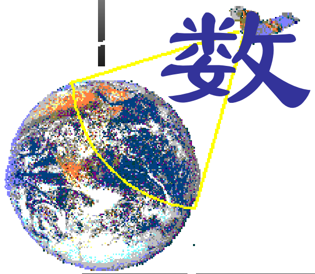


数字图像处理与分析

第四章 图像处理中的正交变换

刘定生

中科院中国遥感卫星地面站

2005年春季学期

- 图像的频域变换
  - 频域变换的理论基础
    - ✓线性系统、卷积与相关
    - ✓正交变换及其特征
    - ✓离散图像的正交变换
  - 傅立叶变换定义与特征
  - 傅里叶变换的应用
- 其他变换
  - 离散余弦变换，沃尔什变换——哈达玛变换，哈尔变换，霍特林变换（主成分变换），小波变换

■ 线性系统

➢ 系统的定义：

接受一个输入，并产生相应输出的任何实体。

系统的输入是一个或两个变量的函数，输出是相同变量的另一个函数。

x(t) 输入 → 系统 → y(t) 输出

线性系统

- 线性系统的定义：

  对于某特定系统，有：

$$x1(t) \rightarrow y1(t)$$

$$x2(t) \rightarrow y2(t)$$

  该系统是线性的当且仅当：

$$x1(t) + x2(t) \rightarrow y1(t) + y2(t)$$

  从而有：$a \cdot x1(t) \rightarrow a \cdot y1(t)$

- 线性系统
  - 线性系统移不变性的定义：

对于某线性系统，有：

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

当输入信号沿时间轴平移T，有：

$$x(t-T) \rightarrow y(t-T)$$

则称该线性系统具有移不变性

➢卷积的定义

✓对于一个线性系统的输入**f(t)**和输出**y(t)**，其间必定存在关系：

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

✓***h(t)*** 称为线性系统的单位冲激响应函数，其含义为：当线性系统输入***f(t)***为单位脉冲函数时，线性系统的输出响应

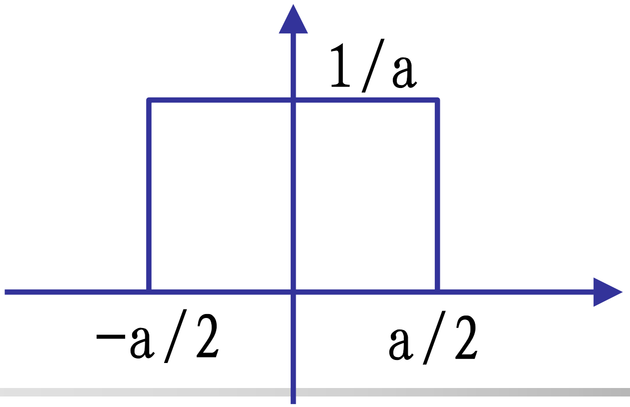
✓上式称之为卷积积分

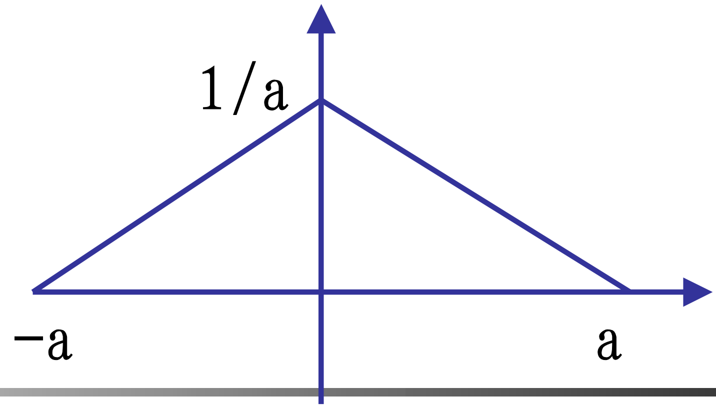
脉冲函数的定义：也叫δ函数

$$\delta(t-t_0)=0 \quad t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

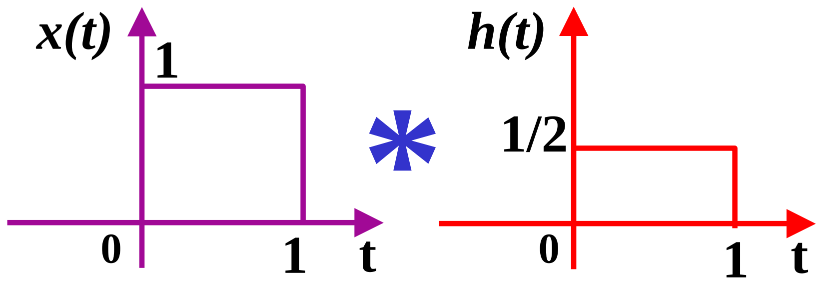
脉冲函数的极限定义：脉冲函数可以看成是一系列函数的极限，这些函数的振幅逐渐增大，持续时间逐渐减少，而保持面积不变。

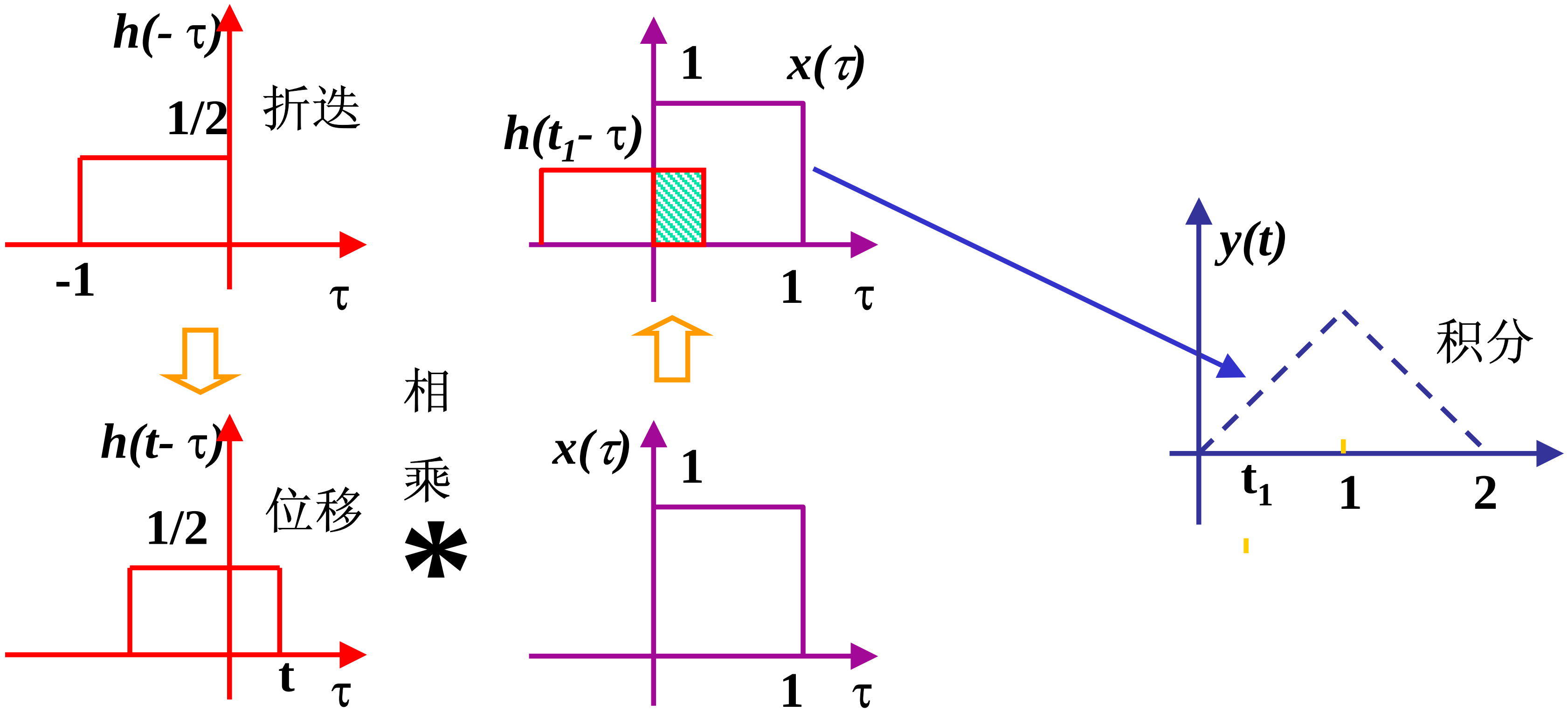




卷积积分的图解表示

- 对信号$x(t)$和函数$h(t)$:





- 离散一维卷积

$$y(i)=f(i)*h(i)=\sum_{j}f(j)h(i-j)$$

- 二维卷积的定义

$$y(x,y)=f*h=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(i,j)h(x-i,y-j)didj$$

- 离散二维卷积

$$y(x,y)=f*h=\sum_{i}\sum_{j}f(i,j)h(x-i,y-j)$$

相关的定义

- 任意两个信号的相关函数定义为:

$$R_{fg}(t)=f(t)\bullet g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t+\tau)d\tau$$

- 相关与卷积的关系:

$$R_{fg}(t)=f(t)\bullet g(t)=f(-t)*g(t)$$

- 正交变换

  - 连续函数集合的正交性

正交函数集合 $U=\{u_0(t),u_1(t),\cdots\}$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_m(t)u_n(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} C & if\ \ m=n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当 $C=1$ 时，称集合为归一化正交函数集合，即每一个向量为单位向量

其物理意义为多维空间坐标的基轴方向互相正交

➢ 正交函数集合的完备性

- 若$f(x)$是定义在t_0和t_0+T区间的实值信号，平方可积。可以表示为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u_n(x)$$

对任意小的$\varepsilon>0$，存在充分大的N，用N个有限展开式估计f (x) 时：

$$\hat{f}(x)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n u_n(x)$$

可有：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\left|f(x)-\hat{f}(x)\right|^2\mathrm{d}x<\varepsilon$$

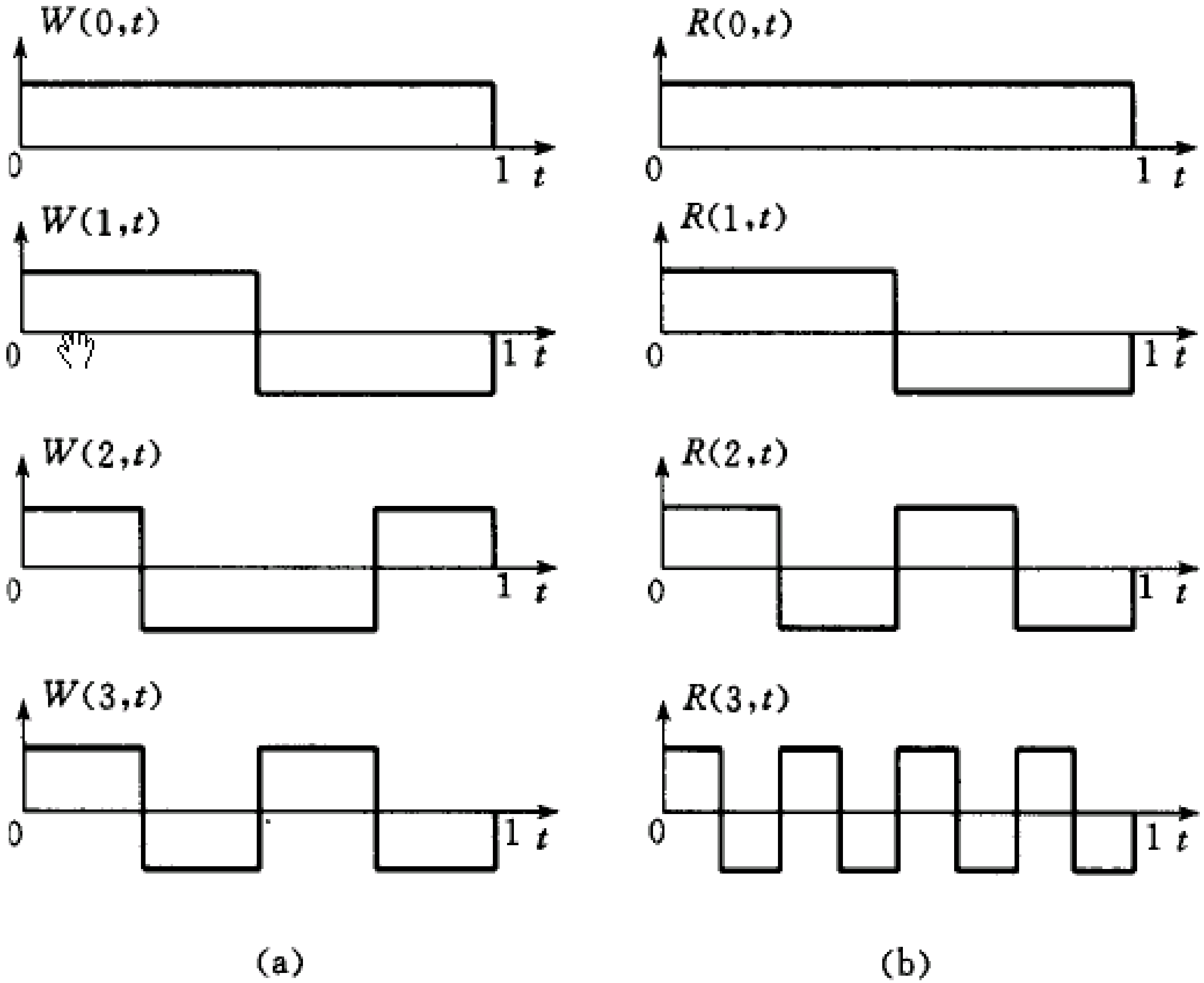
则称函数U集合是完备的。

- 正交函数集合完备性的物理意义
  - ✓任何数量的奇函数累加仍为奇函数
  - ✓任何数量的偶函数累加仍为偶函数
- 因此．为了能用累加展开式来表示一个任意函数，就要求这个函数集合中既有奇函数又有偶函数

- 正交函数集合完备性图例

(a) 完备

(b) 不完备



➢正交函数的离散情况

N 个正交向量

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\quad \boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}C & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

当C=1时，称归一化正交

➢正交函数的离散情况

N 个正交向量矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

必满足：

$$A^T A = AA^T = I$$

- 一维正交变换

对于一维向量$\boldsymbol{f}$，用上述正交矩阵进行运算:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$$

若要恢复 $\boldsymbol{f}$，则

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{g}$$

以上过程称为正交变换。

➢一般范式—酉变换

若A为复数矩阵，正交的条件为:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{*T}$$

其中$\boldsymbol{A}^{*}$为**A**的复数共轭矩阵，满足这个条件的矩阵为酉矩阵**(unitary matrix)**。对于任意向量$\boldsymbol{f}$的运算称为酉变换**(unitary transform)**:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \qquad g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k,n) f(n)$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{*T}\boldsymbol{g} \qquad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{*}(k,n) g(k)$$

➢酉变换、正交变换与信号分析

- ✓ 正交变换是酉变换的特例
- ✓ 它们都可以用于信号分析
- ✓ 用于信号分析的基函数集合和正交矩阵都应满足正交性和完备性

二维酉变换

- $N\times N$ 二维函数可以类似于一维用正交序列展开和恢复

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\,a_{u,v}(x,y)\qquad 0\le u,v<N$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\,a^{*}_{u,v}(x,y)\qquad 0\le x,y<N$$

正变换核

反变换核

变换核的可分离性

$$a_{u,v}(x,y) = a_u(x)b_v(y) \Rightarrow a(u,x)b(v,y)$$

其中 $\{a_u(x),\ u=0, 1, \ldots, N-1\}$,

$\{b_v(y),\ v=0, 1, \ldots, N-1\}$

为一维完备正交基向量的集合。用矩阵表示:

$$A=\{a(u,\ x)\},\quad B=\{b(v,\ y)\}$$

通常选择$A=B$。

二维酉变换

A=B时，二维酉变换正变换表示为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{n-1}a(u,x)f(x,y)a(v,y)$$

用矩阵表示：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

类似的，对于$M\times N$的二维函数$f(x,y)$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_M\,\boldsymbol{f}_{MN}\,\boldsymbol{A}_N^T$$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}_M^{*}\,\boldsymbol{F}_{MN}\,\boldsymbol{A}_N^{*T}$$

基图像

对反变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)a_{u,v}^{*}(x,y) \qquad 0\le x,y<N$$

$a_{u,v}^{*}(x,y)$ ——可看成是基图像

$F(u,v)$ ——权因子

图像 $f(x,y)$ 可以用 N^2 个基图像的加权和来表示

酉变换的性质

1. 酉矩阵是正交阵

$$AA^{*T}=A^{*T}A=I_{N\times N}$$

2. A为酉阵，则A^{-1}和A^{T}都是酉阵

3. 酉变换是能量保持的变换

对于一维酉变换$F=Af$，有$||F||=||f||$

二维情况下，则有：

$$\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left|F(u,v)\right|^2=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left|f(x,y)\right|^2$$

酉变换的性质(2)

4. 酉变换能量的紧缩

正交酉变换往往趋于将信号能量压缩到相对少的变换系数中，由于总能量保持不变，因此许多变换系数将包含很少的能量

K－L变换可以达到最大的能量紧缩。

酉变换的性质(3)

5. 酉变换去相关

当输入向量元素间高度相关时，变换系数趋向于去相关，这意味着协方差矩阵的非对角项和对角项相比趋于变小。

K－L变换可以达到完全的去相关

酉变换的性质(4)

6. 均值和方差

设$f(x, y)$的均值和协方差为μ_f和Σ_f

则$F(u, v)$的均值为：

$$\mu_F = E(Af) = AE(f) = A\mu_f$$

则$F(u, v)$的协方差为：

$$\begin{aligned}\Sigma_F &= E\left\{(F-\mu_F)(F-\mu_F)^{*T}\right\} \\ &= AE\left\{(f-\mu_f)(f-\mu_f)^{*T}\right\} \\ &= A\Sigma_f A^{*T}\end{aligned}$$

酉变换的性质(5)

7. 其他性质:

(1) A为酉阵，则其行列式值$|A|=1$

(2) 若a为向量，则作酉变换后向量模保持不变：$b=Aa$，则$|b|=|a|$。

例: 给定正交矩阵A和图象U,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

求: 图象U经变换A后的变换图象V。

可有:

$$[V]=[A][U][A]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

反变换为:

$$[U]=\left[A^{*T}\right][V]\left[A^{*}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

变换A的基图象 A^{*T} 为A的各列向量的外积（向量积）

$$A_{00}^{*}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_{11}^{*}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{01}^{*}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix},$$

$$A_{10}^{*}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

■ 小结

- 线性系统
- 线性系统移不变性的定义
- 连续函数集合的正交性和完备性
- 一维正交变换和酉变换
- 二维酉变换
- 基图像
- 酉变换的性质

- 什么是图像变换
  - 将图像看成是线性叠加系统
  - 图像在空域上具有很强的相关性
  - 图像变换是将图像从空域变换到其它域如频域的数学变换
  - 借助于正交变换的特性可使在空域上的复杂计算转换到频域后得到简化
  - 借助于频域特性的分析，将更有利于获得图像的各种特性和进行特殊处理

- 可进行图像变换的基本条件
  - 满足正交、完备两个条件的函数集合或矩阵才能用于图象的分析
  - 常用的几种变换：傅里叶变换、**WALSH**变换、哈达玛变换、**Haar**变换、**SLANT**变换、**K-L**变换以及特定条件下的**CONSINE**变换、**SINE**变换等，都满足正交性和完备性两个条件

离散图像的正交变换

- 离散图象的正交变换为图象信号在一组二维离散完备正交基上的展开，这种正交基展示具有无损重构的性质，以及图象能量的集中和图象信号元素的去相关性能，在图象处理中具有重要的作用。
- 若离散图象 $f(m, n)$ 及其在离散完备正交基 $\{a(u, v; m, n)\}$ 上的展开系数为 $g(u, v)$，即

$$g(u,v)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\,a(u,v;m,n)$$

$$f(m,n)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} g(u,v)\,a^{*}(u,v;m,n)$$

- 离散图像正交变换的特性

1. 二维离散完备正交基$\{a(u, v; m, n)\}$的正交性

满足
$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a(u,v;m,n)a^*(u',v';m,n)=\delta(u-u',v-v')$$。

正交性保证变换后图象的紧缩性，图象的去相关性和保证任何被截断的级数展开将使均方误差和为最小。

2. 二维离散完备正交基$\{a(u,v;m,n)\}$的完备性

满足

$$\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} a(u,v;m,n)\,a^*(u,v;m',n') = \delta(m-m',n-n')$$

完备性保证变换后图象无失真的重构，即保证了当包括了全部系数时，重构误差将为零。

- 傅立叶变换（**Fourier**）
  - 傅立叶变换是最早研究与应用的酉变换
  - **60**年代出现快速傅立叶变换
  - 傅立叶变换域也称为频域

- 基本数学概念

  - 调谐信号(欧拉公式):

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

其中j^2=-1

  - 傅立叶积分:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

其中t代表时间，f代表频率

傅立叶变换的定义(一维)

f(x)为连续可积函数，其傅立叶变换定义为:

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}\,dx$$

其反变换为:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}\,du$$

通常 ***f(x)*** 的傅里叶变换为复数，可有通用表示式为:

$$F(u)=R(u)+jI(u)$$

R(u)，**I(u)**分别称为傅里叶变换***F(u)***的实部和虚部

傅立叶变换的定义(一维)

可进一步写为指数形式:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}$$

其中:

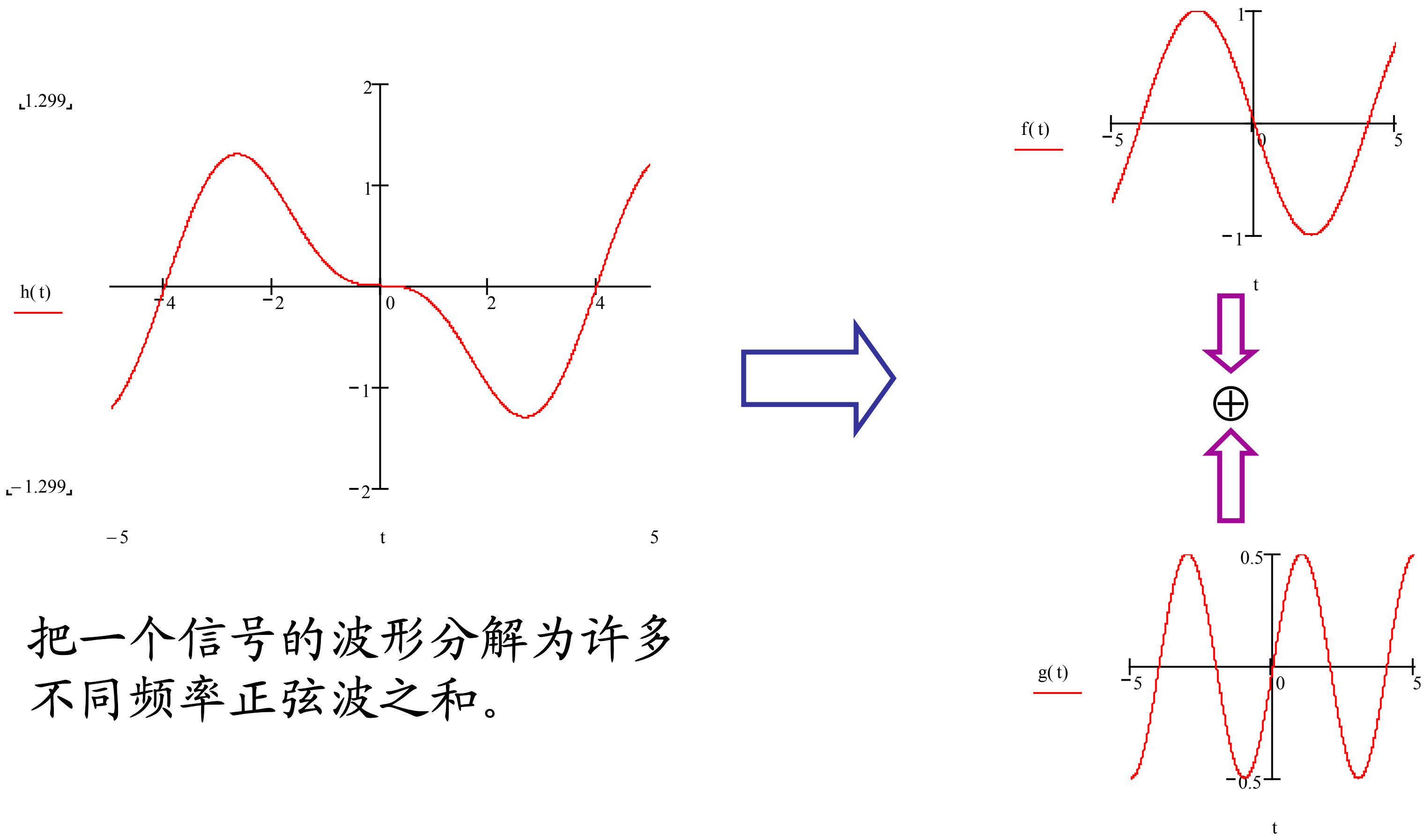
$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

称之为 **f(x)** 的幅度谱、振幅谱或富里叶谱

$$\phi(u) = \arctan[I(u) / R(u)]$$

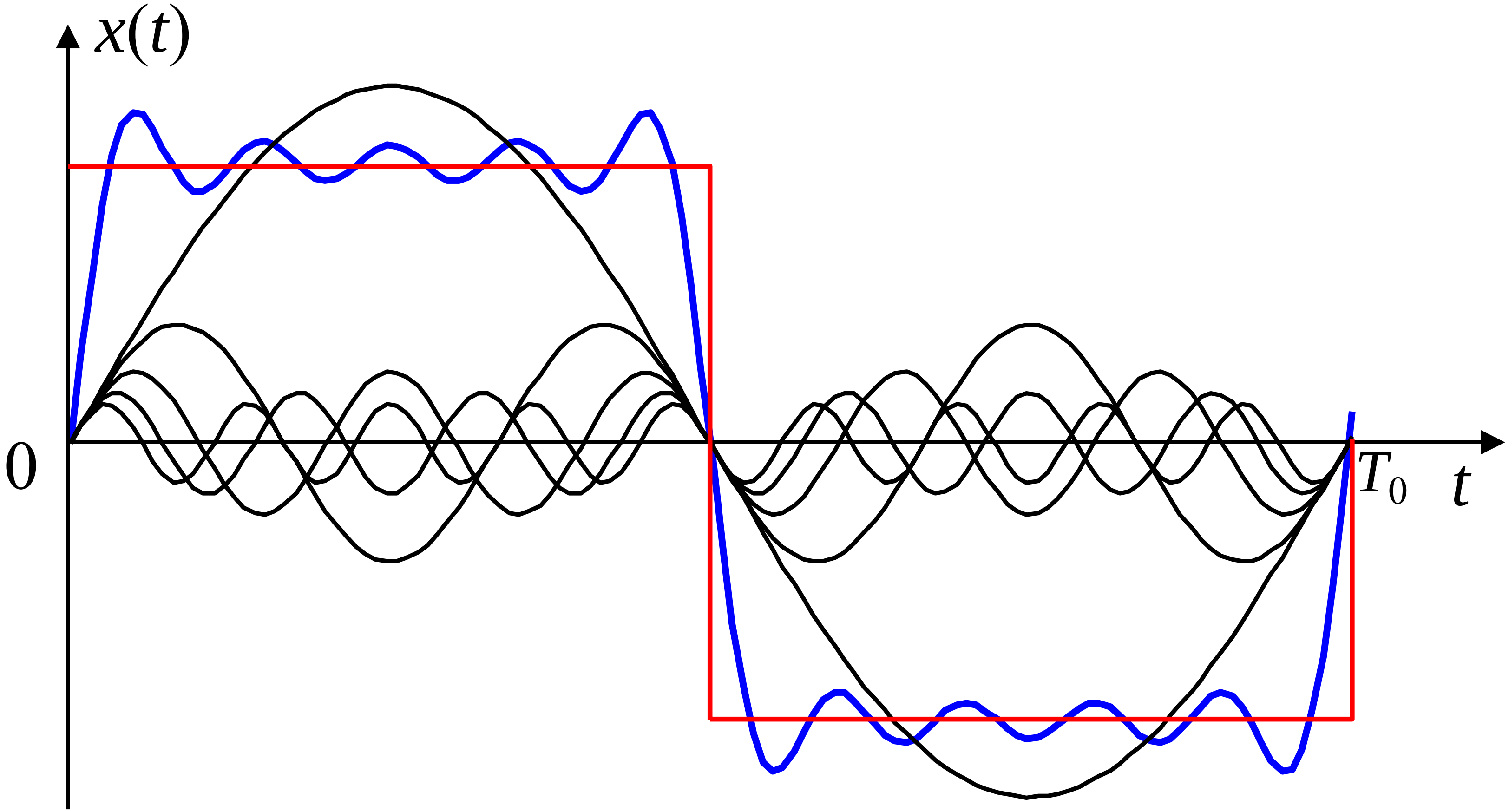
称之为 **f(x)** 的相位谱、相位角

变换分析的直观说明

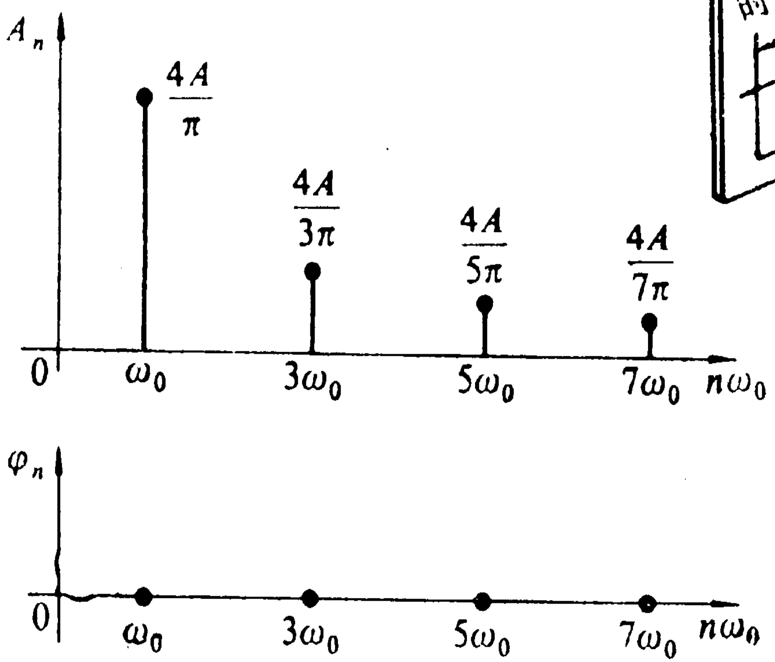


把一个信号的波形分解为许多不同频率正弦波之和。

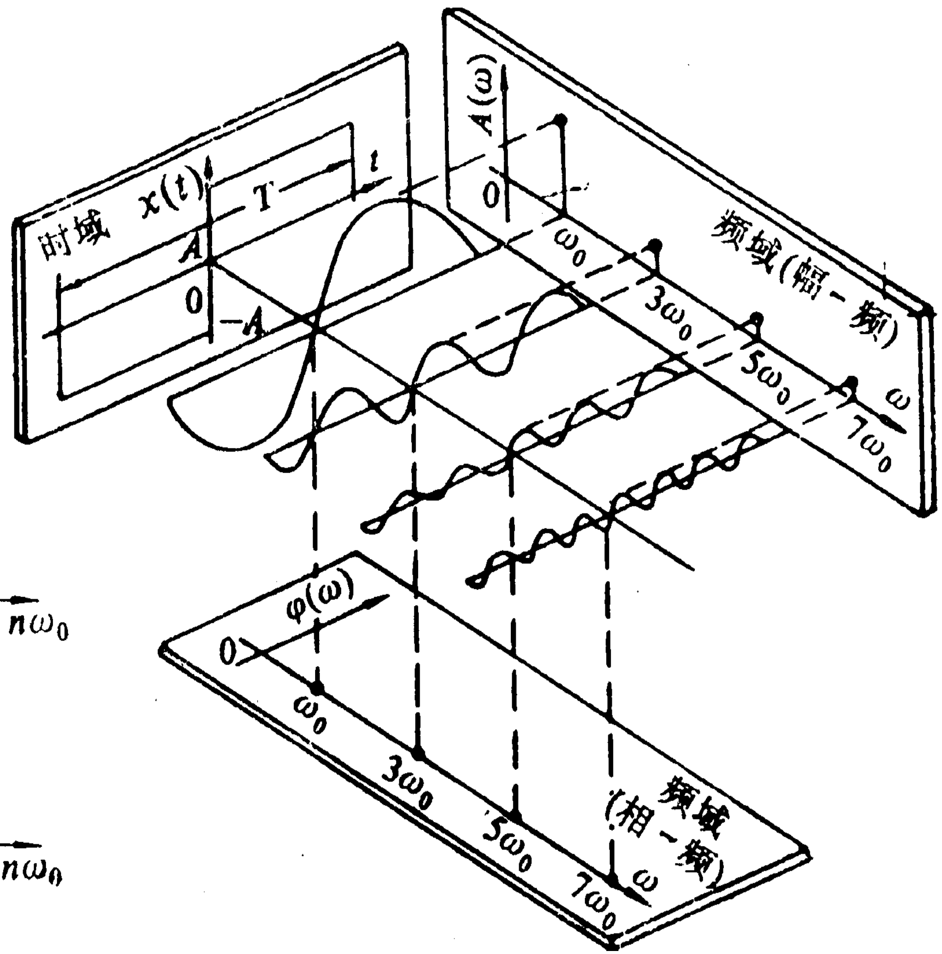
变换分析的直观说明—方波信号的分解



方波信号的时、频域描述



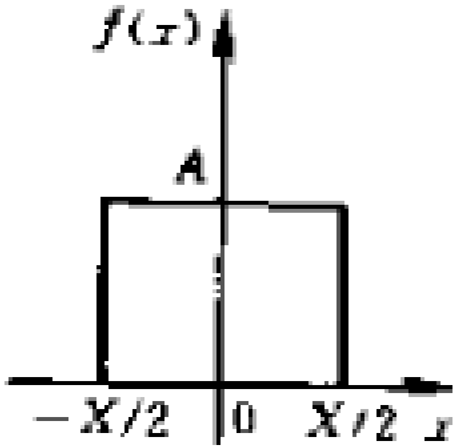
A_n
$\frac{4A}{\pi}$
$\frac{4A}{3\pi}$
$\frac{4A}{5\pi}$
$\frac{4A}{7\pi}$
0
ω_0
$3\omega_0$
$5\omega_0$
$7\omega_0$
$n\omega_0$
φ_n
0
ω_0
$3\omega_0$
$5\omega_0$
$7\omega_0$
$n\omega_0$



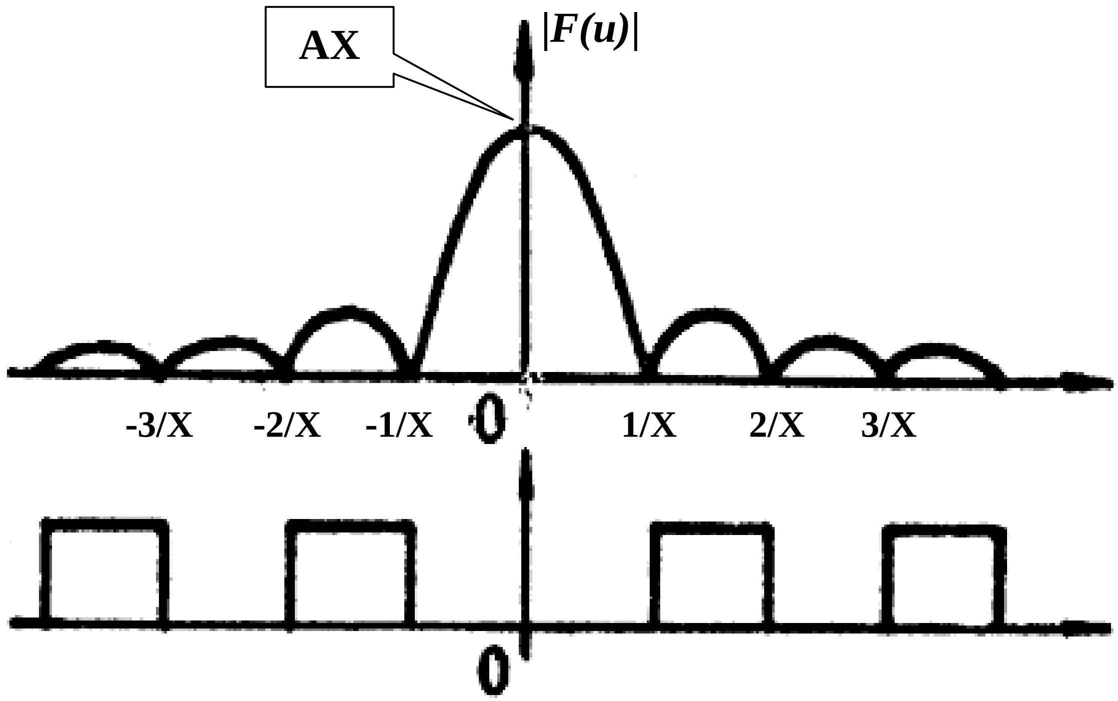
时域
$x(t)$
T
t
A
0
$-A$
$A(\omega)$
0
ω_0
$3\omega_0$
$5\omega_0$
$7\omega_0$
频域(幅－频)
ω
$\varphi(\omega)$
0
ω_0
$3\omega_0$
$5\omega_0$
$7\omega_0$
频域
(相－频)
ω

一维傅立叶变换举例

方波信号:

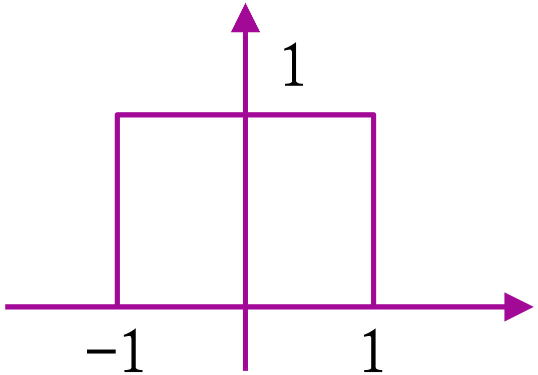


经过傅立叶变换后:



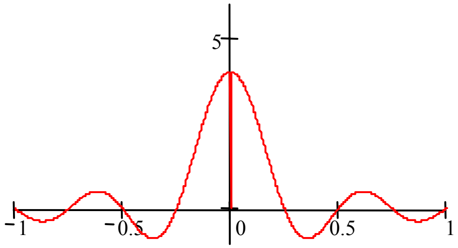
几种特殊函数的富里叶变换

矩形函数:



$$h(t)=\begin{cases} A, & |t|<T_0 \\ \dfrac{A}{2}, & |t|=T_0 \\ 0, & |t|>T_0 \end{cases}$$

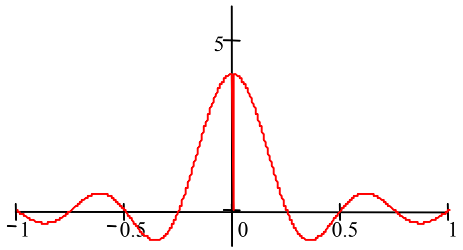
矩形函数的富里叶变换:



$$H(f)=2AT_0\frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$

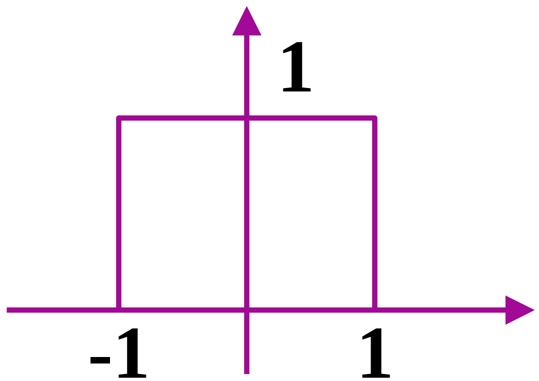
几种特殊函数的富里叶变换

sin(x)/x类函数:



$$h(t) = 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$

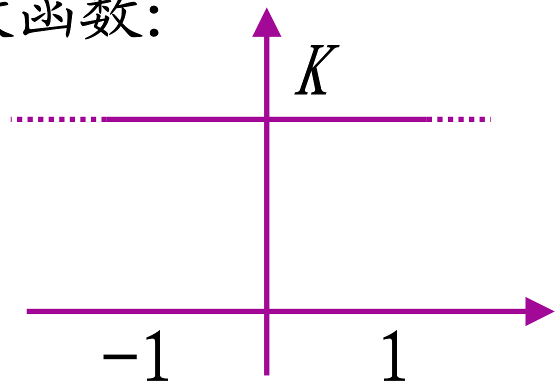
sin(x)/x类函数的富里叶变换:



$$H(f) = \begin{cases} A, & |f| < f_0 \\ \frac{A}{2}, & |f| = f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

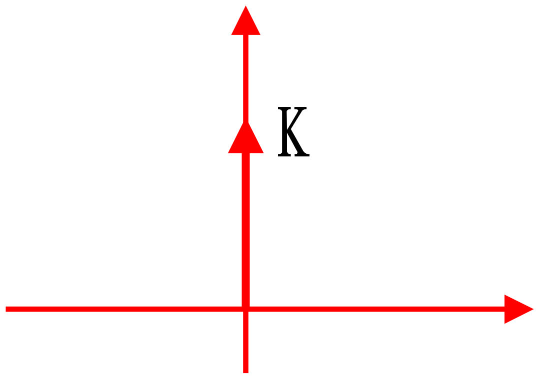
几种特殊函数的富里叶变换

常数函数:



$$h(t) = K$$

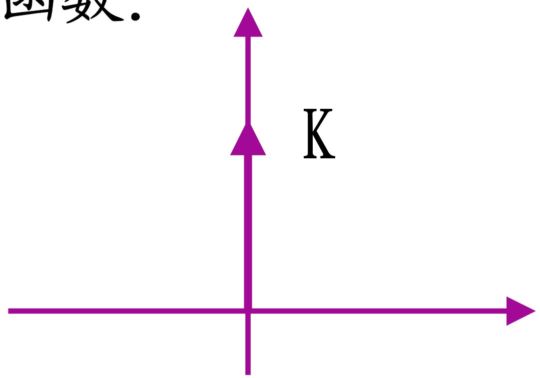
常数函数的富里叶变换:



$$H(f) = K\delta(f)$$

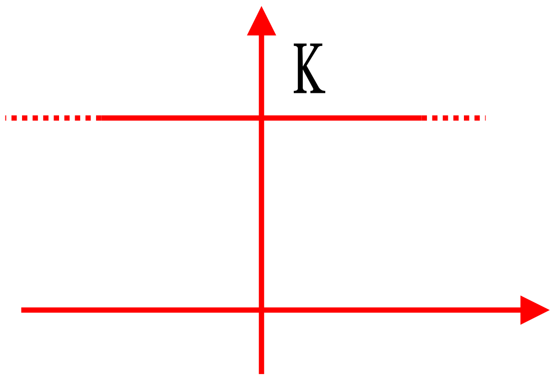
几种特殊函数的富里叶变换

脉冲函数:



$$h(t) = K\delta(t)$$

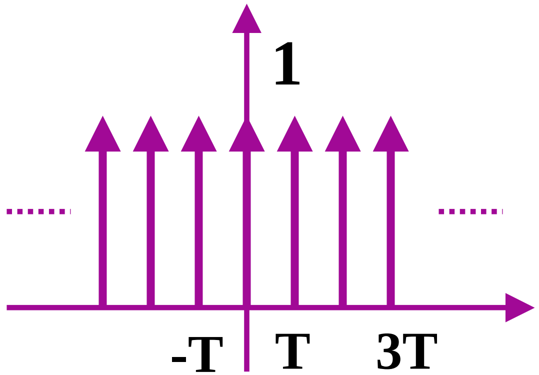
脉冲函数的富里叶变换:



$$H(f) = K$$

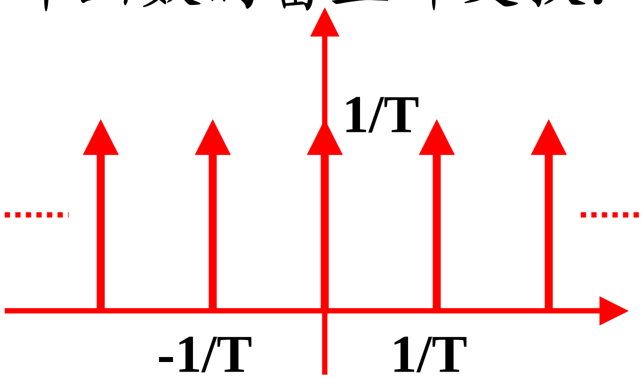
几种特殊函数的富里叶变换

脉冲函数:



$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

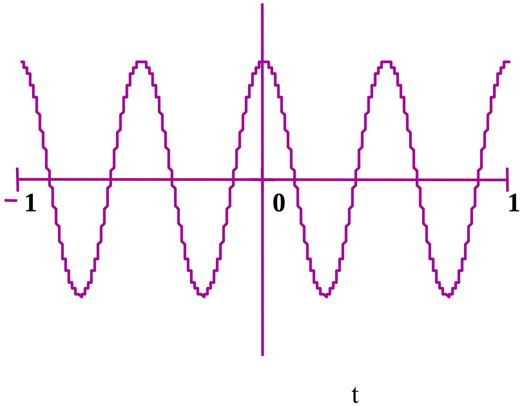
脉冲函数的富里叶变换:



$$H(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

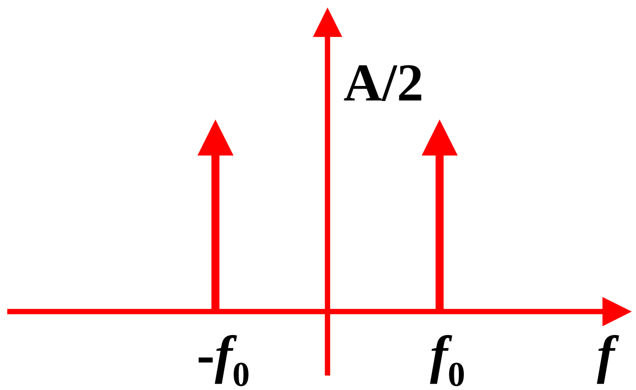
几种特殊函数的富里叶变换

余弦函数:



$$h(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

脉冲函数的富里叶变换:



$$H(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

几种特殊函数的富里叶变换

实域	频域
实　函　数	实部为偶函数 虚部为奇函数
虚　函　数	实部为奇函数 虚部为偶函数
实部为偶函数 虚部为奇函数	实　函　数
实部为奇函数 虚部为偶函数	虚　函　数
实 的 偶函数	实 的 偶函数
实 的 奇函数	虚 的 奇函数
虚 的 偶函数	虚 的 偶函数
虚 的 奇函数	实 的 奇函数
偶　函　数	偶　函　数
奇　函　数	奇　函　数

一维离散傅立叶变换(DFT)

一维离散傅立叶变换公式为:

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}} \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

逆变换为:

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j\frac{2\pi ux}{N}} \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

逆变换的另一种表达形式:

$$f(x)=\frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} F^{*}(u)e^{-j2\pi ux/N}\right]^{*}$$

二维傅立叶变换

二维傅立叶变换由一维傅立叶变换推广而来:

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

逆变换:

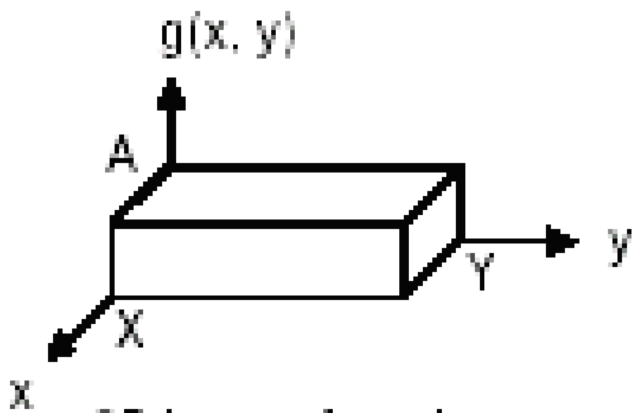
$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\exp[j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)}$$

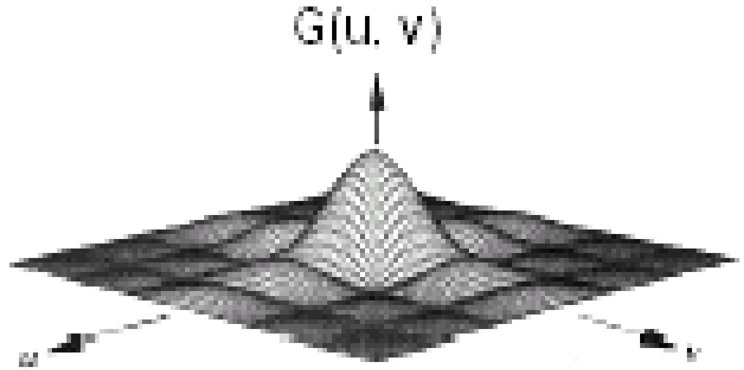
幅度谱: $|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$

相位谱: $\phi(u,v)=\arctan\left[I(u,v)/R(u,v)\right]$

图像的频域变换——傅立叶变换



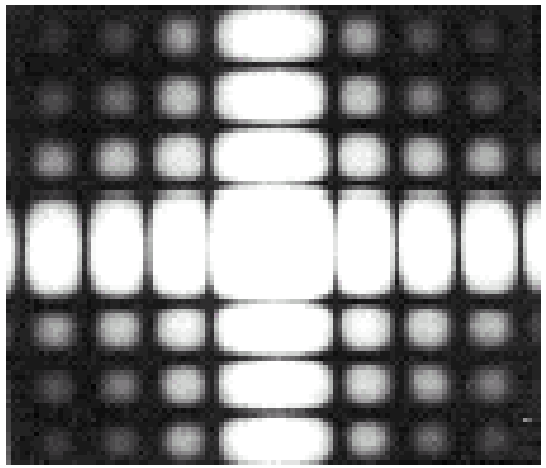
2D image function



frequency spectrum

Note that large spectral amplitudes occur in directions vertical to prominent edges of the image function

<u>图像的二维傅立叶变换图例</u>



frequency spectrum as an intensity function

二维离散傅立叶变换

对于二维傅立叶变换，其离散形式为：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right]}$$

逆变换为：

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{\left[j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right]}$$

幅频谱、相位谱：

$$F(u,v)=\left|F(u,v)\right|e^{j\varphi(u,v)}=R(u,v)+jI(u,v)$$

$$\left|F(u,v)\right|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(u,v)=\arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

二维离散傅立叶变换的性质

1. 线性性质（加法定理）：

$$a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) \Leftrightarrow a_1 F_1(u,v) + a_2 F_2(u,v)$$

傅立叶变换是线性系统、函数和的傅立叶变换等于各函数傅里叶变换的和

2. 比例性质（相似性定理）：

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

比例特性表明：信号在时域中压缩（$k > 1$，变化速度加快）等效于在频域扩展（频带加宽）；反之亦然

二维离散傅立叶变换的性质

3. 可分离性:

$$F(u,v)=F_x\{F_y[f(x,y)]\}=F_y\{F_x[f(x,y)]\}$$

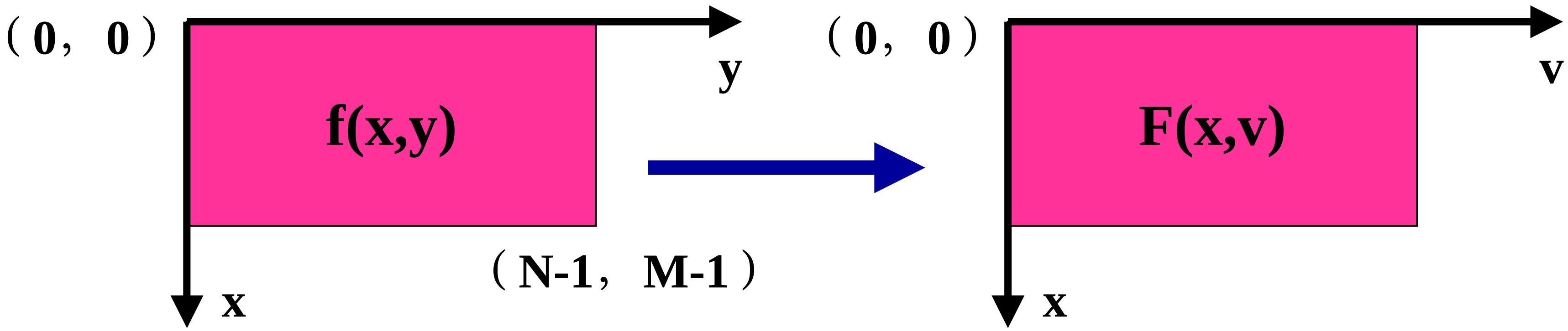
$$f(x,y)=F_u^{-1}\{F_v^{-1}[F(u,v)]\}=F_v^{-1}\{F_u^{-1}[F(u,v)]\}$$

二维DFT可分离为两次一维DFT

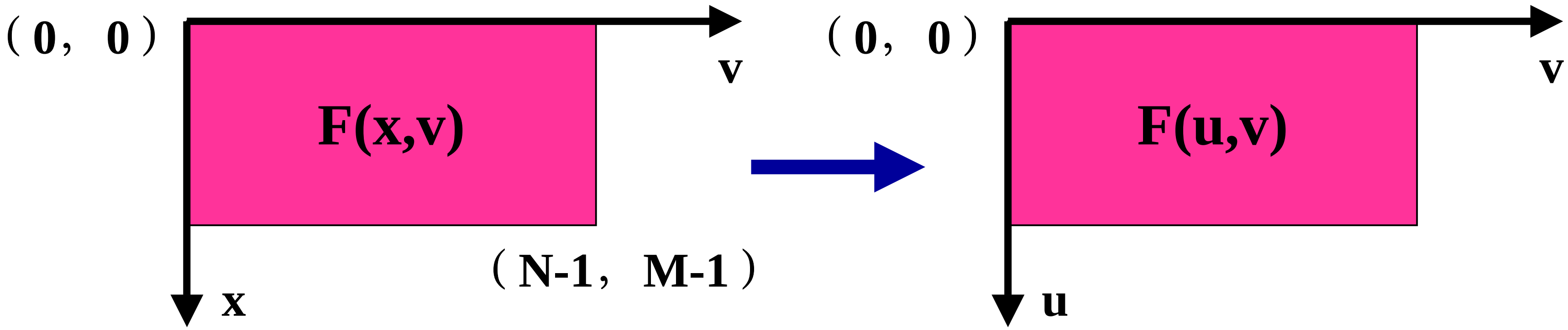
二维离散傅立叶变换的性质

二维DFT的分离计算

- 先对行做变换:



- 再对列进行变换:



二维离散傅立叶变换的性质

4. 空间位移(位移定理)：

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

函数自变量的位移的傅立叶变换产生一个复系数，等效于频谱函数的相位谱改变，而幅度谱不变

5. 频率位移：

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

函数的频率位移的相当于傅立叶变换的坐标原点平移，而幅度谱和相位谱不变

二维离散傅立叶变换的性质

6. 周期性:

$$F(u,v)=F(u+aN,\ v+bN),\quad f(x,y)=f(x+aN,\ y+bN)$$

离散傅立叶变换DFT和它的逆变换是以N为周期的函数

7. 共轭对称性:

若 ***f(x,y)*** 为实函数，***F(u,v)*** 为其傅里叶变换，则

$$F(u,v)\Leftrightarrow F^{*}(-u,-v)$$

图像的傅立叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数

二维离散傅立叶变换的性质

8. 旋转不变性:

$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\rho,\varphi+\theta_0)$$

对图象的旋转变换和傅立叶变换的顺序是可交换的

9. 平均值:

$$F(0,0)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)=\bar{f}(x,y)$$

离散函数的均值等于该函数傅立叶变换在(0, 0)点的值

二维离散傅立叶变换的性质

10. 卷积定理：空域中的卷积等价于频域中的相乘

$$f(x, y) * h(x, y) \iff F(u, v)\, H(u, v)$$

$$f(x, y)\, h(x, y) \iff F(u, v) * H(u, v)$$

11. 相关定理：空域中f (x, y) 与g (x, y) 的相关等价于频域中F (u, v) 的共轭与G (u, v) 相乘

互相关：$f(x, y) \bullet g(x, y) \iff F(u, v)\, G^*(u, v)$

$$f(x, y)\, g^*(x, y) \iff F(u, v) \bullet G(u, v)$$

自相关：$f(x, y) \bullet f(x, y) \iff |F(u, v)|^2$

$$|f(x, y)|^2 \iff F(u, v) \bullet F(u, v)$$

二维离散傅立叶变换的性质

12. 拉普拉斯函数:

$$\nabla^2 f(x,y) = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$$

其傅立叶变换为:

$$F\{\nabla^2 f(x,y)\} = -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

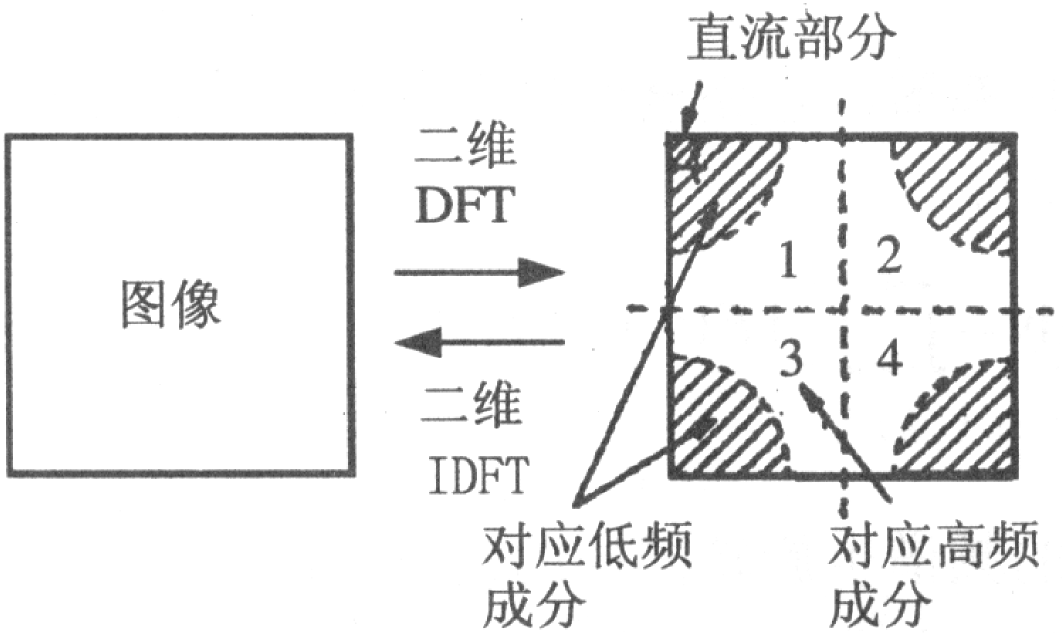
这个定理将在图象的边界提取中用到

频域变换——傅立叶变换

- 二维离散傅立叶变换的显示与计算
  - 离散傅立叶变换的显示
  - 离散傅立叶变换的幅度与相位
  - 离散傅立叶变换的计算
  - 快速傅里叶变换（FFT）原理

二维离散傅立叶变换的显示

✓按照标准的傅里叶变换公式，其幅度谱的强度分布具有下列特性：



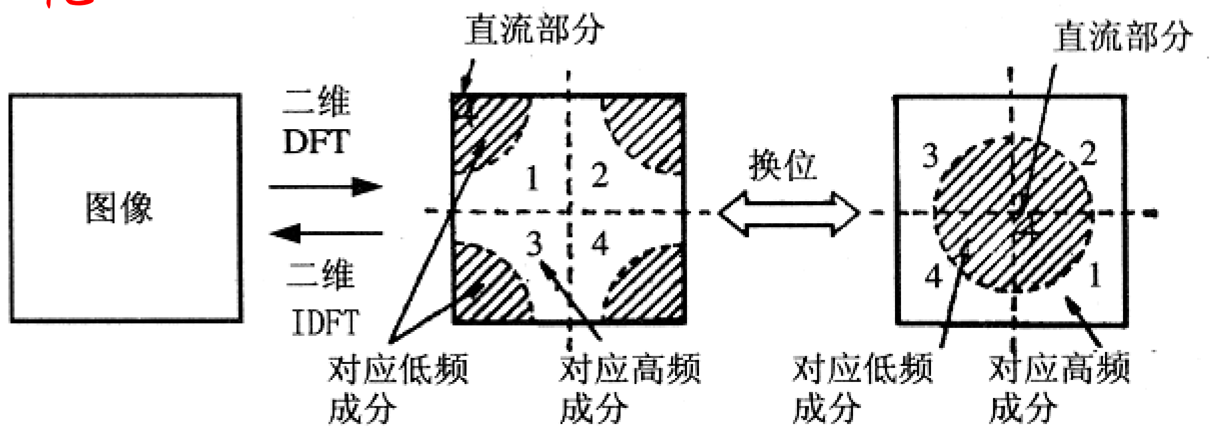
频域变换——傅立叶变换

➢二维离散傅立叶变换的显示

✓在光学傅立叶变换中，人们已习惯于变化领域中的低谱部分位于中央

✓使频域的频谱分布中间低、周围高，有利于对频谱的解释和进行各种计算与分析

✓为此，借助于傅里叶变换的周期性与频率位移性质，对此，通常对频域进行换位以使频谱分布符合上述要求——图像中心化



➢ 二维离散傅立叶变换的显示

✓使频域的中心位移$u_0=v_0=N/2$:

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2})$$

✓相当于对原始图像$f(x, y)$乘以$(-1)^{m+n}$，再进行傅里叶变换

$$F'(u,v)=F\{f(x,y)(-1)^{x+y}\}$$

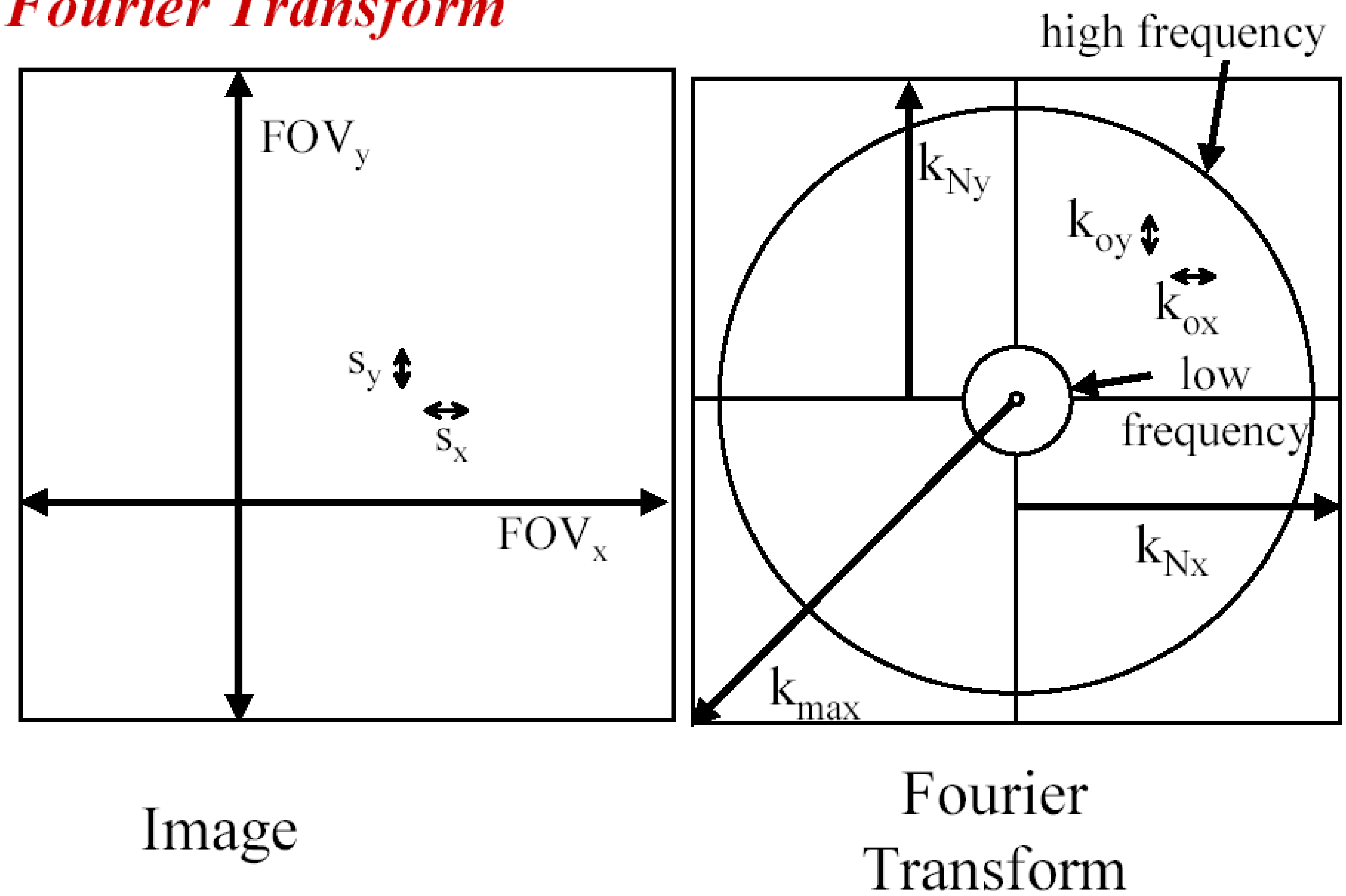
✓对应于**F'(u,v)**的反变换不等于***f(x,y)***:

$$f(x,y)=F^{-1}\{F'(u,v)\}\times(-1)^{x+y}$$

✓<u>图像的傅里叶变换显示图例</u>

➤二维傅立叶变换域分布特性

Fourier Transform

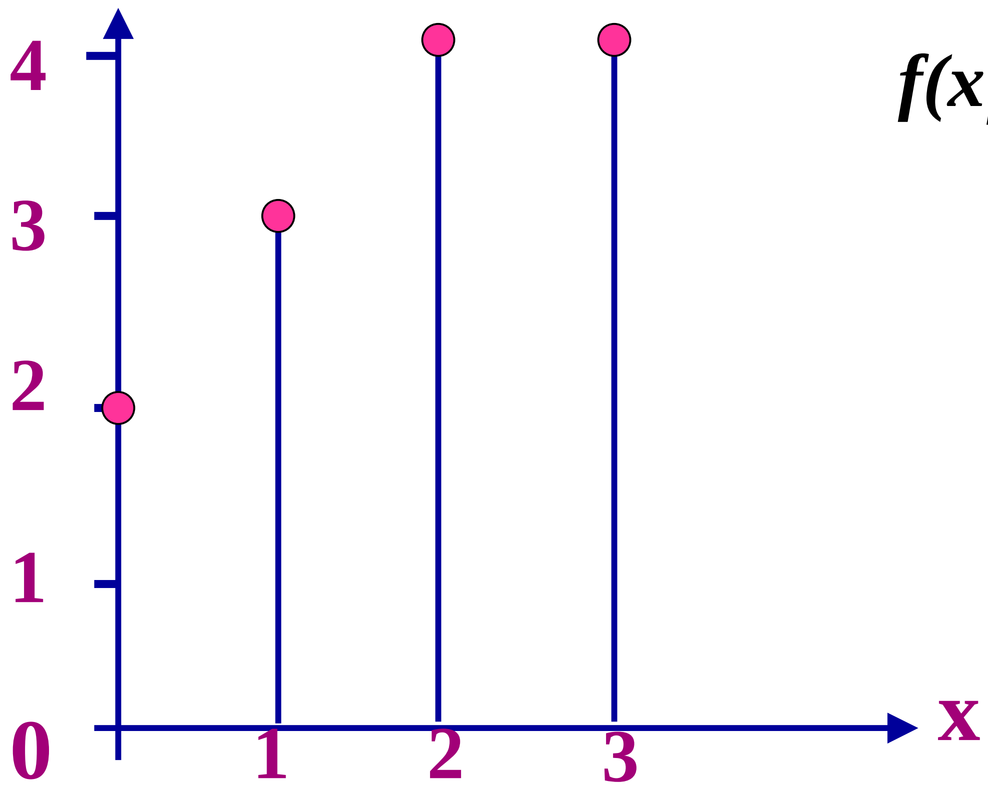


频域变换——傅立叶变换

- 离散傅立叶变换的幅度与相位
  - ✓图像信号的傅里叶变换包含幅度与相位两部分
  - ✓幅度谱具有较明显的信号结构特征和易于解释
  - ✓实验证明，幅度本身只包含有图象本身含有的周期结构，并不表示其在何处
  - ✓相位谱类似随机图案，一般难以进行解释
  - ✓物体在空间的移动，相当于频域的相位移动，<u>相位谱具有同样重要的意义</u>

单凭幅度或相位信息，均不足以恢复原图象

➢二维离散傅立叶变换的计算举例



$f(x_i)=\{2,3,4,4\}$

- 二维离散傅立叶变换的计算举例

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 1/4\, \Sigma\, f(x)\exp[0] \\
&= 1/4[f(0) + f1(1) + f(2) + f(3)] \\
&= 1/4(2 + 3 + 4 + 4) \\
&= 3.25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 1/4\, \Sigma\, f(x)\exp[-j2\pi x/4)] \\
&= 1/4(2e^{0} + 3e^{-j2\pi/4} + 4e^{-j2\pi 2/4} + 4e^{-j2\pi 3/4}) \\
&= 1/4(-2 + j)
\end{aligned}
$$

$$F(2) = -1/4(1 + j0)$$

$$F(3) = -1/4(2 + j)$$

■ 快速傅里叶变换（FFT）原理

➢ FFT算法——基本思想

1) 可将变换公式分解为奇数项和偶数项之和

令: $$w_N^{ux} = \exp(-j\frac{2\pi ux}{N})$$

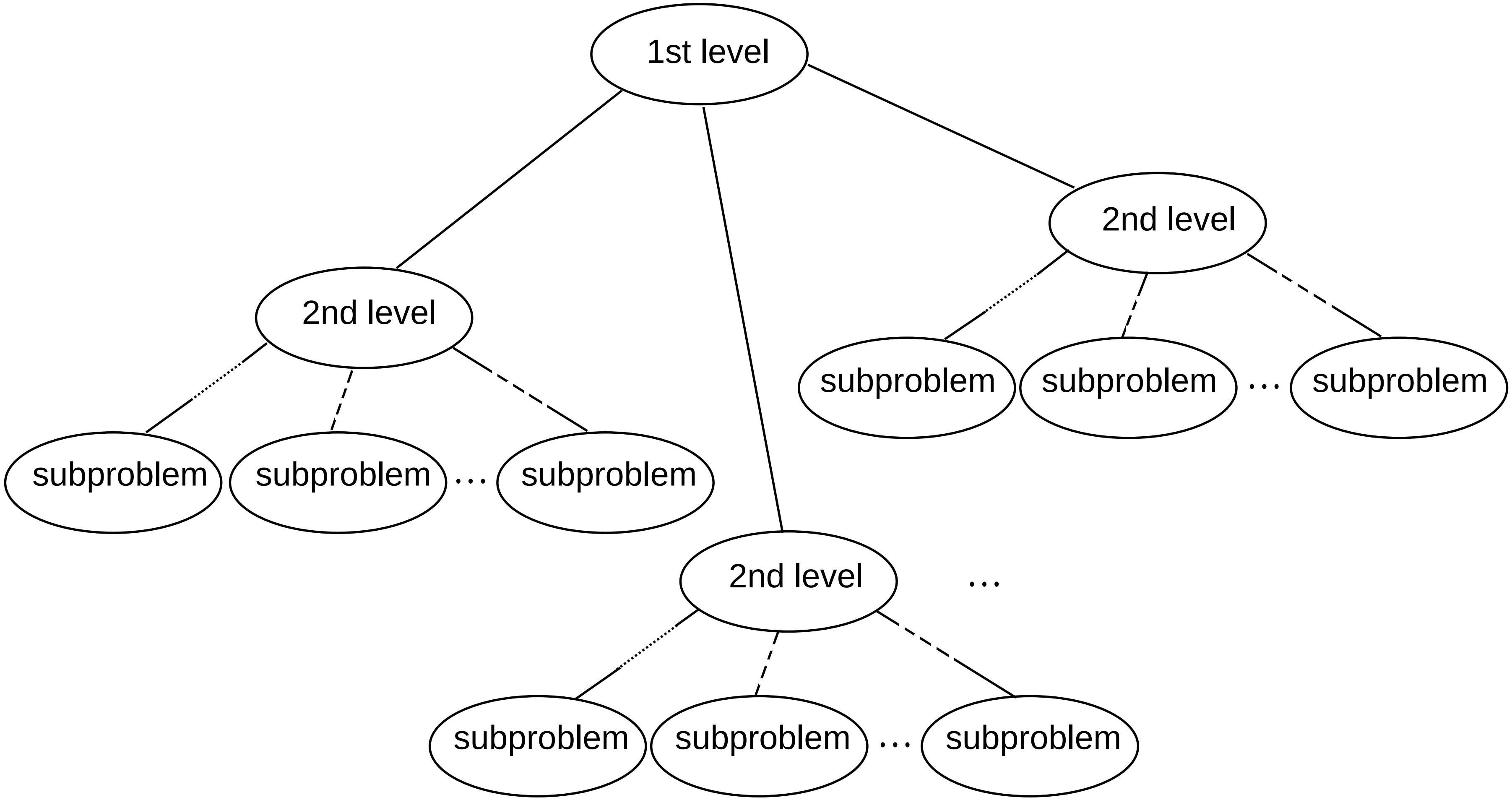
可推导出：$$F(u) = \frac{1}{2}[F_e(u) + w_N^u F_o(u)]$$

（分成奇数项和偶数项之和）

2) 不断地将原函数分为奇数项和偶数项之和，最终得到需要的结果

FFT是将复杂的运算变成重复两个数相加（减）的简单运算

- **Divide-and-Conquer Technique**



■ 快速傅里叶变换（FFT）原理

例：设对一个函数进行快速**Fourier**变换，函数序列为：

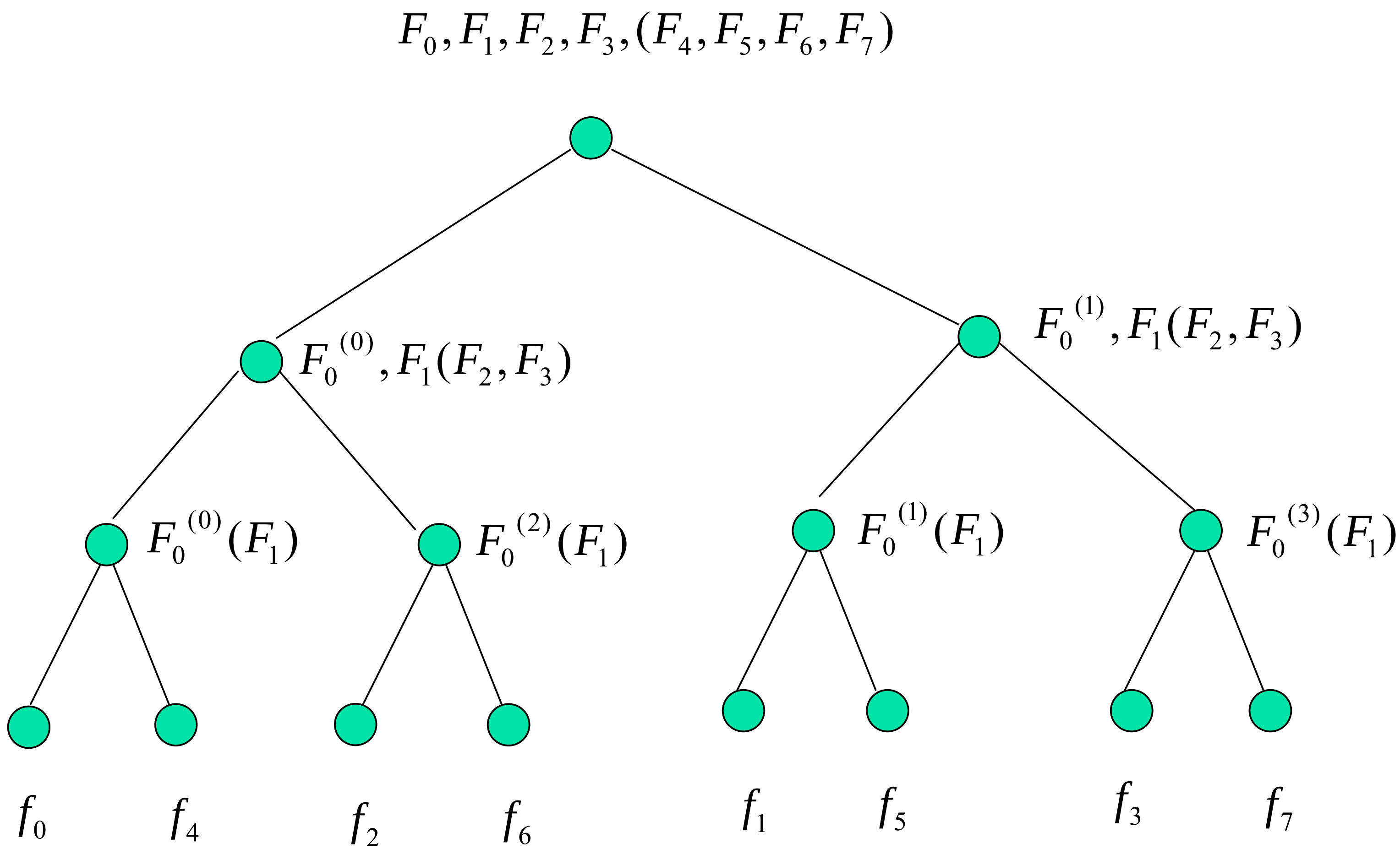
$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$$

分成偶数、奇数部分：

$$f_0, f_2, f_4, f_6 \quad | \quad f_1, f_3, f_5, f_7$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f_0, f_4 \;|\; f_2, f_6 \qquad f_1, f_5 \;|\; f_3, f_7$$



$F_0, F_1, F_2, F_3, (F_4, F_5, F_6, F_7)$
$F_0^{(0)}, F_1(F_2, F_3)$
$F_0^{(1)}, F_1(F_2, F_3)$
$F_0^{(0)}(F_1)$
$F_0^{(2)}(F_1)$
$F_0^{(1)}(F_1)$
$F_0^{(3)}(F_1)$
f_0
f_4
f_2
f_6
f_1
f_5
f_3
f_7

频域变换——快速傅立叶变换

$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

偶数区：f_0, f_4, f_2, f_6

$$F^{(0)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_0 + w_2^0 f_4\right]$$
$$F^{(0)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_0 - w_2^0 f_4\right]$$
$$F^{(2)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_2 + w_2^0 f_6\right]$$
$$F^{(2)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_2 - w_2^0 f_6\right]$$

$$F^{(0)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0) + w_4^0 F^{(2)}(0)\right]$$
$$F^{(0)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1) + w_4^1 F^{(2)}(1)\right]$$
$$F^{(0)}(2) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0) - w_4^0 F^{(2)}(0)\right]$$
$$F^{(0)}(3) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1) - w_4^1 F^{(2)}(1)\right]$$

基数区：f_1, f_5, f_3, f_7

$$F^{(1)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_1 + w_2^0 f_5\right]$$
$$F^{(1)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_1 - w_2^0 f_5\right]$$
$$F^{(3)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_3 + w_2^0 f_7\right]$$
$$F^{(3)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[f_3 - w_2^0 f_7\right]$$

$$F^{(1)}(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(0) + w_4^0 F^{(3)}(0)\right]$$
$$F^{(1)}(1) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(1) + w_4^1 F^{(3)}(1)\right]$$
$$F^{(1)}(2) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(0) - w_4^0 F^{(3)}(0)\right]$$
$$F^{(1)}(3) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(1) - w_4^1 F^{(3)}(1)\right]$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$F(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)+w_8^0F^{(1)}(0)\right]$$
$$F(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)+w_8^1F^{(1)}(1)\right]$$
$$F(2)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(2)+w_8^2F^{(1)}(2)\right]$$
$$F(3)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(3)+w_8^3F^{(1)}(3)\right]$$
$$F(4)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)-w_8^0F^{(1)}(0)\right]$$
$$F(5)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)-w_8^1F^{(1)}(1)\right]$$
$$F(6)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(2)-w_8^2F^{(1)}(2)\right]$$
$$F(7)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(3)-w_8^3F^{(1)}(3)\right]$$

■ 逆向FFT算法

➢ 算法思想：用正向变换计算逆向变换

设$F(u)=\mathrm{FFT}[f(x)]$

可有：

$$f(x) = \mathrm{FFT}^{-1}[F(u)] = N\cdot\{\mathrm{FFT}[F^{*}(u)]\}^{*}$$

即：对$F(u)$取共轭，利用正向FFT进行变换计算，其结果取共轭后再乘以N，即可得到$f(x)$。

- 二维快速Fourier变换:

利用傅里叶变换的分离性质，对二维FFT进行2次的一维FFT变换

$$F(u,\upsilon) = FFT_{行}\{FFT_{列}[f(x,y)]\}$$

傅里叶变换的应用

- 在图像高低通滤波中的应用
- 在图像噪声滤波中的应用
- 在图像的选择性滤波中的应用
- 在图像压缩中的应用
- 在图像增强中的应用

频域变换——傅立叶变换

- 思考题
  - 你手上有一台刚修理好的摄像机，你怀疑视频图像中含有电源**60Hz**干扰信号。但制造商认为无问题，你如何证明他错了。假定你有一套图像数字化与分析设施，可以数字化**TV**图像并进行静止图像的**FFT**变换和显示。描述这个实验及预期结果。
- 习题
  - 傅里叶变换的存在条件是什么？
  - 图像的二维频谱在显示和处理时要注意什么？
  - 用图示法说明偶函数和奇函数的卷积是一个奇函数。
  - 自行总结傅里叶变换的要点与特性
- 选做实验题
  - 编写一个程序，它可以从数字图像中抽出一水平扫描行（线）并计算和显示该行的一维傅里叶变换（幅度谱和相位谱）。用一个逐渐变窄的垂直条作为输入图像来验证相似性定理。

第四章（1）
结束