

Gymnázium a střední odborná škola Mikulov  
příspěvková organizace



**Stanovení parametru termočlánku pomocí metody  
nejmenších čtverců**

Seminární práce

Mikulov 2021

Autor: Adam Krška

Vedoucí: Mgr. Roman Pavlačka, Ph.D.

## ZADÁNÍ SEMINÁRNÍ PRÁCE

<b>Název práce:</b>	Stanovení parametru termočlánku pomocí metody nejmenších čtverců		
<b>Jméno autora:</b>	Adam Krška		
<b>Obor vzdělání:</b>	79-41-K/81	<b>Třída:</b>	7.0
<b>Seminář:</b>	MaF	<b>Školní rok:</b>	2020/2021
<b>Termín odevzdání:</b>	15.3.2021	<b>Rozsah</b>	10-15 stran

**Zásady pro vypracování:**

- |    |  |
|----|--|
| 1. | Z dostupné literatury nastudujte a popište metodu nejmenších čtverců. Zaměřte se především na lineární regresi.  |
| 2. | Z dostupné literatury nastudujte a popište princip termočlánku, fyzikální vlastnosti a využití v běžné praxi.  |
| 3. | V experimentální části provedte výpočet parametru termočlánku metodou nejmenších čtverců ze získaných nebo naměřených hodnot. Své výpočty vhodně graficky doplňte tabulkami a grafy. Je možné, pokud k tomu bude příležitost, sestrojit vlastní termočlánek. |
| 4. | Závěrem zhodnoťte dosažené výsledky a diskutujte o možnostech využití výsledků pro další experimenty nebo nasazení v praxi.  |

**Literatura:**

- ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody: Aproximace funkcí
- [online]. Brno, 2006 [cit. 2019-08-27]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/UploadedFiles/240.pdf>. Učebnice. VUT Brno, FSI, Ústav matematiky.
  - KUMBÁR, Vojtěch. Fyzikální praktikum. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2015.  
ISBN 978-80-7509-335-6.

V Mikulově 15. 9. 2020

  
 Roman Pavlačka  
 ředitel

  
 vedoucí práce

  
 autor

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracoval samostatně. Souhlasím, aby moje práce byla archivována Gymnáziem a střední odbornou školou Mikulov, příspěvková organizace, případně použita pro další studijní účely.

-----  
(podpis)

## **Poděkování**

Tuto cestou bych chtěl poděkovat vedoucímu mé seminární práce Mgr. Romanu Pavlačkovi, Ph.D. za zpětnou vazbu při psaní této práce, za poskytnutí literatury a sehnání potřebného materiálu na stavbu termočlánku a mé kamarádce Soně Husákové za pomoc při jazykových korekturách.

**Obsah**

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2 Cíl práce</b>	<b>7</b>
<b>3 Současný stav řešené problematiky</b>	<b>8</b>
3.1 Proložení dat funkcí . . . . .	8
3.1.1 Aproximace a interpolace . . . . .	8
3.1.2 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	9
3.1.3 Lineární regrese . . . . .	11
3.2 Termoelektrický jev . . . . .	12
3.2.1 Efekty termoelektrické jevu . . . . .	12
3.2.2 Termočlánky . . . . .	13
<b>4 Výsledky</b>	<b>15</b>
4.1 Popis experimentu . . . . .	15
4.1.1 Princip měření . . . . .	15
4.1.2 Aparatura experimentu . . . . .	15
4.1.3 Sestavení termočlánku . . . . .	15
4.1.4 Postup práce . . . . .	16
4.2 Výpočet parametru . . . . .	17
4.3 Naměřená data . . . . .	17
4.3.1 Přesnost modelu . . . . .	18
4.4 Diskuze . . . . .	19
<b>5 Závěr</b>	<b>20</b>
<b>6 Souhrn (Resumé)</b>	<b>21</b>
6.1 Klíčová slova (Key words) . . . . .	21
<b>7 Seznam použité literatury</b>	<b>22</b>
<b>8 Přílohy</b>	<b>23</b>
8.1 Seznam obrázků . . . . .	23
8.2 Seznam tabulek . . . . .	23

## 1 Úvod

V dnešní době sbírají vědci (a nejen ti) velké množství dat, převážně díky rozmachu digitálních měřicích metod, které ve velké míře již nahradily měření analogová. U těch byla nevýhoda ručního zapisování dat a poté i ručního zpracování. Díky dnešním experimentálním metodám jsme ovšem schopni měřit mnohem přesněji, vícekrát a s menší námahou. Takto naměřená data jsou dále zpracována pomocí počítačů, což práci zrychluje, zpřesňuje, zmenšuje pravděpodobnost lidské chyby v základních výpočtech a umožňuje zpracovat ono velké množství dat.

Data ovšem nejsou měřena bez nějakého účelu. Většinou se snažíme v datech najít tendenci, změřit hodnotu závislosti či predikovat pomocí trendu, jak by vypadala data dosud nezměřená. Tyto problémy umíme řešit pomocí prokládání dat matematickými funkcemi. Proložení dat funkcí<sup>1</sup> nám umožnuje ověřit, zda předpis naší funkce odpovídá naměřeným datům, vypočítat neznámý parametr předpisu (využíváno například při počítání různých koeficientů materiálů), nebo vyjádřit závislou veličinu pro zatím neměřené vstupní hodnoty (např. predikce počtu nakažených nemocí). Máme více možností, jak tohoto proložení dosáhnout, přičemž jednou z nejrozšířenějších je metoda nejmenších čtverců.

Než ovšem začneme modelovat křivky či odvozovat, jak jednotlivé závislosti vypadají, musíme nejdříve naměřit samotná data.

Jak již bylo zmíněno, digitální měřicí přístroje nahrazují přístroje analogové. Aby toho ovšem mohly dosáhnout, musí být schopné vytvářet signál přijatelný počítačem, což je ve velkém počtu případů změna napětí.

U měření teploty můžeme například využít termoelektrického jevu, jenž dělá přesně to, co potřebujeme: při změně teploty se mění výstupní napětí. To jsme schopni měřit a následně odvodit, jakou teplotu zrovna měříme. Jinak řečeno: objekty využívající termoelektrického jevu (tzv. termočlánky) můžeme používat jako teploměry.

Ne všechny termočlánky jsou však identické. Každý typ termočlánku (respektive každá různá kombinace dvou kovů, z nichž je termočlánek vyroben) má jinou závislost napětí na rozdílu teplot. Proto každá kombinace kovů musí být experimentálně změřena a následně je pro ni určena ona závislost.

V této seminární práci si proto ukážeme a vysvětlíme metodu nejmenších čtverců, jenž je v těchto situacích využívána a následně ji aplikujeme na naměřená data termoelektrického napětí závislého na teplotním rozdílu.

---

<sup>1</sup>Známo také jako *fitování* dat z anglického „fit“.

## 2 Cíl práce

Cílem této seminární práce je osvětlit princip a použití metody nejmenších čtverců, převážně se pak zaměřit na speciální případ lineární regrese. Tato metoda je následně použita pro výpočet parametru termočlánku z experimentálně získaných hodnot, které jsou doprovázeny odpovídajícím vyobrazením v tabulkách a grafech.

### 3 Současný stav řešené problematiky

#### 3.1 Proložení dat funkcí

Ve fyzikálních experimentech obvykle měříme veličiny, které jsou závislé na veličině jiné, která se během experimentu mění. Vztah mezi závislou a nezávislou veličinou jsme schopni vysledovat pomocí jejich měření a následného hledání závislosti. Nezávislou veličinou velice často bývá čas, ale také jí může být např. teplota, síla, poloha a další. [2]

Při hledání oné souvislosti mnohdy potřebujeme proložit naměřená data funkcí. Proložení dat nám totiž umožňuje ověřit hypotetický předpoklad, zjistit přesnost měření či může dopomoci k nalezení různých koeficientů a parametrů experimentu.

##### 3.1.1 Aproximace a interpolace

Při prokládání bodů funkcí se můžeme přiklonit k jedné ze dvou metod: k approximaci, nebo interpolaci.

**Interpolace** je proces, kdy se snažíme nalézt takovou funkci, jež propojí všechny nám známé body. Nejjednodušší metodou je využití lineární interpolace, kdy každé dvě po sobě následující hodnoty propojíme přímkou. Můžeme se s ní setkat například při vytváření grafů v tabulkových editorech (např. MS Excel či LibreOffice Calc), kdy propojení bodů přímkou je obvykle výchozí možnost vykreslování grafů.

Nevýhoda této metody je ovšem ostrost funkce. Funkce je sice spojitá, ale není diferencovatelná na celém svém definičním oboru, což omezuje možnosti jejího následného využití. Kvůli své ostrosti zároveň tato metoda mnohdy nepředstavuje reálný průběh původní funkce. [7]

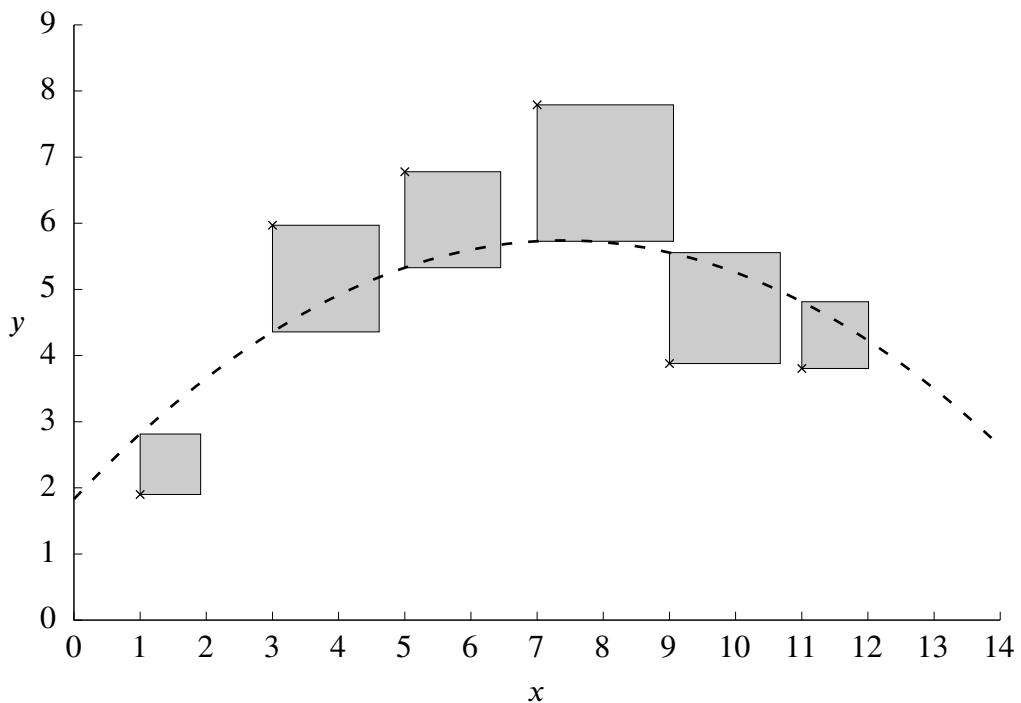
Tyto problémy řeší méně rozšířené metody, jakými jsou kupříkladu kvadratická interpolace či interpolace vyšším polynomem (příkladem může být známý a rozšířený Lagrangeův polynom). Ty zmenšují interpolační odchylky a díky definici polynomem jsou diferencovatelné na celém definičním oboru. Jsou ovšem také složitější na spočítání, jak už z pohledu matematiky, tak z pohledu výpočetního výkonu.

**Aproximace** se od interpolace liší v jednom zásadním aspektu: nevyžaduje, aby výsledná funkce procházela všemi body. To nám umožňuje najít o mnoho hladší funkce, které kopírují průběh dat, či získat neznámé parametry závislosti z dat s možnou chybou měření.

Z tohoto důvodu je approximace vhodnější při prokládání experimentálně získaných dat funkcí a umožňujeme nám porovnat jednotlivé předpisy funkcí a jejich korelace s daty.

### 3.1.2 Metoda nejmenších čtverců

Při našich experimentech měříme velké množství dat a přirozeně chceme všechna z nich využít v approximaci naší funkce, čehož právě metoda nejmenších čtverců dosahuje. Ta je založena na principu minimalizace součtu druhých mocnin<sup>2</sup> odchylek mezi naměřenými daty a approximovanou funkcí. Příkladnou vizualizací této metody může být graf 1.

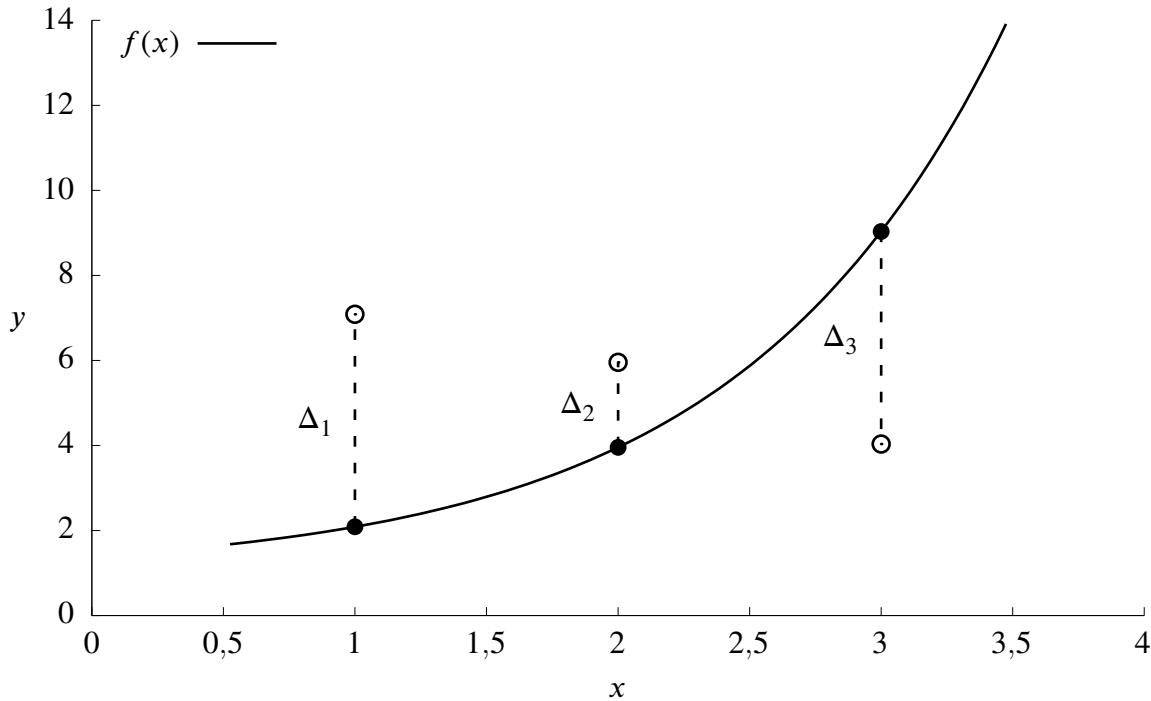


Obr. 1: Ukázka metody nejmenších čtverců

Kupříkladu mějme funkci  $f(x)$ , ve které figurují tři neznámé označené jako  $a$ ,  $b$  a  $c$ . Do funkce  $f$  tak vstupuje proměnná  $x$  a neznámé parametry  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Aproximace funkce pomocí metody nejmenších čtverců je poté o nalezení takové ideální hodnoty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , aby součet čtverců odchylek byl co nejmenší.

Důležitou otázkou na zodpovězení je, proč se vlastně snažíme najít minimum sumy čtverců odchylek. Pokud máme obecný předpis funkce  $f(x)$ , tak víme, že po dosazení každé jedné naměřené hodnoty  $x_i$  bychom měli dostat výslednou hodnotu měření  $y_i$ . Rozdíl mezi touto teoretickou hodnotou  $f(x_i)$  a ve skutečnosti naměřenou hodnotou  $y_i$  si označme jako  $\Delta_i = f(x_i) - y_i$ . Při approximaci bychom tak mohli chtít jednoduše minimalizovat tyto jednotlivé rozdíly  $\Delta_i$ , neboli minimalizovat funkci  $\sum_{i=1}^n \Delta_i$ . Tu však není možné minimalizovat, protože minimum jakéhokoliv součtu je vždy  $-\infty$ . Abychom se tedy vyhnuli tomuto problému, sčítáme hodnoty rozdílů umocněné na druhou  $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ , přičemž minimum této funkce se nachází v bodě  $y = 0$ . [2]

<sup>2</sup>Pojmy druhá mocnina a čtverec jsou zaměnitelné, protože plocha čtverce je druhou mocninou jeho strany.



Obr. 2: Příklad rozdílů naměřených a teoretických pro  $n = 3$

Obecně tedy můžeme metodu nejmenších čtverců vyjádřit jako hledání ideálních parametrů funkce  $f(x)$  pro minimalizaci funkce  $S$ , pro kterou platí

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2. \quad (1)$$

Tento problém se řeší dvěma hlavními metodami: iterativně a analyticky.

**Iterativní řešení** je obecné a fungující pro každý předpis. Problém nejmenších čtverců řeší pomocí opakování postupu ve smyčce (tzv. iterování), kdy se s každým opakováním vypočítané hodnoty jemně změní. Ověří se, zdali se funkce (1) přiblížila svému minimu a pokračuje se v další změně hodnot. V moment dosáhnutí minima s určitou přesností se opakování zastavuje a my říkáme, že funkce *konvergovala*.

Tato metoda je používána pro řešení nelineárních problémů, které nejsme schopni analyticky řešit. Vzhledem k počtu potřebných výpočtů je aplikována ve formě počítačových algoritmů, například pomocí Levenberg-Marquardtova algoritmu.

**Analytické řešení** funguje na principu nalezení minima pomocí parciálního derivování podle všech neznámých parametrů. Z této derivací následně vzniká soustava rovnic, kterou jsme schopni vyřešit. Je využívána pro řešení lineárních problémů, kdy můžeme naši rovnici zapsat pomocí polynomu  $n$ -tého řádu.

### 3.1.3 Lineární regrese

Speciální případ analytického řešení je lineární regrese. Jedná se o případ, kdy experimentálně získaná data prokládáme lineární funkcí s obecným předpisem

$$f(x) = ax + b.$$

V sekci 3.1.2 jsme si definovali rovnici (1), do které tento obecný lineární předpis můžeme dosadit a tím si vyjádřit rovnici sumy konkrétně pro lineární funkci:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Abychom proložili data funkcí, musíme nalézt minimum funkce  $S$ . Toho dosáhneme pomocí položení jednotlivých parciálních derivací této funkce do rovnosti s nulou. [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) \\ -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) &= 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) &= 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (3)$$

Po jednotlivém derivování funkce  $S$  podle  $a$  a  $b$  a upravení výrazů dostaváme dvě rovnice (2) a (3). Ty nám popisují onu lineární funkci, již approximujeme, a  $a$  a  $b$  zde figurují jako proměnné. Ty ovšem v tento moment neznáme, tedy pro nás to jsou v tomto případě neznámé. To znamená, že se jedná o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme jednoduše pomocí dosazovací metody vyřešit pro  $a$ .

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

A protože nyní máme rovnici (5) pro  $a$ , můžeme ji dosadit do dříve odvozené rovnice (4) pro  $b$ , čímž dostaváme řešení této soustavy pro obě neznámé v podobě rovností (5) a (6).

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

### 3.2 Termoelektrický jev

#### 3.2.1 Efekty termoelektrické jevu

Termoelektrický jev se vyznačuje přímou konverzí rozdílu teplot na elektrické napětí a naopak. Objevuje se vždy u spojené dvojce různých kovů a ve své podstatě je sdružením čtyř efektů pod jeden název: efektu Seebeckova, Peltierova, Thomsonova a Benedictova. [2, 3]

Termoelektrické napětí  $E$  vzniká mezi spoji kovů a je závislé na funkci rozdílu teplot  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Je vyjádřeno pomocí vztahu

$$E = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_B(T) - \alpha_A(T)) dT,$$

kde  $\alpha_A$  a  $\alpha_B$  jsou Seebeckovy koeficienty kovů A a B a  $T_1$  a  $T_2$  vyjadřují teploty spojů. Tento vztah ovšem může být za podmínky nízkého rozdílu teplot převeden do lineární formy

$$\begin{aligned}
 E &= (\alpha_A - \alpha_B) (T_2 - T_1), \\
 E &= \alpha \Delta T,
 \end{aligned}$$

přičemž  $\alpha$  značí koeficient pro danou dvojici kovů (také nazýván jako parametr termočlánku) a  $\Delta T$  je rozdíl teplot konců. [3]

**Seebeckův efekt** byl poprvé objeven německým fyzikem Thomasem Johannem Seebeckem a popisuje vlastnost termočlánku, která má za příčinu vytváření elektrického napětí na základě rozdílu teplot. Jestliže jeden spoj termočlánku začneme zahřívat a druhý naopak ochlazovat, vznikne na každém konci jiný potenciál, což je důvodem vzniku termoelektrického napětí. [5]

**Peltierův efekt** je považován za přesný opak efektu Seebeckova. Byl objeven Jeanem Peltierem v roce 1834 a dokazuje, že změna potenciálů může způsobit změnu teplot. To implikuje přenos tepla z jednoho konce na druhý, což může být využito například pro chlazení předmětu bez nutnosti jakýchkoliv pohybujících se součástek. [4, 8]

**Thomsonův efekt** je třetí efekt v rámci termoelektrického jevu. Popisuje vlastnost vodiče při zahřívání jednoho z jeho konců. Zahříváním jednoho konce vodiče vzniká uvnitř materiálu teplotní gradient  $\Delta T / \Delta I$ , což vytváří mezi konci malé termoelektrické napětí. Je tím tedy velice podobný Seebeckovu efektu, ovšem zde se jedná pouze o jeden vodič namísto dvou různých kovů. [6]

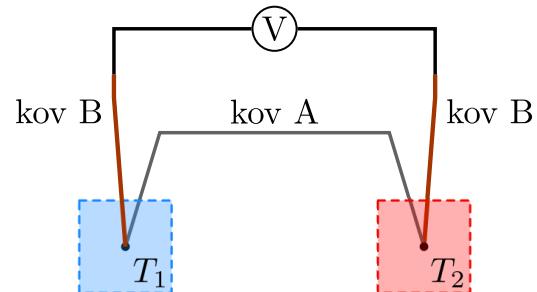
**Benedickův efekt** pojednává o vzniku velice malého rozdílu potenciálů na koncích vodiče i v případě, že oba konci mají stejnou teplotu. Aby se tak ale stalo, musí ve vodiči existovat teplotní gradient, jenž tento rozdíl potenciálů způsobí. [3]

### 3.2.2 Termočlánky

Jako termočlánky nazýváme zařízení skládající se ze dvou spolu spojených druhů kovu. Ty svým spojením vytvářejí elektrický obvod. Jestliže budeme zahřívat jeden spoj kovů a ochlazovat druhý, můžeme v tomto obvodu důsledkem termoelektrického jevu pozorovat napětí. Toto napětí je ale velice malé, pohybující se řádově v milivoltech.

Různé kombinace materiálů mají různé parametry pro vytvoření termoelektrického napětí. Teoretickou hodnotu měřeného napětí můžeme zjistit z termoelektrických potenciálů daných vodičů. Příklad takových hodnot je uveden v tabulce 1.

Samozřejmě některé kombinace kovů jsou efektivnější než ostatní, proto byl vytvořen standart IEC 584, což je mezinárodní standart popisující různé efektivní kombinace prvků a slitin (viz. tabulka 2).



Obr. 3: Příklad zapojení termočlánku

Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$	Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$	Materiál	$\frac{\varphi}{mV}$
křemík	45	rhodium	0,65	tuha	0,2
antimon	4,7	iridium	0,65	rtuť	0,0
železo	1,8	manganin	0,6	platina	0,0
molybden	1,2	tantal	0,5	sodík	-0,2
kadmium	0,9	cesium	0,5	palladium	-0,3
wolfram	0,8	cín	0,45	draslík	-0,9
měď	0,75	olovo	0,45	nikl	-1,5
zlato	0,7	hořčík	0,4	kobalt	-1,6
stříbro	0,7	hliník	0,4	konstantan	-3,4
zinek	0,7	grafit	0,3	vismut	-7

Tab. 1: Hodnoty termoelektrického potenciálu při rozdílu teplot 100 °C. [1]

Označení typu	Materiál	Teplotní rozsah v °C
T	měď a konstantan (CuNi)	-200 – 350
J	železo a konstantan (CuNi)	-200 – 750
E	chromel (NiCr) a konstantan (CuNi)	-100 – 900
K	chromel (NiCr) a alumén (NiAl)	-200 – 1 200
N	nicrosil (NiCrSi) a nisil (NiSi)	-200 – 1 200
S	platina a slitina platiny a 10 % rhodia	0 – 1 600
R	platina a slitina platiny a 13 % rhodia	0 – 1 600
B	slitina platiny a 30 % rhodia a slitina platiny a 6 % rhodia	300 – 1 700

Tab. 2: Typy termočlánků a jejich označení dle standartu IEC 584. [3, 9]

## 4 Výsledky

### 4.1 Popis experimentu

Jak název této seminární práce napovídá, naším konečným cílem je stanovení parametru termočlánku  $\alpha$ . A toho nedosáhneme žádnou jinou cestou než experimentem. V našem případě se bude jednat o měření parametru termočlánku typu T.

#### 4.1.1 Princip měření

Experiment spočívá v ochlazování jednoho a ohřívání druhého konce termočlánku.<sup>3</sup> Toho docílíme ponořením prvního spoje do vody s ledem (kde udržujeme zhruba 0 °C) a druhého do vroucí vody. Ta se během experimentu ochlazuje kvůli předávání tepla do okolí. Toho využijeme a pozorujeme pomocí milivoltmetru, jak se napětí na termočlánku mění v závislosti na rozdílu teplot vody s ledem a vody teplé.

#### 4.1.2 Aparatura experimentu

Na provedení samotného experimentu je zapotřebí termočlánku, vlastnoručně zkonstruovaného pro lepší manipulaci, termosky (či jinak tepelně izolované nádoby), kádinky, ledu, dvou teploměrů, milivoltmetru a zařízení k ohřevu vody. V našem případě se jednalo o rychlovárnou konvici.

#### 4.1.3 Sestavení termočlánku

Jak již bylo zmíněno, náš termočlánek je vlastnoručně vyroben pro umožnění jednoduší konstrukce experimentu. Protože se jedná o typ T, vytváříme jej z mědi a konstantanu.

Stavbu termočlánku zahájíme zaizolováním obou drátů pro ochranu mimo místa, kde jsou dráty spojeny či připojeny k externímu zařízení, konkrétně milivoltmetru.

Následně si připravíme dřevěnou desku, na které celá konstrukce drží. Do ní vyvrátáme díry v pravidelných rozestupech a do krajních děr upevníme konektory sloužící pro následné připojení termočlánku k měřidlu. Zaizolovaný drát konstantanu protáhneme skrz dříve vyvratané díry a přizpůsobíme délku drátu. Konce konstantanu odizolujeme a připravíme k následnému připojení k mědi.

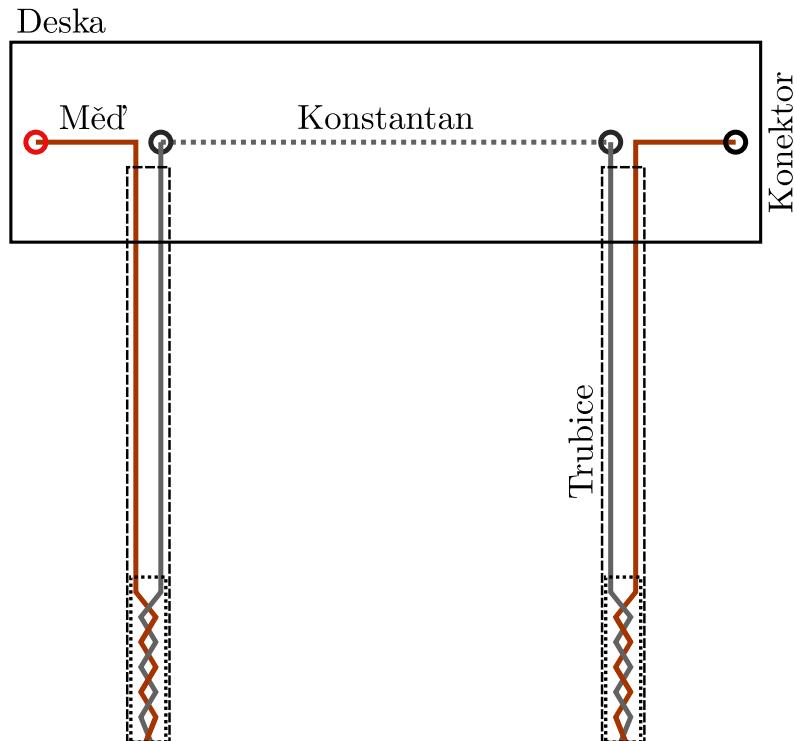
Připravený drát mědi rozdělíme tak, abyhom dostali dva kusy, které mají ideální délku na spojení konců konstantanového vodiče a připravených konektorů. Konce drátů odizolujeme. Jeden konec každého drátu uchytíme v koncovce, zatímco opačný konec zakroutíme do sebe s odizolovaným koncem konstantanu.<sup>4</sup> Konce pevně zakroucené

<sup>3</sup>Místa spojů kovů.

<sup>4</sup>Při spojování mědi a konstantanu si musíme dát pozor na to, abyhom se vyhnuli potřebě pájení. To by totiž přidal do zařízení další kov a ovlivnilo výsledky.

do sebe zaizolujeme smršťovací bužírkou pro ochranu před okolím, přičemž není třeba se obávat ovlivnění výsledků důsledkem tohoto úkonu. Bužírky jsou vyrobeny z tenkého plastu, tedy nepůsobí jako velká izolační vrstva, jednoduše propustí teplo a umožní tepelnou výměnu mezi kovem, bužírkou a okolím. To znamená, že všechny tři části budou mít stejnou teplotu, což je pro nás výhodné, protože právě teplota zde hraje největší roli.

Jako poslední zasuneme vodiče do plastových trubiček a ty připevníme pomocí kobercové pásky k desce. Celý sestavený termočlánek je ukázán na obrázku 10.

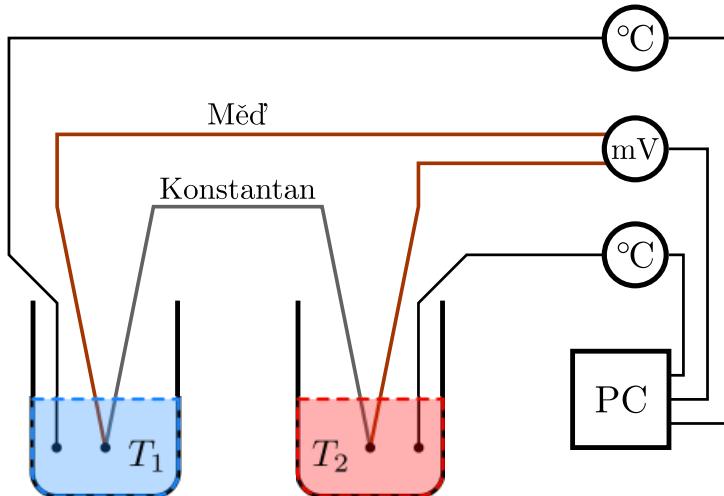


Obr. 4: Schéma sestavení termočlánku

#### 4.1.4 Postup práce

Aby byl termočlánek stabilní a statický, upevníme jej na stojan do takové výšky, aby konec termočlánku se spojil kovů pohodlně dosáhly do kádinky a termosky. Na vlastní stojany připevníme také oba teploměry, jeden směřující do kádinky a druhý do termosky, abychom mohli během experimentu pozorovat teplotní rozdíl. V neposlední řadě připojíme k termočlánku milivoltmetr pro měření napětí na termočlánku.

Do termosky nalijeme vodu, přidáme do ní led a vyčkáme, dokud se teplota neučastní (výsledná teplota by se měla pohybovat okolo  $0^{\circ}\text{C}$ ). Následně nalijeme horkou, až vroucí, vodu do kádinky a započneme měření. Při klesání rozdílu teplot pravidelně odečítáme hodnoty z obou teploměrů a milivoltmetru do momentu, kdy se teplota teplé vody ustálí na pokojové teplotě, kdy se již rozdíl teplot kádinky a termosky více nemění.



Obr. 5: Schéma sestavení experimentu

#### 4.2 Výpočet parametru

Měření dat je pouze polovina toho, co musíme v experimentu provést. Aby bylo možné vyvodit závěry a potvrdit, či vyvrátit počáteční tvrzení, musí být naměřená data zpracovaná, především musí být vypočítán samotný parametr termočlánku, kvůli kterému celé měření provádíme.

V sekci 3.2.1 jsme si řekli, že za podmínky nízkého rozdílu teplot můžeme termoelektrické napětí popsat pomocí rovnice

$$E = \alpha \Delta T . , \quad (7)$$

přičemž pro termočlánek typu T je závislost lineární zhruba do 200 °C, což naše data pohodlně splňuje. [10]

Tato rovnice neobsahuje konstantní složku, neboli  $b = 0$ . To znamená, že funkce prochází nulou a vyskytuje se v ní pouze jedna neznámá:  $\alpha$ . Tím pádem nemusíme pro výpočet parametru používat rovnici (5), ale můžeme jej vyjádřit pomocí zjednodušeného tvaru

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta T_i E_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2} , \quad (8)$$

který získáváme při aplikaci postupu v sekci 3.1.3 na funkci (7).

#### 4.3 Naměřená data

Data jsou měřena za pomoci dvou digitálních teploměrů značky Vernier s nejmenším dílkem o velikosti 0,1 °C a analogového voltmetru o přesnosti 0,2 mV (obr. 7). Místnost, v níž byl experiment prováděn, měla konstantní teplotu 21 °C, přičemž tlak vzduchu v místnosti byl 1 008 hPa a vlhkost vzduchu se pohybovala okolo 60 %.

Měření napětí bylo provedeno dvakrát, v obou případech při snižování rozdílu teplot, tedy ochlazování teplého konce termočlánku.

$i$	$\frac{\Delta T}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{E_1}{\text{mV}}$	$\frac{E_2}{\text{mV}}$	$\bar{E}$	$\frac{(\Delta T)^2}{^{\circ}\text{C}^2}$	$\frac{\Delta T \bar{E}}{\text{mV}^{\circ}\text{C}}$
1	80	2,8	2,8	2,8	6 400	224,0
2	75	2,8	2,6	2,7	5 625	202,5
3	70	2,6	2,4	2,5	4 900	175,0
4	65	2,4	2,2	2,3	4 225	149,5
5	60	2,2	2,0	2,1	3 600	126,0
6	55	2,0	2,0	2,0	3 025	110,0
7	50	1,8	1,8	1,8	2 500	90,0
8	45	1,8	1,6	1,7	2 025	76,5
9	40	1,6	1,4	1,5	1 600	60,0
10	35	1,2	1,4	1,3	1 225	45,5
11	30	1,2	1,2	1,2	900	36,0
12	25	1,0	1,0	1,0	625	25,0
13	20	1,0	1,0	1,0	400	20,0
$\Sigma$		37 050	1 340,0			

Tab. 3: Naměřená data

Z těchto dat můžeme vytvořit graf 6 znázorňující jednotlivé datové body společně s proloženou funkcí, jejíž předpis je shodný s rovnicí 7. V tomto předpisu neznáme parametr  $\alpha$ , jenž je ale vypočítatelný z rovnice 8 a jeho hodnota je

$$\alpha = 0,0362 \text{ mV}^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

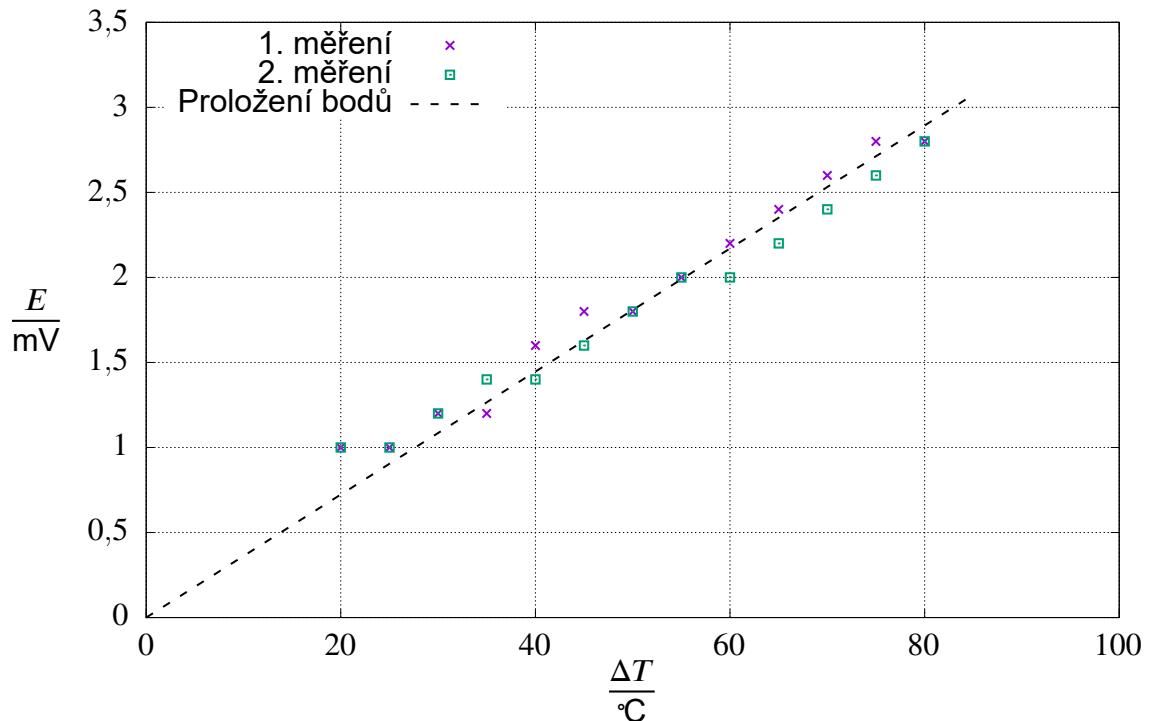
#### 4.3.1 Přesnost modelu

Žádné měření, včetně toho našeho, není naprostě přesné. Vždy je v něm nějaká chyba, ať už to je chyba statistická či systematická. V našem případě budeme chtít spočítat, jak moc naměřená data odpovídají vypočítanému modelu. K takovému popisu se často ve statistice používá hodnota označovaná jako  $R^2$  s definicí

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Zde  $\bar{y}$  značí průměr všech naměřených hodnot,  $\hat{y}$  je předpovídaná hodnota dle modelu a  $y_i$  představuje jednotlivé naměřené hodnoty. Přepsaná do našich hodnot nabývá rovnice tvaru

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \alpha \Delta T_i)^2}{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2}.$$



Obr. 6: Graf naměřených dat

Po využití tohoto vztahu<sup>5</sup> dostáváme hodnotu  $R^2 = 0,9585 = 95,85\%$ , ze které můžeme usuzovat, že naše měření bylo poměrně přesné.<sup>6</sup>

#### 4.4 Diskuze

Jak můžeme vidět v tabulce 3, měřili jsme ochlazování pouze dvakrát. To ponechává možnost existence systematické chyby. Kvůli nedostupnosti pomůcek a pandemické situaci v době vypracování této seminární práce však bohužel nebylo možné výsledků získat více. V ideální situaci by bylo využito digitálního milivoltmetru pro zachycení více výsledků a eliminace lidské chyby, experiment by byl proveden vícekrát a byl by proveden i při zahřívání, nejen při ochlazování.

I přes tyto fakty ovšem nemají naměřená data velkou chybu a koeficient korelace  $R^2$  vyšel velice blízký 100 %. Proto můžeme považovat experiment v rámci mezí za vydaný s vhodným podrobnějším přeměřením v budoucnosti.

<sup>5</sup>Do vztahu jsou doplněna všechna naměřená data (sloupce  $E_1$  a  $E_2$  v tabulce 3), ne pouhé průměry pro jednotlivé rozdíly teplot (sloupec  $\bar{E}$ ).

<sup>6</sup>To usuzujeme z faktu, že nejvyšší hodnota  $R^2$  je 100 %.

## 5 Závěr

Měření a zpracování dat je důležitou součástí vědeckého bádání. Abychom mohli teorii potvrdit experimenty, mnohdy pro to potřebujeme proložit naměřená data funkci. V tom nám pomáhá metoda nejmenších čtverců, která nám umožňuje najít ideální parametry funkce. Je možné ji používat iterativně za pomoci výpočetního výkonu počítačů, nebo analyticky vyřešením rovnice.

Speciálním případem metody nejmenších čtverců je lineární regrese, která řeší problém proložení lineární funkce daty. To je výhodné, protože mnoho závislostí je lineárních, což vytváří široké možnosti využití.

Jedním z možných využití metody nejmenších čtverců je zjišťování parametrů termočlánků. Termočlánek je dvojice spolu spojených kovů, u kterých se projevuje termoelektrický jev. Ten zapříčinuje vytvoření napětí v termočlánku v případě rozdílu teplot spojů kovů. To může být výhodné pro použití termočlánků například jako teploměry.

Abychom je ovšem mohli takto použít, musíme nejdříve zjistit, jak pro danou dvojici kovů závisí napětí na rozdílu teplot. Právě zde nám pomáhá metoda nejmenších čtverců, která nám umožňuje analyzovat naměřená data napětí na termočlánku za různých teplot, a tím zjistit koeficientu termočlánku. Nalezení tohoto koeficientu nám následně umožňuje vypočítat, jaký rozdíl teplot se nachází na termočlánku, i když změříme pouze napětí.

V této seminární práci se nám podařilo objasnit, jak zmiňovaná metoda nejmenších čtverců funguje, jak ji odvodit pro předpis funkce a jak ji použít. Následně jsme si vyšvětlili princip termoelektrického jevu, co je to termočlánek a jak tyto dva pojmy spolu souvisí. Poté jsme si popsali sestavení vlastního termočlánku, pro který jsme následně změřili a za pomocí lineární regrese určili parametr. Ten byl pomocí rovnice 8 stanoven na hodnotu  $\alpha = 0,0362 \text{ mV}^\circ\text{C}$ . Tento výsledek můžeme porovnat i s výpočtem provedeným programem (v našem případě se jednalo o MS Excel). Lze pozorovat rovnající se výsledky, což svědčí o korektnosti výpočtu.

V sekci 4.3.1 jsme si také ukázali, jak vypočítat koeficient přesnosti naší prokládané funkce, který nám vyšel  $R^2 = 95,85\%$ , čímž potvrzujeme správnost našeho modelu.

Určením koeficientu sestaveného termočlánku a přesnosti měření jsme se dopracovali k cíli naší práce, tedy můžeme tuto seminární práci považovat za úspěšnou.

## 6 Souhrn

Teoretická část této seminární práce je rozdělena na dvě hlavní téma. První se zabývá metodou nejmenších čtverců a vysvětluje ji, zatímco ve druhém se pojednává o principu termočlánků a jsou zde popsány termoelektrické jevy. Informace nabité v těchto dvou částečně jsou následně použity pro popis experimentu z teoretického a praktického pohledu. Experiment je zaměřen na měření termočlánku a následné využití metody nejmenších čtverců k výpočtu jeho parametru. Nakonec je uveden i způsob možného vylepšení experimentu a případná možnost opětovného prozkoumání problematiky.

## Resumé

The theoretical part of this seminar work is divided into two main sections. The first section deals with and explains the least squares method and the second section is about thermocouples and the thermoelectric effect. Information acquired in these sections is then used for the description of the experiment from a theoretical and practical point of view. The experiment is focused on the measurement of a thermocouple and subsequent use of the least squares method to calculate its parameter. Finally, a way to possibly improve the experiment and re-examine the issue is given.

**Klíčová slova** approximace, interpolace, lineární regrese, metoda nejmenších čtverců, termoelektrický jev, Seebeckův jev, Peltierův jev, termočlánek

**Key words** approximation, interpolation, linear regression, least squares method, thermoelectric effect, Seebeck effect, Peltier effect, thermocouple

## 7 Seznam použité literatury

1. BARTOŇ, Stanislav; KŘIVÁNEK, Ivo; SEVERA, Libor. *Fyzika – Laboratorní cvičení*. Brno, 2005.
2. KUMBÁR, Vojtěch; BARTOŇ, Stanislav; KŘIVÁNEK, Ivo. *Fyzikální praktikum*. Brno: Mendelova Univerzita, 2015. ISBN 978-80-7509-335-6.
3. MEJZLÍK, Michal. *Návrh a tvorba laboratorní úlohy s peltierovým článkem*. 2009. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=15693](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=15693). Diplomová práce. FEKT VUT. Vedoucí práce Ing. Jan MAČÁČEK.
4. REICHL, Jaroslav. *Peltierův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/911-peltieruv-jev>.
5. REICHL, Jaroslav. *Seebeckův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/910-seebeckuv-jev>.
6. REICHL, Jaroslav. *Thomsonův jev*. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/912-thomsonuv-jev>.
7. SEGETH, Karel. Od naměřených dat k jejich matematickému popisu pomocí funkce – a zase zpátky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2015, roč. 60, č. 2, s. 133–147. ISSN 0032-2423. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/144407>.
8. *The Peltier Effect and Thermoelectric Cooling*. Dostupné z: [http://ffden-2.phys.uaf.edu/212\\_spring2007.web.dir/sedona\\_price/phys\\_212\\_webproj\\_peltier.html](http://ffden-2.phys.uaf.edu/212_spring2007.web.dir/sedona_price/phys_212_webproj_peltier.html).
9. *Thermocouple base materials acc to IEC 584*. Dostupné z: [http://www.nanyange.com.tw/driver/drivers/Technical%20Information\\_02.pdf](http://www.nanyange.com.tw/driver/drivers/Technical%20Information_02.pdf).
10. *Types of Thermocouple*. Dostupné z: <https://www.thermocoupleinfo.com/thermocouple-types.htm>.
11. WEISSTEIN, Eric. *Least Squares Fitting: MathWorld – A Wolfram Web Resource*. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html>.

## 8 Přílohy

### 8.1 Seznam obrázků

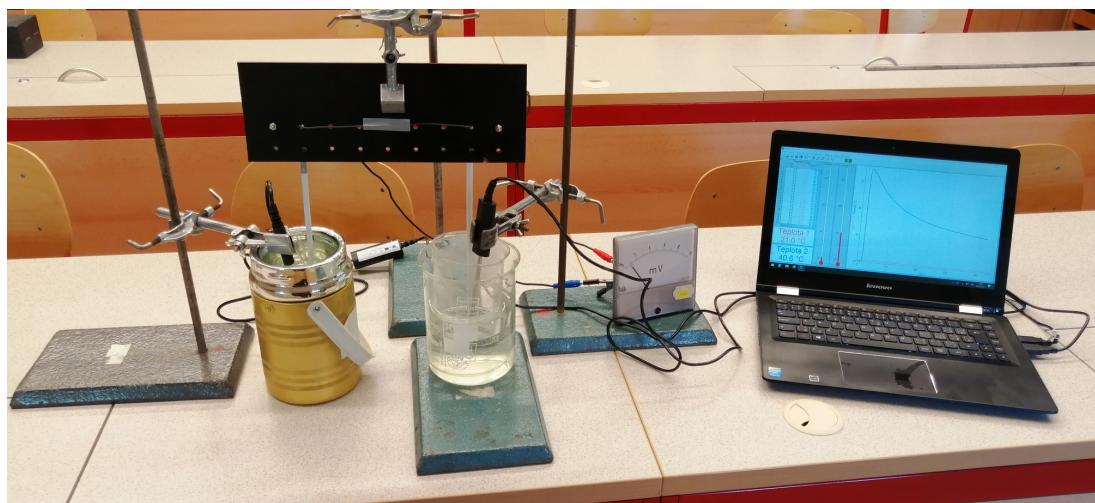
1	Ukázka metody nejmenších čtverců . . . . .	9
2	Příklad rozdílů naměřených a teoretických pro $n = 3$ . . . . .	10
3	Příklad zapojení termočlánku . . . . .	13
4	Schéma sestavení termočlánku . . . . .	16
5	Schéma sestavení experimentu . . . . .	17
6	Graf naměřených dat . . . . .	19
7	Použitý milivoltmetr . . . . .	24
8	Aparatura experimentu . . . . .	24
9	Detail ponoření termočlánků v kapalinách . . . . .	25
10	Sestavený termočlánek . . . . .	25

### 8.2 Seznam tabulek

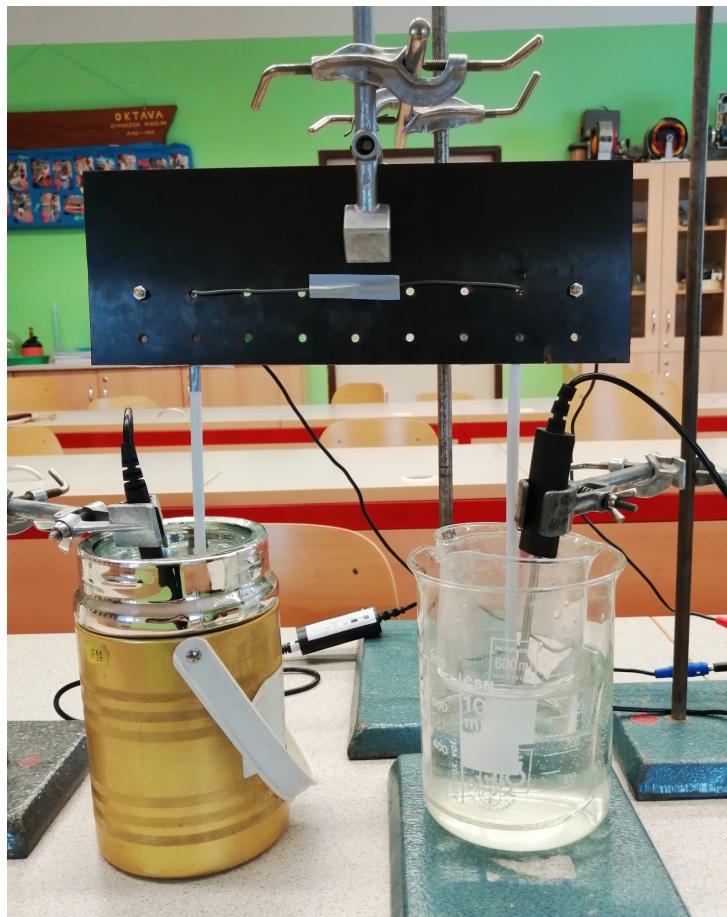
1	Hodnoty termoelektrického potenciálu při rozdílu teplot 100 °C. [1] . . . . .	14
2	Typy termočlánků a jejich označení dle standartu IEC 584. [3, 9] . . . . .	14
3	Naměřená data . . . . .	18



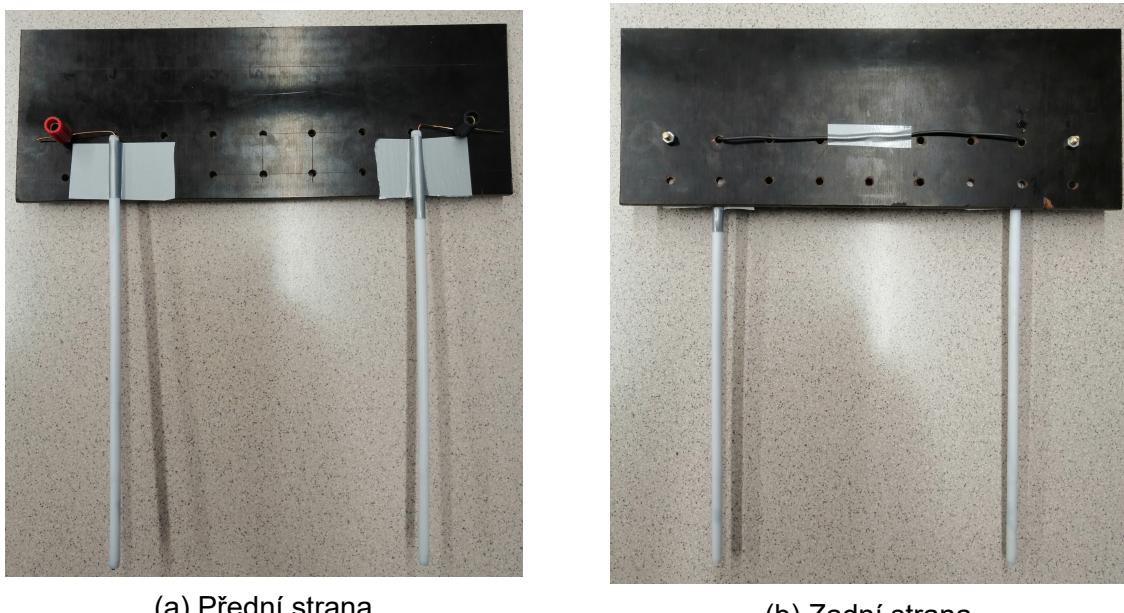
Obr. 7: Použitý milivoltmetr



Obr. 8: Aparatura experimentu



Obr. 9: Detail ponoření termočlánků v kapalinách



Obr. 10: Sestavený termočlánek