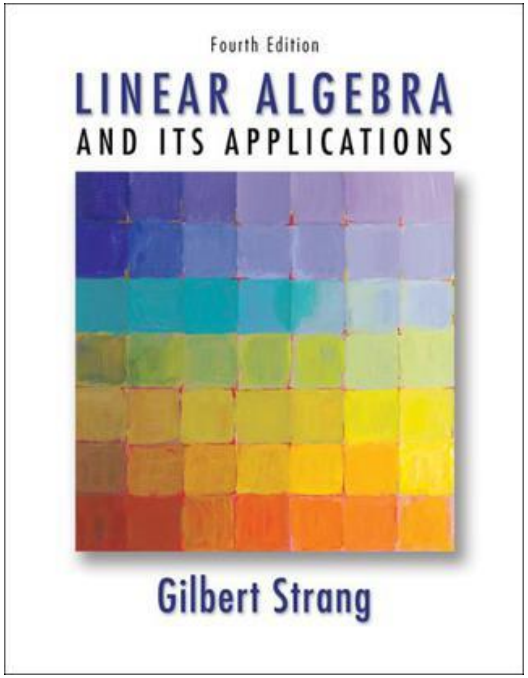
Linear Algebra



Instructor: Jing YAO

6 Positive Definite Matrices （正定矩阵）

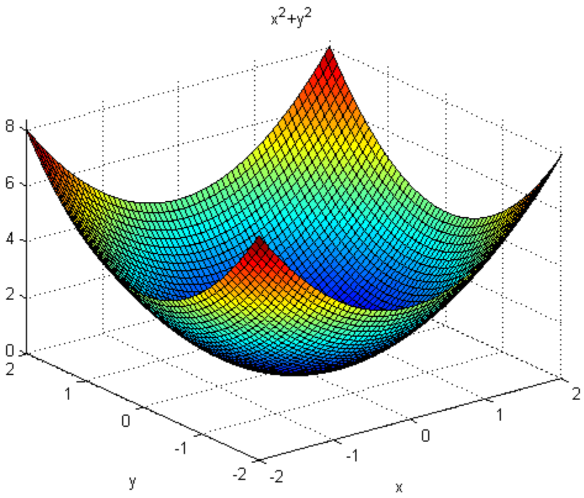
6.2 -补充内容

POSITIVE DEFINITENESS (正定性)

Diagonalization by Congruence Transformation

Tests for Negative Definiteness

Applications of Definiteness



I. Diagonalization by Congruence Transformation [合同变换法(初等变换法)化二次型为标准形]

任何可逆矩阵可表示为一系列初等矩阵的乘积.

思路：任意一个n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 都可以通过一系列相同类型的初等行、列变换化成对角矩阵.

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$$

设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\ldots\boldsymbol{P}_k$,

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(c)=\boldsymbol{E}_{ji}^{\mathrm{T}}(c)$ ⟵ $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{P}_1$ ⟶ $\boldsymbol{E}_{ji}(c)$

$\boldsymbol{D}_i(c)=\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}(c)$ ⟵ $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{P}_1$ ⟶ $\boldsymbol{D}_i(c)$

$\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{ij}^{\mathrm{T}}$ ⟵ $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{P}_1$ ⟶ $\boldsymbol{P}_{ij}$

定理 对任意一个n 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 都存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$.

析 设 $\boldsymbol{A}$是n阶实对称矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(1) 如果$a_{11}\neq 0$, 由于$a_{1j}=a_{j1}(j=1,2,\cdots,n)$, 因此对 $\boldsymbol{A}$ 做相同类型的行、列倍加变换, 可将第 1 行与第 1 列的其他元素全化为零, 得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_1$ 仍为n-1阶实对称矩阵.

(2)如果a_{11}=0, 但存在 a_{ii}≠0, 先将第1列与第i列对换,第1行与第i行对换, 就把 a_{ii} 换到第1行第1列的位置, 化为(1).

(3)如果a_{ii}=0(i=1,2,⋯,n), ∃a_{ij}≠0, 可将第j列加到第i列, 将第j行加到第i行, 第i行第i列的元素化为 $2a_{ij}$≠0, 就化为(2).

用数学归纳法可以证明：对任一个n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 都存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$，使得

$$\boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$

即对$\boldsymbol{A}$做的列变换同样施加于单位矩阵$\boldsymbol{I}$，即得变换矩阵$\boldsymbol{C}$.

The Principal Axes Theorem in n dimensions

Recall Example 5 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$

Converting this quadratic form into a standard form is just the same as:

(See Section 5.5 Example 2) Let $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$

Find an orthogonal matrix $\boldsymbol{Q}$ such that $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ is a diagonal matrix.

$$\boldsymbol{Q} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 & 1/3 \\ \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

and

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{bmatrix}.$$

So

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例1 用初等变换法将Example 5的二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$$

化为标准形, 并求所做的坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 的变换矩阵$\boldsymbol{C}$.

解 将二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 上下排列, 对$\boldsymbol{A}$做相同类型的初等行、列变换使之化为对角阵, 同样的初等列变换, 将$\boldsymbol{I}$化为$\boldsymbol{C}$.

(以下c_i , r_i 分别表示 第 i 列, 第 i 行)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\boxed{\substack{c_2+(-1)c_1 \\ c_3+c_1}}]{\substack{c_2+(-1)c_1 \\ c_3+c_1}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{no operation}]{\boxed{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+r_1}}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\boxed{c_3+\frac{2}{3}c_2}]{\boxed{\substack{c_3+\frac{2}{3}c_2 \\ r_3+\frac{2}{3}r_2}}} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ \hdashline 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

上面的变换可用分块矩阵表示,

即 $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(2, 3, \tfrac{5}{3})$$

做坐标变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 其中 $$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}= 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

注: 用正交变换法得到的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$. 标准形并不唯一! 但标准形的正负号个数是不变量.

例2 用**配方法**把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$$

化为标准形, 并求所用的坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 及变换矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 先按 x_1^2 及含有 x_1 的混合项配成完全平方, 即

$$f(x_1,x_2,x_3)$$

$$=2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

在上式中, 再对 $3x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+3(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+3(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

令
$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

变换矩阵C的特点?

主对角元为1的上三角矩阵

代入上式, 得二次型的标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

从 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 中解出 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=y_2+\frac{2}{3}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

即
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

就是坐标变换 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}$, 式中的矩阵就是变换矩阵$C$.

与初等变换方法得到的C相同

对一般的 $f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$的配方法:

- 若 x_1^2 项的系数不为0, 就按上例配方.
- 如果 x_1^2 项的系数为0, 而x_2^2 项的系数不为0, 就从 x_2开始配方.
- 如果所有平方项的系数都为0, 二次型中只含混合项, 就按下例的方法化为标准形

——“无中生有”：人为构造使之出现平方项

例3 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准形, 并求所做的坐标变换.

解 因为没有二次项, 先利用平方差公式

做如下变换:

“无中生有”

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

记作 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}$

变换矩阵 C_1的特点?

C_1为分块对角矩阵

将(1)式代入二次型, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 \qquad (2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3$$

再用例2的配方法得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2(y_2+y_3)^2 + 2y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 解出 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z}$ 主对角元为1的上三角矩阵 (3)

得二次型的标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$

即 $$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{z}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

坐标变换为

$$x=C_1y=C_1(C_2z)=(C_1C_2)z$$

变换矩阵

$$C=C_1C_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

任何 n元二次型都可用配方法化为标准形.

相应的变换矩阵是主对角元为 1 的上三角矩阵和例3中的对角块矩阵C_1, 或者是这两类矩阵的乘积.

II. Tests for Negative Definiteness

定理 设A为n阶实对称矩阵，则下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ 是负定二次型（或$\boldsymbol{A}$是负定矩阵）；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的 n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都小于零;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 n个主元 $d_1, d_2,\cdots, d_n$都小于零(无行交换);

(4) $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式都小于零, 偶数阶顺序主子式都大于零;

(5) 存在可逆矩阵$\boldsymbol{R}$, 使得$\boldsymbol{A}= -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$.

III. Some Applications of Definiteness

二次型理论的应用:

二次曲面分类

求多元函数极值

证明不等式

……

该方法证明不等式的基本思路:

首先构造二次型, 然后利用二次型半正定性的定义或等价条件, 判断二次型(矩阵)为半正定, 从而得到不等式.

例4 设 $a,b\in\mathbf{R}$，试证 $a^2+b^2\geq 2ab$.

证 要证明的不等式可写成 $a^2+b^2-2ab\geq 0$,

所以只需证矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 半正定.

由于$\boldsymbol{A}$的一阶、二阶主子式分别为

$$1>0,\quad |\boldsymbol{A}|=0\,,$$

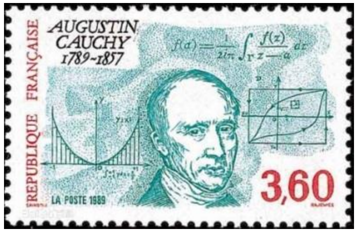
所以 $\boldsymbol{A}$ 半正定,

从而二次型

$$f(a,b)=(a,b)\,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=a^2+b^2-2ab$$

半正定, 得证.

例5 （Cauchy不等式） 设 $a_i, b_i (i=1,2,\ldots,n)$ 为任意实数，则



$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2})(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2})$$

证 记

$$f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{n}(a_i x_1+b_i x_2)^2=(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2})x_1^2+2(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)x_1x_2+(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2})x_2^2$$

因为对于任意x_1, x_2, 都有 $f(x_1, x_2)\ge 0$,

故关于x_1, x_2的二次型 $f(x_1, x_2)$ 是半正定的.

因此, 该二次型矩阵的行列式大于或等于0, 即

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} \end{vmatrix} \ge 0$$

故得

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2})(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}).$$

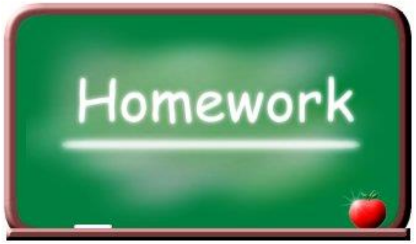
Key words:

Tests for Positive Definiteness;
Semidefinite Matrices;
The Principal Axes Theorem;
The Law of Inertia

Homework

See Blackboard

补充作业（必做）：见后续

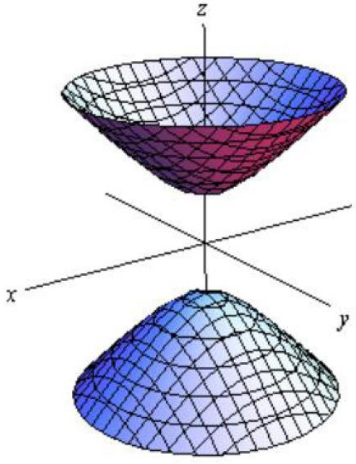


补充作业

1. (1) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则$f(x_1,x_2,x_3)=2$在空间直角坐标系下表示的二次曲面为

(A)单叶双曲面 (B)双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

1. (2) 设$\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$在正交变换下的标准方程的图形如图所示, 则$\boldsymbol{A}$的正特征值的个数为(　　).



补充作业

2. 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\xi^2=4$，求a,b的值和正交矩阵$\boldsymbol{P}$.

3.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$, 且$\boldsymbol{Q}$的第三列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I)求矩阵$\boldsymbol{A}$. (II)证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$为正定矩阵, 其中$\boldsymbol{I}$为三阶单位矩阵.

补充作业

4. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为2.

(I) 求a的值.

(II) 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形.

(III) 求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

5. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(I)求二次型f的矩阵所有的特征值;

(II) 若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$, 求a的值.