

题目：“同心协力”策略研究

摘 要

“同心协力”项目是一个以团队挑战为主的项目，是团队拓展训练很好的途径。项目开始时，排球从鼓面中心的上方竖直落下，队员们同心协力将球颠起，保证其有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中，队员只能抓握绳子的末端，不能接触鼓或绳子的其他位置。

针对问题一，基于排球开始下落到与鼓面相碰、排球与鼓面碰撞、碰撞后排球向上运动至最高点三个子过程受力分析，建立**颠球模型**。通过微元法，对运动过程进行数值模拟，控制之后每次排球与鼓面碰撞点始终保持同一高度，并使排球每次弹起高度相同，反演得理想鼓面速度为 2.89m/s ，通过检验回代法求出符合条件的用力参数。在此前提下求出为以用力和鼓面起伏最小为目标函数，以球的动力学方程组和弹起高度为约束条件为的**最优策略**：绳长 2m ，排球初次下落时，取每人拉力 80N ，方向与竖直夹角 85° ，二者在鼓的初始高度以上 10.76cm 处相遇；当排球第 n 次 ($n \neq 1$) 下落时，鼓在低于第一次碰撞高度 24.22cm 处开始上升，每个人拉力为 59N ，与竖直方向夹角为 75° 。

针对问题二，鉴于绳在鼓上的分布，建立三维直角坐标系对施力点和力进行描述，针对不同方向的力选取不同转轴求解力矩，进行力矩的分解合成，并结合刚体转动定律建立**鼓面倾角模型**。结合题中表 1 所给的数据进行模型求解，结果如表 6-2 示。分析结果得用力大小对鼓面倾角的影响小于发力时机对鼓面倾角的影响，一个人用力参数变化产生的影响大于两个人造成的影响等结论。

针对问题三，在实际情况下，鼓面会发生倾斜，结合前两问模型建立基于反射定理的倾斜鼓面反弹模型。以反射后排球的速度方向与竖直方向夹角为目标函数，以球动力学方程、鼓面范围、弹起高度为约束条件建立**策略优化模型**，采用**遗传算法**求解每次碰撞的最佳用力参数。考虑到人为误差，在每次结果中加入**随机扰动**，进一步进行数值模拟。以问题二中初始鼓面倾斜角 1.029° 为例，得前五次颠球最优用力参数，具体模拟结果如表 7-1。

针对问题四，基于受力情况和初始条件确定排球第二次到达鼓面的运动方向，利用排球运动模拟轨迹进行角度分析，得到理想状况下鼓面倾斜角度为 0.499° 。以队员用力参数为优化对象，实际倾角与理想倾角的差值为目标函数，建立**基于遗传算法的最佳策略模型**，得到队员 1 到 10 号发力时机(s)分别为 $-0.1, 0, -0.1, -0.1, -0.1, -0.1, -0.1, 0, -0.1, -0.1$ ；用力参数(N)为 $92, 75, 74, 60, 74, 77, 63, 97, 77, 85$ 。利用鼓面法向量在水平面上的投影角度求解得：排球倾斜方向投影在 10、1 号队员之间，且与这两位队员的夹角之比为 $2:1$ ，调整策略后，反射角度与竖直方向的误差为 0.025° 。

关键词：颠球模型 鼓面倾角模型 策略优化 遗传算法

一、问题重述

“同心协力”项目是团队拓展训练很好的途径之一，是一个以团队挑战为主的项目，挑战团结协作的能力。该项目用一个排球和鼓身中间固定很多绳子的牛皮双面鼓为道具，绳子在鼓身上的固定点沿圆周均匀分布且绳长相等。对于这个团队协作能力拓展项目，团队成员在进行活动时每人要牵拉一根绳子，保证鼓面水平。活动开始时，排球从鼓面中心的上方竖直落下，队员们同心协力将球颠起，保证球有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中，队员只能抓握绳子的末端，不能接触鼓或绳子的其他位置。

假设，项目用的排球质量为 270 g 。鼓身高度为 22 cm ，鼓面直径为 40 cm ，鼓的质量为 3.6 kg 。参加活动的队员人数不少于 8 人，队员之间的最小距离不得小于 60 cm 。项目开始时，球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下，球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上，如果低于 40 cm ，则项目停止。项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多。试建立数学模型解决以下问题：

1. 在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，试讨论这种情形下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。

2. 在现实情形中，队员发力时机和力度不可能做到精确控制，存在一定误差，于是鼓面可能出现倾斜。试建立模型描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设队员人数为 8 ，绳长为 1.7 m ，鼓面初始时刻是水平静止的，初始位置较绳子水平时下降 11 cm ，表 1 中给出了队员们的不同发力时机和力度，求 0.1 s 时鼓面的倾斜角度。

3. 在现实情形中，根据问题 2 的模型，你们在问题 1 中给出的策略是否需要调整？如果需要，如何调整？

4. 当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，于是需要队员调整拉绳策略。假设人数为 10 ，绳长为 2 m ，球的反弹高度为 60 cm ，相对于竖直方向产生 1° 的倾斜角度，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 $1:2$ 。为了将球调整为竖直状态弹跳，请给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果。

二、问题分析

针对问题一，对于理想状态，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，说明颠球时鼓面总是能保持水平。根据受力分析建立物理方程，考虑从项目开始时刻起，采用微元法对排球自由落体与鼓面碰撞后被颠起然后落下的反复碰撞的过程进行数值模拟，在满足预期效果的前提下，进行策略优化。

针对问题二，为了更清晰地描述鼓的受力情况和运动状况，首先在鼓上建立三维坐标系，并对每位队员进行定位描述。由于每位队员所在位置不同，施力产生的力矩的转轴也不同。选择合适的转轴求解力矩，然后根据刚体转动定理和力学方程建立适当鼓面

倾斜模型，求解出题目规定时间内鼓面倾斜角度并进行分析。

针对问题三，在现实情形中，基于问题二的模型，由于每个人发力参数的区别，会引起鼓面倾斜以及排球与鼓碰撞时速度方向不在竖直方向上，因此需要对问题中的策略进行调整。以反射后排球的速度方向与竖直方向夹角越小为目标函数，以球的运动满足动力学方程、范围不超过鼓面范围、弹起高度超过 40cm 为约束条件建立策略优化模型，并且每碰撞一次采用遗传算法求解每次碰撞的最优用力参数。并考虑到人为误差，加上随机扰动，基于扰动进行数值模拟仿真。

针对问题四，模拟出排球在鼓面反弹后的运动过程，得到其第二次到达鼓面的速度和方向。为将球调整为竖直状态，考虑使球在鼓面发生第二次反弹时，出射方向正好竖直向上。以此确定出鼓面的理想倾斜角度。然后利用遗传算法，求解与该理想倾角最接近的方案，根据排球投影的夹角之比 1: 2，利用鼓面法向量在水平面上的投影角度，确定每位队员与排球的位置关系。将该方案作为调整策略并评价。

三、模型假设

为使建立的模型得到简化，本文进行以下假设：

- (1) 不考虑风力等外界因素的影响；
- (2) 不考虑长绳的重量；
- (3) 认为每位队员均匀站位；
- (4) 不考虑排球自转对颠球过程的影响；
- (5) 排球与鼓面接触时，忽略摩擦力的影响；
- (6) 不考虑排球在与鼓面碰撞时的接触时间；
- (7) 排球半径 10.5cm；
- (8) 重力加速度 g 固定，记为 $g=9.8\text{N/kg}$ 。

四、符号说明

符号	符号说明
m	排球质量
M	鼓的质量
g	重力加速度
f	空气阻力
θ	绳与竖直方向夹角
h	排球从下落位置到鼓面的距离
L	绳长

T	一根绳子的拉力
\overline{M}	力矩
J	转动惯量
α	角加速度
ϑ	倾斜角度

五、问题一分析与处理

要讨论理想状态下团队的最佳协作策略，首先对颠球的过程进行分析。考虑将颠球的过程分为三个子进程进行讨论：排球开始下落到与鼓面相碰；排球与鼓面碰撞；碰撞后排球向上运动至最高点。然后通过选择合适的力度和角度，使得之后每次弹起的高度趋于稳定。

5.1 模型建立

5.1.1 颠球模型

(1)排球开始下落到与鼓面相碰

理想状态下，认为鼓面在运动时始终保持水平状态，排球始终在竖直方向上运动，每个人在拉鼓上升过程中拉力不变，鼓面保持水平，且每个队员可以把握好一致的发力时机。要求解理想状态下团队的最佳协作策略，首先要清楚颠球过程。

因此，先对排球下落过程中的状态进行受力分析。排球在下落过程中，受竖直向下的重力和向上的空气阻力的作用，重力提供向下运动的加速度，阻力是由于黏附在排球表面的空气与临近气体层的摩擦而产生的。

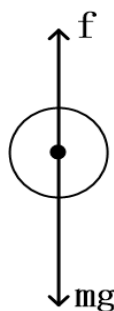


图 5-1 排球下落过程受力分析

图中， m 为排球的质量， a_1 为排球下落过程中的加速度。根据物体运动学原理，有

$$mg - f = ma_1 \quad (5-1)$$

在均匀无限广延的气体中，根据斯托克斯定律^[1]排球受到的空气阻力 f 的定义式为

$$f = 6\pi\eta r v_1 \quad (5-2)$$

式中, η 为粘滞系数, 为 $1.983 \times 10^{-5} Pa \cdot s$, 与气体性质和温度有关。 r 为排球半径, v_1 是排球运动速度。由上式可知, 阻力 f 大小与物体运动速度成正比。

根据受力分析得排球的运动方程为

$$s_1 = \int v_1 dt, v_1 = \int a_1 dt \quad (5-3)$$

其中, s_1 为排球运动的距离, v_1 为排球下落时速度。

对鼓进行受力分析时, 我们认为参与游戏的队员有 8 个人, 由于绳子在鼓上的固定点沿圆周呈均匀分布, 且每根绳子长度相同。假设每个人对绳子的作用力相同 (力度和用力角度均相同), 将力分解到水平方向和竖直方向, 根据力的叠加原则, 则所有绳子对鼓产生的力 T 在水平方向上相互抵消, 竖直方向上为 8 倍 T 的竖直分量。

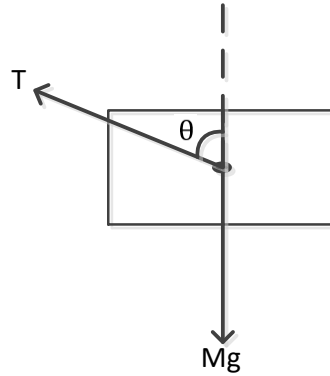


图 5-2 鼓受力分析简略图

图 5-2 中, 鼓的质量为 M , T 为一根绳子对鼓的拉力, θ 为绳与竖直方向的夹角。通过受力分析, 有

$$8T \cos \theta - Mg = Ma_2 \quad (5-4)$$

$$\cos \theta = \frac{H_0 - s_2}{L} \quad (5-5)$$

其中, s_2 为鼓向上运动的距离; L 为绳子的长度; H_0 为初始条件下绳长在竖直方向的分量, 具体计算过程如下:

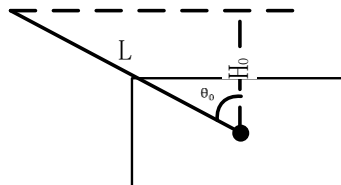


图 5-3 H_0 关系图

通过图 5-3 可知, $H_0 = L \cos \theta_0$ 。根据受力分析得鼓的运动方程为

$$s_2 = \int v_2 dt, v_2 = \int a_2 dt \quad (5-6)$$

令排球从下落位置到鼓面的距离为 h 。在排球下落到撞击鼓前的运动过程中，我们可以得到：

$$s_1 + s_2 = h \quad (5-7)$$

(2)排球与鼓面碰撞

由于排球与鼓面的碰撞时间极短，碰撞过程中的损耗的能量可以近似认为由人拉绳进行补充，那么，对于整个系统来说，没有能量损失，动量守恒及能量守恒都成立。因此，

$$mv_1 + Mv_2 = mv'_1 + Mv'_2 \quad (5-8)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}Mv'^2_2 \quad (5-9)$$

(3)碰撞后排球向上运动

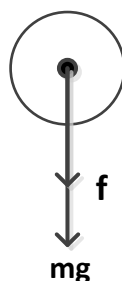


图 5-4 排球向上运动时受力分析

排球经过碰撞后，以速度 v'_1 竖直向上运动，此时排球受竖直向下的重力和空气阻力

$$mg + f = ma_3 \quad (5-10)$$

同理，

$$s_3 = \int v_3 dt, v_3 = \int a_3 dt \quad (5-11)$$

其中， s_3 为排球离开鼓面运动的距离， v_3 为排球向上运动速度。初始时刻 $v_3 = v'_1$ 。

5.1.2 优化模型

在理想状态下，用力方向、时机和力度可以被准确控制。项目的目标是使连续颠球的次数尽可能多，希望用力力度尽可能小，则要求每次弹起来的高度不要过高，稍高于 40cm 即可。

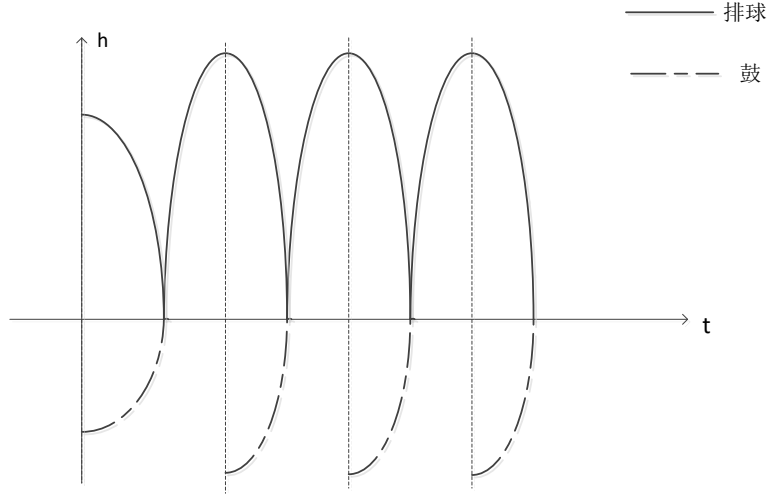


图 5-5 预期系统运动轨迹

图 5-5 为优化策略的预期图，上方的实线为排球随着时间的推移高度的变化图，下方的虚线为鼓的位置随时间的变化。选择合适的经过第一次碰撞后，在后续的过程中，我们想使得每次球和鼓都在相对稳定的高度进行碰撞，且碰撞后弹起的高度一致，且略高于 40cm，从而达到每次弹起后运动轨迹保持一致，在理想状态下，可以满足要求地无限次碰撞下去。

基于第一次的合理的碰撞结果，记经过第一次碰撞后弹起的高度为 h' ，则在下落的过程中，加速度满足下式

$$mg - f = ma_4 \quad (5-12)$$

其中， f 为空气阻力，表达式如(5-2)式。则第二次到达鼓面的速度和整个下降过程的路程为

$$v_4 = \int a_4 dt, s_4 = \int v_4 dt \quad (5-13)$$

设定第一次的碰撞位置即为第二次的碰撞位置，则 $s_4 = h'$ 。

因为想要在第二次反弹后达到与第一次一致的高度，且将碰撞过程近似看作弹性碰撞，所以不考虑能量的损耗，所以第二次碰撞后的速度 v_4' 应等于第一次碰撞后的速度 v_1' ，即 $v_4' = v_1'$ 。结合动量守恒定理机械能守恒定理与能量守恒得出

$$mv_1 + Mv_4 = Mv_1' + Mv_4' \quad (5-14)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_4'^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_4'^2 \quad (5-15)$$

从而推出在第二次碰撞前鼓到达碰撞水平面所需要的速度

$$v_5 = \frac{(m+M)v_4' - (m-M)v_4}{2M} \quad (5-16)$$

在本题中，认为下落的时间与鼓上升的时间相等，结合下落的时间以及鼓到达碰撞水平面所需要的速度 v_5 ，则可求出鼓上升的路程 s_5 ， s_5 与拉力方向、夹角以及绳长有关，则

$$s_5 = u(T, \theta_0, L) \quad (5-17)$$

因为想要找到最佳协作策略，但由于在理想状态下，上述模型中在第二次及以后的过程中每次弹起的轨迹几乎不发生变化，所以次数应该是无限大，不把次数作为一个优化的对象。

所以想要在满足能弹起 40cm 这一条件之外，还需要让每个人所施加的拉力尽可能地小，以及鼓的上下起伏尽可能小，即

$$\begin{cases} \min T \\ \min s_5 \end{cases} \quad (5-18)$$

约束条件为排球的动力学方程组和弹起高度高于 40cm。

5.2 模型求解

5.2.1 排球开始下落到与鼓面相碰过程

在排球开始下落到与鼓面相碰这个过程中，(5-1)~(5-7)式对球和鼓进行了受力分析以及运动学过程分析，排球在空气中运动时，由于受到空气阻力，所以排球下落的过程为变加速直线运动。同时，整个过程中鼓收到拉力向上运动，在向上运动时，拉力与鼓的夹角变大，拉力在竖直方向上的拉力变小，则鼓在上升的过程中也为变加速直线运动。因此，随着时间的变化，球和鼓的加速度都将发生变化，整个运动的路程以及运动需要进行积分才能求解。但是，由于某些积分按初等函数理论划分是没有原函数的。因此，通过将连续过程离散化，采用微元法，通过计算机数值模拟^[2]对整个运动过程进行模拟，从而算出排球和鼓面在相碰前一刻的运动状况。

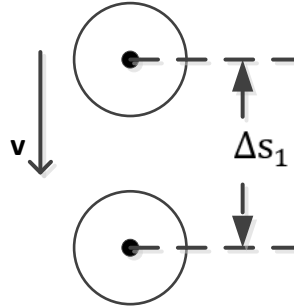


图 5-6 排球下落过程平面示意图

如图所示，采用微元法，取均匀时间间隔 $\Delta t = 0.001s$ ，由于时间间隔足够小，则可以将原本的变加速直线过程近似认为成匀加速直线运动，则对排球而言，在这段时间间隔中，加速度为 $a = \frac{mg - f}{m}$ ，末速度为 $v_1 = v_{10} + a_1 \Delta t$ 。其中， v_{10} 为排球在该时间间隔

开始的初始速度。排球的下落的路程为

$$\Delta s_1 = v_{10}t + \frac{1}{2}a_1(\Delta t)^2 \quad (5-19)$$

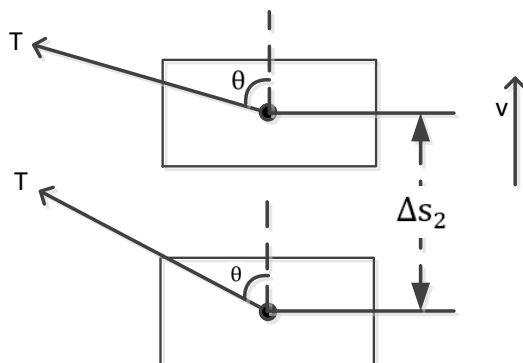


图 5-7 鼓上升过程平面示意图

同理，在经过 Δt 时间间隔时，鼓的运动也近似为匀加速直线运动，则鼓在这段时间中，加速度为

$$a_2 = \frac{8F \cos \theta - Mg}{M} \quad (5-20)$$

角度满足

$$\cos \theta = \frac{H_0 - \sum_{k=1}^n \Delta s_2}{L} \quad (5-21)$$

末速度为

$$v_2 = v_{20} + a_2 \Delta t \quad (5-22)$$

其中， v_{20} 为鼓在该时间间隔开始的初始速度。鼓的上升路程为

$$\Delta s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2 \quad (5-23)$$

将每个时间间隔的 Δs_1 和 Δs_2 加起来，算出总路程。当总路程与 40cm 极其接近时，算出总时间 t 。

5.2.2 碰撞过程

(5-8)和(5-9)式分别从动量和动能上描述了碰撞过程前后的速度的关系，将两个式子联列，可以推出

$$\begin{cases} v_1' = \frac{(m-M)v_1 + 2Mv_2}{m+M} \\ v_2' = \frac{(M-m)v_2 + 2mv_1}{m+M} \end{cases} \quad (5-24)$$

5.2.3 碰撞后排球向上运动

在排球向上运动时，受重力和空气阻力，同样将连续的过程离散化，将每一个时间间隔中的运动近似于匀加速直线运动通过数值模拟，加速度为

$$a_3 = \frac{mg + f}{m} \tag{5-25}$$

从而求得上升的高度与时间。

5.2.4 结果分析

(1)排球第一次下落碰撞反射过程

在本题中，令队员人数为 8 人，绳长为 2m，8 个人等间距站立，当绳子的角度与竖直方向上的夹角大于 23.08°时，满足题目要求队员之间最小距离不得小于 60cm，

在第一个过程中，采用微元法将连续过程离散化，并采用数值模拟方法，模拟出从排球下落开始到第一次接触前的运动过程，从而算出相撞时的速度以及距离鼓初始位置的高度。

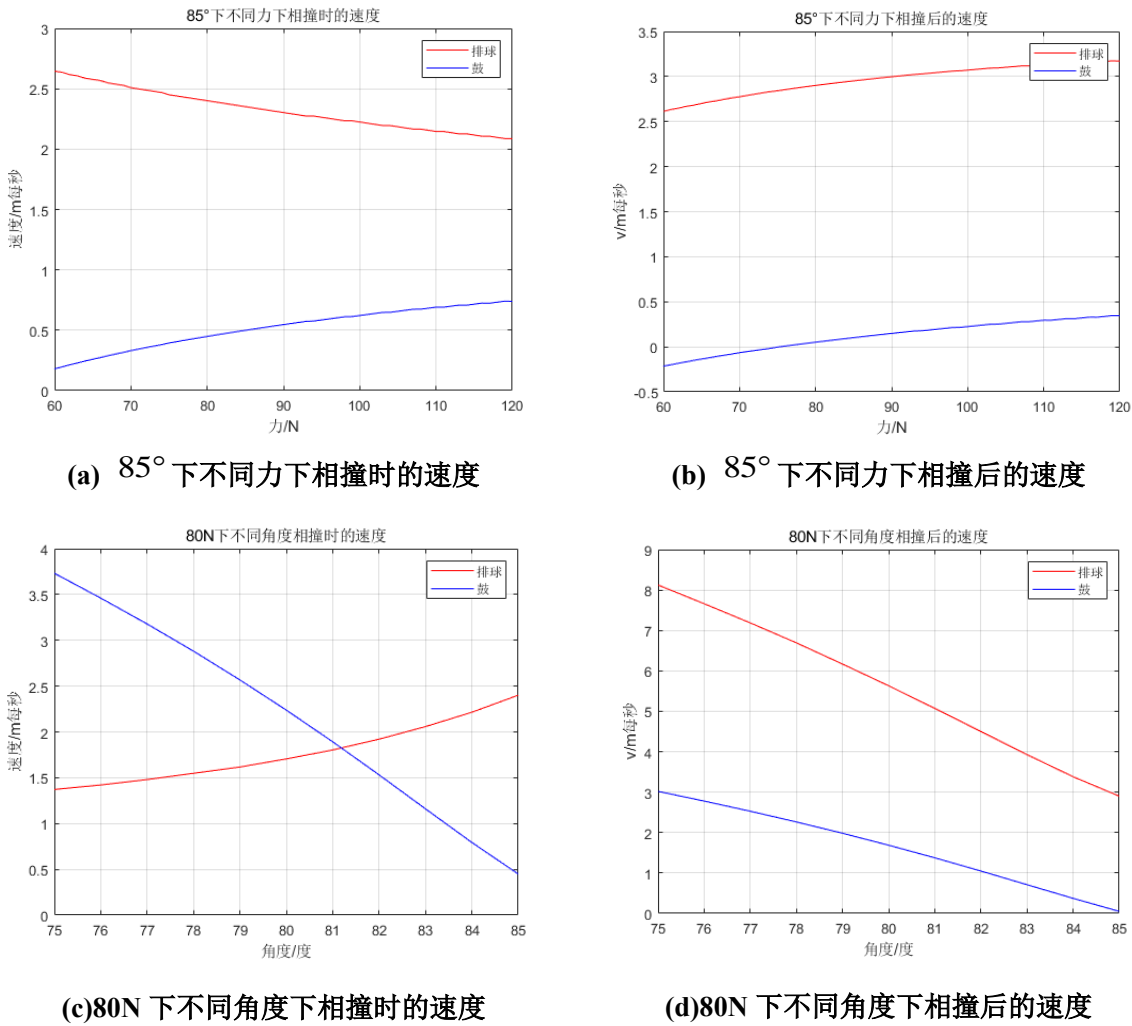


图 5-8 相撞速度影响因素对比图

由图分析得，当初始拉力方向与竖直方向夹角为 85 度时，随着力的加大，相撞时

的鼓的速度增大，排球的速度减小，但在相撞之后，随着力的增大，排球的速度增大。当拉力不变时，本题取 80N，则当初始拉力方向与竖直方向的夹角增大时，相撞时鼓和排球的速度减小，相撞后排球的速度随着夹角的增大而增大，鼓的速度则随着夹角的增大而减小。

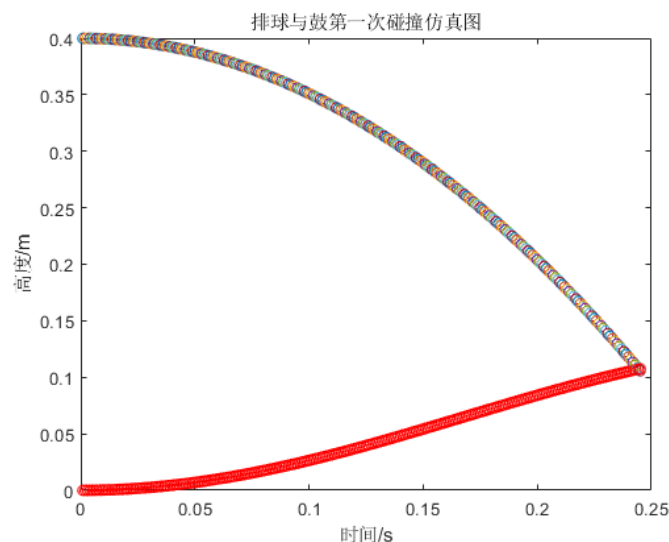


图 5-9 排球与鼓第一次碰撞仿真图

上图为排球和鼓第一次碰撞数值模拟^[3]仿真图，上方曲线为排球的高度随着时间的变化曲线，下方的红线为鼓的高度随时间的变化曲线。

取每个人拉力为 80N，拉力方向与竖直夹角为 85 度，排球和鼓在鼓的原始位置上 10.76cm 处相遇，到达这个位置时，鼓的速度是 0.45m/s，排球的速度是 2.40m/s，排球的速度大于鼓的速度。从而可以求得反射后的速度为 2.90m/s，第一次弹起高度为 42.94cm，略高于 40cm。

(2)整体过程

在之后的过程中，同样采用微元法进行数值模拟，模拟出从排球下落开始到稳定起落的图形。选择图 5-9 作为第一次碰撞，在后续的过程中，使每次球和鼓都在相对稳定的高度进行碰撞，且碰撞后弹起的高度一致(42.94cm)，从而达到每次弹起后运动轨迹保持一致，在理想状态下，可以满足要求地无限次碰撞下去。

由此可以算出所需鼓到达每次碰撞面的速度为 2.89m/s，则以下为一种方案：当排球开始下落时，每次鼓在低于第一次碰撞水平面的 24.22cm 开始运动，每个人拉力为 107N，与竖直方向夹角为 80 度。

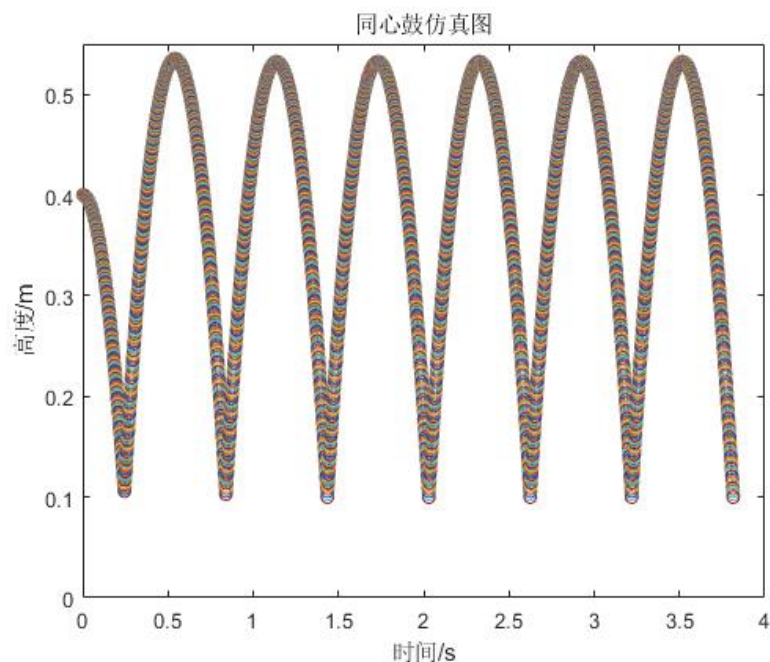


图 5-10 全过程数值模拟图

上图为采用数值模拟方法仿真出来的排球随着时间的变化高度的变化图，每次球与鼓碰撞的点都相对固定，在同一水平面上，每次弹起的高度也保持相对稳定，与之前的预期一致，可以得出这种策略为一种满足题意的较好的策略。

(3)最优策略

在满足要求的前提下，对策略进行优化，想要通过尽可能小的力达到预期的效果，通过改变力度和角度的搭配，结果如下。

表 5-1 优化策略表

角度(度)	85	80	75	70	65
力度(N)	337	107	59	38	28
鼓距离碰撞平面距离(m)	0.1455	0.2422	0.2743	0.3657	0.4116

由表可知，随着角度的减小，所需力度也减小，适当减小角度，可以省力。同时，使鼓的上下波动不要太大，随着角度的减小，鼓距离碰撞平面的距离增加，即鼓上下起伏增大，综合以上两点考虑，最优策略为每个队员的拉力为 59N，拉力方向与竖直方向夹角为 75°。

六、问题二分析与处理

6.1 鼓面倾斜模型

6.1.1 建立三维坐标

当部分队员发力大小不同时，发力大的队员附近的鼓面会高于其他队员，产生合外力矩，使鼓面发生倾斜。根据表 1，我们以鼓面 1 号 5 号队员位置所在直线为 x 轴，3 号

7 号所在的直线为 y 轴，垂直于鼓面且过 x 轴、 y 轴交点的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系。规定队员编号 1 到 8 对应的鼓面位置如图所示。

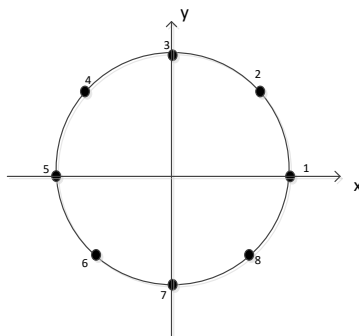


图 6-1 受力点 xoy 坐标面分布图

图中展示了队员 1 到 8 的着力点，以 x 轴正向为 1 号，逆时针均匀分布在鼓面边缘。

6.1.2 转动定律

(1) 合外力矩

鼓面的倾斜和转动有关，要讨论鼓面倾斜首先要确定转轴。考虑以 3 个坐标轴作为转轴，我们发现，若以 z 轴为转轴，鼓面发生转动而不是倾斜，这说明以 z 轴为转轴的力矩与鼓面倾斜无关。因此对于分布在坐标轴上的力，我们只需考虑其在 x 轴、 y 轴为轴转动的过程。

由于每个队员都对鼓面产生了力的作用，我们采用逐步分析的方式，讨论这些拉力对鼓面倾斜角度的影响。考虑将 8 个队员产生的拉力进行分类，通过观察发现，1 号、3 号、5 号、7 号为一类，均分布在坐标轴上；2、4、6、8 号为一类，分布在 $y=x$ 或者 $y=-x$ 的直线上。

对于分布在坐标轴上的拉力，以 y 轴 3 号为例，因为力的方向与 y 轴平行，所以该力只会在 x 轴为转轴时产生力矩。力矩如图 6-2 所示。

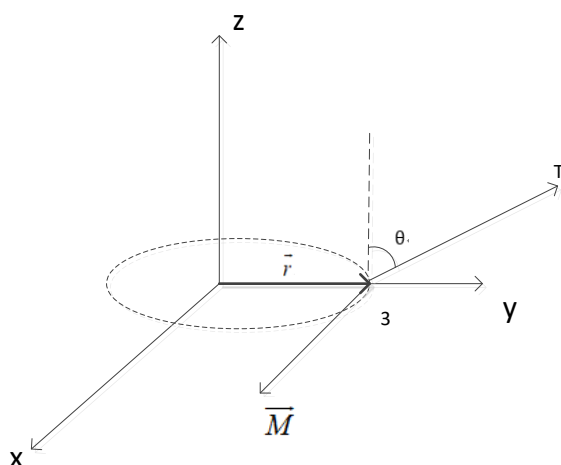


图 6-2 3 号力矩

根据矢量的矢积定义，我们有

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{T} = rT \sin \beta \vec{e}_r \quad (6-1)$$

其中， \vec{r} 为力 \vec{T} 的作用点到转轴的位矢， β 为 \vec{r} 和 \vec{T} 之间的夹角， $\beta = \pi/2 - \theta$ 。同理，y 轴上 7 号队员提供的拉力也只会以 x 轴为转轴产生力矩。x 轴上 1、5 号队员提供的拉力则会以 y 轴为转轴产生力矩，在其他转轴上不产生力矩。

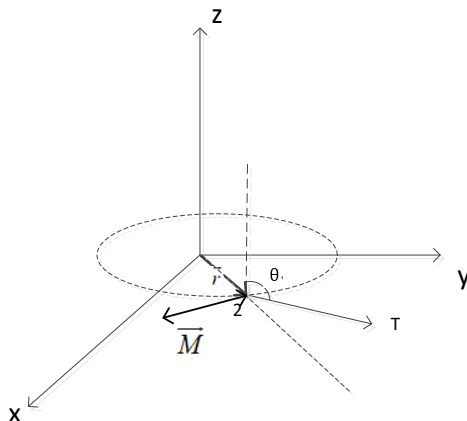


图 6-3 2 号力矩

对于分布不在坐标轴上的拉力，我们以 2 号为例进行力矩分析，其物理模型如图 6-3 所示。通过三维受力模型我们可知，2 号队员提供的拉力所在的半径与 x 轴、y 轴的夹角均为 45° ，我们以该半径垂直的直径为转轴进行分析，然后将该力产生的力矩分解到 x 轴 y 轴上。

根据公式(6-1)，即可求得 2 号队员提供的拉力产生的力矩。同理，我们可以求得 4、6、8 号队员提供的拉力产生的力矩。然后根据求得的力矩大小和方向，将力矩分解到坐标轴上^[4]并对所有力矩求和： $\vec{M}_x = \sum \vec{M}_{xi}$ ， $\vec{M}_y = \sum \vec{M}_{yi}$ 。

(2) 转动惯量

刚体的转动惯量是描述刚体在转动中惯性大小的物理量。它与刚体的体密度、几何形状和转轴的位置有关。研究鼓面倾斜角度的分析中，鼓的密度与形状是固定的，我们分别以 x 轴 y 轴作为转轴，根据常见刚体的转动惯量^[5]和刚体的平行轴定理^[6]，我们可以求得对于圆柱形刚体，以 x、y 轴为转轴时对应的转动惯量为 $MR^2/4$ 。

(3) 刚体转动定律

根据刚体转动定律^[7]，刚体绕定轴转动时，刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

$$|\vec{M}| = J\alpha \quad (6-2)$$

根据牛顿力学基本原理和运动学方程，倾斜角度 θ 可以通过下式计算：

$$\theta = \iint \alpha dt^2 \quad (6-3)$$

根据以 x 轴、y 轴分别为转轴求得的倾斜角度，计算得到整个鼓面的倾斜角度，具体方法如下。

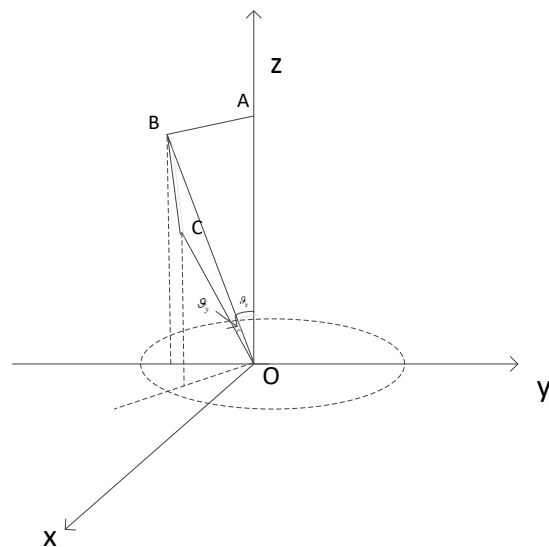


图 6-4 倾斜角度

图中，为 x 轴做转轴求得的倾斜角度，为 y 轴做转轴求得的倾斜角度。取鼓面的法向量 OA，经过 x 轴做转轴倾斜后为 OB，再经过 y 轴做转轴后得到 OC。法向量最终倾斜的角度 $\angle AOC$ 即为鼓面倾斜角度。为求 $\angle AOC$ 我们建立以下模型。

$$OA = OB = OC \quad (6-4)$$

$$AB = 2OA \sin \frac{g_x}{2} \quad (6-5)$$

$$BC = 2OC \sin \frac{g_y}{2} \quad (6-6)$$

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} \quad (6-7)$$

$$\cos g = \cos \angle AOC = \frac{OC^2 + OA^2 - AC^2}{2OC \cdot OA} \quad (6-8)$$

之后利用反三角公式，即可求得鼓面的倾角。

6.2 模型求解

分析题目可知，绳长 $L=1.7\text{m}$ ，初始位置 $H_0=11\text{cm}$ ，根据公式 $H_0 = L \cos \theta$ ，可求得角度 θ ，进而得到 β 。而通过对 8 个拉力的分析可知，矢矩 $r=R=20\text{cm}$ 。

通过上述模型，我们可以求得表 1 中不同状况下对于 x 轴、y 轴分别做转轴时鼓面的倾斜角度和鼓面倾角。对于用力大小不同而发力时机相同的状况（1、2、3），可直接利用模型进行求解，对于用力大小相同而发力时机不同的状况（4、5、6），我们认为活动开始时间点为 -0.1s，在 -0.1s 到 0 的时段内，只有个别提前发力的队员存在力，将时间

变化转化为力的变化进行求解。对于第三种情况，发力时机和用力大小均有改变（7、8、9），我们将该过程分为两段进行求解。从-0.1s 到 0，视为第二种情况求解，0 到 0.1s 视为第一种情况进行求解。具体结果见表 6-1、6-2。

表 6-1 不同用力参数不同转轴的倾斜角度

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X 轴倾角(度)	0	-0.7	0.7	0	-17	17	0	-17	-17
Y 轴倾角(度)	-1	-0.3	-0.3	-24	-7.2	-7.2	-28	42	6.9

表 6-1 中展示了不同状况下以 x 轴为转轴造成的倾角和以 y 轴为转轴产生的倾角的值。结合表 6-1 数据，通过式(6-4)~(6-8)计算出不同用力参数下的合成倾角。

表 6-2 不同用力参数鼓面的倾斜角度

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角（度）
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	1.029
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7882
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.7882
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	2.4715
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	1.8938
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	1.8938
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	2.8835
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	4.5412
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	1.8147
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

分析表 6-2，通过比较 1、2、3 与 4、5、6 两组结果，我们发现用力大小对鼓面倾角的影响小于发力时机对鼓面倾角的影响。而纵向比较每组的结果，可以知道一个人用力过大或发力过早产生的影响大于两个人造成的影响。两个人用力过大或发力过早产生的影响与他们所在的位置无关（除相对而立的情况）。而观察 7、8、9 组的结果，没有明显的规律性，说明当发力时机和用力大小的影响同时作用时，不同的组合方式造成的影响各不相同。

七、问题三分析与处理

在现实情形中，鼓面会因为用力参数的不同而发生倾斜，从而使得排球碰撞后将问题一与问题二中的模型相结合进行调整，同时采用数值模拟和遗传算法求解每一次的最优解。

7.1 模型建立

由于在实际情况下，每个队员施力时机以及大小不一致，会导致鼓面倾斜，当球竖直落下时，则会以一定的角度弹起，若按照问题一中的策略，则小球将会弹出鼓面范围，所以需要调整问题一中的策略进行调整。

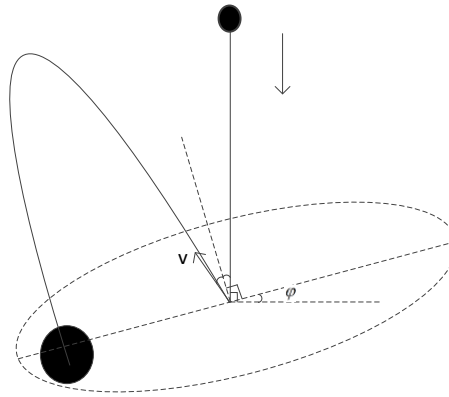


图 7-1 倾斜鼓面碰撞示意图

由于实际中的人为原因，导致鼓有一个倾斜角，设该初始角度为 φ ，当第一次球自由落体运动落下时，经过与倾斜鼓面碰撞，根据反射定理，排球不再竖直弹起，而是与水平方向有一定的夹角，该夹角为 2φ 。经过在空气中运动，受到空气阻力的原因，在第二次与鼓面相碰时，排球速度方向与竖直方向夹角 γ 变小，但仍然存在一定的角度。因为希望通过一次反弹之后，排球方向改为竖直，则需要调整鼓的倾斜角度，理想倾斜角度为 $\omega_0 = \gamma/2$ 。

利用问题二的鼓面倾斜模型，求得满足要求的每个人的发力大小以及时机的组合。但在实际情况下，人可能不能达到理想状态，所以对发力时机以及发力大小组合加入随机扰动，基于随机扰动，再次算出扰动下的实际倾斜角度，判断与竖直方向的夹角，不断优化夹角尽可能小，建立策略优化模型：

目标函数为

$$\min \gamma \quad (7-1)$$

约束条件为球的运动满足动力学方程、范围不超过鼓面范围、弹起高度超过 40cm。

7.2 模型求解

采用问题一微元法的思想，通过数值模拟反演出排球刚碰撞完那一刻的速度，从而个演算出下一次到达碰撞面时的速度角度，基于问题二的模型，采用遗传算法^[8]求出使得碰撞后角度能达到竖直的最优解。

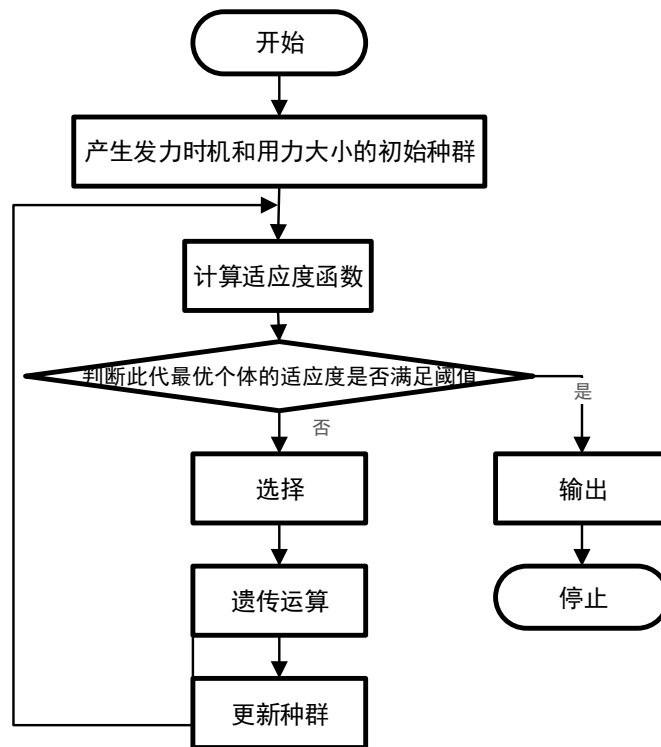


图 7-2 遗传算法求解用力参数流程图

上图为遗传算法求最优解的过程，在每次求解为最优解后，加入随机扰动，在之后的过程中不断进行数值模拟随时间往后运动。若设定鼓面倾斜角为问题二中的序号一的倾斜角，即 1.029° ，通过遗传算法求出每次最优解的每个队员的发力时机以及发力大小如下表所示。

表 7-1 基于遗传算法与数值模拟求解的前五次用力参数表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
1	发力时机	-0.1	-0.1	0	-0.1	-0.1	0	-0.1	-0.1
	用力大小	79	85	79	86	90	93	92	90
2	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	-0.1	-0.1	0	0
	用力大小	82	78	82	78	86	82	90	80
3	发力时机	0	0	0	-0.1	0	0	0	-0.1
	用力大小	91	87	91	90	91	82	89	90
4	发力时机	-0.1	-0.1	-0.1	0	-0.1	-0.1	-0.1	0
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80
5	发力时机	-0.1	0	-0.1	-0.1	-0.1	0	-0.1	0.1
	用力大小	90	90	80	90	91	91	80	90

上表为基于遗传算法与数值模拟求解的前五次发力时机与用力大小组合表，从球数值落在设定的倾斜角的鼓面上，由于在每次碰撞时加入随机误差，所以每次的用力参数都应发生变化，通过数值模拟出到达碰撞面的速度夹角，每次都通过遗传算法求出每一次的最优解，使其尽可能地回到竖直方向。

八、问题四分析与处理

8.1 模型建立

8.1.1 优化目标的确立

分析问题四可知，由于球弹起的方向不再竖直，所以在球反弹过程中受到重力的影响和与运动方向相反的空气阻力的影响。因此，排球做曲线运动。

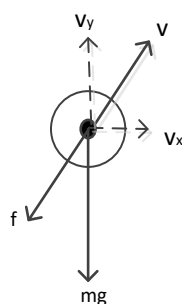


图 8-1 排球反弹过程受力分析

如图所示，排球在水平方向和竖直方向上都有速度存在，而排球不断上升的过程中，摩擦力 f 的竖直分量和重力使 v_y 不断减小，摩擦力的水平分量使 v_x 不断减小，但由于 f 远远小于重力，所以当球上升到最高点 60cm 时，竖直方向速度为 0，水平方向上仍有速度存在。整个上升过程为加速度不断变化的曲线运动。排球到达最高点后，由于受到重力的影响开始下落，又 v_x 不等于 0， f 随速度不断发生变化，所以，排球下落过程为曲线运动，自然，排球在接触鼓面时有一定的倾斜角度。具体过程如下图所示。

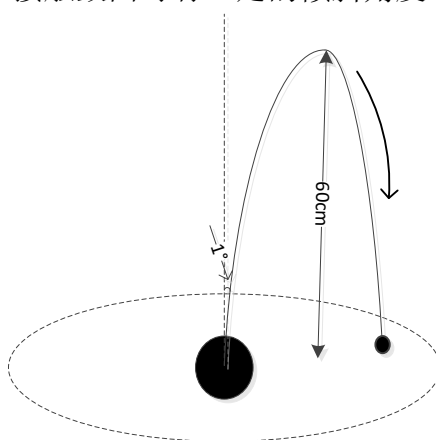


图 8-2 排球第一次反弹后运动轨迹图

图中，排球首先由反弹点以与竖直方向夹角 1° 的方向弹出，做曲线运动，到最高点 60cm 后开始下落，做曲线运动直至与鼓面相碰。箭头表示运动方向设排球在再次弹回鼓面时与竖直面的夹角为 γ ，那么，自然有一个鼓的倾斜角度，能够使排球经过鼓面反射后速度方向竖直向上。设定该角为 ω_0 。

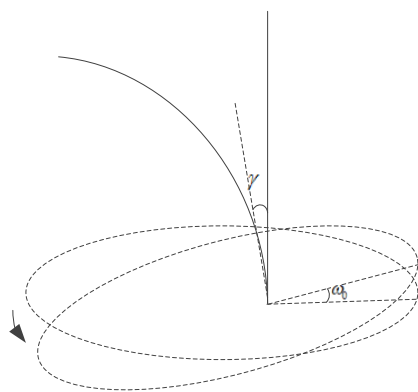


图 8-3 鼓面理想倾斜模型示意图

图 8-3 中，实线表示排球的理想运动轨迹：先做曲线运动与鼓面碰撞然后以竖直方向弹出。箭头表示鼓面的倾斜过程。通过反射定律，我们知道 $\gamma = 2\omega_0$ 。

为了将球调整到竖直状态弹跳，那么要求鼓面与水平面的倾角越接近 ω_0 越好。也就是说实际状况下鼓的倾斜角度 ω 与理想状况下的倾斜角度 ω_0 差值要小，即

$$\min |\omega - \omega_0| \quad (8-1)$$

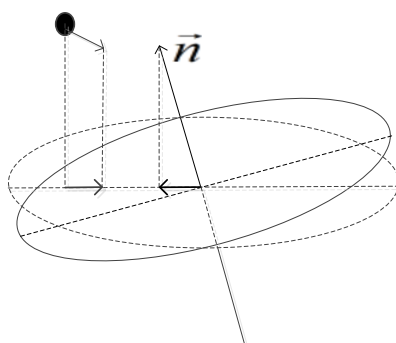


图 8-4 法向量投影图

由图 8-4 知，由于球的方向一定，其倾斜方向在水平面的投影只想某两位队员之间，当鼓面的倾斜角度确定时，其法向量方向也确定，并且鼓面的法向量在水平面的投影与球在水平面的投影共线，若认为鼓面法向量垂直于鼓面向上，则鼓面的法向量在水平面的投影与球在水平面的投影正好相反。若想确定排球弹去时的方向是朝着哪两位队员中间，只需要确定鼓面法向量在水平面的投影的方向，并结合具体与两位队员的夹角比例即可。

8.1.2 基于遗传算法^[7]的最佳策略模型

对于 10 人拉绳颠球模型，每个人发力时机和用力大小均可能不同，在该遗传算法中，考虑以每个人发力时机和用力大小作为优化对象直接进行编码。设每人发力时机为变量 k_i ，设每人用力大小为 n_i 。为简化求解过程，根据第二问中表 1 信息取 $k_i = -0.1, 0$ ；

$n_i \in [70, 100]$ 。我们将编号 1 到 10 的队员发力时机在前，用力大小在后进行编码，编码形式如下： $k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_9k_{10}n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7n_8n_9n_{10}$ 。

随机生成一系列染色体方案，以问题二中求解倾斜角度的模型为适应度函数，通过基因重组和基因变异产生新的方案，交叉变异时，由于染色体前 10 个基因与后 10 个基因表示不同物理意义，只能允许相同意义的基因进行交叉。在此基础上，求得满足目标函数的最佳策略。

8.2 模型求解

8.2.1 结果分析

通过对排球第二次弹跳过程进行模拟，利用在最高点 60cm 处的速度特征，反演得反弹初始时刻的速度和运动时间，在下落过程中运用运动学原理可得，排球在再次弹回鼓面时与竖直面的夹角 $\gamma = 0.99^\circ$ ，因此 $\omega_0 = 0.4999^\circ$ 。利用遗传算法进行求解，我们规定，当 $\min |\omega - \omega_0| < 0.05^\circ$ 时，认为排球可以反射为竖直状态。求解所得染色体如下（基因间用逗号隔开）：

-0.1, 0, -0.1, -0.1, -0.1, -0.1, -0.1, 0, -0.1, -0.1, 92, 75, 74, 60, 74, 77, 63, 97, 77, 85

我们得到实际情况下调整的角度 $\omega = 0.4742^\circ$ ，因此，该染色体对应的方案即为排球反弹后竖直弹跳的最佳方案。对该染色体进行解码得到 10 个队员每人的用力大小和发力时机。结果见表 8-1。

表 8-1 基于遗传算法的调整策略

队员编号	发力时机/s	用力大小/N	队员编号	发力时机/s	用力大小/N
1	-0.1	92	6	-0.1	77
2	0	75	7	-0.1	63
3	-0.1	74	8	0	97
4	-0.1	60	9	-0.1	77
5	-0.1	74	10	-0.1	85

分析表 8-1，2 号和 8 号的发力时机晚于其他队员的发力时机。1、8、10 号的用力大于其他几位队员。本问以调整球弹跳到竖直状态为目的，球偏向的方向应有更大的做功。由问题二的模型可得，发力时机对倾角的影响大于用力大小的影响。所以我们更偏向于队员发力时机早的位置为球偏向的位置。其中 1 号和 10 号发力早且发力大。

题中，倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 1:2。利用鼓面法向量在水平面上的投影角度求解得：排球倾斜方向投影在 10、1 号队员之间，且与这两位队员的夹角之比为 2:1，与上述分析出 1 号和 10 号发力早且发力大结论保持一致。

8.2.2 实施效果

本问中所给的调整策略是基于遗传算法给出的,遗传算法的结果相对而言效果比较好,排球反弹角度与竖直方向极为接近,但并不能达到绝对竖直弹跳。我们选取与竖直状态的角度误差 0.05° 为阈值,根据遗传算法的特性也必然有多种都符合条件的调整策略,本文给出的是其中的一次仿真的结果。

该调整策略反射角度与竖直方向的误差为 0.025° ,可以发现该误差角非常小,可以忽略不计。这样,我们认为本问中所给出的调整策略效果较好。

九、模型评价与改进

9.1 模型的优点

(1) 将运动过程分成三个子过程,使得整个过程的受力分析更加明确。并且,从第二次开始,控制排球弹起高度一致以及与鼓的碰撞面高度一致,从而求出满足要求的拉力,实现理论上的无限次反复碰撞过程。

(2) 通过微元法将复杂的变加速运动转化成匀加速运动,使整个运动过程中的积分求解变得更易于计算。

(3) 本文所构建的鼓面倾角模型,巧妙地将不同轴的力矩分解,从而利于计算,且熟练利用图形理论对角度进行转换,使模型更加灵活,便于应用。

(4) 问题三模型考虑到现实情形中的人发力参数之间的误差,加入随机扰动,从而使整个数值模拟过程更加具有现实性。

9.2 模型的缺点与改进

(1) 本文所建立的鼓面倾角模型未能全面分析出用力参数对模型结果的影响,如果将用力大小和发力时机共同作用影响进行分析,则可使模型更加全面,更具有普遍意义。

(2) 未考虑排球和鼓面碰撞时的能量损耗,在排球和鼓面碰撞过程中的受力分析未能详细分解,会导致求解出来的排球弹起的速度偏大,应将排球和鼓面在碰撞过程中的形变以及受力时间考虑进去,从而计算在碰撞过程中的能量损耗,使得整个过程更加严谨。

参考文献

- [1]王肇庆,苏惠惠.斯托克斯粘滞阻力公式的简化推导[J].电子科技大学学报,1997(S1):261-264.
- [2]Yu Chen,Ning Jiang,Hong Hu. Mechanical modeling of an auxetic tubular braided structure: Experimental and numerical analyses[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2019,160.
- [3]汪克义,吴朝晖,陆同兴.弹跳运动中混沌现象的电子模拟[J].大学物理,1998(08):32-33+42.

[4]Yu Chen,Ning Jiang,Hong Hu. Mechanical modeling of an auxetic tubular braided structure: Experimental and numerical analyses[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2019,160.

[5]张金锋,刘建军,公丕锋,袁五届,张永兴.基于均质圆柱壳刚体转动惯量的计算[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2015,36(02):84-86.

[6]周瑞雪.对几种刚体转动惯量的研究[J].贵阳学院学报(自然科学版),2011,6(03):10-12+17.
平行轴定理

[7]马文蔚等.物理学 [M]. 第六版.北京市:高等教育出版社,2014: 109-115.

[8]李猷. 基于多策略的机场地面保障车辆调度问题研究[D].西安理工大学,2019.

附录

```

%% 问题 1
clc,clear
delta_t=0.001;%单位时间
M=3.6;%鼓的质量
m=0.27;%排球质量
h=0.4;%最小高度
g=9.8;
F=80;%绳子拉力
theta=deg2rad(85);%绳子与鼓的夹角为 85°，
转化为弧度
T=F*cos(theta);
L=2;%绳长
r=0.105;%排球半径
eta=1.983e-5;%空气粘滞系数
L1=L*cos(theta);
s1=0;%碰撞前小球下落距离
s2=0;%碰撞前鼓上升距离
v10=0;%排球速度
v20=0;%鼓速度
n1=0;%所有的 n 都用于计时
while (s1+s2)<0.4%使鼓上升和排球下降距离
之和近似为 0.4m，以求出碰撞时刻的速度
    f=6*pi*eta*r*v10;%空气阻力
    a1=(m*g-f)/m;
    s1=s1+v10*delta_t+0.5*a1*delta_t^2;
    v10=v10+a1*delta_t;
    a2=(8*T-M*g)/M;
    s2=s2+v20*delta_t+0.5*a2*delta_t^2;
    v20=v20+a2*delta_t;
    T=F*(L1-s2)/L;
    n1=n1+1;
end
disp(' 以下单位均为 m/s, 取向向下为正方向')
disp(' 碰撞时刻排球的矢量速度为')
disp(v10)
v20=-v20;%矢量
disp(' 碰撞时刻鼓的矢量速度为')
disp(v20)
t=delta_t*n1;%总时间
%根据动量定理以及动能定理求碰撞后的速度
v1=((m-M)*v10+2*M*v20)/(M+m);
v2=((M-m)*v20+2*m*v10)/(M+m);
disp(' 碰撞后排球的矢量速度为')
disp(v1)
disp(' 碰撞后鼓的矢量速度为')
disp(v2)
n2=0;
s3=0;
v1=-v1;
vp=v1;%vp 为此刻 v1 的标量速度
while v1>0%求第一次碰撞后的最大上抛高度
    f=6*pi*eta*r*v1;
    a3=(m*g+f)/m;
    s3=s3+v1*delta_t-0.5*a3*delta_t^2;
    v1=v1-a3*delta_t;
    n2=n2+1;
end
disp(' 碰撞后排球颠起高度为')
disp(s3)
t2=delta_t*n2;
s4=0;
n3=0;
while s4<s3%求排球下降到同一相同碰撞面时
的速度
    f=6*pi*eta*r*v1;
    a4=(m*g-f)/m;
    s4=s4+v1*delta_t+0.5*a4*delta_t^2;
    v1=v1+a4*delta_t;
    n3=n3+1;
end
disp(' 排球下降到同一相同碰撞面时的速度为')
disp(v1)
temp=h-s1+s3-s4;
vp2=-v1;
t3=delta_t*n3;
v21=0;
%计算使排球再次上抛到同一高度，鼓需要的速度
v22=((M+m)*vp2-(m-M)*vp)/2*M;
disp(' 使排球再次上抛到同一高度，鼓需要的矢
量速度为')
disp(v22)
v22=-v22;
F1=108;%需要的力

```



```

theta1=deg2rad(80);%需要的夹角
T1=F1*cos(theta1);
L11=L*cos(theta1);
s5=0;
n4=0;
while v21<v22&&v21>=0
    a5=(8*T1-M*g)/M;
    s5=s5+v21*delta_t+0.5*a5*delta_t^2;%
    鼓需要上升的高度
    v21=v21+a5*delta_t;
    T1=F1*(L11-s5)/L;
    n4=n4+1;
end
t4=n4*delta_t;

%% 问题 2
clc,clear
load('data.mat');% 发力时机（单位：s）和
用力大小（单位：N）取值
R=0.2;%鼓的半径
l=0.11;%初始位置较绳子水平时下降 11cm
L=1.7;%绳长
n=1;
for i=2:2:18
    for j=1:8
        t(n,j)=data(i,j);%发力时机
        F(n,j)=data(i+1,j);%用力大小
    end
    n=n+1;
end
theta=acos(l/L);
J=0.25*3.6*R^2;%转动惯量
%%第一阶段
for i=1:9
    for j=1:8
        if t(i,j)==0
            F1(i,j)=0;
        else
            F1(i,j)=F(i,j);
        end
    end
end
end
for i=1:9
    for j=1:8

```

```

M1(i,j)=R*F1(i,j)*sin(0.5*pi+theta);%转动
力矩
        switch(j)
            case 1
                Mx1(i,j)=0;%x 轴方向
                上的转动力矩分量
                My1(i,j)=-M1(i,j);%y
                方向上的转动力矩分量
            case 2
                Mx1(i,j)=M1(i,j)*sin(-pi/4);
                My1(i,j)=M1(i,j)*cos(-pi/4);
            case 3
                Mx1(i,j)=M1(i,j);
                My1(i,j)=0;
            case 4
                Mx1(i,j)=M1(i,j)*sin(pi/4);
                My1(i,j)=M1(i,j)*cos(pi/4);
            case 5
                Mx1(i,j)=0;
                My1(i,j)=M1(i,j);
            case 6
                Mx1(i,j)=M1(i,j)*sin(3*pi/4);
                My1(i,j)=M1(i,j)*cos(3*pi/4);
            case 7
                Mx1(i,j)=-M1(i,j);
                My1(i,j)=0;
            case 8
                Mx1(i,j)=M1(i,j)*sin(5*pi/4);
                My1(i,j)=M1(i,j)*cos(5*pi/4);
        end
    end
    mx=sum(Mx1(i,:));%分量合成
    my=sum(My1(i,:));
    alphax=mx/J;%角加速度
    alphay=my/J;

```

```

        %第一阶段结束时的角末速度，即第二
        阶段的角初速度
        vx(i)=alphax*0.1;
        vy(i)=alphay*0.1;
        theta_x=0.5*alphax*0.1^2;
        theta_y=0.5*alphay*0.1^2;
        %第一阶段结束转动的角度
        angle1(i,1)=rad2deg(theta_x);
        angle1(i,2)=rad2deg(theta_y);
    end
%% 第二阶段
angle;
Angle=angle+angle1;%沿 x 轴转动和沿 y 轴转
动的转动角度
%两个角度合成得到最终鼓面角度
for i=1:9

    line(i,1)=abs(2*sin(deg2rad(Angle(i,1)/2)
));

    line(i,2)=(2*sin(deg2rad(Angle(i,2)/2)));

    line(i,3)=sqrt(line(i,1)^2+line(i,2)^2);
        finalangle(i)=rad2deg(acos((2-
line(i,3)^2)/2));
    end
    disp('鼓面倾角(单位: °)分别为');
    disp(finalangle)

%% 问题 3
clc,clear
global Theta;
h=0.6;
eta=1.983e-5;%空气粘滞系数
delta_t=0.0001;
m=0.27;
g=9.8;
r=0.105;%排球半径
finalangle=2.058;
oneangle=finalangle;
count=10;
while count%直到排球路径已经近似回到垂直
位置，仿真结束
    s1=0;

```

```

    v10=0;
    n1=0;
    while s1<0.6
        f=6*pi*eta*r*v10;
        a=(m*g+f)/m;
        s1=s1+v10*delta_t+0.5*a*delta_t^2;
        v10=v10+a*delta_t;
        n1=n1+1;
    end
    t1=n1*delta_t;
    t2=0;
    s2=0;
    v20=v10*tan(deg2rad(finalangle));
    while t2<t1
        f=6*pi*eta*r*v20;
        a1=f/m;
        s2=v20*delta_t-0.5*a1*delta_t^2;
        v20=v20-a1*delta_t;
        t2=t2+delta_t;
    end
    s3=0;
    n2=0;
    V10=0;
    while s3<0.6
        f=6*pi*eta*r*V10;
        a2=(m*g-f)/m;
        s3=s3+V10*delta_t+0.5*a2*delta_t^2;
        V10=V10+a2*delta_t;
        n2=n2+1;
    end
    t3=n2*delta_t;
    t4=0;
    s4=0;
    while t4<t3
        f=6*pi*eta*r*v20;
        a3=f/m;
        s4=s4+v20*delta_t+0.5*a3*delta_t^2;
        v20=v20-a3*delta_t;
        t4=t4+delta_t;
    end
    Theta=0.5*atan(v20/V10);
    Theta=rad2deg(Theta);

```

```

    sign=1;
    while sign
        %% 遗传算法开始
        sign=sign-1;
    end
    finalangle=abs(2*finalangle-oneangle);
    oneangle=finalangle;
    disp('考虑到实际情况后误差角剩余大小')
    disp(oneangle)
    count=count-1;
end
disp(' 仿真结束')

%% 问题 4
clc,clear
global Theta;
h=0.6;%球的反弹高度
eta=1.983e-5;%空气粘滞系数
delta_t=0.0001;%反弹时间
s1=0;%上升高度
m=0.27;%球的质量
g=9.8;
r=0.105;%排球半径
v10=0;
n1=0;
while s1<h
    f=6*pi*eta*r*v10;
    a=(m*g+f)/m;
    s1=s1+v10*delta_t+0.5*a*delta_t^2;
    v10=v10+a*delta_t;
    n1=n1+1;
end
t1=n1*delta_t;
t2=0;
s2=0;
v20=v10*tan(deg2rad(1));
while t2<t1

    f=6*pi*eta*r*v20;%空气阻力
    a1=f/m;
    s2=v20*delta_t-0.5*a1*delta_t^2;
    v20=v20-a1*delta_t;
    t2=t2+delta_t;
end
s3=0;%下降高度
n2=0;
V10=0;
while s3<h
    f=6*pi*eta*r*V10;
    a2=(m*g-f)/m;
    s3=s3+V10*delta_t+0.5*a2*delta_t^2;
    V10=V10+a2*delta_t;
    n2=n2+1;
end
t3=n2*delta_t;
t4=0;
s4=0;
while t4<t3
    f=6*pi*eta*r*v20;
    a3=f/m;
    s4=s4+v20*delta_t+0.5*a3*delta_t^2;
    v20=v20-a3*delta_t;
    t4=t4+delta_t;
end
Theta=0.5*atan(v20/V10);%速度方向
Theta=rad2deg(Theta);
sign=1;
while sign
    %% 遗传算法开始
    finalangle=2*rad2deg(acos((2-
line(3)^2)/2))%用于验证
    jiajiao=0.5*pi-acos(line(1)/line(3));
    jiajiao=rad2deg(jiajiao);
end

```