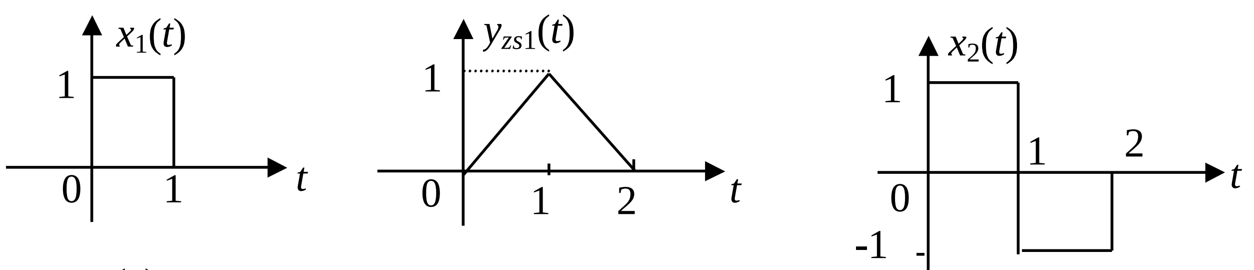
例题分析

例题1、一线性时不变系统的输入x_1（t）与零状态响应$y_{zs1}(t)$, 分别如图 (a)与(b)所示：

1). 求系统的冲激响应h（t），并画出h（t）的波形；

2). 当输入为图 (c)所示的信号x_2（t）时，画出系统的零状态响应$y_{zs2}(t)$的波形。



(a) (b) (c)

解:1)求系统响应

方法一：根据卷积定义，两个门信号的卷积为三角形或者梯形

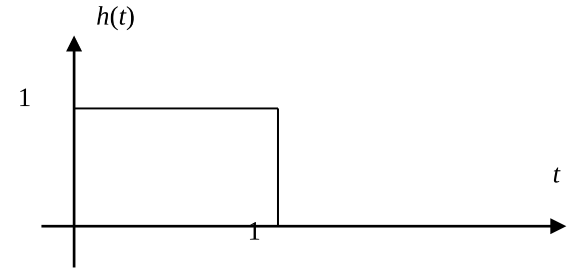
so：$h(t)=x_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$

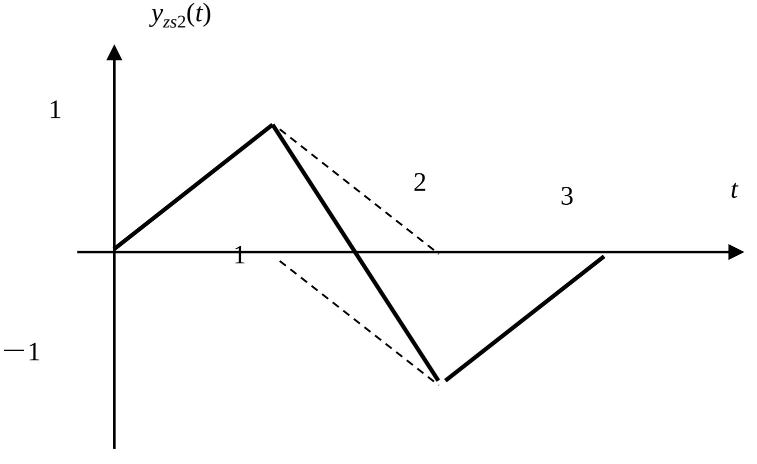
方法二：复频域分析

2）根据LTI系统特性

$x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-1)$

$y_{zs2}(t)=y_{zs1}(t)-y_{zs1}(t-1)$





例题2：计算

（1） $f(t)=\frac{1}{t}[1-e^{-2t}]\varepsilon(t)$ ， 求F(S),并标明收敛域。

（2） $F(S)=\frac{1}{(S+1)(1+2)},\mathrm{Re}(S)>-2$ ， 求f(t)并画出波形。

（3）计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos t dt$

解:1)

$$(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\xrightarrow{LT}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}$$

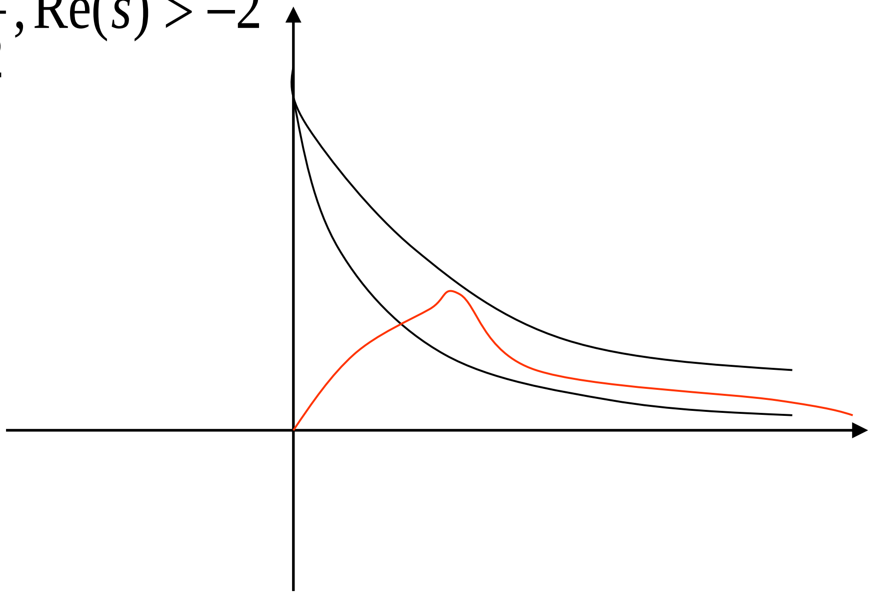
根据复频域积分性质:

$$\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\xrightarrow{LT}\int_s^{\infty}F(\lambda)d\lambda=\int_s^{\infty}(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+2})d\lambda=\ln\frac{\lambda}{\lambda+2}\Big|_s^{\infty}=\ln(1+\frac{2}{s}),\mathrm{Re}(s)>0$$

2)

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2},\mathrm{Re}(s)>-2$$

$$f(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\ \ \varepsilon(\mathrm{t})$$



3）计算：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos t dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(\mathrm{t})dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(\mathrm{t})e^{jwt}dt\Big|_{w=0}=F(jw)\Big|_{w=0}=F(0)$$

故求解该积分就是求解信号频谱在w=0的幅度

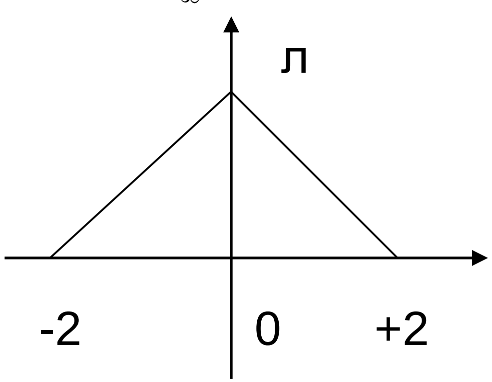
$$\frac{\mathrm{sint}}{t}\xrightarrow{FT}\pi g_2(w)$$

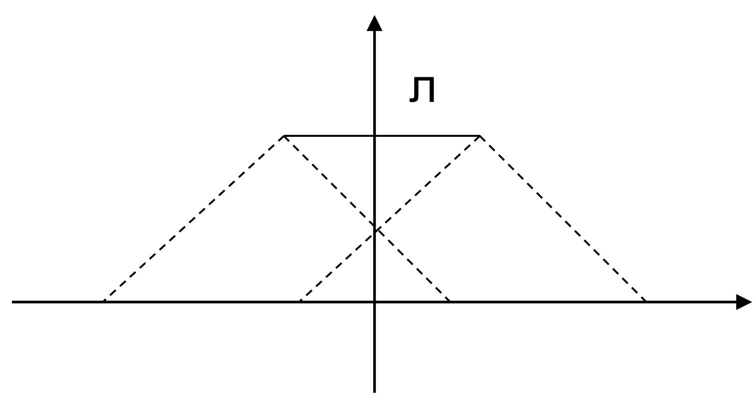
$$\frac{\sin^2 t}{t^2}=\frac{\mathrm{sint}}{t}\times\frac{\mathrm{sint}}{t}\xrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}(\pi g_2(w)*(\pi g_2(w)=\frac{\pi}{2}(-|\mathrm{w}|+2)\ ,|\mathrm{w}|\le 2$$

π

$$\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos t\xrightarrow{FT}\frac{\pi}{2}(-|\mathrm{w}\pm 1|+2)\ ,|\mathrm{w}|\le 3$$

$$so:\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos t dt=F(0)=\pi$$





例题3:

假设关于一个系统函数H(S),单位冲激响应h(t)的因果稳定系统，给出如下信息：

●H(1)=1/6

●当输入为ε（t）时，输出是绝对可积的

●当输入为tε(t)时，输出不是绝对可积的

●h''(t)+3h'(t)+2h(t)是有限持续期的

●在无穷远处只有一个零点。

1.确定H(S),画出零极点图，并标明收敛域

2.求出该系统的单位冲激响应h(t)

3.若输入f(t)=exp(2t),求系统的输出y(t)

4.写出表征该系统的线形常系数微分方程;

5.画出该系统的模拟方框图。

解：1)由h''(t)+3h'(t)+2h(t)为有限持续期，

可知其极点为p1=-1，p2=-2，而且两个极点都在收敛域内部

由于其阶跃响应输出绝对可积，说明含有零点z=0

$t\varepsilon(t)$不是绝对可积，说明s=0是一阶零点

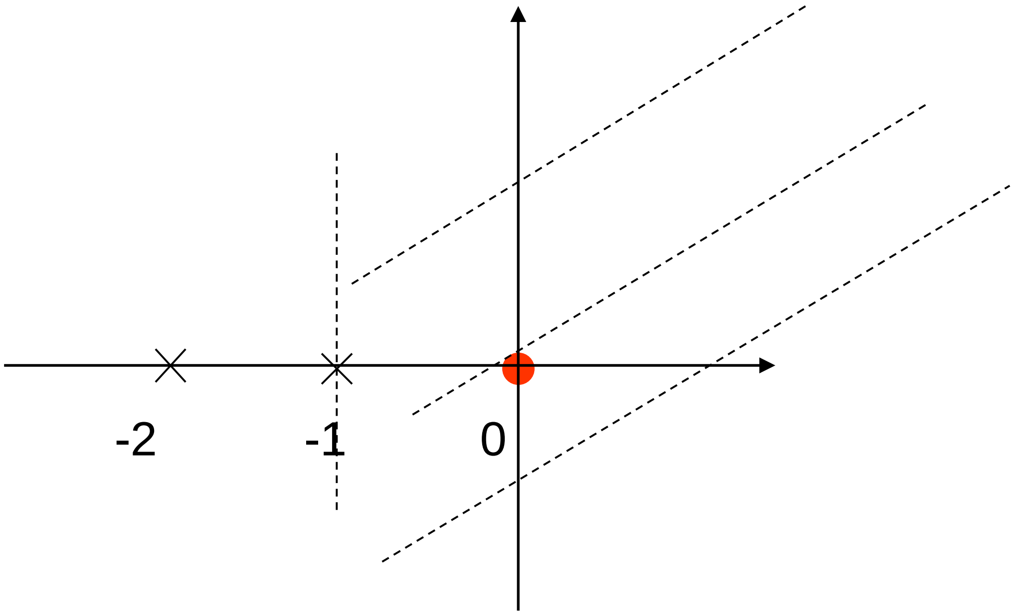
在无穷远处有一个零点，说明有限零点只有一个，即z=0

$$H(s)=\frac{ks}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(1)=1/6, so: k=1$$

$$H(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}, \mathrm{Re}(s)>-1$$

p1=-1，p2=-2，z=0



$$2)H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}(s) > -1$$

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$3）\mathrm{f}(t) = e^{2t}$$

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{6}e^{2t} \qquad e^{2t}$$

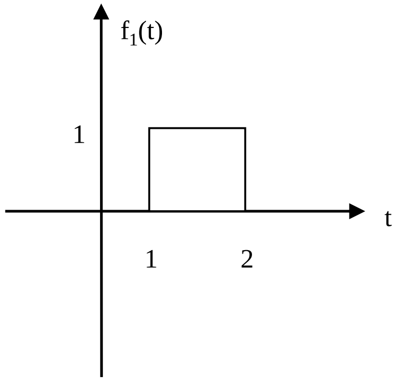
$$4)y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t)$$

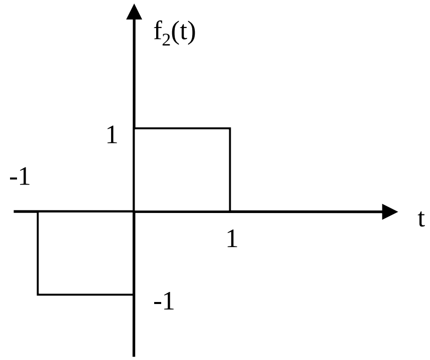
5)略

例题4: 计算卷积积分：

（1） 已知 $f_1(t)=\sin t\varepsilon(t), f_2(t)=\delta'(t)+\varepsilon(t)$, 求$f_1(t)*f_2(t)$

（2） 已知$f_1(t),f_2(t)$如图所示，求$f_1(t)*f_2(t)$





1）$f_1(t)=\sin t\varepsilon(t), f_2(t)=\delta'(t)+\varepsilon(t)$, 求$f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t)*f_2(t)=\sin t\varepsilon(t)*[\delta'(t)+\varepsilon(t)]=[\sin t\varepsilon(t)]'+[\sin t\varepsilon(t)]^{(-1)}$$

$$=\cos t\varepsilon(t)+\sin t\delta(t)+\int_0^t \sin t dt=\cos t\varepsilon(t)+0-\cos t\Big|_0^t, t>0$$

$$=\varepsilon(t)$$

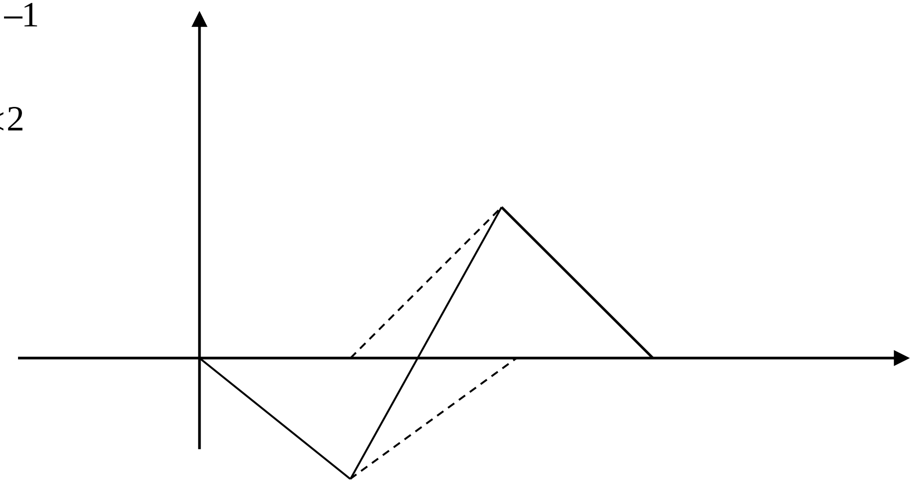
2) $f_1(t)=g_1(t-3/2), f_2(t)=g_1(t-1/2)-g_1(t+1/2)$

由于：$g_1(t)*g_1(t)=-|t|+1, |t|<1$

$$f_1(t)*f_2(t)=g_1(t-3/2)*g_1(t-1/2)-g_1(t-3/2)*g_1(t+1/2)$$

$$=g_1(t)*g_1(t)\Big|_{t\to t-2}-g_1(t)*g_1(t)\Big|_{t\to t-1}$$

$$=[-|t-2|+1]\Big|_{-1<t<3}-[-|t-1|+1]\Big|_{0<t<2}$$



例题5

假定输入信号

$$f(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$$

通过一个具有冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t}$$

的LTI系统，求其输出信号y(t)。

解：

由：$\mathrm{h(t)}=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$

$$H(jw)=g_{8\pi}(w)$$

$|H(jw)|=1$，Φ（w）=0

显然H是一个理想低通滤波器，其截止频率为4π，

故$w<4\pi$的信号通过系统;

$w>4\pi$的信号被系统完全抑制。

$f(t)=\cos 2\pi t+\sin 4\pi t$

$y(t)=\cos 2\pi t$

例题6

已知某连续实信号f(t)是非负的，它的傅立叶变换为F（jw），且已知jwF(jw)的反傅立叶变换为

$$ke^{-2t}\varepsilon(t)$$

而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|^{2}d\omega = 2\pi$$

确定f(t)的表达式和常数k。

解:

由于f(t) $\xrightarrow{\text{FT}} F(jw),\ f^{'}(t) \xrightarrow{\text{FT}} jwF(jw)$

$\mathrm{ke}^{\text{-2t}}\varepsilon(\mathrm{t}) \xrightarrow{\text{FT}} jwF(jw)$

$f^{'}(t) = \mathrm{ke}^{\text{-2t}}\varepsilon(\mathrm{t})$

$f(t) = \int f^{'}(t)dt = -\frac{k}{2}e^{-2t}\varepsilon(t) > 0(f(t)$非负k<0)

由:$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{F(j\omega)}\right|^{2}\mathrm{d}\omega = 2\pi$

根据passawal定理:$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{2}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{F(j\omega)}\right|^{2}\mathrm{d}\omega = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{2}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[-\frac{k}{2}e^{-2t}\varepsilon(t)]^{2}dt = 2\int_{0}^{+\infty}[-\frac{k}{2}e^{-2t}\varepsilon(t)]^{2}dt = \frac{k^{2}}{8} = 1$$

$k = \pm 2\sqrt{2}$

由于$k < 0$,故$k = -2\sqrt{2}$

$f(\mathrm{t}) = \sqrt{2}e^{-2t}\varepsilon(t)$

例题7

计算

（1）$f(k)=k(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$，求$F(Z)$并标明收敛域；

（2）已知$f(k)\rightarrow F(z)=z^{-1}+1+z, h(k)\rightarrow H(z)=1+z^2+z^3, |z|>0$

计算$y(k)=f(k)*h(k)$;

（3）$F(z)=\frac{1}{(z-1)^2}, |z|>1$，求$f(k)$;

（1） $f(k)=k(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$,求F(Z)并标明收敛域;

解:$(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)\xrightarrow{ZT}\frac{z}{z-1/2},|z|>1/2$

$$k(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)\xrightarrow{ZT}(-z)(\frac{z}{z-1/2})'=\frac{z/2}{(z-1/2)^2},|z|>1/2$$

（2） 已知$f(k)\to F(z)=z^{-1}+1+z, h(k)\to H(z)=1+z^2+z^3$,

计算$y(k)=f(k)*h(k)$;

解： $Y(z)=F(z)H(z)=z^{-1}+1+2z+2z^2+2z^3+z^4$

$$y(k)=IZT(Y(z))=[1,2,2,2,1,1],k=-4,-3,-2,-1,0,1$$

（3） $F(z)=\frac{1}{(z-1)^2},|z|>1$,求$f(k)$;

解： $\varepsilon(k)\xrightarrow{ZT}\frac{z}{z-1}$

$$k\varepsilon(k)\xrightarrow{ZT}(-z)(\frac{z}{z-1})'=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$(k-1)\varepsilon(k-1)\xrightarrow{ZT}z^{-1}\times\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

3、某离散时间系统的差分方程为：

$$y(k)+\frac{7}{3}y(k-1)+\frac{2}{3}y(k-2)=2f(k)$$

（1）如该系统为因果系统，求出冲激响应h(k)；

（2）如该系统为稳定系统，标明系统函数H(z)的收敛域，并求出冲激响应h(k)；

（3）当输入为f(k)=ε(k)时,若要求系统有稳定的输出，此时系统的收敛域如何？并计算输出信号y(k);

（4）画出该系统的信号流图；

解：1）方法一：离散时间算子方程：

因果系统

由差分方程：$y(k)+\frac{7}{3}y(k-1)+\frac{2}{3}y(k-2)=2f(k)$

$$\mathrm{H}(E)=\frac{2}{1+\frac{7}{3}E^{-1}+\frac{2}{3}E^{-2}}=\frac{2E^2}{E^2+\frac{7}{3}E+\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{H}(E)}{E}=\frac{2E}{E^2+\frac{7}{3}E+\frac{2}{3}}=\frac{2E}{(E+1/3)(E+2)}=\frac{-2/5}{E+1/3}+\frac{12/5}{E+2}$$

$$\mathrm{H}(E)=\frac{-2E/5}{E+1/3}+\frac{12E/5}{E+2}$$

$$h(k)=-\frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)+\frac{12}{5}(-2)^k\varepsilon(k)$$

解：1）方法二：ZT

因果系统

由差分方程：$y(k)+\frac{7}{3}y(k-1)+\frac{2}{3}y(k-2)=2f(k)$

$$\mathrm{H}(z)=\frac{2}{1+\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}=\frac{2z^{2}}{z^{2}+\frac{7}{3}z+\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{H}(E)}{z}=\frac{2E}{z^{2}+\frac{7}{3}E+\frac{2}{3}}=\frac{2z}{(z+1/3)(z+2)}=\frac{-2/5}{z+1/3}+\frac{12/5}{z+2}$$

$$\mathrm{H}(z)=\frac{-2z/5}{z+1/3}+\frac{12z/5}{z+2}$$

由于该系统是因果系统，so $|z|>2$

$$h(k)=-\frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^{k}\varepsilon(k)+\frac{12}{5}(-2)^{k}\varepsilon(k)$$

解：2) 稳定系统

$$\mathrm{H}(z)=\frac{-2z/5}{z+1/3}+\frac{12z/5}{z+2}$$

由于该系统是稳定系统，收敛域必须包含单位圆：$\frac{1}{3}<|z|<2$

$$h(k)=-\frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)-\frac{12}{5}(-2)^k\varepsilon(-k-1)$$

3) $f(k)=\varepsilon(k)$

$$F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=F(z)\mathrm{H}(z)=\frac{z}{z-1}(\frac{-2z/5}{z+1/3}+\frac{12z/5}{z+2})=\frac{2z^3}{(z-1)(z-1/3)(z-2)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1/2}{z-1}+\frac{-1/10}{z+1/3}+\frac{8/5}{z+2}$$

$$Y(z)=\frac{z/2}{z-1}+\frac{-z/10}{z+1/3}+\frac{8z/5}{z+2}$$

要求y(k)稳定，即收敛域包含单位圆

$$ROC:\frac{1}{3}<|\mathrm{z}|<1$$

$$y(k)=-\frac{1}{10}(-\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)-\frac{1}{2}\varepsilon(-k-1)-\frac{8}{5}(-2)^k\varepsilon(-k-1)$$

4)略