

高等数学 (I)

主讲教师：李铮



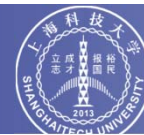


上一次课程内容回顾

高等数学 李铮



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

2.4 极限运算法则及极限存在准则

2.4.1 极限运算法则

设 $\lim u = A, \lim v = B,$

法则1: $\lim(u+v) = A+B;$

由极限与无穷小的关系:

$\lim u = A \Leftrightarrow u = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim \alpha = 0.$

利用无穷小性质可直接证得。(略)



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

- 极限运算法则

设 $\lim u = A, \lim v = B,$

法则2: $\lim(u \cdot v) = A \cdot B;$

推论1: 若 c 为常数, 则 $\lim(c \cdot u) = c \cdot \lim u = c \cdot A;$

推论2: $\lim u^m = A^m.$

法则2可利用无穷小性质直接证得。 (略)



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



• 极限运算法则

法则3: 设 $\lim u = A, \lim v = B$, 且 $B \neq 0$, 则: $\lim \frac{u}{v} = \frac{A}{B}$;

证明: $\lim u = A \Leftrightarrow u = A + \alpha, \lim v = B \Leftrightarrow v = B + \beta$,

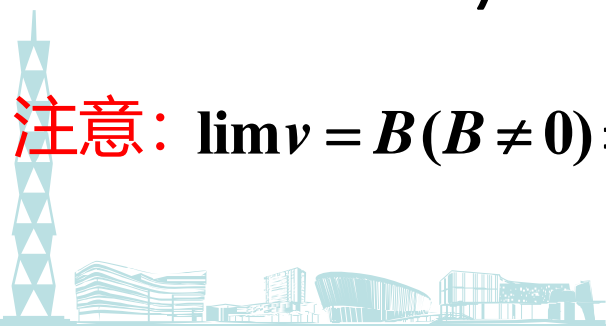
其中 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$,

由法则1, 法则2可得

$$\frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)}$$

是无穷小, 证毕。

注意: $\lim v = B (B \neq 0) \Rightarrow \lim B \cdot v = B^2 \neq 0$ 则 $\frac{1}{B \cdot v}$ 有界。



2.4 极限运算法则与极限存在准则



法则4: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且当 $x \in \overset{0}{U}(x_0)$ 时, $\varphi(x) \neq u_0$,
则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$ 。

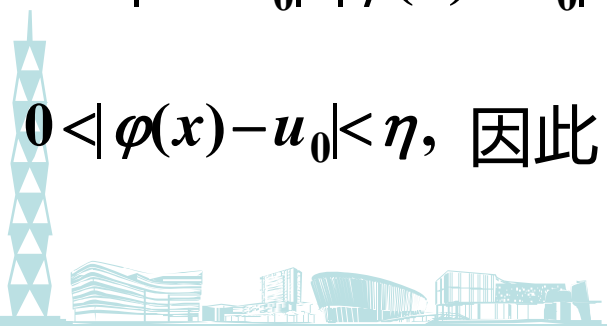
证明: 由 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 知:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u : 0 < |u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - A| < \varepsilon,$$

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ 知: 对上述 $\eta, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$|u - u_0| = |\varphi(x) - u_0| < \eta$, 而 $x \in \overset{0}{U}(x_0)$ 时, $\varphi(x) \neq u_0$, 故

$0 < |\varphi(x) - u_0| < \eta$, 因此, $|f[\varphi(x)] - A| < \varepsilon$, 证毕。



2.4 极限运算法则与极限存在准则



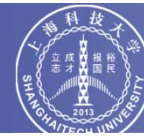
- 极限运算法则的变化

若 $\lim u = A$, 则 $\lim(u \pm v) = A \pm \lim v$;

若 $\lim u = B \neq 0$, 则 $\lim(u \cdot v) = B \cdot \lim v$;

- 常用结论: 设 $a_0, b_0 \neq 0, l, k \in \mathbb{N}$, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^l + a_1 n^{l-1} + \cdots + a_l}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & l = k \\ 0, & l < k \\ \infty, & l > k \end{cases}$$



2.4 极限运算法则与极限存在准则

由常用结论直接可得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 2n - 1} = \frac{2}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{n^3 + 2n - 3} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 4}{n^2 + 2n - 3} = \infty$$

- 对于函数极限也有相应的结论：

设 $a_0, b_0 \neq 0, l, k \in \mathbb{N}$,

则有:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \cdots + a_l}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & l = k \\ 0, & l < k \\ \infty, & l > k \end{cases}$$



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题1】 极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - x + 4}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = (\quad)$ 。

解： 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\sqrt{x^2} = -x, \sqrt{4x^2} = -2x$

比较最高次数的系数直接可得极限值为3。

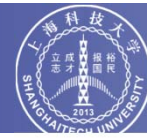
【例题2】 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$, 则常数 $(a, b) = (\quad)$ 。

解： 已知极限为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - (ax^2 + bx + 1)}{3x + \sqrt{ax^2 + bx + 1}} = 2$,

比较最高次数得常数 $(a, b) = (9, -12)$ 。



立志成才 报国裕民



2.4 极限运算法则与极限存在准则

【例题3】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = -2$, 则常数 $(a, b) = (\quad)$ 。

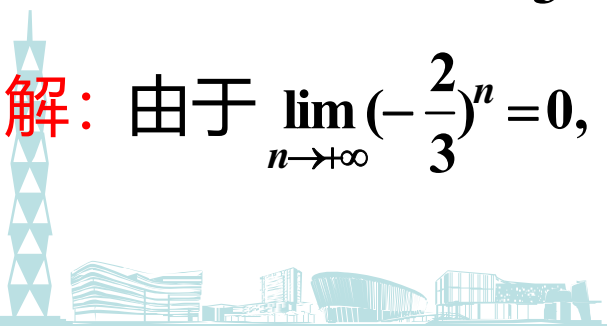
解： 由于 $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, 由极限存在, 可得

分子也有零因子 $(x-1)$, 设 $x^2 + ax + b = (x-1)(x+c)$,

由极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+c)}{(x-1)(x+3)} = -2$, 得 $c = -9$, $(a, b) = (-10, 9)$ 。

【例题4】 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = (\quad)$ 。

解： 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$, 所以原极限 $= \frac{1}{3}$ 。



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题5】 求极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \cdots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$ 。

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \cdots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$
 $= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}) = 2$ 。

【例题6】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 + 2x - 3}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+3)(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$ 。

立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题7】 求极限： $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ 。

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3} = -2$ 。

【例题8】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ 。

解：利用 $x^k-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})$,

原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1} = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

【思考题】 如何求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ 。

立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

2.4.2 极限存在准则

1. 准则1：单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，则 $\{x_n\}$ 收敛，

若数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界，则 $\{x_n\}$ 收敛。

准则1可由确界存在定理证明得到。

通常准则1作为高等数学的公理。

- 有界是数列收敛的必要条件，
单调有界是数列收敛的充分条件。

立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题9】 证明数列 $\{x_n\} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的极限存在。

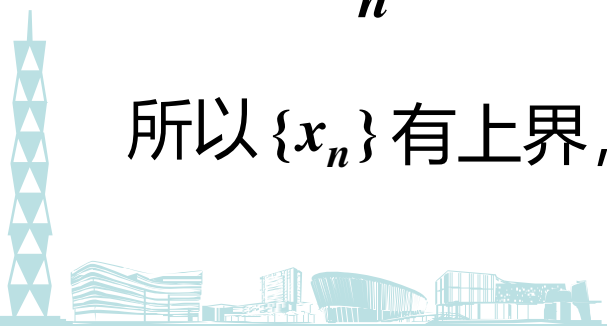
证法一： 利用A-G不等式证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界，

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot 1 \leq \left[\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} \right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = x_{n+1},$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加，

$$\text{又 } x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 4 \cdot \left[(1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] \leq 4 \cdot \left[\frac{n(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} \right]^{n+2} = 4,$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界，故数列 $\{x_n\}$ 有极限。



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题9】证法二：利用二项式定理证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界，

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{1}{n^n} \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

相应地有

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

比较得到 $\{x_n\}$ 单调增加，

$$\text{而 } x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界，故数列 $\{x_n\}$ 有极限。

立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828182 \dots$$

【例题10】 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, (n=1, 2, \dots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在。

证明: 显然 $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, \dots, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} \Rightarrow 1 \leq x_n \leq 2$,

所以 $\{x_n\}$ 有界,

$$\text{又 } x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{x_n}{1+x_n}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_n)},$$

故 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 而 $x_2 - x_1 > 0$,

因此, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 极限存在, 证毕。



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题11】 设 $x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$,

其中: $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots)$, 判定数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。

证明: 由于
$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = \frac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$
$$= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以 $x_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$

问题: $x_n \rightarrow 1$?



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题11】 证明(续):

由于: $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$), 显然数列 $\{x_n\}$ 单调增加,

而
$$x_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 1,$$

故数列 $\{x_n\}$ 有界,

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。

注意: 并没有要求求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



- 函数极限的单调有界准则

对于单调有界函数的单侧极限也有相应的结论

- 定理：**若函数 $f(x)$ 在点 a 的某个右邻域 $(a, a + \delta)$ 内单调有界，则其右极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在；

若函数 $f(x)$ 在点 a 的某个左邻域 $(a - \delta, a)$ 内单调有界，则其左极限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 存在。



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题12】 证明： $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ 。

证法一：利用“ $\varepsilon - \delta$ ”定义证明，略。

证法二：由于函数 2^x 在 $(0,1)$ 内单调有界，

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x$ 存在，

而已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ ，由海涅定理得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ ，



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

2. 准则2：夹逼准则

设有三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足条件：

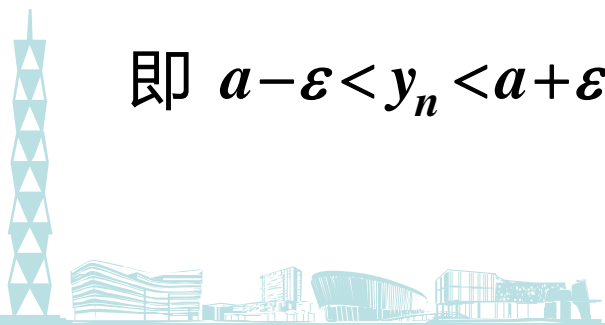
$$1. \quad y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a,$$

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 。

证明： 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$,

$$\text{即 } a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \cdots \cdots (1)$$



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



• 准则2 证明(续):

又由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ 知, 对上述 $\varepsilon, \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|z_n - a| < \varepsilon, \text{ 即 } a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \cdots \cdots (2)$$

所以, 对上述 ε , 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

(1),(2) 式同时成立, 又 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 所以有

$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon$, 即 $|x_n - a| < \varepsilon$, 证毕。



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题13】 设 $A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}, a_k > 0 (k = 1, 2, \dots, m)$,

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = A$ 。

证明: 不妨设 $A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = a_s (1 \leq s \leq m)$,

$$\text{则 } A = a_s \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m \cdot a_s^n} = \sqrt[n]{m} \cdot A$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{m} = 1$, 所以由夹逼准则知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = A, \text{ 证毕。}$$



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



- 函数极限的夹逼准则

- 定理: 若 $\forall x \in U(a, \delta)$, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且

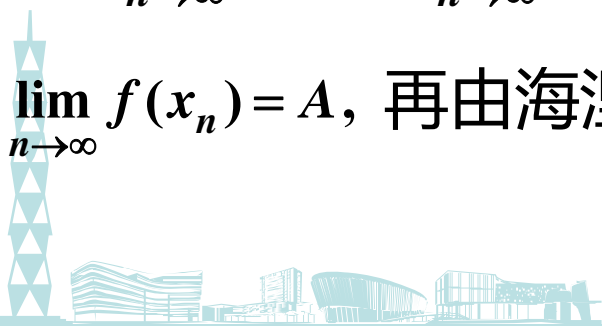
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ 及海涅定理得,

对于任一满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $x_n \neq a$ 的数列 $\{x_n\}$ 必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A, \text{ 由数列极限的夹逼准则得}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \text{ 再由海涅定理得, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \text{ 证毕.}$$



2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

• 函数极限的夹逼准则

注意: 如果极限过程改为 $x \rightarrow \infty$ 或其它极限过程

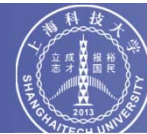
同样有相应的函数极限的夹逼准则。

如果定理中的 A 换成 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 结论同样成立。



立志成才 报国裕民

2.4 极限运算法则与极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题14】 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \ (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之。

- 利用单调有界准则证明极限存在

证法一: 因为 $x_1 = 10 > 3$, 由数学归纳法得 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} > 3$,

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界;

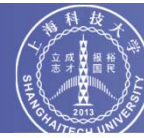
$$\text{而 } x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n = \frac{6 + x_n - x_n^2}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} = \frac{(2 + x_n)(3 - x_n)}{\sqrt{6 + x_n} + x_n}$$

所以 $x_{n+1} - x_n < 0$, 故数列单调减少, 因此有极限。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $a = \sqrt{6 + a} \Rightarrow a = 3$ 。

立志成才 报国裕民

2.3 无穷小和无穷大及极限运算法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题14】证法二：

$$\text{由 } x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - \sqrt{6 + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{6 + x_n} + \sqrt{6 + x_{n-1}}}$$

得 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 而 $x_2 - x_1 = -6 < 0$,

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减, 又显然有 $x_n > 0, (n = 1, 2, \dots)$

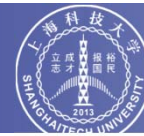
因此数列 $\{x_n\}$ 有极限。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $a = \sqrt{6 + a} \Rightarrow a = 3$ 。



立志成才 报国裕民

2.3 无穷小和无穷大及极限运算法则



上海科技大学
ShanghaiTech University

【例题14】证法三：

先设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可求得 $a = \sqrt{6+a} \Rightarrow a = 3$ 。

由 $x_{n+1} - 3 = \sqrt{6+x_n} - 3 = \frac{x_n - 3}{\sqrt{6+x_n} + 3}$ 得 $|x_{n+1} - 3| < \frac{1}{3} |x_n - 3|$,

所以 $|x_{n+1} - 3| < \frac{1}{3} |x_n - 3| < \frac{1}{3^2} |x_{n-1} - 3| < \cdots < \frac{1}{3^n} |x_1 - 3|$

由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - 3| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ 。

思考题：如果题中条件改为：

$x_1 > -6, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \ (n=1,2,\cdots)$ 如何证明？

立志成才 报国裕民

2.2 极限的性质和极限存在准则



上海科技大学
ShanghaiTech University

- 区间套定理*

设有一无穷闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件:

$$\forall n, a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

则存在唯一的实数 ξ , 使得 $\forall n$, 有 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ 。

证明参见书P60-61, 此处略。

- 注意:

区间套定理与确界存在定理、单调有界准则是等价的。

立志成才 报国裕民

第二章 极限与连续



上海科技大学
ShanghaiTech University

本次课程内容小结

下次课程内容预告

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民

第二章 极限与连续



上海科技大学
ShanghaiTech University

谢谢!

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民