

高等数学 (I)

李铮

高等数学

主讲教师：李铮





上一次课程内容回顾

高等数学 李铮



4.2 洛必达 (L'Hospital) 法则

在第二章中我们学习了极限的定义（包括数列极限的“ $\varepsilon-N$ ”定义和函数极限的“ $\varepsilon-X$ ”，“ $\varepsilon-\delta$ ”定义）、极限存在准则、两个重要极限、无穷小的定义、性质、比较等，求极限主要方法：极限运算法则、重要极限、等价无穷小的代换等。

对于不定型“ $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ ”的极限主要通过消去无穷因子或消去零因子的方法解决。但是，如果遇到求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ，我们仍然无法解决，这一节我们将介绍利用导函数来求极限的方法。

4.2 洛必达法则



4.2.1. 不定型 “ $\frac{0}{0}$ ” 的定值法

定理4.2.1 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内有定义, 如果

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

$$(2) f(x), g(x) \text{ 在 } \overset{0}{U}(x_0) \text{ 内可导, 且 } g'(x) \neq 0,$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, A \text{ 为常数 (或为 } \infty \text{) ,}$$

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A。$

这样求极限的方法称为洛必达 (L'Hospital) 法则。

4.2 洛必达法则



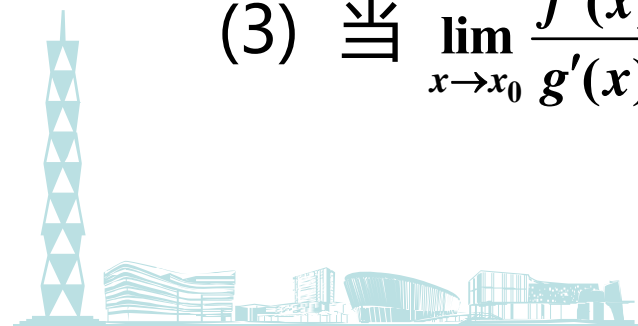
注意: (1) 应用定理4.2.1求极限时, 必须是不定型 “ $\frac{0}{0}$ ”,

(2) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大时, 不能说明

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

例如, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x} = 0$, 而极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\sec^2 x} \frac{x}{x}$ 不存在。

(3) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然是不定型时, 可继续使用洛必达法则。



4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 。

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$ 。

【例题2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \tan x}$ 。

解:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \sec^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = -1。 \end{aligned}$$



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

回顾:

极限运算法则的变化:

(1) 当 $\lim v = b$ 时, 有 $\lim(u \pm v) = \lim u \pm b$;

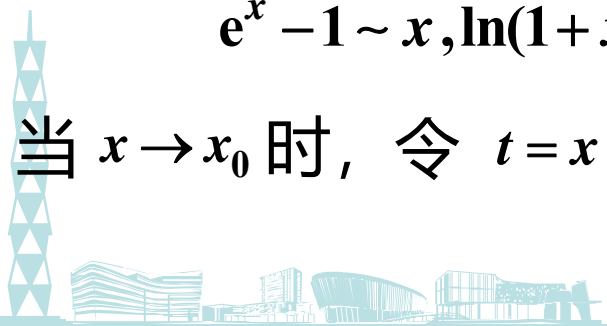
(2) 当 $\lim v = c \neq 0$ 时, 有 $\lim(u \cdot v) = c \cdot \lim u$ 。

常用的等价无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x,$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, 令 $t = x - x_0 \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 令 $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ 。



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

- 求极限的**基本方法**:
 - (1) 确定极限存在且不为零的因子,
 - (2) 利用无穷小等价代换,
 - (3) 应用洛必达法则。
- 求极限的**特殊方法**: 无穷小的性质
无穷小乘以有界量仍然是无穷小。



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



【例题3】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ 。

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}$ 。

注意比较：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot 1}{x^3} = -\frac{1}{6}。$$

由上面比较可知，在加、减运算时，不要用等价代换！

问题：如何求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ ？

4.2 洛必达法则



【例题4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \cdot (e^{x^3} - x^3 - 1)}{(2+3x)\ln(1+x)(e^{2x}-1)(1-\sqrt[3]{1-x^4})}$ 。

解：显然不会直接用洛必达法则求极限。

由求极限的基本方法知

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{x \cdot (2x) \cdot (-\frac{1}{3})(-x^4)} = \frac{3e}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{x^6} \\ &= \frac{3e}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot e^{x^3} - 3x^2}{6x^5} = \frac{3e}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x^3} = \frac{3e}{8}。 \end{aligned}$$

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题5】求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$ 。

解：
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(-2)(\pi - 2x)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$
$$= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-2} = -\frac{1}{8}。$$



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



定理4.2.2 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $|x| > M$ 时有定义, 如果

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$

(2) $f(x), g(x)$ 在 $|x| > M$ 时可导, 且 $g'(x) \neq 0,$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, A$ 为常数, (或为 ∞),

则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$

这也称为求极限的洛必达法则。

证明: 利用变量代换 $x = \frac{1}{t}$, 将 $x \rightarrow \infty$ 化为 $t \rightarrow 0$, 直接由定理4.2.1

可得结论, 略。

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题6】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e^{\frac{1}{1+x}} - e}$ 。

解：
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e^{\frac{1}{1+x}} - e} = \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e}。$$

高等数学

立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



4.2.2. 不定型 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 的定值法

定理4.2.3 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 如果

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

$$(2) f(x), g(x) \text{ 在 } U(x_0) \text{ 内可导, 且 } g'(x) \neq 0,$$

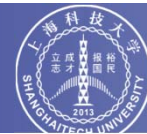
$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, A \text{ 为常数, (或为 } \infty),$$

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 。这也是洛必达法则。

注: (1) 如果没有条件 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 结论同样成立;

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有类似的结果。

4.2 洛必达法则



洛必达法则是求函数极限的一种**主要方法**，对于两种类型

“ $\frac{0}{0}$ ” 和 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 及两种极限形式 $x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty$ 都有相应的结论。

即有 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

$\begin{matrix} \nearrow \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \\ \searrow \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \nearrow x \rightarrow x_0 \\ \searrow x \rightarrow \infty \end{matrix}$

【例题7】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\tan \frac{\pi}{2} x)}{\ln(1-x)}$ 。

解：

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\tan \frac{\pi}{2} x)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cot \frac{\pi}{2} x \cdot \sec^2 \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{1-x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\cos \frac{\pi}{2} x} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x} = -1。$$

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题8】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x}$, 其中 m 为正整数, $a > 1$ 。

解:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot x^{m-1}}{a^x \cdot \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}}{a^x \cdot (\ln a)^2} = \dots = 0。$$

常用结论:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{2^x} = 0,$$

【例题9】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^m x}{x}$, 其中 m 为正整数。

解:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^m x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot \ln^{m-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ln^{m-2} x}{x} = \dots = 0。$$

常用结论:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{100} x}{x} = 0, \quad \text{变化: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^{100} x = 0。$$

立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



- 当 $x \rightarrow +\infty$ 趋于 $+\infty$ 的快慢程度依次为：

$$x^x, a^x (a > 1), x^k (k > 1), x, \ln^k x (k > 1), \ln x。$$

- 对于数列趋于 $+\infty$ 的快慢程度依次为：

$$n^n, n!, a^n (a > 1), n^k (k > 1), n, \ln^k n (k > 1), \ln n。$$

- 洛必达法则有时会无效的，例如：

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = 0。$



4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

4.2.3. 其它不定型的定值法

- 其它不定型 “ $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ ”

1. 不定型 “ $0 \cdot \infty$ ”

- 不定型 “ $0 \cdot \infty$ ” 通常可化为不定型 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”

$$“0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}”$$

注意：根据具体函数再作选择。



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题10】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x$ 。

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0。$

常用结论: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^{100} x = 0。$

注意: 如果选择计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{\ln^3 x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3 x = \dots$$



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题11】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \cdot \ln x$ 。

解： $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\frac{1}{\ln x}}$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln^2 x}{x} = 0。$$



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



2. 不定型 “ $\infty - \infty$ ”

- 不定型 “ $\infty - \infty$ ” 通常可通分化为 “ $\frac{0}{0}$ ”

$$\text{如: } \infty_2 - \infty_1 = \frac{1}{\frac{1}{\infty_2}} - \frac{1}{\frac{1}{\infty_1}} = \frac{\frac{1}{\infty_2} - \frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_2} \cdot \frac{1}{\infty_1}} = \frac{0}{0}。$$

【例题12】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)。$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}。$



4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题13】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ 。

解：
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(\sin x - x)}{x^4}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{3}。$$

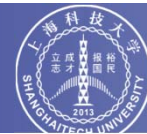
【例题14】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - e}{x}$ 。

解：
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e = e \cdot [e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} - 1] \sim e \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x}$$

所以：原式
$$= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{e}{2}。$$

立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



3. 不定型 “ $1^\infty, \infty^0, 0^0$ ”

- 一般情况下遇到“ u^v ”形式，建议先化为“ $e^{v \ln u}$ ”。

形式上有 $1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$, $\infty^0 = e^{0 \cdot \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$, $0^0 = e^{0 \cdot \ln 0} = e^{0 \cdot \infty}$ 。

【例题15】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^x}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$ 。

解法1: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^x}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}。$

解法2: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^x}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{(1+x)^x - e}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - e}{e \cdot x}} = e^{-\frac{1}{2}}。$

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题16】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ 。

解：由于 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \ln(\cot x)}$ ，

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\csc^2 x}{\cot x \cdot \frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x \cdot \sin x} = -1,$$

所以：原式 $= e^{-1}$ 。



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题17】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ 。

解：由于 $(e^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \ln(e^{\frac{1}{x}} - 1)}$ ，

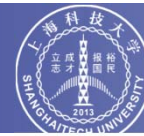
而
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{(e^{\frac{1}{x}} - 1) \cdot \frac{1}{x}} = -1,$$

所以：原式 $= e^{-1}$ 。



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



【例题18】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1)$ 。

解： 由于 $\sqrt[n]{n} - 1 = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$ ，所以：原式 = 1。

注意： 不能直接对数列使用洛必达法则！

如果需要使用洛必达法则的话，应先把 n 改为 x ，

$n \rightarrow \infty$ 改为 $x \rightarrow +\infty$ 然后再使用洛必达法则。



4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题19】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln[1 + (x-1)] \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \cdot \ln(1-x) = 0$ 。

【例题20】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right]$ 。

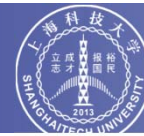
解：由于 $\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} = x \cdot \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x} - \frac{1}{e} \right] = x \cdot \frac{e - (1+\frac{1}{x})^x}{e \cdot (1+\frac{1}{x})^x}$,

故，原式 $= \frac{1}{e^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot [e - (1+\frac{1}{x})^x]$

由例题14知，原式 $= \frac{1}{2e}$ 。

立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



4.2.4. 导函数的极限

定理4.2.4 设 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上连续, 在

$(x_0, x_0 + \delta)$ 上可导, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$ 存在, 则函数 $f(x)$

在点 x_0 处**右导数**存在, 且 $f'_+(x_0) = A$, 即 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 。

设 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上连续, 在 $(x_0 - \delta, x_0)$

上可导, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

左导数存在, 且 $f'_-(x_0) = A$, 即 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 。

4.2 洛必达法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

定理4.2.4 证明:

由洛必达法则 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$, 证毕。

推论: 设 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内连续, 在 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 内可导,

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**, 且

$f'(x_0) = A$, 即 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 。

注意: 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 不存在时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可能**可导。

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处一定不可导!



立志成才 报国裕民

4.2 洛必达法则



对于函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

在点 $x=0$ 处连续且可导, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在。

进一步有 $f(x) = \begin{cases} |x|^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

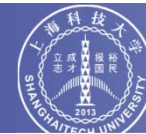
当 $k > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 连续;

当 $k > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 可导; **注意:** $k=1$ 时如何?

当 $k > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的导函数连续。 **注意:** $k=2$ 时如何?



第四章 微分中值定理及导数应用



上海科技大学
ShanghaiTech University

本次课程内容小结

下次课程内容预告

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民

第四章 微分中值定理及导数应用



上海科技大学
ShanghaiTech University

谢谢!

高等数学



立志成才 报国裕民