

高数 1 补充习题 6

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{x^2}$

2. 计算

(1) $\int_0^2 \max(x, x^2) dx$

(2) 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$, 求 $f(7)$

(3) 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = \sqrt{2x - x^2} + x \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

(4) $\int_{-1}^x f(t) dt, f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases}$

3. 计算

(1) $\int_2^{2+100\pi} |\sin x| dx$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

(3) $\int_0^1 x^2(1-x)^{10} dx$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且恒正, 证明方程 $\int_a^x f(t) dt = 2 \int_x^b f(t) dt$ 在 (a, b) 内有唯一实根.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 恒正. 证明在 $[a, b]$ 至少存在一点 c , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$