Projet de mathématiques

1 Interpolation polynomiale

1.1 Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ points du plan de coordonnées (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Existe-t-il un polynôme passant par ces n points c'est-à-dire existe-t-il un polynôme P tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$? La réponse est oui ! Plus précisément, il existe un unique polynôme P_n de degré n passant par ces $n+1$ points. L'interpolation polynomiale consiste précisément à exhiber ce polynôme connaissant les coordonnées des $n+1$ points.
Il existe plusieurs méthodes de construction de P_n, je vous propose d'exposer la méthode de Lagrange.
Dans ce projet, vous devrez implémenter cette méthode pour $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$.

1.2 Polynômes de Lagrange

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les polynômes de Lagrange notés L_i sont définis de la manière suivante :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Par exemple

$$L_1(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_2) \cdots (X - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}$$

ou encore

$$L_3(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)(X - x_4) \cdots (X - x_n)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \cdots (x_3 - x_n)}$$

Ces polynômes jouissent d'une propriété remarquable : pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Vous pouvez vérifier cette propriété : par exemple,

$$L_1(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} = 1$$

$$L_1(x_2) = \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)\cdots(x_2 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)} = 0$$

et plus généralement si $j \neq 1$,

$$L_1(x_j) = 0 \quad \text{puisque le facteur } (x_j - x_j) \text{ apparaît nécessairement au numérateur.}$$

1.3 Interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n, de degré n, associé aux $n+1$ points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) est défini par

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$$

c'est-à-dire

$$P_n(X) = y_0 L_0(X) + y_1 L_1(X) + \cdots + y_n L_n(X)$$

Donnons à présent trois exemples.

Exemple 1

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 passant par les trois points $(0, 1)$, $(2, 5)$ et $(4, 17)$.

On a donc ici $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $y_0 = 1$, $y_1 = 5$, $y_2 = 17$.

Ainsi en appliquant la formule de la section précédente,

$$P_2(X) = L_0(X) + 5L_1(X) + 17L_2(X)$$

or, via les formules des polynômes de Lagrange L_i, on a

$$L_0(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(X-2)(X-4)}{8}$$

$$L_1(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{X(X-4)}{-4}$$

$$L_2(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{X(X-2)}{8}$$

Ainsi

$$P_2(X) = \frac{1}{8}(X-2)(X-4) - \frac{5}{4}X(X-4) + \frac{17}{8}X(X-2)$$

soit en développant

$$P_2(X) = \frac{1}{8}(X^2 - 6X + 8 - 10X^2 + 40X + 17X^2 - 34X) = \frac{1}{8}(8X^2 + 8)$$

soit finalement

$$P_2(X) = X^2 + 1$$

Vous pouvez aisément vérifier que $P_2(0) = 1$, $P_2(2) = 5$ et $P_2(4) = 17$

Exemple 2

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 passant par les trois points $(-2, -43)$, $(1, 8)$ et $(6, 13)$.

On a donc ici $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ et $y_0 = -43$, $y_1 = 8$, $y_2 = 13$.

Ainsi en appliquant la formule de la section précédente,

$$P_2(X) = -43L_0(X) + 8L_1(X) + 13L_2(X)$$

or, via les formules des polynômes de Lagrange L_i, on a

$$L_0(X) = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(X-1)(X-6)}{24}$$

$$L_1(X) = \frac{(X-x_0)(X-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(X+2)(X-6)}{-15}$$

$$L_2(X) = \frac{(X-x_0)(X-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(X+2)(X-1)}{40}$$

Ainsi

$$P_2(X) = -\frac{43}{24}(X-1)(X-6) - \frac{8}{15}(X+2)(X-6) + \frac{13}{40}(X+2)(X-1) \qquad (*)$$

soit après développement et simplification

$$P_2(X) = -2X^2 + 15X - 5 \qquad (**)$$

Vous pouvez aisément vérifier que l'on a bien, comme prévu, $P_2(-2) = -43$, $P_2(1) = 8$ et $P_2(6) = 13$

N.B. : remarquez au passage qu'il est fastidieux de simplifier à la main l'équation $(*)$ afin d'obtenir l'équation $(**)$. Une des phases de votre projet sera précisément d'implémenter cette simplification.

Exemple 3

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_3 passant par les quatre points $(-2, -32)$, $(-1, 26)$, $(0, 30)$ et $(1, 28)$

On a donc ici $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $y_0 = -32$, $y_1 = 26$, $y_2 = 30$, $y_3 = 28$

Ainsi en appliquant la formule de la section précédente,

$$P_3(X) = -32L_0(X) + 26L_1(X) + 30L_2(X) + 28L_3(X)$$

or, via les formules des polynômes de Lagrange L_i, on a

$$L_0(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(X + 1)X(X - 1)}{-6}$$

$$L_1(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(X + 2)X(X - 1)}{2}$$

$$L_2(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(X + 2)(X + 1)(X - 1)}{-2}$$

$$L_3(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(X + 2)(X + 1)X}{6}$$

Ainsi

$$P_3(X) = \frac{32}{6}(X+1)X(X-1) + \frac{26}{2}(X+2)X(X-1) - \frac{30}{2}(X+2)(X+1)(X-1) + \frac{28}{6}(X+2)(X+1)X$$

soit encore

$$P_3(X) = \frac{16}{3}(X+1)X(X-1) + 13(X+2)X(X-1) - 15(X+2)(X+1)(X-1) + \frac{14}{3}(X+2)(X+1)X$$

soit après développement et simplification

$$P_3(X) = 8X^3 - 3X^2 - 7X + 30$$

Vous pouvez aisément vérifier que l'on a bien, comme prévu, $P_3(-2) = -32$, $P_3(-1) = 26$, $P_3(0) = 30$ et $P_3(1) = 28$.

2 Votre projet

Ce projet est à réaliser par groupe de deux. Il doit comprendre une interface web et les fonctions mathématiques doivent être implémentées en PHP.

2.1 Phase 1

Vous devez implémenter les développements de tout polynôme de la forme

$$(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$$

pour $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$ pour x_0, x_1, ..., x_n donnés.
Plus précisément, vous devez afficher

$$n =$$

puis après avoir rentré ce nombre, vous devez afficher (avec le bon indice n choisi précédemment)

$$x_0 =$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$\vdots$$

$$x_n =$$

Votre programme doit ensuite afficher le résultat du développement sous la forme d'un polynôme développé $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ avec les bons coefficients a_n, a_{n-1}, ..., a_0.

Exemple : $n = 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.

Votre programme doit permettre de déterminer le développement de $(X-2)X(X-3)$ en affichant à la fin

$$(X-2)X(X-3) = X^3 - 5X^2 + 6X$$

2.2 Phase 2

Vous devez implémenter la construction du polynôme d'interpolation P_n (***non simplifié*** c'est-à-dire sous la forme dans l'exemple 2 de l'équation $(*)$).
Plus précisément, vous devez afficher

$$n =$$

puis après avoir rentré ce nombre, vous devez afficher (avec le bon indice n choisi précédemment)

$$(x_0, y_0) =$$

$$(x_1, y_1) =$$

$$(x_2, y_2) =$$

$$\vdots$$

$$(x_n, y_n) =$$

Puis votre programme doit ensuite afficher le résultat de P_n non simplifié.
Exemple : $n = 2$, $(x_0, y_0) = (-2, -43)$, $(x_1, y_1) = (1, 8)$ et $(x_2, y_2) = (6, 13)$.

Votre programme doit afficher

$$P_2(X) = -\frac{43}{24}(X-1)(X-6) - \frac{8}{15}(X+2)(X-6) + \frac{13}{40}(X+2)(X-1)$$

2.3 Phase 3

Votre programme doit permettre à présent d'afficher le résultat de la phase 2 sous la forme d'un polynôme développé.
Par exemple, en reprenant l'exemple donné dans la phase 2, votre programme doit afficher

$$P_2(X) = -2X^2 + 15X - 5$$

Si les coefficients a_i de $P_n(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ ne sont pas des entiers, vous devez les afficher sous forme d'une fraction irréductible.