

一、(共 30 分,每题 5 分)

1、设事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.8$,
求 $P(A\bar{B})$.

解: 因为事件 A 与 B 相互独立, 所以

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{由 } P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.8, \text{ 得 } P(B) = 0.6 \quad \text{.....2 分}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.2 \quad \text{.....1 分}$$

2、三人独立地去破译一份密码, 他们译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

求能将此密码译出的概率.

$$\text{解: } P = 1 - (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} \quad \text{.....5 分}$$

3、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	0.125	0.25	0.25	0.375

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布律, 并计算 $P(1 \leq X < 3)$.

解:

Y	1	2	5
p	0.25	0.375	0.375

.....3 分

$$P(1 \leq X < 3) = 0.625$$

.....2 分

4、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)] = 1$ 求 λ 。

解： $E(X) = D(X) = \lambda$,2 分

$$\begin{aligned} E[(X-1)(X-2)] &= E(X^2 - 3X + 2) \\ &= D(X) + [E(X)]^2 - 3E(X) + 2 = 1 \end{aligned} \quad \text{.....2 分}$$

所以 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 得 $\lambda = 1$1 分

5、为检查某食用动物含某种重金属的水平，假设重金属的水平服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ 均未知，现抽取容量为 25 的一个样本，测得样本均值为 186，样本标准差为 10，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1) \right) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{即 } \left(186 \pm \frac{10}{5} \times 2.0639 \right) \quad \text{.....2 分}$$

所求置信区间为 (181.8722, 190.1278)1 分

6、某车间用一台包装机包装葡萄糖.包得的袋装糖重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 当机器正常时, 其均值 $\mu = 0.5$ 公斤, 标准差 $\sigma = 0.015$ 公斤.某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖 9 袋, 称得平均重量为 0.511 公斤, 问这天包装机工作是否正常? (取显著水平 $\alpha = 0.05$)

解：由题意设 $H_0 : \mu = 0.5; H_1 : \mu \neq 0.5$ 1 分

$$\text{拒绝域为 } \left| \frac{\bar{X} - 0.5}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{0.025} \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{由于 } \left| \frac{\bar{X} - 0.5}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{0.511 - 0.5}{0.015/\sqrt{9}} \right| = 2.2, \quad z_{0.025} = 1.96, \quad \text{.....2 分}$$

即 $2.2 > 1.96$, 拒绝原假设, 认为这天包装机工作不正常.1 分

二、(共 18 分,每题 6 分)

1、设随机变量 X 和 Y 相互独立, 概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求: (1) $E(2X - 3Y)$; (2) $D(2X - 3Y)$; (3) ρ_{XY} .

解: (1) $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{3} = 0$;2 分

(2) $D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{9} = 2$;2 分

(3) 因为量 X 和 Y 相互独立, 所以 $\rho_{XY} = 0$2 分

2、已知随机变量 $X \sim N(1, 25), Y \sim N(2, 36)$, $\rho_{XY} = 0.4$,

求: $U = 3X + 2Y$ 与 $V = X - 3Y$ 的协方差.

解: $Cov(U, V) = Cov(3X + 2Y, X - 3Y)$

$$= 3D(X) - 9Cov(X, Y) + 2Cov(X, Y) - 6D(Y) \dots 3 \text{ 分}$$

$$= 3D(X) - 7\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} - 6D(Y)$$

$$= 3 \times 25 - 7 \times 0.4 \times 5 \times 6 - 6 \times 36 = -225 \dots 3 \text{ 分}$$

3、设 X_1, X_2, \dots, X_{13} 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, 且已知随

机变量 $Y = a(\sum_{i=1}^4 X_i)^2 + b(\sum_{i=5}^{13} X_i)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布,

求 a, b 的值.

解: 因为 $X_i \sim N(0, 1)$ 且相互独立, $i = 1, 2, \dots, 13$.

所以, $\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(0, 4)$, $\sum_{i=5}^{13} X_i \sim N(0, 9)$,2 分

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 X_i \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{3} \sum_{i=5}^{13} X_i \sim N(0, 1)$, 且相互独立.2 分

由 χ^2 分布的定义, 得 $(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 X_i)^2 + (\frac{1}{3} \sum_{i=5}^{13} X_i)^2 \sim \chi^2(2)$,

所以, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{9}$2 分

三、(共 18 分,每题 6 分)

1、设总体 $X \sim N(52, 6^2)$, 现随机抽取容量为 36 的一个样本, 求样本均值 \bar{X} 落入 (50.8, 53.8) 之间的概率.

解: $\bar{X} \sim N(52, 1)$,2 分

$$P\{50.8 < \bar{X} < 53.8\} = \Phi(53.8 - 52) - \Phi(50.8 - 52)$$

$$= \Phi(1.8) - \Phi(-1.2) = 0.9641 - 1 + 0.8849 \dots 3 \text{ 分}$$

$$= 0.849 \dots 1 \text{ 分}$$

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x \leq 0, \\ B, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x > 1. \end{cases}$

求: (1) A, B 的值; (2) $P\{X > \frac{1}{3}\}$.

解: (1) 由连续型随机变量分布函数的连续性, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1),$$

$$\text{即} \begin{cases} A = B \\ B = 1 - A \end{cases} \quad \text{解得 } A = B = 0.5 \dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P\{X > \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - 0.5 = 0.5 \dots 3 \text{ 分}$$

3、箱子中有一号袋 1 个，二号袋 2 个.一号袋中装 1 个红球，2 个黄球，二号袋中装 2 个红球，1 个黄球，今从箱子中任取一袋，从中任取一球，结果为红球，求这个红球是从一号袋中取得的概率.

解：设 $A_i = \{\text{从箱子中取到 } i \text{ 号袋}\}$, $i = 1, 2$

$B = \{\text{抽出的是红球}\}$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{1}{5} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

四、(8 分) 设随机变量 X 具有密度函数 $f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

求 (1) 常数 A ; (2) X 的分布函数.

$$(1) \text{ 因为 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } A \int_0^1 xdx = 1 \quad \text{得 } A = 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x 2xdx, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

五、(8分) 某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 60、30、10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品,} \\ 0, & \text{没有抽到 } i \text{ 等品.} \end{cases} \quad \text{求 } X_1, X_2 \text{ 的联合分布律.}$$

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示抽到一、二、三等品，

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.6$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.3, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$$

X_1, X_2 的联合分布律为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0.1	0.3
1	0.6	0.0

.....8 分 (每个 2 分)

六、(10 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 15x^2y, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度；(2) 判断随机变量 X 和 Y 是否独立.

解：(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 1 分

$$= \begin{cases} \frac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{.....1 分}$$

$$= \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ，所以随机变量 X 和 Y 不独立.

.....4 分

七、(8 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本， x_1, x_2, \dots, x_n 为一相对应的样本观测值，总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

解: (1) 矩估计 $E(X) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $A_1 = \mu_1$ 得 $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^n x_i)^{\theta-1}$

对数似然函数 $\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 得 $\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

参数 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

附 $\Phi(1.8) = 0.9641, \Phi(1.2) = 0.8849, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2.2) = 0.9861,$

$Z_{0.025} = 1.96, Z_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(24) = 2.0639, t_{0.025}(25) = 2.0595$