高数复习

第一章：极限、可导、可微、可积

一、 极限(f(x0+◦))

自变量趋近有限值时函数的极限：

定义：设函数f(x)在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，都$\exists\delta>0$，使不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$ 在 $|x-x_0|\in(0,\delta)$ 时恒成立，那么常数 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 。

自变量趋近无穷值时函数的极限：

定义：设函数f(x)当|x| 大于某一正数时有定义，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，总存在正数M，使得当x满足不等式 $|x|>M$ 时，$\forall f(x)$ 都满足 $|f(x)-a|<\varepsilon$ ，那么常数 a 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 。

1. 反函数存在定理：若函数 f(x)是单调函数，则其必有反函数，且反函数与其单调性相同。
2. 数列的有界性
   1) 数列收敛必有界
   2) 数列无界必发散
   3) 数列单调有界必收敛
3. 重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$
4. 无穷小：极限为 0 的函数，而 0 是一个数。

二、 可导（f'(x0)=[f(x0+◦)-f(x0)]/◦）

1. 可导定义：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ （针对一元函数，多元函数没有这种说法）
2. 函数 f(x)在 x0 处可导==函数 f(x)在 x0 处左右导数存在且相等==函数 f(x) 在 x0 处连续，在 x0 处导函数的左右极限存在且相等、不为 0（即函数可导→函数连续但导数不一定连续）
3. 导数不是极限，左右导数也不是左右极限
4. 反函数的导数==直接导数的倒数
5. N 阶导数：$\frac{d^n y}{dx^n}$
6. 可偏导：函数对该点所有变量的偏导数都存在。

三、 可微

1. 一元函数的可微：一元函数的可微与可导等价，A=f'(x)

设函数 $y=f(x)$ 定义在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，当给 x_0 一个增量 Δx ， $x_0+\Delta x\in U(x_0)$ 时，相应地得到函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果存在常数A，使得 Δy 能表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1)$$

则称函数f在点 x_0 可微，并称（1）式中的第一项 $A\Delta x$ 为f在点 x_0 的微分，记作 [1]

$$dy|_{x=x_0}=A\Delta x \quad or \quad df(x)|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

2. **二元函数的可微（全增量存在）：可微一定可偏导，但可偏导不一定可微。**
   1) **可微则偏导数都存在但偏导数不一定连续。（可微→可偏导，函数连续）**
   2) **若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某领域上存在，且 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，则函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微。（偏导数连续→可微）**

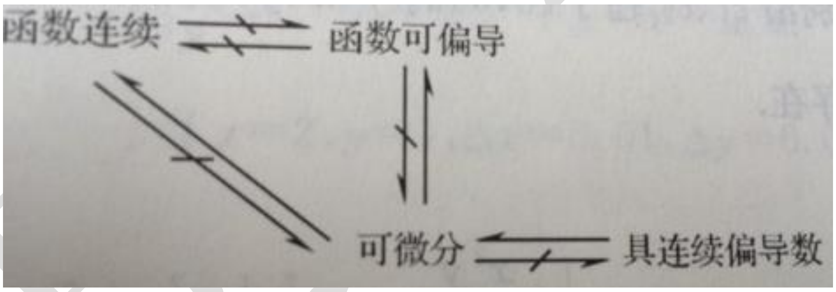
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某领域 $U(P_0)$ 上有定义，对于 $U(P_0)$ 中的点 $P(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ ，若函数f在点 P_0 处的全增量 Δz 可表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \qquad (2)\end{aligned}$$

其中A,B是仅与点 P_0 有关的常数， $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ， $o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小量，则称函数f在点 P_0 可微。并称（2）式中关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 f在点 P_0 的全微分 [2] ，记作

$$dz|_{P_0}=df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y. \qquad (3)$$

3. **总结（适用于多元函数）**



四、 可积

1. **函数在区间[a,b]可积的条件（二者满足一个即可）：**
   1) **函数在[a,b]上连续**
   2) **函数在[a,b]上有界且只有有限个第一类间断点**
2. **微积分基本公式（牛顿莱布尼茨公式）：** $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b.$
3. **积分的应用：**
   1) **函数 f(x)-g(x)的积分的绝对值即为函数 f(x)与 g(x)围成的面积**
   2) **若物体的面积函数在与面积垂直的轴上的积分为物体的体积**
   3) **曲线 f(x)在 x=a 和 x=b 间的曲线弧长为** $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$

第二章：微分中值定理与函数展开

一、 微分中值定理

1. **费马引理：函数 f(x)在点 ξ 的某邻域 U（ξ)内有定义，并且在 ξ 处可导，如果对于任意的 x∈U（ξ)，都有 f(x)≤f(ξ) (或 f(x)≥f(ξ))，那么 f '(ξ）=0。**
2. **罗尔中值定理：如果 函数 f(x) 满足以下条件：(1) 在闭区间 [a,b] 上连续，(2) 在开区间 (a,b) 内可导，(3) f(a)=f(b)，则至少存在一个 ξ∈(a,b)，使得 f'(ξ)=0。**
   证明：通过费马定理
   因为函数 f(x) 在闭区间[a,b] 上连续，所以存在最大值与最小值，分别用 M 和 m 表示，分两种情况讨论：
   1. 若 M=m，则函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上必为常函数，结论显然成立。
   2. 若 M>m，则因为 f(a)=f(b) 使得最大值 M 与最小值 m 至少有一个在 (a,b) 内某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 f(x)的极值点，又条件 f(x) 在开区间 (a,b) 内可导得，f(x) 在 ξ 处取得极值，由费马引理推知：f'(ξ)=0。
   另证：若 M>m，不妨设 f(ξ)=M，ξ∈(a,b)，由可导条件知，f'(ξ+)<=0，f'(ξ-)>=0，又由极限存在定理知左右极限均为 0，得证。
3. **拉格朗日中值定理：如果函数 f(x)满足：(1）在闭区间 [a,b] 上连续，(2）在开区间 (a,b) 内可导。那么在开区间(a,b)内至少有一点 $\varepsilon\,(a<\varepsilon<b)$ 使等式 $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$ 成立。**
   证明：通过罗尔中值定理构造辅助函数
   构造辅助函数 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 可得 g(a)=g(b)。又因为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，所以根据罗尔定理可得必有一点 $\varepsilon\in(a,b)$ 使得 $g'(\varepsilon)=0$。由此可得 $g'(\varepsilon)=f'(\varepsilon)-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=0$。变形得 $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$。
4. **柯西中值定理：设函数 $f(x),g(x)$ 满足：(1）在闭区间 [a,b] 上连续，(2）在开区间 (a,b) 内可导，(3)对任意 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立。**
   证明：通过罗尔中值定理构造辅助函数
   构造辅助函数 $F(x)=[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $F(a)=F(b)=0$。由罗尔定理可

知，存在$\xi \in (a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即$[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$，

又$g'(x)\neq 0$，所以有$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

二、 泰勒公式（泰勒展开）

1. **定义：若函数 f（x）在包含 x0 的某个闭区间[a,b]上具有 n 阶导数，且在开区间（a,b）上具有（n+1）阶导数，则对 [a,b]上任意一点 x，成立下式：**

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，等号后的多项式称为函数 f（x）在 x0 处的泰勒展开式，剩余的 Rn（x）是泰勒公式的余项，是（x-x0）^{n}的高阶无穷小。

2. **常见余项：**

   1) **皮亚诺余项：**$R_n(x)=\mathrm{o}[(x-x_0)^n]$**，这里只需要 n 阶导数存在。**

   2) **拉格朗日余项：**$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$**，其中 θ∈（x0,x）。**

3. **证明：**

   1) **主体证明：**

因为$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha$，其中误差 α 是在 Δx→0 即 x→x0 的前提下才趋向于 0，所以在近似计算中往往不够精确。于是我们需要一个能够足够精确的且能估计出误差的多项式：$P(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n$来近似地表示函数 f(x)

且要写出其误差 f（x）-P（x）的具体表达式。设函数 P（x）满足：$P(x_0)=f(x_0)$，

$P'(x_0)=f'(x_0)$，$P''(x_0)=f''(x_0)$，…，$P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$。

于是可以依次求出 A0、A1、A2、……、An，显然有：$P(x_0)=A_0$，$P'(x_0)=A_1$，

$P''(x_0)=2!A_2$，…，$P^{(n)}(x_0)=n!A_n$。得：

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

   2) **拉格朗日余项证明：（n+1 次柯西中值定理）**

由于$R_n(x_0)=f(x_0)-P(x_0)=0$，进而$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

根据柯西中值定理：$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\theta_1)}{(n+1)}(\theta_1-x_0)^{-n}$，

其中 θ1 在 x 和 x0 之间；继续使用柯西中值定理得到：

$\frac{R_n'(\theta_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\theta_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\theta_2)}{n(n+1)}(\theta_2-x_0)^{1-n}$，其中 θ2 在 θ1 和 x0 之间；

连续使用 n+1 次后得到：$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$，其中 θ 在 x 和 x0 之间。

因为 Pn(x) 的 n+1 阶导数为 0，故由 $R_n(x_0)=f(x_0)-P(x_0)=0$ 得 $R_n^{(n+1)}(\theta)=f^{(n+1)}(\theta)$，故 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。

4. **麦克劳林展开：x0=0 情况下的泰格展开**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

三、 函数的凹凸性

1. **驻点：一阶导数为 0 的点；拐点：二阶导数为 0 的点**
2. **凸函数：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，x1、x2 为区间上任意两点，开区间上满足二阶导数恒小于 0。证明：通过拉格朗日中值定理。**
3. **凹函数：与凸函数相反。**

四、 傅里叶级数（傅里叶展开）

1. **傅里叶展开：$s_N(x)$ 为周期为 P 的周期函数，则：**

$$S_N x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{P}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{P}\right)$$

其中，$a_n=\frac{2}{P}\int_{x_0}^{x_0+P}s(x)\cdot\cos(\tfrac{2\pi nx}{P})\,dx, b_n=\frac{2}{P}\int_{x_0}^{x_0+P}s(x)\cdot\sin(\tfrac{2\pi nx}{P})\,dx,$

2. **意义：任意周期信号可以通过傅里叶变化分解为直流分量和一组不同幅值、频率、相位的正弦波，即用三角函数之和近似表示复杂的周期函数。**

五、 欧拉公式

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，**当 x=π时，**$e^{i\pi}+1=0$

第三章：向量场与数量场

一、 向量的内积和外积

1. 内积（数量积/点乘）：得到的是一个数

   若向量 a 和 b：$a=[a_1,a_2,\ldots a_n]$，$b=[b_1,b_2,\ldots b_n]$，则二者的内积为：

   $$a\bullet b=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,\quad a\bullet b=|a||b|\cos\theta$$

2. 外积（向量积/叉乘）：得到的是一个向量

若向量 a 和 b：$a=(x_1,y_1,z_1)$，$b=(x_2,y_2,z_2)$，则二者的外积为：$a\times b=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，

$i=(1,0,0)\quad \mathrm{j}=(0,1,0)\quad \mathrm{k}=(0,0,1)$，|axb|=|a||b|sin(a,b)。

3. 混合积：得到的是一个数

   设 a，b，c 是空间中三个向量，则 (a×b)·c 称为三个向量 a，b，c 的混合积，记作[a b c]，$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$。

二、 数量场与向量场

1. 物理量通常都由其空间位置和时间确定，物理量在空间或空间-时间的分布称为这个物理量的场(field). 如果物理量是数量，称为数量场（Scalar field). 如果物理量是向量，称为向量场（Vector field). 例如大气中的温度分布是数量场，大气流动时的速度分布是向量场。
2. 数量场（f）：梯度（本身是个向量）
3. 向量场（F）：散度（本身是个数）、旋度（本身是个向量）

三、 梯度（gradf）

1. 方向导数（增长率/倾斜程度）：一个数

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$

沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

的方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

定理 (方向导数存在的充分条件)
如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微分，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，并且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

计算：方向导数=梯度 · l 的单位向量 $\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}f\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$

2. 梯度：一个向量 $\mathrm{grad}f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ 称为函数 $f(x,y)$ 的梯度
3. 梯度的意义：函数沿梯度方向增长最快，且梯度方向垂直于此处的等值线。梯度表示某一函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值，即函数在该点处沿着该方向（此梯度的方向）变化最快，变化率最大（为该梯度的模）。

四、 散度（divF/▽·F）

1. 散度：一个数，对应内积 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}:=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$
2. 意义：散度表征空间各点矢量场发散的强弱程度，物理上，散度的意义是场的有源性（源的强度）。当 div F>0 ，表示该点有散发通量的正源（发散源）；当 div F<0 表示该点有吸收通量的负源（洞或汇）；当 div F=0，表示该点无源。

五、 旋度（rotF/▽XF）

1. 旋度：一个向量，对应外积 $$\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$$
2. 意义：旋度表示三维向量场对某一点附近的微元造成的旋转程度（环流量强度）。这个向量提供了向量场在这一点的旋转性质。

六、 散度与旋度

- 通量是单位时间内通过的某个曲面的量
- 散度是通量强度
- 环流量是单位时间内环绕的某个曲线的量
- 旋度是环流量强度