之前的内容会被间接考察, 比如行列式的计算可能会在一些题目中用到。
- 最后一节课所讲的最小二乘法的应用在考试出题范围内, 请务必掌握。
- 建议完成官方发布的复习题, 其中一些题型与期末考试内容关系很紧密。

1 讲义第四章: 向量空间

1. 一些重要的向量空间与子空间(subspace), 以及如何确定它们的基底(basis)与维数(dimension):

- 多项式空间 $P_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ 。

相关知识点:

(a) $\dim(P_n) = n + 1$

(b) 若多项式 $p(x) \in P_n$ 包含有多于 n 个不同的实数根, 即存在互不相等的实数 x_1, \dots, x_m , $m > n$, 使得 $p(x_i) = 0$ 对所有 $i = 1, \dots, m$ 成立, 那么 $p(x) = 0 \in P_n$, 即这样的 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 中的系数 a_0, a_1, \dots, a_n 必须都是 0, 也即 $p(x) = 0$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

代表性题目: 第六-七章自测题-选择题1-2-(D): 判断 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$ 是否是 P_2 上的一个内积。

(c) $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 是 P_n 的标准基底, 对于 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, 我们有 $p(x)$ 关于 S 的坐标向量(coordinate vector)

$$[p(x)]_S = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

- 各种矩阵空间, 比如 $V = M_{m \times n}$, $V = \{A \in M_{n \times n} : A^T = A\}$ (所有对称矩阵组成的子空间) 等等。

相关知识点:

(a) 知道一些常见矩阵空间的基底。比如 $M_{m \times n}$ 的标准基底(见讲义101页)。

练习：找出 $V = \{A \in M_{2 \times 2} : A^T = A\}$ 的一组基底。

答案： $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 组成了 V 的一组基底，因为显然 $A_1, A_2, A_3 \in V$ 线性无关，且任何对称矩阵 $A \in M_{2 \times 2}$ 都可以表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}(=a_{12}) & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}A_1 + a_{22}A_2 + a_{12}A_3.$$

练习：找出 $V = \{A \in M_{3 \times 3} : A^T = -A\}$ 的一组基底。

答案： $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 为 $V = \{A \in M_{3 \times 3} : A^T = -A\}$ 的一组基底。因为 $A^T = -A$ 要求 A 对角线上的项全是0，且 $a_{ij} = -a_{ji}$ 对任何 $i \neq j$ 成立，因此若 A 满足 $A^T = -A$ ，那么

$$A = a_{12}A_1 + a_{13}A_2 + a_{23}A_3.$$

代表性题目：期中考试第5题：验证 $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ 和 $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ 是 $M_{2 \times 2}$ 的子空间(vector subspaces)，并找出它们的基底。

- 两个子空间 $V, W \subset U$ 的交集 $V \cap W$ 是子空间；两个子空间 $V, W \subset U$ 的和 $V + W$ 是子空间。常见题型是确定 $V \cap W$ 与 $V + W$ 的基底。

代表性题目：2022–2023年期末延期考试题，见第7次作业Problem B: In P_2 , let

$$p_1(x) = 5 + 2x + 4x^2, p_2(x) = -3 + 2x + 2x^2, q_1(x) = 2 - x - 2x^2, q_2(x) = 2x + 5x^2.$$

Let $V = \text{span}\{p_1(x), p_2(x)\}, W = \text{span}\{q_1(x), q_2(x)\}$. Find a basis of $V \cap W$.

- 由某些给定的向量生成的向量空间：假设 V 是一个向量空间， $v_1, \dots, v_r \in V$ 生成的子空间为 $\text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \{k_1 v_1 + \dots + k_r v_r : k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}$ 。常见题型仍是确定这类向量空间的基底与维数。

代表性题目：2021–2022年期末考试题：In \mathbb{R}^3 , let $v_1 = (3, 1, 2), v_2 = (5, 3, 4), v_3 = (1, 1, 1), v_4 = (4, 2, 3)$, the dimension of $\dim(\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) =$ _____.

- 维数公式 $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$ ，其证明见讲义Theorem 4.39。当出现需要计算向量空间的维数并涉及到几个子空间的交集或者几个子空间的和的情况时，可优先尝试利用该公式。

代表性题目：第七次作业Bonus

代表性题目：2022–2023年期末延期考试题：Let V be a vector space and V_1, V_2, V_3 be three 2-dimensiononal subspace of V . Assume that $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$. Then the minimal possible dimension of V is ____.

答案： $\dim(V)$ 所可能取到的最小值为4。

由假设可知 $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 \cap V_3) = \dim(V_2 \cap V_3) = 0$ 。因此，连续使用以上维数公式可得

$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2 + V_3) &= \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_3) - \dim((V_1 + V_2) \cap V_3) \\ &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - \dim((V_1 + V_2) \cap V_3) \\ &= \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) - \dim((V_1 + V_2) \cap V_3).\end{aligned}$$

(注意，一般来说 $(V_1 + V_2) \cap V_3 \neq V_1 \cap V_3 + V_2 \cap V_3$)。此时注意， $(V_1 + V_2) \cap V_3 \subset V_3$ 是 V_3 的一个子空间，因此必然有 $\dim((V_1 + V_2) \cap V_3) \leq \dim(V_3)$ ，因此以上等式告诉我们

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) \geq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_3) = 2 + 2 = 4.$$

又由于 $V_1 + V_2 + V_3 \subset V$ 是 V 的一个子空间，因此又有

$$\dim(V) \geq \dim(V_1 + V_2 + V_3) \geq 4.$$

故我们可以合理猜测 $\dim(V)$ 能取得的最小值应该是4。此时为了验证该猜测，不妨令 $V = \mathbb{R}^4$ ，然后试图构造符合题目假设的 V_1, V_2, V_3 。以上分析其实暗示我们，要使得 $\dim(V) = 4$ ，必须同时满足 $\dim((V_1 + V_2) \cap V_3) = \dim(V_3)$ ，即 $(V_1 + V_2) \cap V_3 = V_3 \Rightarrow V_3 \subset V_1 + V_2$ ，与 $V_1 + V_2 + V_3 = V$ 。显然如果要是这两个条件同时满足，那么我们需要找到 $V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{R}^4$ 使得 $V_1 + V_2 = V = \mathbb{R}^4$ 同时 $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$ 。稍加思考可发现 $V_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\}$ ， $V_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ ， $V_3 = \text{span}\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, 1)\}$ 满足所有条件。故猜测成立。

2. 矩阵的秩(rank)，零化度(nullity)，行空间Row(A)(row space)，列空间Col(A)(column space)，零空间Null(A)(null space)的定义以及它们之间的关系，熟练掌握与秩和零化度相关的一些等式和不等式，并利用它们解题。

- $A \in M_{m \times n}$, $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$
- $A \in M_{m \times n}, B \in M_{m \times n}, \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, 见第四-五章自测题-选择题1-3-(A)
- $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}, \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$
- $A \in M_{m \times n}, \text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$; 实际上可以证明 $\text{Null}(A^T A) = \text{Null}(A)$ 以及 $\text{Row}(A^T A) = \text{Row}(A)$, 见讲义 **Theorem 4.38** (建议掌握该定理的证明), 注意该结论对任何 $A \in M_{m \times n}$ 都成立 (讲义 **Theorem 4.38** 只提到了 $A \in M_{n \times n}$ 的情况, 实际上该定理的证明对任何 $A \in M_{m \times n}$ 都有效。)

代表性题目: 2022-2023年期末考试题, 即第13次作业 **Problem B**。

- 英文教材 **Theorem 4.8.7**: 对任何 $A \in M_{m \times n}$, 都有 $\text{Null}(A) = \text{Row}(A)^\perp$, $\text{Row}(A) = \text{Null}(A)^\perp$, $\text{Null}(A^T) = \text{Col}(A)^\perp$, $\text{Col}(A) = \text{Null}(A^T)^\perp$ 。即 $\text{Row}(A)$ 与 $\text{Null}(A)$ 互为正交补(orthogonal complement), $\text{Col}(A)$ 与 $\text{Null}(A^T)$ 互为正交补。

3. 矩阵变换(matrix transformation)与矩阵变换的性质。对应讲义4.9-4.10节。

- 对于 $A \in M_{m \times n}$, 我们一直用 T_A 代表 A 诱导的矩阵变换, 即 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为满足 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 的线性变换。此时我们也用 $[T_A]$ 来指代 A , 即 $[T_A] = A$ 为矩阵变换 T_A 的标准矩阵(standard matrix)。注意: 任何 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的线性变换都是一个矩阵变换(讲义 **Theorem 4.45**), $T_A \circ T_B = T_{AB}$, $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个同构当且仅当 $A \in M_{n \times n}$ 可逆, 此时 $[T_A^{-1}] = A^{-1}$ 。
- $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 作为线性变换的一些重要相关概念: 值域(range), 核(kernel), 单射(one-to-one, injective), 满射(onto, surjective), 同构(isomorphism, bijective), 逆映射(inverse)。
- 时刻牢记 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 作为一个线性变换所满足的所有性质其实都是它的标准矩阵 A 作为矩阵所满足的性质。请掌握讲义 **Theorem 4.51**。

4. 同一个向量空间上不同基底之间转移矩阵(transition matrix)的计算。

请务必牢记: 如果 $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 与 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ 是 V 的两组基底, 那么它们之间的转移矩阵满足

$$P_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}'_1]_B & [\mathbf{u}'_2]_B & \dots & [\mathbf{u}'_n]_B \end{bmatrix}, [\mathbf{v}]_B = P_{B \leftarrow B'} [\mathbf{v}]_{B'};$$

$$P_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{B'} & [\mathbf{u}_2]_{B'} & \dots & [\mathbf{u}_n]_{B'} \end{bmatrix}, [\mathbf{v}]_{B'} = P_{B' \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B;$$

以及

$$P_{B \leftarrow B'} = P_{B' \leftarrow B}^{-1}.$$

代表性题目: 第四-五章自测题-填空题2-1, 第四-五章自测题-第3题, 2021-2022期末考试题即第7次作业 **Problem A**。

5. 请牢记以下等价关系，并能够灵活运用这些等价关系解题。

对于 $A \in M_{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 我们有

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解(consistent) } \iff \mathbf{b} \in \text{Col}(A) = \text{RAN}(A).$$

对于方阵 $A \in M_{n \times n}$, 以下说法等价:

- (a) A 可逆(invertible);
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解(trivial solution);
- (c) A 的简约阶梯型(reduced row echelon form)为单位矩阵 I_n ;
- (d) $A = E_r \dots E_1$ 可以表示为一组初等矩阵(elementary matrix)的乘积;
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任何 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 都有解(consistent);
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任何 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 都有且只有一组解;
- (g) $\det(A) \neq 0$;
- (h) A 的 n 个行向量(row vectors)线性无关(linearly independent);
- (i) A 的 n 个列向量(column vectors)线性无关(linearly independent);
- (j) A 的 n 个行向量张成整个空间 \mathbb{R}^n ;
- (k) A 的 n 个列向量张成整个空间 \mathbb{R}^n ;
- (l) A 的 n 个行向量组成 \mathbb{R}^n 的一组基底;
- (m) A 的 n 个列向量组成 \mathbb{R}^n 的一组基底;
- (n) $\text{rank}(A) = n$;
- (o) $\text{nullity}(A) = 0$;
- (p) $\text{Null}(A)^\perp = \mathbb{R}^n$;
- (q) $\text{Row}(A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$;
- (r) $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 是单射/一一映射(injective/one-to-one);
- (s) $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是满射(surjective/onto);
- (t) $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是同构(isomorphism);
- (u) $\lambda = 0$ 不是 A 的特征值(eigenvalue);
- (v) $A^\top A$ 可逆(注意, 证明这个等价关系需要用到 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\top A)$).

2 讲义第五章：线性变换

1. 线性变换需要满足的两个性质：

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}).$$

常见考点：在选择题中判断给定的几个函数是否是线性变换。

常见的解题方法：验证这些函数是否满足以上两个性质(可加性与齐次性)。注意一个函数 $T: V \rightarrow W$ 是线性变换的一个必要条件是 $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ ，即 T 必然要把 V 的零向量 $\mathbf{0}_V$ 映射到 W 的零向量 $\mathbf{0}_W$ 。因此，在判断 T 是否是线性变换时，可以首先快速验证 T 是否满足这条性质，若不满足则 T 必然不可能是线性变换；若满足这条性质，那么则需要继续验证 T 是否同时满足可加性与齐次性才能做出最后的判断。

例子：对于 $A \in M_{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，函数 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ 不是一个线性变换，因为 $T(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 。

例子：考虑对称矩阵 $A \in M_{n \times n}$ 对应的二次型(quadratic form) $Q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ 。尽管对于 $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 显然有 $Q_A(\mathbf{x}) = 0$ ，但注意到对于 $k \in \mathbb{R}$ 我们有

$$Q_A(k\mathbf{x}) = (k\mathbf{x})^\top A(k\mathbf{x}) = k^2(\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}) = k^2 Q_A(\mathbf{x}),$$

这有可能会产生 $Q_A(k\mathbf{x}) \neq kQ_A(\mathbf{x})$ ，故二次型 $Q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 一般来说不是一个线性变换。

2. 线性变换 $T: V \rightarrow W$ 的核(kernel)，值域(range)，单射(injective/one-to-one)，满射(surjective/onto)，同构(bijective/isomorphism)，逆映射 T^{-1} 的定义。
3. 熟练掌握如何在给定基底的情况下计算线性变换的矩阵表示：即，对于线性变换 $T: V \rightarrow W$ ，给定 V 的一组基底 $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ，给定 W 的一组基底 $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ ，那么 T 关于 B 与 B' 的矩阵表示为

$$[T]_{B', B} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{v}_1)]_{B'} & [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} & \dots & [T(\mathbf{v}_n)]_{B'} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}.$$

牢记线性变换 $T: V \rightarrow W$ 与它的矩阵表示 $A = [T]_{B', B}$ 所诱导的矩阵变换 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 之间的关系为下图所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v} \in V & \xrightarrow{T} & T(\mathbf{v}) \in W \\ \downarrow f_B & & \downarrow g_{B'} \\ ([\mathbf{v}]_B \in \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{T_A} & ([T(\mathbf{v})]_{B'} \in \mathbb{R}^m) \end{array}$$

即 $[T(\mathbf{v})]_{B'} = [T]_{B',B}[\mathbf{v}]_B$ 对任何 $\mathbf{v} \in V$ 成立。注意这里 $f_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n, f_B(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$ 为 V 关于基底 $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 的坐标向量映射，它是一个同构，它的逆映射为

$$f_B^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow V, \quad f_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

牢记：线性变换 T 的所有性质都体现在它的矩阵表示 $[T]_{B',B}$ 上。请务必掌握讲义Theorem 5.17的内容。

练习：2021–2022期末考试填空题： The linear transformation $T : P_2 \rightarrow P_3$ is defined by $T(p(x)) = xp(2x+1) - 2xp(x)$ for any $p(x) \in P_2$. Then $\text{rank}(T) = \underline{\hspace{1cm}}$, $\text{nullity}(T) = \underline{\hspace{1cm}}$.

答案： 令 $B = \{1, x, x^2\}$ 为 P_2 的标准基底， $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ 为 P_3 的标准基底，计算出 $[T]_{B',B}$ 的rank和nullity即可。

常见题型：判断一个给定的线性变换 $T : V \rightarrow W$ 是否是单射/满射/同构(等价于判断 T 的逆映射是否存在)。注意可通过研究 T 的矩阵表示 $[T]_{B',B}$ 来进行以上判断，比如 $T : V \rightarrow W$ 是同构当且仅当它的矩阵表示 $[T]_{B',B} \in M_{n \times n}$ 为可逆矩阵。强烈建议大家仔细阅读英文教材8.2节的所有例子，这些例子展示了很多经典的单射/满射/同构的线性映射，记住这些例子会很有帮助。

此外，熟练掌握计算线性变换复合(composition of linear transformations) $T_1 \circ T_2$ 的矩阵表示(讲义Theorem 5.15)与同构 T 的逆映射 T^{-1} 的矩阵表示(讲义Theorem 5.17–(4), Theorem 5.18)。

代表性题目：第10次作业 Problem A, B, 第10次作业Problem D, 第11次作业 Problem A, B, C–(1),(2), 第四–五章自测题第4题。

4. 相似矩阵与相似不变量。

(a) 牢记：对于线性变换 $T : V \rightarrow V$ ， B, B' 为 V 上的两组基底，那么 $[T]_{B,B}$ 与 $[T]_{B',B'}$ 相似，见讲义Theorem 5.20：

$$[T]_{B',B'} = P_{B' \leftarrow B} [T]_{B,B} P_{B \leftarrow B'}.$$

代表性题目：第11次作业 Problem C–(3), 第四–五章自测题第5题。

(b) 以下指标均为相似不变量:

- A 与 B 相似, 则 $\det(A) = \det(B)$;
- A 与 B 相似, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$;
- A 与 B 相似, 则 $\text{nullity}(A) = \text{nullity}(B)$;
- A 与 B 相似, 若 A 可逆, 则 B 可逆;
- A 与 B 相似, 则 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$;
- A 与 B 相似, 则 A 与 B 有相同的特征多项式(characteristic polynomial);
- A 与 B 相似, 则 A 与 B 有相同的特征值(eigenvalue);
- A 与 B 相似, 那么任何 A 与 B 的特征值 λ 的特征空间(eigenspace)的维数相同: $\dim(\text{Null}(\lambda I - A)) = \dim(\text{Null}(\lambda I - B))$ 。

注意: 特征向量(eigenvector)不是相似不变量!

此外, 牢记相似关系的几个重要性质, 见讲义161–162页。

- A 与 B 相似, 则 A^\top 与 B^\top 相似;
- A 与 B 相似, 则 A^{-1} 与 B^{-1} 相似;
- A 与 B 相似, 则对于任何多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似。

常见题型: 假设两个矩阵 A 与 B 相似, A 或/和 B 中含有待定参数, 利用相似不变量求出这些参数。

代表性题目: 2022–2023期末延期考试题即讲义163页上的例子; 第六–七章自测题第3题; 第六–七章自测题填空题2–3。

3 讲义第六章: 特征值与特征向量

1. 特征值(eigenvalue), 特征向量(eigenvector), 特征多项式(characteristic polynomial), 特征空间(eigenspace)的定义, 熟练掌握如何求出矩阵的特征多项式与特征值。

常见题型: 给定矩阵 A 的特征值与一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, 求 $f(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_mA^m$ 的特征值或 $f(A^{-1})$ 的特征值。这一类题目的解题方法见讲义Theorem 6.7。

代表性题目: 讲义166页–167页的例子(南京大学期中考试题); 第11次作业 Problem E。

练习：2022–2023期末考试填空题

Let $A, B \in M_{3 \times 3}$ be two matrices that are similar to each other. Suppose that the eigenvalues of A are 2, 3, 5. Then $\det(2B - 3I) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案： 已知 A 的特征值为 2, 3, 5, 且 A 与 B 相似, 因此首先利用相似矩阵有相同的特征值这一事实, 可以确定 B 的特征值也为 2, 3, 5。因此, 对于多项式 $f(x) = 2x - 3$, 利用讲义Theorem 6.7–(3)可知, $2B - 3I = f(B)$ 的特征值为 $f(2) = 1, f(3) = 3, f(5) = 7$ 。

现在注意到作为 3×3 矩阵的 $2B - 3I$ 拥有三个不同的特征值, 因此由讲义Theorem 6.15可知, 矩阵 B 必然可对角化, 特别地, $2B - 3I$ 与对角矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 7 \end{bmatrix}$ 相似。因此, 利用行列式是相似不变量的事实, 可得最后答案为

$$\det(2B - 3I) = \det(D) = 1 \times 3 \times 7 = 21.$$

2. 矩阵 $A \in M_{n \times n}$ 能够对角化的充要条件, 以及将给定矩阵对角化的计算方法。

- 牢记特征值 λ 的代数重数(algebraic multiplicity)与几何重数(geometric multiplicity)的定义。
- $A \in M_{n \times n}$ 可以被对角化当且仅当存在 A 的 n 个特征向量组成 \mathbb{R}^n 的一组基底。
- $A \in M_{n \times n}$ 可以被对角化当且仅当它所有特征值都是实数, 且每个特征值的几何重数与代数重数都相等。
- 如果 $A \in M_{n \times n}$ 有 n 个不同的特征值, 那么 A 可以对角化, 反之不成立。
- 对角化 $D = P^{-1}AP$ 中出现的对角矩阵 D 与可逆矩阵 P 的具体构造(比如 D 对角线上全部是 A 的特征值, P 的列向量全部是 A 的特征向量), 建议掌握讲义Theorem 6.13的证明过程。
- 将一个矩阵对角化的计算过程需要熟练掌握, 见讲义175页。

常见题型1：判断并计算一个矩阵的对角化。

代表性题目：第12次作业 Problem A。

常见题型2：给定矩阵的特征多项式, 确定其特征值以及特征值的代数重数与可能的几何重数。

练习：英文教材5.2节311页课后习题第15–16题。

常见题型3：通过矩阵的特征值与特征向量反推矩阵的表示或者求出矩阵的

一些特殊指标。

代表性题目：2022–2023期末延期考试题即第12次作业 Problem C。

练习：假设 $A \in M_{3 \times 3}$ 的特征值为 1, 2, 3。求 $\text{rank}(A)$, $\text{tr}(A)$ 以及 $\det(A)$ 。

答案：由于 A 作为 3 阶方阵，具有三个不同的特征值，因此 A 必然可被对角化，且 A 与对角矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$ 相似。因为 rank , tr 与 \det 均为相似不变量，我们立刻可以得到答案为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(D) = 3$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(D) = 1 + 2 + 3 = 6$, $\det(A) = \det(D) = 1 \times 2 \times 3 = 6$ 。

常见题型4：通过矩阵的对角化计算原矩阵的高次幂。

代表性题目：2021–2022期末考试题：Let $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Find A^{2022} .

答案：注意该矩阵 A 为对称矩阵故一定可以对角化(实际上是正交对角化)。因此只需求出可逆矩阵 P 与对角矩阵 D 使得 $D = P^{-1}AP$ ，然后将 A 表示为 $A = PDP^{-1}$ ，再计算 $(PDP^{-1})^{2022} = PD^{2022}P^{-1}$ 即可得到 A^{2022} 。注意计算对角矩阵 D 的高次幂只需计算其对角线上每一项的高次幂即可。

练习：英文教材 5.2 节 311 页课后习题第 17–20 题。

3. 线性变换的特征值与特征向量。注意 T 的特征值与特征向量都可以通过它的矩阵表示 $[T]_{B,B}$ 来计算，见第 11 次作业 Problem D。

4 讲义第七章：正交矩阵，内积空间，二次型与两种矩阵分解

1. 正交矩阵(orthogonal matrix)。

- 正交矩阵的原始定义与等价定义，建议牢记讲义 Theorem 7.4 并会灵活应用这些条件解题。

代表性题目：2022–2023 期末考试题即第六–七章自测题第 6 题。在该题目里，矩阵 A 具有的特点是 $\|Ax\| = 1$ 对任何满足 $\|x\| = 1$ 的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。经过分析，可以发现这个性质等价于 A 是一个正交矩阵(因为利用这个性质可以证明 $\|Ax\| = \|x\|$ 对任何 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立)。再利用正交矩阵的 n 个列向量为 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基底即可将该题目解出。也就是说这

道题目实际上同时考察了成为正交矩阵的两个等价条件。具体细节见第六-七章自测题的参考答案。

2. 内积(inner product)的性质，掌握如何验证一个函数是否是一个内积。注意，通常来说内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 所需要的对称性，可加性以及 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ 都容易验证，难点集中验证在是否满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \in V$ 。

代表性题目：第六-七章自测题选择题1-2，讲义187页的例子(2021-2022期末考试题)，第12次作业 Problem D。

可阅读英文教材6.1节的一些内积的经典例子。

3. 内积空间上由内积诱导出的范数(norm)，距离(distance)，夹角(angle)的计算。这些概念见讲义185页。

代表性题目：2021-2022期末考试填空题：The inner product on $M_{2 \times 2}$ is given by

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$$

Let $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. The distance between C and D is $d(C, D) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案：计算 $\sqrt{\langle C - D, C - D \rangle} = \sqrt{\text{tr}((C - D)^T (C - D))}$ 即可。

4. 内积空间里正交集(orthogonal set)，正交规范集(orthonormal set)，正交基底(orthogonal basis)，标准正交基底(orthonormal basis)的定义与相关计算。建议掌握讲义Theorem 7.14的内容。

代表性题目：2021-2022期末考试填空题：Let $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be an inner product space, and $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ be an orthonormal set of V . Then the norm $\|5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3\| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案：利用 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是正交集的假设，利用勾股定理(见英文教材Theorem 6.2.3)可得

$$\|5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3\|^2 = 5^2\|\mathbf{v}_1\|^2 + (-2)^2\|\mathbf{v}_2\|^2 + 3^2\|\mathbf{v}_3\|^2 = 25 + 4 + 9 = 38.$$

因此答案为 $\|5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3\| = \sqrt{38}$.

5. 内积空间里的正交投影定理，即讲义Theorem 7.15，熟练掌握如何计算内积

空间里某个向量 \mathbf{u} 在某个子空间 $W \subset V$ 的正交投影 $\text{proj}_W(\mathbf{u})$ 的方法。完全掌握如何用Gram-Schmidt算法得到一组标准正交基底。

- 如果 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 为 W 的一组正交基底, 那么对任何 $\mathbf{u} \in V$, 都有

$$\text{proj}_W(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2} \mathbf{v}_r.$$

如果 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 为 W 的一组标准正交基底, 那么对任何 $\mathbf{u} \in V$, 都有

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r.$$

- 令 W^\perp 为 W 的正交补(orthogonal complement), 即 $W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$ 。那么任何 $\mathbf{u} \in V$ 都可以被唯一分解为

$$\mathbf{u} = \underbrace{\text{proj}_W(\mathbf{u})}_{\in W} + \underbrace{\text{proj}_{W^\perp}(\mathbf{u})}_{\in W^\perp}.$$

注意, $\mathbf{u} \in W^\perp \iff \text{proj}_W(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ 。

- 以上正交分解告诉我们, $V = W + W^\perp$, 同时, 由于 $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$, 由维数定理可知 $\dim(V) = \dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$ 。因此, 如果 $S = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ 是 W 的一组标准正交基底, $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 是 W^\perp 的一组标准正交基底, 那么 $S \cup M = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 组成 V 的一组标准正交基底。
- Gram-Schmidt算法的两个版本: 见讲义190–191页。

代表性题目: 2022–2023期末考试题即第12次作业 Problem E, 第六–第七章自测题第4题。

6. 对称矩阵的正交对角化。 $D = P^\top A P$

- 注意, 在求出对称矩阵 A 关于每个特征值 λ 的特征空间 $V_\lambda = \text{Null}(\lambda I - A)$ 的一组基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ 之后, 我们使用Gram-Schmidt算法将其转化为 V_λ 的一组标准正交基底 $S' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 。所有特征空间的标准正交基底共同组成正交矩阵 P 的列向量。

对称矩阵正交对角化计算的练习: 英文教材7.2节416页课后习题7–12题。

- 注意, 对称矩阵不同特征值的特征空间彼此正交, 见讲义Theorem 7.10.

代表性题目：2021–2022期末考试题：Let $A \in M_{3 \times 3}$ be a symmetric matrix such that

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and $\text{rank}(A) = 2$. Find all eigenvalues of A and for each eigenvalue, find an eigenvector.

答案：由假设显然可以看出 A 的一个特征值为 -2 ，对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，

另一个特征值为 1 ，对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。又因为 $\text{rank}(A) = 2$ ，可

知 A 的最后一个特征值为 0 (如果 0 不是 A 的特征值，那么由复习材料第5页关于矩阵可逆的等价条件(u)可知此时有 $\text{rank}(A) = 3$ ，与假设 $\text{rank}(A) = 2$ 矛盾)。又因为对称矩阵不同特征空间之间互相正交，可知 A 关于 0 的特

征空间为 $W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 的正交补 W^\perp 。因此计算叉乘 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 即可得到 A 关于 0 的一个特征向量。

- 注意：对于任何二次型 Q_A ，它的orthogonal change of variable里出现的换元 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 里的正交矩阵 P 就是对称矩阵 A 的正交对角化 $D = P^T A P$ 里出现的同款正交矩阵 P 。因此对称矩阵的正交对角化通常会在二次型的orthogonal change of variable中被考察。

7. 二次型(quadratic form)的相关性质与计算。

- 常见题型：给定一个二次型的表达式 $f(x_1, \dots, x_n)$ ，求出对应的对称矩阵 A 使得 $f(x_1, \dots, x_n) = Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 。

代表性题目：第六–七章自测题第5题-(a)，第13次作业Problem C-(1)。

- 常见题型：给定一个二次型 Q_A ，求对应的orthogonal change of variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 使得 $Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。这里 $D = P^T A P$ 是对称矩阵 A 的对角化； $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 D 对角线上的元素，注意它们全部为 A 的特征值。

代表性题目：第六–七章自测题第5题-(b)，第13次作业Problem C-(2)。

- 常见题型：给定一个二次型 Q_A ，判断它的positive definite, negative definite等指标。请熟练掌握讲义Theorem 7.19和Theorem 7.21的内容。

代表性题目：第六–七章自测题第5题-(c)，第13次作业Problem C-(3)。

8. 矩阵的QR分解。

- 注意 $A \in M_{m \times n}$ 可以被QR分解的前提是 $\text{rank}(A) = n$ ，即 A 的 n 个列向量线性无关。
- 请务必牢记 $A = QR$ 中出现的正交矩阵 Q 与上三角可逆矩阵 R 的具体构造，以及熟练掌握如何计算一个具体矩阵的QR分解。注意 Q 的计算实际上对应将 A 的 n 个列向量使用Gram–Schmidt算法化为列空间的一组标准正交基底。

练习：英文教材6.3节习题378页第49题。

9. 矩阵的奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)。

- 奇异值(singular value)的定义，见讲义Definition 7.25。注意奇异值 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \geq \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$ 需要从大到小排列，且这里 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ 是对称矩阵 $A^T A$ 的特征值(而非 A 的！)

除此之外，注意这一知识点： $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) = k \iff \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0, \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0 \iff \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0, \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_n = 0$ 。

练习：假设 $A \in M_{3 \times 2}$ 的奇异值为2, 1。那么以下说法正确的是：

- (A) $\text{rank}(A) = 2$ 。
- (B) $\text{rank}(A^T A)$ 的特征值为4和1。
- (C) $\text{rank}(A^T A)$ 的行列式为2。
- (D) A 的奇异值分解 $A = U \Sigma V^T$ 里出现的对角矩阵 Σ 的对角线上的元素为2和1。

- 熟练掌握如何计算一个给定矩阵的奇异值分解。见讲义206–210页的内容。

练习：英文教材9.4节习题520页第11–12题。

注意：在计算奇异值分解中出现的矩阵 U 时，通常需要计算 \mathbb{R}^m 空间里的子空间 $W \subset \mathbb{R}^m$ 的正交补 W^\perp 的一组标准正交基底。

练习：令 $W = \text{span}\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 3, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$ ，求 W^\perp 的一组标准正交基底。

10. 最小二乘法(Least Squares)的计算。

- 给定矩阵 $A \in M_{m \times n}$ 与列向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ，最小二乘法的目的是求出“最优解” $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

对任何 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 成立。其具体求解过程见第13次作业Problem E。

- 牢记最优解 \mathbf{x} 满足 normal system

$$(A^\top A)\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}.$$

- **具体应用**：假设某个实验的结果 y 与某个影响实验结果的因素 x 近似满足关系

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

假设我们现在观测到一组实验数据 (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ ，即 y_i 为第 i 次试验中将因素 x 设定为 x_i 时所得到的实验结果。那么 we 想利用这些数据，找到能够最准确描述 y 与 x 之间关系的系数 (a_0, a_1, \dots, a_n) 。注意，**这里我们已知的是实验数据 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ ，未知的是系数 (a_0, \dots, a_n) 。**

这里我们使用的判断“最准确”的依据是系数 a_0, \dots, a_n 必须使得实验数据与待定模型 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 的关于欧式范数平方的总误差最小，即如果 $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是最准确的，那么对任何其他系数 $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ，总有

$$\sum_{i=1}^m |y_i - (b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \dots + b_nx_i^n)|^2 \geq \sum_{i=1}^m |y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n)|^2$$

由于 $\sum_{i=1}^m |y_i - (b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \dots + b_nx_i^n)|^2 = \|A\mathbf{v} - \mathbf{b}\|^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

以上应用问题实际上转化为找到向量 $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 使得

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{v}\|^2 \geq \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{w}\|^2.$$

因此能够最准确反映 y 与 x 关系的系数 $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 是以下 normal system 的

解:

$$(A^\top A)\boldsymbol{w} = A^\top \boldsymbol{b}.$$

练习：官方复习题第3页的最后一道题目与第4页上的第一道题目。