

高数 1 补充习题 4

1. 若曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 在其拐点 $(1, 1)$ 处有水平的切线, 求系数 a, b, c .
2. 若实数 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 满足 $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + a_0 = 0$, 证明方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内必有实根.
3. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $\sin x + \tan x > 2x$.
4. 确定方程 $x^2 = x \sin x + \cos x$ 有几个实根?

5. 判断下列命题的正确性。

- (1) 若 $f'(c) > 0$, 则 $f(x)$ 在 c 的某个邻域内递增.
- (2) 若 $f'(c) > 0$, 则 $f(x)$ 在 c 的某个右邻域内满足 $f(x) > f(c)$.
- (3) $(1, f(1))$ 是拐点, 则 $f'(x) > 0, x \in (a, b)$.
- (4) 若 $f'(x_0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)(x - x_0) = 1$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$

的拐点.

- (5) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(a)f'(b) < 0$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$.
- (6) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(a)f'(b) > 0$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

(7) 若 $f'(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, 则 ()

- A. $f(1)$ 是极小值, $f(2)$ 是极小值. B. $f(1)$ 是极大值, $f(2)$ 是极大值.
C. $f(1)$ 不是极值, $f(2)$ 是极小值. D. $f(1)$ 不是极值, $f(2)$ 是极大值.

(8) 若 $f'(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, 则下列选项错误的是 ()

- A. $(1, f(1))$ 是拐点. B. $(2, f(2))$ 不是拐点.
C. $(3, f(3))$ 不是拐点. D. 存在其它拐点.

6. 验证 n 阶求导公式 (对于 $n = 3$ 时): (选做, 不做要求)

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(2) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(3) (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u(x)^{(k)} v(x)^{(n-k)}$$

7. 求下列函数的 100 阶导数 (选做, 不做要求):

(1) $y = \sin 2x$

(2) $y = x^2 \sin x$