

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 设 A 、 B 互不相容, 且 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则必有 ()

- (A) $P(B|A) > 0$ (B) $P(A|B) = P(A)$ (C) $P(A|B) = 0$ (D) $P(AB) = P(A)P(B)$

(2) 将 3 粒黄豆随机地放入 4 个杯子, 则杯子中盛黄豆最多为一粒的概率为 ()

- (A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{8}$

(3) $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, $p_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则 ()

- (A) 对任意实数 μ , $p_1 = p_2$ (B) 对任意实数 μ , $p_1 < p_2$

- (C) 只对 μ 的个别值, 才有 $p_1 = p_2$ (D) 对任意实数 μ , 都有 $p_1 > p_2$

(4) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 且 $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a 成立的是 ()

- (A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$ (B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)dx$

- (C) $F(-a) = F(a)$ (D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

(5) 已知 X_1, X_2, \dots, X_{50} 为来自总体 $X: N(2, 4)$ 的样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i$, 则

$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{50} (X_i - \bar{X})^2$ 服从分布为 ()

- (A) $N(2, \frac{4}{50})$ (B) $N(\frac{2}{50}, 4)$ (C) $\chi^2(50)$ (D) $\chi^2(49)$

二、填空题 (本大题 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

(1) $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.4$, 则 $P(\overline{AB}) =$ _____

(2) 设随机变量 X 有密度 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则使 $P(X > a) = P(X < a)$

的常数 $a =$ _____

(3) 设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 若 $P\{0 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____

(4) 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}$, 则 $EX =$ _____, $DX =$ _____

(5) 设总体 $X \sim N(\mu, 9)$, 已知样本容量为 25, 样本均值 $\bar{x} = m$; 记

$u_{0.1} = a$, $u_{0.05} = b$; $t_{0.1}(24) = c$, $t_{0.1}(25) = d$; $t_{0.05}(24) = l$, $t_{0.05}(25) = k$, 则 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为 _____

三、解答题（共 60 分）

1、(10 分)某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,每个车间的产量分别占全厂的 25%,35%,40%,各车间产品的次品率分别为 5%,4%,2%,

求: (1)全厂产品的次品率

(2) 若任取一件产品发现是次品,此次品是甲车间生产的概率是多少?

2、(10 分)设 X 与 Y 两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求:随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

3、(10 分)设随机变量 X 服从参数 $\lambda = 2$ 的指数分布, 证明: $Y = 1 - e^{-2X}$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。

4、(8 分)设某次考试考生成绩服从正态分布, 从中随机抽取 36 位考生的成绩, 算得 $\bar{X} = 66.5$, 样本标准差为 15, 问在 $\alpha = 0.05$ 时, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

5、(10 分)在抽样检查某种产品的质量时, 如果发现次品多于 10 个, 则拒绝接受这批产品。设产品的次品率为 10%, 问至少应抽查多少个产品进行检查, 才能保证拒绝这批产品的概率达到 0.9? ($\Phi(1.29) = 0.9$)

6、(12 分)设 (X, Y) 服从二维正态分布, $X \sim N(1, 9)$, $Y \sim N(0, 16)$, $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 设

$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$, 求(1) EZ, DZ (2) ρ_{XZ} (3) X 与 Z 是否相关?

标准答案

一、选择题 (5×4 分)

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	A	B	D

二、填空题 (5×4 分)

1、0.1 2、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3、0.35 4、 $EX = 1, DX = \frac{1}{2}$

$$5、\underline{\left(m - \frac{3}{5}b, m + \frac{3}{5}b\right)} \text{ 或 } \underline{\left(m - \frac{3}{5}u_{0.05}, m + \frac{3}{5}u_{0.05}\right)}$$

三、解答题 (60 分)

1、解：A=“生产的产品是次品”， B_1 =“产品是甲厂生产的”， B_2 =“产品是乙厂生产的”， B_3 =“产品是丙厂生产的”，易见 B_1, B_2, B_3 是 Ω 的一个划分

(1) 由全概率公式，得

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(AB_i) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = 25\% \times 5\% + 35\% \times 4\% + 40\% \times 2\% = 0.0345.$$

$$(2) \text{ 由 Bayes 公式有: } P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{25\% \times 5\%}{0.0345} = \frac{25}{69}$$

2、因为 X 与 Y 相互独立，所以 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

当 $z \leq 0$ 时， $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = 0$;

当 $0 < z < 1$ 时， $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^z e^{-(z-x)}dx = 1 - e^{-z}$;

当 $z \geq 1$ 时， $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^1 e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e-1)$;

$$\text{所以 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 < z < 1; \\ e^{-z}(e-1) & z \geq 1 \end{cases}$$

$$3、F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{1 - e^{-2X} \leq y\} = P\left\{X \leq -\frac{\ln(1-y)}{2}\right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \int_{-\infty}^{-\frac{\ln(1-y)}{2}} 2e^{-2x}dx = y(0 \leq y < 1), & \therefore f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1, & (0 < y < 1), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

4、 $H_0: \mu = \mu_0 = 70$

$$\textcircled{1} \text{ 由于 } \sigma^2 \text{ 未知, 则令 } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 } P\left\{|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = \alpha, \text{ 查表得 } t \text{ 的临界值 } t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.0301,$$

$$\text{则拒绝域为 } I_c = \{t \mid |t| \geq 2.0301\}, \text{ 由条件计算出 } t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{66.5 - 70}{15/\sqrt{36}} = -1.4,$$

由于 $|t_0| = 1.4 < 2.0301$, 所以接受 t_0 , 即可以认为考生平均成绩为 70 分。

5、设应抽查 n 件产品, 其中次品数为 Y , 则 $Y \sim B(n, 0.1)$,

其中 $EY = np = 0.1n$, $DY = np(1-p) = 0.09n$, 由二项分布的中心极限定理, 得

$$P\{10 \leq Y \leq n\} = P\left\{\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \leq \frac{Y-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \leq \frac{n-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right\} = \Phi(3\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right), \text{ 要使 } 1 - \Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.9, \text{ 即 } \Phi\left(\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.9, \text{ 查表得}$$

$$\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}} \geq 1.29, \text{ 解得 } n \geq 147, \text{ 即至少要抽查 147 件产品才能保证拒绝这批产品的概率}$$

达到 0.9。

$$6、(1) EZ = E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}EX + \frac{1}{2}EY = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

$$DZ = D\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\text{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 16 + 2\text{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$$

$$= 5 + 2\text{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right),$$

$$\text{而 } \text{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{6}\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{6}\rho_{XY} \cdot \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = -1$$

$$\therefore DZ = 5 + 2 \cdot (-1) = 3$$

$$(2) \rho_{XZ} = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}, \text{ 而 } \text{cov}(X, Z) = \text{cov}\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}\text{cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{3}DX + \frac{1}{2} \cdot (-6) = \frac{1}{3} \cdot 9 - 3 = 0, \therefore \rho_{XZ} = 0$$

(3) $\rho_{XZ} = 0$, 所以 X 与 Z 不相关。