Probability and Statistics
Tutorial 7

Siyi Wang

Southern University of Science and Technology

11951002@mail.sustech.edu.cn

November 4, 2020

Outline

Review

1. Independence
   - (Definition) We say X and Y are independent if $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, that is, $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)(Y \le y)$.
   - Discrete case: The above definition is equivalent to the condition $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$, for $\forall i, j$.
   - Continuous case: The above definition is equivalent to the condition $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, for $\forall x, y$.
   - If X and Y are independent, then $h(X)$ and $g(Y)$ are indpendent for any function g and h.
2. n-dimensional Marginal Distribution and Independence $(X_1, ..., X_n)$
   - Distribution Function (CDF): $F_{X_1,..X_n}(x_1, ..x_n) = P(X_1 \le x_1, .., X_n \le x_n)$.
   - Marginal Distribution Function of (X_1, X_3): $F_{X_1,X_3}(x_1, x_3) = P(X_1 \le x_1, X_3 \le x_3) = F_{X_1,..,X_n}(x_1, +\infty, x_3, +\infty, ..., +\infty)$
   - Independence: we say $(X_1, .., X_n)$ are mutually independent if $F_{X_1,..X_n}(x_1, ..x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n)$.

3. Conditional Distribution

- Discrete Case:
  - Conditional PMF: For $P_{\cdot j} = P(Y = y_j) > 0$, we define $P_{X|Y}(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$.
  - (Property) $P_{X|Y}(x_i|y_j) \geq 0$.
  - (Property) $\sum_i P_{X|Y}(x_i|y_j) = 1$.
  - If $X$and Y are independent, then $P_{X|Y}(x_i|y_j) = P(X = x_i)$.
- Continuous Case:
  - Conditional PDF: For $f_Y(y) > 0$, we define $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.
  - (Property) $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$
  - (Property) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$.
  - (Property) $P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx$
  - If $X$and Y are independent, then $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$.
  - (Warning!) How to calculate $P(X \in A|Y \in B)$?
    Answer: $P(X \in A|Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)} = \frac{\int_B \int_A f(x,y)dxdy}{\int_B f_Y(y)dy}$.

Homework

19. 假设两个部件的寿命 T_1 和 T_2 服从独立的指数分布，参数分别为 α 和 β. 计算 (a) $P(T_1 > T_2)$ 和 (b) $P(T_1 > 2T_2)$.

Homework

Solution

We have $f_{T_1}(t) = \alpha \exp(-\alpha t) 1_{\{t>0\}}$, $f_{T2}(s) = \beta \exp(-\beta s) 1_{\{s>0\}}$.
Then, $f_{T_1,T_2}(t,s) = \alpha\beta \exp(-(\alpha t + \beta s)) 1_{\{t>0, s>0\}}$.
(1) $P(T_1 > T_2) = \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \alpha\beta \exp(-(\alpha t + \beta s)) dtds = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.
(2) $P(T_1 > 2T_2) = \int_0^{+\infty} \int_{2s}^{+\infty} \alpha\beta \exp(-(\alpha t + \beta s)) dsdt = \frac{\beta}{2\alpha+\beta}$.

补充题 设在ΔABC内部任取一点 P, 在底边 BC 上任取一点 Q, 求直线 PQ 与线段 AB 相交的概率.

Homework

Solution

Let $|BC| = b$ *and* $S_{ABC} = S$.
$P(PQ \text{ and } AB \text{ intersects}) = \int_0^b P(PQ \text{ and } AB \text{ intersects} | BQ = x) \frac{1}{b} dx$.
And since $P(PQ \text{ and } AB \text{ intersects} | BQ = x) = \frac{x}{b}$,
then $P(PQ \text{ and } AB \text{ intersects}) = \int_0^b \frac{x}{b^2} dx = \frac{1}{2}$.

Homework

一个袋中有 5 个球，其中 2 个白球 3 个黑球，
(1)先后有放回的任取一球，
(2)先后无放回的任取一球，
取到的白球个数分别为 X 和 Y，求(X,Y)的联合频率函数及边缘频率函数，讨论独立性。

Homework

在一个以原点为圆心半径为R的圆内随机选取一点，令(X,Y)表示这一点的分布，则(X,Y)服从

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求 c;　　(2)求边缘密度函数;

(3)讨论 X 和 Y 独立性。

Homework

Solution

(1) $c = \frac{1}{\pi R^2}$.

(2)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & x \in (-R, R) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y \in (-R, R) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

(3) Since $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$*, then they are not independent.*

1. 两个离散随机变量 X 和 Y 的联合频率函数由下表给出:

y \ x	1	2	3	4
1	0.10	0.05	0.02	0.02
2	0.05	0.20	0.05	0.02
3	0.02	0.05	0.20	0.04
4	0.02	0.02	0.04	0.10

76

a. 计算 X 和 Y 的边际频率函数.

b. 计算给定 $Y=1$ 时 X 的条件频率函数，以及给定 $X=1$ 时 Y 的条件频率函数.

Homework

Solution

1.

Y \ X	1	2	3	4	P(Y)
1	0.1	0.05	0.02	0.02	0.19
2	0.05	0.2	0.05	0.02	0.32
3	0.02	0.05	0.2	0.04	0.31
4	0.02	0.02	0.04	0.1	0.18
P(X)	0.19	0.32	0.31	0.18	1

X	1	2	3	4
P(x|Y=1)	0.53	0.26	0.11	0.11

$$\frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(x,1)}{0.19}$$

1	$\frac{10}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$

Y	1	2	3	4
P(Y |X=1)	$\frac{10}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$

Homework

9. 假设 (X, Y) 是定义在区域 $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ 和 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的均匀分布.

   a. 计算 X 和 Y 的边际密度.

   b. 计算两个变量的条件密度.

Solution

a. *Since* $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dydx = \frac{4}{3}$. *then* $f(x,y) = \frac{3}{4}1_{\{-1\le x\le 1, 0\le y^2\le 1-x^2\}}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x^2} \frac{3}{4}dy = \frac{3}{4}(1-x^2), & x \in [-1,1] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{3}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}dy = \frac{3}{2}\sqrt{1-y}, & y \in [0,1] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{4}$$

Solution

b. For $y \in [0,1]$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, & x \in [-\sqrt{1-y}, \sqrt{1-y}] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{5}$$

For $x \in [-1,1]$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)}, & y \in [0, 1-x^2] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{6}$$

10. 假定

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x(y+1)}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant y < \infty$$

a. 计算 X 和 Y 的边际密度. X 和 Y 是独立的吗?

b. 计算 X 和 Y 的条件密度.

Solution

a.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dy = e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{7}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx = \frac{1}{(y+1)^2}, & y \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{8}$$

Since $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$*, then they are not independent.*

Solution

b. For $y \geq 0$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{xe^{-x(y+1)}}{\frac{1}{(y+1)^2}} = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)}, & x \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{9}$$

For $x \geq 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x(y+1)}}{e^{-x}} = xe^{-xy}, & y \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{10}$$

15. 假定 X 和 Y 具有联合密度函数

$$f(x,y)=c\sqrt{1-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\leqslant 1$$

a. 计算 c.

b. 画出联合密度图形.

c. 计算 $P\left(X^2+Y^2\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

d. 计算 X 和 Y 的边际密度. X 和 Y 是独立随机变量吗?

e. 计算条件密度.

Solution

a. Since
$1 = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} c\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}rdrd\theta = \frac{2\pi c}{3}$, *then*
$c = \frac{3}{2\pi}$.
$c.P(X^2+Y^2\leq \frac{1}{2}) = \int\int_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}} \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy =$
$c\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-r^2}rdrd\theta = 1-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
d.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}dy = \frac{3}{4}(1-x^2), & x\in[-1,1] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{11}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}dx = \frac{3}{4}(1-y^2), & y\in[-1,1] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{12}$$

Since $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$, then they are not independent.

Homework

Solution

e. For $y \in [-1, 1]$,

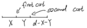
$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\frac{3}{4}(1-y^2)} = \frac{2\sqrt{1-x^2-y^2}}{\pi(1-y^2)}, & x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{13}$$

. For $x \in [-1, 1]$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\frac{3}{4}(1-x^2)} = \frac{2\sqrt{1-x^2-y^2}}{\pi(1-x^2)}, & y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{14}$$

将长度为d的一根木棒任意截去一段，再将剩下的木棒任意截为两段. 求这三段木棒能构成三角形的概率.

Solution



We have $f_X(x) = \frac{1}{d} 1_{\{0<x<d\}}$,

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{d-x} 1_{\{0<y<d-x\}}$.

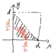
Then, $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{d(d-x)} 1_{\{0<x<d,\, 0<y<d-x\}}$.

$\{X, Y, d-X-Y \text{ form a triangle}\} =: \Delta$

$$= \left\{ \begin{array}{l} X+Y > d-X-Y \\ X+d-X-Y > Y \\ Y+d-X-Y > X \end{array} \right\}$$

$$= \{ X+Y > \tfrac{d}{2},\ Y < \tfrac{d}{2},\ X < \tfrac{d}{2} \}$$

Then, $\mathbb{P}(\Delta) = \mathbb{P}(X+Y > \frac{d}{2}, Y < \frac{d}{2}, X < \frac{d}{2})$



$$= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_{\frac{d}{2}-x}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{d(d-x)}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{x}{d(d-x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{1-y}\, dy \quad (y = \tfrac{x}{d})$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy$$

$$= (-\ln(1-y) + y)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Homework

1. 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 内服从均匀分布，在 $X=x$ $(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 内服从均匀分布，求:

(1) X 和 Y 的联合密度函数;

(2) Y 的密度函数;

(3) $P(X+Y>1)$

Homework

Solution

(1) We have $f_X(x) = 1_{(0,1)}(x)$ *and for* $x \in (0,1)$, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} 1_{(0,x)}(y)$.
Then, $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} 1_{\{0<y<x<1\}}$.
(2)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y, & y \in (0,1) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{15}$$

(3) $P(X+Y>1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy dx = 1 - \ln 2.$

Homework

2. 设二维连续随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

(1) 求边缘密度函数并讨论独立性;

(2) 求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$

Solution

(1)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{16}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{y} e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{17}$$

Since $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, then they are not independent.

Solution

(2) For $y > 0$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}, & x \in (0, y) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{18}$$

For $x > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}, & y \in (x, \infty) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{19}$$

Supplement Exercises

Exercise 1

2. 如果二维随机变量(X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}+\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 X 和 Y 各自的边际分布函数.

Solution

解 因为

$$\lim_{y\to+\infty}\{1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}\}=1-e^{-\lambda_1 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\{1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}\}=1-e^{-\lambda_2 y},$$

所以 X 和 Y 各自的边际分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Exercise 2

4. 设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,试求 X 的边际密度函数.

Solution

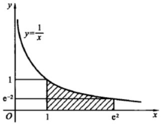


图 3.7

$$p(x,y)=\begin{cases}1/2, & 1<x<e^2, 0<y<1/x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此得，当 $1<x<e^2$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\int_0^{1/x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}.$$

所以 X 的边际密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若此题要求出 Y 的边际密度，则从图 3.7 中可以看出：

当 $0<y<e^{-2}$ 时，有

$$p(y)=\int_1^{e^2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(e^2-1).$$

当 $e^{-2}<y<1$ 时，有

$$p(y)=\int_1^{1/y}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right).$$

所以 Y 的边际密度为

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^2-1), & 0<y<e^{-2},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right), & e^{-2}<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Exercise 3

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,其联合分布列为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$1/9$	c
x_2	$1/9$	b	$1/3$

试求联合分布列中的 a,b,c.

Supplement Exercises

Solution

解　先对联合分布列按行、按列求和，求出边际分布列如下：

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	a	$1/9$	c	$a+c+1/9$
x_2	$1/9$	b	$1/3$	$b+4/9$
$P(Y=y_j)$	$a+1/9$	$b+1/9$	$c+1/3$	1

由 X 与 Y 的独立性，从上表的第 2 行、第 2 列知 $b=(b+4/9)(b+1/9)$，从中解得 $b=2/9$. 再从上表的第 2 行、第 1 列知 $1/9=(b+4/9)(a+1/9)$，从中解得 $a=1/18$. 最后由联合分布列的正则性知：$a+b+c=4/9$，由此得 $c=1/6$.

Exercise 4

13. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y,\quad 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求(1) 边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$； (2)X与Y是否独立？

Solution

解 (1) 因为 $p(x,y)$ 的非零区域为图 3.9 的阴影部分，

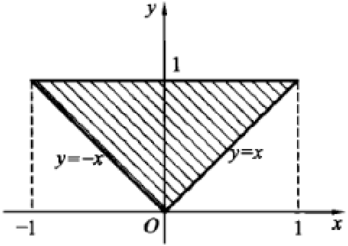


图 3.9

所以，当 $-1 < x < 0$ 时，有

$$p_X(x) = \int_{-x}^{1} \mathrm{d}y = 1 + x,$$

当 $0 < x < 1$ 时，有

$$p_X(x) = \int_{x}^{1} \mathrm{d}y = 1 - x,$$

Solution

$$p_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又当 $0<y<1$ 时，有

$$p_Y(y)=\int_{-y}^{y}\mathrm{d}x=2y,$$

因此 Y 的边际密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这是贝塔分布 $Be(2,1)$.

Exercise 5

14. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数如下，试问X与Y是否相互独立？

(1) $$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)} & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $$p(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, \quad -\infty<x,y<+\infty.$$

(3) $$p(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(4) $$p(x,y)=\begin{cases} 24xy, & 0<x<1, 0<y<1, 0<x+y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(5) $$p(x,y)=\begin{cases} 12xy(1-x), & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(6) $$p(x,y)=\begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 当 $x>0$ 时, $p_X(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}y = xe^{-x}$; 而当 $y>0$ 时, $p_Y(y)=\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}x = e^{-y}$. 所以由 $p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$, 知 X 与 Y 相互独立.

注意:上述状态称为变量 X 与 Y 的密度函数是可分离的,它有两方面含义,一是指 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$,二是指 $p(x,y)$ 的非零区域亦可分离为两个一维区域的乘积空间.

(2) 因为

Solution

(3) 当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_x^1 2\mathrm{d}y=2(1-x)$；而当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_0^y 2\mathrm{d}x=2y$. 所以由 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$，知 X 与 Y 不相互独立. 实际上，由于 $p(x,y)$ 的非零区域不可分离，就可看出 X 与 Y 不相互独立.

Exercise 6

15. 在长为 a 的线段的中点的两边随机地各选取一点，求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率.

Supplement Exercises

Solution

解 记 X 为线段中点左边所取点到端点 0 的距离，Y 为线段中点右边所取点到端点 a 的距离，则 $X \sim U(0,a/2)$，$Y \sim U(a/2,a)$，且 X 与 Y 相互独立，它们的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}, & 0<x<\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}<y<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而 $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{|x-y|<a/3\}$ 的交集为图 3.10 阴影部分，

因此，所求概率为

$$P\left(|Y-X|<\frac{a}{3}\right)=\int_{a/6}^{a/2}\int_{a/2}^{a/3+x}\frac{4}{a^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{2}{9}.$$

Exercise 7

2. 一射手单发命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击进行到命中目标两次为止. 设 X 为第一次命中目标所需的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，求 (X, Y) 的联合分布和条件分布.

Supplement Exercises

Solution

解　只论命中与不命中的试验是伯努利试验. 在一伯努利试验序列中，首次命中的射击次数 X 服从几何分布 $Ge(p)$，即

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p,\quad x=1,2,\cdots,$$

其中 p 为命中概率，第二次命中目标的射击次数 Y 服从负二项分布 $Nb(2,p)$，即

$$P(Y=y)=\binom{y-1}{1}(1-p)^{y-2}\cdot p^2,y=2,3,\cdots.$$

由于 X 与 $Y-X$ 相互独立，所以条件分布

$$\begin{aligned}P(Y=y\mid X=x)&=P(Y-X=y-x\mid X=x)\\&=P(Y-X=y-x)=(1-p)^{y-x-1}\cdot p,\quad \begin{array}{l}x=1,2,\cdots,y-1,\\ y=2,3,\cdots.\end{array}\end{aligned}$$

从而 (X,Y) 的联合分布列为

$$\begin{aligned}P(X=x,Y=y)&=P(X=x)P(Y=y\mid X=x)\\&=P(X=x)P(Y-X=y-x)\\&=(1-p)^{x-1}\cdot p\cdot(1-p)^{y-x-1}\cdot p\\&=(1-p)^{y-2}p^2,\quad \begin{array}{l}x=1,2,\cdots,y-1,\\ y=2,3,\cdots.\end{array}\end{aligned}$$

Exercise 8

6. 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\quad 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件密度函数$p(x|y)$.

Solution

解 因为 $p(x,y)$ 的非零区域为图 3.17 的阴影部分，所以当 $-1<y<0$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-y}^{1}\mathrm{d}x=1+y=1-|y|;$$

而当 $0<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{y}^{1}\mathrm{d}x=1-y=1-|y|.$$

由此得

$$p(x\mid y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}1/(1-|y|), & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这是均匀分布 $U(|y|,1)$，其中 $|y|<1$.

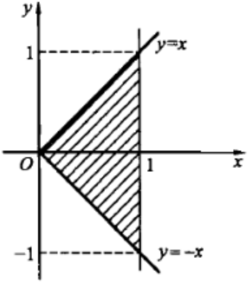


图 3.17

Exercise 9

7. 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率$P\{Y \geqslant 0.75 \mid X=0.5\}$.

Solution

解　因为 $P\{Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5\} = \int_{0.75}^{1} p(y \mid x = 0.5)\mathrm{d}y$,故先求 $p(y \mid x)$.

而 $p(x,y)$ 的非零区域为图 3.18 的阴影部分,

所以当 $-1 < x < 1$ 时,

$$p_X(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2 y\mathrm{d}y = \frac{21}{8}x^2(1 - x^4).$$

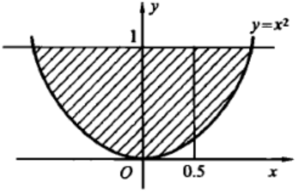


图 3.18

因而当 $-1 < x < 1$ 时,

$$p(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{2y}{1 - x^4}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以当 $0 < y < 1$ 时,

$$p(y \mid x = 0.5) = \frac{32y}{15},$$

由此得

$$P\{Y \geqslant 0.75 \mid X = 0.5\} = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15}\mathrm{d}y = \frac{7}{15}.$$

Exercise 10

3. 设随机变量 X 和 Y 的分布列分别为

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Y	0	1
P	$1/2$	$1/2$

已知 $P(XY=0)=1$，试求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列.

Solution

(X,Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1
-1	1/4	0
0	0	1/2
1	1/4	0

所以 $Z=\max(X,Y)$ 的分布列为

Z	0	1
P	1/4	3/4

Exercise 11

6. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数 （1） $Z=(X+Y)/2$； （2） $Z=Y-X$.

Supplement Exercises

Solution

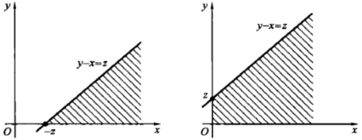
解 (1) 因为 $p(x,y)$ 的非零区域为 $x>0, y>0$，所以当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$，而当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant 2z)=\int_0^{2z}\int_0^{2z-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2z}\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-(2z-x)})\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-2z}-2z\mathrm{e}^{-2z},$$

所以，当 $z\leqslant 0$ 时，有 $p_Z(z)=0$；而当 $z>0$ 时，有 $p_Z(z)=4z\mathrm{e}^{-2z}$，这是伽玛分布 $Ga(2,2)$.

(2) 当 $z\leqslant 0$ 时，$p(x,y)$ 的非零区域与 $\{y-x\leqslant z\}$ 的交集为图 3.11(a) 阴影部分.



(a)　　(b)

图 3.11

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(Y-X\leqslant z)=\int_0^{+\infty}\int_{y-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-(y-z)}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{z}/2,$$

Supplement Exercises

Solution

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = e^z/2.$$

又因为当 $z > 0$ 时，$p(x,y)$ 的非零区域与 $\{y - x \leqslant z\}$ 的交集为图3.11(b)阴影部分，所以

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(Y - X \leqslant z) = \int_0^{+\infty}\int_0^{x+z} e^{-(x+y)}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-(x+z)})\,dx = 1 - e^{-z}/2,$$

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = e^{-z}/2.$$

由此得

$$p_Z(z) = e^{-|z|}/2, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Exercise 12

7. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\quad 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $Z=X-Y$ 的密度函数.

Solution

解　当 $0<z<1$ 时，$p(x,y)$ 的非零区域与 $\{x-y\leqslant z\}$ 的交集为图 3.12 阴影部分，所以

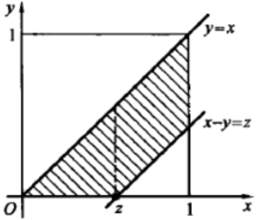


图 3.12

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X-Y\leqslant z)=\int_0^z\int_0^x 3x\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_z^1\int_{x-z}^x 3x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z 3x^2\mathrm{d}x+\int_z^1 3zx\mathrm{d}x=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3,$$

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{3}{2}(1-z^2),\qquad 0<z<1.$$

在区间 $(0,1)$ 外的 z 有 $p_Z(z)=0$.

Exercise 13

8. 某种商品一周的需求量是一个随机变量，其密度函数为

$$p_1(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0. \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的，试求

Solution

解 记 X_i 为第 i 周的需求量，$i=1,2,3$. 根据题意知 X_1,X_2,X_3 相互独立，且密度函数都为 $p_1(t)$. X_i 服从伽玛分布 $Ga(2,1)$，所以由伽玛分布的可加性知

（1）$X_1+X_2 \sim Ga(4,1)$，其密度函数为

$$p_2(x)=\frac{x^3}{6}e^{-x},\quad x>0.$$

（2）$X_1+X_2+X_3 \sim Ga(6,1)$，其密度函数为

$$p_3(x)=\frac{1}{\Gamma(6)}x^5e^{-x}=\frac{1}{120}x^5e^{-x}, x>0.$$

Exercise 14

16. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

(1) 求 $U=X+Y$ 与 $V=X/(X+Y)$ 的联合密度函数 $p_{U,V}(u,v)$;

(2) 以上的 U 与 V 独立吗?

Solution

解 (1) $\begin{cases} u = x + y \\ v = x/(x+y) \end{cases}$ 的反函数为 $\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$，变换的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

所以在 (U,V) 的可能取值范围 $\{u > 0, 0 < v < 1\}$ 内，有

$$p_{U,V}(u,v) = p_X(uv)p_Y(u(1-v))\,|-u| = e^{-uv}e^{-u(1-v)}u = ue^{-u}.$$

(2) 因为 U 与 V 各自的边际密度函数分别为

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)\,dv = \int_0^1 ue^{-u}dv = ue^{-u}, \quad u > 0.$$

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)\,du = \int_0^{+\infty} ue^{-u}du = 1, \quad 0 < v < 1.$$

所以由 $p_{U,V}(u,v) = p_U(u)p_V(v)$，知 U 与 V 相互独立.

Thank you!