

DFT i pogreška prepoznavanja

HELENA LATEČKI, II-134-19

Geofizički odsjek, PMF, Horvatovac ul. 95, 10 000 Zagreb

28.10.2021.

Kontinuirani teorijski Fourierov transformat (CFT) omogućava analizu podataka u vremenskoj i frekventnoj domeni, a za neku kvadratno integrabilnu funkciju $f(t)$ definira se kao:

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i v t} dt.$$

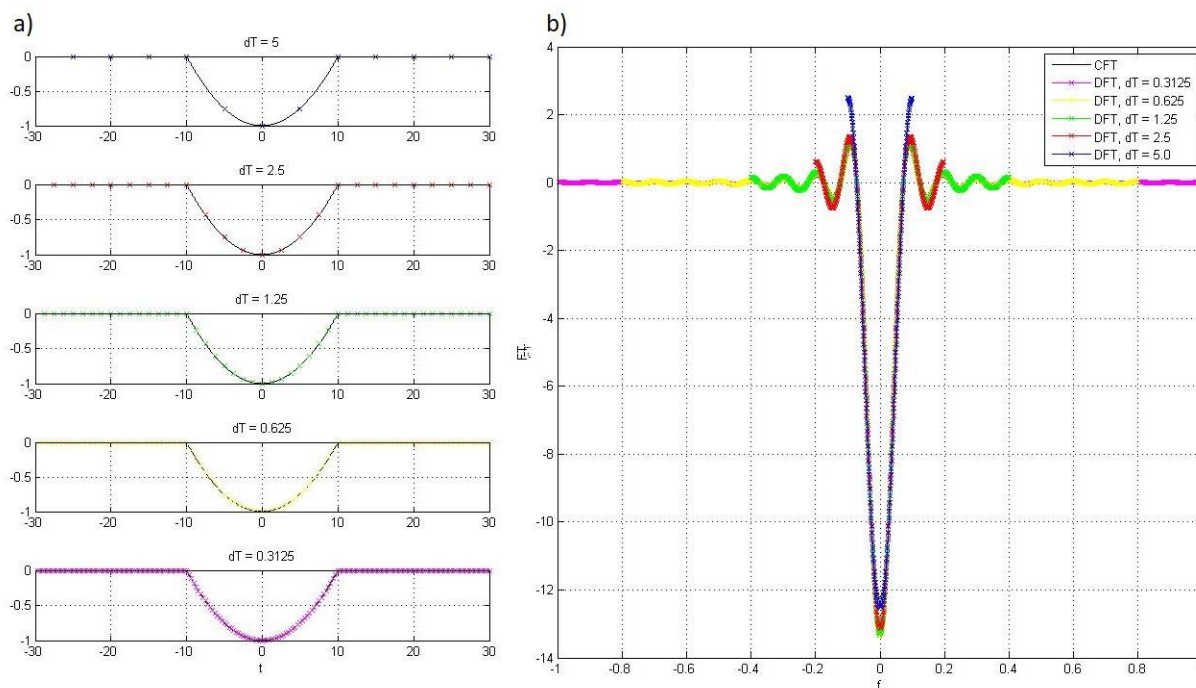
S obzirom da se u praksi radi s diskretnim nizom podataka, što je direktna posljedica digitalizacije, uvodi se tzv. diskretna Fourierova transformacija (DFT). Međukorak između CFT i DFT jesu tzv. Fourierovi redovi, a da bi se ova dva transformata mogla povezati, potrebno je utvrditi kako uzorkovanje podataka u vremenskoj domeni utječe na sliku u frekvencijskoj domeni. Uzorkovanje funkcije zapravo znači uzorkovanje svih sinusoida koje su u njoj sadržane, od kojih se neke mogu razlučiti, a neke ne, i svaka nerazlučena sinusoida nužno daje doprinos odgovarajućoj razlučenoj. Pri tome je najmanji razlučeni period $2\Delta T$ (Nyquistova frekvencija), gdje je ΔT interval uzorkovanja. U frekventnoj domeni, interval uzorkovanja dovodi do ograničavanja pojasa frekvencija, tj. on je konkretno određen intervalom $\left[\frac{-1}{2\Delta T}, \frac{1}{2\Delta T}\right]$. Stoga prilikom odabira intervala uzorkovanja treba voditi računa o tome da vrijednosti Fourierovog transformata izvan intervala pojasa frekvencija od interesa budu male u odnosu na vrijednosti unutar tog intervala. Za dovoljno dugo uzorkovanje, diskretna vremenska funkcija bolje će predočavati realni kontinuirani vremenski niz, a za dovoljno gusto uzorkovanje (dovoljno mali ΔT), diskretna frekvencijska funkcija bit će približno jednaka kontinuiranoj. Samim time DFT par dat će ono što se i očekuje. Kako bi se provjerile ove tvrdnje, analizirana je funkcija:

$$f(t) = p_a(t) \left[\left(\frac{t}{a} \right)^2 - 1 \right], \quad p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } |t| < a \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

na intervalu $t \in [-500, 500]$. Parametar a postavljen je na vrijednost $a = 10$, a sama funkcija uzorkovana je s pet različitih koraka uzorkovanja $\Delta T = [5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125]$. Izvorna funkcija s dovoljno finom rezolucijom te uzorci s odgovarajućim intervalom uzorkovanja prikazani su na Slici 1a. Za zadanu funkciju CFT glasi:

$$\hat{f}(v) = \frac{2\pi v a \cdot \cos(2\pi v a) - \sin(2\pi v a)}{2\pi^3 v^3 a^2},$$

a prikazan je na Slici 1b. Na istoj slici, prikazani su i DFT za različite intervale uzorkovanja.

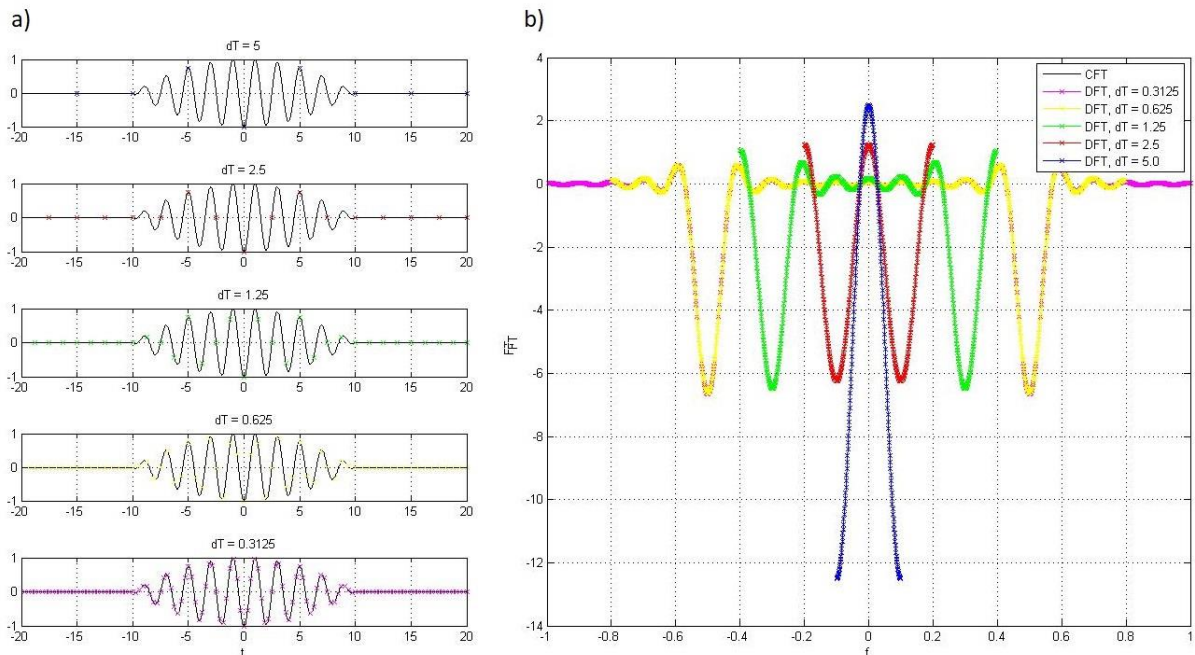


Slika 1. a) Promatrana funkcija $f(t)$ uzorkovana s pet različitih koraka uzorkovanja. b) CFT i DFT promatrane funkcije $f(t)$ za različite korake uzorkovanja.

Brza Fourierova transformacija napravljena je pomoću funkcije `fft_zp`. Gušćim uzorkovanjem u vremenskoj domeni, DFT se bolje slaže s CFT. Kao što je navedeno, uzorkovanje je u direktnoj vezi s pojasom frekvencija i periodičnosti u vremenskoj domeni – odabirom što manjeg ΔT , dobije se širi pojas frekvencija. Veliki ΔT daje uzak pojas frekvencija, tj. manje obuhvaćenih vrijednosti, pa su stoga i odstupanja između CFT i DFT veća.

Isti ovaj postupak ponovljen je i za funkciju $f(t)\cos(2\pi bt)$, pri čemu je $b = 0.5$. Pritom je FT određen uz upotrebu teorema o konvoluciji. Množenje ove dvije funkcije u vremenskoj domeni znači njihovu konvoluciju u frekvencijskoj domeni, a kako FT od $\cos(2\pi bt)$ glasi $[\delta(\nu - b) + \delta(\nu + b)]/2$ slijedi da je $FT(f(t)\cos(2\pi bt)) = [\hat{f}(\nu - b) + \hat{f}(\nu + b)]/2$.

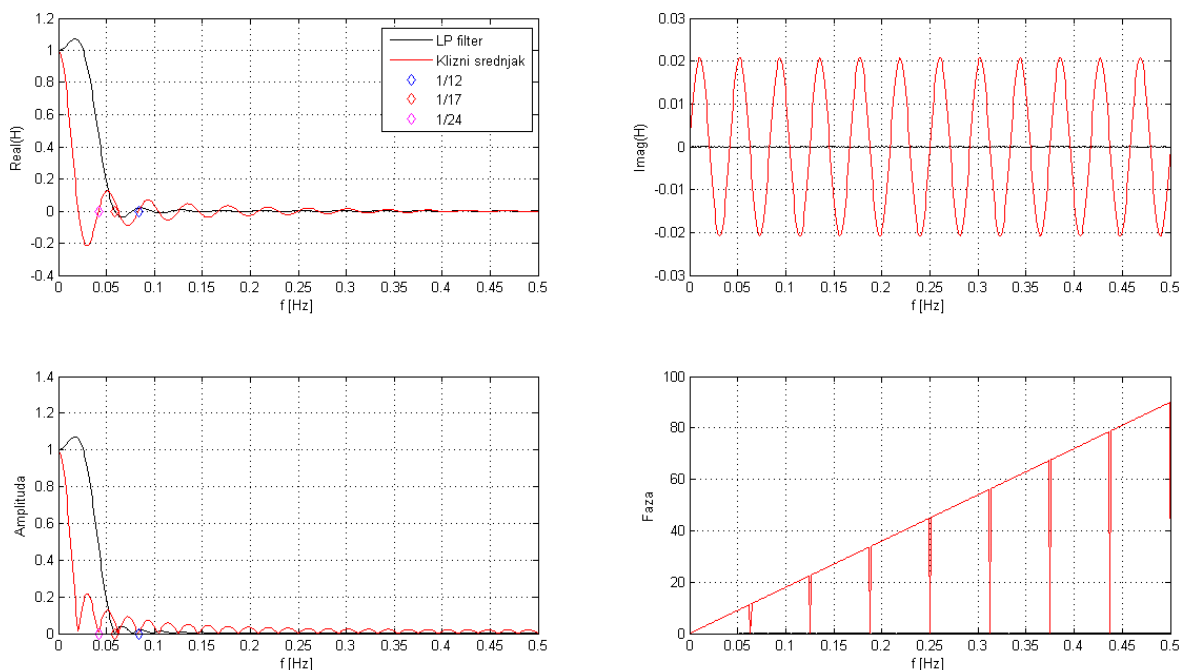
Na Slici 2a prikazana je zadana funkcija, ponovno za pet različitih koraka uzorkovanja. Preveliki ΔT rezultira izgledom sinusoidalne funkcije, ali puno većeg perioda nego što ona zaista i je. Kao i u prethodnom slučaju, uzorkovanje je utjecalo i na sam izgled DFT (Slika 2b). Najgušće uzorkovanje rezultira širim pojasom frekvencija, te boljim slaganjem CFT i DFT. Za prva tri najveća koraka uzorkovanja, prepoznata je pogrešna sinusoida, pa i sami DFT u potpunosti odstupaju od očekivanog CFT, tj. dominantne frekvencije odstupaju od stvarne frekvencije $b = 0.5$.



Slika 2. a) Promatrana funkcija $f(t)\cos(2\pi bt)$ uzorkovana s pet različitih koraka uzorkovanja. b) CFT i DFT promatrane funkcije $f(t)\cos(2\pi bt)$ za različite korake uzorkovanja.

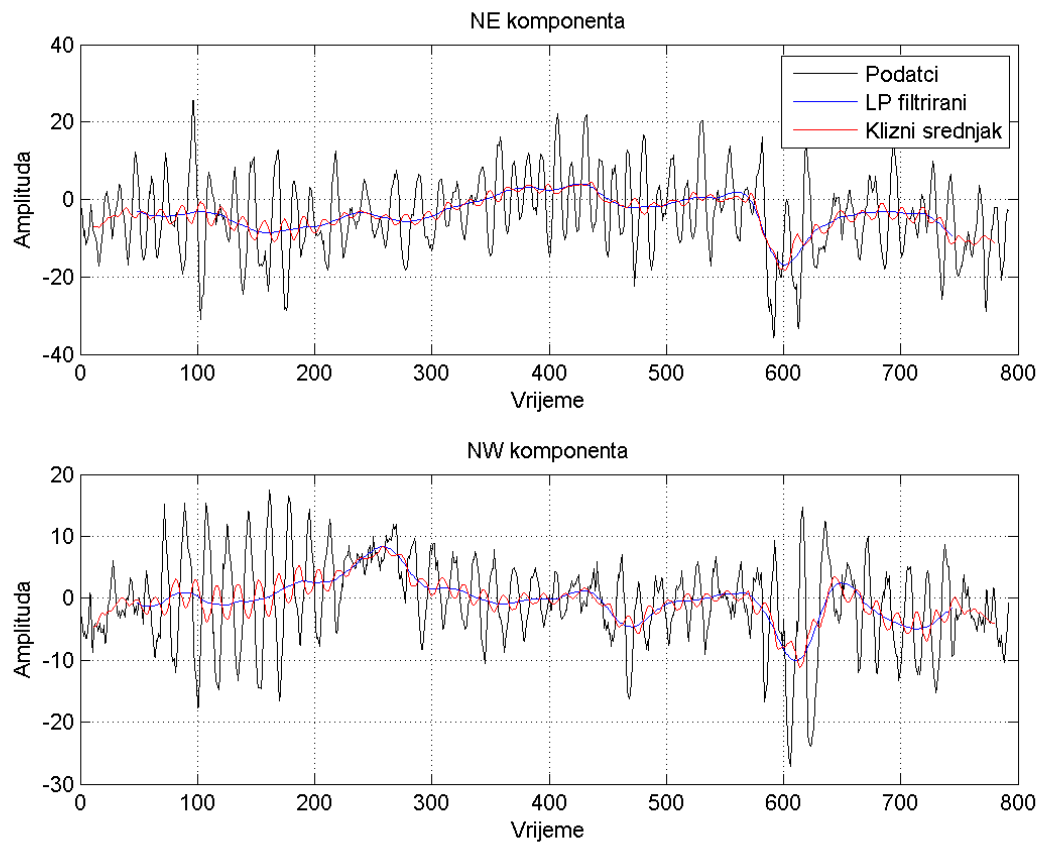
U daljnjoj analizi razmatrani su nizovi za NE i NW komponente morskih struja izmjerenih na postaji približno 12 milja od Velog rata. Konkretno, određeni su nizovi dnevnih srednjaka i to na dva načina: 1) primjenom kliznog srednjaka i decimiranjem, tj. uzimanjem svake 24-te vrijednosti; 2) primjenom zadanog niskopropusnog (LP) filtra i potom decimiranjem. Za izdvajanje pojedinih frekvencija iz nekog vremenskog niza, u praksi se jedan takav niz konvoluira u vremenskoj domeni s nizom h_n . FT ove funkcije naznačava se kao $H(v)$, a parom $h_n \leftrightarrow H(v)$ zadaje se nisko propusni filter (LPF). Filtriranje se prepoznaje kao linearni sustav pri čemu je h_n funkcija impulsnog odziva, a $H(v)$ transfer funkcija. Transfer funkcija ujedno je i svojstvena vrijednost linearnog sustava, tj. ulazna funkcija iz sustava izlazi kao pomnožena s transfer funkcijom.

Za zadane načine određivanja nizova dnevnih srednjaka, primjenom kliznog srednjaka te zadanog LP filtra, izračunate su pripadne transfer funkcije upotrebom brze FT uz prethodnu nadopunu nulama (za filter neparne duljine, faza je nula, a za filter parne duljine, faza je linearna). Na Slici 3 prikazani su realni i imaginarni dio transfer funkcija te amplitude i faze. Za neparnu duljinu LP filtra, imaginarni dio je nula, pa stoga nema pomaka u fazi. U slučaju kliznog srednjaka, imaginarni dio ne iščezava, te stoga postoji i pomak u fazi. Kako 12-satni i 24-satni harmonik odgovaraju periodu morskih doba, a 17-satni harmonik inercijalnim oscilacijama, ove frekvencije posebno su naznačene na istoj slici. Nadalje, realni dio transfer funkcije LP filtra jednak je nuli za period od 17h, a u slučaju kliznog srednjaka, realni dio iščezava za periode od 12h i 24h.

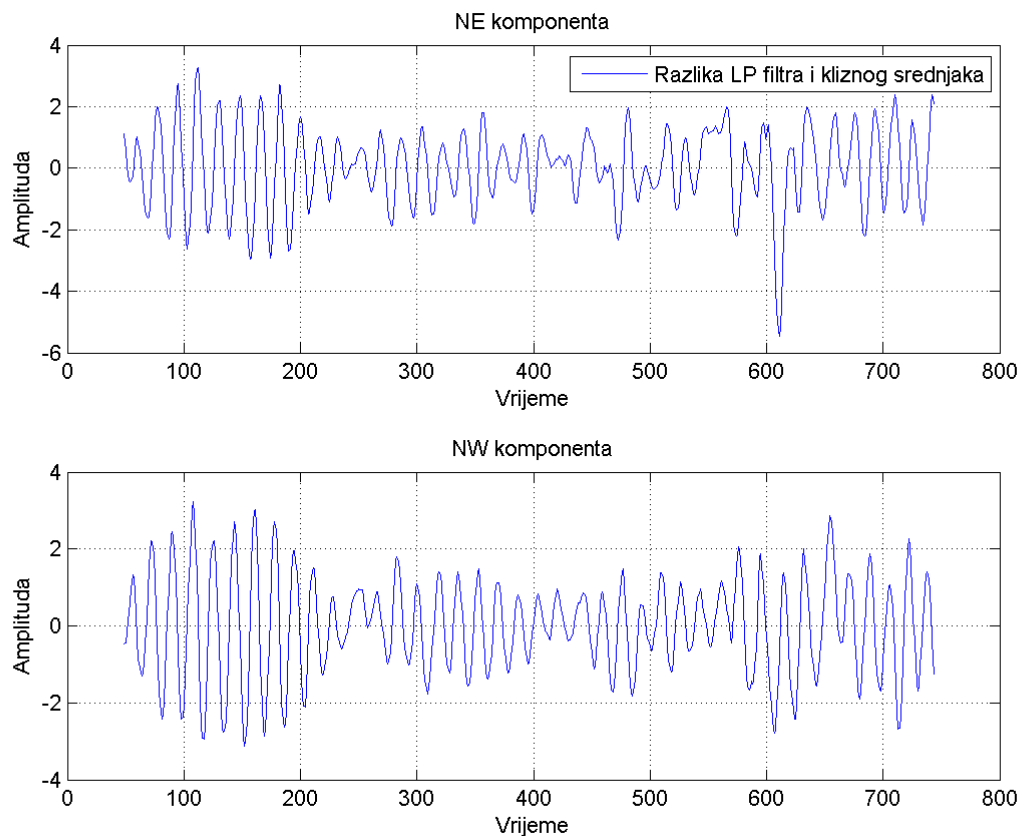


Slika 3. Realni i imaginarni dio te amplituda i faza transfer funkcija kliznog srednjaka i niskopropusnog (LP) filtra. Dijamantima su naznačeni periodi od interesa (12h, 17h i 24h).

Klizni srednjak i LP filter potom su primijenjeni na NE i NW komponente morskih struja (Slika 4). Razlika između struja dobivenih LP filtrom i kliznim srednjakom prikazana je na Slici 5. Niz dobiven primjenom kliznog srednjaka varijabilniji je nego niz dobiven LP filtrom i to posebno za periode od 17h što je i za očekivati s obzirom na izgled transfer funkcije (na periodu od 17h funkcija postiže minimum). Nadalje, razlika ova dva filtrirana niza proizlazi i iz faznog pomaka koji klizni srednjak ima u odnosu na LP filter, a koji je posljedica parne duljine kliznog srednjaka.

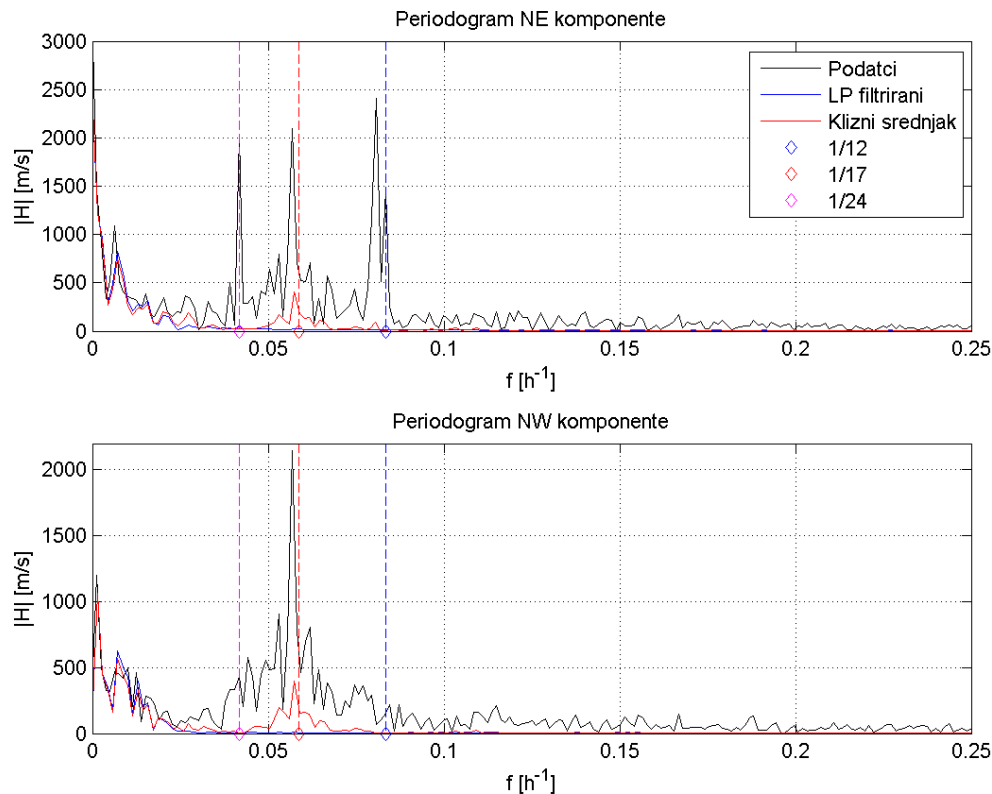


Slika 4. Izvorni niz i niz dobiven primjenom kliznog srednjaka te niskopropusnog (LP) filtra za NE i NW komponentu morske struje.



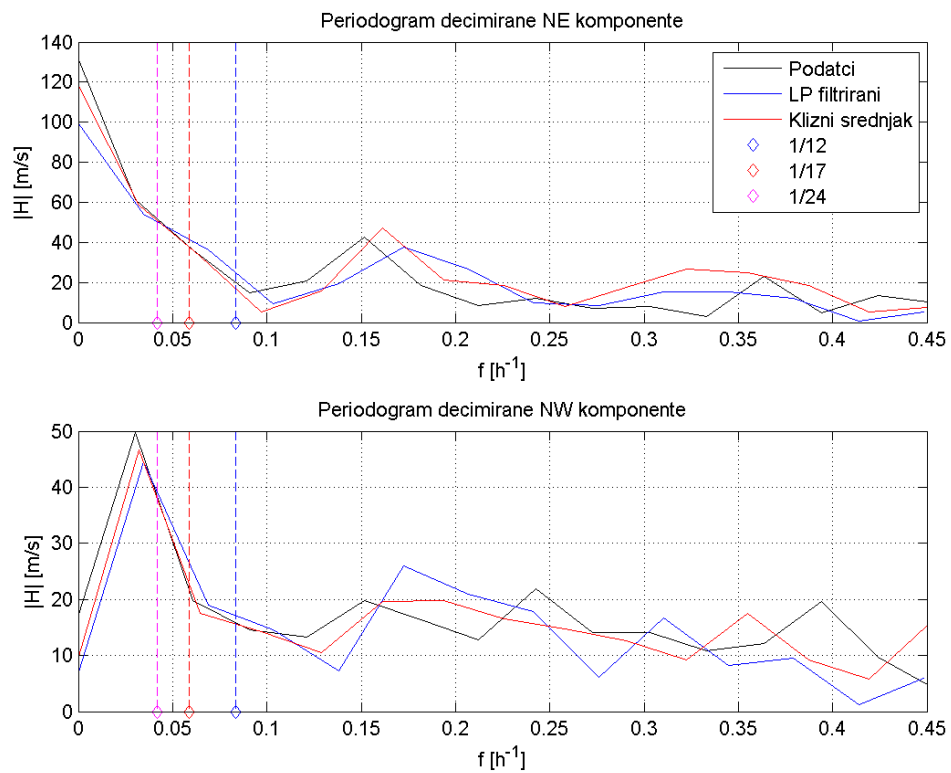
Slika 5. Razlika niza dobivenog primjenom kliznog srednjaka te niskopropusnog (LP) filtra za NE i NW komponentu morske struje.

Za izvorne te filtrirane NE i NW nizove također su izračunati i periodogrami (modul FT), a prikazani su na Slici 6. Na oba načina frekvencije veće od $1/24\text{h}$ uspješno su prigušene, tj. nema ekstrema koji se uočavaju na periodogramu izvornog niza. U slučaju kliznog srednjaka, za periode od 17h amplitude na periodogramu su nešto veće što je ponovno u skladu sa samom transfer funkcijom i njenim karakteristikama.



Slika 6. Periodogrami izvornog i filtriranih nizova za NE i NW komponentu morske struje.

Za kraj, izvorni vremenski niz te nizovi na koje je primijenjen klizni srednjak te LP filter, decimirani su. Izvorni niz decimiran je tako da su uzeti samo 24-satni srednjaci, a filtrirani nizovi decimirani su tako da se u obzir uzima samo svaka 24. vrijednost. Pripadni dobiveni periodogrami prikazani su na Slici 7. U ovome slučaju, izvorni niz više nema ekstreme na periodima od interesa, i općenito, amplitude sva tri periodograma perzistiraju i za veće frekvencije (drugim riječima, uočavaju se lokalni ekstremi). Ovo je posljedica tzv. '*aliasinga*', tj. samo uzorkovanje nizova nakon decimiranja premalo je da bi se mogli raspoznati fenomeni koji se uočavaju na periodima od 12h i 17h. Zbog premalog uzorkovanja, dolazi do krivog raspoznavanja frekvencija/perioda te se javljaju ekstremi na frekvencijama gdje ih se ne očekuje.



Slika 7. Periodogrami decimiranog izvornog i decimiranih filtriranih nizova za NE i NW komponentu morske struje.