

**Диференциални уравнения и приложения с  
Mathematica, Matlab и Maple**

2023/2024

Проект 2

**Задача 1.** Дадена е задачата за уравнението на топлопроводността

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - x \sin(\pi x) & 0 < x < 4, \quad t > 0 \\u(0, t) &= 0 & , t > 0 \\u(4, t) &= 0 & , t > 0 \\u(x, 0) &= \begin{cases} |x-2| - 1 & \text{за } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{за } 0 < x < 1 \text{ и } 3 < x < 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Решението на задачата с метода на Фурие се дава чрез формулите

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2 t} + B_k \right) \sin \frac{k\pi x}{4},$$

където

$$A_k = -B_k + \frac{1}{2} \int_1^3 (|x-2|-1) \sin \frac{k\pi x}{4} dx; \quad B_k = -\frac{8}{k^2 \pi^2} \int_0^4 x \sin(\pi x) \sin \frac{k\pi x}{4} dx.$$

За парциалната сума  $U_m(x, t)$  от първите  $m = 45$  члена на реда, направете анимация от графиките на функциите  $U_m(x, t_0)$  за фиксирано време  $t_0$ , като на  $t_0$  задавате последователно стойности от 0 до 0.8 със стъпка 0.01.

**Задача 2.** Дадена е смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\u(0, t) &= 0 & , t > 0 \\u(3, t) &= e^{-t} \sin 7t & , t > 0 \\u(x, 0) &= \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{за } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{за } 1 < x < 3, \end{cases} \\u_t(x, 0) &= 0 & , 0 < x < 3.\end{aligned}$$

Решете приближено задачата за  $t \in [0, 3]$  с помощта на диференчна схема с подходяща стъпка. Направете анимация от графиките на функцията в отделните слоеве.