高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第三章　导数与微分

我们已经利用极限研究了函数的变化趋势和连续性，为了进一步了解函数的各种性态，我们运用极限来研究函数变量变化的快慢程度，这即是微分学中的重要概念----导数与微分。

导数与微分是解决函数性态等问题的重要工具。

本章先引入导数的概念，进一步学习导数的各种计算方法。

3.1 导数的概念

3.1.1 导数的定义

1. 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数，记作：$f'(x_0)$，

即：$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

导数也可记作： $f'(x)\big|_{x=x_0}, y'\big|_{x=x_0}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}, \dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x}\bigg|_{x=x_0}$

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，反之，称为不可导。

- 导数的等价定义： $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

【例题1】求函数 $f(x)=x^3$ 在 $x_0=1$ 处的导数。

解： $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3,$

或 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$。

【例题2】设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(\alpha\neq 0)$。

解：原式$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)}{\alpha\Delta x}\cdot\alpha=\alpha\cdot f'(x_0)$。

【例题3】设极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-2x)-f(1)}{x^2+2x-3}=2$，求 $f'(1)$。

解：由极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-2x)-f(1)}{x^2+2x-3}=2$，知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f[1-2(x-1)]-f(1)}{x-1}=8$，

由【例题2】可得 $-2f'(1)=8$，故 $f'(1)=-4$。

【例题4】设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0+\beta\Delta x)}{\Delta x}$。

解：原式$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+\beta\Delta x)}{\Delta x}=(\alpha-\beta)\cdot f'(x_0)$

问题：如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0+\beta\Delta x)}{\Delta x}$ 存在，能否得到

$f'(x_0)$ 存在?

【例题5】设 $f(x)$ 对任意的 x_1,x_2 有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且

$f'(1)=1$，证明：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$。

证明：$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x\cdot(1+\frac{1}{x}\Delta x)]-f(x\cdot 1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{1}{x}\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot f'(1)=\frac{1}{x}。$$

证毕。

2. 左、右导数

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数存在，记作：$f'_-(x_0)$，

或：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数存在，记作：$f'_+(x_0)$，

或：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

- 定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是：

  函数 $f(x)$在点 x_0 左、右导数均存在且相等。

【例题6】考虑函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ \sin 2x+1, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否可导?

解：由于 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$,

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x+1-1}{x}=2$,

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$。

【例题7】讨论函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性及可导性。

解：由于 $|\Delta y|=|\Delta x|$，所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；

而 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$，

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导。

3.1.2 导数与连续的关系

可导 $\Rightarrow$ 连续， 连续 $\not\Rightarrow$ 可导

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，

此时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=0$，故函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

由于函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ \sin 2x, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处不连续，

所以在点 $x=0$ 处不可导。

【例题8】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ a+bx, & x\ge 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导，求常数 a,b 的值。

解：函数可导一定连续，故先考虑连续性，

由于 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx)=a$，

而 $f(0)=a$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时，$a=\dfrac{1}{2}$；

【例题8】解(续):

下面考虑可导性，注意：$a=\frac{1}{2}$,

由于 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2(1-\sqrt{1-x})-x}{2x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2-x)^2-4(1-x)}{2x^2\cdot[(2-x)+2\sqrt{1-x}]}=\frac{1}{8},$$

而 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a+bx-a}{x}=b$,

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导时，$b=\frac{1}{8}$。

【例题9】设函数 $f(x)$ 可导，$F(x)=(e^x+|\sin 2x|)\cdot f(x)$，则 $f(0)=0$ 是$F(x)$在点 $x=0$ 处可导的(　　)条件。

(A) 充分必要；(B) 充分非必要；(C) 必要非充分；

(D) 非充分非必要。

解：$F(0^+)=f(0^+)=f(0)=F(0),F(0^-)=f(0^-)=f(0)=F(0)$，$F(x)$ 连续，

由于函数 $f(x)$ 可导，则一定连续，所以有

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)\cdot f(x)+[f(x)-f(0)]+\sin 2x\cdot f(x)}{x}$$

$$=f(0)+f'_+(0)+2f(0)=f'(0)+3f(0),$$

【例题9】解(续):

同理

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^x-1)\cdot f(x)+[f(x)-f(0)]-\sin 2x\cdot f(x)}{x}$$

$$=f(0)+f'_-(0)-2f(0)=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=F'_-(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

所以 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充分必要条件，

应选 (A) 。

3.1.3 可导函数

- **导函数** 如果函数 $f(x)$ 在任意点 x 处可导，即

  $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f'(x)$ 是

  $f(x)$ 的导函数，简称导数。

【例题10】设函数 $f(x)=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$，求导函数 $f'(x)$。

解：
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{1}{x}\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x\cdot\ln a}=\frac{1}{x\ln a}\text{。}$$

【例题11】求函数 $f(x)=x^{\alpha}\,(x>0,\alpha\in\mathrm{R})$ 的导数。

解：由于 $\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=x^{\alpha}\cdot[(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1]$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x}$

所以 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha}\cdot\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha\cdot\frac{1}{x}\Delta x}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}。$$

- **开区间上的可导函数**

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b)上可导，或称函数 $f(x)$ 为 (a,b) 上的可导函数，记作：$f\in D(a,b)$。

- **闭区间上的可导函数**

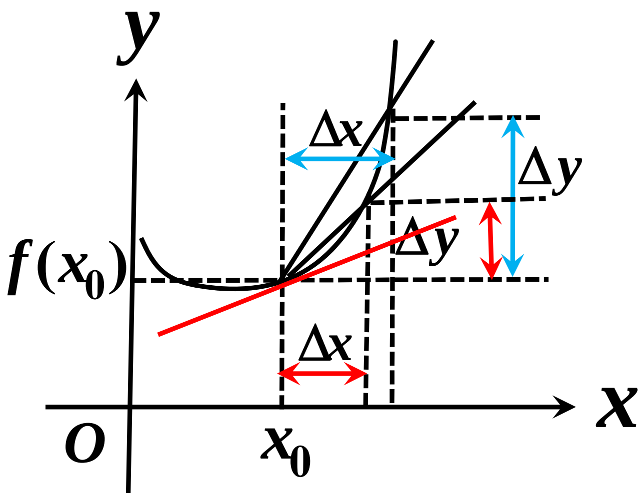
如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导，且在 $x=a$ 处右导数存在，在 $x=b$ 处左导数存在，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，或称函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可导函数，记作：$f\in D[a,b]$。

3.1.4 导数的几何意义与物理意义

1. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



注意：切线为割线的极限。

【例题12】求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(4,2)$ 的切线方程和法线方程。

解：由于 $f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$，

所以，切线方程为：$y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$，

法线方程为：$y-2=-4(x-4)$。

注：曲线的法线与曲线的切线经过同一点且相互垂直，

即斜率满足关系：$k_1=-\dfrac{1}{k}$。

2. 导数的物理意义

- 直线运动的速度即为路程对时间的导数

【例题13】一个物体从$400m$的高空下落，它下落时刻

t（单位：s）时距地面的高度是：$h=-16t^2+400(m)$，

(1) 求在前$4s$内物体下落的平均速度；

(2) 求在第$4s$时物体下落的瞬时速度。

解：平均速度：$\bar{v}=\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\dfrac{-16\cdot 4^2}{4}=-64\,(m/s)$，

瞬时速度：

$$v_t=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4}=\lim_{t\to 4}\frac{-16\cdot(t^2-4^2)}{t-4}=-128\,(m/s)。$$

2. 导数的物理意义

- 质线的密度即为质量对长度的导数
- 函数的导数是函数对自变量的变化率

【例题14】一个直圆锥体因受热膨胀，在膨胀过程中，其高与底的直径保持相等(单位：cm)，求半径为5cm时，体积关于半径的变化率。

解：设半径为 r，则体积为：$V=\dfrac{\pi r^2}{3}\cdot h=\dfrac{\pi r^2}{3}\cdot 2r=\dfrac{2\pi r^3}{3}$，

体积关于半径的变化率：$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=5}=\lim\limits_{r\to 5}\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}\cdot(r^3-5^3)}{r-5}=50\pi$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！