

Probability and Statistics

Tutorial 13

Siyi Wang

Southern University of Science and Technology

11951002@mail.sustech.edu.cn

December 14, 2020

Outline

1 Review

2 Homework

3 Supplement Exercises

1. Unbiasedness

(一) 无偏性

设总体 $X \sim F(x; \theta)$ ($\theta \in \Theta$), Θ 为参数空间.

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的样本, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为未知参数 θ 的点估计.

定义 若估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望存在, 且 $\forall \theta \in \Theta$ 有

$$E_{\theta}(\hat{\theta}) = \theta$$

$E_{\theta}(\hat{\theta})$ 表示利用总体分布 $F(x; \theta)$ 计算, 得出的数学期望与参数 θ 有关

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计**, 否则称为**有偏估计**.

称

$$b_n(\hat{\theta}) = E_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta$$

为估计量 $\hat{\theta}$ 的**偏差(偏)**.

若 $b_n(\hat{\theta}) \neq 0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**有偏估计**.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\hat{\theta}) = 0$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**渐近无偏估计**.

2. Efficiency

定义 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $X \sim F(x, \theta); \theta \in \Theta$ 的样本,

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

都是 θ 的无偏估计, 即 $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta \quad (\forall \theta \in \Theta)$. 若 $\forall \theta \in \Theta$ 有

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

3. Consistency

(三) 相合性(一致性)

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计.

 **问** 当 n 增加时, 怎样评价 $\hat{\theta}$ 是一个“好”的估计?

分析 当样本容量 n 增加时, 样本 X_1, X_2, \dots, X_n 包含未知参数 θ 的信息也越多, 此时估计应越“精确”.

 **问** 由于 $\hat{\theta}$ 是 r.v, 怎样描述估计的精确性?

定义 设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计,
若 $\forall \theta \in \Theta$ 满足: $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的**相合估计**.

显然 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \quad (n \rightarrow \infty)$

3. Consistency

关于相合估计的一般结论

- ① 由辛钦大数定律知, θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 是相合估计
- ② θ 的MLE $\hat{\theta}$ 一般也是相合估计
- ③ θ 的相合估计不一定是无偏估计
- ④ 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 则由切比雪夫不等式有

$$P\{ |\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon \} \leq \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}$$

故当 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$ 时 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计(充分条件).

3. Consistency

例 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 $X \sim b(m, p)$ ($0 < p < 1$) 的样本, 求未知参数 p 的 MLE \hat{p} , 试证 \hat{p} 是 p 的无偏估计与相合估计.

解 似然函数为

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n C_m^{X_i} \right) \cdot p^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n (m-X_i)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n C_m^{X_i} \right) \cdot p^{n\bar{X}} \cdot (1-p)^{mn-n\bar{X}} \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n\bar{X}}{p} - \frac{mn-n\bar{X}}{1-p} = 0$, 求得 p 的 MLE 为 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$

$$\therefore E(\hat{p}) = \frac{E(\bar{X})}{m} = \frac{mp}{m} = p$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m} \xrightarrow{P} \frac{mp}{m} = p \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\therefore \hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$ 是 p 的无偏估计与相合估计.

4. MSE

1. 均方误差 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个估计(无偏的或有偏的), 则称

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)^2$$

为 $\hat{\theta}$ 的均方误差. 均方误差较小意味着: $\hat{\theta}$ 不仅方差较小, 而且偏差($E\hat{\theta} - \theta$) 也小, 所以均方误差是评价点估计的最一般标准.

5. UMVUE

2. 一致最小方差无偏估计 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计, 如果对另外任意一个 θ 的无偏估计 $\bar{\theta}$, 在参数空间 $\Theta = \{\theta\}$ 上都有

$$\text{Var}_{\theta}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}_{\theta}(\bar{\theta}),$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计, 简记为 UMVUE.

6. Interval Estimation

区间估计的定义

定义 设总体 $X \sim F(x; \theta)$ ($\theta \in \Theta$), $\forall 0 < \alpha < 1$, 若存在两个统计量

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n), \bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\underline{\theta} < \bar{\theta})$$

使得 $\forall \theta \in \Theta$ 有

$$P\{ \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \} \geq 1 - \alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间,
 $\underline{\theta}$ 、 $\bar{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限.

双侧置信区间

注

- ◆ 置信水平也称为置信度, 通常 α 较小, $1 - \alpha$ 较大
- ◆ 对于连续型总体, 则取 $P\{ \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \} = 1 - \alpha$
- ◆ 对于离散型总体, 则取 $P\{ \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} \}$ 尽可能接近 $1 - \alpha$
- ◆ 现今的区间估计理论是由原籍波兰的美国统计学家奈曼 (J. Neyman) 于20世纪30年代建立起来的.
- ◆ 求区间估计一般方法: 依据波动理论的枢轴量法

6. Interval Estimation

例 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本, 试求未知参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

分析 μ 的置信区间 $\leftrightarrow \mu$ 所在“范围”

由极大似然思想: \bar{X} 看似“最像” μ
由无偏估计理论: \bar{X} 应在 μ 附近“波动”

μ 所在“范围”应是
以 \bar{X} 为中心的“随机区间”

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间应满足

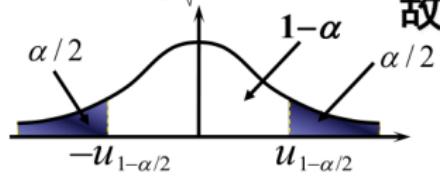
$$P\{\bar{X} - c < \mu < \bar{X} + c\} = 1 - \alpha$$

其中 c 是待定常数, 等价地有

$$P\{|\bar{X} - \mu| < c\} = 1 - \alpha$$

$$\therefore \frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \therefore P\{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu| < u_{1-\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为



$$\left(\bar{X} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right)$$

Homework

1. 设 总 体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为 其 样 本 . 试 求 k , 使

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \text{ 为 } \sigma^2 \text{ 的 无 偏 估 计.}$$

Homework

Solution

1. Solution. $X_{i+1} - X_i \sim N(0, 2\sigma^2)$, $i=1, \dots, n-1$.

Then, $\mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i)^2] = 2\sigma^2$, $i=1, \dots, n-1$.

Hence, if $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] = 2(n-1) \frac{1}{k} \sigma^2$.

then $k = 2n-2$. \square

Homework

2. 设从均值为 μ , 方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本. \bar{X}_1 和 \bar{X}_2 分别是两样本的均值. 试证, 对于任意 $a, b (a+b=1)$, $Y = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计, 并确定常数 a, b 使 $D(Y)$ 达到最小.

Homework

Solution

2. Solution. $E[Y] = (a+b)\mu = \mu$.

$$D(Y) = \left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2 = \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)a^2 - \frac{2}{n_2}a + \frac{1}{n_2}\right]\sigma^2$$

Hence, $a_{\min} = \frac{\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$.

$$b_{\min} = \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

Homework

3. 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布，概率密度为 \leftarrow

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \leftarrow$$

其中 $\theta > 0$ 未知. \leftarrow

- (1) 证明： \bar{X} 和 $n \cdot \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 都是未知参数 θ 的无偏估计. \leftarrow
- (2) 比较这两个估计量的有效性. \leftarrow

Homework

Solution

3. Solution. (1) $\mathbb{E} X = \theta$. Then, $\mathbb{E}(\bar{X}) = \theta$.

$$\mathbb{P}(X_{ij} > t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) = e^{-\frac{\theta}{n}t}, \text{ for } t > 0.$$

Then, $X_{ij} \sim \text{Exp}\left(\frac{\theta}{n}\right)$. Hence, $\mathbb{E}(nX_{ij}) = \theta$.

$$(2) D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{\theta^2}{n}.$$

$$D(nX_{ij}) = n^2 D(X_{ij}) = \theta^2 \geq D(\bar{X}).$$

Hence, \bar{X} is more efficient than nX_{ij} . \square

Supplement Exercises

14. 设 x_1, \dots, x_n 为独立分布同分布变量, $0 < \theta < 1$,

$$P(x_1 = -1) = \frac{1-\theta}{2}, P(x_1 = 0) = \frac{1}{2}, P(x_1 = 1) = \frac{\theta}{2},$$

(1) 求 θ 的 MLE $\hat{\theta}_1$, 并问 $\hat{\theta}_1$ 是否是无偏的;

(2) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$;

Supplement Exercises

Solution

解 (1) x_1 的密度函数可表示为

$$p(x, \theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}(x^2-x)} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x^2} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}(x^2+x)},$$

因此, 相应的对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(\theta; x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i) \ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) - \sum_{i=1}^n (1 - x_i^2) \ln 2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_i) \ln\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

关于 θ 求导并令其为 0, 可得,

$$\frac{dl(\theta; x_1, \dots, x_n)}{d\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i) \frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_i) \frac{1}{\theta} = 0,$$

解之有

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2 \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Supplement Exercises

Solution

(2) 因为 $E(x_1) = -1 \times \frac{1-\theta}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{\theta}{2} = \theta - \frac{1}{2}$, 所以 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_2 = \bar{x} + \frac{1}{2}.$$

Supplement Exercises

6. 设 x_1, x_2, x_3 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, 试证 $\frac{4}{3}x_{(3)}$ 及 $4x_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量, 哪个更有效?

Supplement Exercises

Solution

证 由 $X \sim U(0, \theta)$ 可知 $x_{(1)}, x_{(3)}$ 的密度函数分别为

$$f_1(x) = 3 \cdot \left(\frac{\theta - x}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta^3}(\theta - x)^2, 0 < x < \theta,$$

$$f_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta^3}x^2, 0 < x < \theta,$$

从而

$$Ex_{(1)} = \frac{3}{\theta^3} \int_0^\theta x(\theta - x)^2 dx = \frac{\theta}{4}, Ex_{(3)} = \frac{3}{\theta^3} \int_0^\theta x^3 dx = \frac{3}{4}\theta,$$

故, 由 $E(4x_{(1)}) = \theta, E\left(\frac{4}{3}x_{(3)}\right) = \theta$ 知两者均为 θ 的无偏估计.

又可算得

$$Ex_{(1)}^2 = \frac{1}{10}\theta^2, Ex_{(3)}^2 = \frac{3}{5}\theta^2,$$

从而

$$\text{Var}(4x_{(1)}) = \frac{3}{5}\theta^2, \text{Var}\left(\frac{4}{3}x_{(3)}\right) = \frac{\theta^2}{15}.$$

故 $\text{Var}\left(\frac{4}{3}x_{(3)}\right) < \text{Var}(4x_{(1)})$, 即 $\frac{4}{3}x_{(3)}$ 更有效.

Supplement Exercises

9. 设有 k 台仪器, 已知用第 i 台仪器测量时, 测定值总体的标准差为 σ_i ($i = 1, 2, \dots, k$). 用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次, 分别得到 x_1, \dots, x_k , 设仪器都没有系统误差. 问 a_1, \dots, a_k 应取何值, 方能使 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k a_i x_i$ 成为 θ 的无偏估计, 且方差达到最小?

Supplement Exercises

Solution

解 若要使 $\theta = \sum_{i=1}^k a_i x_i$ 为 θ 的无偏估计, 即

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = a_1 \theta + \cdots + a_k \theta = \theta \sum_{i=1}^k a_i = \theta,$$

则必须有 $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, 此时,

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = a_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + a_k^2 \sigma_k^2.$$

因此, 问题转化为在 $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ 的条件下, 求 $\sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2$ 的极小值.

令 $f(a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^k a_i - 1 \right)$, 由

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

得到

Supplement Exercises

Solution

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_i\sigma_i^2 - \lambda = 0, \\ \sum_{i=1}^k a_i = 1, \end{array} \right. \quad \textcircled{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_i\sigma_i^2 - \lambda = 0, \\ \sum_{i=1}^k a_i = 1, \end{array} \right. \quad \textcircled{2}$$

从 ① 中可以得到 $a_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$, 代入 ② 中, 解出 $\lambda = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2\sigma_i^2} \right)^{-1}$, 从而

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2} / \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Supplement Exercises

13. 设 x_1, \dots, x_n 是取自均匀分布总体 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的一个样本, 若分别取 $\hat{\theta}_1 = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ 作为 θ_1, θ_2 的估计量, 问 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是否为 θ_1, θ_2 的无偏估计量? 如果不是, 如何修正才能获得 θ_1, θ_2 的无偏估计.

Supplement Exercises

Solution

解 令 $Y = \frac{X - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$, 则 $Y \sim U(0, 1)$, 记 $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$ 为样本相应的次序统计量, 于是有 $Ey_{(1)} = \frac{1}{n+1}, Ey_{(n)} = \frac{n}{n+1}$, 从而

$$E\hat{\theta}_1 = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{1}{n+1} = \frac{\theta_2 + n\theta_1}{n+1},$$

$$E\hat{\theta}_2 = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{n}{n+1} = \frac{n\theta_2 + \theta_1}{n+1},$$

可见 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 不是 θ_1, θ_2 的无偏估计量. 由

Supplement Exercises

Solution

$$\begin{cases} n\theta_1 + \theta_2 = (n+1)Ex_{(1)}, \\ \theta_1 + n\theta_2 = (n+1)Ex_{(2)}, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{nEx_{(1)} - Ex_{(n)}}{n-1}, \\ \theta_2 = \frac{nEx_{(n)} - Ex_{(1)}}{n-1}, \end{cases}$$

因而 $\hat{\theta}_1 = \frac{nx_{(1)} - x_{(n)}}{n-1}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{nx_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}$ 是 θ_1, θ_2 的无偏估计量.

Supplement Exercises

9. 设 x_1, \dots, x_n 独立同分布, $E x_i = \mu$, $\text{Var}(x_i) < +\infty$, 证明: $\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i$ 是 μ 的相合估计.

Supplement Exercises

Solution

证 由于

$$E(\hat{\mu}) = \frac{2\mu}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{2\mu}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \mu,$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\mu}) &= \frac{4\text{Var}(x_1)}{n^2(n+1)^2} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{4\text{Var}(x_1)}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty),\end{aligned}$$

这就证明了 $\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n ix_i$ 是 μ 的相合估计.

Supplement Exercises

7. 总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 又 x_1, \dots, x_n 为取自该总体的样本, \bar{x} 为样本均值.

(1) 证明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计和相合估计;

(2) 求 θ 的最大似然估计, 它是无偏估计吗? 是相合估计吗?

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, 则 $E(X) = \frac{3\theta}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}$, 从而

$$E(\bar{x}) = \frac{3\theta}{2}, \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\theta^2}{12n}.$$

于是, $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}E(\bar{x}) = \theta$, 这说明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计. 进一步,

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{4}{9} \times \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{27n} \rightarrow 0.$$

这就证明了 $\hat{\theta}$ 也是 θ 的相合估计.

Supplement Exercises

8. 设 x_1, \dots, x_n 是来自密度函数为 $p(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$ 的样本,
- (1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_1$, 它是否是相合估计? 是否是无偏估计?
 - (2) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$, 它是否是相合估计? 是否是无偏估计?

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \{ e^{-(x_i-\theta)} I_{\{x_i > \theta\}} \} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n x_i + n\theta \right\} I_{\{x_{(1)} > \theta\}}.$$

显然 $L(\theta)$ 在示性函数为 1 的条件下是 θ 的严增函数, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$.

又 $x_{(1)}$ 的密度函数为 $f(x) = ne^{-n(x-\theta)}$, $x > \theta$, 故

$$E(\hat{\theta}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xne^{-n(x-\theta)} dx = \int_0^{+\infty} (t + \theta) ne^{-nt} dt = \frac{1}{n} + \theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ 不是 θ 的无偏估计, 但是 θ 的渐近无偏估计. 由于 $E(\hat{\theta}_1) \rightarrow \theta$ ($n \rightarrow +\infty$) 且

Supplement Exercises

Solution

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \int_{-\theta}^{+\infty} x^2 n e^{-n(x-\theta)} dx = \int_0^{+\infty} (t^2 + 2\theta t + \theta^2) n e^{-nt} dt = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\theta + \theta^2,$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

这说明 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的相合估计.

(2) 由于 $E(X) = \int_{-\theta}^{+\infty} x e^{-(x-\theta)} dx = \theta + 1$, 这给出 $\theta = EX - 1$, 所以 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_2 = \bar{x} - 1.$$

又 $E(X^2) = \int_{-\theta}^{+\infty} x^2 e^{-(x-\theta)} dx = \theta^2 + 2\theta + 2$, 所以 $\text{Var}(X) = 1$, 从而有

$$E(\hat{\theta}_2) = E(\bar{x}) - 1 = \theta, \text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n} \text{Var}(X) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty),$$

这说明 $\hat{\theta}_2$ 既是 θ 的无偏估计, 也是相合估计.

Supplement Exercises

7.7 Let X_1, \dots, X_n be iid with one of two pdfs. If $\theta = 0$, then

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

while if $\theta = 1$, then

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the MLE of θ .

Supplement Exercises

Solution

7.7 $L(0|\mathbf{x}) = 1$, $0 < x_i < 1$, and $L(1|\mathbf{x}) = \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$, $0 < x_i < 1$. Thus, the MLE is 0 if $1 \geq \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$, and the MLE is 1 if $1 < \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$.

Supplement Exercises

7.8 One observation, X , is taken from a $n(0, \sigma^2)$ population.

- (a) Find an unbiased estimator of σ^2 .
- (b) Find the MLE of σ .
- (c) Discuss how the method of moments estimator of σ might be found.

Supplement Exercises

Solution

7.8 a. $E X^2 = \text{Var } X + \mu^2 = \sigma^2$. Therefore X^2 is an unbiased estimator of σ^2 .

b.

$$L(\sigma|\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}. \quad \log L(\sigma|\mathbf{x}) = \log(2\pi)^{-1/2} - \log \sigma - x^2/(2\sigma^2).$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3} \stackrel{\text{set}}{=} 0 \Rightarrow \hat{\sigma}X^2 = \hat{\sigma}^3 \Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{X^2} = |X|.$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{-3x^2\sigma^2}{\sigma^6} + \frac{1}{\sigma^2}, \text{ which is negative at } \hat{\sigma} = |x|.$$

Thus, $\hat{\sigma} = |x|$ is a local maximum. Because it is the only place where the first derivative is zero, it is also a global maximum.

c. Because $E X = 0$ is known, just equate $E X^2 = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = X^2 \Rightarrow \hat{\sigma} = |X|$.

Supplement Exercises

7.13 Let X_1, \dots, X_n be a sample from a population with double exponential pdf

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Find the MLE of θ . (*Hint:* Consider the case of even n separate from that of odd n , and find the MLE in terms of the order statistics. A complete treatment of this problem is given in Norton 1984.)

Supplement Exercises

Solution

7.13 $L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_i \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|x_i - \theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_i |x_i - \theta|}$, so the MLE minimizes $\sum_i |x_i - \theta| = \sum_i |x_{(i)} - \theta|$, where $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ are the order statistics. For $x_{(j)} \leq \theta \leq x_{(j+1)}$,

$$\sum_{i=1}^n |x_{(i)} - \theta| = \sum_{i=1}^j (\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta) = (2j - n)\theta - \sum_{i=1}^j x_{(i)} + \sum_{i=j+1}^n x_{(i)}.$$

Supplement Exercises

Solution

This is a linear function of θ that decreases for $j < n/2$ and increases for $j > n/2$. If n is even, $2j - n = 0$ if $j = n/2$. So the likelihood is constant between $x_{(n/2)}$ and $x_{((n/2)+1)}$, and any value in this interval is the MLE. Usually the midpoint of this interval is taken as the MLE. If n is odd, the likelihood is minimized at $\hat{\theta} = x_{((n+1)/2)}$.

Supplement Exercises

1. 某厂生产的化纤强度服从正态分布,长期以来其标准差稳定在 $\sigma = 0.85$, 现抽取了一个容量为 $n = 25$ 的样本, 测定其强度, 算得样本均值为 $\bar{x} = 2.25$, 试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间.

Solution

解 这是方差已知时正态均值的区间估计问题. 由题设条件 $1 - \alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, 查表知 $u_{0.975} = 1.96$, 于是这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}] = [2.25 - 1.96 \times 0.85 / \sqrt{25}, 2.25 + 1.96 \times 0.85 / \sqrt{25}] = [2.25 - 0.333, 2.25 + 0.333],$$

即这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为 $[1.9168, 2.5832]$.

Supplement Exercises

2. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 同样本容量 n 取多大时才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k .

Supplement Exercises

Solution

解 由已知条件得 μ 的 0.95 置信区间为

$$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}] ,$$

其区间长度为 $2u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$, 若使 $2u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq k$, 只需

$$n \geq (2/k)^2 \sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2.$$

由于 $u_{1-\alpha/2} = 1.96$, 故 $n \geq (2/k)^2 \sigma^2 1.96^2 = \left(\frac{3.92\sigma}{k}\right)^2$, 即样本容量 n 至少取 $\left(\frac{3.92\sigma}{k}\right)^2$ 时, 才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k .

Supplement Exercises

4. 用一个仪表测量某一物理量 9 次, 得样本均值 $\bar{x} = 56.32$, 样本标准差 $s = 0.22$.

(1) 测量标准差 σ 大小反映了测量仪表的精度, 试求 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间;

(2) 求该物理量真值的置信水平为 0.99 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 此处 $(n - 1)s^2 = 8 \times 0.22^2 = 0.3872$, 查表知 $\chi^2_{0.025}(8) = 2.1797$, $\chi^2_{0.975}(8) = 17.5345$, σ^2 的 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right] = \left[\frac{0.3872}{17.5345}, \frac{0.3872}{2.1797} \right] = [0.0221, 0.1776]$$

从而 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间 $[0.1487, 0.4215]$.

Supplement Exercises

Solution

(2) 当 σ 未知时, μ 的 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}].$$

查表得 $t_{1-0.005}(8) = 3.3554$, 因而 μ 的置信水平为 0.99 的置信区间为

$$\begin{aligned} & [56.32 - 3.3554 \times 0.22/\sqrt{9}, 56.32 + 3.3554 \times 0.22/\sqrt{9}] \\ & = [56.0739, 56.5661]. \end{aligned}$$

Supplement Exercises

6. 在一批货物中随机抽取 80 件,发现有 11 件不合格品,试求这批货物的不合格品率的置信水平为 0.90 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 此处 $n = 80$ 较大, 可用正态分布求其近似置信区间. 不合格品率的 $1 - \alpha$ 近似置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right].$$

此处 $\bar{x} = \frac{11}{80} = 0.1375$, $u_{0.95} = 1.645$, 因而不合格品率的置信水平为 0.90 的

Supplement Exercises

Solution

置信区间为

$$\left[0.1375 - 1.645 \sqrt{\frac{0.1375 \times 0.8625}{80}}, 0.1375 + 1.645 \sqrt{\frac{0.1375 \times 0.8625}{80}} \right]$$
$$= [0.0742, 0.2008].$$

Supplement Exercises

9. 设从总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1 = 10, n_2 = 15$ 的独立样本, 可计算得 $\bar{x} = 82, s_x^2 = 56.5, \bar{y} = 76, s_y^2 = 52.4$.

(1) 若已知 $\sigma_1^2 = 64, \sigma_2^2 = 49$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 若已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(3) 若对 σ_1^2, σ_2^2 一无所知, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间;

(4) 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 在 σ_1^2, σ_2^2 都已知时, $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - \bar{y} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right].$$

经计算 $\bar{x} - \bar{y} = 6$, 查表得 $u_{0.975} = 1.96$, 因而 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[6 - 1.96 \sqrt{\frac{64}{10} + \frac{49}{15}}, 6 + 1.96 \sqrt{\frac{64}{10} + \frac{49}{15}} \right] = [-0.0939, 12.0939].$$

(2) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 的置信区间为

Supplement Exercises

Solution

$$\left[\bar{x} - \bar{y} - \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} s_w t_{1-\alpha/2} (n_1 + n_2 - 2), \bar{x} - \bar{y} + \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} s_w t_{1-\alpha/2} (n_1 + n_2 - 2) \right].$$

这里 $s_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{9 \times 56.5 + 14 \times 52.4}{23} = 54.0043$, 而

$t_{0.975}(23) = 2.0687$, 因而 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[82 - 76 - 2.0687 \sqrt{54.0043}, 82 - 76 + 2.0687 \sqrt{54.0043} \right]$$

$$\sqrt{\frac{10 + 15}{10 \times 15}} = [-0.2063, 12.2063].$$

Supplement Exercises

Solution

(3) 当 σ_1^2, σ_2^2 未知时, 由于两个样本量不是很大, 故可采用一般场合下的近似置信区间, 即 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 的近似置信区间为

$$[\bar{x} - \bar{y} - s_0 t_{1-\alpha/2}(l), \bar{x} - \bar{y} + s_0 t_{1-\alpha/2}(l)].$$

这里

$$s_0^2 = \frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2} = \frac{56.5}{10} + \frac{52.4}{15} = 9.1433,$$

$$l = \frac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{n_1(n_1-1)} + \frac{s_y^4}{n_2(n_2-1)}} = \frac{9.1433^2}{\frac{56.5^2}{900} + \frac{52.4^2}{3150}} = 18.9199 \doteq 19$$

又查表得 $t_{0.975}(19) = 2.0930$, 因而 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间为

$$\begin{aligned} & [82 - 76 - 2.0930 \sqrt{9.1433}, 82 - 76 + 2.0930 \sqrt{9.1433}] \\ & = [-0.3288, 12.3288]. \end{aligned}$$

Supplement Exercises

Solution

(4) σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right].$$

查表得 $F_{0.975}(9, 14) = 3.21$, $F_{0.025}(9, 14) = \frac{1}{F_{0.975}(14, 9)} = \frac{1}{3.80}$, 因而 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{56.5}{52.4} \cdot \frac{1}{3.21}, \frac{56.5}{52.4} \cdot \frac{1}{3.80} \right] = [0.3359, 4.0973].$$

Supplement Exercises

10. 假设人体身高服从正态分布,今抽测甲、乙两地区 18 岁 ~ 25 岁女青年身高得数据如下:甲地区抽取 10 名,样本均值 1.64 m,样本标准差 0.2 m;乙地区抽取 10 名,样本均值 1.62 m,样本标准差 0.4 m. 求:
- (1) 两正态总体方差比的置信水平为 95% 的置信区间;
 - (2) 两正态总体均值差的置信水平为 95% 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 设 x_1, \dots, x_{10} 为甲地区抽取的女青年身高, y_1, \dots, y_{10} 为乙地区抽取的女青年身高, 由题设条件, $\bar{x} = 1.64, s_x = 0.2, \bar{y} = 1.62, s_y = 0.4$.

(1) $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ 的 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)} \right].$$

此处 $\alpha = 0.05, m = n = 10$, 查表得 $F_{0.975}(9, 9) = 4.03, F_{0.025} = \frac{1}{F_{0.975}(9, 9)} = \frac{1}{4.03}$, 由

此, $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{0.2^2}{0.4^2} \cdot \frac{1}{4.03}, \frac{0.2^2}{0.4^2} \cdot \frac{1}{4.03} \right] = [0.062, 1.0075].$$

Supplement Exercises

Solution

(2) 由(1), $\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{y}}^2}$ 的置信水平为 95% 的置信区间包含 1, 因此有一定理由假

定两个正态总体的方差相等, 此时,

$$s_w^2 = \frac{(m - 1)s_x^2 + (n - 1)s_y^2}{m + n - 2} = \frac{9 \times 0.2^2 + 9 \times 0.4^2}{10 + 10 - 2} = \frac{1.8}{18} = 0.1,$$

查表得 $t_{0.975}(18) = 2.1009$, 故两正态总体均值差的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\begin{aligned} & \left[1.64 - 1.62 - 2.1009\sqrt{0.1} \sqrt{\frac{10 + 10}{10 \times 10}}, 1.64 - 1.62 + 2.1009\sqrt{0.1} \sqrt{\frac{10 + 10}{10 \times 10}} \right] \\ & = [-0.2771, 0.3171]. \end{aligned}$$

Supplement Exercises

Solution

还有另一种解法就是不对方差相等作假定,而采用近似方法求均值差的置信区间,由于

$$s_0^2 = \frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n} = \frac{0.04}{10} + \frac{0.16}{10} = 0.02, l = \frac{0.02^2}{\frac{0.04^2}{900} + \frac{0.16^2}{900}} = 13,$$

查表知 $t_{0.975}(13) = 2.1604$, 从而两正态总体均值差的置信水平为 95% 的近似置信区间为

$$\begin{aligned} & [1.64 - 1.62 - 2.1604\sqrt{0.02}, 1.64 - 1.62 + 2.1604\sqrt{0.02}] \\ & = [-0.2855, 0.3255]. \end{aligned}$$

这两个置信区间相差不算太小,所以在应用中条件“方差相等”是否成立是要加以考证的.

Supplement Exercises

20. 随机选取 9 发炮弹, 测得炮弹的炮口速度的样本标准差 $s = 11 \text{ m/s}$, 若炮弹的炮口速度服从正态分布, 求其标准差 σ 的 0.95 置信上限.

Supplement Exercises

Solution

解 在正态分布下, 对样本方差 s^2 有 $\frac{8s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$, 从而有 $P\left(\frac{8s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_\alpha(8)\right) = 1 - \alpha$, 等价地, $P\left(\sigma \leq \sqrt{\frac{8s^2}{\chi^2_\alpha(8)}}\right) = 1 - \alpha$, 故标准差 σ 的 $1 - \alpha$ 置信上限为

$$\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{8s^2}{\chi^2_\alpha(8)}}.$$

现 $\alpha = 0.05$, 查表知 $\chi^2_{0.05}(8) = 2.7326$, 故标准差 σ 的 0.95 置信上限为

$$\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{8 \times 11^2}{2.7326}} = 18.82.$$

Thank you!