«Мат анализ»

Лаба по мат анализу

Гробовец Кирилл Алексеевич
501134
Тимофеев Андрей Дмитриевич
467704
Группа J3110

Дата: 4 декабря 2025 г.

Содержание

1 Задание №1

1.1 Все неподвижные точки

Неподвижная точка - точка логистического отображения, лежащая на прямой $f(x) = x$. Значит, надо найти решение $x = rx(1-x)$. Решим:

$$rx(1-x) = x$$
$$rx(1-x) - x = 0$$
$$x\big(r - rx - 1\big) = 0$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} x = 0, \\ r - rx - 1 = 0 \implies x = \dfrac{r-1}{r} \end{cases}$$

1.2 Количество неподвижных точек

Точка $x = 0$ всегда является неподвижной.

Точка $x = \frac{r-1}{r}$ принадлежит области определения $[0,1]$ тогда и только тогда, когда:

$$0 \le \frac{r-1}{r} \le 1 \iff \begin{cases} \dfrac{r-1}{r} \ge 0, \\ \dfrac{r-1}{r} \le 1, \end{cases} \iff \begin{cases} r \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty), \\ \dfrac{1}{r} \ge 0, \end{cases} \iff r > 0$$

Следовательно,

$$r \ge 1 \quad \implies \quad \text{две неподвижные точки}, \quad r < 1 \quad \implies \quad \text{одна}.$$

1.3 Максимальное количество неподвижных точек

Из уравнения $f(x) = x$ получаем квадратное уравнение, которое имеет не более двух корней. Таким образом, максимальное количество неподвижных точек — две.

2 Свойства логистической последовательности

2.1 Монотонность

Докажем по индукции, что при $r(1 - x_n) < 1$ последовательность $\{x_n\}$ убывает.

База ($n = 0$): По условию дано $0 < x_0 < 1$. Тогда $0 < 1 - x_0 < 1$

Раз $r \in (0, 1]$, то:

$$r(1 - x_0) < 1,$$

Умножая на $x_0 > 0$, получаем:

$$rx_0(1 - x_0) < x_0 \implies x_1 < x_0$$

Индукционный шаг: Предположим, что $x_{n+1} < x_n$ и $0 < x_n < 1$. Тогда $0 < 1 - x_n < 1$, и из условия $r(1 - x_n) < 1$ следует:

$$rx_n(1 - x_n) < x_n \implies x_{n+1} < x_n$$

Таким образом, последовательность монотонно убывает.

2.2 Предел

Поскольку $0 < x_n < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность ограничена. По теореме Вейерштрасса, всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

2.3 Визуализация графиков

Графики построены в Google Colab.

3 Монотонность подпоследовательностей $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$

Мы знаем, что:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \quad \text{при } x_0 \in (0,1), r \in (1,3]$$

Отсюда можно сказать:

$$\{x_{2n}\} \text{ – монотонно убывающая последовательность}$$
$$\{x_{2n+1}\} \text{ – монотонно возрастающая последовательность}$$

Докажем, что подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ строго убывает, то есть:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{2n} > x_{2n+2}$$

Из условия:

$$x_{2n} > x^*, \quad x_{2n+1} < x^*, \quad \text{где } x^* = 1 - \frac{1}{r}, \quad r \in (2,3)$$

Обозначим $x = x_{2n} > x^*$. Тогда:

$$x_{2n+2} = f(f(x)), \quad f(x) = rx(1-x)$$

Нужно доказать:

$$x > f(f(x))$$

Вычислим:

$$f(f(x)) = r \cdot \big(rx(1-x)\big) \cdot \Big(1 - rx(1-x)\Big) = r^2x(1-x)\Big(1 - rx(1-x)\Big)$$

Так как $x > 0$, делим обе части неравенства $x > f(f(x))$ на x:

$$1 > r^2(1-x)\Big(1 - rx(1-x)\Big)$$

Сделаем замену $u = 1 - x$. Поскольку $x \in \big(1 - \frac{1}{r}, 1\big)$, то $u \in \big(0, \frac{1}{r}\big)$. Получаем:

$$1 > r^2u\big(1 - r(1-u)u\big) = r^2u\big(1 - ru + ru^2\big) = r^2u - r^3u^2 + r^3u^3$$

Переносим всё в левую часть:

$$1 - r^2u + r^3u^2 - r^3u^3 > 0$$

Теперь положим $v = ru$:

$$1 - rv + rv^2 - v^3 > 0$$

Рассмотрим функцию:

$$g(v) = 1 - rv + rv^2 - v^3$$

Заметим, что сумма коэффициентов равна 0, значит, $(1 - v)$ — множитель. Используя схему Горнера для деления многочленов, разложим $g(v)$:

$$g(v) = (1 - v)\big(v^2 + v(1 - r) + 1\big)$$

Обозначим $h(v) = v^2 + v(1 - r) + 1$. Её дискриминант:

$$D = (1 - r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1)$$

При $r \in (2, 3)$ имеем $D < 0$, а старший коэффициент положителен (т. е. ветви параболы смотрят вверх), поэтому $h(v) > 0$ для всех $v \in \mathbb{R}$.

Кроме того, выполняется условие $v = ru \in (0, 1),$ так как $u \in (0, \frac{1}{r})$, для которого справедливо $1 - v > 0$. Значит:

$$g(v) = (1 - v) \cdot h(v) > 0, \quad \forall v \in (0, 1)$$

Значит, мы доказали для проивзольного n:

$$x > f(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad x_{2n} > x_{2n+2}$$

Теперь докажем, что подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ строго возрастает:

Аналогично обозначим $x = x_{2n+1} < x^*$. Тогда:

$$x_{2n+3} = f(f(x)), \quad f(x) = rx(1 - x)$$

Нужно доказать:
$$x < f(f(x))$$

Выполняем те же действия и получаем ту же функцию $g(v)$:
$$g(v) = (1 - v)\big(v^2 + v(1 - r) + 1\big)$$

Узнаем, какой знак у множителя $(1 - v)$:

$$x \in (0, 1 - \frac{1}{r}) \Longrightarrow 1 - x = u \in (\frac{1}{r}, 1)$$
$$v = ru \in (1, r); 1 - v = ru \in (1 - r, 0) \Longrightarrow 1 - v < 0;$$

Значит:
$$g(v) < 0, \quad \forall v \in (1, r)$$

Значит, мы доказали следующее:
$$x < f(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad x_{2n+1} < x_{2n+3}$$

4 Задания с точечным отображением

4.1 Нахождение неподвижных точек отображения

Рассмотрим отображение
$$g(x) = rx(1 - x)(2 - x), \quad r \in \left[0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Неподвижная точка x^* удовлетворяет уравнению
$$g(x^*) = x^*$$

Подставим выражение для $g(x)$ и перенесём все члены в одну сторону:
$$rx^*(1 - x^*)(2 - x^*) - x^* = 0$$

Вынесем общий множитель x^*:

$$x^*\Big(r(1-x^*)(2-x^*)-1\Big)=0$$

Рассмотрим уравнение

$$r(1-x^*)(2-x^*)=1$$

Раскроем скобки:

$$r(1-x^*)(2-x^*)=r(2-3x^*+(x^*)^2)=1,$$

Приведём к стандартному виду квадратного уравнения:

$$r(x^*)^2-3rx^*+(2r-1)=0$$

Это квадратное уравнение относительно x^*. Найдём его дискриминант:

$$\begin{aligned} D &= (-3r)^2-4\cdot r\cdot(2r-1) \\ &= 9r^2-8r^2+4r \\ &= r^2+4r \end{aligned}$$

Поскольку $r\geq 0$, имеем $D=r(r+4)\geq 0$, и при $r>0$ дискриминант строго положителен: $D>0$. Следовательно, при $r>0$ уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдём корни по формуле:

$$x^*=\frac{3r\pm\sqrt{D}}{2r}=\frac{3r\pm\sqrt{r^2+4r}}{2r}$$

Заметим, что не все из этих точек обязательно принадлежат отрезку $[0,1]$, на котором обычно исследуется динамика последовательности:

$$x^*=\frac{3r+\sqrt{r^2+4r}}{2r}>1,\quad \forall r\in\left(0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Таким образом, неподвижные точки отображения $g(x)$:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_2^* &= \frac{3r-\sqrt{r^2+4r}}{2r},\quad r>0 \end{aligned}$$

4.2 Диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю

Рассмотрим последовательность, заданную отображением

$$x_{n+1} = g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n),$$

где начальное значение $x_0 \in (0, 1)$, а $r > 0$.

Наша цель — найти такие r, при которых последовательность:

- состоит из положительных чисел,
- строго убывает,
- стремится к нулю.

Шаг 1: Доказательство положительности членов последовательности

Покажем, что если начальное значение удовлетворяет условию $x_0 > 0$, и параметр $r > 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$x_n > 0$$

Доказательство проведём методом математической индукции.

База индукции ($n = 0$). По условию $x_0 > 0$.

Индукционное предположение. Пусть для некоторого $n \geq 0$ выполнено

$$x_n > 0$$

Индукционный шаг. Рассмотрим следующий член последовательности:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$$

Рассмотрим множители $(1 - x_n)$ и $(2 - x_n)$:

$$0 < x_n < 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 - x_n > 0, \\ 2 - x_n > 1 > 0 \end{cases}$$

Таким образом, все четыре множителя в выражении для x_{n+1} положительны:

$$r > 0, \quad x_n > 0, \quad 1 - x_n > 0, \quad 2 - x_n > 0,$$

откуда следует

$$x_{n+1} > 0$$

Шаг 2: Оценка убывания через геометрическую прогрессию

Поскольку $x_n > 0$, имеем $1 - x_n < 1$ и $2 - x_n < 2$, откуда

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)(2 - x_n) < r x_n \cdot 1 \cdot 2 = 2r\, x_n$$

Обозначим $q = 2r$.

$$x_{n+1} < q x_n$$

Применяя это неравенство последовательно, получаем:

$$x_1 < q x_0, \quad x_2 < q x_1 < q^2 x_0, \quad \ldots, \quad x_n < q^n x_0$$

Если $r < \dfrac{1}{2}$, то $q < 1$. Тогда последовательность $q^n x_0$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q < 1$, и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} q^n x_0 = 0$$

Так как $0 < x_n < q^n x_0$, по теореме о двух милиционерах, последовательность $\{x_n\}$ стремится к нулю.

Шаг 3: Монотонность

Из неравенства $x_{n+1} < q x_n$ и условия $q < 1$ следует

$$x_{n+1} < q x_n < x_n,$$

то есть последовательность строго убывает.

4.3 Графики зависимости $\{x_n\}$ от n для точечного отображения

Графики представлены в Google Colab.