离散数学复习

第一章：数理逻辑

一、 联结词

1. **P→Q:仅当 P 为 T、Q 为 F 时 P→Q 为 F**
2. **P⇆ Q:相当于同或，P 和 Q 真假性相同时 P⇆ Q 为 T，否则为 F**
3. **条件否定（与 P→Q 相反）、异或（不可兼或，P 和 Q 真假性相同时为 F）、或非（析取的否定，↑）、与非（合取的否定，↓）**
4. 优先顺序：¬ >合取∧>析取∨>→>⇆
5. 常见公式

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P, P \wedge P \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P, P \wedge T \Leftrightarrow P$
零 律	$P \vee T \Leftrightarrow T, P \wedge F \Leftrightarrow F$
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T, P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

蕴含等价式：P→Q ⇆ ¬ P∨Q

二、 蕴含式、等价式和对偶式

1. 重言式（永真式）、矛盾式（永假式）、偶然式
   可满足式：包括重言式和偶然式
2. **蕴含**:若 A→B 是一个重言式，就称作 A 蕴含 B，记作 A⇒B
3. **证明蕴含式 A⇒B 的两种方法：**
   ①肯定前件，推出后件为真
   ②否定后件，推出前件为假
   具体而言：
   ①一边只有∨：设为真

②一边只有∧：设为假

4. 等价式：当且仅当 A⇒B 且 B⇒A 时，A⇔B
5. 任意命题公式都可由仅含{非，析取}或{非，合取}的命题公式来等价地表示
6. **对偶式**：将**仅含有联结词非、析取、合取**（若不满足，需先做转换）的命题公式 A 中的析取变合取，合取变析取，T 变 F，F 变 T 得到的命题公式 A*称为 A 的对偶式
7. 对偶式的扩展：任意/存在互换，蕴含的方向互换

三、 范式

1. 几个定义
   1) 析取式：否定+析取
   2) 合取式：否定+合取
   3) 析取范式：（合取式）析取（合取式）……析取（合取式）。内合外析
   4) 合取范式：（析取式）合取（析取式）……合取（析取式）。内析外合
2. 对于任何一个命题公式，都可以求得它的合取范式或者析取范式
   1) 将公式中的联结词都归约成非、析取和合取
   2) 利用德摩根定律将否定联结词直接移到各命题变元之前
   3) 利用分配律、结合律将公式归约成合取范式或析取范式
3. **极小项**：一个含 n 个命题变元的**合取式**，如果其中每个变元与其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次

   性质：真值指派和编码相同时为**真**，其余为假；任意两个不同极小项的合取式永假，所有极小项的析取式永真
4. **主析取范式**：仅由**极小项**析取得到，一个命题的主析取范式是唯一的
5. **极大项**：一个含 n 个命题变元的**析取式**，如果其中每个变元与其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次

   性质：真值指派和编码相同时为**假**，其余为真；任意两个不同极大项的析取式永真，所有极小项的和取式永假
6. **主合取范式**：仅由**极大项**析取得到，一个命题的主合取范式是唯一的

四、 谓词逻辑

1. **$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$; $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$**
2. **前束范式**：一切量词都未被否定地处于公式的最前端且其辖域都延伸至公式的末端的谓词演算公式。任一谓词公式均和一个前束范式等价。

第二章：集合论

一、 集合

1. 集合 A 的幂集ρ(A)：由 A 的一切子集(包括空集和 A 自身)为元素形成的集合。

   若|A|=n，则|ρ(A)|=2^n
2. 补集：
   1) B 相对于 A 的补集：A-B=A∩~B=A-(A∩B)
   2) （全集相对于）A 的补集：E-A=~A
   3) ~补集符号相当于非符号，其满足德摩根律
3. 对称差 S=A⊕B：S 的元素或者属于 A，或者属于 B，但不能既属于 A 又属于 B
4. 容斥原理

   二集合：|A1∪A2|=|A1|+|A2|-|A1∩A2|；多集合：（偶减奇加）

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j:\ 1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{i,j,k:\ 1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|$$

二、 笛卡尔积

1. N 元祖：一个序偶，第一元素是一个 n-1 序偶，第二元素是一个值
2. 序偶：特指二元组
3. 笛卡尔积（直积，AXB）：第一元素是 A 的元素，第二元素是 B 的元素
   1) 不满足交换律和结合律
   2) AXB⊆CXD ⇔A⊆C&&B⊆D

三、 关系

1. 二元关系：两个集合 A 和 B 的笛卡尔积 AXB 的任意子集 R，称为集合 A 到 B 上的二元关系，表示为<a,b>∈R。其中所有的 a 的集合叫前域，所有的 b 的集合叫值域，二者的合集叫域。
2. 二元关系的性质：
   1) 两个关系进行交并补运算后仍是 R 上的关系
   2) 自反：对任意 x，<x,x>∈R
   3) 对称：对任意 x,y，<x,y>∈R 则<y,x>∈R
   4) 反自反：对任意 x，<x,x>∉R
   5) 反对称：对任意 x,y，<x,y>∈R 则<y,x>∉R
   6) 可能有一种关系既是对称的又是反对称的（若 x!=y 则<x,y>∉R）
3. 复合关系

   定义：RoS 为 R 与 S 的复合关系。例如 R={<a,b>},S={<b,c>},那么 RoS={<a,c>}

   性质：满足结合律但不满足交换律

   求解：布尔乘法：类似于矩阵乘法，但其中的布尔值加法是二进制加法
4. 逆关系

   定义：记作 R^{-1}，将 R 中的所有序偶反向。

   特征：体现在关系矩阵上就是 R 与其逆关系的关系矩阵**互为转置矩阵**

   性质：逆运算对交、并、差运算可分配

（RoS）$^{-1}$ = S^{-1} o R^{-1}（位置互换）

四、 关系的闭包

1. R 的**自反闭包** r（R）是包含 R 的最小的、自反的关系集合
   1) R 是自反的当且仅当 r（R）=R
   2) r（R）=R U IA（集合 A 上的相等关系，也就是矩阵的对角线元素）
2. R 的**对称闭包** s（R）是包含 R 的最小的、对称的关系集合
   1) R 是对称的当且仅当 s（R）=R
   2) s（R）=R U R^{-1}（R 的逆关系）
3. R 的**传递闭包** t（R）是包含 R 的最小的、传递的关系集合
   1) R 是传递的当且仅当 t（R）=R
   2) t（R）= R U R^2 U……U R^n（一般只需做几次复合运算，找出循环，n=|A|）
   3) 利用沃舍尔（warshall）算法求传递闭包：
   对矩阵 M 一列一列地看，其中第 k 列的 k1,k2,k3,…行为 1，则将整个矩阵 M 的第 k1,k2,k3,…行分别与第 k 行逻辑相加（1+1=1，0+1=1 这种）
4. 设 R 是集合 A 上的二元关系，则有
   1) 如果 R 是自反的，那么 s（R）和 t（R）也是自反的。
   2) 如果 R 是对称的，那么 r（R）和 t（R）也是对称的。
   3) 如果 R 是传递的，那么 r（R）也是传递的，但 s（R）不是传递的。
5. 闭包运算的复合运算：
   1) sr（R）= rs（R）
   2) tr（R）=rt（R）
   3) st（R）⊆ts（R）

五、 集合的划分与覆盖

1. 覆盖：把集合 A 分成若干个分开的**非空子集**，使得 A 中**每个元素至少属于**一个分块，那这些分块的全体集合叫做 A 的一个覆盖。
2. 划分：对集合 A 的一个覆盖，A 中**每个元素仅属于**一个分块，这种情况叫划分。其中划分的块数叫做划分的**秩**。

六、 等价关系和等价类

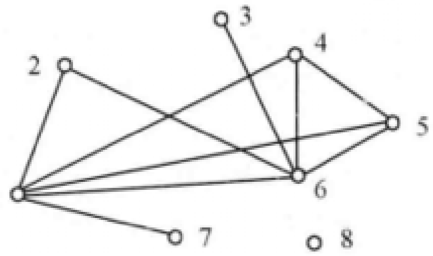
1. 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，若 R 是**自反、对称和传递**的，则称 R 为等价关系。
2. 验证自反性：IA⊆R
   验证对称性：R^{-1}⊆R
   验证传递性：RoR⊆R
3. **等价类**：集合 A 上等价关系 R 中 a 元素的等价类**$[a]_R$={x|x∈A 且<a,x>∈R}**
4. **商集**：设 R 是集合 A 上的等价关系，由 R 确定的**所有等价类**组成的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集，记为 **A/R，是集合 A 的一个划分。**
5. 每一个划分确定 A 的一个等价关系。

七、 相容关系和相容类

1. 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，若 R 是**自反、对称**的，则称 R 为相容关系。
2. **相容类 C**：设 R 是集合 A 上的一个相容关系，C 是 A 的子集，如果对于 C 中任

意两个元素 x,y,有<x，y>∈R，称 C 是相容关系 R 产生的**相容类**。

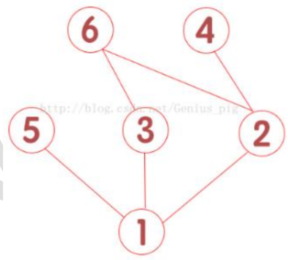
3. **最大相容类 C_R**：不能真包含在任何其他相容类中的相容类。
   相容关系图中，最大完全多边形的结点集合、一个孤立结点、以及不是完全多边形的两个结点的连线都是最大相容类。完全多边形是指每个结点与其他所有结点联接的多边形。
   如下方的相容关系图的最大相容类为：{1, 2,6}，{1, 4, 5,6}，{1,7}，{3,6}，{8}



4. **完全覆盖 $C_R(A)$：**集合 A 上相容关系 R **所有最大相容类**的集合。

八、 偏序关系和偏序集

1. 集合 A 有**自反性、反对称性和传递性**的二元关系 R，称 R 为偏序关系，<A,R>称为偏序集。
2. **盖住：**偏序集<A,R>中，x,y∈A，x!=y，<x,y>∈R，不存在 z∈A，<x,z>∈R 且<z,y>∈R，则称 y 盖住了 x。
3. **哈斯图（偏序集合图）**
   1) 小圆圈代表元素，若<x,y>∈R 且 x!=y，则 y 的圆圈在 x 上
   2) 若 y 盖住了 x，则连接 x 和 y 的圆圈



4. 链：偏序集合 A 中的一个子集，其内每两个元素在哈斯图中均有线连接（包括仅有一个元素的集合）
5. 全序集合：偏序集合 A 自身就是一个链，其偏序关系 R 称为全序关系。
6. 极大/小元：没有其他元素能盖住他/被他盖住，**不唯一**
   上图极大元：6,5,4　　　　极小元：1
7. 最大/小元：他盖住其他所有元素/被其他所有元素盖住，**不存在或者唯一**
   上图最大元：无　　　　　最小元：1
8. 良序：任一非空子集存在最小元的偏序集

九、 函数

1. f 是 X 到 Y 的一个关系，当 f 满足对每一个 x∈X 都有唯一的 y∈Y 时，f 成为函数
2. 满射：Y 中每个元素都是 X 中一个或多个的像点
3. 入射（单射）：X 中没有两个元素的像相同

4. 双射：映射既是满射又是入射
5. 置换：非空集合 S 到 S 的一个双射

第三章：代数系统

一、 代数系统

1. 代数系统=非空集合+运算
2. 运算的性质
   1) 封闭的、可交换的、可结合的、可分配的
   2) 满足吸收率：对于可交换运算+和*，若 A 内任意两个元素 x 和 y 都有：x+(x*y)=x, x*(x+y)=x，则*和+满足吸收率
   3) 等幂的：x*x=x，则*等幂
3. 幺元 e
   1) 左幺元：对任意 x∈A，e*x=x；右幺元：对任意 x∈A，x*e=x
   2) 幺元：e 既是左幺元又是右幺元
   3) 若 A 上的*运算既有左幺元又有右幺元，则二者相等，为幺元 e，且幺元 e 唯一
4. 零元 0
   1) 左零元：对任意 x∈A，0*x=0；左零元：对任意 x∈A，x*0=0
   2) 零元：0 既是左零元又是右零元
   3) 若 A 上的*运算既有左零元又有右零元，则二者相等，为零元 0，且零元 0 唯一
5. 逆元 x^{-1}
   1) 左逆元、右逆元、逆元定义类似
   2) 若 A 上的*运算**可结合**且每个元素都有左逆元，则 x 的左右逆元相等且唯一

二、 定义汇总

1. **广群**：代数系统<S,*>中 **S 非空，*运算封闭**
2. **半群**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，***运算可结合**
   性质：若 S 为有限集，则 S 内必有一元素 a，a*a=a，**a 称为等幂元**
3. **独异点**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，*运算可结合，**存在幺元**
4. **群**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，*运算可结合，存在幺元，**其内每个元素均存在其逆元**
5. **有限群**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，*运算可结合，存在幺元，其内每个元素均存在其逆元，**S 为有限集，|S|为有限群的阶数**
6. **阿贝尔群**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，*运算可结合，存在幺元，其内每个元素均存在其逆元，***运算可交换**
7. **循环群**：代数系统<S,*>中 S 非空，*运算封闭，*运算可结合，存在幺元，其内每个元素均存在其逆元，**其内任意元素均可由 a 的幂组成，a 称为生成元（生**

成元可以不唯一）。循环群必然是一种阿贝尔群。

8. **平凡子群**：群 S 是群 G 的平凡子群，当且仅当 S=G 或 S={e}

三、 群的性质

1. **群中没有零元**
2. 群中各元素的逆元唯一
3. **群的运算满足消去律**
4. 群中的幺元为唯一的等幂元

四、 陪集

1. 如果 G 是一个群，H 是 G 的一个子群，g 是 G 的一个元素，那么
   gH = {gh：对于所有 h∈H}表示 H 的左陪集，
   Hg = {hg：对于所有 h∈H}表示 H 的右陪集。
2. 拉格朗日定理：设 H 是有限群 G 的子群，则|H|整除|G|。

五、 同态与同构

1. 同态：代数系统<G,*>和<S, °>，f 是从 G 到 S 上的一个映射. a,b 是 G 的元，有 **f(a*b)=f(a) °f(b)**，则称 f 是由<G,*>到<S, °>的一个同态映射，并称 G 与 S 同态，G～S。
2. 同构：代数系统<G,*>和<S, °>，如果 f 是从 G 到 S 的一个**双射的同态**，则称 f 是从 G 到 S 的同构映射，G 与 S 同构，G≌S。**同构是一种等价关系。**
3. 半群/独异点/群的同态映射仍是半群/独异点/群。
4. 同态核：代数系统<G,*>和<S, °>，f 是从 G 到 S 上的一个同态映射。若 S 的幺元为 e，则 G 中所有经 f 映射后变成 e 的元素 g 的集合称为 f 的同态核。

六、 环与域

1. 代数系统<A,+,*>中第一个二元运算为加法，第二个二元运算为乘法。
2. **<G,+,*>为环需要满足：**
   (1) <G,+>是阿贝尔群； (2) <G,*>是半群； (3) 乘法对加法满足左右分配律
3. 交换环：环<G,+,*>中<G,*>是可交换的
4. 含幺环：环<G,+,*>中<G,*>是独异点
5. **整环：环<G,+,*>中<G,*>是可交换独异点，且无零元（满足乘法消去律）**
6. **域：环<G,+,*>中<G-{0},*>是阿贝尔群，其中 0 表示零元**
7. **整环不一定是域，但有限整环一定是域；域一定是整环。**

第四章：图论

一、 图

1. 图 G=<V,E>，其中 V 是非空节点集，E 是边集。
   1) 无向图：E 由若干无向边(v1,v2)组成
   2) 有向图：E 由若干有向边<v1,v2>组成
2. 零图：仅由孤立结点组成的图；平凡图：仅有一个孤立结点的图
3. 结点的度数 **deg(v)**=结点的入度（射入结点的边数）+结点的出度（从结点射出的边数）
4. 多重图：含有平行边（连接同一对结点的边**且方向相同**）的图
5. 简单图：不含平行边或环的图
6. 完全图 Kn：每一对结点间都有边相连的含 n 个结点的简单图（有向或无向）
7. 图 G 的补图：图 G **所有结点**和能使 G 成为完全图的**添加边**组成的图
8. 同构：图 A 和图 B 的结点和边存在一一对应的关系，则 A 与 B 同构
9. 删点必删边，删边不删点

二、 路与回路

1. 路：交替序列 v0e1v1e2···envn 称为 v0 到 vn 的路，边的数目 n 称为路的长度。
2. 回路：v0=vn 的路。
3. **迹：各边互不相同的路。**
4. **通路：各点互不相同的路。**
5. **通路一定是迹，但是迹不一定是通路**。
6. 圈：除 v0=vn 外各点互不相同的路。
7. 连通图：仅有一个连通分支的图。
8. 点割集：对与连通的一个**点集合** A，如果去掉 A 中所有的点后，原来的图变成非连通图，而去除 A 的任一子集合图仍为连通图，那么这个点集合 A 就称为原图一个点割集。
9. 割点：一个点割集只有一个点
10. **点连通度 K(G)：为产生一个不连通图需要删去的点的最少数目。完全图 Kn 的点连通度是 n-1**
11. 边割集、割边、边连通度同理
12. **有向图**的连通种类
    1) **弱连通：将图看作无向图后任一对节点间互相可达**
    2) **单侧连通：任一对节点间只有有一个节点能到达另一节点**
    3) **强连通：任一对节点间互相可达**
    4) **强连通⊆单侧连通⊆弱连通**
    5) 强/单侧/弱分图：简单有向图中具有对应性质的最大子图

三、 图的矩阵表示

1. 邻接矩阵：aij=1 表示有一条由 vi 到 vj 的**边**，否则为 0
2. **邻接矩阵性质：邻接矩阵的 n 次幂后的结果矩阵中元素 bij 表示连接 vi 到 vj 长**

度为 n 的路的数目

3. 可达性矩阵：aij=1 表示有一条由 vi 到 vj 的**路**，否则为 0
4. **可达性矩阵计算：利用沃舍尔（warshall）算法计算，初始矩阵为邻接矩阵**
5. **完全关联矩阵（行是各点列是各边）M(G)**
   1) **无向图：vi 与 ej 有关联则 mij=1，否则为 0**
   2) **有向图：vi 是 ej 起点 mij=1，是终点为-1，否则为 0**
   3) **性质：图 G 有 r 个结点、w 个最大连通子图，则 r(M(G))=r-w（秩）**

四、 欧拉图（边不重复）

1. **欧拉路：经过无孤立点的图 G 所有边一次且仅一次的路**
2. 欧拉回路：经过无孤立点的图 G 所有边一次且仅一次的回路
3. **欧拉图：含欧拉回路的图**
4. 无向连通图 G 含有欧拉路，当且仅当 G 有零个或两个奇数度的结点；
   无向连通图 G 含有欧拉回路，当且仅当 G 没有奇数度的结点。
5. 有向连通图 G 含有欧拉回路，当且仅当它每个结点的入度等于其出度；
   有向连通图 G 含有欧拉路，当且仅当它除了 2 个结点外，每个结点的入度等于出度。且在这 2 个结点中，一个结点的入度比出度小 1，一个结点的入度比出度大 1。
6. **例题：七桥问题、一笔画问题**

五、 汉密尔顿图（点不重复）

1. **汉密尔顿路：经过图 G 所有点一次且仅一次的路**
2. 汉密尔顿回路：经过无孤立点的图 G 所有点一次且仅一次的回路
3. **汉密尔顿图：含汉密尔顿回路的图**
4. **必要条件（证明不是汉密尔顿图）**：设无向图 G 是汉密尔顿图，V1 是 V 的任意的非空子集， p(G-V1)≤|V1| 。其中，p(G-V1)为从 G 中删除 V1(删除 V1 中各顶点及关联的边)后所得到的图的连通分支。
5. **充分条件（证明是汉密尔顿图）**： 设 G 是无向简单图，如果 G 中任何一对顶点度数之和都大于等于 n，则 G 是汉密尔顿图。若大于等于 n-1，则 G 含一条汉密尔顿路。
6. **例题：周游世界问题（NP 难）**

六、 平面图

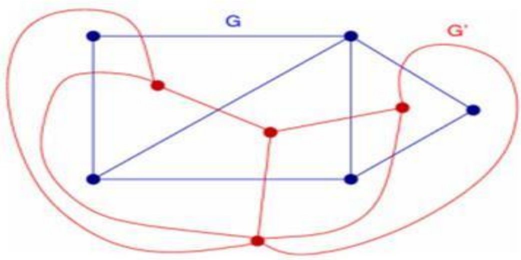
1. 平面图：设 G 是一个无向图，如果能够把图 G 图示在一个平面上，且除端点外任意两条边均不相交，则称 G 为平面图
2. 面：连通平面图 G 中的若干条边包围成了一个区域，在该区域内不再包含图 G 中的边和点，这样的区域称为图 G 的面（有限面和无限面）。
3. 区域面积有限的面称为有限面，区域面积无限的面称为无限面。
4. 次数：设 r 是连通平面图 G 的一个面，包围面 r 的所有边构成的回路称为该面

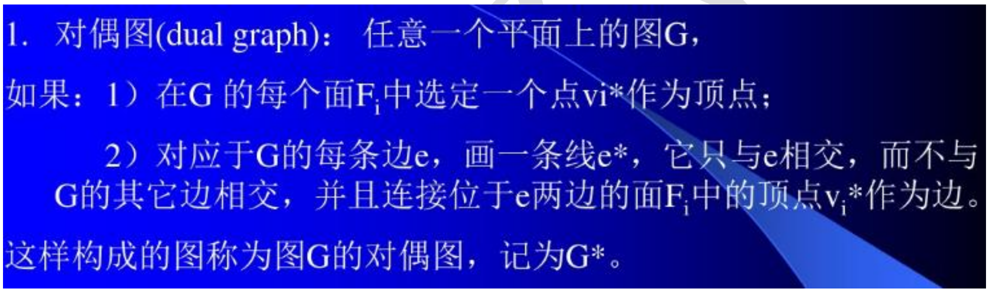
的边界，面 r 的边界回路长度称为该面的次数，记为 deg（r）

5. **连通平面图 G 的公式：**
   1) **Σdeg（r）=2e（面次数之和等于边数两倍）**
   2) **v-e+r=2（欧拉公式，证明采用数学归纳法）**
   3) v>=3 且 e<=3v-6

七、 对偶图与着色

1. **对偶图：**





2. **图的着色：对图每个节点指定一种颜色，使得邻接节点颜色互不相同。若图 G 最少用了 n 种颜色，则称 G 为 n-色的。（NPC 问题）**
3. 着色性质：任意平面图 G 最多是 5-色的。
4. **着色算法：鲍威尔（Powell）算法（贪心）**
   1) **将图 G 中的节点按照度数的递减次序进行排列。（这种排列可能并不是唯一的，因为有些点有相同度数。）**
   2) **用第一种颜色对第一点着色，并且按排列次序，对与前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色。**
   3) **用第二种颜色对尚未着色的点重复 2)，用第三种颜色继续这种做法，直到所有的点全部着上色为止。**

八、 树

1. 树：连通无回路的无向图，**边数=节点数-1**
2. **生成树：若图 G 的生成子图（连通且包含所有结点）是一棵树，则该树称为 G 的生成树，通过 kruskal 算法求解最小生成树**
3. 连通图的秩：边数-结点数+1，其中结点数-1 是连通图完全关联矩阵的秩
4. 根树：恰有一个节点入度是 0，其余结点入度为 1，如各类 n 叉树
5. 最优树 :树的权的和最小。只有叶节点有权，每个叶节点的权=其通路长度*权。可采用哈夫曼树。