

姓名:

学号:

学院和年级:

上海科技大学

2022-2023 学年第一学期本科生期末考试卷

开课单位:

授课教师: 陈浩, 李铮, 赵俐俐, 朱佐农

考试科目: 《高等数学 I》

课程代码:

考生须知:

1. 请严格遵守考场纪律, 禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生, 除携带必要考试用具外, 书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生, 可以携带教师指定的材料独立完成考试, 但不准相互讨论, 不准交换材料。

考试成绩录入表:

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名:

复核人签名:

日期:

日期:

一、 单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 曲线 $y = x \arctan x + \frac{1}{x}$ 的渐近线的条数为 ()
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
2. 若函数 $f(x)$ 二阶连续可导, 满足 $f'(x) + f^2(x) = e^{\sin x}$, 且 $f(0) = 1$, 则 ()
- (A) $f(0)$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极大值.
- (C) $f(0)$ 不是极值. (D) 无法判断 $f(0)$ 是否是极值.
3. 若 $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$, $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{|x| - 1}{e^x + 1} dx$, $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1 - |x|}{e^x + 1} dx$, 则 ()
- (A) $I_3 < I_2 < I_1$. (B) $I_1 < I_2 < I_3$. (C) $I_3 < I_1 < I_2$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.
4. 下列反常积分中, 收敛的是 ()
- (A) $\int_1^{+\infty} \sin x dx$. (B) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. (C) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$. (D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.
5. 对于以下两个命题:
- ① 若在区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 f 满足: $|f(x)| \leq x^2$, $f''(x) > 0$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$;
- ② 若 \mathbf{R} 上的单调函数 f 有原函数, 则对于任意取定的常数 a 和 b , 必存在 $\xi \in \mathbf{R}$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$,
- 下述选项正确的是 ()
- (A) ①和②都正确. (B) ①和②都错误.
- (C) ①正确, ②错误. (D) ①错误, ②正确.

二、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 函数 $y = x + 2 \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为_____.
7. 函数 $f(x) = (x^2 - 2x)e^{2x}$ 的上凸区间是_____.

8. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} + \frac{\sqrt{2n}}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2}}{n^2+n} \right) =$ _____.

9. 微分方程 $e^y \cdot y' + 2e^y = e^{-2x}$ 的通解为 _____.

10. 曲线 $y = e^{-\sqrt{x}}$ 、坐标轴以及直线 $x = a$ ($a > 0$) 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积记为 $V(a)$ ，则极限 $\lim_{a \rightarrow +\infty} V(a) =$ _____.

三、导数计算题 (本题 10 分)

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_x^{3x} e^{t^2} dt}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导. (1) 求 a 的值; (2) 求 $f'(0)$.

四、积分计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

12. 计算不定积分 $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$.

13. 计算定积分 $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx$.

14. 计算反常积分 $\int_0^1 x \ln(1-x) dx$.

五、应用题 (每题 8 分, 共 16 分)

15. 设 D 是由抛物线 $y = 2x(2-x)$ 与 x 轴所围的平面图形, 直线 $y = kx$ 将 D 分为面积相等的两部分, 求 k 的值.

16. 设平面光滑曲线过点 $(1, 0)$, 且其上任意一点处的切线在 y 轴上的截距与该点处法线在 x 轴上的截距相等, 求该曲线方程.

六、作图题 (本题共 12 分)

17. 全面讨论函数 $y = \frac{x^3-2}{2(x-1)^2}$ 性态, 并列表作图.

(已知 $y' = \frac{(x+1)(x-2)^2}{2(x-1)^3}$, $y'' = \frac{3(x-2)}{(x-1)^4}$)

七、证明题 (本题共 8 分)

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 连续可导, 且 $f(1) = f(3) = 0$. 证明:

$$\left| \int_1^3 f(x) dx \right| \leq \max_{1 \leq x \leq 3} |f'(x)|.$$