Rattrapage Projet Mathématiques

Nombres complexes

Table des matières

I Introduction

On travaille en mathématiques avec différents ensembles de nombres :

- l'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- l'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- l'ensemble des **décimaux**, noté $\mathbb{D}$. Un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10, $\frac{a}{10^n}$, par exemple $\frac{32}{100}$, mais aussi $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Les nombres décimaux sont ceux qui ont une écriture décimale finie.
- l'ensemble des **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$. Un nombre rationnel est le quotient a/b d'un entier relatif a par un entier naturel non nul b. Les nombres rationnels sont ceux qui ont une écriture décimale périodique.
- l'ensemble des **réels**, noté $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble de tous les nombres usuels. Parmi eux, on trouve $\sqrt{2}$ ou π.

Tous les nombres positifs ont une racine carrée. Par exemple, 9 a pour racines carrées 3 et -3 c'est-à-dire que $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$.
Par contre, aucun réel négatif n'a de racine carrée (réelle). Les nombres complexes offrent la possibilité de pallier à cette injustice !

I.1 Le nombre i

Le nombre i est un nombre dont le carré vaut -1. Ainsi, $i^2 = -1$.
De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = i^2 = -1$.
Les deux racines de -1 sont les deux nombres irréels i et $-i$.

I.2 L'ensemble des nombres complexes

On connait déjà 5 ensembles permettant de "ranger" les nombres : il s'agit de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 1
On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ qui a les caractéristiques suivantes :

- ➤ *Ses éléments sont appelés nombres complexes,*
- ➤ *Il contient le nombre i vérifiant $i^2 = -1$.*

II Forme algébrique

II.1 Définition

Définition 2
Chaque élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$, a et b étant des réels.

- *a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathfrak{Re}(z)$,*
- *b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathfrak{Im}(z)$.*

Remarque 1
Nombres particuliers :

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est donc réel,
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur.

Exemple 1
Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

➔ $z = 2 + 3i$	$a = 2$	$b = 3$
➔ $z = -1 + \frac{1}{2}i$	$a = -1$	$b = \frac{1}{2}$
➔ $z = -i$	$a = 0$	$b = -1$
➔ $z = \pi$	$a = \pi$	$b = 0$
➔ $z = 4i - \frac{1}{3}$	$a = -\frac{1}{3}$	$b = 4.$

Propriété 1
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'.$$

II.2 Premiers calculs

Propriété 2
On pose $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et k un réel, on a :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $z - z' = (a - a') + i(b - b')$,
- $kz = ka + ikb$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Démonstration de la dernière propriété :

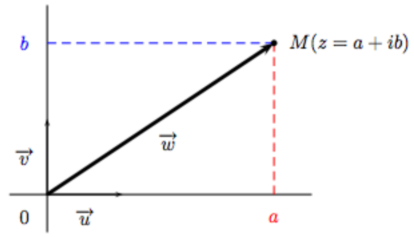
$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b + i^2bb' \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b). \end{aligned}$$

Exemple 2
Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$, on a :

- ➔ $z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$,
- ➔ $z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$,
- ➔ $2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i$,
- ➔ $zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i$,
- ➔ $z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

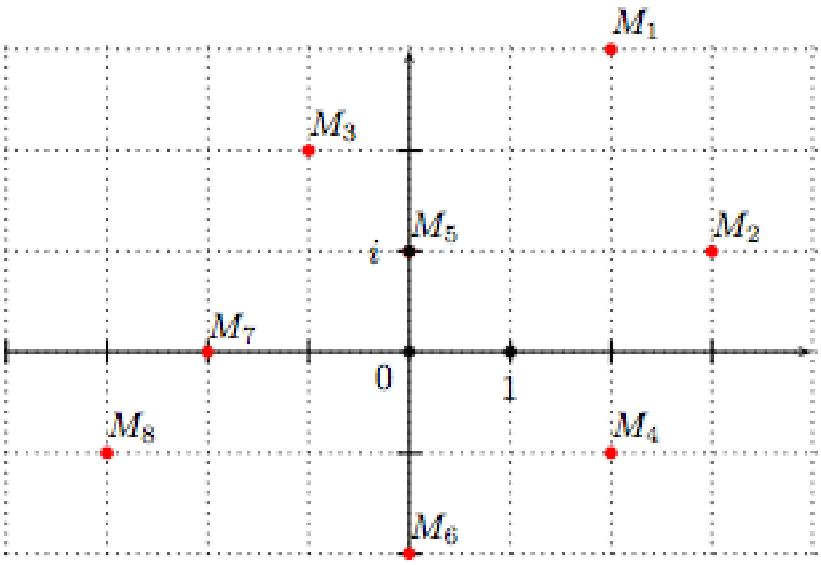
II.3 Représentation graphique

Définition 3
Au point M de coordonnées $(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,



Exemple 3
On place dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i :

- ➔ $z_1 = 2 + 3i$
- ➔ $z_2 = 3 + i$
- ➔ $z_3 = -1 + 2i$
- ➔ $z_4 = 2 - i$
- ➔ $z_5 = i$
- ➔ $z_6 = -2i$
- ➔ $z_7 = -2$
- ➔ $z_8 = -i - 3$



Propriété 3
Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, alors :

- ♦ Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$,
- ♦ $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- ♦ $||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$,
- ♦ Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$.

II.4 Conjugué d'un complexe

Définition 4
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Géométriquement, si M_1 est le point d'affixe z, le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 4
Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$, on a :

- ➔ $z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i) = 1 + 8i$,
  $z \times z' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i$.
- ➔ $\overline{z} = 3 - 5i$,
  $\overline{z'} = -2 - 3i$.
- ➔ $\overline{z} + \overline{z'} = (3 - 5i) + (-2 - 3i) = 1 - 8i$,
  $\overline{z + z'} = 1 - 8i$.
- ➔ $\overline{z} \times \overline{z'} = (3 - 5i) \times (-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i$,
  $\overline{z \times z'} = -21 + i$.

Propriété 4
Soit z et z' deux nombes complexes, alors :

- ♦ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- ♦ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- ♦ $\overline{\overline{z}} = z$.
- ♦ $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
- ♦ $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$.
- ♦ $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.
- ♦ $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

II.5 Inverse d'un complexe

Soit $z = a + ib$, on a : $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ qui est un nombre réel.
Ainsi, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Exemple 5
Calculs d'inverses :

- ➔ $\frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
- ➔ $\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$.
- ➔ $\frac{2}{i} = \frac{2 \times -i}{i \times -i} = \frac{-2i}{1} = -2i$.
- ➔ $\frac{2 + i}{-3 + i} = \frac{(2 + i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{-6 - 2i - 3i + 1}{10} = \frac{-5 - 5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Propriété 5
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

- ♦ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
- ♦ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

III Forme trigonométrique

III.1 Module d'un nombre complexe

Définition 5
Le <u>module</u> du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 2
Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{a\, a} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6
Calcul du module de nombres complexes :

- ➔ $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
- ➔ $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.
- ➔ $|-5 - 2i| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.
- ➔ $|-5| = 5$.
- ➔ $|9i| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9$.

Propriété 6

- ♦ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- ♦ $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- ♦ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- ♦ $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
- ♦ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

III.2 Argument d'un complexe non nul

Définition 6
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z :

- ➤ *On appelle <u>argument</u> de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[\ 2\pi]$,*
- ➤ *On note $\theta = \arg(z)$,*
- ➤ *θ vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$

Exemple 7
Calcul d'un argument de nombres complexes :

➔ $z_1 = 2 + 2i$: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \dfrac{\pi}{4}$.

➔ $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \arg(1 + \sqrt{3}i) = \dfrac{\pi}{3}$.

Propriété 7
Propriétés algébriques des arguments :
- ♦ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
- ♦ $\arg(\frac{1}{z}) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
- ♦ $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

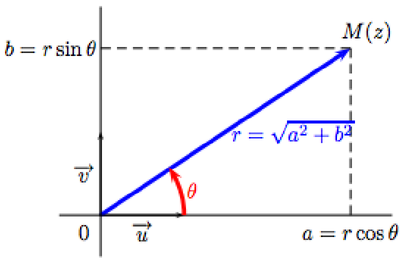
Exemple 8
D'après l'exemple précédent, on obtient :
- ➔ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.
- ➔ $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$.
- ➔ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

III.3 Ecriture trigonométrique

On se place dans un plan muni du repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Définition 7
Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec :
- ➤ $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ *est l'argument de z*
- ➤ $|z| = r \in \mathbb{R}_*^+$ *est le module de z*

cette écriture s'appele la forme trigonométrique de z.



Pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre z, il faut donc calculer successivement le module et l'argument de z.

Exemple 9
Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

➔ $z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1+i| &= \sqrt{2} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

➔ $z_2 = \sqrt{3} + i : \begin{cases} \left|\sqrt{3}+i\right| &= 2 \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

IV Equations du second degré

Propriété 8
Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré où $a; b; c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 10
Résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^2 - 2z + 2 = 0$:

- $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2$.
- Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
- $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 + i$,
- $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 2i}{2} = 1 - i$.