

《 概 率 论 与 数 理 统 计 》 试卷 A

(考试时间: 90 分钟; 考试形式: 闭卷)

(注意: 请将答案填写在答题专用纸上, 并注明题号。答案填写在试卷和草稿纸上无效)

一、单项选择题(本大题共 20 小题, 每小题 2 分, 共 40 分)

1、A, B 为二事件, 则 $\overline{A \cup B} = (\quad)$

A、 AB B、 \overline{AB} C、 $A\overline{B}$ D、 $\overline{A} \cup \overline{B}$

2、设 A, B, C 表示三个事件, 则 $\overline{A} \overline{B} \overline{C}$ 表示()

A、A, B, C 中有一个发生
B、A, B, C 中恰有两个发生
C、A, B, C 中不多于一个发生 D、A, B, C 都不发生

3、A, B 为两事件, 若 $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A) = 0.2$, $P(\overline{B}) = 0.4$,

则()成立

A、 $P(A\overline{B}) = 0.32$ B、 $P(\overline{A}\overline{B}) = 0.2$
C、 $P(B - A) = 0.4$ D、 $P(\overline{B}A) = 0.48$

4、设 A, B 为任二事件, 则()

A、 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ B、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
C、 $P(AB) = P(A)P(B)$ D、 $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

5、设事件 A 与 B 相互独立, 则下列说法错误的是()

A、A 与 \overline{B} 独立 B、 \overline{A} 与 \overline{B} 独立
C、 $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$ D、A 与 B 一定互斥

6、设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

其分布函数为 $F(x)$, 则 $F(3) = (\quad)$

A、0 B、0.3 C、0.8 D、1

7、设离散型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} cx^4, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则常数 $c = (\quad)$

A、 $\frac{1}{5}$ B、 $\frac{1}{4}$ C、4 D、5

8、设 $X \sim N(0,1)$ ，密度函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，则 $\varphi(x)$ 的最大值是()

- A、0 B、1 C、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ D、 $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

9、设随机变量 X 可取无穷多个值 $0, 1, 2, \dots$ ，其概率分布为 $p(k;3) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, k=0,1,2,\dots$ ，则下式成立的是

()

- A、 $EX = DX = 3$ B、 $EX = DX = \frac{1}{3}$
C、 $EX = 3, DX = \frac{1}{3}$ D、 $EX = \frac{1}{3}, DX = 9$

10、设 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，则有()

- A、 $E(2X-1) = 2np$ B、 $D(2X+1) = 4np(1-p)+1$
C、 $E(2X+1) = 4np+1$ D、 $D(2X-1) = 4np(1-p)$

11、独立随机变量 X, Y ，若 $X \sim N(1, 4)$ ， $Y \sim N(3, 16)$ ，下式中不成立的是()

- A、 $E(X+Y) = 4$ B、 $E(XY) = 3$ C、 $D(X-Y) = 12$ D、 $E(Y+2) = 16$

12、设随机变量 X 的分布列为：

则常数 $c = ()$

X	1	2	3
p	1/2	c	1/4

- A、0 B、1 C、 $\frac{1}{4}$ D、 $-\frac{1}{4}$

13、设 $X \sim N(0,1)$ ，又常数 c 满足 $P\{X \geq c\} = P\{X < c\}$ ，则 c 等于()

- A、1 B、0 C、 $\frac{1}{2}$ D、-1

14、已知 $EX = -1$ ， $DX = 3$ ，则 $E[3(X^2 - 2)] = ()$

- A、9 B、6 C、30 D、36

15、当 X 服从()分布时， $EX = DX$ 。

- A、指数 B、泊松 C、正态 D、均匀

16、下列结论中，()不是随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件。

- A、 $E(XY) = E(X)E(Y)$ B、 $D(X+Y) = DX + DY$
C、 $Cov(X, Y) = 0$ D、 X 与 Y 相互独立

17、设 $X \sim b(n, p)$ 且 $EX = 6$ ， $DX = 3.6$ ，则有()

A、 $n=10, p=0.6$ B、 $n=20, p=0.3$

C、 $n=15, p=0.4$ D、 $n=12, p=0.5$

18、设 $p(x, y), p_\xi(x), p_\eta(y)$ 分别是二维随机变量 (ξ, η) 的联合密度函数及边缘密度函数，则()是 ξ 与 η 独立的充要条件。

A、 $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ B、 $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

C、 ξ 与 η 不相关 D、对 $\forall x, y$, 有 $p(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y)$

19、设是二维离散型随机变量，则 X 与 Y 独立的充要条件是()

A、 $E(XY) = EXEY$ B、 $D(X+Y) = DX + DY$ C、 X 与 Y 不相关

D、对 (X, Y) 的任何可能取值 (x_i, y_j) $P_{ij} = P_{i\cdot} P_{\cdot j}$

20、设 (X, Y) 的联合密度为 $p(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

若 $F(x, y)$ 为分布函数，则 $F(0.5, 2) = (\quad)$

A、0 B、 $\frac{1}{4}$ C、 $\frac{1}{2}$ D、1

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、若事件 A 与 B 相互独立， $P(A) = 0.8$ $P(B) = 0.6$ 。求： $P(A+B)$ 和 $P\{\bar{A}|(A+B)\}$

2、设随机变量 $X \sim N(2, 4)$ ，且 $\Phi(1.65) = 0.95$ 。求 $P(X \geq 5.3)$

3、已知连续型随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ ，求 $E\xi$ 和 $D\xi$ 。

4、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x \quad -\infty < x < +\infty$

求：（1）常数 A 和 B ；
（2） X 落入 $(-1, 1)$ 的概率；
（3） X 的密度函数 $f(x)$

5、某射手有 3 发子弹，射一次命中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，如果命中了就停止射击，
否则一直独立射到子弹用尽。
求：（1）耗用子弹数 X 的分布列；（2） EX ；（3） DX

6、设 (ξ, η) 的联合密度为 $p(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

求：(1) 边际密度函数 $p_\xi(x), p_\eta(y)$ ；(2) $E\xi, E\eta$ ；(3) ξ 与 η 是否独立

三、解答题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本，下列

三个估计量是不是参数 μ 的无偏估计量，若是无偏估计量，试判断哪一个较优？

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2。$$

2、设 $\xi \sim f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\theta > 0)$ x_1, x_2, \dots, x_n 为 ξ 的一组观察值，求 θ 的极大似然估计。

概率论与数理统计试卷答案及评分标准

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	D	D	D	D	C	A	D
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	C	C	B	B	B	D	C	D	D	B

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、解：∵A 与 B 相互独立

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6$$

$$= 0.92 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } P(\bar{A}|A+B) = \frac{P[\bar{A}(A+B)]}{P(A+B)} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{P(\bar{A}B)}{P(A+B)} = \frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A+B)} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 0.13 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2、\text{解： } P(X \geq 5.3) = 1 - \Phi\left(\frac{5.3-2}{2}\right) \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$= 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.95 = 0.05 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$3、\text{解：由已知有 } \xi \sim U(0,4) \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{则： } E\xi = \frac{a+b}{2} = 2 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$4、\text{解：(1)由 } F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

$$\text{有：} \begin{cases} A - \frac{\pi}{2}B = 0 \\ A + \frac{\pi}{2}B = 1 \end{cases}$$

$$\text{解之有： } A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$(2) P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(3) f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

5、解：(1)

.....

X	1	2	3
P	2/3	2/9	1/9

(3 分)

$$(2) EX = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{13}{9} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(3) \because EX^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} = \frac{23}{9}$$

$$\therefore DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

6、解：(1) $\because p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_0^1 4xy dy = 2x$

$$\therefore p_{\xi}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

同理： $p_{\eta}(x) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$$(2) E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

同理： $E\eta = \frac{2}{3} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(3) \because p(x, y) = p_{\xi}(x) p_{\eta}(y)$$

$$\therefore \xi \text{ 与 } \eta \text{ 独立} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

三、应用题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、解： $\because E\hat{\mu}_1 = E\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) = \mu$

同理： $E\hat{\mu}_2 = E\hat{\mu}_3 = \mu$

$$\therefore \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3 \text{ 为参数 } \mu \text{ 的无偏估计量} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \because D\hat{\mu}_1 = D\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) = \frac{4}{9}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$$\text{同理： } D\hat{\mu}_2 = \frac{10}{16}\sigma^2, D\hat{\mu}_3 = \frac{2}{4}\sigma^2$$

$$\text{且 } D\hat{\mu}_3 < D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_2$$

$\therefore \hat{\mu}_3$ 较优 (6 分)

2、解： x_1, x_2, \dots, x_n 的似然函数为：

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\ln(L) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d \ln(L)}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解之有： $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$