

Gymnázium a střední odborná škola Mikulov  
příspěvková organizace



**Stanovení parametru termočlánku pomocí metody  
nejmenších čtverců**

Seminární práce

Mikulov 2020

Autor: Adam Krška

Vedoucí: Mgr. Roman Pavlačka, Ph.D.



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracoval samostatně. Souhlasím, aby moje práce byla archivována Gymnáziem a střední odbornou školou Mikulov, příspěvková organizace, případně použita pro další studijní účely.

-----  
(podpis)

## **Poděkování**

<Poděkování>

**Obsah**

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2 Cíl práce</b>	<b>7</b>
<b>3 Současný stav řešené problematiky</b>	<b>8</b>
3.1 Proložení dat funkcí . . . . .	8
3.1.1 Aproximace a interpolace . . . . .	8
3.1.2 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	9
3.1.3 Lineární regrese . . . . .	11
3.2 Termoelektrický jev . . . . .	12
3.2.1 Efekty termoelektrické jevu . . . . .	12
3.2.2 Termočlánky . . . . .	13
3.3 Experiment . . . . .	13
3.3.1 Princip měření . . . . .	15
3.3.2 Sestavení termočlánku . . . . .	15
3.3.3 Aparatura a průběh experimentu . . . . .	15
<b>4 Výsledky</b>	<b>17</b>
4.1 Naměřená data . . . . .	17
4.2 Výpočet parametru . . . . .	18
4.3 Přesnost modelu . . . . .	18
4.4 Diskuze . . . . .	19
<b>5 Závěr</b>	<b>20</b>
<b>6 Souhrn (Resumé)</b>	<b>21</b>
6.1 Klíčová slova (Key words) . . . . .	21
<b>7 Seznam použité literatury</b>	<b>22</b>
<b>8 Přílohy</b>	<b>22</b>
8.1 Seznam obrázků . . . . .	22
8.2 Seznam tabulek . . . . .	23

## 1 Úvod

V dnešní době sbírají vědci (a nejen ti) velké množství dat, převážně díky rozmachu digitálních měřicích metod, které ve velké míře již nahradily měření analogová. U těch byla nevýhoda ručního zapisování dat a poté i ručního zpracování. Díky dnešním experimentálním metodám jsme ovšem schopni měřit mnohem přesněji, vícekrát a s menší námahou. Takto naměřená data jsou dále zpracována pomocí počítačů, což práci zrychluje, zpřesňuje, zmenšuje pravděpodobnost lidské chyby v základních výpočtech a umožňuje zpracovat ono velké množství dat.

Data ovšem nejsou měřena bez nějakého účelu. Většinou se snažíme v datech najít tendenci, změřit hodnotu závislosti či zkoušet predikovat pomocí trendu, jak by vypadala data dosud nezměřená. Tyto problémy umíme řešit pomocí prokládání dat matematickými funkcemi. Proložení dat funkcí<sup>1</sup> nám umožnuje ověřit, zda předpis naší funkce odpovídá naměřeným datům, vypočítat neznámý parametr předpisu (rozšířeno například při počítání různých koeficientů materiálů), nebo vyjádření závislé veličiny pro zatím neměřené vstupní hodnoty (např. predikce počtu nakažených nemocí).

Abychom mohli data proložit křivkou, musíme znát její parametry. Ty mohou být určeny pomocí metody nejmenších čtverců. Nemůžeme ale vytvářet křivky bez samotných dat.

Jak již bylo zmíněno, digitální měřicí přístroje nahrazují přístroje analogové. Aby toho ovšem mohly dosáhnout, musí být schopné vytvářet signál přijatelný počítačem, což je ve velkém počtu případů změna napětí.

U měření teploty můžeme například využít termoelektrického jevu, jenž dělá přesně to, co potřebujeme: při změně teploty se mění výstupní napětí. To jsme schopni měřit a následně odvodit, jakou teplotu zrovna měříme. Jinak řečeno: objekty využívající termoelektrického jevu (tzv. termočlánky) můžeme používat jako teploměry.

Ne všechny termočlánky jsou však identické. Každý typ termočlánku (respektive každá různá kombinace dvou kovů, z nichž je termočlánek vyroben) má jinou závislost napětí na rozdílu teplot. Proto pro každou kombinaci kovů musí být experimentálně změřena a následně je pro ni určena ona závislost.

V této seminární práci si proto ukážeme a vysvětlíme metodu nejmenších čtverců, jenž je v těchto situacích využívána a následně ji aplikujeme na naměřená data termoelektrického napětí závislého na teplotním rozdílu.

---

<sup>1</sup>známo také jako *fitování* dat z anglického „fit“

## 2 Cíl práce

Cílem této seminární práce je osvětlit princip a použití metody nejmenších čtverců, převážně se pak zaměřit na speciální případ lineární regrese. Tato metoda by následně měla být použita pro výpočet parametru termočlánku z experimentálně získaných hodnot, které by měly být doprovázeny odpovídajícím vyobrazením v tabulkách a grafech.

### 3 Současný stav řešené problematiky

#### 3.1 Proložení dat funkcí

Ve fyzikálních experimentech obvykle měříme veličiny, které jsou závislé na veličině jiné, která se během experimentu mění. Vztah mezi závislou a nezávislou veličinou jsme schopni vysledovat pomocí jejich měření a následného hledání závislosti. Nezávislou veličinou velice často bývá čas, ale také jí může být např. teplota, síla, poloha a další. [2]

Při hledání oné souvislosti mnohdy potřebujeme proložit naměřená data funkcí. Proložení dat nám totiž umožňuje ověřit hypotetický předpoklad, zjistit přesnost měření či může dopomoci k nalezení různých koeficientů a parametrů experimentu.

##### 3.1.1 Aproximace a interpolace

Při prokládání bodů funkcí se můžeme přiklonit k jedné ze dvou metod: k approximaci, nebo interpolaci.

**Interpolace** je proces, kdy se snažíme nalézt takovou funkci, jež propojí všechny nám známé body. Nejjednodušší metodou, jak toho dosáhnout, je využití lineární interpolace, kdy každé dvě po sobě následující hodnoty propojíme přímkou. Můžeme se s ní setkat například při vytváření grafů v tabulkových editorech (např. MS Excel či LibreOffice Calc), kdy propojení bodů přímkou je obvykle výchozí možnost vykreslování grafů.

Nevýhoda této metody je ovšem ostrost funkce. Funkce je sice spojitá, ale není diferencovatelná na celém svém definičním oboru, což omezuje možnosti jejího následného využití. Kvůli své ostrosti zároveň tato metoda mnohdy nepředstavuje reálný průběh původní funkce. [7]

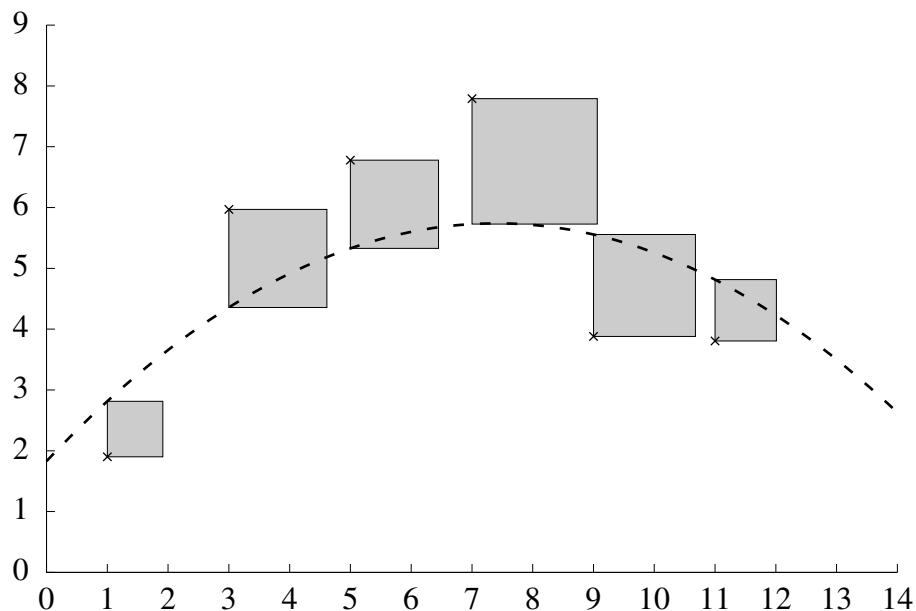
Tyto problémy řeší méně rozšířené metody, jakými jsou kupříkladu kvadratická interpolace či interpolace vyšším polynomem (příkladem může být známý a rozšířený Lagrangeův polynom). Ty zmenšují interpolační odchylky a díky definici polynomem jsou diferencovatelné na celém definičním oboru. Jsou ovšem také složitější na spočítání, jak už z pohledu matematiky, tak z pohledu výpočetního výkonu.

**Aproximace** se od interpolace liší v jednom zásadním aspektu: nevyžaduje, aby výsledná funkce procházela všemi body. To nám umožňuje najít o mnoho hladší funkce, které kopírují průběh dat, či získat neznámé parametry závislosti z dat s možnou chybou měření.

Z tohoto důvodu je approximace vhodnější při prokládání experimentálně získaných dat funkcí a umožňuje nám porovnat jednotlivé předpisy funkcí a jejich korelace s daty.

### 3.1.2 Metoda nejmenších čtverců

Při našich experimentech měříme velké množství dat a přirozeně chceme všechna z nich využít v approximaci naší funkce, čehož právě metoda nejmenších čtverců dosahuje. Ta je založena na principu minimalizace součtu druhých mocnin<sup>2</sup> odchylek mezi naměřenými daty a approximovanou funkcí. Příkladnou vizualizací této metody může být graf 1.



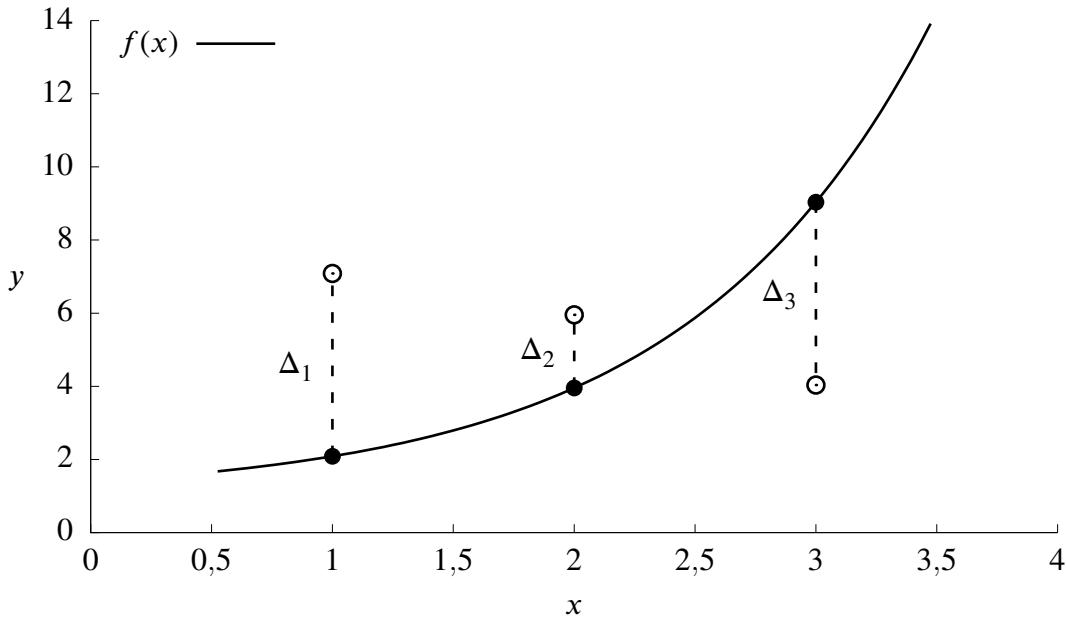
Obr. 1: Ukázka metody nejmenších čtverců

Označme si naši teoretickou funkci jako  $f(x)$ , ve které figurují kupříkladu tři neznámé označené jako  $a$ ,  $b$  a  $c$ . Do funkce  $f$  tak vstupuje proměnná  $x$  a neznámé parametry  $a, b, c$ . Aproximace funkce pomocí metody nejmenších čtverců je tedy o nalezení takové ideální hodnoty  $a, b, c$ , aby součet čtverců odchylek byl co nejmenší.

Důležitou otázkou na zodpovězení je, proč se vlastně snažíme najít minimum sumy čtverců odchylek. Pokud máme obecný předpis funkce  $f(x)$ , tak víme, že po dosazení každé jedné naměřené hodnoty  $x_i$  bychom měli dostat výslednou hodnotu měření  $y_i$ . Rozdíl mezi touto teoretickou hodnotou  $f(x_i)$  a ve skutečnosti naměřenou hodnotou  $y_i$  si označme jako  $\Delta_i = f(x_i) - y_i$ . Při approximaci bychom tak mohli chtít jednoduše minimalizovat tyto jednotlivé rozdíly  $\Delta_i$ , neboli minimalizovat funkci  $\sum_{i=1}^n \Delta_i$ . Tu však není možné minimalizovat, protože minimum jakéhokoliv součtu je vždy  $-\infty$ . Abychom se tedy vyhnuli tomuto problému, sčítáme hodnoty rozdílů umocněné na druhou  $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ , přičemž minimum této funkce se nachází v bodě  $y = 0$ . [2]

Obecně tedy můžeme metodu nejmenších čtverců vyjádřit jako hledání ideálních

<sup>2</sup>Pojmy druhá mocnina a čtverec jsou zaměnitelné, protože plocha čtverce je druhou mocninou jeho strany.



Obr. 2: Příklad rozdílů naměřených a teoretických pro  $n = 3$

parametrů funkce  $f(x)$  pro minimalizace funkce  $S$ , pro kterou platí

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2. \quad (1)$$

Tento problém se řeší dvěma hlavními metodami: iterativně a analyticky.

**Iterativní řešení** je obecné a fungující pro každý předpis. Problém nejmenších čtverců řeší pomocí opakování postupu ve smyčce (tzv. iterování), kdy se s každým opakováním vypočítané hodnoty jemně změní. Ověří se, zdali se funkce (1) přiblížila svému minimu a pokračuje se v další změně hodnot. V moment dosáhnutí minima s určitou přesností se opakování zastavuje a my říkáme, že funkce *konvergovala*.

Tato metoda je používána pro řešení nelineárních problémů, které nejsme schopni analyticky řešit. Vzhledem k počtu potřebných výpočtů je aplikována ve formě počítačových algoritmů, například pomocí Levenberg-Marquardtova algoritmu.

**Analytické řešení** funguje na principu nalezení minima pomocí parciálního derivování podle všech neznámých parametrů. Z této derivací následně vzniká soustava rovnic, kterou jsme schopni vyřešit. Je využívána pro řešení lineárních problémů, kdy můžeme naši rovnici zapsat pomocí polynomu  $n$ -tého rádu.

### 3.1.3 Lineární regrese

Speciální případ analytického řešení je lineární regrese. Jedná se o případ, kdy experimentálně získaná data prokládáme lineární funkcí s obecným předpisem

$$f(x) = ax + b.$$

V sekci 3.1.2 jsme si definovali rovnici (1), do které tento obecný lineární předpis můžeme dosadit a tím si vyjádřit rovnici sumy konkrétně pro lineární funkci:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Abychom proložili data funkcí, musíme nalézt minimum funkce  $S$ . Toho dosáhneme pomocí položení jednotlivých parciálních derivací této funkce do rovnosti s nulou. [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) \\ -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) &= 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) &= 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (3)$$

Po jednotlivém derivování funkce  $S$  podle  $a$  a  $b$  a upravení výrazů dostáváme dvě rovnice (2) a (3). Ty nám popisují onu lineární funkci, již approximujeme, a  $a$  a  $b$  zde figurují jako proměnné. Ty ovšem v tento moment neznáme, tedy pro nás to jsou v tomto případě neznámé. To znamená, že se jedná o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme jednoduše pomocí dosazovací metody vyřešit pro  $a$ .

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

A protože nyní máme rovnici (5) pro  $a$ , můžeme ji dosadit do dříve odvozené rovnice (4) pro  $b$ , čímž dostáváme řešení této soustavy pro obě neznámé v podobě rov-

ností (5) a (6).

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

## 3.2 Termoelektrický jev

### 3.2.1 Efekty termoelektrické jevu

Termoelektrický jev se vyznačuje přímou konverzí tepla na elektrické napětí a naopak. Objevuje se vždy u spojené dvojce různých kovů a ve své podstatě je sdružením čtyř efektů pod jeden název: efektu Seebeckova, Peltierova, Thomsonova a Benedictkova. [2, 3]

Termoelektrické napětí  $E$  vzniká mezi spoji kovů a je závislé na funkci rozdílu teplot  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Je vyjádřeno pomocí vztahu

$$E = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_B(T) - \alpha_A(T)) dT,$$

kde  $\alpha_A$  a  $\alpha_B$  jsou Seebeckovy koeficienty kovů A a B a  $T_1$  a  $T_2$  vyjadřují teploty spojů. Tento vztah ovšem může být za podmínky nízkého rozdílu teplot převeden do lineární formy

$$\begin{aligned}
 E &= (\alpha_A - \alpha_B) \cdot (T_2 - T_1), \\
 E &= \alpha \Delta T,
 \end{aligned}$$

přičemž  $\alpha$  značí koeficient pro danou dvojici kovů (také označován jako parametr termočlánku) a  $\Delta T$  je rozdíl teplot konců. [3]

**Seebeckův efekt** byl poprvé objeven německým fyzikem Thomasem Johannem Seebeckem a popisuje vlastnost termočlánku, která má za příčinu vytváření elektrického napětí na základě rozdílu teplot. Jestliže jeden spoj termočlánku začneme zahřívat a druhý naopak ochlazovat, vznikne na každém konci jiný potenciál, což je důvodem vzniku termoelektrického napětí. [5]

**Peltierův efekt** je považován za přesný opak efektu Seebeckova. Byl objeven Jeanem Peltierem v roce 1834 a dokazuje, že změna potenciálů, tedy protékání proudu, může způsobit změnu teplot. To implikuje přenos tepla z jednoho konce na druhý, což může být využito například pro chlazení předmětu bez nutnosti jakýchkoliv pohybujících se součástek. [4, 8]

**Thomsonův efekt** je třetí efekt v rámci termoelektrického jevu. Popisuje vlastnost vodiče při zahřívání jednoho z jeho konců. Zahříváním jednoho konce vodiče vzniká uvnitř materiálu teplotní gradient  $\Delta T / \Delta I$ , což vytváří mezi konci malé termoelektrické napětí. Je tím tedy velice podobný Seebeckovu efektu, ovšem zde se jedná pouze o jeden vodič namísto dvou různých kovů. [6]

**Benedickův efekt** pojednává o vzniku velice malého rozdílu potenciálů na koncích vodiče i v případě, že oba konci mají stejnou teplotu. Aby se tak ale stalo, musí ve vodiči existovat teplotní gradient, jenž tento rozdíl potenciálů způsobí. [3]

### 3.2.2 Termočlánky

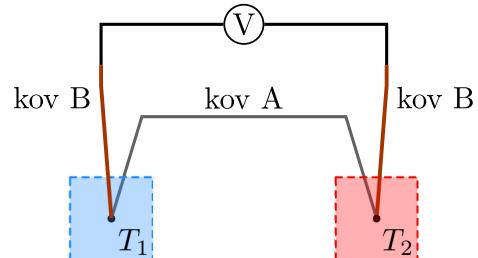
Jako termočlánky nazýváme zařízení skládající se ze dvou spolu spojených druhů kovu. Ty svým spojením vytvářejí elektrický obvod. Jestliže budeme zahřívat jeden spoj kovů a ochlazovat druhý, můžeme v tomto obvodu důsledkem termoelektrického jevu pozorovat napětí. Toto napětí je ale velice malé, pohybující se řádově v milivoltech.

Různé kombinace materiálů mají různé parametry pro vytvoření termoelektrického napětí. Teoretickou hodnotu měřeného napětí můžeme zjistit z termoelektrických potenciálů daných vodičů. Příklad takových hodnot je uveden v tabulce 1.

Samozřejmě některé kombinace kovů jsou efektivnější než ostatní, proto byl vytvořen standart *IEC 584*, což je mezinárodní standart popisující různé efektivní kombinace prvků a slitin (viz. tabulka 2).

### 3.3 Experiment

Jak název této seminární práce napovídá, naším konečným cílem je stanovení parametru termočlánku  $\alpha$ . A toho nedosáhneme žádnou jinou cestou než experimentem. V našem případě se bude jednat konkrétně o měření parametru termočlánku typu T.



Obr. 3: Příklad zapojení termočlánku

Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$	Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$	Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$
křemík	45	rhodium	0,65	tuha	0,2
antimon	4,7	iridium	0,65	rtuť	0,0
železo	1,8	manganin	0,6	platina	0,0
molybden	1,2	tantal	0,5	sodík	-0,2
kadmium	0,9	cesium	0,5	palladium	-0,3
wolfram	0,8	cín	0,45	draslík	-0,9
měď	0,75	olovo	0,45	nikl	-1,5
zlato	0,7	hořčík	0,4	kobalt	-1,6
stříbro	0,7	hliník	0,4	konstantan	-3,4
zinek	0,7	grafit	0,3	vismut	-7

Tab. 1: Hodnoty termoelektrického potenciálu při rozdílu teplot 100 °C. [1]

Označení typu	Materiál	Teplotní rozsah v °C
T	měď a konstantan (CuNi)	-200 – 350
J	železo a konstantan (CuNi)	-200 – 750
E	chromel (NiCr) a konstantan (CuNi)	-100 – 900
K	chromel (NiCr) a alumén (NiAl)	-200 – 1 200
N	nicrosil (NiCrSi) a nisil (NiSi)	-200 – 1 200
S	platina a slitina platiny a 10 % rhodia	0 – 1 600
R	platina a slitina platiny a 13 % rhodia	0 – 1 600
B	slitina platiny a 30 % rhodia a slitina platiny a 6 % rhodia	300 – 1 700

Tab. 2: Typy termočlánků a jejich označení dle standartu IEC 584. [3, 9]

### 3.3.1 Princip měření

Experiment spočívá v ochlazování jednoho a ohřívání druhého konce termočlánku.<sup>3</sup> Toho docílíme ponořením prvního spoje do vody s ledem (kde udržujeme zhruba 0 °C) a druhého do vroucí vody. Ta se během experimentu ochlazuje kvůli předávání tepla okolí. Toho mi využijeme a pozorujeme pomocí milivoltmetru, jak se napětí na termočlánku mění v závislosti na rozdílu teplot vody s ledem a vody teplé.

### 3.3.2 Sestavení termočlánku

Abychom mohli náš termočlánek měřit, musíme jej nejdříve sestavit. Protože se jedná o typ T, vytváříme jej z mědi a konstantanu. Stavbu termočlánku zahájíme zaizolováním obou drátů pro ochranu mimo místa, kde dráty spojujeme či připojujeme k externímu zařízení, konkrétně milivoltmetru.

Následně si připravíme dřevěnou desku, na které celá konstrukce drží. Do ní vyvrátáme díry v pravidelných rozestupech a do krajních děr upevníme konektory sloužící pro následné připojení termočlánku k měřidlu. Zaizolovaný drát konstantanu protáhneme skrz dříve vyvrstané díry a přizpůsobíme délku drátu. Konce konstantanu odizolujeme a připravíme k následnému připojení k mědi.

Připravený drát mědi rozdělíme tak, abychom dostali dva kusy, které mají ideální délku na spojení konců konstantanového vodiče a připravených konektorů. Konce těchto dvou drátů odizolujeme, uchytíme je v konkavkách a opačné konce zakroutíme do sebe s odizolovanými konci konstantanu.<sup>4</sup> Konce pevně zakroucené do sebe zaizolujeme smršťovací bužírkou pro ochranu před okolím.<sup>5</sup>

Jako poslední zasuneme vodiče do plastových trubiček a ty připevníme pomocí kobercové pásky k desce.

### 3.3.3 Aparatura a průběh experimentu

Na provedení samotného experimentu je zapotřebí termočlánku, termosky (či jinak tepelně izolované nádoby), kádinky, ledu, dvou teploměrů, milivoltmetru a způsobu ohřevu vody. V našem případě se jednalo o rychlovarnou konvici.

Aby byl termočlánek stabilní a statický, upevníme jej na stojan do takové výšky, aby konce termočlánku se spoji kovů pohodlně dosáhly do kádinky a termosky. Na vlastní stojany připevníme také oba teploměry, jeden směřující do kádinky a druhý do termosky, abychom mohli během experimentu pozorovat teplotní rozdíl. V neposlední řadě připojíme k termočlánku milivoltmetr pro měření napětí na termočlánku.

<sup>3</sup>Místa spojů kovů

<sup>4</sup>Při spojování mědi a konstantanu si musíme dát pozor na to, aby chom se vyhnuli potřebě pájení. To by totiž přidal do zařízení další kov a ovlivnilo výsledky.

<sup>5</sup>Toto můžeme provést, protože budeme tyto spoje ovlivňovat teplotou, před čímž kousek plastu moc dobře neizoluje a stejně by získal teplotu okolí.

Do termosky nalijeme vodu, přidáme do ní led a vyčkáme, dokud se teplota neu- stálí (výsledná teplota by se měla pohybovat okolo  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Následně nalijeme horkou, až vroucí, vodu do kádinky a započneme měření. Při klesání rozdílu teplot pravidelně ode- čítáme hodnoty obou teploměrů a milivoltmetru do momentu, kdy se teplota teplé vody ustálí na pokojové teplotě, kdy se již rozdíl teplot kádinky a termosky více nemění.

## 4 Výsledky

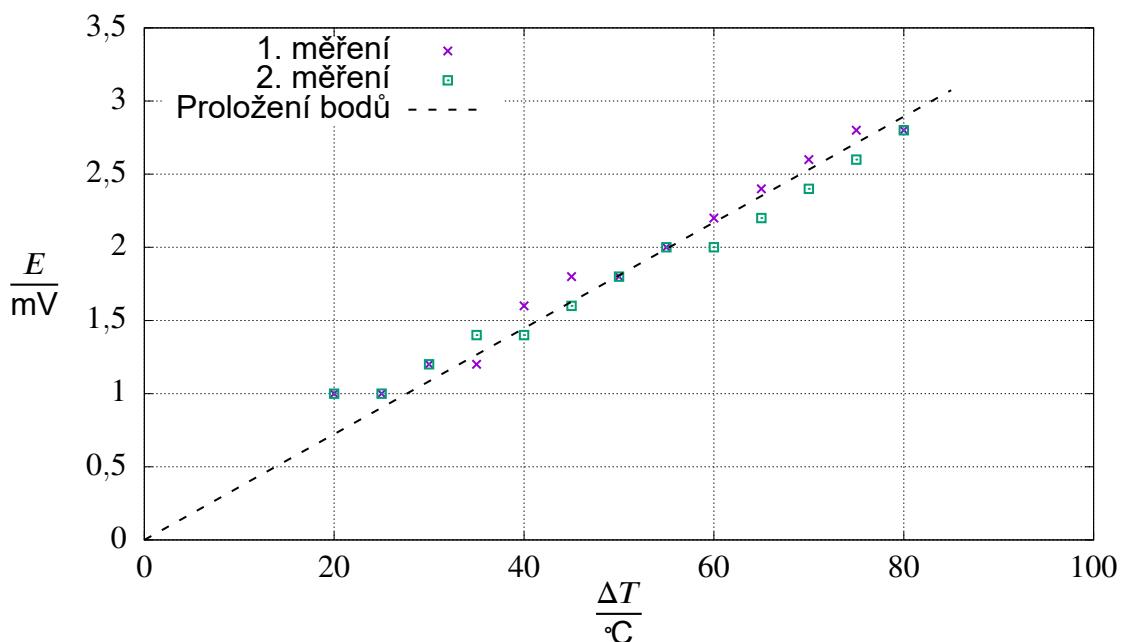
### 4.1 Naměřená data

Experiment jsme měřili za pomoci dvou digitální teploměrů značky Vernier s nejmenším dílkem o velikosti  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$  a analogového voltmetru o přesnosti  $0,2\text{ mV}$  (obr. 5).

$\frac{\Delta T}{^{\circ}\text{C}}$	$E_1$ mV	$E_2$ mV
80	2,8	2,8
75	2,8	2,6
70	2,6	2,4
65	2,4	2,2
60	2,2	2,0
55	2,0	2,0
50	1,8	1,8
45	1,8	1,6
40	1,6	1,4
35	1,2	1,4
30	1,2	1,2
25	1,0	1,0
20	1,0	1,0

Tab. 3: Naměřená data

Z těchto dat můžeme vytvořit graf 4 znázorňující data včetně proložených funkcí.



Obr. 4: Graf naměřených dat

## 4.2 Výpočet parametru

V grafu 4 jsme znázornili i funkce, které approximují naměřená data. Ovšem otázkou zůstává, jak jsme k nim došli.

V sekci 3.2.1 jsme si řekli, že za podmínky nízkého rozdílu teplot můžeme termoelektrické napětí popsat pomocí rovnice

$$E = \alpha \Delta T . , \quad (7)$$

přičemž pro polovodič typu T je závislost lineární zhruba do 200 °C, což naše data pochoplně splňuje. [10]

Tato rovnice neobsahuje konstantní složku, neboli  $b = 0$ . To znamená, že funkce prochází nulou a vyskytuje se v ní pouze jedna neznámá:  $\alpha$ . Tím pádem nemusíme pro výpočet parametru používat rovnici (5), ale můžeme jej vyjádřit pomocí zjednodušeného tvaru

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta T_i \cdot E_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2},$$

kterou získáváme při aplikaci postupu v sekci 3.1.3 na funkci (7). Při aplikaci na všechna naměřená data dostáváme hodnotu koeficientu

$$\alpha = 0,0362 \text{ mV}^\circ\text{C}^{-1} .$$

## 4.3 Přesnost modelu

Každé měření, včetně toho našeho, není naprosto přesné a je v něm nějaká chyba, ať už to je chyba statistická či systematická. V našem případě budeme chtít spočítat, jak moc naměřená data odpovídají vypočítanému modelu. K takovému popisu se často ve statistice používá hodnota označována jako  $R^2$  s definicí

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} .$$

Zde  $\bar{y}$  značí průměr naměřených hodnot,  $\hat{y}$  je předpovídaná hodnota dle modelu a  $y_i$  představuje jednotlivé naměřené hodnoty. Přepsáno do našich hodnot nabývá rovnice tvaru

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \alpha \Delta T_i)^2}{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2} .$$

Po využití tohoto vztahu dostáváme hodnotu  $R^2 = 0,9585 = 95,85\%$ , ze které můžeme usuzovat, že naše měření bylo poměrně<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>To usuzujeme z toho faktu, že nejvyšší hodnota  $R^2$  je 100 %.

#### 4.4 Diskuze

Jak můžeme vidět v tabulce 3 vidět, měřili jsme ochlazování pouze dvakrát. To ponechává možnost existence systematické chyby, ovšem bohužel kvůli nedostupnosti pomůcek a pandemické situaci v době vypracování této seminární práce nebylo možné výsledků získat více. V ideální situaci by bylo využito digitálního milivoltmetru pro zachycení více výsledků a eliminace lidské chyby, experiment změřen vícekrát a byl by změřen i při zahřívání, nejen při ochlazování.

Ovšem i přes tyto fakty nemají naměřená data velkou chybu a koeficient korelace  $R^2$  vyšel velice blízku 100 %. Proto můžeme považovat experiment v rámci mezí za provedený s vhodným podrobnějším přeměřením v budoucnosti.

## 5 Závěr

Měření a zpracování dat je důležitou součástí vědeckého bádání. Abychom mohli teorii potvrdit experimenty, mnohdy pro to potřebujeme proložit naměřená data funkci. V tom nám pomáhá metoda nejmenších čtverců, která nám umožnuje najít ideální parametry funkce. Je možné jí používat iterativně za pomoci výpočetního výkonu počítačů, nebo analyticky vyřešením rovnice.

Speciálním případem metody nejmenších čtverců je lineární regrese, která řeší problém proložení lineární funkce daty. To je výhodné, protože mnoho závislostí je lineárních, což vytváří široké možnosti využití.

Jedním z možných využití metody nejmenších čtverců je zjišťování parametrů v případě termočlánků. Termočlánek je dvojice spolu spojených kovů, u kterých se projevuje termoelektrický jev. Ten zapříčinuje vytvoření napětí v termočlánku v případě rozdílu teplot spojů kovů. To může být výhodné pro použití termočlánků například jako teploměrů.

Abychom je ovšem mohli takto použít, musíme nejdříve zjistit, jak pro danou dvojici kovů závisí napětí na rozdílu teplot. Právě zde nám pomáhá metoda nejmenších čtverců, která nám umožnuje změřit napětí na termočlánku za různých teplot a následně je použít pro zjištění koeficientu termočlánku. Nalezení tohoto koeficientu nám následně umožňuje vypočítat, jaký rozdíl teplot se nachází na termočlánku, i když změříme pouze napětí.

V této seminární práci se nám podařilo objasnit, jak zmiňovaná metoda nejmenších čtverců funguje, jak ji odvodit pro předpis funkce a jak jí použít. Následně jsme si vyšvětlili princip termoelektrického jevu, co je to termočlánek a jak tyto dva pojmy spolu souvisí. Poté jsme si popsali sestavení vlastního termočlánku, pro který jsme následně změřili a za pomoci lineární regrese určili parametr, čímž jsme se dopracovali k cíli naší práce, tedy můžeme tuto seminární práci nazvat úspěšnou.

## 6 Souhrn

Teoretická část této seminární práce je rozdělena na dva hlavní tématické celky. První se zabývá a vysvětluje metodu nejmenších čtverců, zatímco ve druhém se pojednává o principu termočlánků a jsou zde popsány termoelektrické jevy. Informace nabité v těchto dvou částech jsou následně použity pro popis experimentu z teoretického a praktického pohledu. Experiment je zaměřen na měření termočlánku a následné využití metody nejmenších čtverců k výpočtu jeho parametru. Nakonec je i uveden způsob možného vylepšení experimentu a případná možnost znova prozkoumání problematiky.

## Resumé

Theoretic part of this seminar work is divided into two main sections. First section deals with and explains the least squares method and second section is about thermocouples and thermoelectric effect. Information acquired in these sections are then used for description of the experiment from theoretical and practical point of view. Experiment is focused on the measurement of a thermocouple and subsequent use of the least squares method to calculate its parameter. Finally, a way to possibly improve the experiment and re-examine the issue is given.

**Klíčová slova** approximace, interpolace, metoda nejmenších čtverců, termoelektrický jev, Seebeckův jev, Peltierův jev, termočlánek

**Key words** approximation, interpolation, least squares method, thermoelectric effect, Seebeck effect, Peltier effect, thermocouple

## 7 Seznam použité literatury

1. BARTOŇ, Stanislav; KŘIVÁNEK, Ivo; SEVERA, Libor. *Fyzika – Laboratorní cvičení*. Brno, 2005.
2. KUMBÁR, Vojtěch; BARTOŇ, Stanislav; KŘIVÁNEK, Ivo. *Fyzikální praktikum*. Brno: Mendelova Univerzita, 2015. ISBN 978-80-7509-335-6.
3. MEJZLÍK, Michal. *Návrh a tvorba laboratorní úlohy s peltierovým článkem*. 2009. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=15693](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=15693). Diplomová práce. FEKT VUT. Vedoucí práce Ing. Jan MAČÁČEK.
4. REICHL, Jaroslav. *Peltierův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/911-peltieruv-jev>.
5. REICHL, Jaroslav. *Seebeckův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/910-seebeckuv-jev>.
6. REICHL, Jaroslav. *Thomsonův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/912-thomsonuv-jev>.
7. SEGETH, Karel. Od naměřených dat k jejich matematickému popisu pomocí funkce – a zase zpátky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2015, roč. 60, č. 2, s. 133–147. ISSN 0032-2423. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/144407>.
8. *The Peltier Effect and Thermoelectric Cooling*. Dostupné z: [http://ffden-2.phys.uaf.edu/212\\_spring2007.web.dir/sedona\\_price/phys\\_212\\_webproj\\_peltier.html](http://ffden-2.phys.uaf.edu/212_spring2007.web.dir/sedona_price/phys_212_webproj_peltier.html).
9. *Thermocouple base materials acc to IEC 584*. Dostupné z: [http://www.nanyange.com.tw/driver/drivers/Technical%20Information\\_02.pdf](http://www.nanyange.com.tw/driver/drivers/Technical%20Information_02.pdf).
10. *Types of Thermocouple*. Dostupné z: <https://www.thermocoupleinfo.com/thermocouple-types.htm>.
11. WEISSTEIN, Eric. *Least Squares Fitting: MathWorld – A Wolfram Web Resource*. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html>.

## 8 Přílohy

### 8.1 Seznam obrázků

1	Ukázka metody nejmenších čtverců . . . . .	9
2	Příklad rozdílů naměřených a teoretických pro $n = 3$ . . . . .	10
3	Příklad zapojení termočlánku . . . . .	13

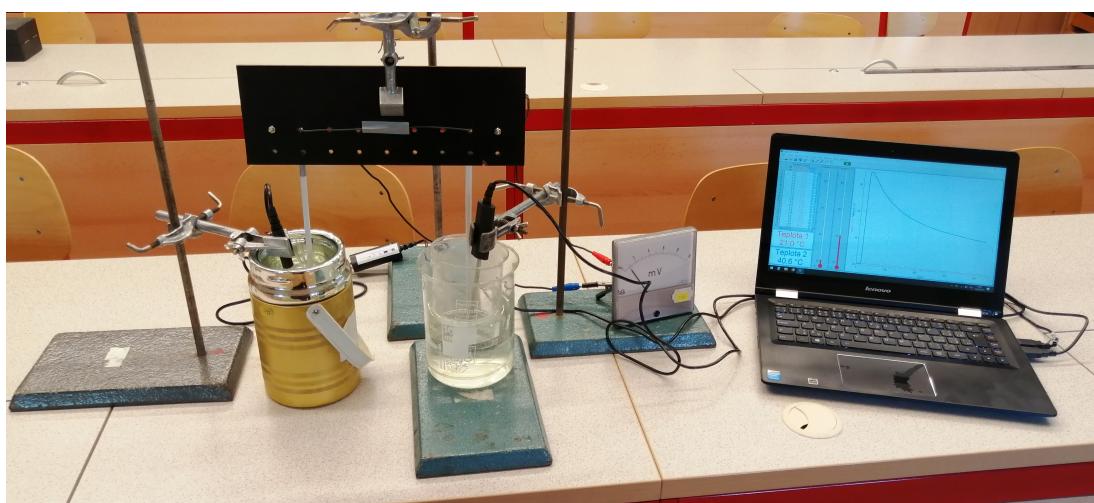
4	Graf naměřených dat . . . . .	17
5	Použitý milivoltmetr . . . . .	23
6	Aparatura experimentu . . . . .	23
7	Detail ponoření termočlánků v kapalinách . . . . .	24
8	Sestavený termočlánek . . . . .	24

## 8.2 Seznam tabulek

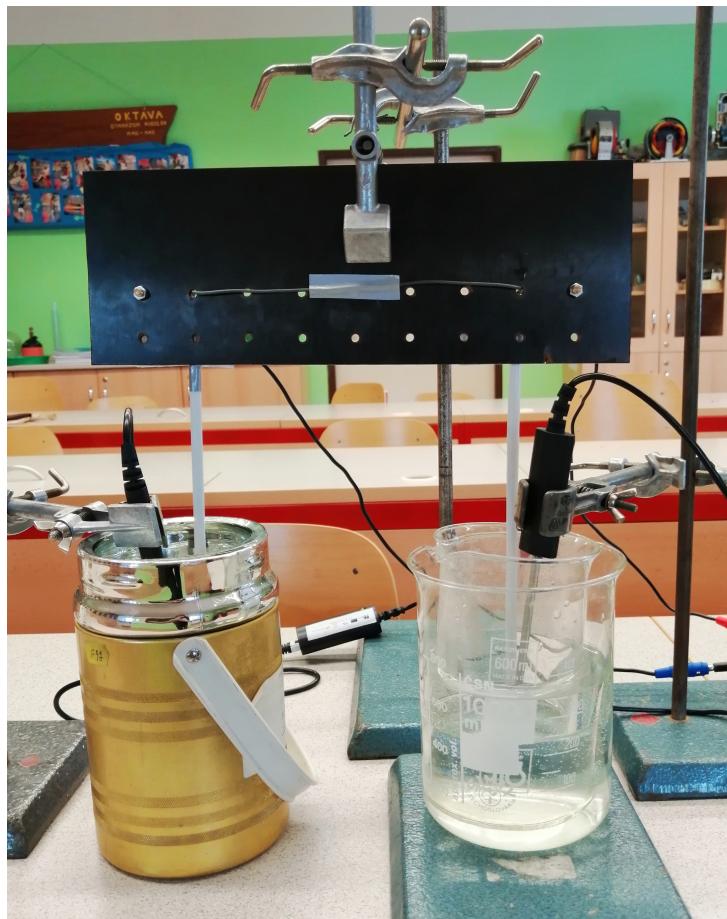
1	Hodnoty termoelektrického potenciálu při rozdílu teplot 100 °C. [1] . . . . .	14
2	Typy termočlánků a jejich označení dle standartu IEC 584. [3, 9] . . . . .	14
3	Naměřená data . . . . .	17



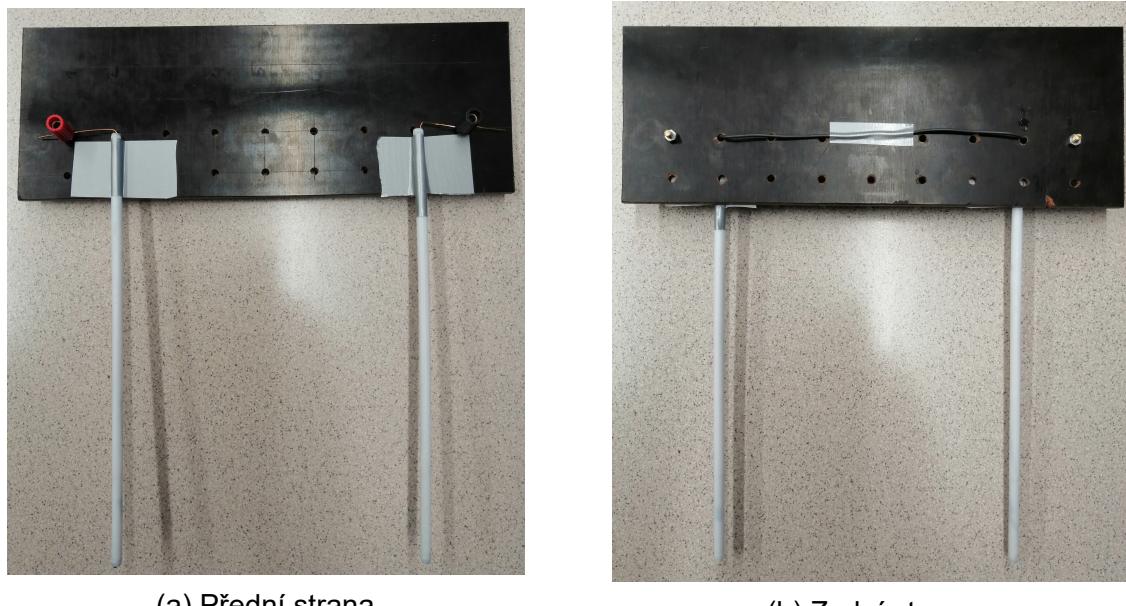
Obr. 5: Použitý milivoltmetr



Obr. 6: Aparatura experimentu



Obr. 7: Detail ponoření termočlánků v kapalinách



(a) Přední strana

(b) Zadní strana

Obr. 8: Sestavený termočlánek