

Matemática I

Escuela de Tecnologías de la Información

Indíce

Presentación Red de contenio	dos	5 7
Unidad de Aprer	ndizaje 1	
LÓGICA		9
	Lógica proposicional	11
1.1.1 :	Definiciones: Enunciado, Proposición, Notación	11
1.1.2 :	Clases de proposiciones	14
1.2 Tema 2	Conectivos lógicos	16
1.2.1 :	Operadores lógicos	16
1.2.2	Jerarquía de conectivos lógicos	23
	Tablas de verdad	23
1.3.1 :	Tablas de verdad	23
1.3.2	Proposiciones equivalentes	26
Unidad de Aprer		22
	PROPORCIONALES	33
	Proporcionalidad Razones proporcionales	35 35
	• •	37
2.1.2 .	Regla de tres simple	31
	Regla del tanto por ciento	41
	Porcentajes y propiedades	41
	Descuentos y aumentos sucesivos	43
2.2.3	Aplicaciones comerciales: Precio de venta, precio de costo, precio de lista, descuento y ganancia	45
Unidad de Aprer		50
	S DEL ALGEBRA BÁSICA	53
	Teoría de exponentes	55
	Propiedades de Potenciación	55
3.1.2	Propiedades de Radicación	61
	Productos Notables	69
	Cuadrado de la suma de dos términos	69
	Cuadrado de la diferencia de dos términos	69
	Identidades de Legendre	70
	Diferencia de cuadrados	70
	Cuadrado de un trinomio	71
	Producto de binomios que tienen un término común Cubo de la suma de dos términos	71 71
	Cubo de la suma de dos terminos Cubo de la diferencia de dos términos	7 1 72
3.2.9	Suma y diferencia de cubos	72
	Factorización	78
	Factor común	78
	Por agrupación de términos	78
	Por identidades	78
	Por aspa simple	80
3.35	Por división de binomios (RUFFINI)	81

Presentación

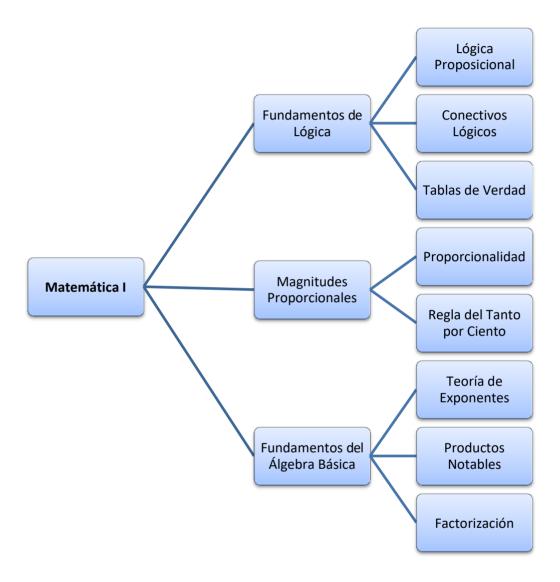
Matemática I pertenece a la línea formativa y se dicta en todas las carreras de la Escuela de Computación e Informática de la institución. Todo aquel que se dedique a la Tecnología Informática necesita contar con ciertas herramientas que le permita efectuar cálculos con rapidez y eficiencia. Por ello, el curso de Matemática I pretende que el estudiante maneje los conceptos básicos y fundamentales, así como los procesos aritméticos y algebraicos resolviendo problemas aplicativos, que les permitirán, en ciclos superiores, un mayor dominio en la resolución de problemas.

El manual para el curso ha sido diseñado bajo la modalidad de unidades de aprendizaje, las que se desarrollan durante un periodo determinado. En cada una de ellas, se hallarán los logros que debe alcanzar el alumno al final de la unidad; el tema tratado, el cual será ampliamente desarrollado; y los contenidos que deben desarrollar, es decir, los subtemas. Por último, se encuentran las actividades que deberá desarrollar en cada sesión, lo cual le permitirán reforzar lo aprendido en la clase.

El curso es teórico – práctico. En tal sentido, en cada sesión, se ha contemplado la teoría necesaria para la aplicación en la solución de los ejercicios propuestos, y como modelo encontrará varios ejercicios resueltos que le servirá de guía.

La solución de ejercicios, en algunos casos, la realizará solamente el profesor quien demostrará las definiciones, propiedades, teoremas, etc. que intervienen en la solución del caso; en otros, el profesor los resolverá con los alumnos. Sin embargo, con la práctica directa e indirecta, los alumnos estarán en condiciones de desarrollarlos por cuenta propia. Asimismo, hallará preguntas de prácticas y/o exámenes propuestos en ciclos pasados relacionados con el tema que se está desarrollando, las mismas que permitirán la autoevaluación y preparación antes de asistir a las evaluaciones calificadas.

Red de contenidos





LÓGICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno, elabora el valor de verdad y simplifica los esquemas moleculares a partir de otro haciendo uso de las tablas de verdad de los operadores lógicos y de las leyes del algebra proposicional.

TEMARIO

1.1 Tema 1 : Lógica proposicional

1.1.1 : Definiciones: Enunciado, Proposición, Notación

1.1.2 : Clases de proposiciones

1.2 Tema 2 : Conectivos lógicos

1.2.1 : Operadores lógicos

1.2.2 : Jerarquía de conectivos lógicos

1.3 Tema 3 : Tablas de verdad

1.3.1 : Tablas de verdad

1.3.2 : Proposiciones equivalentes

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Discusión general acerca de lo que es enunciado y proposición
- Exposición dialogada.
- Trabajo de grupos.
- Como actividad para la casa, se propone desarrollar los ejercicios pendientes del manual.

1.1. LÓGICA PROPOSICIONAL

1.1.1. Definiciones

Es una disciplina formal que tiene por objeto el análisis de la condición de los razonamientos, por lo que se comienza eliminando las ambigüedades del lenguaje ordinario. Se introducen símbolos y conectivos cuyo uso adecuado descarte las contingencias y aporte claridad y economía de pensamiento.



Figura 1.- Lógica
Fuente.- Tomado de elpostulante.wordpress.com

Se utilizan los siguientes conceptos:

1.1.1.1. Enunciado

Es toda frase, oración o sentencia que usamos en nuestro lenguaje.

Ejemplos:

- 1) La matemática es base de todas las ciencias.
- 2) ¿Aprobaremos el curso de Lenguaje de Programación?
- 3) ¡Arriba Perú!
- 4) El Perú es grande.
- 5) Te visitaré mañana.
- 6) X es un número par.
- 7) José estudia y canta.
- 8) 4x + 5 = 6
- 9) 2x + 5 < 8



Todas las preguntas, admiraciones y órdenes, son "simplemente enunciados" y no sufren ninguna transformación o modificación.

1.1.1.2. Enunciado abierto

Es aquel enunciado o ecuación con una o más variables, en el cual no se conocen los valores específicos de las variables. Estos enunciados pueden ser modificados a "proposición" (asignándole cualquier valor a la(s) variable(s).

Ejemplos:

- 1) Algunos alumnos del Primer ciclo son más hábiles en álgebra:
- 2) 3x + v = 10 x = ? v = ?
- 3) x + 5 > 20 x = ?
- 4) Ella está estudiando "No se conoce quién es ella"

1.1.1.3. Proposición

Es todo enunciado, al cual se le puede asignar un valor de verdadero o falso; pero nunca ambos a la vez.

Ejemplos:

- 1) Ramón Castilla fue Presidente del Perú (v)
- 2) El Perú produce plata (v)
- 3) 4 x 2 = 8 (v)
- 4) 5 < 0 (f)
- To do homeleno de mantel
- 5) Todo hombre es mortal (v)

1.1.1.4. Notación

Las proposiciones se denotan con las letras minúsculas como p, q, r, s, t, .., etc.

Ejemplos:

- 1) p: El Perú es hermoso v(p) = v
- 2) $q: 2 + 6 \square 8 \quad v(q) = f$
- 3) r: 6+1 < 5+10 v(r) = v



Ejercicios propuestos

1.		dique cuales de los siguientes enunciados son proposiciones o simplemente nunciados:
	CI	iuriciauos.
	a)	Todo hombre es mortal
	b)	¿Cuántos años tienes?
	c)	¡ Apúrate!
	d)	18 es un número primo.
2.		scriba cuatro ejemplos de enunciados abiertos.
	a)	
	b)	
	c)	
	d)	
_	_	

- 3. ¿Cuál es la diferencia entre simplemente enunciado y enunciado abierto?
- 4. ¿Cuál es la diferencia entre una proposición y un enunciado abierto?

1.1.2. Clases proposicionales

1.1.2.1. Simples

Llamadas también atómicas o elementales. Son aquellas que tienen un solo sujeto y un solo predicado. No llevan conectivo lógico.

Ejemplos:

- 1) Cibertec es un Instituto líder en enseñanza.
- 2) Electrónica es una especialidad.
- 3) La pizarra es verde.
- 4) Los animales mueren.

1.1.2.2. Compuestas

Llamadas también moleculares o coligativas. Son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples, las cuales son enlazadas por algún conectivo lógico.

Ejemplos:

- 1) Cibertec es un Instituto líder en enseñanza.
- 2) Electrónica es una especialidad.
- 3) La pizarra es verde.
- 4) Los animales mueren.

Además, existen enunciados que no son proposicionales como por ejemplo:

Exclamativos: Socorro

Interrogativo : ¿Hasta qué hora dura la clase?

Imperativo : Fuera Admiración : ¡Oh!



Eiercicios propuestos.

4	1 1.				
1.	בווחוחוום	alia tina	n de nro	posiciones	con'
1.	maique	gue lipi	J UC PIO		, 3011.

- a) Dos y tres son números consecutivos
- b) No es cierto que 5 es un número primo o cuatro no es un número cuadrado perfecto.
- c) No es cierto que 6 es un cubo perfecto, y que 13 sea un número par.
- d) 9 es un impar y si 6 tiene más de 2 divisores, entonces es un número compuesto.

	compuesto.	
2.	Con las siguientes proposiciones simples indique proposiciones compuestas:	
	Sea p: 2 es primo ; q: 3 es impar	
	a)	_
	b)	
	c)	
	d)	_
	e)	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	_
3.	Escriba tres ejemplos de proposiciones simples y tres proposiciones compuesta:	
	Simples:	
	a)	
	b)	_
		_
	c)	_
	Compuestas:	
	a)	
		_
	c)	_

1.2. Conectores lógicos

Son aquellos símbolos que usamos para enlazar dos o más proposiciones simples. Son los siguientes.

Ejemplos:

que se lee "y"que se lee "o"

 Δ , $\underline{\vee}$: que se lee "o" pero no ambas \rightarrow : que se lee "si ... entonces..." \leftrightarrow : que se lee "si y sólo si"

121. Operadores lógicos

1.2.1.1. Negación de una proposición

Negar una proposición consiste en cambiar el valor de verdad que tenía antes. Es el conectivo lógico que se usa para negar el valor de verdad de una proposición cualquiera. Simbólicamente se le denota por: $\sim p$

Lógica Clásica

р	~ p
V	F
F	V

Ejemplos:

p: Las rosas no son rojas
 p: Las rosas son rojas

2) q: 7 es mayor que 5 ~q: 7 no es mayor que 5 o q: 7 > 5 ~q: 7 ≤ 5

V(q) = V $V(\sim q) = F$

1.2.1.2. Conjunción

Es el conectivo lógico que se usa para afirmar simultáneamente la veracidad de dos oraciones componentes. Se le denota por: $p \wedge q$

Ejemplo:

p: 4 es divisor de 20 V(p) = V q: 20 es múltiplo de 5 V(p) = V V(p) = V V(p) = V $V(p \land q) = V$

El número de combinaciones (#c) de los valores de verdad de las proposiciones simples es:

 $\#c = 2^n$, donde n = número de proposiciones simples.

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica			
<i>p</i>	q	$p \wedge q$	
V	V	V	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

1.2.1.3. Disyunción inclusiva

La llamada disyunción inclusiva o disyunción débil es un conectivo lógico que se usa para afirmar que, por lo menos una de las oraciones componentes, es verdadera. Se le denota por: $p \lor q$

Ejemplo:

p: 8 es menor que 5	V(p)	= F
q: 6 es mayor que 3	V(q)	= V
p v q: 8 es mayor que 5 ó 6 es mayor que 3	$\vee (p \vee q)$	= V

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica			
p	\boldsymbol{q}	$p \lor q$	
V	V	V	
V	F	V	
F	V	V	
F	F	F	

1.2.1.4. Condicional

Es una proposición recíproca, implicación u oración condicional. Una proposición condicional es falsa, cuando la proposición como antecedente es verdadera y la proposición como consecuente es falsa. En cualquier otro caso es verdadero. Se le denota por: $p \to q$

Ejemplo:

1) Si Patricia consigue visa de turista, entonces viajará a Nueva York

Si p = Patricia consigue visa de turista q = Patricia viajará a Nueva York

Entonces la proposición se simboliza por: $p \rightarrow q$

2) Si los hombres son inmortales, entonces la luna brilla.

Si p = Los hombres son inmortales
$$V(p) = F$$
 $q = La luna brilla$ $V(q) = F$

Luego se simboliza: $V(p \rightarrow q) = V$

3) Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados.

a)
$$2 + 3 = 8 \rightarrow 5 < 6$$
 (V)

b)
$$3-1=4^2 \rightarrow 2^9 < 2$$
 (V)



Una implicación puede transformarse en una disyunción, así:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica

p	q	$m{p} ightarrow m{q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.2.1.5. Bicondicional

Es el conectivo lógico que se lee "....si y sólo si". En general una oración bicondicional es llamada también "equivalencia material" que se usa para afirmar los casos en que p = q en valores de verdad. Se le denota por: $p \leftrightarrow q$

Ejemplo:

$$p \leftrightarrow q$$
: 2< 4 si y solamente si 2 + 6 < 4 + 6 $V(p \leftrightarrow q) = V$

También se lee como:

"p si y solamente si q"

"p es una condición suficiente y necesaria para q"



La diferencia que existe entre $p \leftrightarrow q$ y p=q, está en que una bicondicional es una proposición, pero p=q es una declaración acerca de dos proposiciones más no es una proposición.

Su tabla de verdad es:

Lógica Clásica

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2.1.6. Disyunción exclusiva

Es llamada disyunción excluyente o disyunción fuerte. Este conectivo lógico se usa para afirmar que sólo una de las oraciones componentes es verdadera. Además la disyunción excluyente es la negación de una bicondicional. Se le denota por: $p \Delta q$

Ejemplo:

p:
$$3 < 5$$

q: $2*3 < 2*5$
p Δ q: σ $3 < 5$ σ $2*3 < 2*5$
V(p) = V
V(q) = V
V(p Δ q) = V

Su tabla de verdad es:

a) $(p \lor q) \lor (r \land x)$

 Lógica Clásica

 p
 q
 p Δ q

 V
 V
 F

 V
 F
 V

 F
 V
 V

Ejemplos:

1)	Sean p, q y r proposiciones tales que $p = V$, $q = F$ y $r = F$. Indica	cuáles	de las
	siguientes proposiciones son verdaderas:		

1
b) $\sim p \vee (q \wedge t)$
Solución:
c) $[(p \land q) \lor (\sim p \land \sim q)] \land [(\sim p \land q) \lor (\sim q \land p)]$
Solución:

ſ	d) $(\sim p \lor q) \land (w \lor \sim t) \land (y \lor z)$
	Solución:
2)	Sean p, q, r, s proposiciones tales que $p \equiv F$, $q \equiv V$, $r \equiv F$, $s \equiv V$. Indica ¿Cuál de las siguientes proposiciones son falsas?:
	a) $(\sim p \land \sim q) \lor (\sim q \lor \sim s)$ Solución:
	b) $(\sim r \lor q \lor w) \leftrightarrow [(\sim q \lor r) \land s]$
	Solución:
Г	c) $(p \to q) \to [(p \lor q) \land \sim q]$
	Solución:



1) Si se cumple: p /	$(a \rightarrow r)$	$) \equiv V : p \rightarrow s \equiv F$	$:\sim a \vee s \equiv F$
----------------------	---------------------	---	---------------------------

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) p
$$\rightarrow \sim$$
 s

b)
$$(r \land \sim p) \rightarrow \sim q$$

a)
$$p \rightarrow \sim s$$
 b) $(r \land \sim p) \rightarrow \sim q$ c) $(p \triangle q) \leftrightarrow (s \lor \sim r)$

R: a) V b) V c) V

2) Si
$$\{ \sim [(p \land r) \rightarrow q] \land [(p \lor q) \Delta s] \} \rightarrow \{(s \Delta p) \rightarrow t\} \equiv F$$

Halle el valor de: $\{[(\sim p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\sim (q \rightarrow (u \rightarrow p))]\}\Delta (p \Delta q)$

R: (V)

3) Si la negación de la siguiente proposición es verdadera:

$$(\sim s \Delta q) \vee \{(s \leftrightarrow p) \vee [r \rightarrow \sim (p \land q)]\}$$

Halle el valor de verdad de: $[p \lor q \lor r \lor (m \land p)] \rightarrow s$

R: (F)

4) Si:
$$\{ \sim [(p \land r) \rightarrow q] \land [(p \lor q)\Delta m] \} \rightarrow \{(m\Delta p) \rightarrow n \} \equiv F$$

Determina el valor de verdad de: $\{ \sim (p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \sim (r \vee m)] \} \Delta n$

R: (V)

5) Si la negación de la proposición: $(p \land \sim r) \rightarrow \sim [(p \lor q) \Delta \sim q]$ es verdadera,, determine el valor de: $[(r \rightarrow s) \Delta (p \lor \sim q)] \leftrightarrow \sim (p \land r)$

R: (F)

6) Si la proposición: $[(p \land q) \lor r] \lor [t \to p] \equiv F$ Determine el valor de : $[(p \to \sim t) \to (r \to q)] \lor [(p \leftrightarrow t) \leftrightarrow q]$

R: (V)

7) Si la proposición $[(s \land \neg q) \leftrightarrow r] \land \neg [(q \Delta s) \to (\neg r \lor p)] \equiv V$ Halle el valor de : $\neg [(s \Delta \neg r) \lor x] \to [(\neg q \lor t) \leftrightarrow \neg p]$

R: (V)

122 Jerarquía de conectivos lógicos

Si en una proposición compuesta no aparecen los signos de agrupación como: paréntesis, llaves, corchetes, etc., los conectivos lógicos: "~", "\", "v" tienen igual jerarquía, y "\rightarrow", "\rightarrow" tienen mayor jerarquía, avanzando de izquierda a derecha.

1.3. Tablas de verdad

La verdad o falsedad de una proposición se denomina validez (o su valor de verdad). La validez de la negación, de la conjunción, de la disyunción, de la condicional y de la bicondicional se puede representar en tablas.

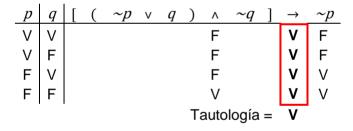
En consecuencia, dadas dos o más proposiciones simples cuyos valores de verdad son conocidos, el valor de verdad de una proposición compuesta depende de la verdad de cada una de las proposiciones componentes y se determina mediante tablas de verdad.

1.3.1. Tablas de verdad

1.3.1.1. Tautología (T)

Es toda proposición simple o compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero, para cualquier combinación de valores veritativas de sus componentes.

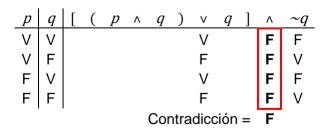
Ejemplo:



1.3.1.2. Contradicción (C)

Es toda proposición que tiene como valor de verdad siempre falsa para cualquier combinación de sus valores veritativas de sus componentes.

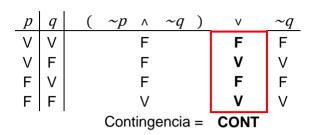
Ejemplo:



1.3.1.3. Contingencia (CONT)

Cuando la tabla de una proposición tiene al menos una V y una Falsa.

Ejemplo:





Ejercicios propuestos.

1) Por medio de Tabla, determine si los siguientes esquemas moleculares representa una Tautología, Contradicción o Contingencia

a) $\lfloor (p \rightarrow q) -$	$\rightarrow r \longrightarrow ((\sim q \rightarrow \sim p) \land \sim q) \land \sim q \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p) \land q \rightarrow (\sim q \rightarrow q) \land q \rightarrow (\sim$	r]	
Solución:			
			D. / T.\
			R: (T)

b)
$$(p \Delta q) \vee p$$
 Solución: R: (CONT)

c)
$$(\sim p \land \sim q) \lor (\sim q \lor \sim s)$$
 Solución:

	d) $[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
	Solución:
	R: (T)
	к. (т)
2)	Si la siguiente proposición, $(p\lor \sim q)\to (\sim p\to m)$ es Falsa, indique si la siguientes proposiciones representan una Tautología, Contradicción o Contingencia.
	a) $(p \rightarrow r) \lor m$
	Solución:
	R: (T)
ı	· , ,
ĺ	b) $q \wedge [(p \rightarrow r) \vee m]$ Solución:
	R: (C)
	c) $[m \rightarrow (r \Delta n)] \vee (r \rightarrow n)$
	Solución:
	R: (T)
l	
	d) $\left[\sim \left(q \Delta m \right) \wedge \left(s \rightarrow n \right) \right]$
	Solución:

R: (C)

1.3.2. **Proposiciones equivalentes**

Dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si al ser unidas con el conectivo ↔ resulta una tautología; es decir, sus tablas de verdad son idénticas.

La equivalencia se denota por "≡". Se llama también proposiciones equivalentes. Se lee "P es equivalente a Q" o "Q es equivalente a P".

Ejemplo: las proposiciones (p \rightarrow q) y [(\sim q) \rightarrow \sim p] son equivalentes.

p	q	(~p	\rightarrow	q)	(~q	\rightarrow	~p)
V				٧				F	٧	F	
V	F			F				V	F	F	
	٧			٧				F	٧	V	
F	F			٧				V	٧	V	



Ejercicios propuestos.

- 1) ¿La proposición $\sim (p \rightarrow q) \wedge [q \rightarrow \sim r]$ es equivalente a cuál de las siguientes proposiciones? (Use Tablas).

	$p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$	
Sol	lución:	
		R: (Sí es)

b) $(p_{\wedge} \sim q) \vee [(p_{\wedge} \sim r)_{\wedge} \sim q]$

2) (p, 4) · [(p, 1) · 4]	
Solución:	
	R: (Sí es)
	11. (5. 55)



Guía de ejercicios

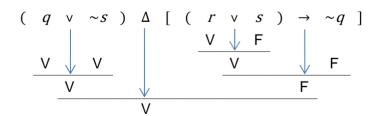
- 1) Si la proposición $\sim (\sim r \vee s) \rightarrow [(p \wedge q) \Delta r] \equiv F$, hallar el valor de:
 - a) $(\sim r \leftrightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow \sim s)$

 - b) $(q \lor \sim s) \Delta [(r \lor s) \rightarrow \sim q]$ c) $\sim [(\sim r \lor \sim s) \rightarrow (q \lor \sim p)] \rightarrow (s \Delta \sim q)$

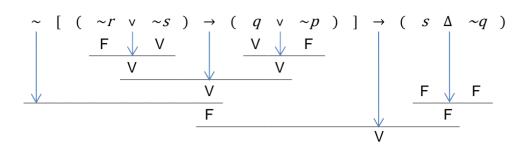
Solución:

- \therefore Los valores veritativos son: r = V, s = F, p = V, q = V
 - a) Desarrollando ($\sim r \leftrightarrow p$) \rightarrow ($q \rightarrow \sim s$)

b) Desarrollando $(q \lor \sim s) \Delta [(r \lor s) \rightarrow \sim q]$



c) Desarrollando $\sim [(\sim r \vee \sim s) \rightarrow (q \vee \sim p)] \rightarrow (s \Delta \sim q)$



$$s \Delta p \equiv V$$

2) Si se sabe que: $r \wedge s \equiv F$ $q \rightarrow p \equiv F$

Determinar el valor de verdad de:

a)
$$(\sim r \Delta q) \rightarrow (s \wedge p)$$

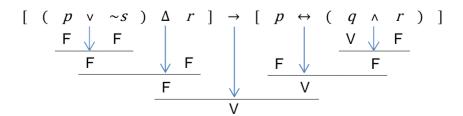
b)
$$[(p \lor \sim s) \Delta r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \land r)]$$

Solución:

 \therefore Los valores veritativos son: s = V, r = F, q = V, p = F

a) Desarrollando $[(p \lor \sim s) \Delta r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \land r)]$

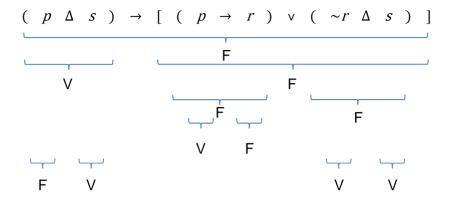
b) Desarrollando ($\sim r \leftrightarrow p$) \rightarrow (q $\rightarrow \sim s$)



3) Si la negación de la siguiente fórmula lógica es verdadera: $(p \Delta s) \rightarrow [(p \rightarrow r) \lor (\sim r \Delta s)] \equiv F$, hallar el valor de:

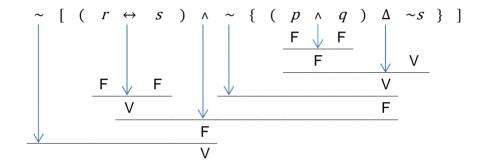
$$\sim [(r \leftrightarrow s) \land \sim \{(p \land q) \Delta \sim s\}]$$

Solución:



 \therefore Los valores veritativos son: p = F, s = F, r = F

Desarrollando $\sim [(r \leftrightarrow s) \land \sim \{(p \land q) \Delta \sim s\}]$



La proposición es verdadera.

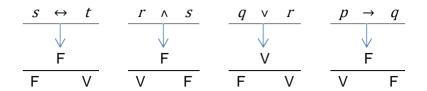
$$s \leftrightarrow t \equiv F$$

4) Si se sabe que: $\begin{tabular}{ll} r & \land & s & \equiv F \\ q & \lor & r & \equiv V \\ p & \to q & \equiv F \end{tabular}$

Hallar el valor de verdad de la siguiente proposición:

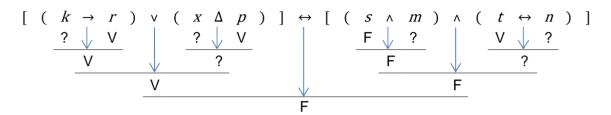
$$\left[\begin{array}{ccc} \left(k & \rightarrow r\right) \vee & \left(x \mathrel{\Delta} & p\right) \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\left(s \land & m\right) \land \left(t & \leftrightarrow n\right)\right]$$

Solución:



 \therefore Los valores veritativos son: s = F, t = V, r = V, q = F, p = V

Desarrollando
$$\left[\begin{pmatrix} k \rightarrow r \end{pmatrix} \lor \begin{pmatrix} x \Delta p \end{pmatrix}\right] \leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} s \land m \end{pmatrix} \land \begin{pmatrix} t \leftrightarrow n \end{pmatrix}\right]$$



La proposición es falsa.

$$p \rightarrow q \equiv F$$

5) Si se sabe que p, q, r, s tales que: $s \leftrightarrow p \equiv V$

Determinar el valor de las siguientes proposiciones:

- a) $(r \land x) \rightarrow (\sim p \land s)$
- b) $(s \rightarrow q) \land x$
- c) $[(w \lor p) \land x] \rightarrow (\sim w \rightarrow p)$
- d) $[(p \rightarrow q) \land s] \Delta [(r \leftrightarrow q) \lor \sim p]$

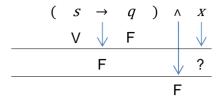
 \therefore Los valores veritativos son: p = V, q = F, s = V, r = F

Solución:

a) Desarrollando $(r \land x) \rightarrow (\sim p \land s)$

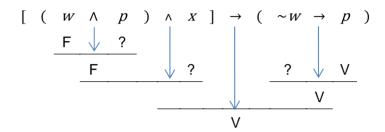
Es verdadero.

b) Desarrollando $(s \rightarrow q) \land x$



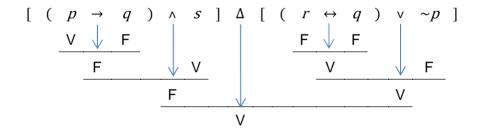
Es falso.

c) Desarrollando $[(w \lor p) \land x] \rightarrow (\sim w \rightarrow p)$



Es verdadero.

d) Desarrollando $[(p \rightarrow q) \land s] \Delta [(r \leftrightarrow q) \lor \sim p]$



Es verdadero.

Resumen

Un enunciado es cualquier expresión.

La proposición es un enunciado que puede ser Verdad o Falsa.

Operadores Lógicos:

p	~p
V	F
F	V

p	q	$p \lor q$	$p\Delta q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

☐ Tipos de proposiciones:

1. Tautológica: significa Verdad.

2. Contradicción: significa Falso.

3. Contingencia: significa que no es Verdad ni Falso

- Proposiciones equivalentes.- dos proposiciones son equivalentes cuando sus tablas de verdad sin idénticas.
- Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.
- Aquí encontrará toda la información relativa a la lógica: http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/logica/
- The esta página, hallará algunos ejercicios resueltos: http://www.guiamath.net/
- Aquí encontrará ejercicios sobre álgebra de proposiciones

 http://www.guiamath.net/ejercicios_resueltos/01_03_01_03-Logica_Alg-Proposiciones/0_algebra-proposiciones.html
- The esta página, hallará algunos ejercicios resueltos http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/logica/



MAGNITUDES PROPORCIONALES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno resuelve problemas relacionados a la venta de bienes, haciendo uso de la regla de tres simple y tanto por ciento.

TEMARIO

2.1 Tema 4: Proporcionalidad

2.1.1 : Magnitudes proporcionales

2.1.2 : Regla de tres simple

2.2 Tema 5 : Regla del tanto por ciento

2.2.1 : Porcentajes y propiedades

2.2.2 : Descuentos y aumentos sucesivos

2.2.3 : Aplicaciones comerciales: Precio de venta, precio de costo, precio

de lista, descuento y ganancia

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Los alumnos aplican los conceptos de fracciones, razones y regla de tres simple
- Los alumnos diferencian, de acuerdo con el enunciado de los problemas, si se trata de una regla de tres simple directa o inversa
- Resuelven los ejercicios y problemas propuestos bajo la asesoría del profesor.

2.1. PROPORCIONALIDAD

21.1. Magnitudes proporcionales

Una razón es la comparación que se establece entre dos cantidades. Si dicha comparación se da por medio de una división será una razón geométrica.

Por ejemplo, si las edades de Carlos y Francisco son 12 y 15 años, entonces la razón entre sus edades es $12 \div 15$ ó $\frac{12}{15}$. Simplificando se observa que están en la relación: $\frac{4}{5}$

Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones. Por ejemplo, la igualdad entre las razones anteriores:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

En una proporción, se cumple que el producto de términos extremos es igual al producto de términos medios:

Esto significa que: $4 \times 15 = 12 \times 5$

Por lo tanto, <u>la propiedad fundamental de las proporciones</u> es: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

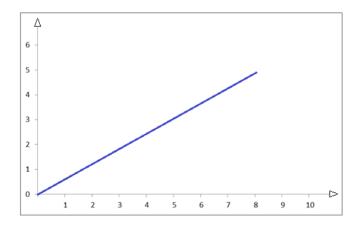
2.1.1.1. Proporcionalidad directa

Dos magnitudes están en proporcionalidad directa si el cociente de sus valores correspondientes permanece constante.

$$x$$
 e y están en proporcionalidad directa $\Leftrightarrow \underline{x} = k$

Donde: k es la constante de proporcionalidad.

El gráfico de dos variables en proporcionalidad directa es un conjunto de puntos que están sobre una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Analizando el gráfico se visualiza que si una magnitud aumenta, la otra también aumenta.



Ejemplo: Un vehículo tiene un rendimiento de 16 km por cada litro de combustible. ¿Cuántos litros de combustible consumirá en un viaje de 192 km?

Se forma la proporción entre las variables distancia – consumo de combustible (si aumenta la distancia, entonces se deduce que el consumo aumenta; por lo tanto, son directamente proporcionales).

$$\frac{16km}{1lt} = \frac{192km}{xlt}$$

Utilizando la propiedad fundamental de las proporciones obtenemos que:

$$16x = 192 \times 1 \Rightarrow \frac{192}{16} = 12$$
 litros

Entonces.

$$\frac{^{16}}{^{1}}$$
 = 16 (constante) y $\frac{^{192}}{^{12}}$ = 16 (constante)

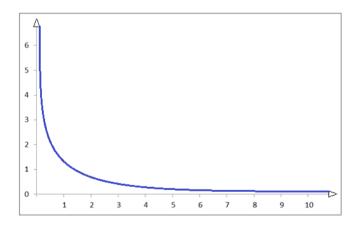
2.1.1.2. Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes están en proporcionalidad inversa si el producto de sus valores correspondientes es una constante.

$$x \in y$$
 están en proporcionalidad inversa $\Leftrightarrow x \cdot y = k$

Donde: k es la constante de proporcionalidad.

El gráfico de dos variables que están en proporcionalidad inversa es un conjunto de puntos que están sobre una hipérbola.



Analizando el gráfico, se visualiza que a medida que una magnitud aumenta, la otra magnitud disminuye.

Ejemplo: Tres obreros demoran 5 días en hacer una zanja. ¿Cuánto demorarán 4 obreros?

La relación entre el número de obreros – tiempo es de proporcionalidad inversa, ya que si trabajan más obreros, entonces se demorarán menos tiempo en terminar el trabajo. Aplicando la propiedad de las proporciones inversas, el producto entre las variables es constante:

$$3 \times 5 = 4x \Rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ días}$$

212 Regla de tres simple

La regla de tres es una aplicación de las magnitudes proporcionales; es un procedimiento basado en la relación proporcional de dos magnitudes.

La regla de tres consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, mediante la comparación de dos magnitudes proporcionales.

2.1.2.1. Regla de tres simple directa

Cuando las dos magnitudes son directamente proporcionales (DP).

Procedimiento:

Magnitudes		M	(DP)	Q
Supuesto Pregunta	:	a c		b x
Como son DP, su cocier	nte e	s cons	stante. Lu	ego:
$\frac{a}{b}$	$=\frac{c}{x}$			

Ejemplo: Una persona puede caminar normalmente 9 kilómetros en 2 horas. En una caminata normal de 6 horas, ¿cuántos kilómetros puede caminar?

Solución:

Magnitudes	:	Horas	(DP)	Kms
Supuesto Pregunta	:	2 6		9 x
Como los kms caminado caminata:	S S	Ü	las hora	

$$\therefore x = \frac{6 \times 9}{2} = 27 \text{ km}$$

2.1.2.2. Regla de tres simple inversa

Cuando las dos magnitudes son inversamente proporcionales (IP).

Procedimiento:

Magnitudes	:	М	(DP)	Q
Supuesto Pregunta	:	a c		b x

Como son DP, su cociente es constante. Luego:

$$a \cdot b = c \cdot x$$

Ejemplo: Se ha calculado que para construir un edificio se necesita 80 obreros y 60 días. Pero se cuenta solamente con 75 obreros. ¿Cuántos días se tardará en construir el edificio?

Solución:

Magnitudes : Obreros (IP) Días Supuesto : 80 60

Pregunta : 75 x

El número de obreros que intervienen en una obra y el tiempo que demoran en ejecutarla son IP:

$$\therefore x = \frac{80 \times 60}{75} = 64 \text{ días}$$



Ejercicios propuestos.

1)	Para pintar una pared de forma cuadrada se necesitan 14 tarros de pintura ¿Cuántos tarros de pintura se necesitará para pintar otra pared cuadrada cuyo lado mide tres veces el lado de la pared anterior?
	Solución:
2)	Un grupo de 45 trabajadores proyectaron hacer una obra en 36 días, pero tardaron más días porque 15 de ellos decidieron no intervenir en la obra ¿Cuántos días tardaron en terminar la obra?
	Solución:
3)	Para pintar una pared de 120 m de largo, se emplearán cierto número de obreros. Si la pared fuese 40 mt más larga, harían falta 5 obreros más. ¿Cuántos obreros se emplearán?
	Solución:
4)	Se sabe que 10 obreros pueden realizar una obra en 22 días. Si al cabo de 4 días son despedidos 4 obreros, ¿en qué tiempo se culminará toda la obra?
	Solución:



1) Las edades de Juan y Pedro (juntos) con las edades de Pedro y Luis (juntos) están en la relación de 8 a 7. Si las edades de Juan y Luis están en la relación de 5 a 3, halle ¿Cuánto tiene cada uno?, si las edades de los tres suman 57 años:

Rpta: 9, 15 y 33 años.

2) Cierto número de obreros hace una obra en 20 días, pero si contratan 6 obreros más, harían la obra en 15 días. Determine el número de obreros.

Rpta: 18 obreros.

3) Un depósito de gasolina cuesta 275 soles. Si se saca de él 85 litros ya no cuesta más que 150 soles. ¿Cuántos litros contenía el depósito?

Rpta: 187 litros.

4) Un campesino ara un terreno cuadrado de 16 m de lado en 16 días. ¿Qué tiempo empleará en arar otro terreno cuadrado de 4 m más de lado que el anterior?

Rpta: 25 días.

5) Una carretilla puede transportar un desmonte en 6 días haciendo cierto número de viajes diarios, pero lo haría en 2 días menos si hiciera 6 viajes más por día. ¿Cuántos viajes en total tendrá que hacer para transportar el desmonte en "n" días?

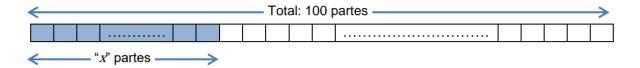
Rpta 72 viajes.

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

221. Porcentajes y propiedades

Es una aplicación de la regla de tres simple. Se denomina "Tanto por ciento" porque es el número de unidades que se toman en cuenta de cada 100.

Graficamnete, se representa así:



Se toma "x" partes de las "100" partes totales. Se representa por $x\% = \frac{x}{100}$

Ejemplo:

1) 5% nos indica que tomamos $\frac{5}{100}$ de una cantidad cualquiera.

Esto es:
$$5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

2) $\frac{2}{5}\%$ nos indica que tomamos $\frac{\frac{2}{5}}{100}$ de una cantidad cualquiera.

Esto es:
$$\frac{2}{5}\% = \frac{2}{5} \times \frac{1}{100} = \frac{0.004}{500}$$



Se puede sumar o restar porcentajes de una misma cantidad: Ejemplo: 25% de A + 63% de A = 88% de A Ejemplo: 58% de B + 126% de B - 20% de B = (58 + 126 - 20)% de B



Matemáticamente, las palabras "de", "del" o "de los" significan multiplicación. Asimismo, la palabra "es" significa igualdad.



1)	Hallar el 10% del 20% del 75% de 4000
	Solución:
2)	Operar: 12% A + 13% 2A - 5% 3A + 18% 4A
	Solución:
3)	Se tiene un deposito con dos tipos de líquidos: 7Lt del primero y 28Lt del segundo ¿Qué tanto por ciento representa cada uno de estos líquidos respecto al total?
	Solución:
4)	Cierta empresa gasta primero el 20% de su presupuesto, luego gasta el 25% de
	resto del presupuesto, quedándose con 12000 soles. ¿Cuánto fue dicho presupuesto?
Γ	Solución:
	Coldolon.

222. Descuentos y aumentos sucesivos

Es cuando a una cantidad se le aplica más de un **descuento** o **aumento**, por lo cual se puede utilizar la siguiente fórmula.

Descuento:

$$Du = \left[\frac{(100 - D_1)(100 - D_2)(100 - D_3) \dots}{100^{n-1}} - \frac{100}{100} \right] \%$$

Donde:

D₁, D₂, D₃,... Son los descuentos sucesivos

n: Es el número total de descuentos

Du: Es el descuento único equivalente a todos los descuentos realizados.

Ejemplo:

 Dos descuentos sucesivos del 40% y 20% equivalen a un descuento único (Du) de:

$$Du = \frac{\left[(100 - 40)(100 - 20) - 100 \right] \%}{\left[100^{2-1} - 100 \right] \%}$$

$$Du = \frac{\left[(60)(80) - 100 \right] \%}{\left[100 - 100 \right] \%}$$

$$Du = \left[48 - 100 \right] \%$$

$$Du = -52\%$$



El signo menos (-) nos indica el descuento, por lo que los descuentos sucesivos del 40% y 20% equivalen a una descuento único de 52%

2) Roberto compra un refrigerador y le hacen 3 descuentos sucesivos del 20%, 20% y 30%. En lugar de estos tres descuentos, pudieron haberle hecho uno solo. ¿De cuánto sería este descuento único (Du)?

Solución:

$$Du = \begin{bmatrix} (100 - 20)(100 - 20)(100 - 30) \\ 100^{3-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} \%$$

$$Du = [44.8 - 100]\% = -55.2\%$$

∴ El descuento único sería de 55,2%.

Aumento:

$$Au = \frac{\left[(100 + A_1)(100 + A_2)(100 + A_3) \dots \right]}{100^{n-1}} - \frac{100}{100}$$

Donde:

A₁, A₂, A₃,... Son los aumentos sucesivos

n: Es el número total de aumentos

Au: Es el aumento único equivalente a todos los aumentos realizados.

Ejemplo:

1) Dos aumentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a un aumento único (Au) de:

$$Au = \frac{\left[(100 + 20)(100 + 30)}{100^{2-1}} - \frac{100}{100} \right]\%$$

$$Au = \frac{\left[(120)(130)}{100} - \frac{100}{100} \right]\%$$

$$Au = \left[156 - 100 \right]\%$$

$$Au = +56\%$$



El signo más (+) nos indica aumento, por lo que los aumentos sucesivos del 30% y 20% equivalen a un aumento único del 56%

2) El director del programa académico de Cibertec le dice a un profesor de la carrera de Computación: "Por tu esfuerzo, durante el año pasado, voy a sugerir que te otorguen tres aumentos sucesivos del 30%, 10% y 20% en el presente año". ¿A qué aumento único equivale?

Solución:

$$Au = \begin{bmatrix} (100+30)(100+10)(100+20) \\ 100^{3-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix} \%$$

$$Au = \begin{bmatrix} 171,6-100 \end{bmatrix} \% = 71,6 \%$$

∴ El aumento único sería de 71.6%.

223. Precio de venta, precio de costo, precio de lista, descuento y ganancia

2.2.3.1. Precio de venta

Es la cantidad de dinero que paga un consumidor por los bienes y/o servicios que recibe. Su fórmula es:

$$Pv = Pc + G$$

$$\acute{o}$$

$$Pv = Pc - Pe$$

Donde:

Pc : Precio de costo del bien o servicio

G : Ganancia Pe : Pérdida

2.2.3.2. Precio de costo

Es el precio por la compra de una mercancía. Pueden ser de dos clases:

A. Costo Neto .-

En el cual se incluye sólo el precio de compra de una mercancía.

B. Costo Total .-

Cuando al precio de costo neto se le incluye los gastos de transporte hasta el almacén, carga y descarga.

2.2.3.3. Ganacia y pérdida

A. Ganancia.-

Es la utilidad que se obtiene al vender un bien y/o servicio.

B. Pérdida.-

Es el monto que se pierde al vender por debajo del precio costo.



La Ganancia o Pérdida generalmente se expresa como un tanto por del precio de costo.



Los descuentos y aumentos generalmente se expresa como un tanto por del precio de lista.



Guía de ejercicios

1) Si al vender uno de mis libros de matemática a S/.35.00, gano S/.10.00, ¿cuál es el porcentaje de ganancia?

Solución:

I. Según fórmula Pv = Pc + G; entonces 35 = Pc + 10.

Luego
$$Pc = 25$$

II. Como G está en función de Pc, luego: $G = \frac{10}{25} = 0.4$;

$$..\%G = 40\%$$

2) Calcule el precio de venta de un Televisor LCD, si costó S/.4 000 y al vender se perdió el 20%:

Solución:

- I. Calculamos la pérdida: 20%(4000) = 800.
- II. Según la fórmula Pv = Pc + Pe, se tiene que Pv = 4000 800.
 - \therefore El precio de venta fue Pv = 3200
- 3) ¿A cuánto asciende la venta de un departamento que costó S/.60,000.00, si se quiere ganar el 25%?

Solución:

- I. Calculamos la ganancia: 25%(60,000) = 15,000.
- II. Según la fórmula Pv = Pc + G, se tiene que Pv = 60,000 15,000.
 - ∴ El precio de venta debe ser Pv = 75,000

4) Determine el porcentaje de utilidad o pérdida, conociendo el precio de costo e importe de la venta, si en el 2007 la empresa ATAJA obtuvo una utilidad de S/.50,000 y, al año siguiente, su utilidad se incrementó a S/. 80,000. ¿Cuánto fue el porcentaje de incremento?

Solución:

I. Como el incremento es de 30,000, entonces:

%Incremento =
$$\frac{30,000}{80,000}$$
 = 0.375.

- II. : El porcentaje de incremento es de 37.5%
- 5) Calcule el costo de un artículo que se vendió en S/. 6,000, con un 20% de utilidad (ganacia).

Solución:

- I. Según fórmula Pv = Pc + G; entonces $6{,}000 = Pc + (20\%Pc)$.
- II. Factorizando $6,000 = (100\%Pc) + (20\%Pc) \Rightarrow 6,000 = 120\%Pc$.
- III. Entonces $Pc = \frac{6,000}{120\%} = \frac{6,000}{1.20}$
- IV. $\therefore Pc = S/.5,000$

2.2.3.4. Precio de lista

Es el precio que figura en el catálogo al que debe venderse un bien y/o servicio. Su fórmula es:

$$Pl = Pv + D$$

Donde:

PI : Precio de lista
Pv : Precio de venta
D : Descuento

- 1) Si el precio de lista de un perfume es de S/.65, calcule el precio de venta si el perfume tuvo un descuento del 30%:
 - I. Según fórmula Pl = Pv + D; entonces 65 = Pv + (30%Pv).
 - II. Factorizando $65 = (100\%Pv) + (30\%Pv) \Rightarrow 65 = 130\%Pv$.
 - III. Entonces $Pv = \frac{65}{130\%} = \frac{65}{1.30}$
 - IV. $\therefore Pv = S/.50$



llo para ganar el
costó el libro?
a ganó el 25% y
el 20% del precio inará Carmen en

5)	¿A cuánto se debe vender una computadora que costó S/. 2,700 para ganar el 20% del precio de costo, más el 10% del precio de venta, más S/.180?
	Solución:
L	
6)	¿Qué precio se debe fijar a un artículo que costó S/.420 para que aún descontando el 20% se gane el 40%?
	Solución:



Ejercicios de aplicación.

1) La empresa "Exportación A" ha destinado el 22% de su presupuesto del presente año en la reparación de su equipo automotor. Halle dicho presupuesto, si el resto del presupuesto que asciende a 11700 soles lo destina a sus otras áreas.

- 2) La corporación telefónica destina el 10% de su presupuesto a su unidad de negocio "Cable Mágico", el 20% de lo restante lo destina a su unidad "Atento" y lo restante que asciende a 36,000 soles los destina al resto de sus unidades de negocios. Halle dicho presupuesto.
- 3) Halle el 10% del 25% del 75% del 30% de 320000.
- 4) Si se pierde el 40% de dinero y luego se recupera el 25% de lo perdido, con lo cual se tiene la suma de 490 soles. ¿Cuánto dinero tenía al inicio?
- 5) Si del total de alumnos que llevan Matemática I aprobaron el 80% de ellos, y en un examen sustitutorio aprobó el 10% de los que habían desaprobado ¿Qué tanto por ciento de los alumnos han aprobado al finalizar?
- 6) En la venta de un producto se realizan dos descuentos sucesivos del 20% y 30% y aun así se gana el 20%. Si el precio de venta y precio de costo suman 4400 soles, halle el precio de costo.
- 7) En la venta de un producto se gana el 30% a pesar de un descuento del 40%. Halle el precio de venta si el precio fijado y precio de costo se diferencian en 700 soles.
- 8) En la venta de un producto se gana el 20% del precio de venta. Halle el precio de costo si el precio de venta excede al precio de costo en 200 soles.
- 9) En la venta de un producto se hacen dos descuentos sucesivos del 20% y 20% respectivamente y aun así se está ganado el 30%. Halle el precio de costo si se sabe que el precio de venta y precio de costo suman 9700.
- 10) En la venta de un producto se gana el 10% del precio de venta, si el precio de costo y el precio de venta suman 3800 soles ¿Cuánto es el precio de costo?
- 11) El propietario de una casa no quiso venderla cuando le ofrecían por ella S/.3,840, con lo cual hubiera ganado el 28% del costo. Un tiempo después tuvo que venderla por S/.3,750. ¿Qué porcentaje del costo ganó al hacer la venta?

Rpta. 17,19%

12) Una persona compró un auto a S/.10,000. ¿A cuánto debe vender dicho auto para ganar el 25% del precio de costo más el 10% del precio de venta, más S/.1,000?

Rpta. 15 000

13) ¿A cuánto se debe vender un televisor LCD que costó S/. 840 para ganar el 20% del precio de costo, más 10% del precio de venta, más S/.63 por gastos administrativos?

Rpta. 1190

14) Un vendedor le hace a un cliente descuentos sucesivos del 15% y 20% sobre un producto de S/.200. ¿Cuánto pagó dicho cliente por su compra?

Rpta. 138

15) Gabriel desea comprar un auto usado y reclama un descuento. La tienda accede a su pedido y le otorga 3 descuentos sucesivos sobre el precio de venta del 20%, 10% y 5%. Él observa que el descuento efectivo ha sido de S/. 316. ¿Cuál será el precio de venta de dicho auto?

Rpta. 1000

16) ¿Cuál es el precio de lista de un artículo, que tuvo un descuento del 10% al venderlo, si el costo del artículo es de S/.45 y la ganancia es el 20% del precio de compra más el 20% del precio de venta?

Rpta 75

17) Julio compró un objeto que vendió después a S/.300 y obtuvo una ganancia igual al 14% del precio de compra más el 5% del precio de venta. ¿Cuánto costó el objeto?

Rpta 250

18) Se venden dos caballos en S/.9,600 c/u. En uno de ellos se gana el 20% y en el otro se pierde el 20%. ¿Se ganó o se perdió, y cuánto?

Rpta Se perdió S/.800

19) Un comerciante vende un artículo con un descuento de 30% del precio de lista, ganando así el 20% del precio de costo. ¿Cuánto es el precio de lista del artículo si el precio de lista y costo suman S/.1,900?

Rpta 1200

20) ¿A cuánto se debe vender una computadora que costó S/.1,450 para ganar el 20% del precio de costo, más el 10% del precio de venta, más S/.60 por gastos administrativos?

Resumen

Regla de tres simple directa:

Cuando las dos magnitudes son directamente proporcionales.

Magnitudes	:	M	(DP)	Q
Supuesto	:	а		b
Pregunta	:	С		X
Como son DP, su cocien	ite es	s const	tante. Lu	ego:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Regla de tres simple inversa:

Cuando las dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Magnitudes	:	М	(DP)	Q	
Supuesto	:	а		b	
Pregunta	:	С		Х	
Como son DP, su cociente es constante. Luego:					
$a \cdot b = c \cdot x$					

Precio de venta:

Es la cantidad de dinero que paga un consumidor por los bienes y/o servicios que recibe. Su fórmula es: Pv = Pc + G

Precio de costo:

Es el precio por la compra de una mercancía. Pueden ser de dos clases:

- Costo neto.- En el cual se incluye sólo el precio de compra de una mercancía.
- Costo Total.- Cuando al precio de costo neto se le incluye los gastos de transporte hasta el almacén, carga y descarga.

Ganancia:

Es la utilidad que se obtiene al vender un bien y/o servicio.

Pérdida:

Es el monto que se pierde al vender por debajo del precio costo.

Precio de Lista:

Es el precio que figura en el catálogo al que debe venderse un bien y/o servicio.

Su fórmula es: Pl = Pv + D



FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA BÁSICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno, calcula el valor de una variable a través de la simplificación de las expresiones algebraicas Para ello, debe aplicar las teorías de exponentes, los productos notables, racionalización y los procesos de factorización.

TEMARIO

3.1 Tema 6 : Teoría de exponentes

3.1.1 : Potenciación 3.1.2 : Radicación

3.2 Tema 7 : Productos Notables

3.2.1 : Cuadrado de la suma de dos términos 3.2.2 : Cuadrado de la diferencia de dos términos

3.2.3 : Identidades de Legendre 3.2.4 : Diferencia de cuadrados 3.2.5 : Cuadrado de un trinomio

3.2.6 : Producto de binomios que tienen un término común

3.2.7 : Cubo de la suma de dos términos 3.2.8 : Cubo de la diferencia de dos términos

3.2.9 : Suma y diferencia de cubos

3.3 Tema 8 : Factorización

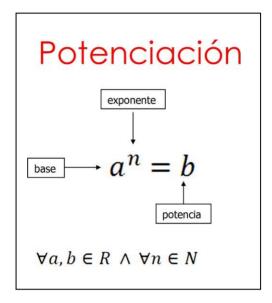
3.3.1 : Factor común 3.3.2 : Por agrupación 3.3.3 : Por identidades 3.3.4 : Por aspa simple 3.3.5 : Por Ruffini

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Los alumnos aplican las leyes del álgebra básica
- Los alumnos identifican qué ley van a utilizar y explican cada paso realizado.
- Por equipos, trabajan los ejercicios y se comprueban los resultados obtenidos.

3.1 TEORÍA DE EXPONENTES

3.1.1 Propiedades de Potenciación



Se lee:

- a tiene exponente n
- a está elevado a la n
- a a lan

Considere que:

$$a^{n} = \underbrace{a \times a \times a \times a \dots \dots \times a}_{\text{"n"veces}}$$

$$Ka^{n} = \underbrace{a^{n} + a^{n} + a^{n} + \Box + a^{n}}_{\text{"K"veces}}$$

3.1.1.1 Leyes de Potenciación

1) Todo número real diferente a cero elevado a la cero es igual a 1:

$$a^0 = 1, \forall a \in R, a \neq 0$$

a)
$$5^0 = 1$$

b)
$$-364^0 = 1$$

c)
$$\left(\frac{18}{6}\right)^0 = 1$$

d)
$$\left(\frac{7}{15}\right)^0 = 1$$

2) Toda potencia con exponente 1 es igual a la base:

$$a^1 = a$$

Ejemplos:

a)
$$5^1 = 5$$

b)
$$-364^1 = -364$$

c)
$$\frac{18}{\binom{6}{6}} = \binom{18}{6}$$

d)
$$\binom{7}{15}^1 = \binom{7}{15}$$

3) El producto de dos potencias que tienen la misma base es igual a la potencia de dicha base elevada a la suma de los exponentes:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

a)
$$8^2 \times 8^3 = 8^{11}$$

b)
$$-64^5 \times -64^4 = -64^9$$

d)
$$(\frac{7}{15} \times () = \frac{3}{15} ()$$
 15

4) El cociente de dos potencias que tienen la misma base, diferente de cero, es igual a la potencia de dicha base elevada a la resta del exponente del dividendo menos el exponente del divisor:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0.$$

a)
$$\frac{8^5}{8^2} = 8^3$$

b)
$$\frac{14^5}{14^9} = 14^{-4}$$

c)
$$\frac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{5}} = (\frac{12}{5})^2$$

d)
$$\frac{\frac{12}{9}^7}{(\frac{12}{5})^1} = (\frac{12}{5})^{-3}$$

5) La potencia de una base, diferente de cero, con exponente negativo es igual a la inversa de dicha potencia con exponente positivo:

$$a^{-n}=rac{1}{a^n}$$
 , $a
eq 0$

Eiemplos:

a)
$$8^{-3} = \frac{1}{8^3}$$

b)
$$-14^{-5} = \frac{1}{-14^5}$$

c)
$$\left(\frac{8}{6}\right)^{-5} = \frac{1}{\frac{8}{6}5}$$

6) El cociente de una potencia, cuyas bases sean diferentes de cero, con exponente negativo es igual a la potencia de la inversa de dicho cociente elevado al mismo exponente pero positivo:

$${\binom{a}{b}}^{-n} = {\binom{b}{b}}^n, a \neq 0, b \neq 0$$

Ejemplos:

a)
$$(\frac{8}{6})^{-5} = (\frac{6}{8})^{5}$$

b)
$$\left(\frac{\binom{12}{5}}{\binom{7}{8}}\right)^{-4} = \left(\frac{\binom{87}{7}}{\binom{12}{3}}\right)^{4}$$

7) La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

a)
$$(12 \times 7)^5 = 12^5 \times 7^5$$

b)
$$(12 \times 7)^{-5} = 12^{-5} \times 7^{-5}$$

c)
$$(\frac{14}{5} \times \frac{3}{8} = (\frac{14}{5})^4 \times (\frac{3}{8})^4$$

d)
$$\left(\frac{14}{5} \times \frac{3}{8}\right)^{-4} = \left(\frac{14}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{-4}$$

8) La potencia de un cociente, cuyo divisor sea diferente de cero, es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente:

$$\left(\frac{a^n}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

Eiemplos:

a)
$$\binom{8}{6} = \frac{8^5}{6^5}$$

b)
$$\left(\frac{8}{6}\right)^{-5} = \frac{8^{-5}}{6^{-5}}$$

c)
$$\left(\frac{\left(\frac{12}{5}\right)}{\left(\frac{7}{8}\right)}\right)^4 = \frac{\left(\frac{12}{5}\right)^4}{\left(\frac{7}{8}\right)^4}$$

d)
$$\left(\frac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{8}}\right)^{-4} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{8}}^{-4}$$

9) La potencia de una potencia es igual a la potencia de la base elevada al producto de sus exponentes:

$$(a^m)^n = \mathbf{a}^{m \times n} = (a^n)^m$$

Ejemplos:

a)
$$(6^4)^5 = 6^{4 \times 5} = (6^5)^4 = 6^{5 \times 4} = 6^{20}$$

b)
$$(6^4)^{-5} = 6^{(4 \times -5)} = (6^{-5})^4 = 6^{(-5 \times 4)} = 6^{-20}$$

c)
$$((\frac{1}{5})^3 = (\frac{7}{5})^{3 \times 2} = (\frac{7}{5})^6$$

d)
$$\left(\left(\frac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{8}}\right)^{4}\right)^{3} = \left(\frac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{8}}\right)^{(4\times3)} = \left(\frac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{8}}\right)^{12}$$

 La potencia de un término con signo negativo elevado a una potencia impar siempre es negativa:

$$(-a)^{impar} = negativo$$

 $-(a)^{impar} = negativo$

a)
$$(-5)^3 = -5 \times -5 \times -5 = -125$$

b)
$$-5^3 = -(5 \times 5 \times 5) = -125$$

11) La potencia de un término con signo negativo elevado a una potencia par puede ser negativa o positiva:

$$(-a)^{par} = positivo$$

 $-(a)^{par} = negativo$

Ejemplos:

a)
$$(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 81$$

b)
$$-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$



Ejercicios propuestos.

1) Efectuar:

$$M = \frac{21^6 \times 35^3 \times 80^3}{15^4 \times 14^9 \times 30^2} - 16$$

\sim			,		
C. O	11.1	\sim 1	\sim	n	
Sol	ш		u		

2) Simplificar:

$$P = \frac{2^{x+3} + 2^{x+2}}{3 \times 2^x} + \frac{2^{x+5} + 4 \times 2^x}{4 \times 2^{x-2}}$$

Solución:

3) Hallar:

$$R = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} + \left(\frac{4}{23} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Solución:		

4) Efectuar:

$$S = \frac{40(2^{x-3}) + 3(2^{x+1}) + 12(2^{x-2})}{22(2^{x-1}) - 2^{x+2}} \times \left[(-32)^{\frac{-3}{5}} + 64^{\frac{-1}{3}} \right]^{\frac{-1}{3}}$$

Solución:			

5) Calcule el valor de M^N:

$$M = \frac{2^{x+4} + 36(2^{x-2})}{2^{x+5} - 2^{x+4} - 4(2^{x+1}) - 6(2^{x-1})}$$

$$N = \sqrt[x]{\frac{92^x + 138^x}{69^x + 46^x}}$$

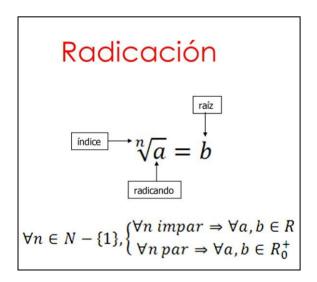
Solución:			

6) Si $5^x = 7^y$, calcular el valor de:

$$\frac{5^{x+3} - 7^{y+2}}{7^{y+1} - 5^{x+1}}$$

Solución:		

3.1.2 Propiedades de Radicación



La radicación es en realidad otra forma de expresar una potenciación: la raíz de un cierto orden de un número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa. Por esto, las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación

3.1.2.1 Leyes de Radicación

1) La raíz de un número es igual a la potencia inversa de dicho número:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

a)
$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

b)
$$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}}$$

2) La raíz de una potencia es igual a la potencia del radicando elevada al cociente de su exponente y su índice:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

a)
$$\sqrt[2]{9^3} = 9^{\frac{3}{2}}$$

b)
$$\sqrt[4]{25^6} = 25^{\frac{6}{4}}$$

3) El producto de una potencia y una raíz es igual a la raíz del producto del radicando y la potencia con su exponente multiplicado por el índice:

$$a^p \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b \times a^{p \times n}} = \sqrt[n]{b \times a^{pn}}$$

Ejemplos:

a)
$$15^4 \times \sqrt[2]{7} = \sqrt[2]{7 \times 15^{4 \times 2}} = \sqrt[2]{7 \times 15^8}$$

b)
$$48^6 \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{12 \times 48^{6 \times 5}} = \sqrt[5]{12 \times 48^{30}}$$

4) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los términos:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

a)
$$\sqrt[5]{91 \times 26} = \sqrt[5]{91} \times \sqrt[5]{26}$$

b)
$$\sqrt[3]{184 \times 47} = \sqrt[3]{184} \times \sqrt[3]{47}$$

5) La raíz de un cociente, cuyo divisor sea diferente de cero, es igual al cociente de la raíz del mismo índice del dividendo y del divisor:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

a)
$$\sqrt[4]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{8}}$$

b)
$$\sqrt[7]{\frac{35}{47}} = \frac{\sqrt[7]{35}}{\sqrt[7]{47}}$$

6) La raíz de una raíz es igual a la raíz del mismo radicando con el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m \times n]{\alpha} = \sqrt[m n]{\alpha}$$

Ejemplos:

a)
$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[5 \times 3]{7} = \sqrt[15]{7}$$

b)
$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{84}} = \sqrt[6\times3]{84} = \sqrt[18]{84}$$



Ejercicios propuestos

1) Hallar X + M:

$$X = \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{48} \times \sqrt{300}}{\sqrt{75} \times \sqrt{147}}$$

$$M = [(-32)^{-5} + 64^{-3}]$$

Solución:

2) Hallar A - S:

$$A = \sqrt[3]{x^2 \sqrt[12]{x\sqrt{3}}}$$

$$S = \sqrt[a]{\frac{1}{\sqrt{x^a}}} \times \sqrt[b]{\frac{1}{x^b}} \times \sqrt[b]{\frac{1}{x^c}} \times \sqrt[b]{\frac{1}{x^c}} \times \sqrt[b]{\frac{1}{x^c}}$$

Solución:		
3) Hallar:		
	$E = \sqrt[a-b]{\frac{3m^{a+b} + 4m^{2a}}{4m^{a+b} + 3m^{2b}}}$	
Solución:		
4) Calcule:		

Solución:

5) Calcule:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{2} & n & -\frac{7^{n} + 5^{n}}{7^{n} + 5^{-n}} \\ [(\frac{1}{27}) & +(\frac{1}{32}) &] & +\sqrt{\frac{1}{7^{n} + 5^{-n}}} \end{bmatrix}$$

Solución:			

6) Hallar P + Q:

$$P = \sqrt[x-5]{\frac{7^{x-5} + 3^{x-5}}{7^{5-x} + 3^{5-x}}}$$
$$2^{6} \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-4a}$$

$$Q = \frac{2^6 (\sqrt[3]{8})^{-4a}}{[4(4^{-a})]^2}$$



Ejercicios de aplicación.

1) Efectuar:

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{\frac{1}{4\sqrt{4^n}}}}} + \sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

2) Simplificar la siguiente expresión:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{11}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt[x+1]{\frac{3(6^{x+1}) + 2^{3x+3}}{9(3^x) + 4(2^{2x})}}$$

3) Hallar A:

$$A = 5^{16^{4-5^{0}}} + \frac{5^{n+3} + 5}{(5^{n-1}) \times 5} - \sqrt[m-n]{\frac{12^{m-n} + 15^{m-n}}{4^{n-m} + 5^{n-m}}}$$

4) Reducir la siguiente expresión:

$$A = [(64^{-8^{-9}})^{-4^{-2^{-50}}}] + [(-32)^{-5} + 64^{-3}]$$

$$\{$$

5) Calcular B:

$$B = \frac{2^{n+3} + 2^n (2^2)^3}{2(2^{n+2})} \times 125^{9^{-4} - 2^{-70}}$$

6) Reducir:

$$\frac{(a^2)^3(a^5)(\sqrt{a})^5}{(\sqrt{a})^3(a^3)^3} \div \sqrt[x92^x + 138^x]{69^x + 46^x}$$

7) Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{x^5} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2} \sqrt[4]{x^3} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x^5}} \times 81^{16^{-0.25}}$$

8) Calcular E:

$$E = 3^{2^2} + 125^{9^{-8}}^{-0.333}$$

9) Simplificar:

$$E = \sqrt[x]{\frac{2^{x+1} \times 4^{2x+1} - 2^x \times 4^{2x}}{2^3 \times 4^x - 4}} + (4^{2-20^5}) + \sqrt[2]{\frac{2\sqrt{2\sqrt{2}}}{1}}$$

10) Reducir:

$$\sqrt[x-y]{\frac{5^{x+y}\times 4^x - 5^y\times 4^{x+y}}{5^{2x}\times 4^y - 5^x\times 4^{2y}}}$$

Resumen

Propiedades de Potenciación:

$a^0 = 1, \forall a \in R, a \neq 0$
$a^1 = a$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$
a^m $m-n$
$\frac{1}{a^n} = a , a \neq 0$
$a^{-n} = \underline{\hspace{1cm}} a \neq 0$
a ⁿ
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}, a \neq 0, b \neq 0$
$(a \times b)^n = \boldsymbol{a^n} \times \boldsymbol{b^n}$
$a^n a^n$
$(\overline{b}) = b^{\overline{n}, \overline{b}} \neq 0$
$(a^m)^n = \mathbf{a}^{m \times n} = (a^n)^m$
$(-a)^{impar} = negativo$
$-(a)^{impar} = negativo$
$(-a)^{par} = positivo$
$-(a)^{par} = negativo$

Propiedades de Radicación:

$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{a^n}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^n$
$a^{p} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b \times a^{p \times n}} = \sqrt[n]{b \times a^{pn}}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{\overline{a}}}{\sqrt[n]{\overline{b}}}, b \neq 0$
$\sqrt[m]{\sqrt[m]{n}} = \sqrt[m \times n]{a} = \sqrt[m n]{a}$

- Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.
- Aquí encontrará información de la Teoría de Exponentes: http://espanol.geocities.com/jefranco_2000mx/EXPONENTES.htm
- En esta página, encontrará ejercicios sobre potenciación, radicación y racionalización: www.sectormatematica.cl/ppt/Raices.pps

3.2 **PRODUCTOS NOTABLES**

3.2.1 Cuadrado de un Binomio Suma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplos:

a)
$$(x+7)^2 = x^2 + 2(x)(7) + 7^2 = x^2 + 14x + 49$$

a)
$$(x+7)^2 = x^2 + 2(x)(7) + 7^2 = x^2 + 14x + 49$$

b) $(3x + \frac{1}{5}) = 3x^2 + 2(3x)(\frac{2}{5} + (\frac{2}{5})^2 = 9x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{4}{25}$

c)
$$(x^2 + \sqrt{3})^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = x^4 + 2\sqrt{3}x^2 + 3$$



Halle el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto:

1.- ()² =
$$x^2 + x + \frac{1}{4}$$

2.- ()² =
$$x^2 + 2\sqrt{2x} + 2$$

3.2.2 Cuadrado de un Binomio Diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

a)
$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + 1 = x^2 - 2x + 1$$

b)
$$\frac{1}{(y+2)} = y - 2y(2+(2) = y - y + 4$$

c)
$$(x^2 + \sqrt{7})^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(\sqrt{7}) + (\sqrt{7})^2 = x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + 7$$



Ejercicios propuestos.

Halle el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto:

1.- ()² =
$$x^2 - 2\sqrt{3x} + 3$$

2.- ()² =
$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$

3.- ()² =
$$x^2 - \sqrt{2x} + \frac{1}{2}$$

3.2.3 Identidades de Legendre

a)
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

b)
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

c)
$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

3.2.4 Producto de la Suma de dos Términos por Diferencia (Diferencia de cuadrados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

d)
$$(x+8)(x-8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

e)
$$(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = x^2 - (\sqrt{6})^2 = x^2 - 6$$

f)
$$(4 + 6x^3y^2)(4 - 6x^3y^2) = 16 - 36x^6y^4$$



Eiercicios propuestos.

Observe y escriba directamente el producto de los binomios:

$$1.-(y+0.2)(y-0.2) =$$

$$2.-(y-3)(y+3) =$$

$$3.-(3x^2-y-1)(3x^2+y+1)=$$

3.2.5 Cuadrado de un Trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^3 + b^2 + c^3 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ejemplos:

a)
$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

b)
$$(2x - 2y - 3)^2 = [(2x) + (-2y) + (-3)]^3$$

 $= (2x)^2 + (-2y)^2 + (-3)^2 + 2(2x)(-2y) + 2(2x)(-3) + 2(-2y)(-3)$
 $= 4x^2 + 4y^2 + 9 - 8xy - 12x + 12y$

(c)
$$(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = (\sqrt[3]{3}) + (\sqrt{2}) + (\int_{2}^{1} + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + 2(\sqrt{2})(\sqrt{2})$$

$$= 3 + 2 + \frac{1}{4} + 2(\sqrt{6}) + (\sqrt{3}) + (\sqrt{2})$$

$$= 5 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

3.2.6 Producto de Binomios que tienen un Término Común

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Ejemplos:

a)
$$(x-7)(x-9) = x^2 - 16x + 63$$

b)
$$(x-6)(x-5) = x^2 - 11x + 30$$

c)
$$(y^3 - 1)(y^3 + 6) = (y^3)^2 + 5y^2 - 6$$

= $y^6 + 5y^3 - 6$

3.2.7 Cubo de la Suma de Dos Términos

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Eiemplos:

a)
$$(x+5)^3 = x^3 + 3(x)^2(5) + 3(x)(5)^2 + 5^3$$

= $x^3 + 15(x)^2 + 3(x)(25) + 125$
= $x^3 + 15(x)^2 + 75x + 125$

3.2.8 Cubo de una diferencia

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

a)
$$\frac{3}{(x-2)} = x^3 - 3x^4 + 3x^4 + 2 = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x^4 + \frac{27}{8}$$

$$= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{27}{8}$$

b)
$$(z - \sqrt{3})^3 = z^3 - 3(z)^2(\sqrt{3}) + 3(z)(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3$$

 $= z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 9z - \sqrt{27}$
 $= z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 3\sqrt{3}$

3.2.9 Suma y Diferencia de Cubos

Suma de cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

a)
$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

b)
$$y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$$



Eiercicios propuestos.

1.	Simplificar:	A =	a^3-b^3
	•		$a^2 + ab + b^2$

Solución:			

2. Efectúe:

$$R = \sqrt[5]{m + \sqrt{m^2 - n^{10}}} \times \sqrt[5]{m - \sqrt{m^2 - n^{10}}}$$

Solución:		

3. Simplificar $(x+y)^2 (x^2 - xy + y^2)^2 - (x-y)^2 (x^2 + xy + y^2)^2$

Solución:

4.	Simplificar	$(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)$
	Solución:	
5.	Reducir: $k = (a + b)$	$(b)^2 - (a+b)(a-b) - (a-b)^2 + a(a+b) + b(a-b) - 2b^2$
	Solución:	
L		
6.	Simplifique:	
		$\frac{(3a+2b)^2 + (3a+2b)^2 - 10a^2}{(a+b)(a-b) + 2b^2}$
	Solución:	
7.	Simplificar:	

7. Simplificar: $T = \frac{[(2a+b)^2 - (2a-b)^2] (a^2 - b^2)}{ab(a+b)} - 7(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

Solución:	
	ı

8.	Sim	olificar:
O.	OHIL	JIIIICAI.

$$T = (a+b)(a-b)(a^2-b^2) + (b^4+a^4)$$

Solución:	

9. Simplificar:

$$T = (a+b)[(a+b)^2 - 2ab + (a-b)^2] - 2b^3$$

Solución:



Eiercicios de aplicación.

1) Siendo $x = 2 + \sqrt{3}$; $y = 2 - \sqrt{3}$

Calcule: $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2) + y(3x^2 + 3xy + 2y^2)$

2) Sabiendo que:
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$
 calcule: $\frac{x+y}{3x+y} + \frac{2x+y}{x+y}$

3) Simplifique:

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{33} + \sqrt[3]{9}}}{\frac{[(2x^3 + 7)^2 + (2x^3 - 7)^2]}{(4x^6 + 49)}}$$

$$E = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2}$$

4) Simplifique:

5) Sabiendo que:
$$x \times y = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

Halle el valor de: $\left[\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right] \times \left[\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right]$

6) Si la suma de dos números es 5 y la suma de sus cuadrados es 21, halle la suma de sus cubos.

7) Si:
$$a = \sqrt{2}$$
 y $b = \sqrt{8}$, halla el valor de:
$$M = \frac{\left(a-b\right)\left(a^3+b^3\right)\left[\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2\right]}{a^4-b^4}$$

8) Determine el valor de E, si $a = \sqrt{2}$.

$$E = \left[(a+1)(a-1)(a^2-1)^2(a^2+1)^3 \right]^{\frac{1}{3}}$$

9) Reduzca: $(x^2 + 5x + 5)^2 - (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Resumen

Productos Notables:

 $\forall a, b, c \in R$

1.-
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2.-
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3.-
$$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$$

4.-
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5.-
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6.-
$$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac \pm 2bc$$

7.-
$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

8.-
$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

9.-
$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$$

10.- Legendre:

$$(a+b)^{2} + (a-b)^{2} = 2(a^{2} + b^{2})$$
$$(a+b)^{2} - (a-b)^{2} = 4ab$$

Aquí encontrará ejercicios relativos al tema.

- Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.
- http://www.sectormatematica.cl/ppt/Productos%20notables.ppt

Aquí encontrará ejercicios relativos al tema.

1 http://es.wikipedia.org/wiki/Productos notables

3.3 FACTORIZACIÓN

Es un procedimiento por el cual se transforma un polinomio dado en un producto indicado de sus factores.

3.3.1 Factor común

Ejemplo:

Factorizar: $3x^3y + 9x^2y^2 + 6xy^3$

Solución: $\underbrace{3xy}_{\text{Factor}}\underbrace{(x^2 + 3xy + 2y^2)}_{\text{Se puede factorizar.}}_{\text{Común}}$ Se trata de otro caso.

3.3.2 Por agrupación de términos

Ejemplo:

Factorizar:
$$\underline{a^2b} + \underline{b^2c} + c^2\underline{a} + a^2\underline{c} + b^2\underline{a} + c^2\underline{b} + \underline{2abc}$$

Solución: $= (a^2b + b^2a) + (c^2a + c^2b) + c(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= ab(a+b) + c^2(a+b) + c(a+b)(a+b)$
 $= (a+b)[ab+c^2+ca+cb]$
 $= (a+b)[a(b+c)+c(b+c)]$
 $= (a+b)(b+c)(a+c)$

3.3.3 Por identidades o por productos notables en forma inversa

Ejemplos:

a)
$$(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

b)
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

c)
$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$$

d)
$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x^2 + y^2)$$

e)
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x^2 + y^2)$$



Eiercicios propuestos.

1) Factorice:

a)
$$3x^2y^2 - 6x^2y =$$

b)
$$(3a - b)(a - b - 1) + (a + b)(a - b - 1) - (2c - 3b)(a - b - 1) =$$

c)
$$2p(p-1) + q(1-p) + 2(p-1) =$$

2) Factorice:

a)
$$xa^2 + y^2b + y^2a^2 + xb =$$

b)
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 =$$

c)
$$4xz + 2yz - 2xp - yp =$$

d)
$$x^3 - 4x^2 + x - 4 =$$

3) Factorice:

a)
$$x^3 - 4x^2 + x - 4 =$$

b)
$$4y^2 - 9x^2 =$$

c)
$$8x^3 - 27y^3 =$$

d)
$$9m^2 + 6m + 1 =$$

e)
$$4x^2 - 12xy + 9y^2 =$$

3.3.4 Por aspa simple

Ejemplo:

Trinomio de la forma: $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + k_1)(x^n + k_2)$

Donde:

$$n \in N$$

$$k_1 \times k_2 = c$$

$$k_1 + k_2 = b$$

Factorizar:

$$x^{2} - 6x + 5 = 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$x - 5$$

$$x - 7$$

Así que:

$$(-5)(-1) = 5$$
 Ok
 $(-5) + (-1) = -6$ Ok

$$\therefore x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$$



Este trinomio se puede factorizar sólo cuando su Discriminante (D) es un cuadrado perfecto (ie, tiene raíz cuadrada exacta)

Ejemplo:

Trinomio de la forma: $ax^{2n} + bx^n + c = (a_1x^n + k_1)(a_2x^n + k_2)$

Donde:

$$a_1 \times a_2 = a$$

$$k_1 \times k_2 = c$$

$$a_1 k_2 + a_2 k_1 = b$$

Factorizar:

$$12x^{2} - xy - 6y^{2} = 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$3x \leftarrow 2y$$

$$4x \leftarrow 3-3y$$

Así que:

$$(3)(4) = 12 \text{ Ok}$$

 $(2)(-3) = -6 \text{ Ok}$
 $(3x)(-3y) + (4x)(2y) = 9xy + 8xy = xy \text{ Ok}$

$$\therefore 12x^2 - xy - 6y^2 = 0 \Rightarrow (3x + 2y)(4x - 3y) = 0$$

3.3.5 Por división de binomios (RUFFINI)

Permite factorizar polinomios en una sola variable. Consiste en formar una serie de binomios que admitan como término común a la variable y como segundos términos a los <u>divisores</u> del término independiente. De dichos binomios se tomarán aquellos que den división exacta empleando RUFFINI.

Ejemplo:

Factorizar:
$$x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 40$$

Posibles factores: $(x \pm 1)(x \pm 2)(x \pm 4)(x \pm 5)(x \pm 8)$...

$$\begin{array}{c} \pm 1 \\ \pm 2 \\ \pm 4 \\ 40 \\ \pm 5 \\ \pm 8 \\ \pm 10 \\ \pm 20 \\ \{\pm 40 \\ \end{array}$$

Aplicando RUFFINI:

Así que:

$$x(x-1)(x-2)(x+5)(x+4)$$



Eiercicios propuestos.

1) Factorice:

a)
$$x^2 + 5x - 6 =$$

b)
$$x^2 - 5x - 14 =$$

c)
$$3x^2 - 21x + 18 =$$

d)
$$45x^2 - 38xy + 8y^2 =$$

2) Factorice:

a)
$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 =$$

b)
$$x^4$$
 - $6x^3$ - x^2 + $54x$ - 72 =

c)
$$2x^5 - 17x^4 + 51x^3 - 58x^2 + 4x + 24 =$$



Eiercicios complementarios.

Simplifique:

1)
$$E = \frac{4x^2 - 1}{8xy - 4y}$$

Solución:
$$E = \frac{(2x-1)(2x+1)}{4y(2x-1)} = \frac{2x+1}{4y}$$

Efectúe:

2)
$$E = \frac{3x-1}{5x-2} - \frac{x+3}{5x-2}$$

Solució
$$E := \frac{3x - 1 - (x + 3)}{5x - 2} = \frac{3x - 1 - x - 3}{5x - 2} = \frac{2x - 4}{5x - 2}$$

3)
$$E = \frac{xy - 2y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy}$$

Resolución:
$$E = \frac{y(x-2y)(x+y)^2}{x(x+y) \cdot x(x-2y)} = \frac{y(x-2y)(x+y)^2}{x(x+y)x(x-2y)} = \frac{y(x+y)}{x^2}$$



Eiercicios propuestos.

Simplificar:

1)
$$\frac{x^2 - x}{y - 3} \times \frac{2y - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

2)
$$\frac{m^3 + m^2}{(5+x)(5-x)} \times \frac{x^2 - 25}{m^2}$$

3)
$$\frac{x^2 - 36}{x + 4} \div \frac{(x + 6)(x - 6)}{2x + 8}$$

4)
$$\frac{6m + 10m}{p^2 - 8p + 16} \div \frac{2m}{(p-4)^2}$$

5)
$$\frac{m^2 + 2m}{m+1} \times \frac{m+1}{m^2 - 4} \div \frac{m}{5m+10}$$

6)
$$\frac{m^{10}}{5x+50} \times \frac{x+10}{m^3} \div \frac{m^4}{25}$$

7) Factorice:

$$E = (x + 3) (x + 2) (x + 1) + (x + 2) (x + 1) + (x + 1)$$

8) Factorice:

a)
$$x^8 - 82x^4 + 81$$

b)
$$(x^2 - y^2)^9 - (x + y)^7 (x - y)^{11}$$

9) Factorice:
$$E = (x + y)^9 (x - y)^5 - (x^2 - y^2)^7$$

10) Factorice:

a)
$$E = 64 x^{12} y^3 - 68 x^8 y^7 + 4x^4 y^{11}$$

b)
$$x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab) x + a^2b$$

11) Factorice:

a)
$$x^8 - y^8$$

b)
$$x^6 - y^6$$

12) Halle:
$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & +2 & 2 & -4 & x \\ x & -4 & -x^2 & -9x & +14 \end{bmatrix} - \frac{2-x}{x^2 - 9x + 14} - \frac{(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 7x)}{(x^2 - 49)(x^3 + 8)(2x + 4)}$$

13) Halle:
$$E = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 11x^2 + 13x - 5} - \frac{x^2 - 16}{3x^2 + 7x - 20} - \frac{(4x - 1)^2 - (4x + 1)^2}{12x - 20}$$

14) Halle:
$$E = \frac{-3}{3x^2 + \frac{2}{4} + \frac{x^2 - x}{4} - \frac{x}{3}}{4 + \frac{2}{x^2 - 5x^2 + 4} - \frac{x}{3} - 4x}$$

15) Halle E:

$$E = \frac{5x^3 + 17x^2 + 8x - 12}{x^3 + x^2 - 8x - 12} - \frac{4x^2 + 7x - 15}{x^2 - 9} - \frac{(3X - 5)^2 - (3X + 5)^2}{4x - 12}$$

16) Halle E:

$$E = \frac{3x^3 + 13x^2 - 3x - 45}{2x^3 + 13x^2 + 24x + 9} - \frac{8x^2 - 14x + 5}{4x^2 - 1} - \frac{16x^2 - 40x + 25}{2x + 1} - \frac{2 - 32x^2}{4x + 2}$$

17) Si:
$$A = \frac{2(x^3 + y^3)}{x + y} - \frac{(x^3 - y^3)}{x - y} + \frac{(x^3 - xy^2)y}{x^2 - y^2}$$

$$B = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 24} - \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$$

$$C = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right)xy$$

Halle el valor de K = C - 4B - A

18) Halle E:

$$E = \left(\frac{a^2 x^2 + a^2 x - 6a^2 - x^2 - x + 6}{\left(a^2 - 1\right)\left(x + 3\right)}\right)$$

19) Simplificar:

$$E = \frac{4x^4 - 4x^2y^2 - 4x^3y + 4xy^3 + y^2x^2 - y^4}{(2x - y)(x - y)}$$

20) Simplificar:

$$\begin{bmatrix} a^{6} - b^{6} & (a+b)^{2} - 3ab & ()^{2} & ()^{2} & ()^{2} & ()^{2} \\ (a+b)^{2} + (a-b)^{2} - 4b^{2} & \vdots & 2 & | \div a+b - a-b |
\end{bmatrix}$$

Resumen

☐ Factorizar.- Es modificar un polinomio a productos de factores.

Métodos de Factorización:

- 1. Factor común.- Cuando los términos de un polinomio tienen algo en común.
- 2. Por Agrupación.- Esta técnica va de la mano con factor común. Consiste en juntar 2 o más términos con algo en común.
- 3. Por identidades.- Es lo mismo que productos notables. Ejemplo: Un trinomio cuadrado perfecto se convierte a un binomio cuadrado.
- 4. Por aspa simple .- Será por aspa simple en todos los casos cuando la suma de sus coeficientes del polinomio da cero
- 5. Ruffini.- Sirve para factorizar polinomios de grado tres o mayor. Para usarla, se debe tener presente que el polinomio debe ser ordenado y completo.
- Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.
 - http://sipan.inictel.gob.pe/av/

Aquí encontrará casos de factorización y otros.

http://www.matematicastyt.cl/Algebra/Polinomios/Factorizacion/pag1.htm Aquí encontrará ejercicios desarrollados de factorización y otros.