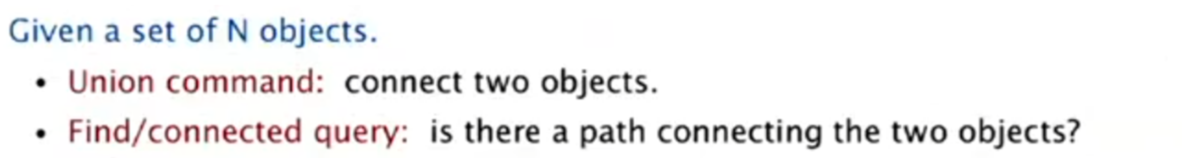
UNION FIND - dynamic connectivity

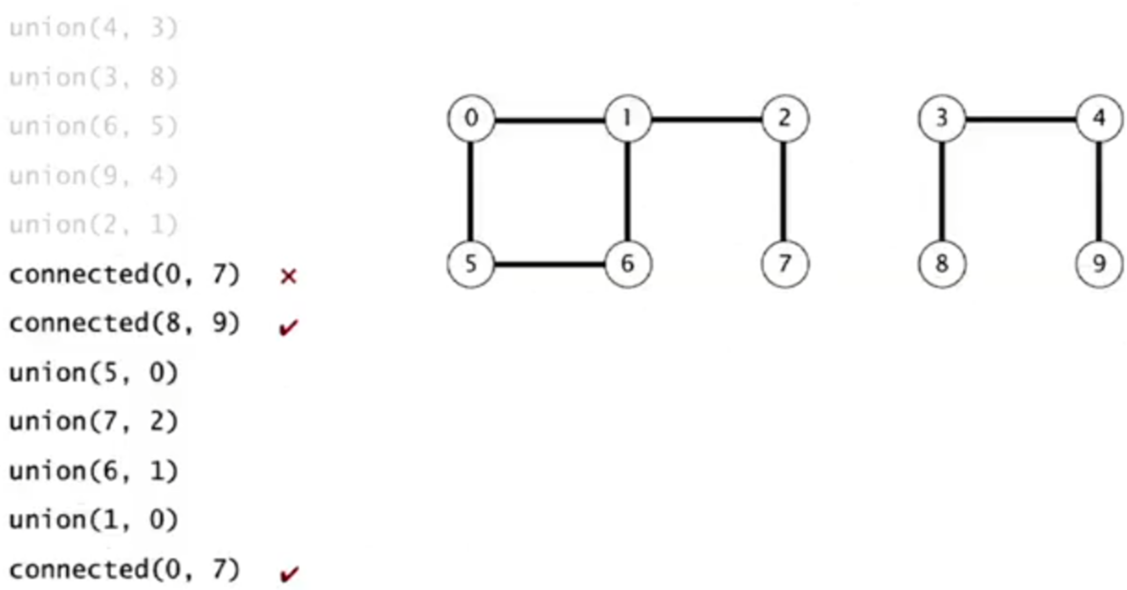
Subtext

如何编一个高效的程序:

- 为问题建模
- 找到一个合适的算法
- 分析算法运行的时间，所需的空间大小
- 优化

dynamic connectivity 动态连通性





算法的目的:

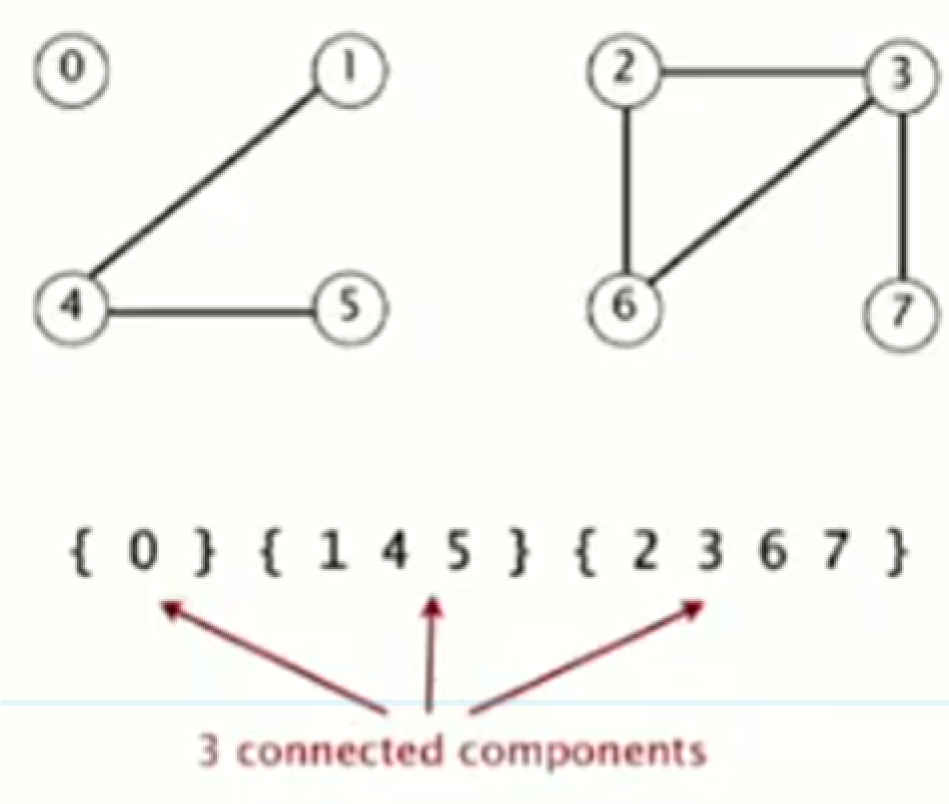
回答问题：两点之间是否存在通路?

Modeling

并查集问题在实际中可能有许多不同的应用场景，但是在编程实现的算法中，我们选取 $0, N-1$ 作为各个节点的代替（利用整型变量来对问题进行简化描述）。

此外我们还需要定义这个图之中的一些性质:

- 连通性：p，q是存在连接通路的
- 对称性：如果p，q是连通的；则q，p也是连通的
- 传递性：如果p，q是连通的；q，r也是连通的；则p，r是连通的
- 连通分量：互相连接的最小图（集合）**connected components**



连通分量性质:

- 连通分量中的所有节点都是互相关连通的
- 连通分量中的节点不与连通分量之外的节点连通

算法需要进行的操作（函数）：

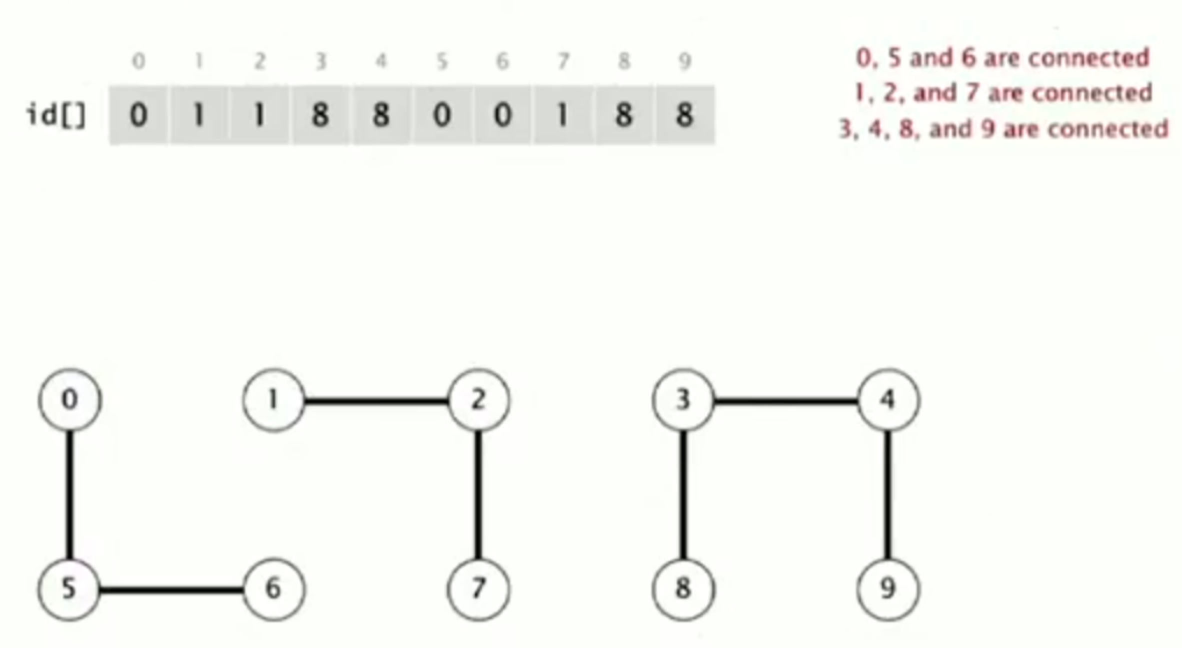
- Find query：检查两个节点之间是否是连通的
- Union：将两个连通分量合并

```
public class UF:
        UF(int N)
        void union (int p, int q)
        boolean connected(int p, int q)
```

Solution 1: Quick -find [eager approach]

数据结构:

- 整型数组 $id[]$ （大小为N）
- p，q是连通的当且仅当他们有着相同的id值



功能函数：

- Find：判断p，q是否连通；直接比较两者的id值即可
- Union：将id值都变为约定好的值（实现简单，但对于较大数目的节点有待改进）

```
#流程
#初始化
id[10] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
union(4, 3)
#算法统一将id值定为union的第二个参数
id[10] = [0, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 9]
#更新id值的时候要注意，需要更新所有连通分量中的id值
... ...
```

Java实现：

```java
public class QuickFindUF
{
    private int[] id;

    public QuickFindUF(int N)
    {
        id = new int[N];
        for (int i = 0; i < N; i++)
            id[i] = i;
    }

    public boolean connected(int p, int q)
    {
        return id[p] == id[q];
    }

    public void union(int p, int q)
    {
        int pid = id[p];
        int qid = id[q];
        for(int i = 0; i < id.length; i++)
```

```
                if(id[i] == pid) id[i] = qid;
        }
    }
```

python 实现;

```
class QuickFindUF:
    def __init__(self, N):
        self.id = list(range(N))

    def connected(self, p, q):
        return self.id[p] == self.id[q]

    def union(self, p, q):
        pid = self.id[p]
        qid = self.id[q]
        for i in range(len(self.id)):
            if self.id[i] == pid:
                self.id[i] = qid
```

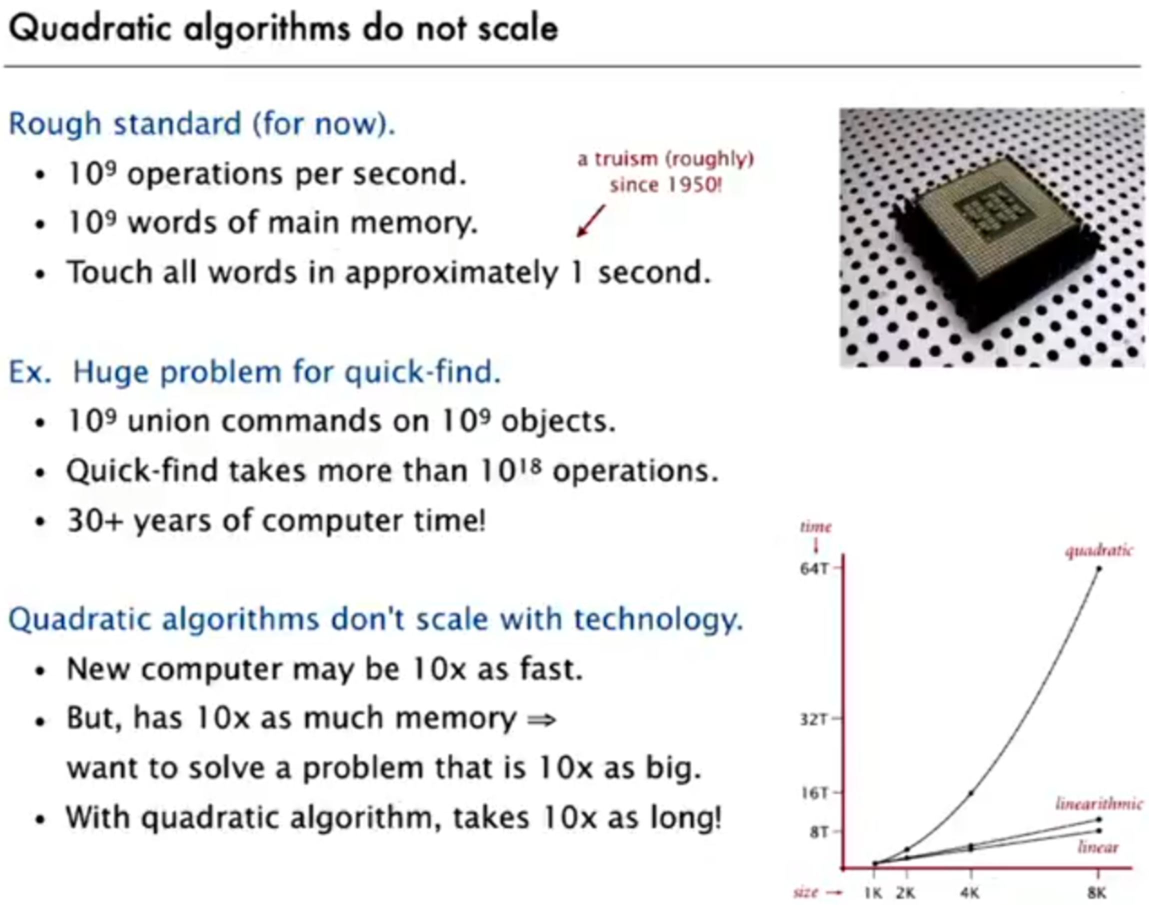
algorithm	initialize	union	find
QuickFind	N	N	1

总结:

快速查找算法不利于解决大问题 huge problems

这种算法在时间量级上是不合理的，虽然简单但是在现实问题中的时间复杂度是不可接受的。例如对N个节点进行union操作就要花费 N^2 的时间，对于构建高效的算法来说，这是过于复杂的。

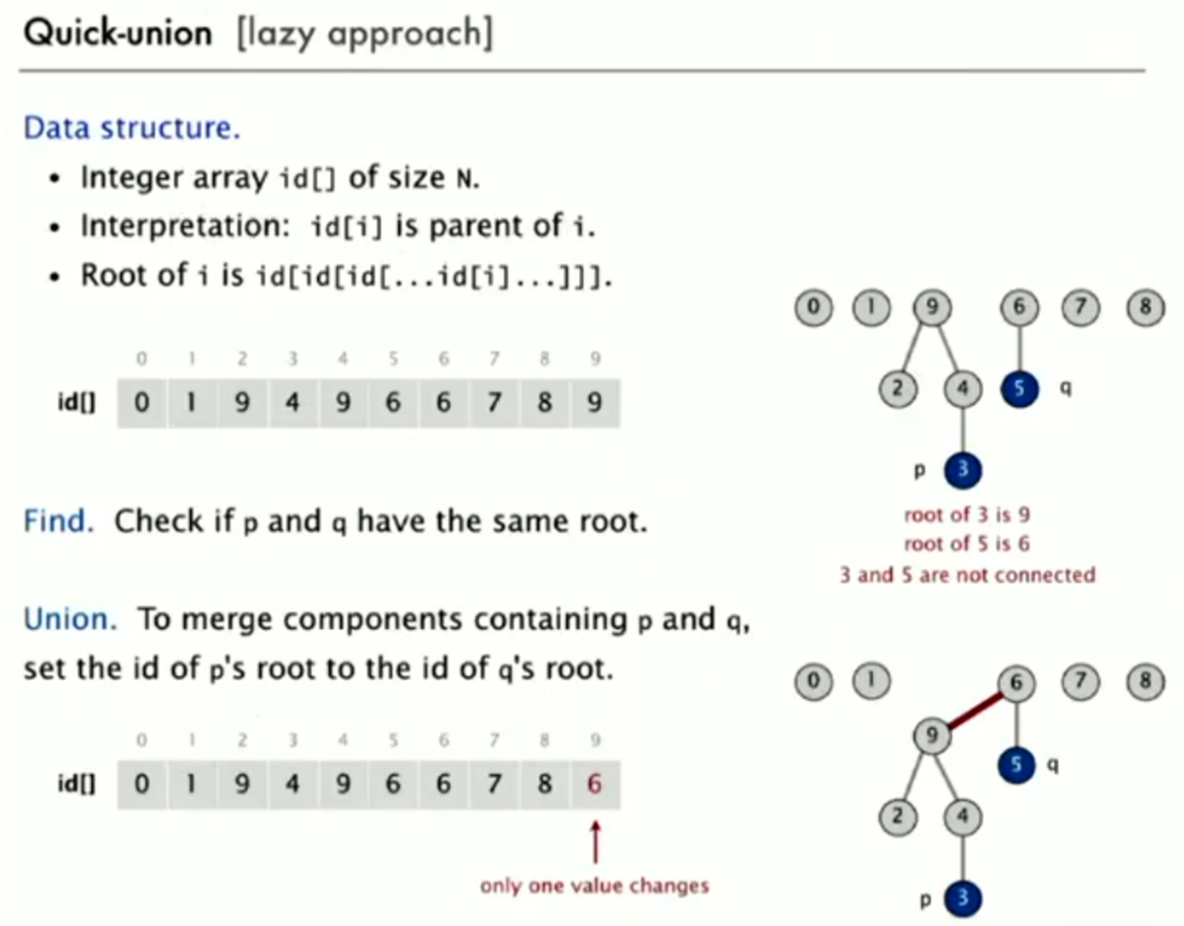
quadratic time is unacceptable



Solution 2: Quick-Union [lazy approach]

数据结构：

- 整型数组 $id[]$ （大小为N）
- 定义id[i]的值是该节点的父节点的id（该算法将各个连通分量维护为一个树型结构）
- 确定根节点：id[id[id[... id[i]...]]]



功能函数：

- Find：判断p，q是否连通；直接比较两者的root节点是否相同即可
- Union(p, q)： p节点的root连接到q节点的root上

java 实现

```
public class QuickUnionUF
{
    private int[] id;

    public QuickUnionUF(int N)
    {
        id = new int[N];
        for (int i = 0; i < N; i++)
            id[i] = i;
    }

    private int root(int i)
    {
        while (id[i] != i) i = id[i];
        return i;
    }

    public boolean connected(int p, int q)
    {
        return root(p) == root(q);
    }

    public void union(int p, int q)
```

```
    {
        int i = root(p);
        int j = root(q);
        id[i] = j;
    }
}
```

python 实现

```
class QuickUnionUF:
    def __init__(self, N):
        self.id = list(range(N))

    def root(self, i):
        while self.id[i] != i:
            i = self.id[i]
        return i

    def connected(self, p, q):
        return self.root(p) == self.root(q)

    def union(self, p, q):
        i = self.root(p)
        j = self.root(q)
        self.id[i] = j
```

algorithm	initialize	union	find
Quickunion	N	N↑	N

总结:

对于快速合并算法，采取的优化策略是有针对的对数据结构进行更新。避免了在合并的时候进行多次无用的索引更新。

但是同样的，这个算法也不是完美的。他不适合需要大量操作的场景，在构建连通分量树的时候，我们并没有对树的结构进行优化，因此可能出现的情况是：树的结构大概率是冗杂的，他可能非常高瘦。这就导致在查找root索引的时候会浪费大量的时间。

Improvement 1 weighting

针对quick union方法中可能出现高树的情况，可以采取的 优化措施是更新带权树。

目标如下：

- 记录每个树的节点个数
- 将小树连接到大树上从而实现更平衡的树

这样生成的树虽然不是绝对平衡的，但是在相比于原来平均高度有着极大的缩减。

代码方面，需要更新的数据结构是size[]，用来记录对应树的节点个数。

running time分析

find：和节点的深度成正比

union： 常数时间的复杂度

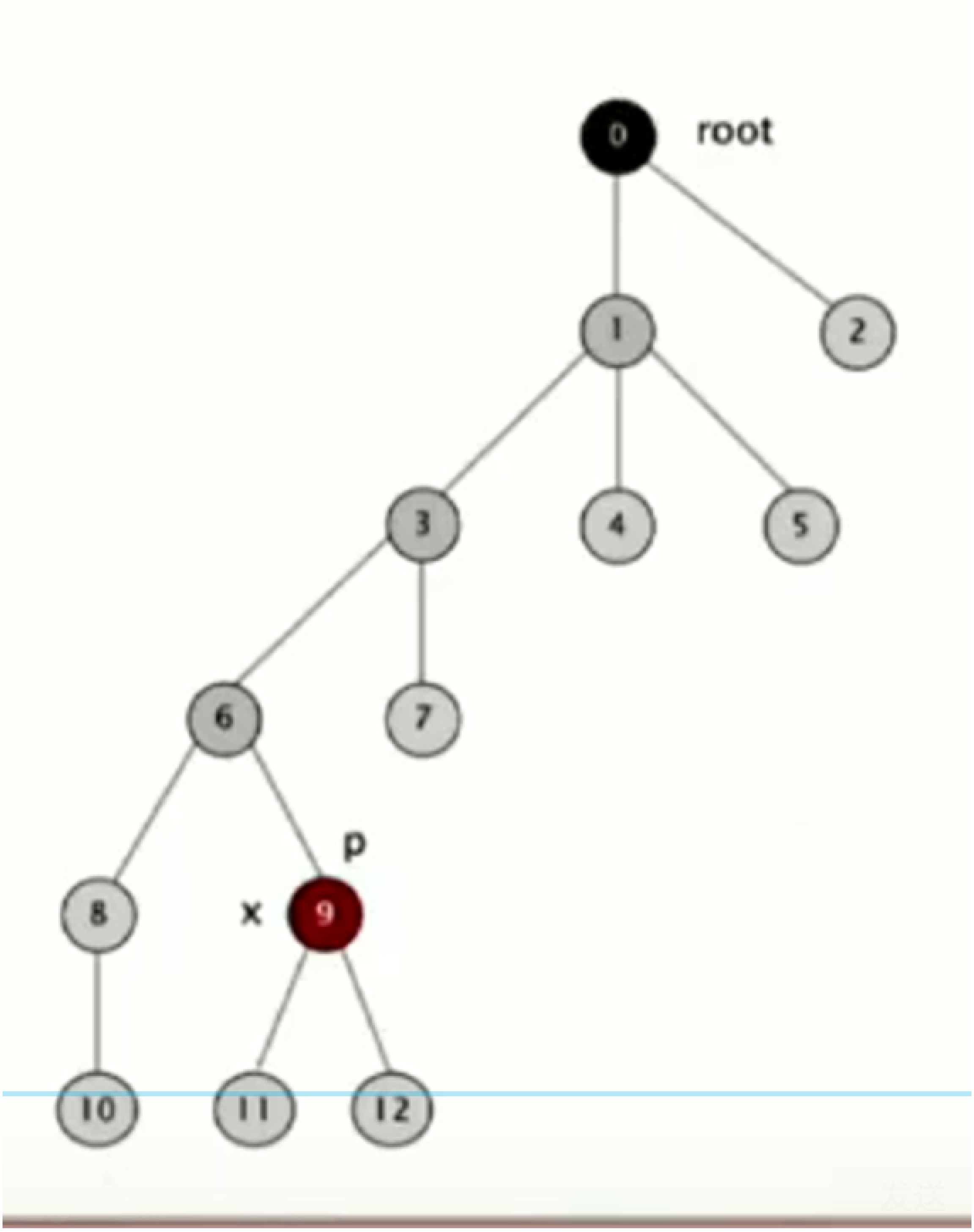
结论：节点的深度至多是 $log_2 N$ 级别的 (当两个树进行合并的时候，总是小的树合并到大的树中。树中节点的个数至多会翻一倍，因此当最后所有节点都加入到同一颗树中时，对于 N 个节点来说，需要合并 lgN 次)

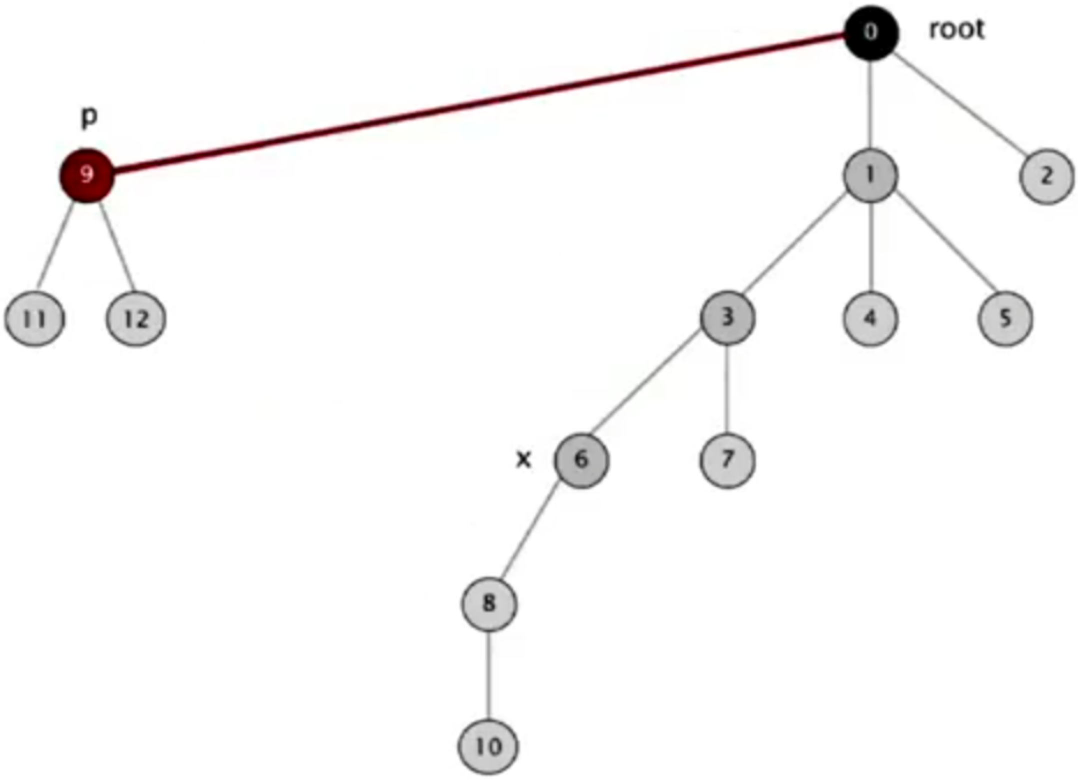
Algorithm	initialize	find	union
Improvement 1 weighted	N	lgN	lgN

Improvement 2 path compression

在带权树的基础上，对树进行进一步的优化。在计算节点对应的root时，算法需要从节点开始遍历。事实上，可以对树进行铺平的操作，即每个节点在计算root的时候就将遍历时的根节点进行更新。更新的代码如下

```
private int root(int i)
{
    while (i != id[i])
    {
        id[i] = id[id[i]];
        i = id[i];
    }
    return i;
}
```


0
root
1
2
3
4
5
6
7
p
8
x
9
10
11
12



对于N个对象，进行M次union find操作的时间复杂度 ≤ $c(N+Mlg^*N)$，其中 lg^*N 是迭代对数函数。是指取多少次对数可以将N变为1。在现实生活中，我们普遍认为这个函数的值域是≤5的。（$lg^*2^{65536}=5$）

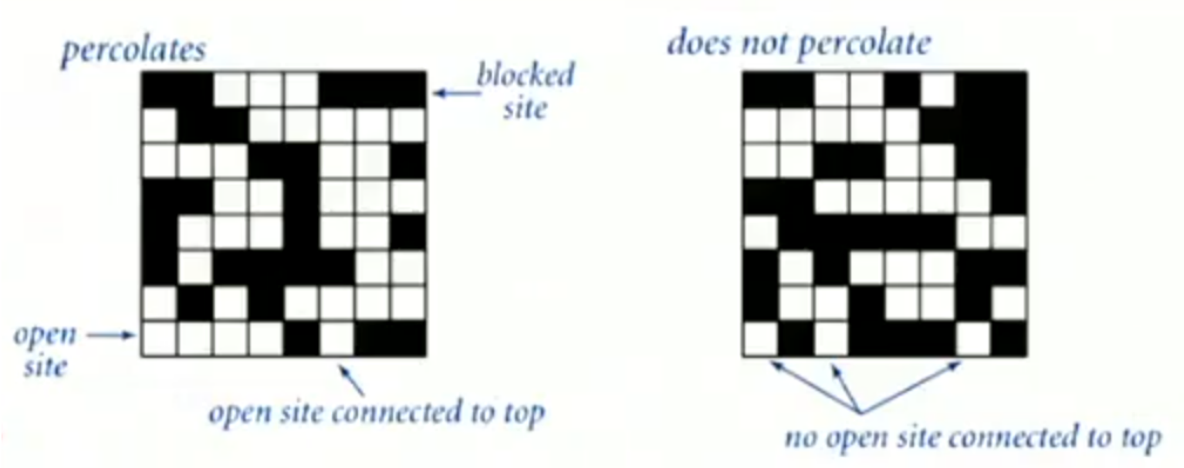
因此，压缩路径的带权快速合并算法可以被认为是**几乎线性时间的复杂度。**

并查集问题并**不存在线性时间复杂度的算法**（已证明）

Algorithm	worst-cost time
quick-find	MN
quick-union	MN
weighted QU	$N+MlogN$
QU + path compression	$N+MlogN$
weighted QU + path compression	$N+Mlg^*N$

Application

渗滤系统（上下是否连通）

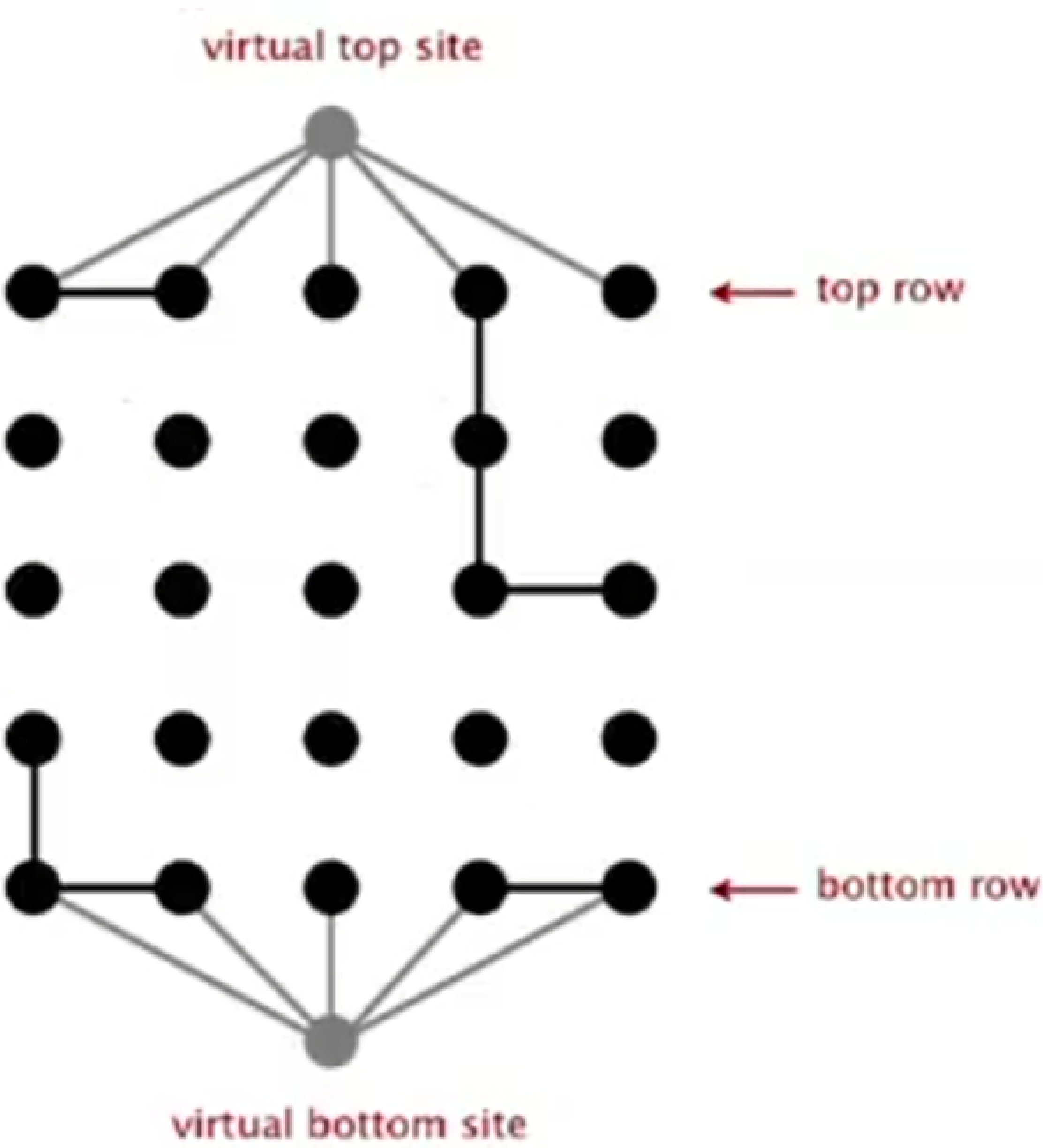


每个位（方格）的开放概率是p，该模型可以应用到很多实际的问题中（电力系统，网络结构，社交网络等等）

当系统中的位以某种概率进行开放的时候，确定的系统是否是渗滤是容易的，但是渗滤存在的阈值时难以用数学方法进行确定的。

我们可以采用蒙特卡罗仿真的手段对系统进行测试，通过随机开放位直到系统是渗滤的，经过不断重复实验最终找到阈值概率。

为了避免在验证上下N位是否连通时使用暴力查找，可以规定一个虚拟的连通位，如下：



这样可以在常数时间内确定上下是否连通。