1. 填空题（每小题6分，共42分）

(1) 定积分

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$$

的值为 ________.

(2) 无穷级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}$$

的值为 ________.

(3) 定义数列 $L_n=\int_0^1\sqrt{1+(nx^{n-1})^2}dx$, 其中 n 为正整数. 则数列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限为 ________.

(4) 函数列 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的极限函数是 ________. 该函数列在 $\mathbb{R}$ 上 ________ 收敛(填“一致”或“不一致”).

(5) 设

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,\quad K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx.$$

则 M,N,K 的大小顺序是 ________.

(6) 请举出一个函数 $f(x)$, 其在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积但不存在原函数.

$$f(x)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

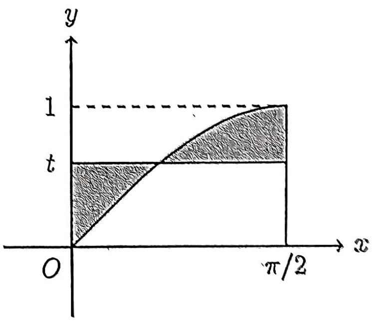
(7) 请举出一个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散

$$a_n=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

请举出一个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

$$b_n=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

2. (12 分) 设曲线 $y=\sin x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 与直线 $x=0$, 直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 以及直线 $y=t(0\le t\le 1)$ 所围成的部分的面积为 $S(t)$. 求函数 $S(t)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.



3. (10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $(-1,1)$ 上的函数，定义如下

$$f(x) = \int_{-1}^{x} e^{3xt^2} dt$$

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在任意阶导数. 求 $f^{(4)}(0)$.

4. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的函数, 满足在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上二次可导, 且 $f(x)>0$ 对所有 $x\in[0,+\infty)$ 都成立.

(1) (5 分) 假设存在常数 $L>0$ 使得 $|f'(x)|<L$ 对于所有 $x\in(0,+\infty)$ 都成立. 证明

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \geq \frac{1}{2L}\cdot f(0)^2.$$

(2) (5 分) 假设 $|f''(x)|<K$ 对所有$x\in(0,+\infty)$ 都成立. 证明: 存在只依赖于 K 而不依赖于 $f(x)$ 的常数 $C>0$, 使得

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \geq C\cdot f(0)^{\frac{3}{2}}.$$

5. 设 $A\in\mathbb{R}$. 设 $f(x),g(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续函数，满足

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M}\int_1^M g(x)dx=A.$$

(1) (5 分) 证明

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{\ln M}\int_1^M \frac{f(x)}{x}dx=A.$$

(2) (7 分) 证明

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{\ln M}\int_1^M \frac{g(x)}{x}dx=A.$$

6. 考虑函数项级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-nx}}{1+n^2},$$

设其收敛点集为 D. 换言之,

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\text{数项级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\ \text{收敛}\right\}.$$

(1) (4 分) 求集合 D.

(2) (5 分) 判断函数项级数 $f(x)$ 在 D 上的一致收敛性, 并说明理由.

(3) (5 分) 证明 $f(x)$ 在 D 上连续.