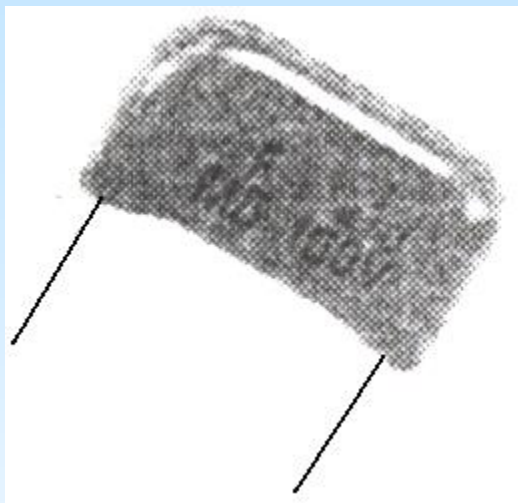
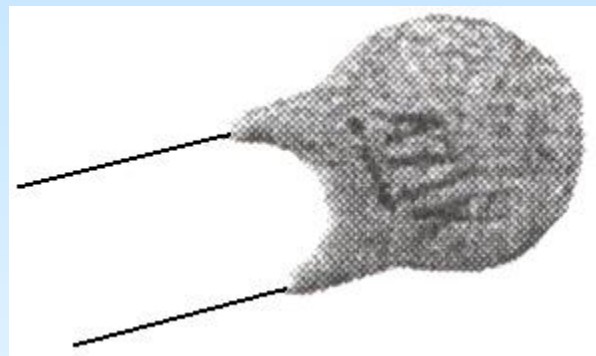


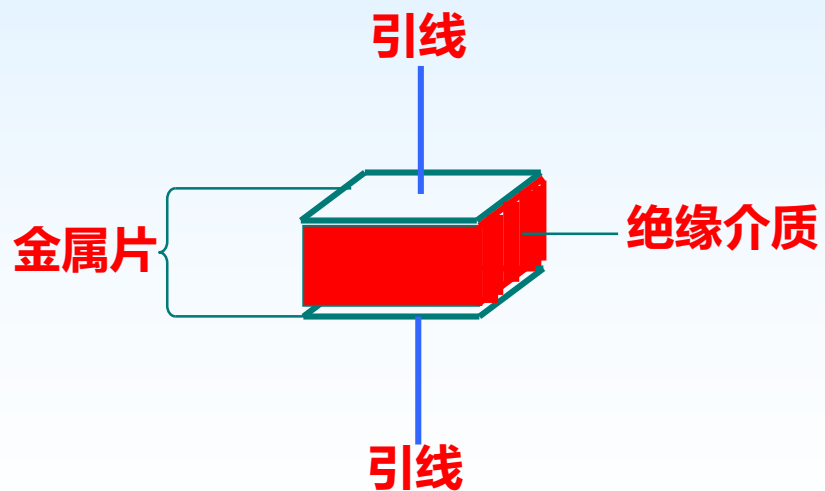
## §2 - 1 电容元件



电容器



电路符号

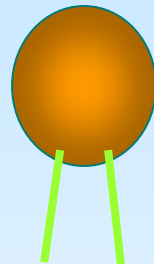


# 电容、电容器 (Capacitance、Capacitor)

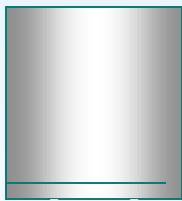
电容器是一储能元件。



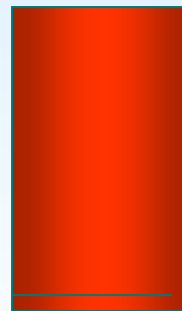
纸质电容器



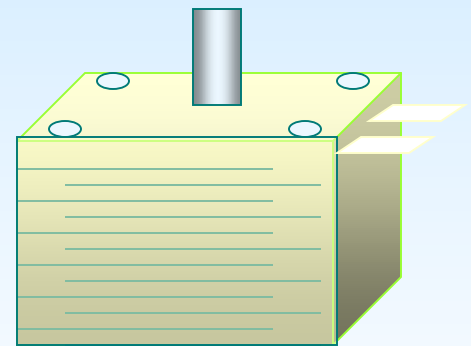
陶瓷电容器



电解电容器



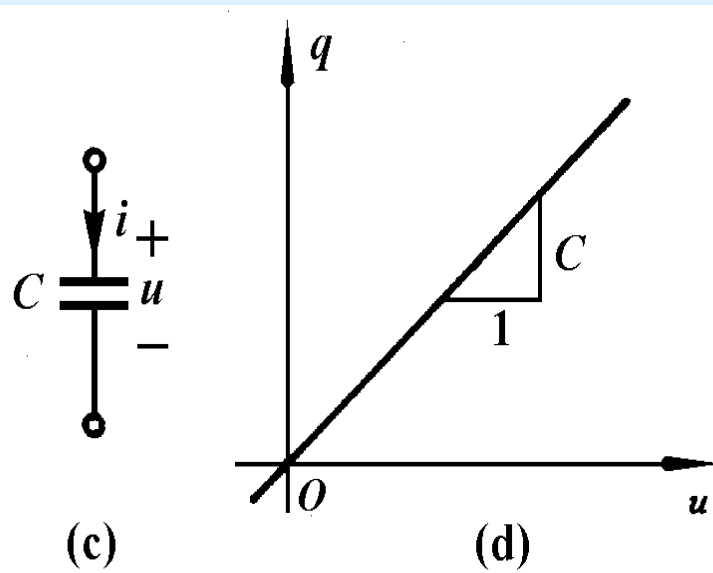
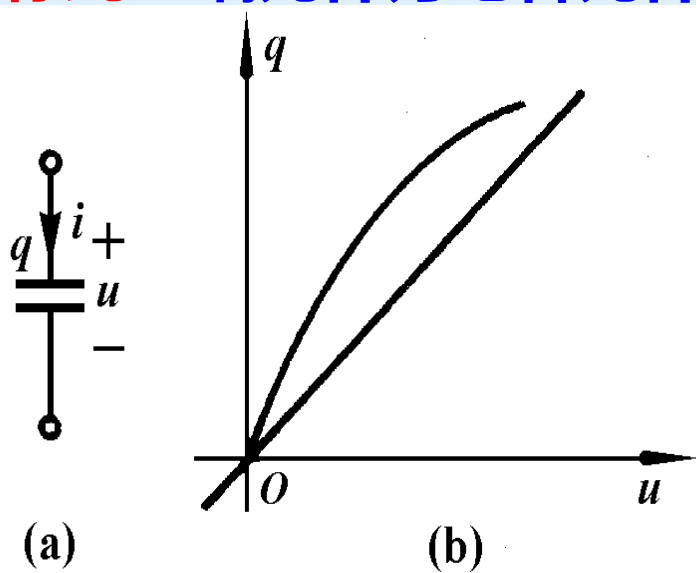
钽电容器



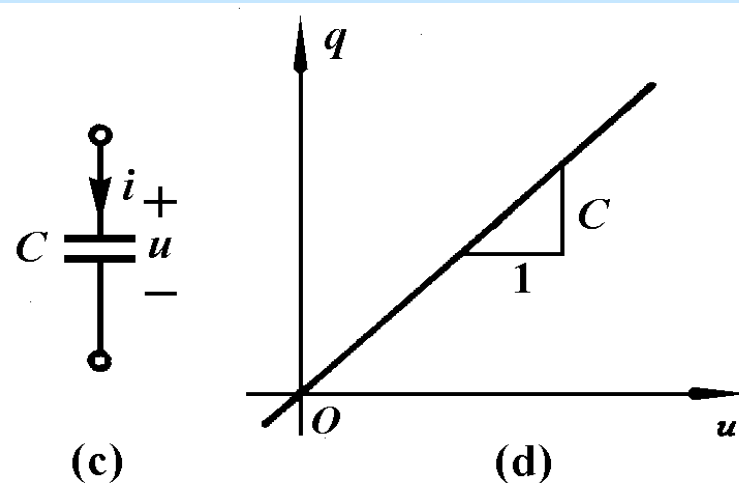
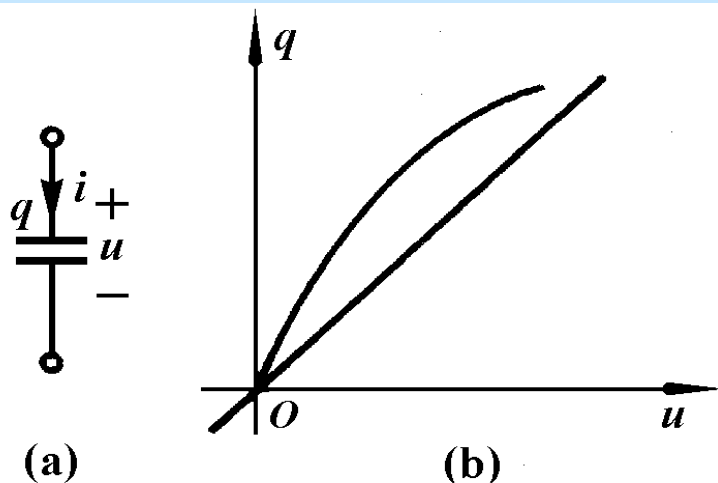
可变电容器

# 一、 电容元件

电容元件的定义是：如果一个二端元件在任一时刻，其**电荷与电压**之间的关系由 $uq$ 平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电容元件。



电容元件的符号和特性曲线如图 (a)和(b)所示。



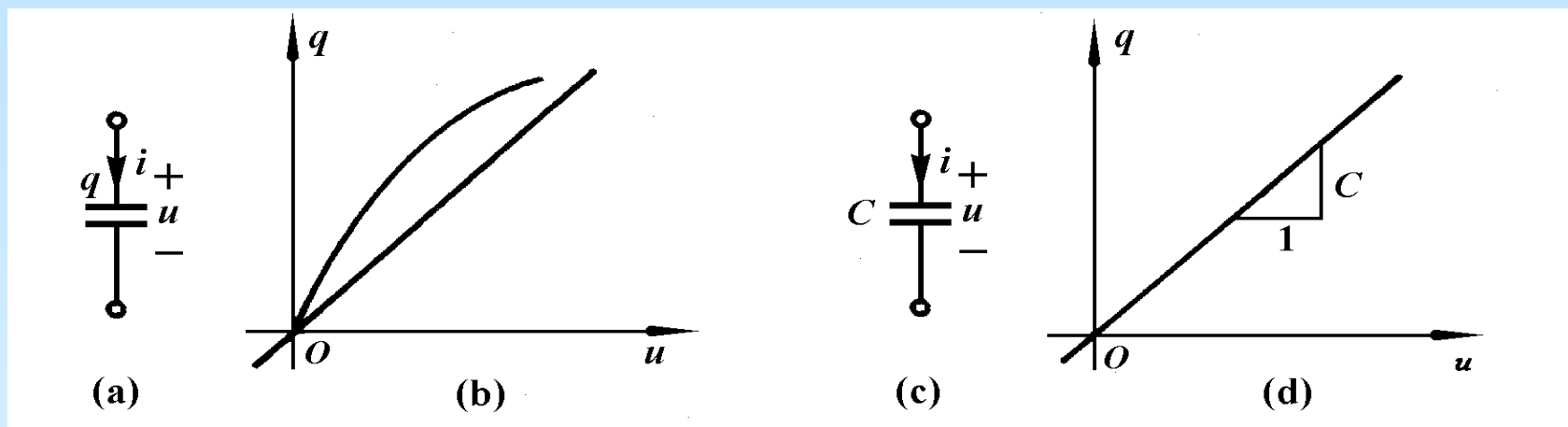
a) 电容元件的符号

(c) 线性时不变电容元件的符号

b) 电容元件的特性曲线

(d) 线性时不变电容元件的特性曲线

其特性曲线是通过坐标原点一条直线的电容元件称为线性电容元件，否则称为非线性电容元件。



**线性时不变电容元件的符号与特性曲线如图(c)和(d)所示，它的特性曲线是一条通过原点不随时间变化的直线，其数学表达式为：**

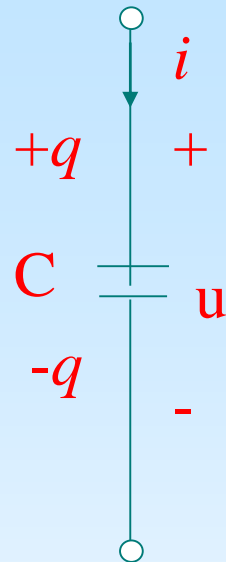
$$q = Cu$$

**式中的系数 $C$ 为常量，与直线的斜率成正比，称为电容，单位是法[拉],用F表示。**

## 二、电容元件的电压电流关系

对于线性时不变电容元件来说，在采用电压电流关联参考方向的情况下，可以得到以下关系式：

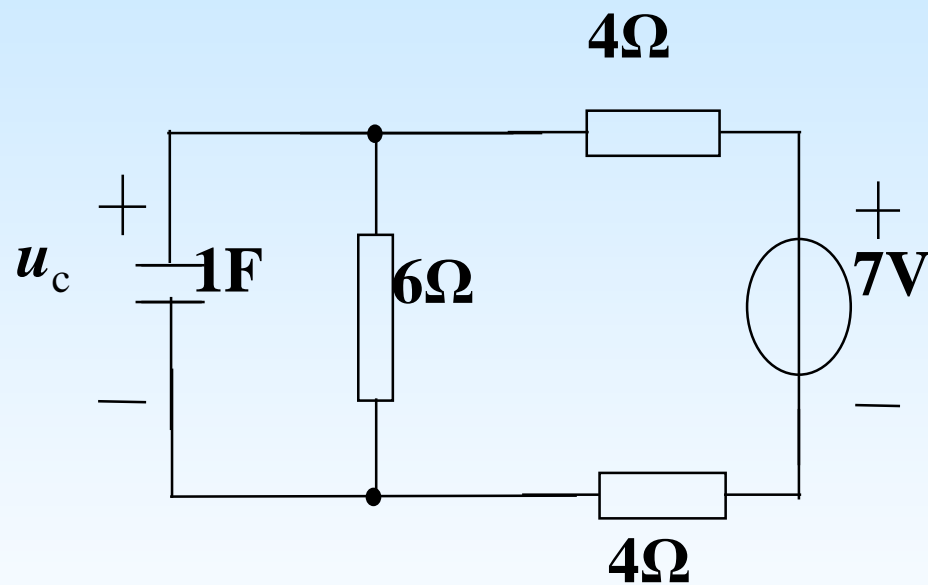
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt}$$



此式表明电容中的电流与其电压对时间的变化率成正比，它与电阻元件的电压电流之间存在确定的约束关系不同，电容电流与此时刻电压的数值之间并没有确定的约束关系。

在直流电源激励的电路模型中，当各电压电流均不随时间变化的情况下，电容元件相当于一个开路( $i=0$ )。 (重点)

例1、图示稳态电路，求 $u_c$ 。(3V)



## ➤ 电容元件

电容器是一种能储存电荷的器件,电容元件是电容器的理想化模型。

当电容上电压与电荷为关联参考方向时, 电荷 $q$ 与 $u$ 关系为:  $q(t)=Cu(t)$

$C$ 是电容的电容量, 亦即特性曲线的斜率。 当

$u$ 、 $i$ 为关联方向时, 据电流强度定义有  $i=C \, du(t)/dt$

非关联时:  $i= -C \, du(t)/dt$

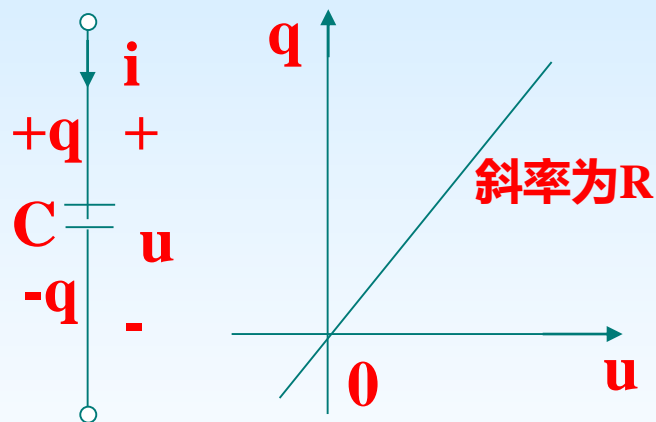
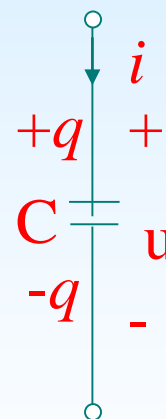
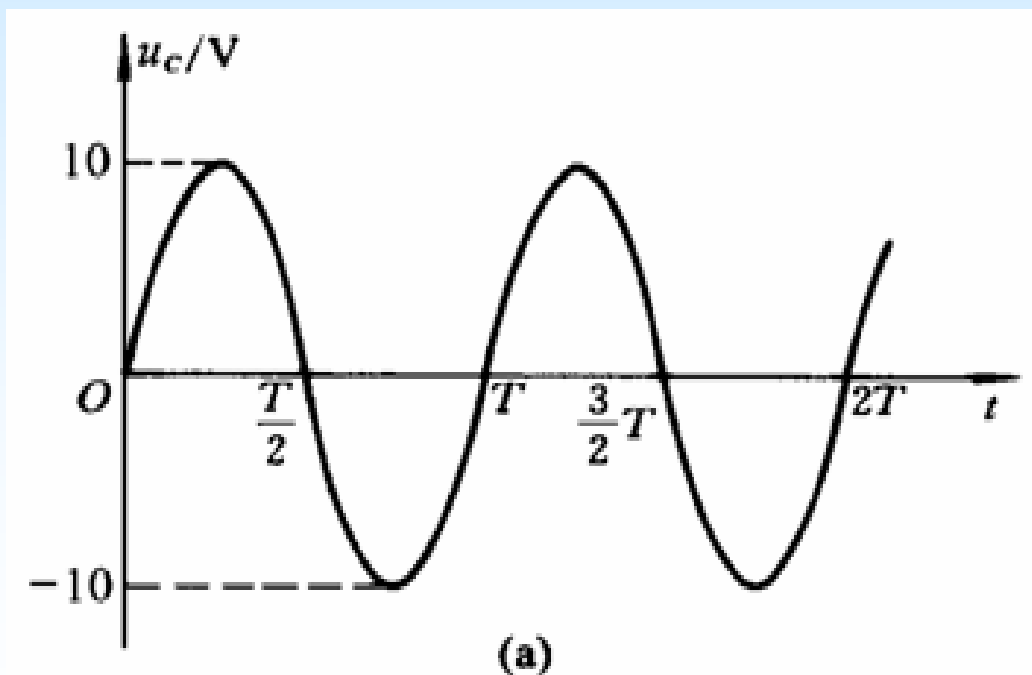


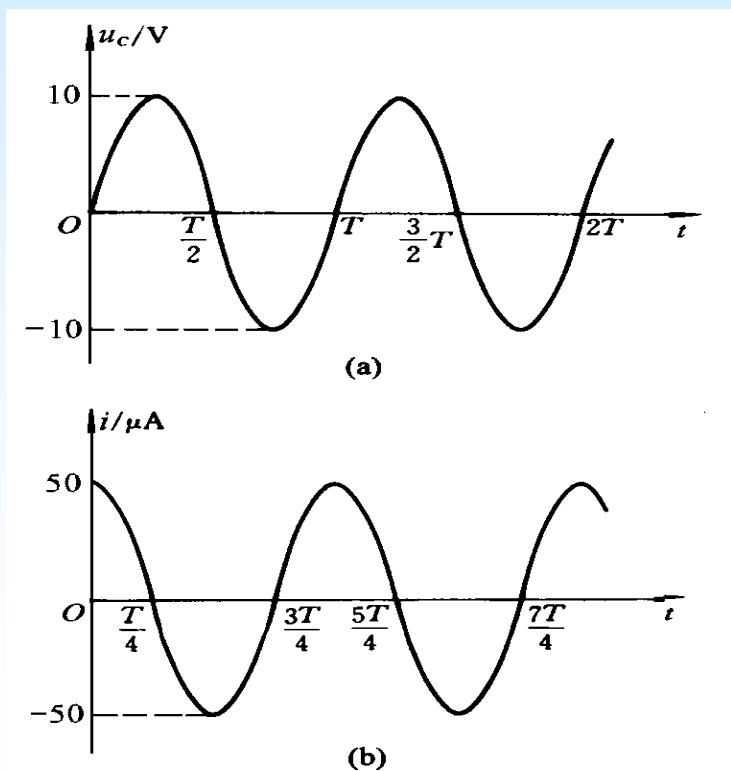
图1 电容的符号、线性非时变电容的特性曲线



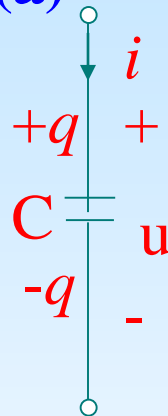
在已知电容电压 $u(t)$ 的条件下，容易求出其电流 $i(t)$ 。例如已知 $C=1\mu\text{F}$ 电容上的电压为 $u(t)=10\sin(5t)\text{V}$ ，其波形如图(a)所示，与电压参考方向关联的电流为：



在已知电容电压 $u(t)$ 的条件下，容易求出其电流 $i(t)$ 。例如已知 $C=1\mu\text{F}$ 电容上的电压为 $u(t)=10\sin(5t)\text{V}$ ，其波形如图(a)所示，与电压参考方向关联的电流为：

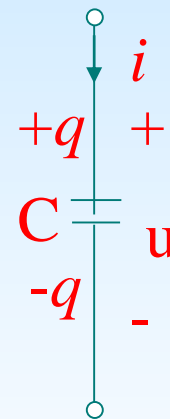
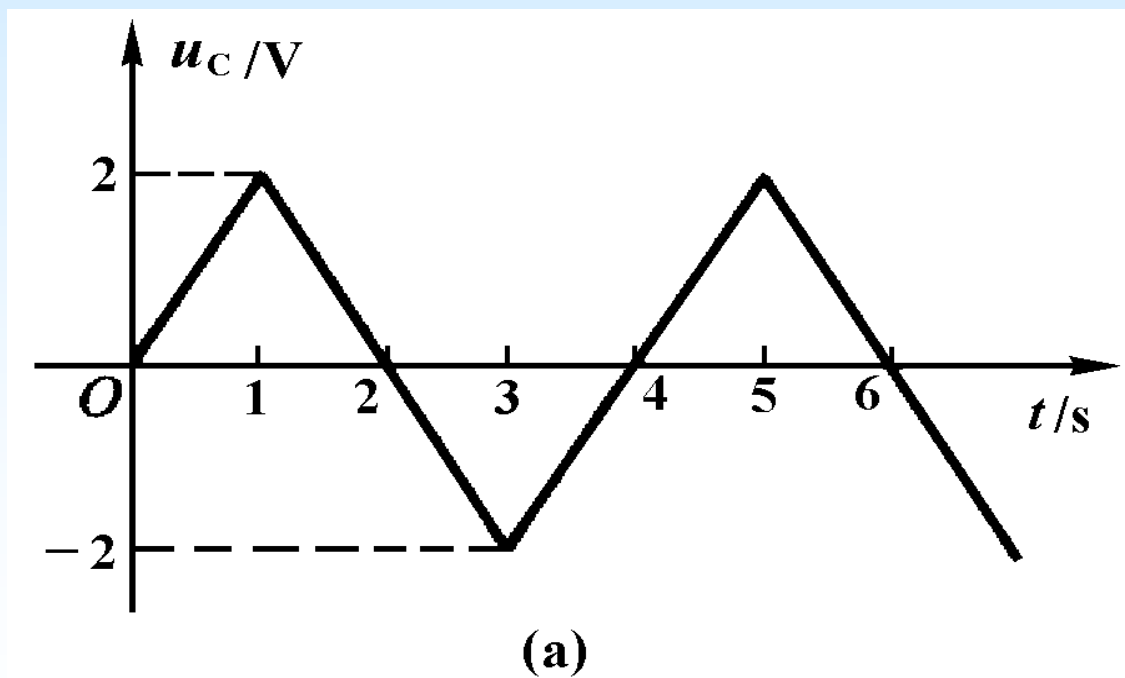


$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{du}{dt} \\
 &= 10^{-6} \times \frac{d[10 \sin(5t)]}{dt} \\
 &= 50 \times 10^{-6} \cos(5t) \text{ A} \\
 &= 50 \cos(5t) \mu\text{ A}
 \end{aligned}$$

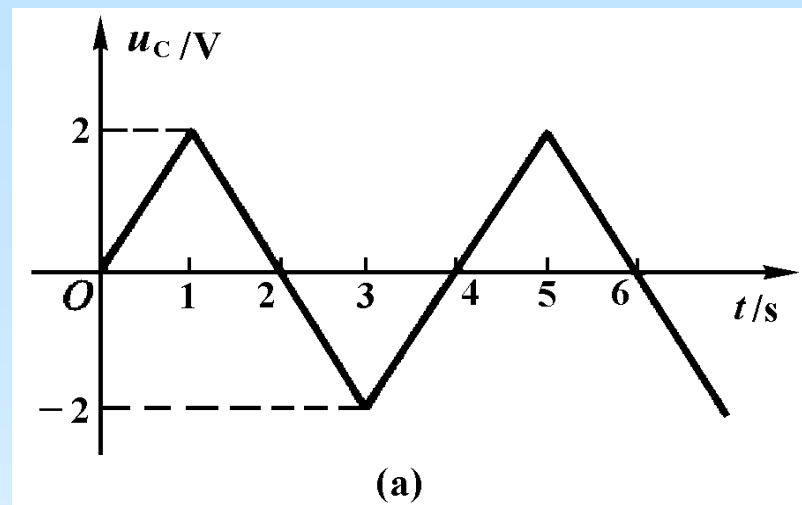


例2 已知 $C=0.5\mu\text{F}$ 电容上的电压波形如图所示,

试求电压电流采用关联参考方向时的电流 $i_C(t)$ , 并画出波形图。

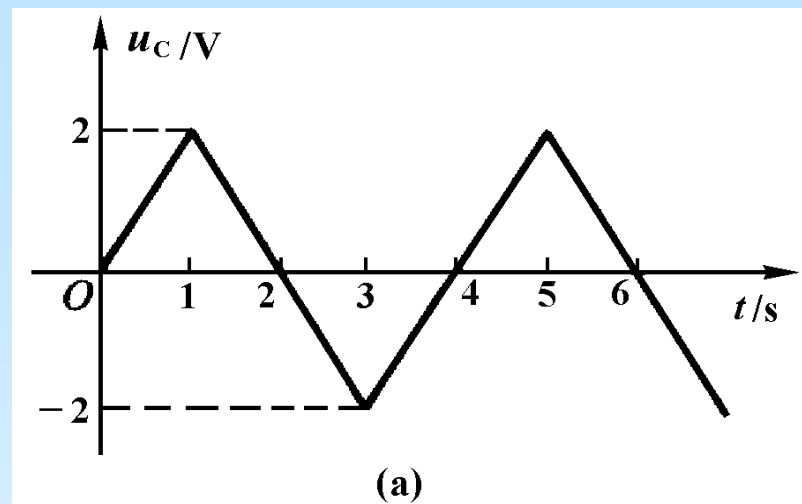


**解：根据波形的具体情况，  
按照时间分段计算**



**1.当 $0 \leq t \leq 1\text{s}$  时,  $u_C(t)=2t$ , 可以得到:**

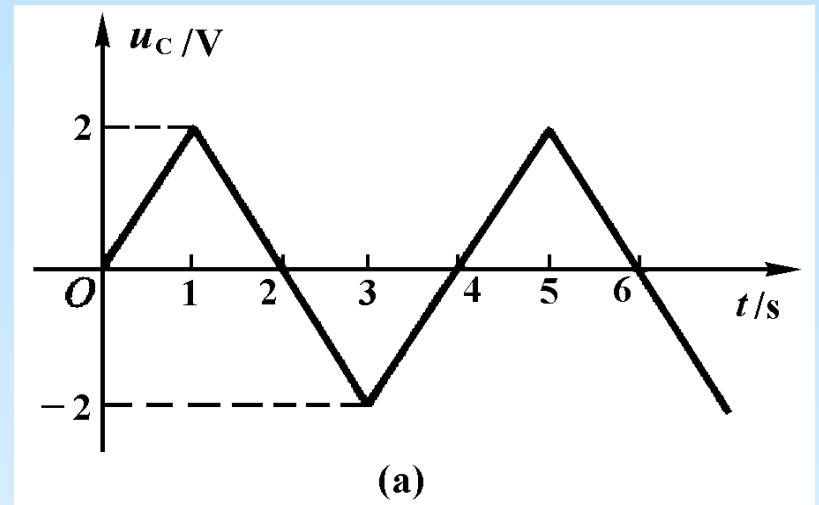
**解：根据波形的具体情况，  
按照时间分段计算**



**1.当 $0 \leq t \leq 1$ s 时,  $u_C(t)=2t$ , 可以得到:**

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(2t)}{dt} = 1 \times 10^{-6} \text{ A} = 1 \mu\text{A}$$

**解：根据波形的具体情况，  
按照时间分段计算**

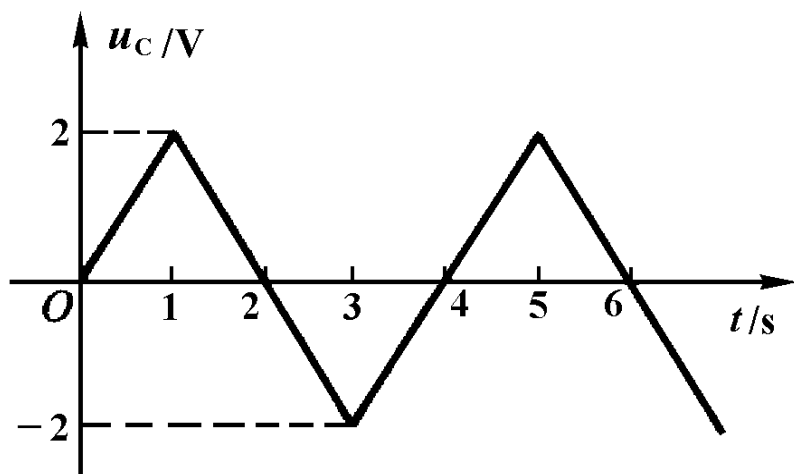


**1.当 $0 \leq t \leq 1$ s 时,  $u_C(t)=2t$ , 可以得到:**

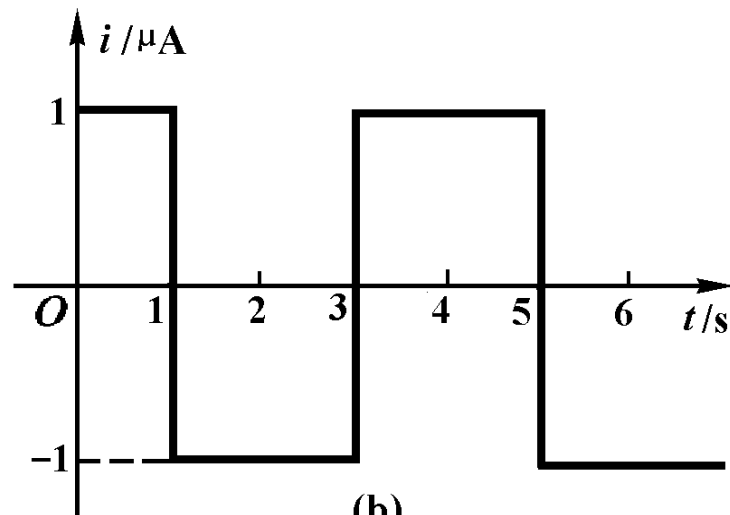
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(2t)}{dt} = 1 \times 10^{-6} \text{ A} = 1 \mu\text{A}$$

**2.当 $1 \text{s} \leq t \leq 3 \text{s}$ 时,  $u_C(t)=4-2t$ , 可以得到:**

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(4-2t)}{dt} = -1 \times 10^{-6} \text{ A} = -1 \mu\text{A}$$



(a)



(b)

3.当 $3s \leq t \leq 5s$ 时,  $u_C(t) = -8 + 2t$ , 可以得到:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(8 + 2t)}{dt} = 1 \times 10^{-6} \text{ A} = 1 \mu\text{A}$$

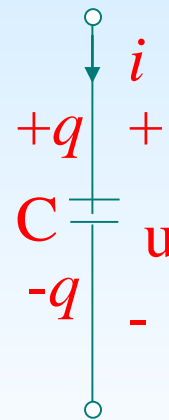
4.当 $5s \leq t$ 时,  $u_C(t) = 12 - 2t$ , 可以得到:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(12 - 2t)}{dt} = -1 \times 10^{-6} \text{ A} = -1 \mu\text{A}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

在已知电容电流 $i_C(t)$ 的条件下，其电压 $u_C(t)$ 为：

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi \\ &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi \end{aligned}$$



其中

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi$$

称为电容电压的初始值。



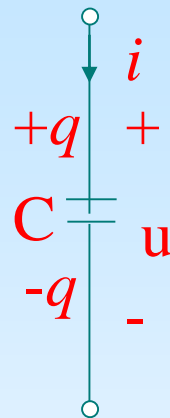
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi$$

从上式可以看出电容具有两个基本的性质：

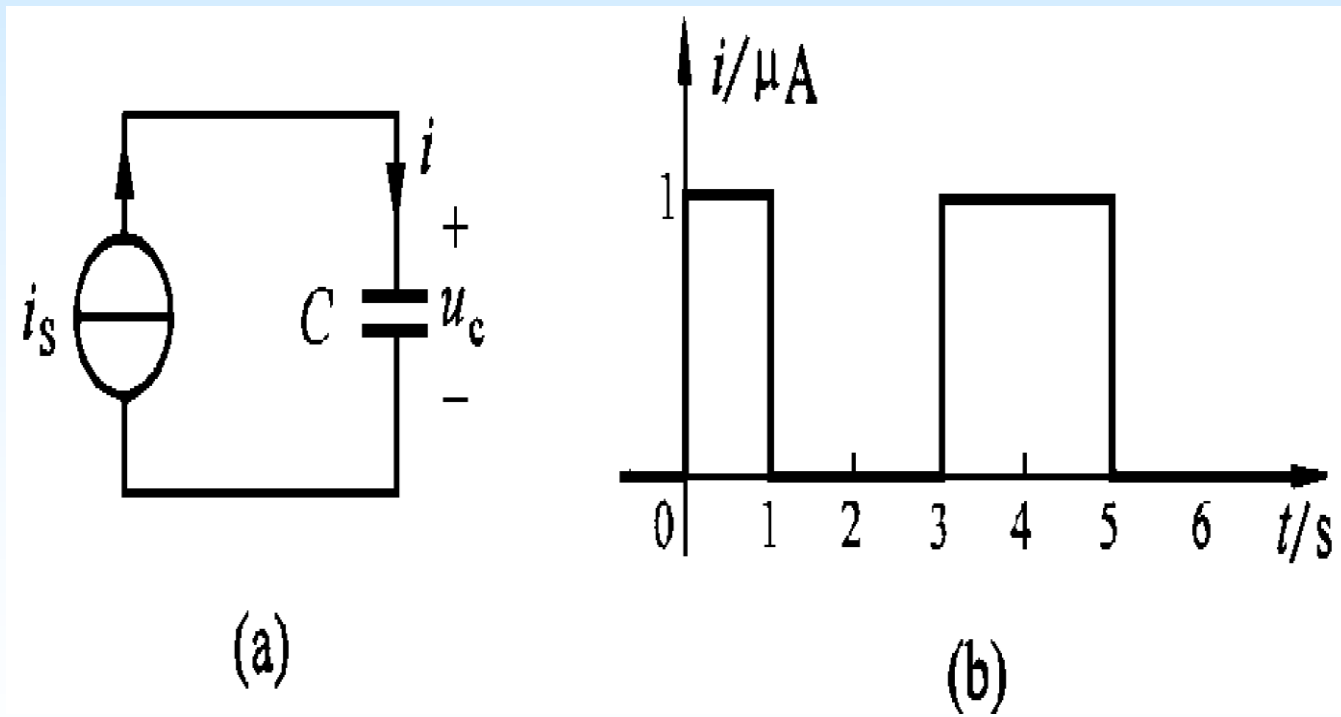
### (1) 电容电压的记忆性；

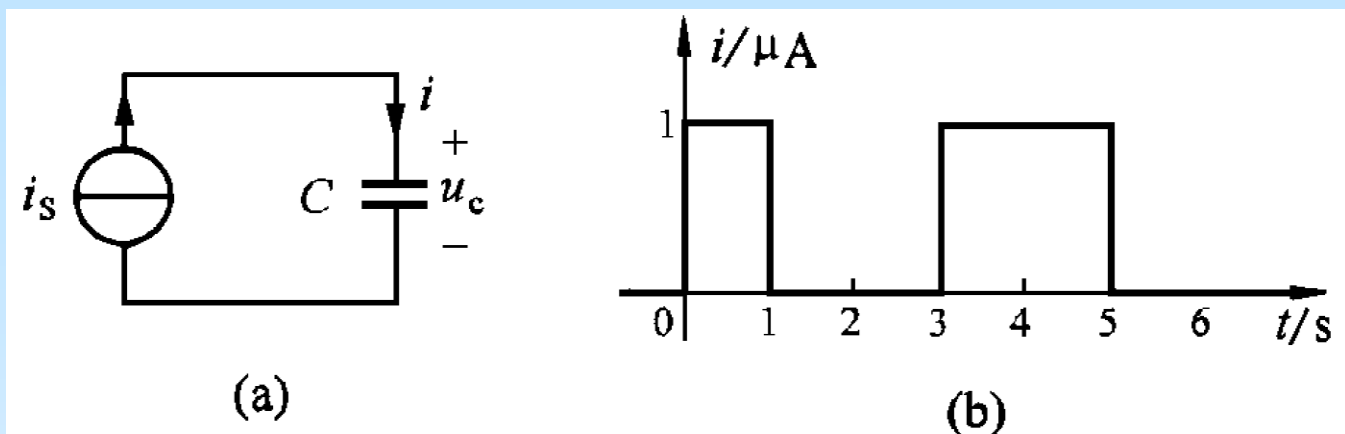
任意时刻  $T$  电容电压的数值  $u_C(T)$ ，要由从  $-\infty$  到时刻  $T$  之间的全部电流  $i_C(t)$  来确定。也就是说，此时刻以前流过电容的任何电流对时刻  $T$  的电压都有一定的贡献。这与电阻元件的电压或电流仅仅取决于此时刻的电流或电压完全不同，我们说电容是一种记忆元件。



**例3**  $C=0.5\mu\text{F}$ 的电容电流 $i(t)$ 波形如图所示，

**试求电容电压 $u_C(t)$ 。**





**解：根据图(b)波形的情况，按照时间分段来进行计算**

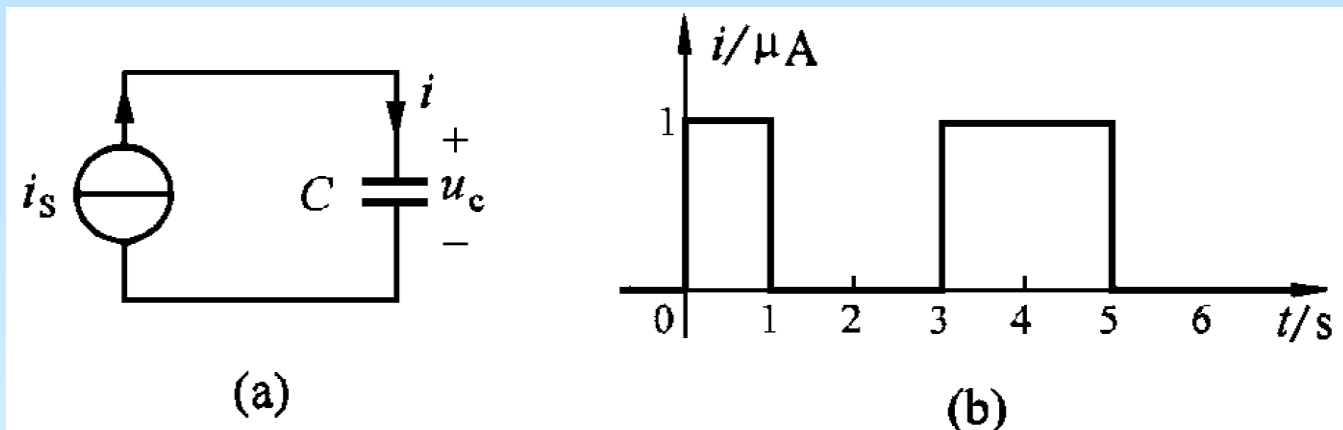
**1. 当 $t \leq 0$ 时， $i_C(t) = 0$ ，可以得到：**

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = 2 \times 10^6 \int_{-\infty}^t 0 d\xi = 0$$

**2. 当 $0 \leq t < 1\text{s}$ 时， $i_C(t) = 1\mu\text{A}$ ，可以得到：**

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(0) + 2 \times 10^6 \int_0^t 10^{-6} d\xi = 0 + 2t = 2t$$

当  $t = 1\text{s}$  时  $u_C(1\text{s}) = 2\text{V}$



3. 当  $1s \leq t < 3s$  时,  $i_C(t)=0$ , 可以得到:

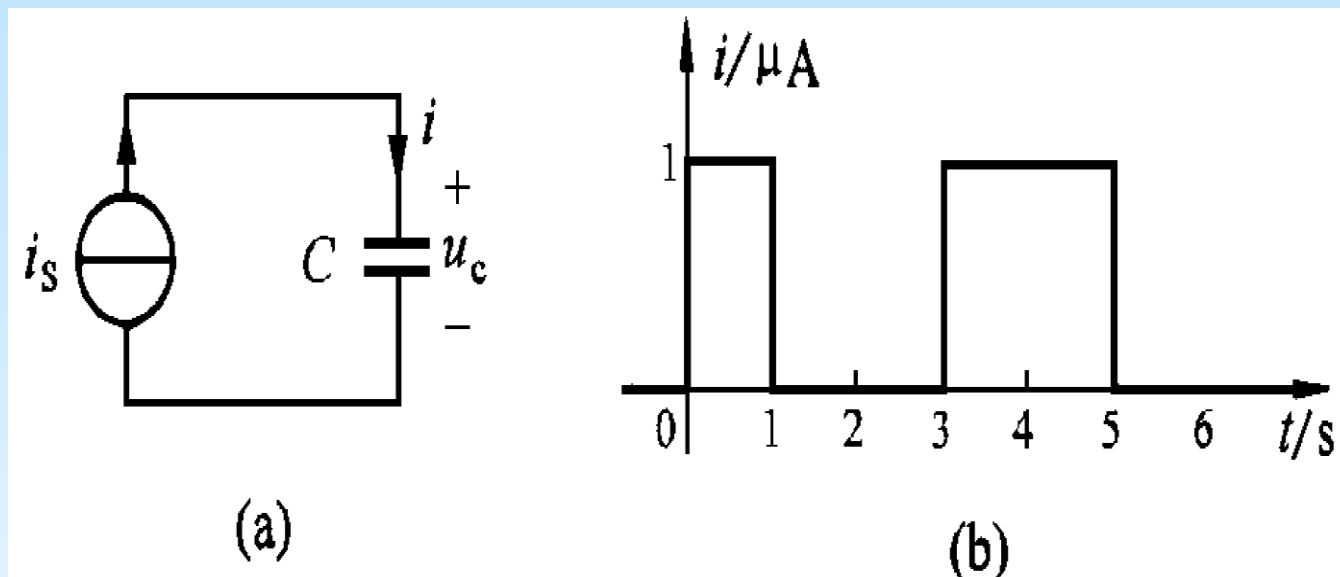
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(1) + 2 \times 10^6 \int_1^t 0 d\xi = 2V + 0 = 2V$$

当  $t = 3s$  时  $u_C(3s) = 2V$

4. 当  $3s \leq t < 5s$  时,  $i_C(t)=1\mu A$ , 可以得到:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(3) + 2 \times 10^6 \int_3^t 10^{-6} d\xi = 2 + 2(t - 3)$$

当  $t = 5s$  时  $u_C(5s) = 2V + 4V = 6V$

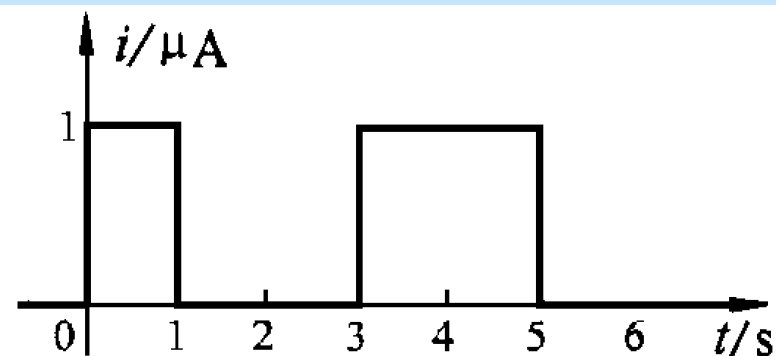


5. 当  $5s \leq t$  时,  $i_C(t)=0$ , 可以得到:

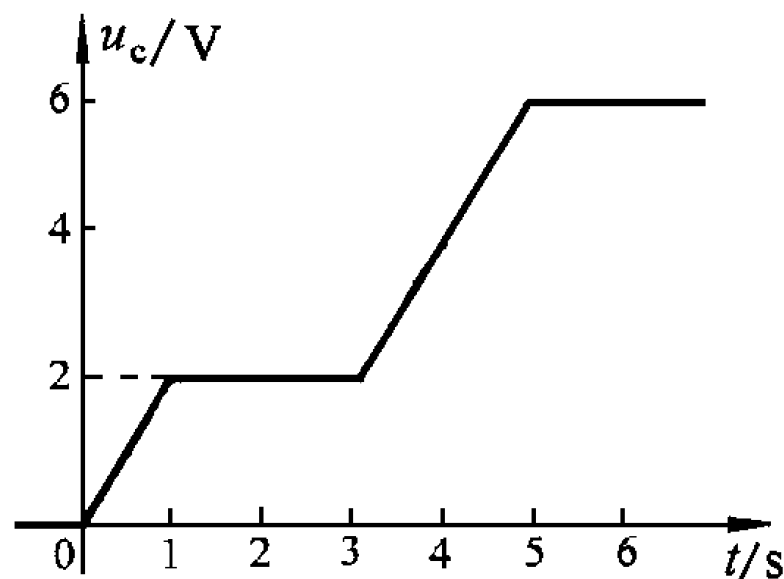
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(5) + 2 \times 10^6 \int_5^t 0 d\xi = 6V + 0 = 6V$$

根据以上计算结果，可以画出电容电压的波形如图(c)所示，由此可见任意时刻电容电压的数值与此时刻以前的全部电容电流均有关系。

例如，当 $1\text{s} < t < 3\text{s}$ 时，电容电流 $i_C(t) = 0$ ，但是电容电压并不等于零，电容上的2V电压是 $0 < t < 1\text{s}$ 时间内电流作用的结果。



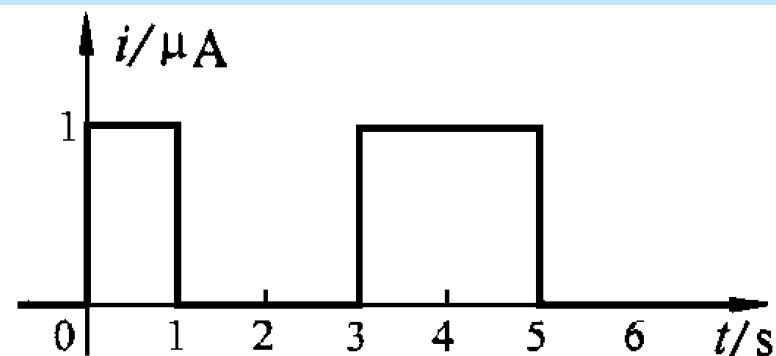
(b)



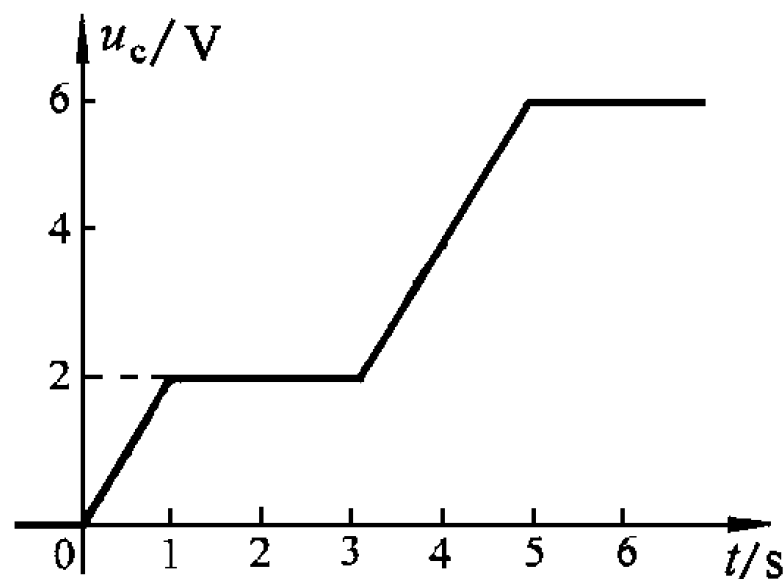
(c)

## (2) 电容电压的连续性

从上例的计算结果可以看出，**电容电流的波形是不连续的矩形波**，**电容电压的波形是连续的。**



(b)



(c)

## (2)电容电压的连续性

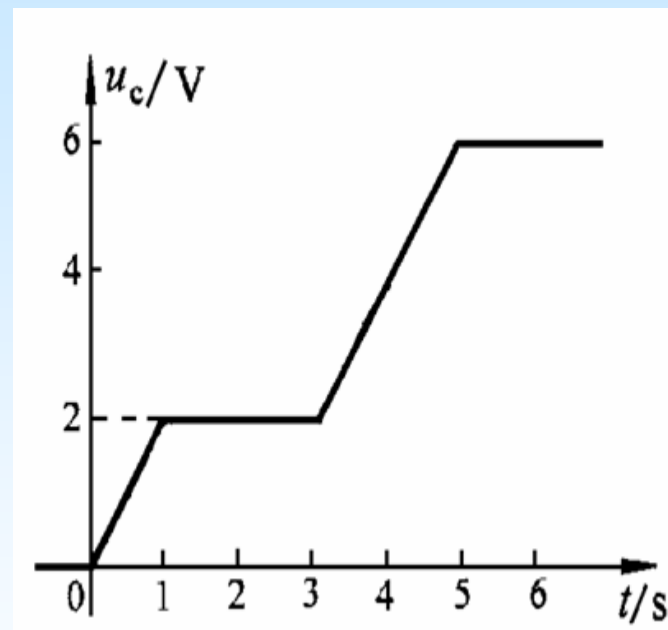
当电容电流有界时，电容电压不能突变的性质，常用

下式表示：

$$u_C(t_+) = u_C(t_-)$$

对于初始时刻 $t=0$ 来说，上式表示为：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

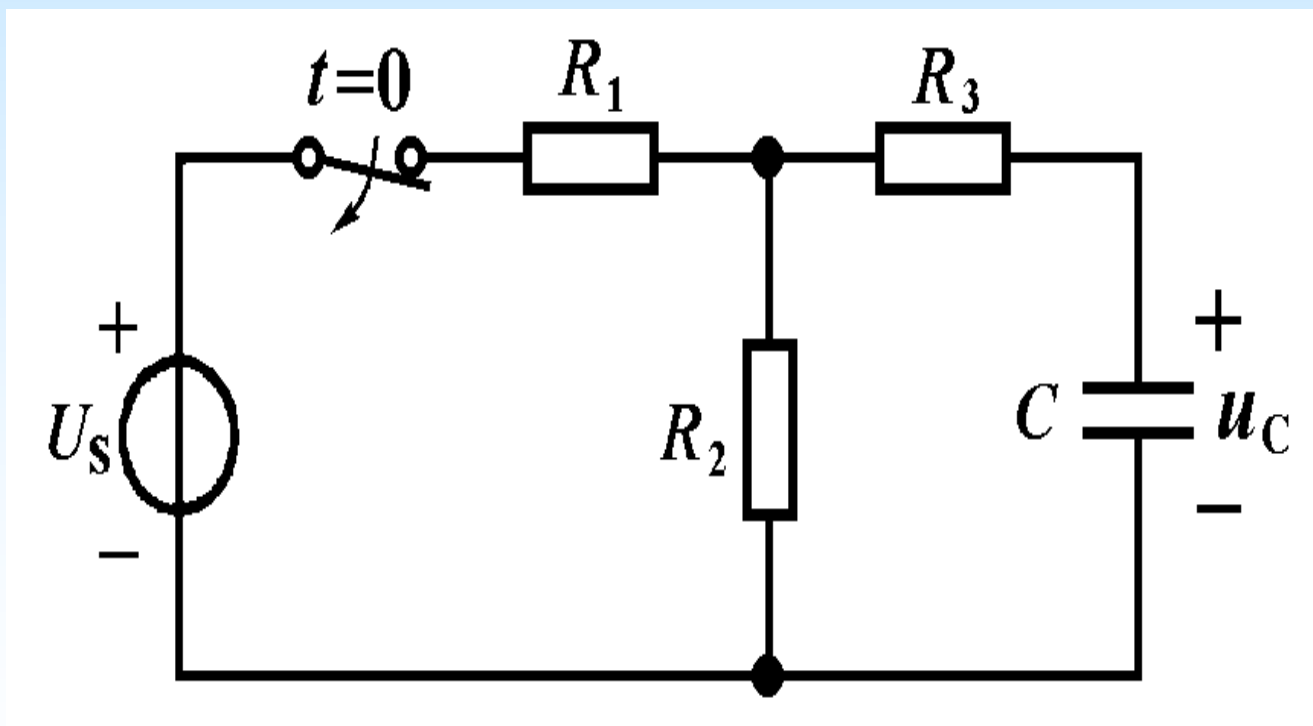


利用电容电压的连续性，可以确定电路中开关发生作用后一瞬间的电容电压值。

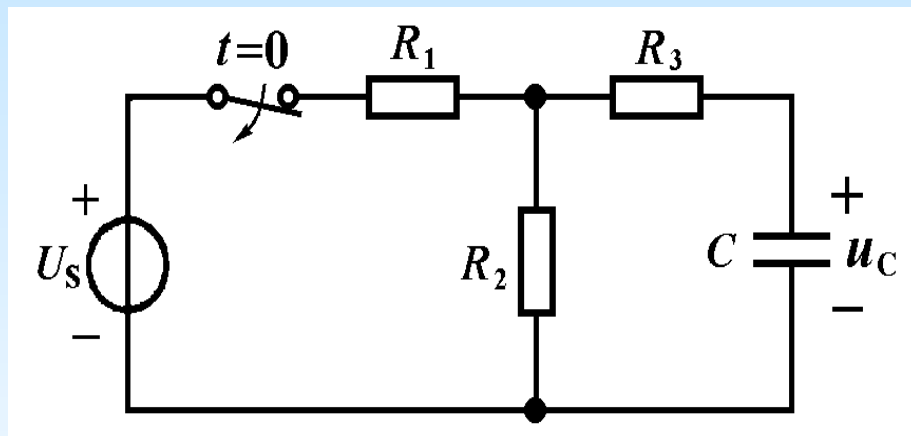


**例4 图所示电路的开关闭合已久，**

**求开关在 $t=0$ 时刻断开瞬间电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 。**

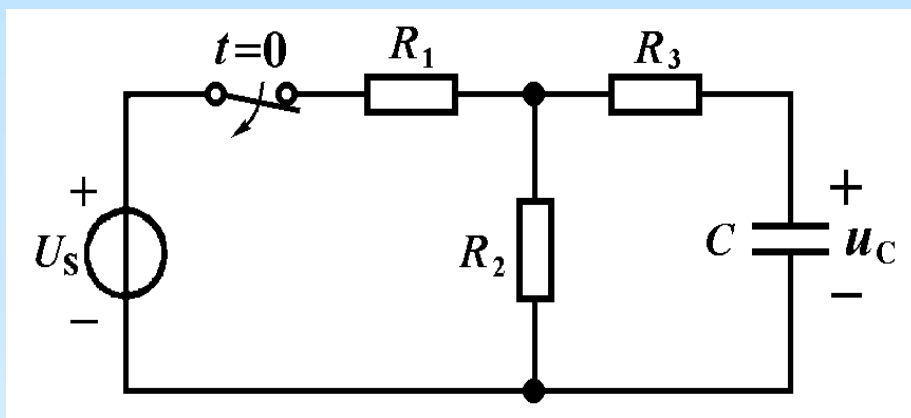


**例4 图所示电路的开关闭合已久，求开关在 $t=0$ 时刻断开瞬间电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 。**



**解：开关闭合已久，各电压电流均为不随时间变化的恒定值，造成电容电流等于零，即**

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0$$



$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0$$

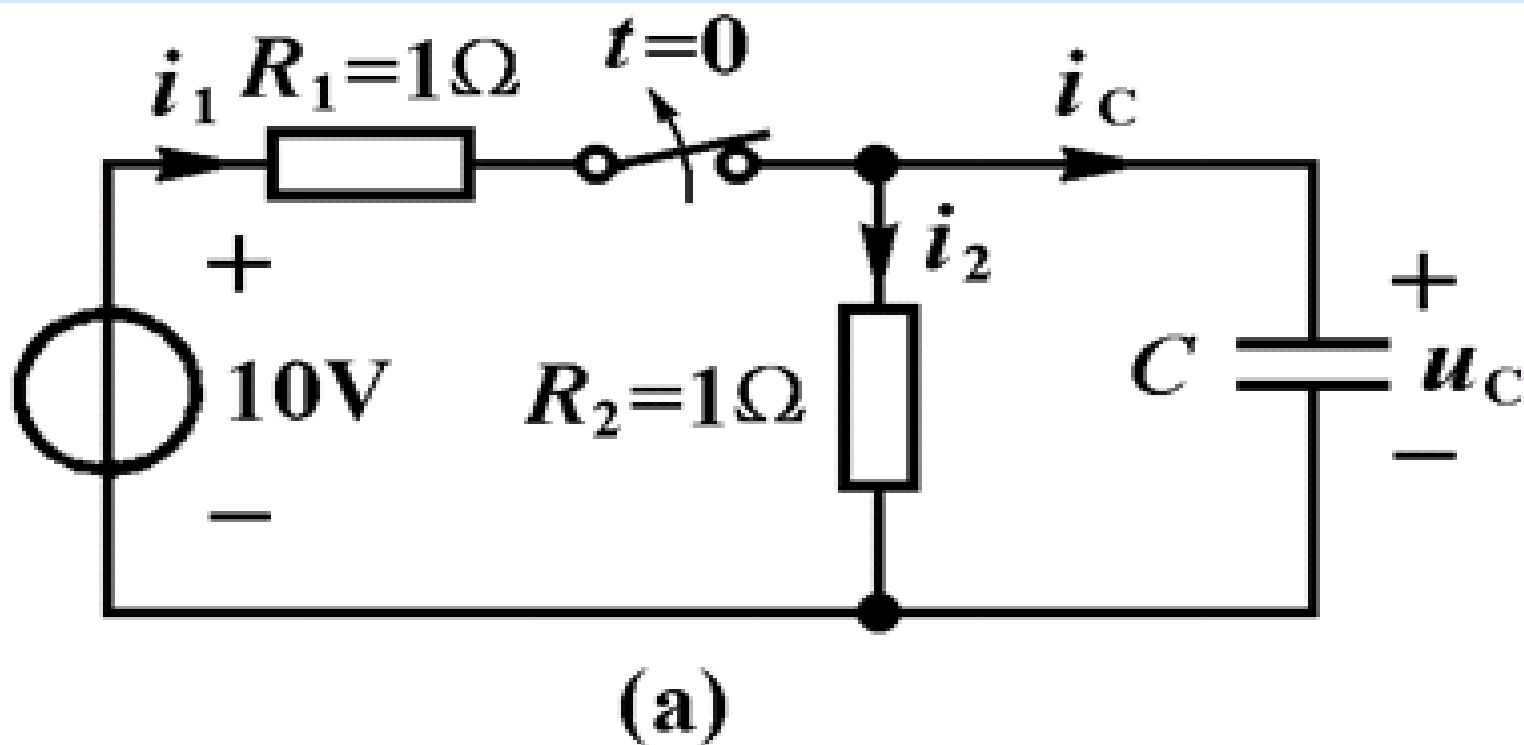
**开关断开前，电容相当于开路。此时电容电压为：**

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s$$

**当开关断开时，在电阻 $R_2$ 和 $R_3$ 不为零的情况下，电容电流为有限值，电容电压不能跃变，由此得到：**

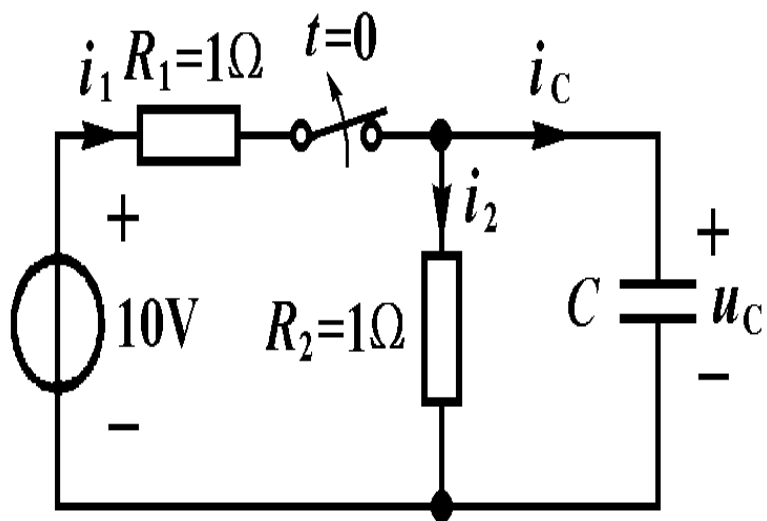
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s$$

**例5** 图示电路中的开关闭合已经很久， $t=0$ 时断开开关，  
试求开关转换前和转换后瞬间的电容电压和电容电流。



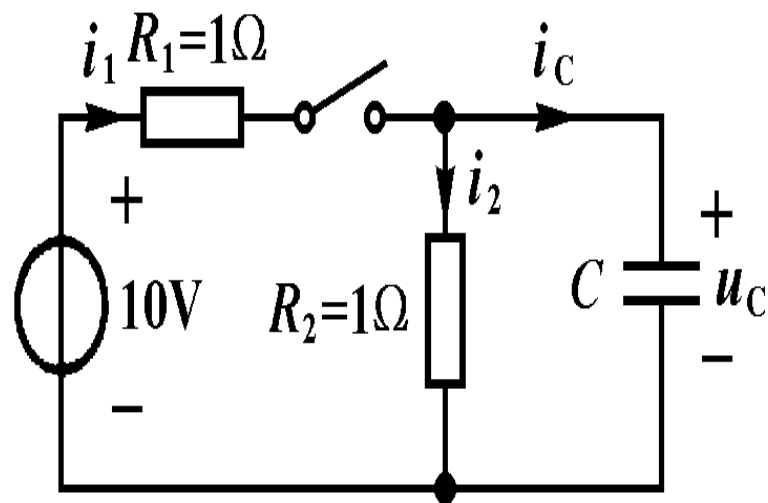
**例5 图示电路中的开关闭合已经很久， $t=0$ 时断开**

**开关，试求开关转换前和转换后瞬间的电容电压和电容电流。**



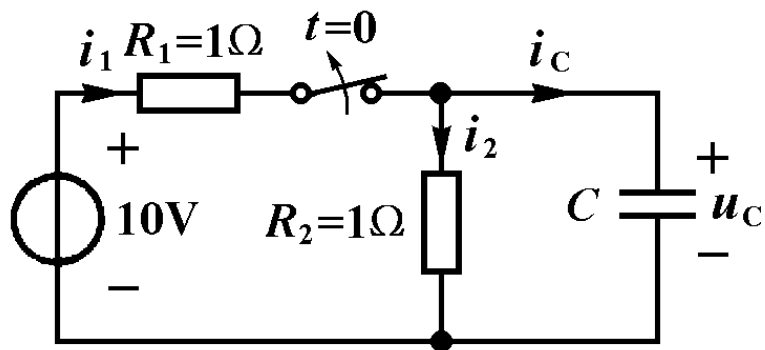
(a)

**(a)  $t=0_-$  的电路**



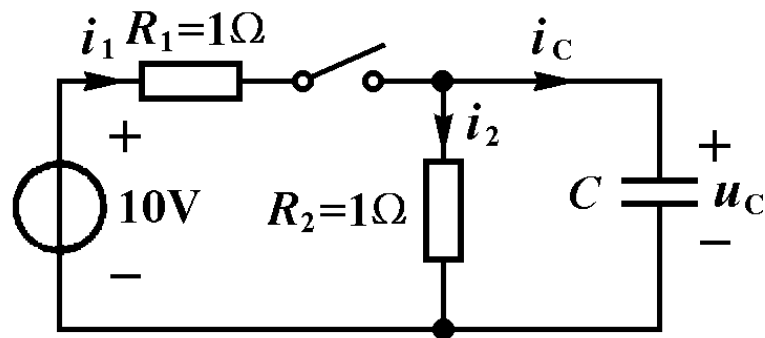
(b)

**(b)  $t=0_+$  的电路**



(a)

(a)  $t=0_-$  的电路



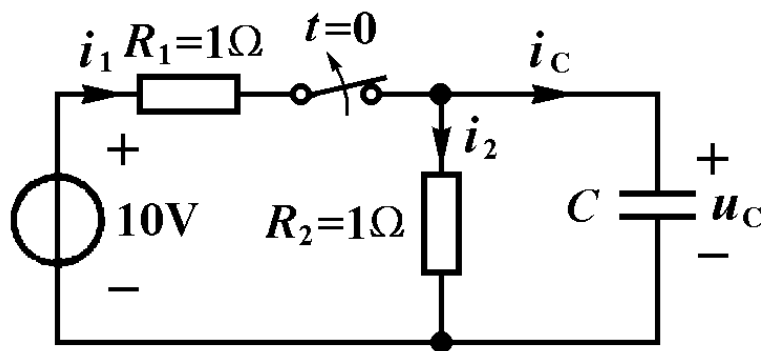
(b)

(b)  $t=0_+$  的电路

**解：在图(a)所示电路中，电容相当于开路。此时得到电容电压：**

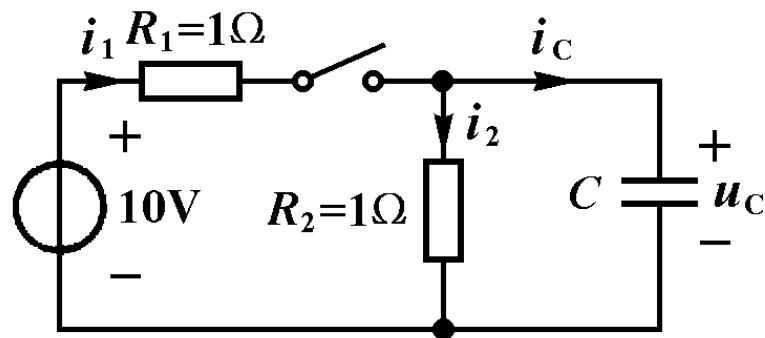
$$\begin{aligned}
 u_C(0_-) &= u_{R_2}(0_-) \\
 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 10\text{V} \\
 &= \frac{1}{2} \times 10\text{V} = 5\text{V}
 \end{aligned}$$

**此时电阻 $R_1$ 和 $R_2$ 的电流 $i_1(0_-)=i_2(0_-)=10\text{V}/2\Omega=5\text{A}$ 。**



(a)

(a)  $t=0_-$  的电路



(b)

(b)  $t=0_+$  的电路

开关断开后的电路如图(b)所示。此时由于  $t=0$  时刻电容电流有界，电容电压不能跃变，由此得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 5V$$

此时电容电流与电阻  $R_2$  的电流相同，由此求得：

$$i_C(0_+) = -i_2(0_+) = -\frac{5V}{1\Omega} = -5A$$

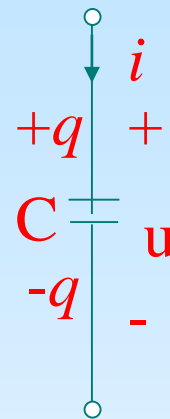
电容电流由  $i_C(0_-)=0A$  变化到  $i_C(0_+)=-5A$ 。

电阻  $R_1$  的电流由  $i_1(0_-)=5A$  变化到  $i_1(0_+)=0A$ 。

### 三、电容的储能

在电压电流采用关联参考方向的情况下，  
电容的吸收功率为：

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)C \frac{du}{dt}$$



在从初始时刻 $t_0$ 到任意时刻 $t$  时间内得到的能量为：

$$\begin{aligned} W(t_0, t) &= \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi = C \int_{t_0}^t u(\xi) \frac{du}{d\xi} d\xi \\ &= C \int_{u(t_0)}^{u(t)} u du = \frac{1}{2} C [u^2(t) - u^2(t_0)] \end{aligned}$$

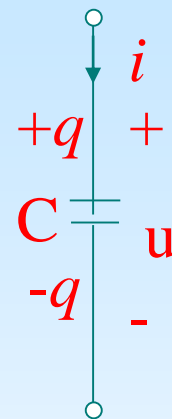
由此式可以看出电容是一种储能元件。



### 三、电容的储能

若电容的初始储能为零，即 $u(t_0)=0$ ，则任意时刻储存在电容中的能量为：

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$



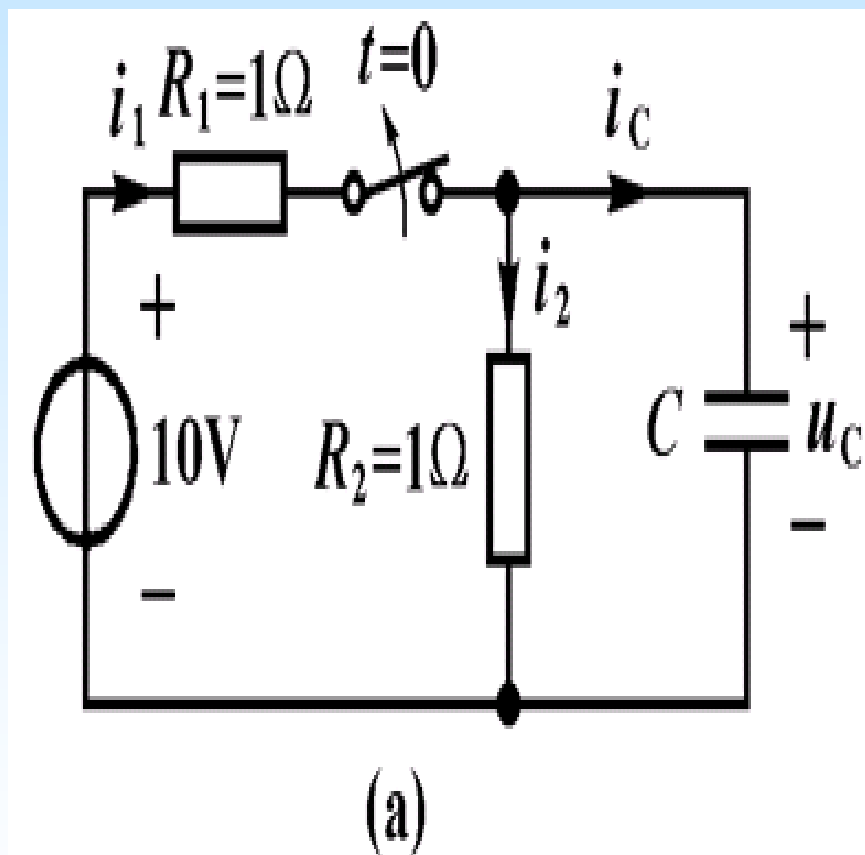
此式说明某时刻电容的储能取决于该时刻电容的电压值，与电容的电流值无关。

电容电压的绝对值增大时，电容储能增加；电容电压的绝对值减小时，电容储能减少。

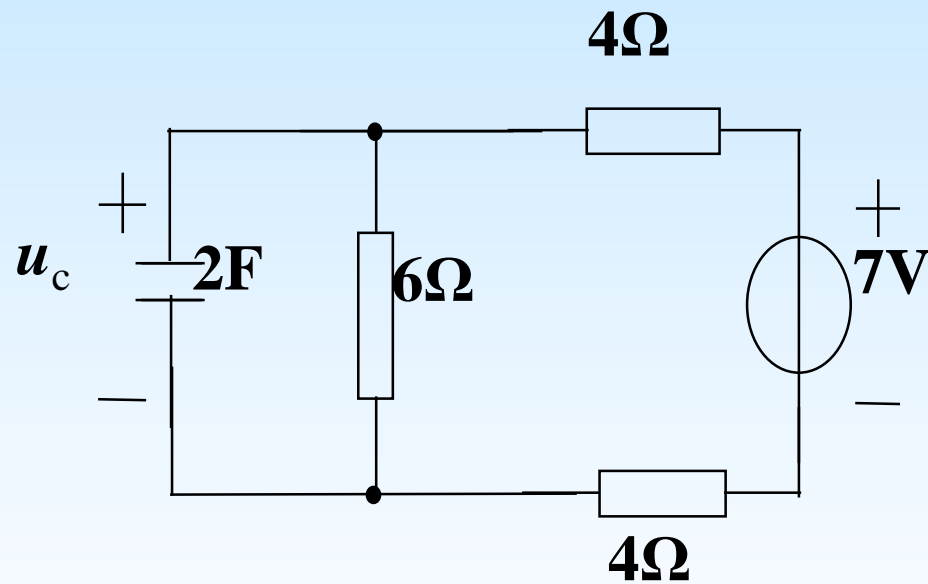
### 三、电容的储能

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

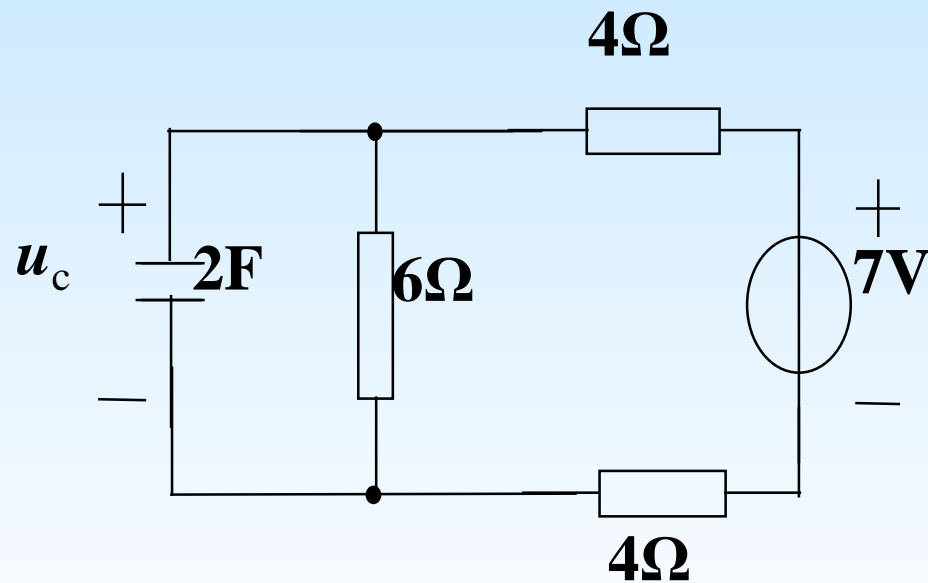
电容在充电时吸收的能量全部转换为电场能量，放电时又将储存的电场能量释放回电路，它本身不消耗能量，也不会释放出多于它吸收的能量，所以称电容为储能元件。



例5、图示稳态电路，求 $W_{u_c}$ 。

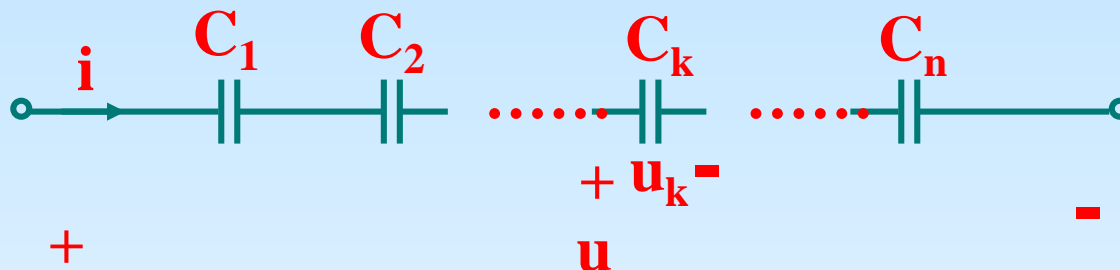


例5、图示稳态电路，求 $W_{u_c}$ 。(9J)



## 四：电容元件的串联与并联

### 1)、串联

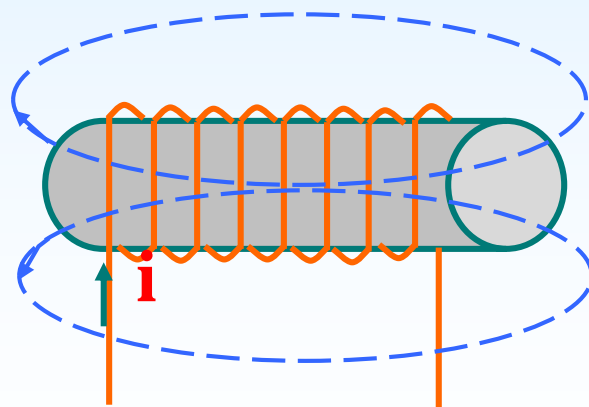
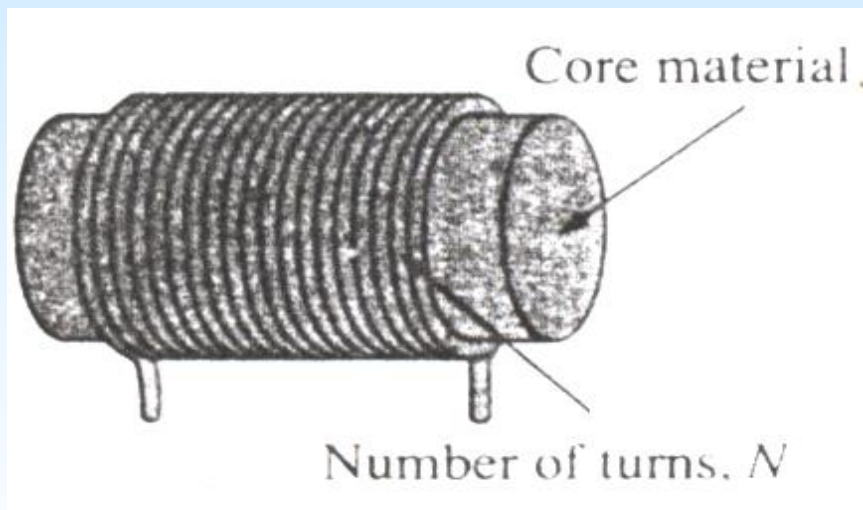
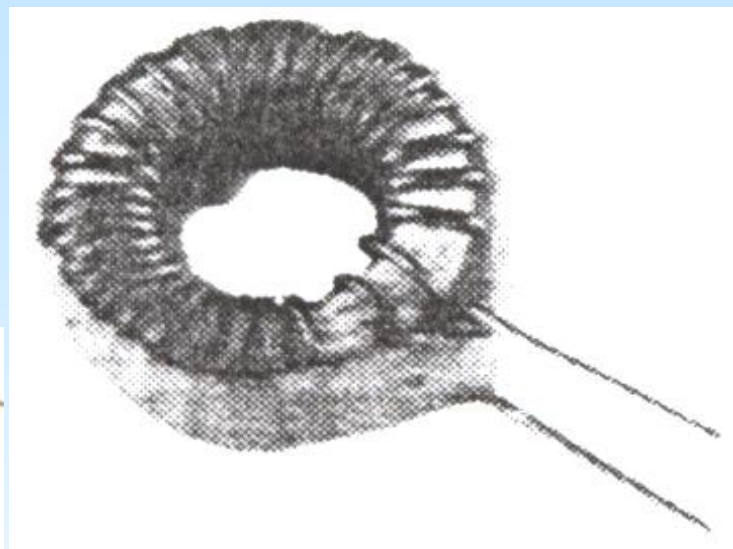


$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left\{ u_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i(\xi) d\xi \right\} \quad u(0) = \sum_{k=1}^n u_k(0) \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

### 2)、并联

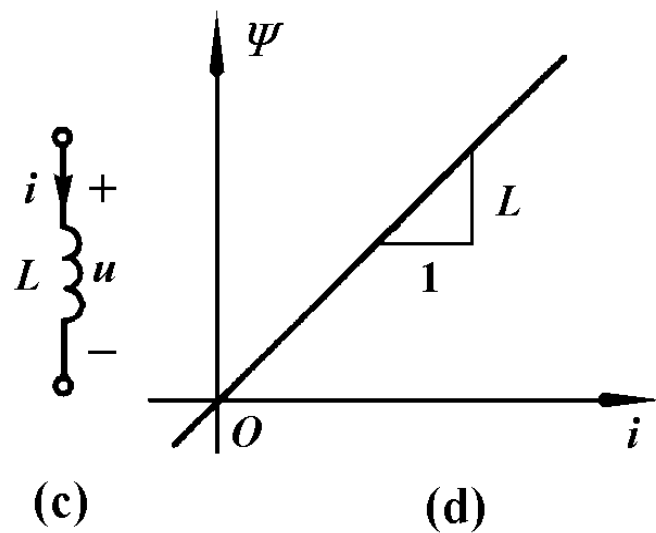
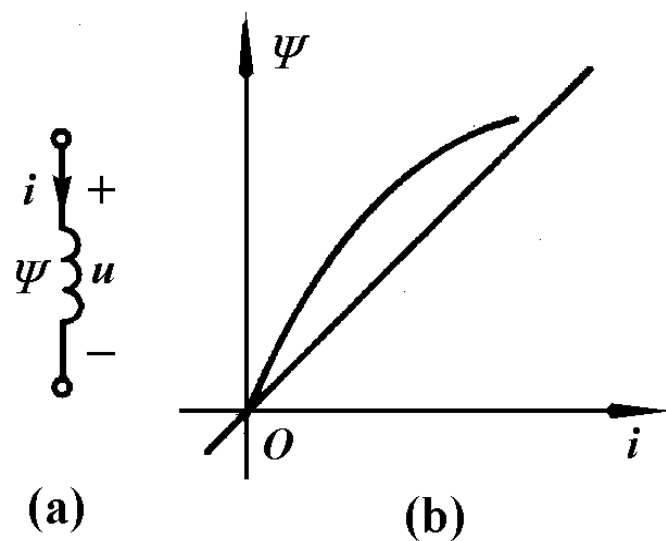
$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

## 2-2 电感元件



**电感器的主要电磁性质---**  
**磁通 $\phi$ 和磁通链 $\psi$ 。**

如果一个二端元件在任一时刻，其磁通链与电流之间的关系由 $i - \psi$ 平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电感元件。电感元件的符号和特性曲线如图(a)和(b)所示。

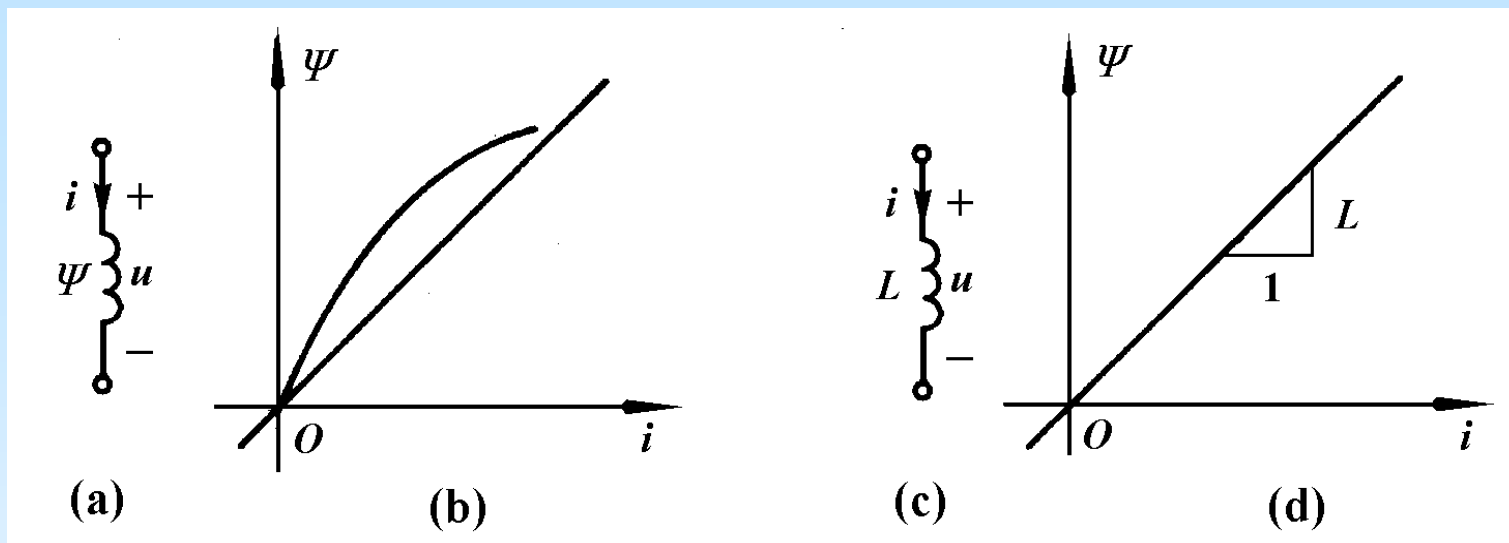


(a) 电感元件的符号

(b) 电感元件的特性曲线

(c) 线性时不变电感元件的符号

(d) 线性时不变电感的特性曲线



**其特性曲线是通过坐标原点一条直线的电感元件称为线性电感元件，否则称为非线性电感元件。线性时不变电感元件的符号与特性曲线如图(c)和(d)所示，它的特性曲线是一条通过原点不随时间变化的直线，其数学表达式为：**

$$\psi = Li$$

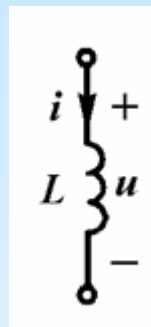
**式中的系数 $L$ 为常量，与直线的斜率成正比，称为电感，单位是亨[利]，用H表示。**



## 二、电感的电压电流关系

对于线性时不变电感元件来说，在采用电压电流关联参考方向的情况下，可以得到：

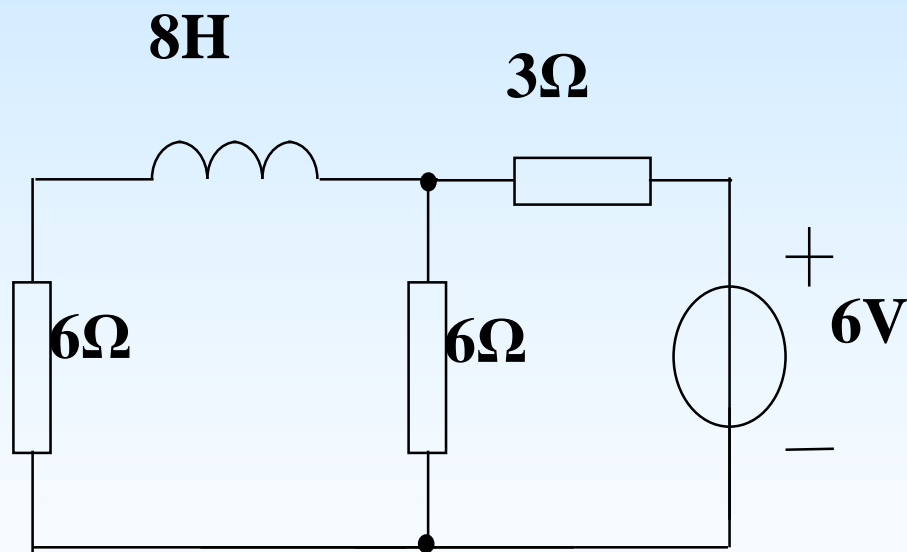
$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



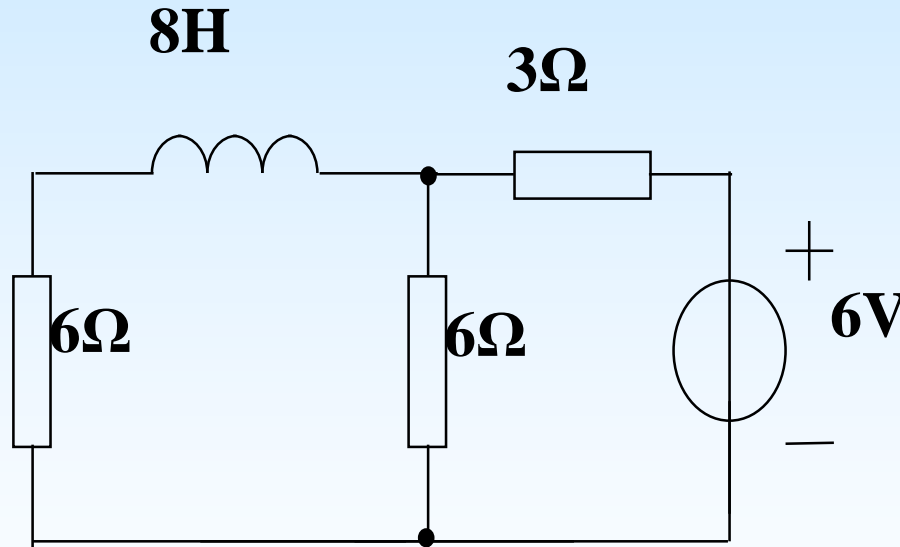
此式表明电感中的电压与其电流对时间的变化率成正比，与电阻元件的电压电流之间存在确定的约束关系不同，电感电压与此时刻电流的数值之间并没有确定的约束关系。

在直流电源激励的电路中，磁场不随时间变化，各电压电流均不随时间变化时，电感相当于一个短路( $u=0$ )。(重点)

**例1、图示稳态电路，求 $i_L$ 。**

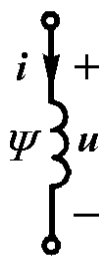
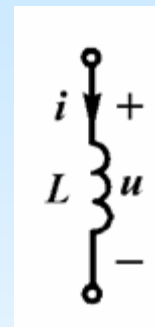


**例1、图示稳态电路，求 $i_L$ 。(0.5A)**

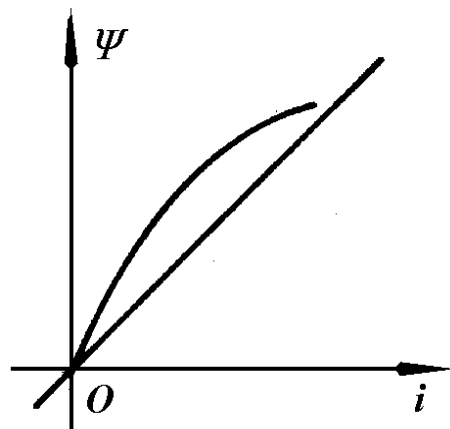


在已知电感电流 $i(t)$ 的条件下，容易求出其电压 $u(t)$ 。

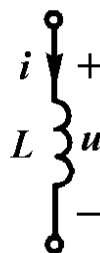
例如 $L=1\text{mH}$ 的电电感上，施加电流为 $i(t)=10\sin(5t)\text{A}$ 时，  
其关联参考方向的电压为：



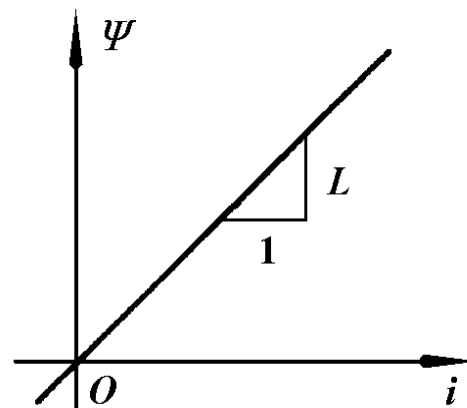
(a)



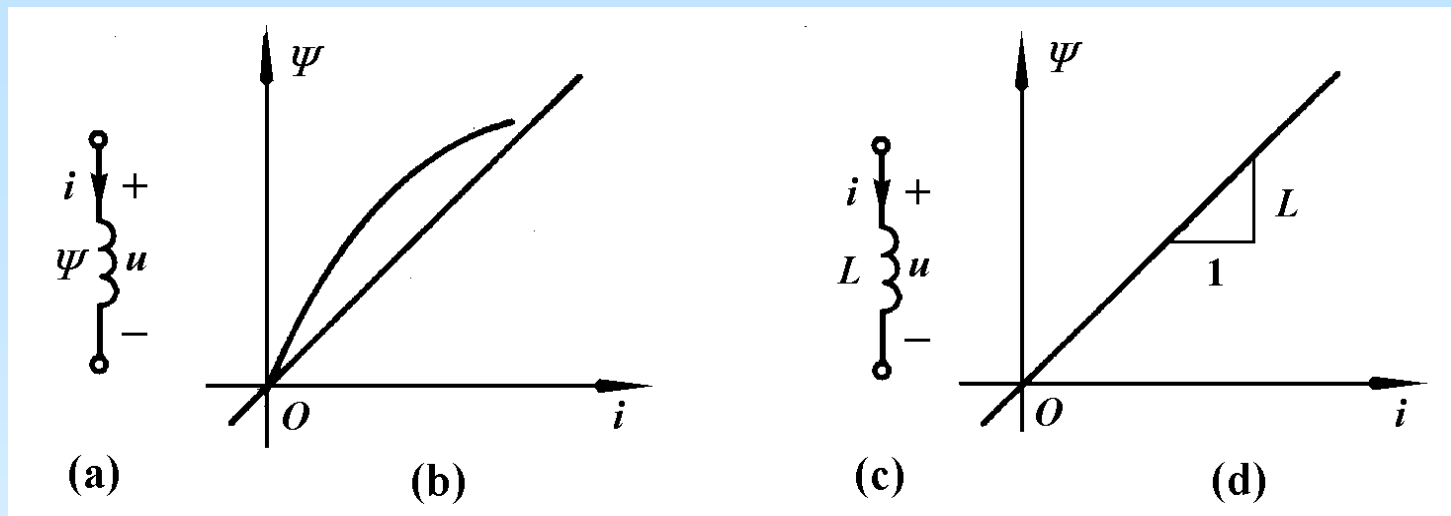
(b)



(c)



(d)

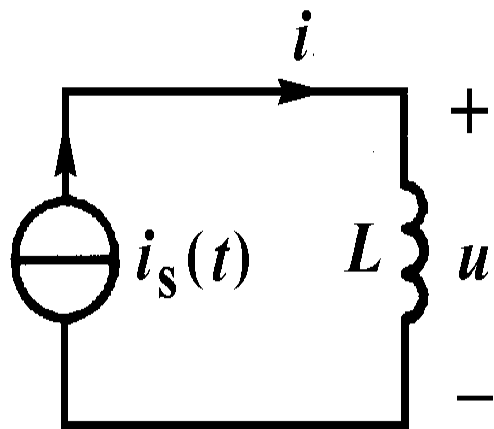


$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 10^{-3} \times \frac{d[10 \sin(5t)]}{dt}$$

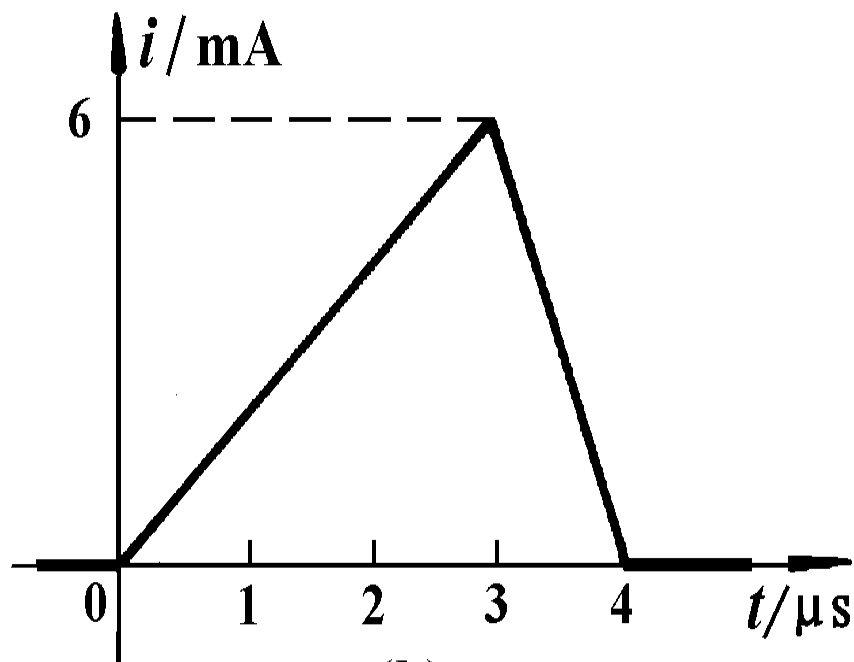
$$= 50 \times 10^{-3} \cos(5t) \text{ V} = 50 \cos(5t) \text{ mV}$$

**电感电压的数值与电感电流的数值之间并无确定的关系，例如将电感电流增加一个常量 $k$ ，变为 $i(t)=k+10\sin 5t\text{A}$ 时，电感电压不会改变，这说明电感元件并不具有电阻元件在电压电流之间有确定关系的特性。**

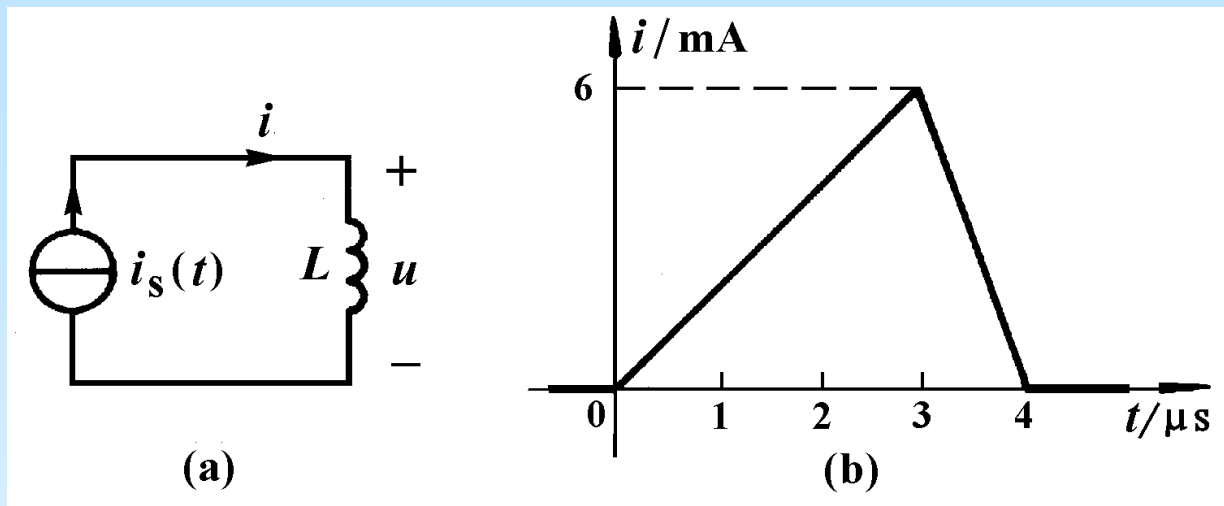
**例2** 电路如图所示，已知 $L=5\mu\text{H}$ 电感上的电流波形如图所示，求电感电压 $u(t)$ ，并画出波形图。



(a)



(b)



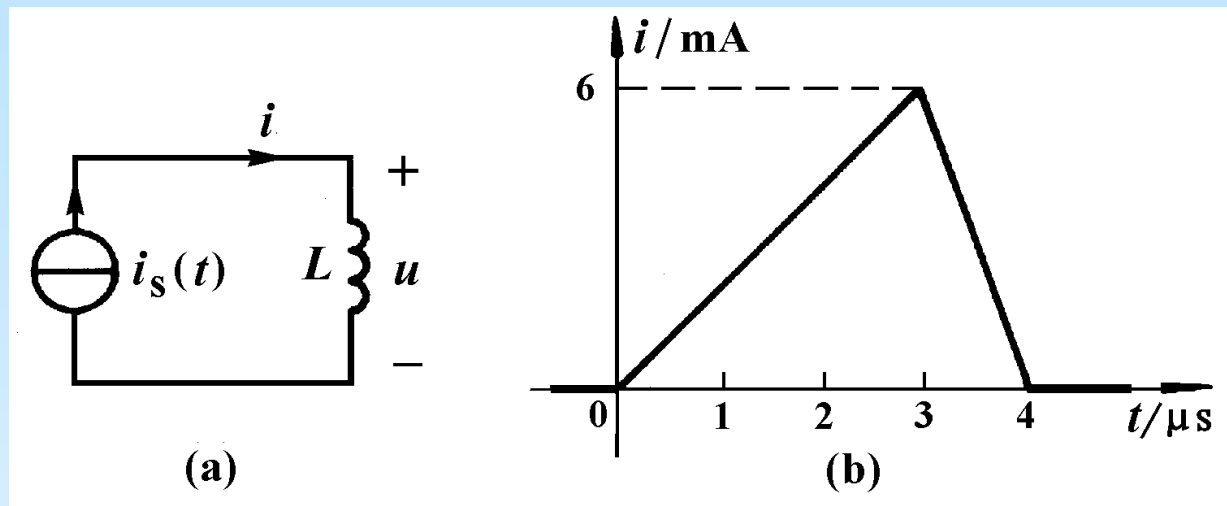
**解：根据图(b)波形的具体情况，按照时间分段来进行计算**

**1.当 $t \leq 0$ 时， $i(t)=0$ ，可以得到：**

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(0)}{dt} = 0$$

**2.当 $0 \leq t \leq 3 \mu\text{s}$ 时， $i(t)=2 \times 10^3 t$ ，可以得到：**

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(2 \times 10^3 t)}{dt} = 10 \times 10^{-3} \text{ V} = 10 \text{ mV}$$



3. 当  $3\mu\text{s} \leq t \leq 4\mu\text{s}$  时,

$$i(t) = 24 \times 10^3 - 6 \times 10^3 t,$$

可以得到:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} \\ &= 5 \times 10^{-6} \frac{d(24 \times 10^3 - 6 \times 10^3 t)}{dt} \\ &= -30 \times 10^{-3} \text{ V} = -30 \text{ mV} \end{aligned}$$

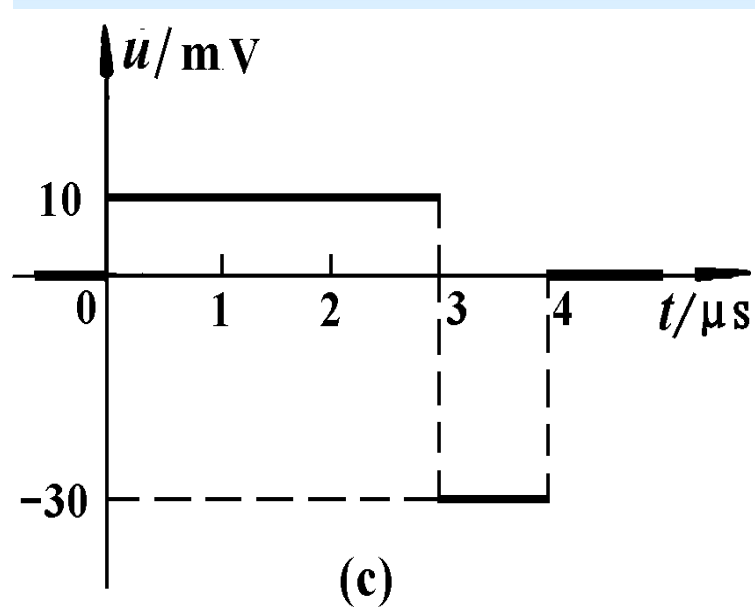
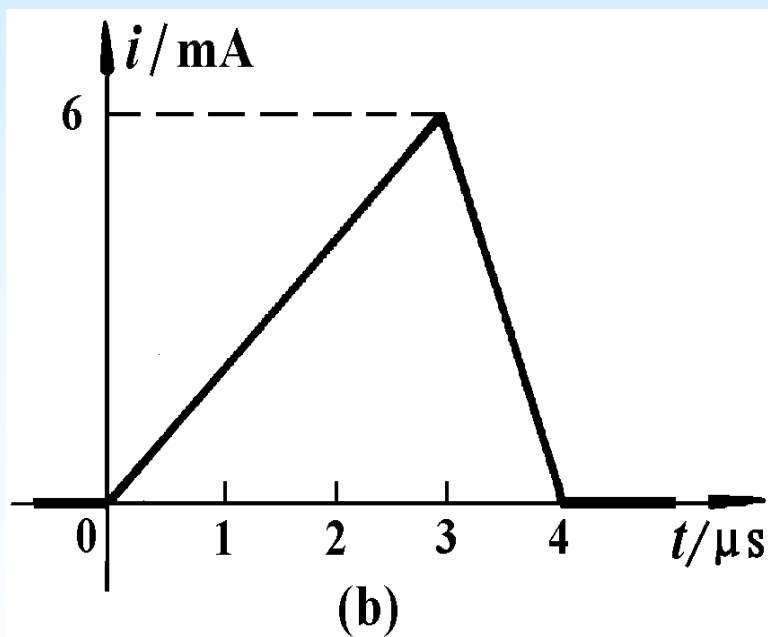
4. 当  $4\mu\text{s} \leq t$  时,  $i(t) = 0$ ,

可以得到:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(0)}{dt} = 0$$



根据以上计算结果，画出相应的波形，如图(c)所示。这说明电感电流为三角波形时，其电感电压为矩形波形。



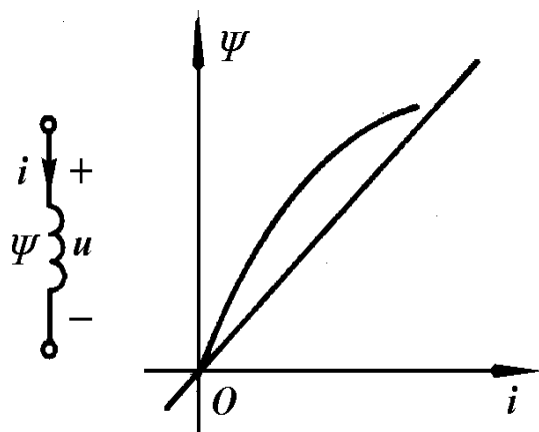
在已知电感电压 $u_L(t)$ 的条件下，其电流 $i_L(t)$ 为：

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned}$$

其中

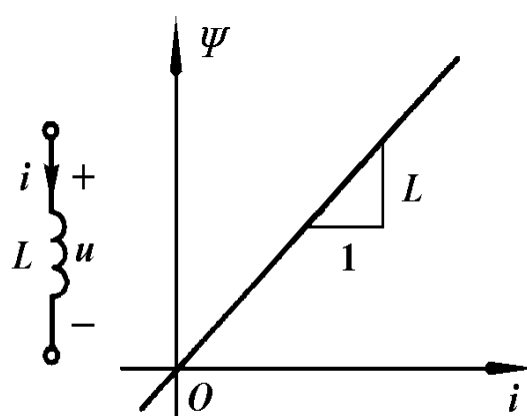
$$i_L(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi$$

称为电感电流的初始值。



(a)

(b)



(c)

(d)

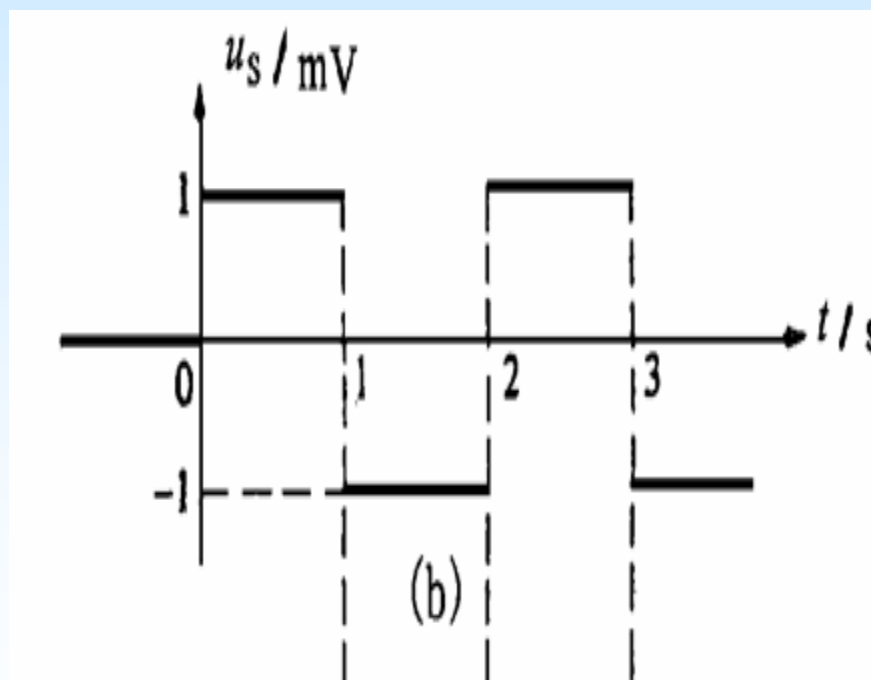
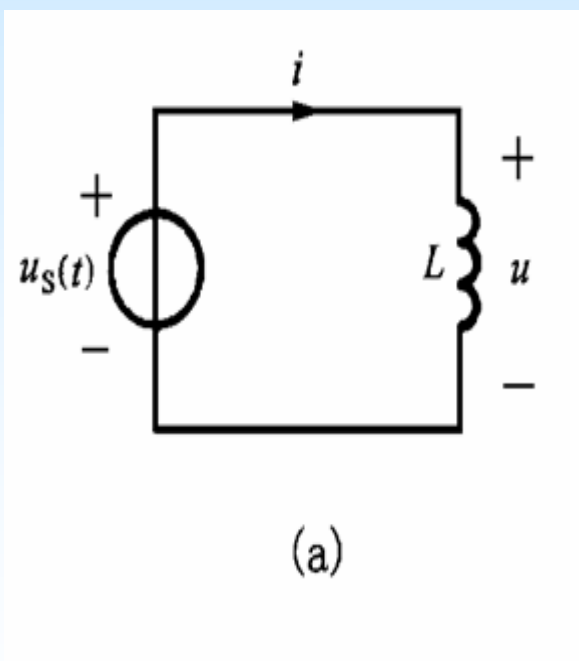
从上式可以看出电感具有两个基本的性质：

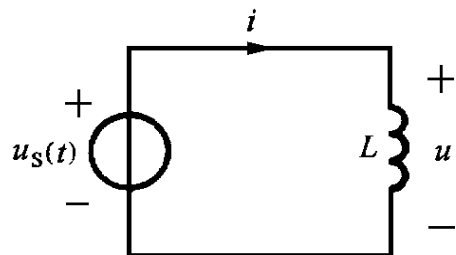
(1) 电感电流的记忆性；

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned}$$

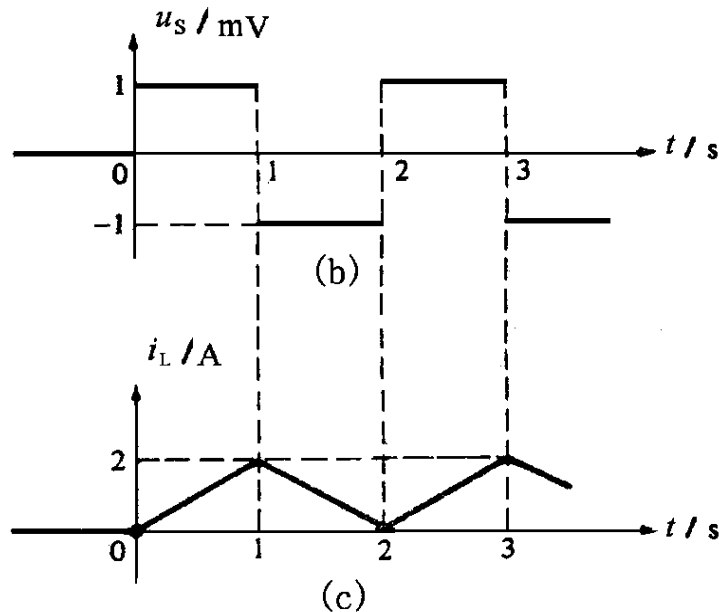
任意时刻 $T$ 电感电流的数值 $i_L(T)$ ，要由从 $-\infty$ 到时刻 $T$ 之间的全部电压来确定。此时刻以前在电感上的任何电压对时刻 $T$ 的电感电流都有一份贡献。这与电阻元件的电压或电流仅取决于此时此刻的电流或电压完全不同，我们说电感是一种记忆元件。

**例3 电路如图所示，已知 $L=0.5\text{mH}$ 的电感电压波形如(b)所示，试求电感电流。**





(a)



(c)

**解：根据图(b)波形，按照时间分段来进行积分运算**

**1.当 $t < 0$ 时， $u(t) = 0$ ，可以得到：**

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = 2 \times 10^3 \int_{-\infty}^t 0 d\xi A = 0$$

**2.当 $0 < t < 1s$ 时， $u(t) = 1mV$ ，可以得到：**

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(0) + 2 \times 10^3 \int_0^t 10^{-3} d\xi = 0 + 2t A = 2t A$$

$$\text{当 } t = 1s \text{ 时 } i_L(1s) = 2A$$

**3.当 $1\text{s} < t < 2\text{s}$ 时,  $u(t) = -1\text{mV}$ , 可以得到:**

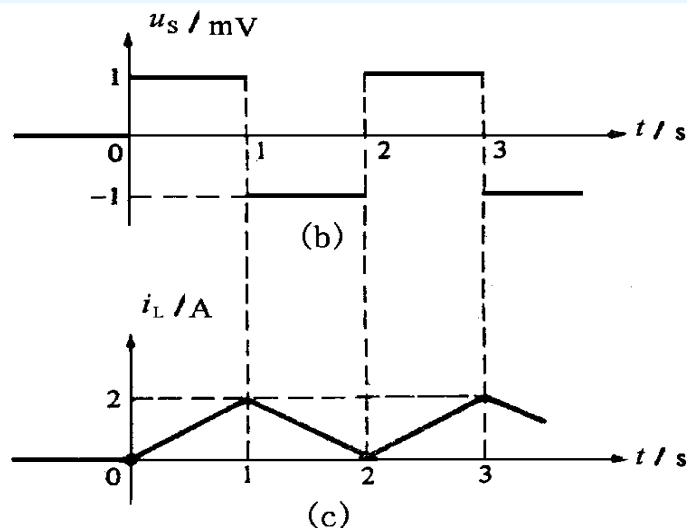
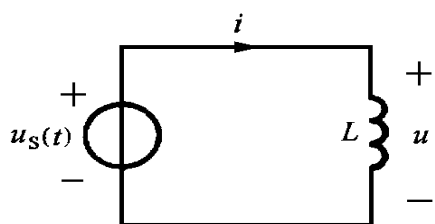
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(1) + 2 \times 10^3 \int_1^t -10^{-3} d\xi = 2\text{A} - 2(t-1)\text{A}$$

当  $t = 2\text{s}$  时  $i_L(2\text{s}) = 0\text{A}$

**4.当 $2\text{s} < t < 3\text{s}$ 时,  $u(t) = 1\text{mV}$ , 可以得到:**

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(2) + 2 \times 10^3 \int_2^t 10^{-3} d\xi = 0 + 2(t-2)\text{A}$$

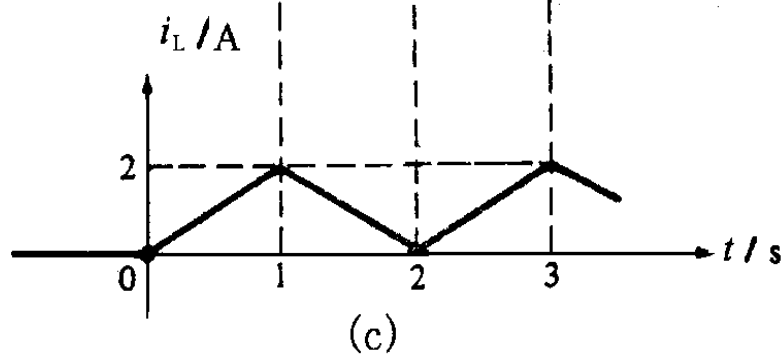
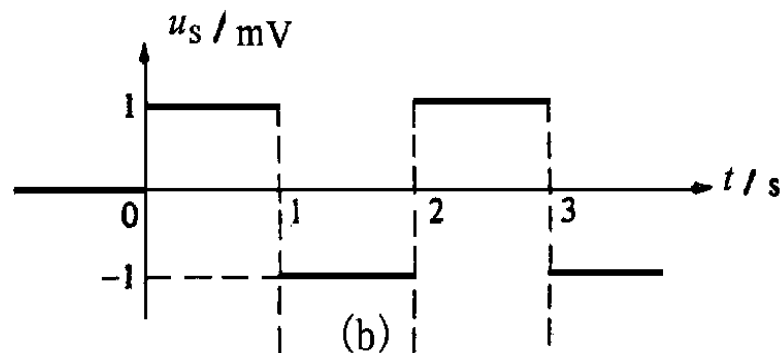
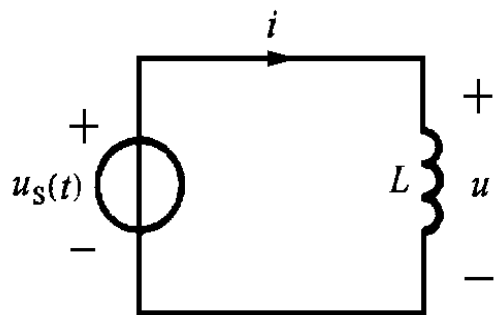
当  $t = 3\text{s}$  时  $i_L(3\text{s}) = 2\text{A}$



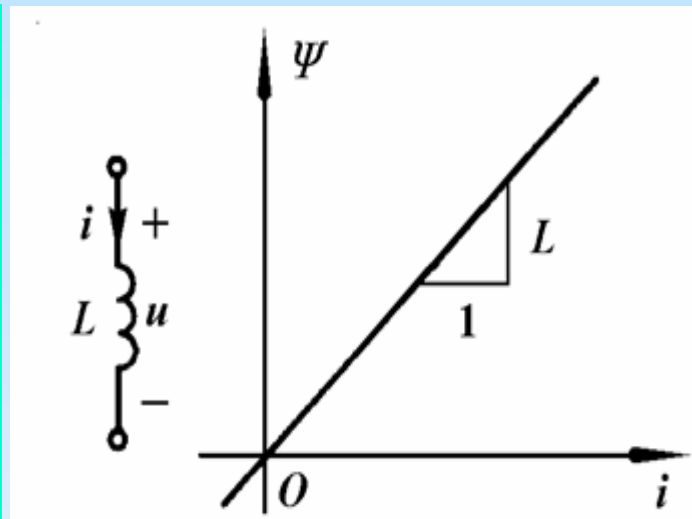
**5.当 $3\text{s} < t < 4\text{s}$ 时,  $u(t) = -1\text{mV}$ , 可以得到:**

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = u(3) + 2 \times 10^3 \int_3^t (-10^{-3}) d\xi = 2\text{A} - 2(t - 3)\text{A}$$

当 $t = 4\text{s}$  时  $i_L(4\text{s}) = 0\text{A}$

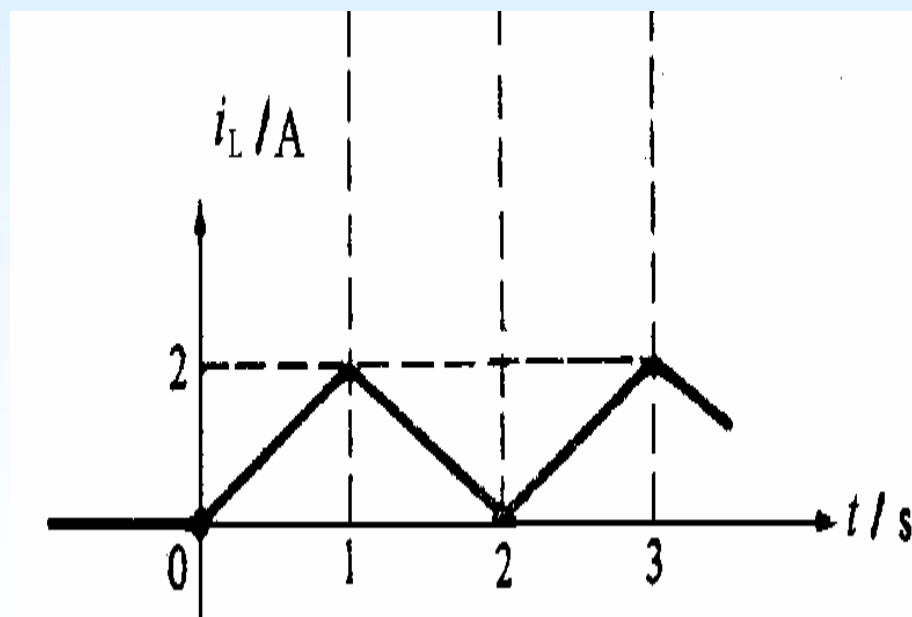


$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \\
 &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$



## (2) 电感电流的连续性

从电感电压、电流的积分关系式可以看出,电感电压在闭区间  $[t_1, t_2]$  有界时, 电感电流在开区间  $(t_1, t_2)$  内是连续的。





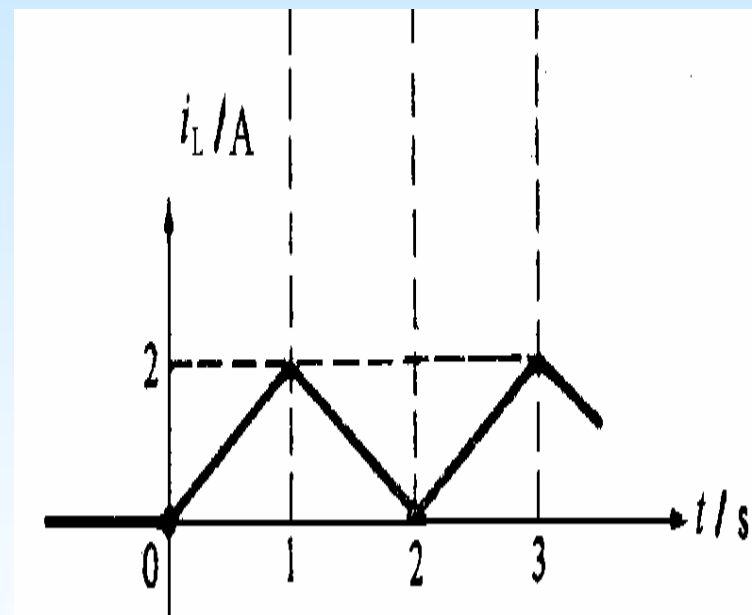
## (2)电感电流的连续性

当电感电压有界时，电感电流不能跃变，只能连续变化，即存在以下关系：

$$i_L(t_+) = i_L(t_-)$$

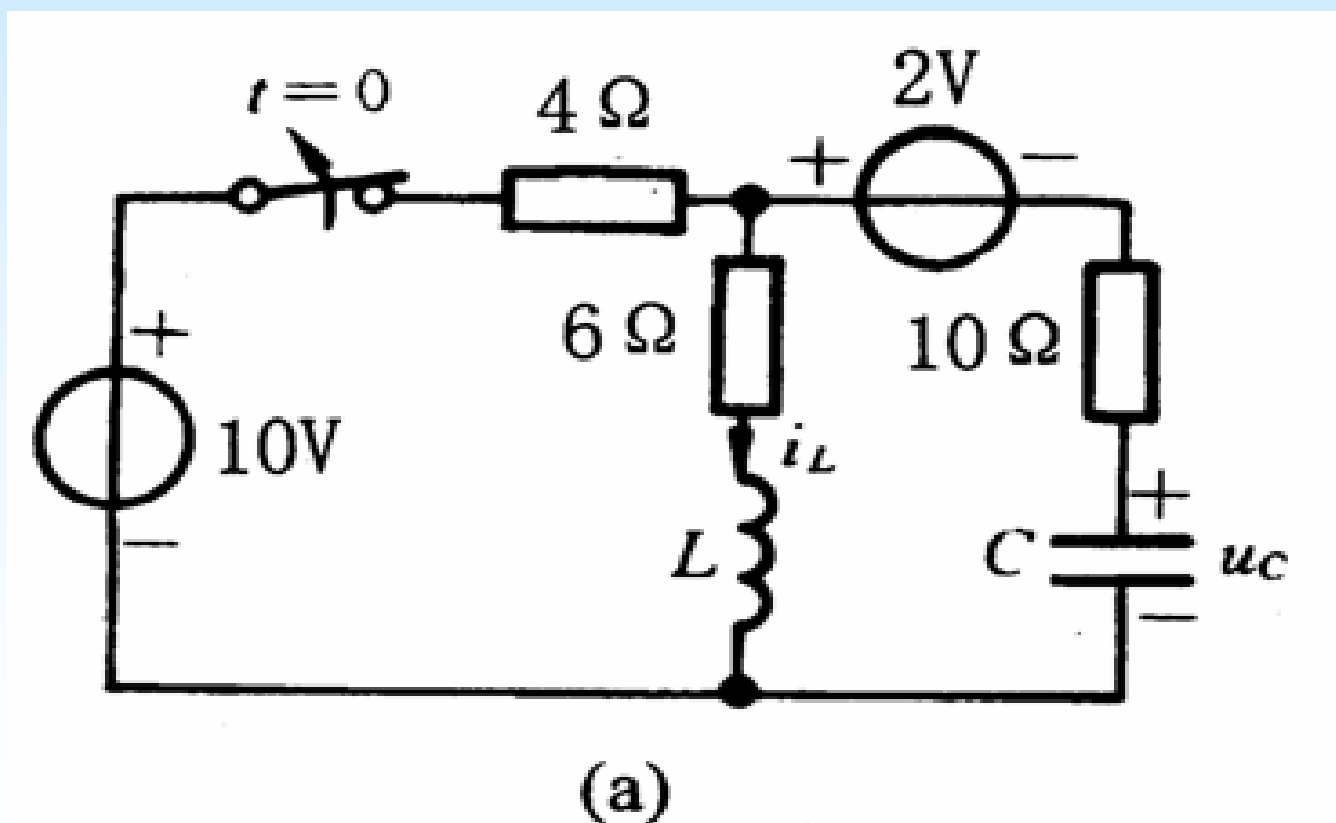
对于初始时刻 $t=0$ 来说，上式表示为：

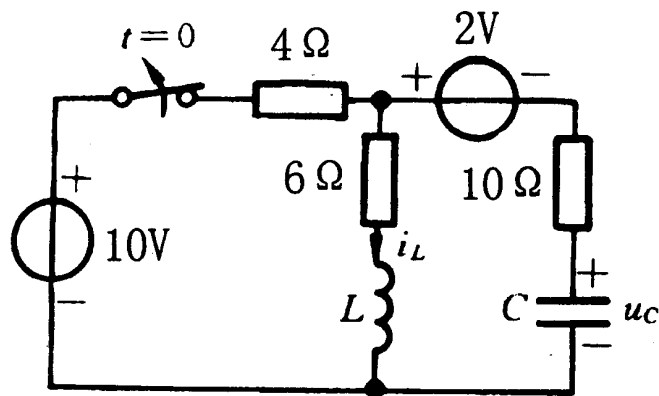
$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$



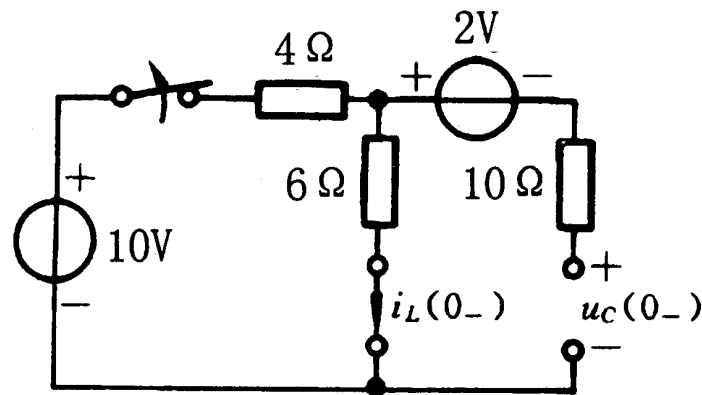
记忆：“容易（压）流感”。（重点）利用电感电流的连续性，可以确定电路中开关发生作用后一瞬间的电感电流值。

**例4** 图示电路的开关闭合已久，求开关在 $t=0$ 断开时电容电压和电感电流的初始值 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。





(a)



(b)

**解：**由于各电压电流均为不随时间变化的恒定值，**电感相当于短路；电容相当于开路，如图(b)所示。**

**此时：**

$$i_L(0_-) = \frac{10V}{4\Omega + 6\Omega} = 1A$$

$$u_C(0_-) = \frac{6\Omega}{4\Omega + 6\Omega} \times 10V - 2V = 4V$$

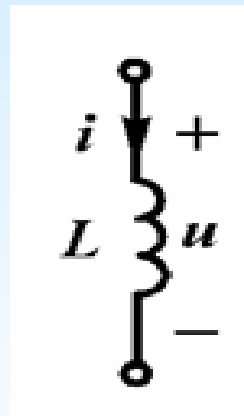
**当开关断开时，电感电流不能跃变；电容电压不能跃变。**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1A \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4V$$

### 三、电感的储能

在电压电流采用关联参考方向的情况下，电感的吸收功率为：

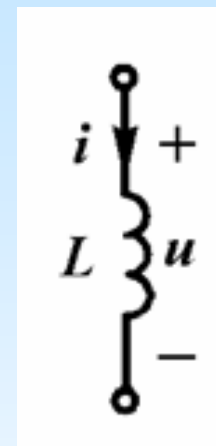
$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= i(t)L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$



当 $p>0$ 时，电感吸收功率；当 $p<0$ 时，电感发出功率。

电感在从初始时刻 $t_0$ 到任意时刻 $t$ 时间内得到的能量为:

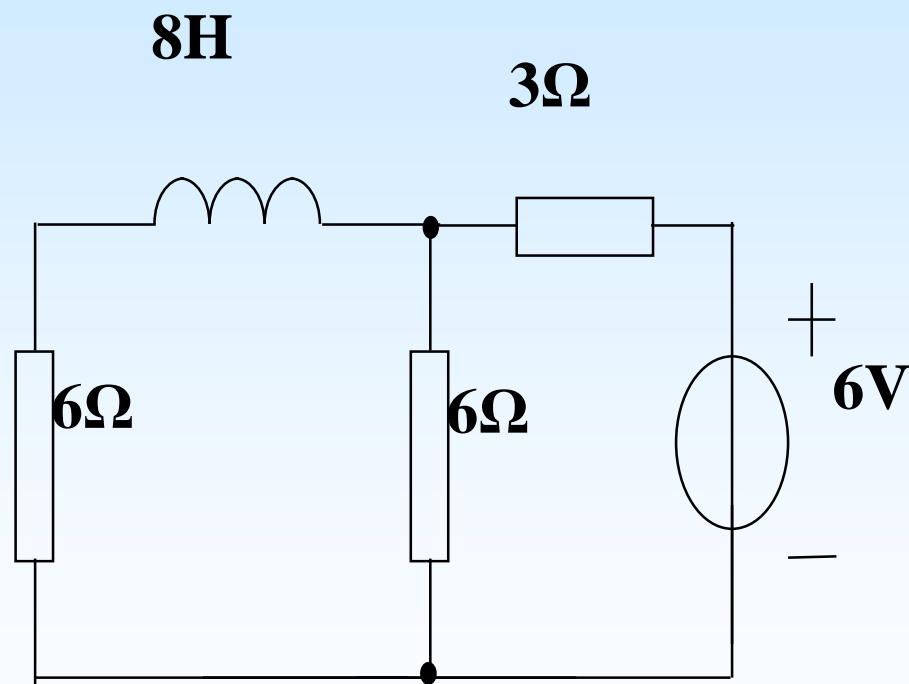
$$\begin{aligned} W(t_0, t) &= \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi = L \int_{t_0}^t i(\xi) \frac{di(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i di = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(t_0)] \end{aligned}$$



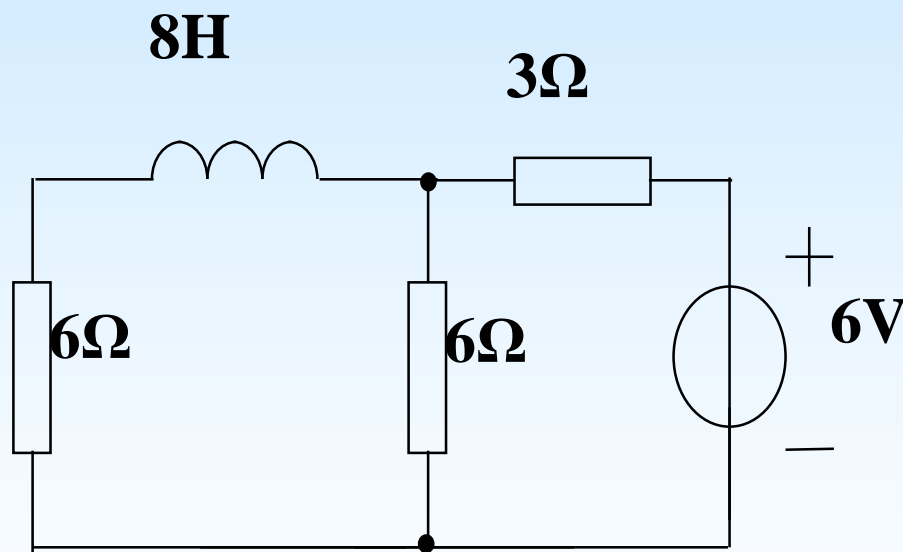
若电感的初始储能为零, 即 $i(t_0)=0$ , 则任意时刻储存在电感中的能量为:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

例5、图示稳态电路，求 $W_{iL}$ 。



**例5、图示稳态电路，求 $W_{iL}$ 。(1J)**



$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

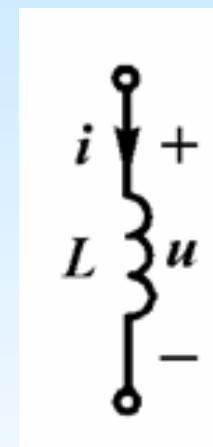
## 四. LTI电感元件的串联与并联 (类似电阻)

1、 并联  $\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_k}$   $i(0) = \sum i_k(0)$

2、 串联

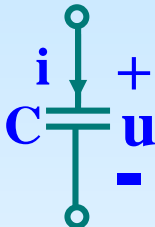
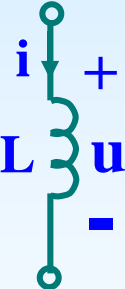
等效电感

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$





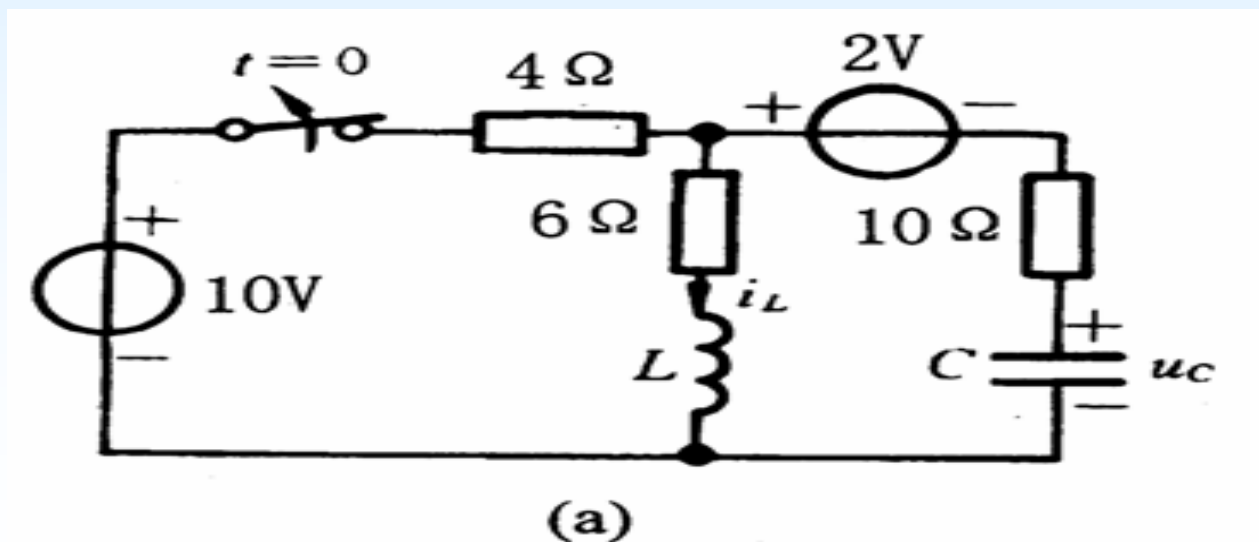
## 线性时不变电容元件和电感元件主要特性汇总

元件	约束方程	电压-电流关系		连续性	储存的能量
	$q = C u$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi$	电压	$W(t) = 0.5 C u^2(t)$
	$\psi = L i$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\xi) d\xi$	电流	$W(t) = 0.5 L i^2(t)$

# 换路定律及初始值的确定

## 1. 换路定律

通常，我们把电路中开关的接通、断开或电路参数的突然变化等统称为“换路”。我们研究的是换路后电路中电压或电流的变化规律，知道了电压、电流的初始值，就能掌握换路后电压、电流是从多大的初始值开始变化的。

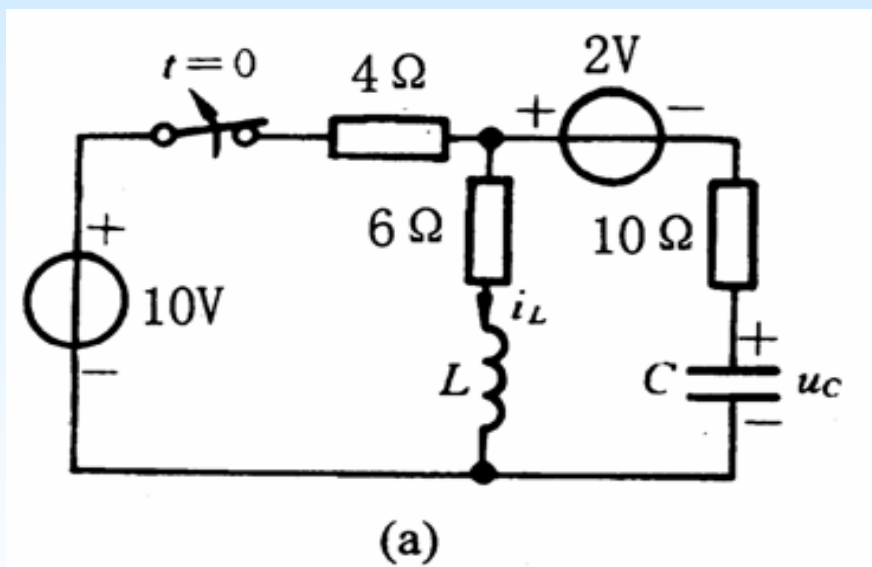


# 1 换路定律

该定律是指若电容电压、电感电流为有限值，则  $u_C$ 、 $i_L$  不能跃变，即换路前后一瞬间的  $u_C$ 、 $i_L$  是相等的，可表达为：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

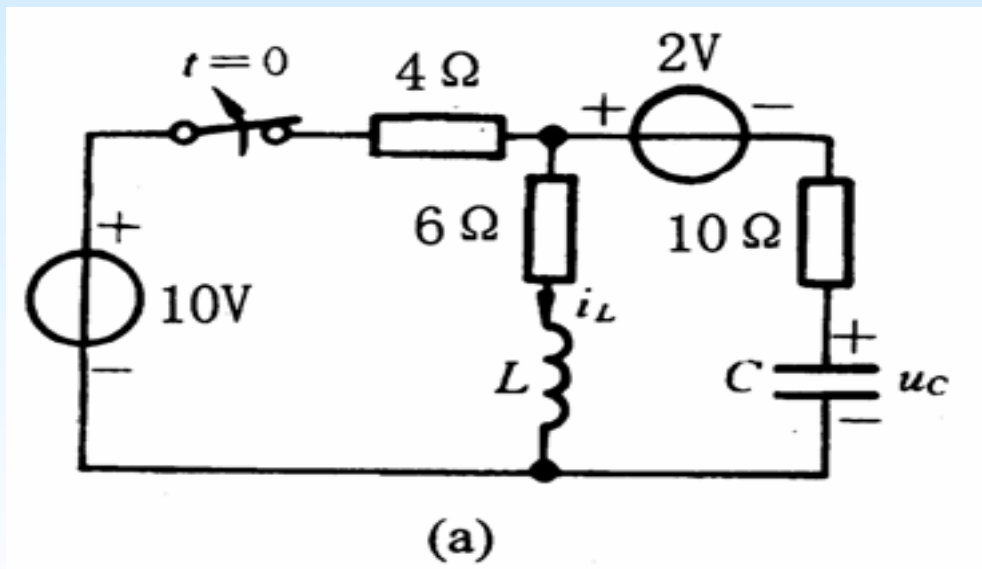
$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$



**必须注意：**只有  $u_C$ 、 $i_L$  受换路定律的约束而保持不变，电路中其他电压、电流都可能发生跃变。

## 2. 初始值的确定

换路后瞬间电容电压、电感电流的初始值，用  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$  来表示，它是利用换路前瞬间  $t=0_-$  电路确定  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ ，再由换路定律得到  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$  的值。



(a)

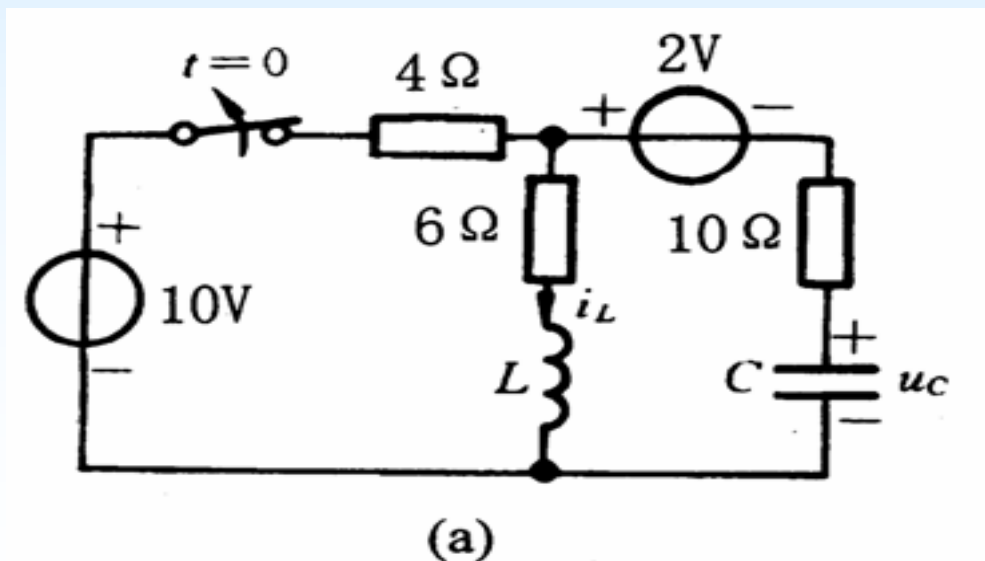
电路中其他变量如  $i_R$ 、 $u_R$ 、 $u_L$ 、 $i_C$  的初始值不遵循换路定律的规律，它们的初始值需由  $t=0_+$  电路来求得。

## 2 初始值的确定

具体求法是：

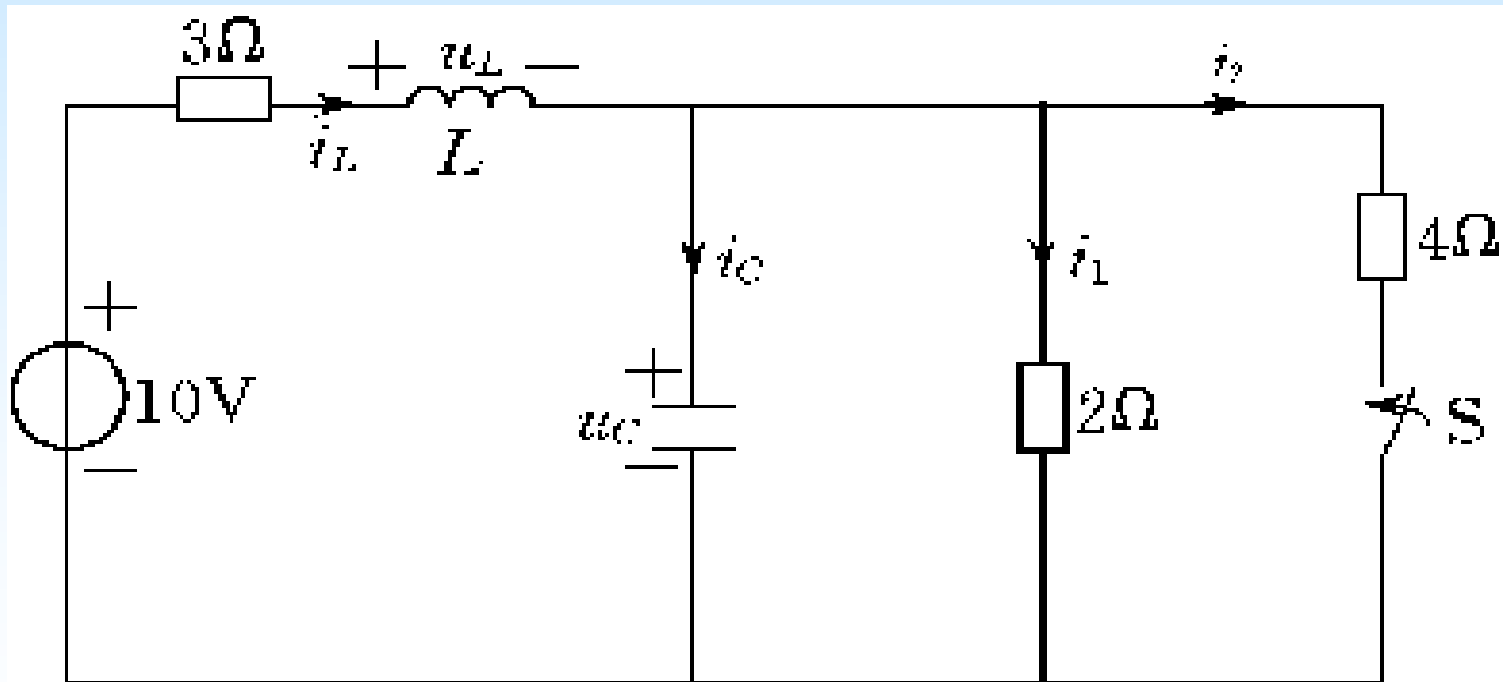
画出 $t=0_+$ 电路，在该电路中若 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S$ ，电容用一个电压源 $U_S$ 代替，若 $u_C(0_+) = 0$ 则电容用短路线代替。

若 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_S$ ，电感用一个电流源 $I_S$ 代替，若 $i_L(0_+) = 0$ 则电感作开路处理。



**例6：在电路中，开关S在 $t=0$ 时闭合，开关闭合前电路已处于稳定状态。**

**试求初始值  $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 、 $i_c(0_+)$  和  $u_L(0_+)$ 。**

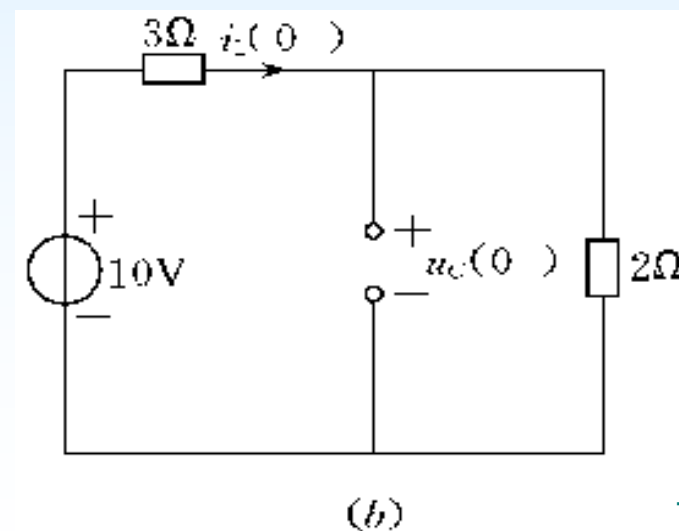
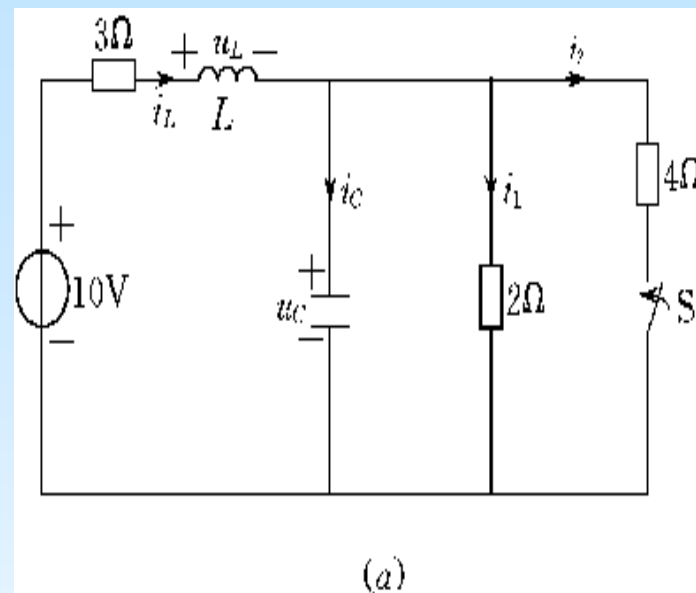


(a)

**解 (1) 电路在  $t=0$  时发生换路，欲求各电压、电流的初始值，应先求  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ 。通过换路前稳定状态下  $t=0_-$  电路可求得  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ 。在直流稳态电路中，电容  $C$  相当于开路，电感  $L$  相当于短路。所以  $t=0_-$  时刻的等效电路如图(b)) 所示，由该图可知：**

$$u_C(0_-) = 10 \times \frac{2}{3+2} = 4V$$

$$i_L(0_-) = \frac{10}{3+2} = 2A$$



**解 (1) 电路在  $t=0$  时发生换路，欲求各电压、电流的初始值，应先求  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ 。**

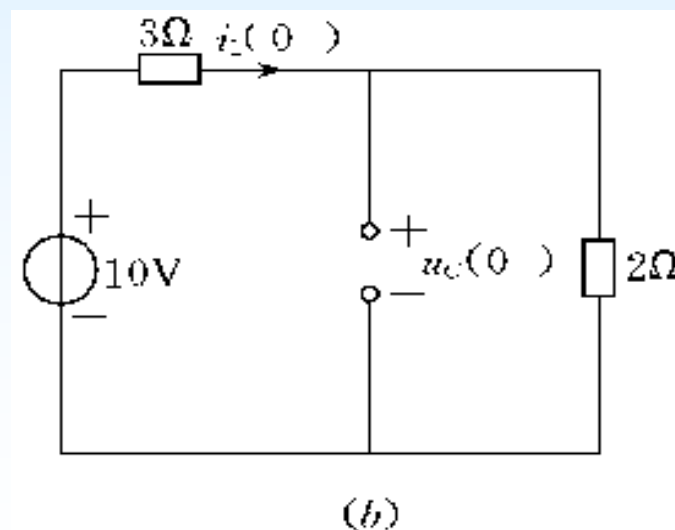
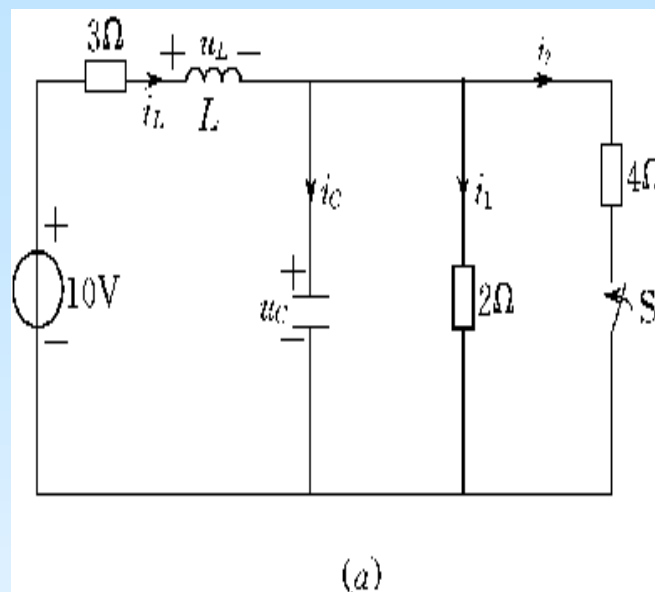
$$u_C(0_-) = 10 \times \frac{2}{3+2} = 4V$$

$$i_L(0_-) = \frac{10}{3+2} = 2A$$

**(2) 由换路定理得:**

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4V$$

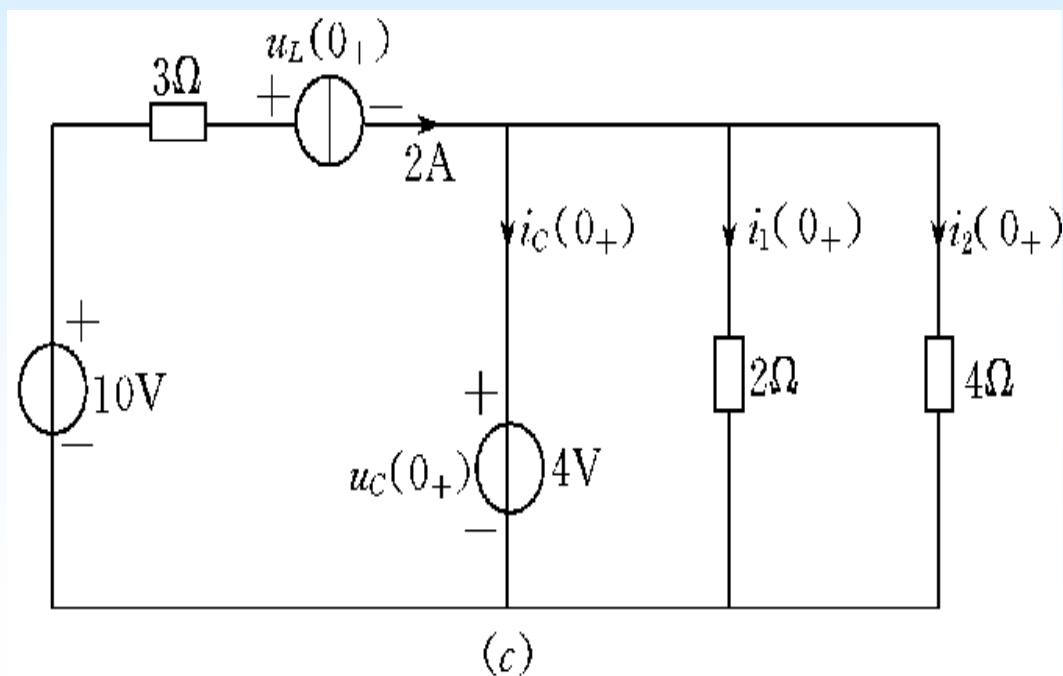
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$





因此，在 $t=0_+$ 瞬间，电容元件相当于一个4V的电压源，电感元件相当于一个2A的电流源。据此画出 $t=0_+$ 时刻的等效电路，如图(C)所示。

(3) 在 $t=0_+$ 电路中，应用直流电阻电路的分析方法，可求出电路中其他电流、电压的初始值，即



$$i_1(0_+) = \frac{4}{2} = 2A$$

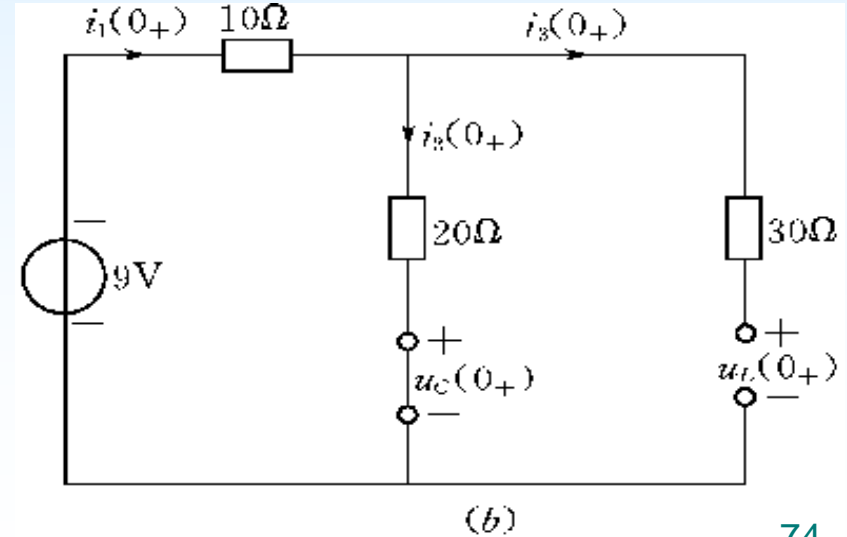
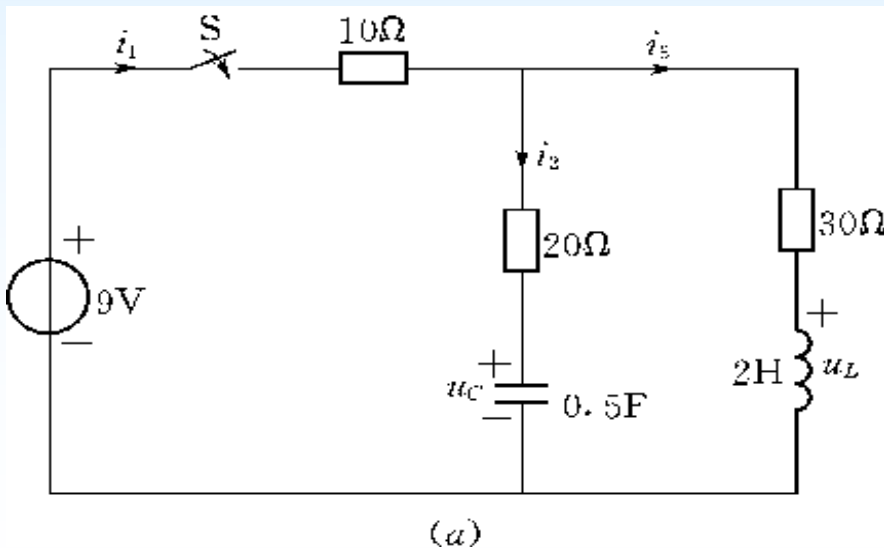
$$i_2(0_+) = \frac{4}{4} = 1A$$

$$i_C(0_+) = 2 - 2 - 1 = -1A$$

$$u_L(0_+) = 10 - 3 \times 2 - 4 = 0V$$

通过以上例题，可以归纳出求初始值的一般步骤如下：

- (1) 根据 $t=0_-$ 时的等效电路，求出 $u_C(0_-)$ 及 $i_L(0_-)$ 。
- (2) 作出 $t=0_+$ 时的等效电路，并在图上标出各待求量。
- (3) 由 $t=0_+$ 等效电路，求出各待求量的初始值。



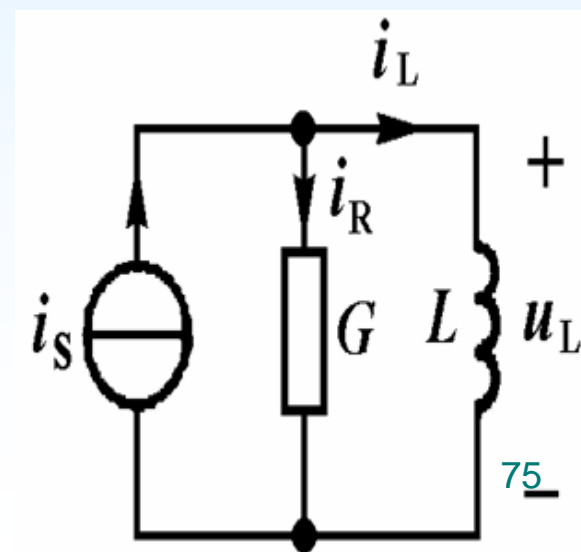
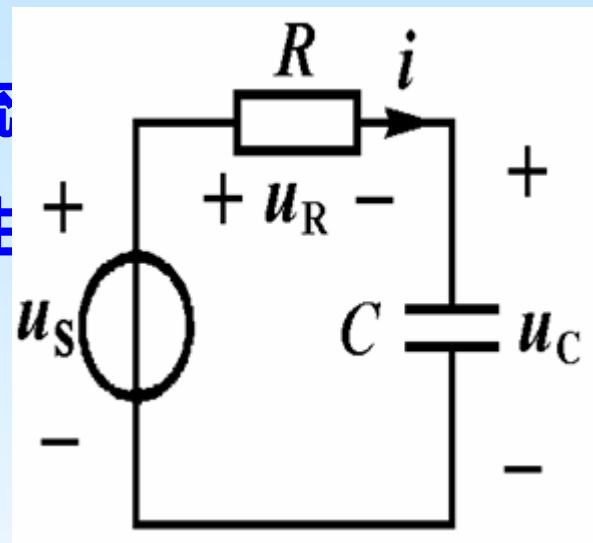
# 动态电路的电路方程

含有储能元件的动态电路中的电压电流仍然受到KCL、KVL的拓扑约束和元件特性VCR的约束。一般来说，根据KCL、KVL和VCR写出的电路方程是一组微分方程。

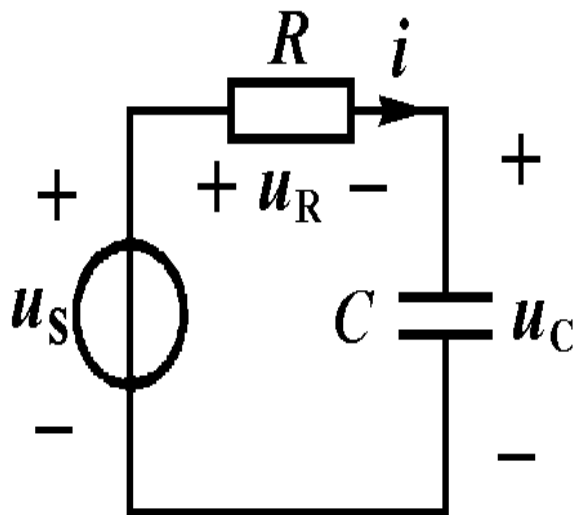
由一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。

由二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。

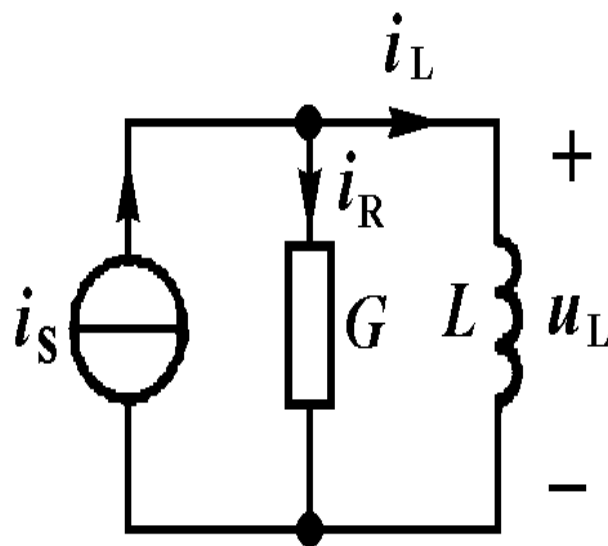
由 $n$ 阶微分方程描述的电路称为 $n$ 阶电路。



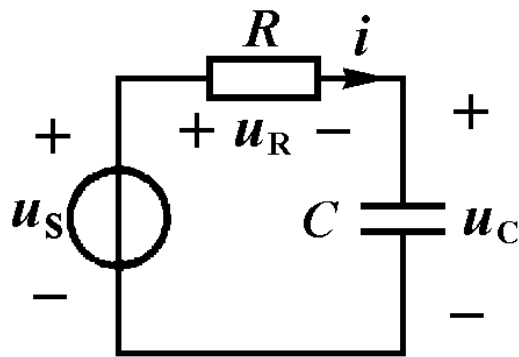
## 例8 列出图所示电路的一阶微分方程。



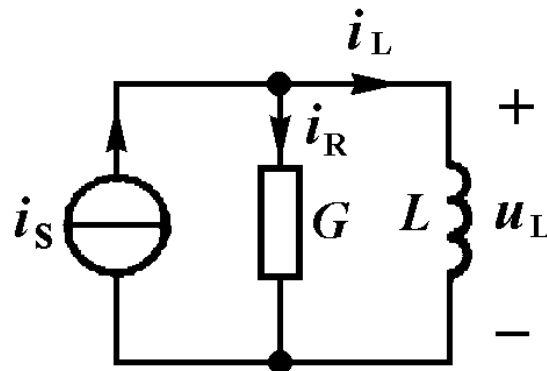
(a)



(b)



(a)



(b)

**解：对于图(a)所示RC串联电路，可以写出以下方程**

$$u_S(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t)$$

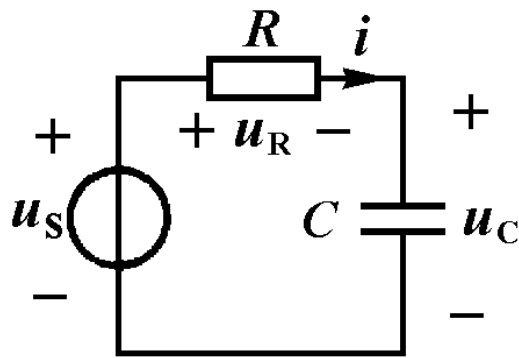
**在上式中代入：**

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

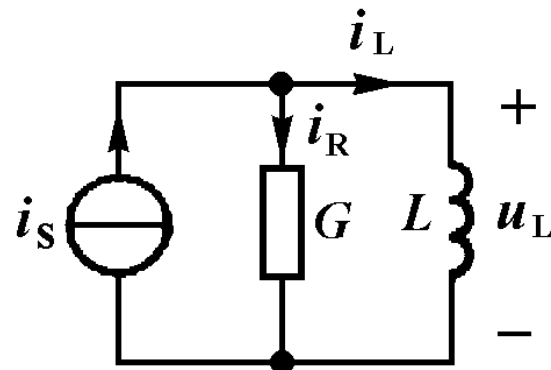
**得到**

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_S(t)$$

**这是常系数非齐次一阶微分方程，图(a)是一阶电路。**



(a)



(b)

对于图(b)所示 $RL$ 并联电路，可以写出以下方程

$$i_S(t) = i_R(t) + i_L(t) = Gu_L(t) + i_L(t)$$

在上式中代入：

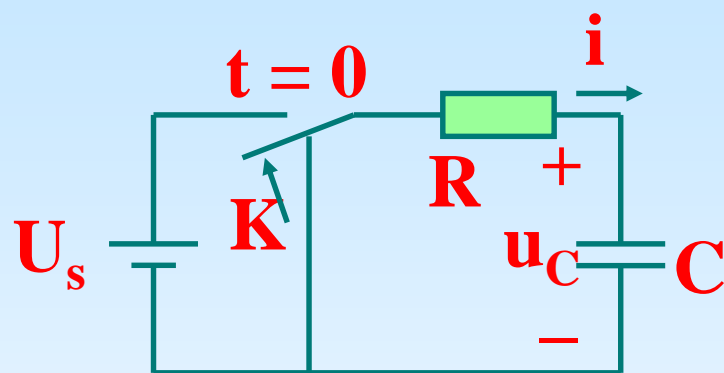
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

得到

$$GL \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S(t)$$

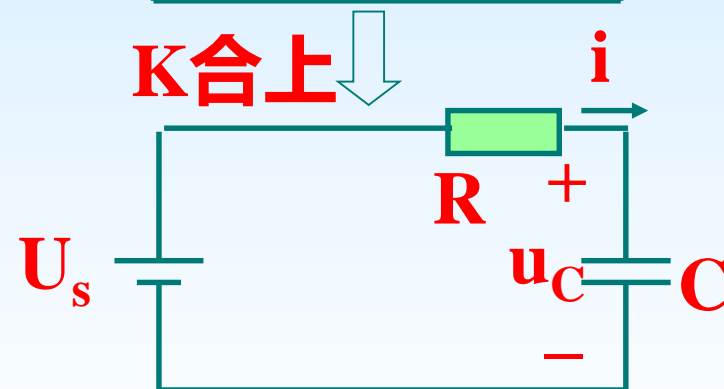
这是常系数非齐次一阶微分方程。图(b)是一阶电路。

## 电路的过渡过程



**K未动作前:**

$$i(0^-) = 0\text{A} , \quad u_C(0^-) = 0\text{V}$$

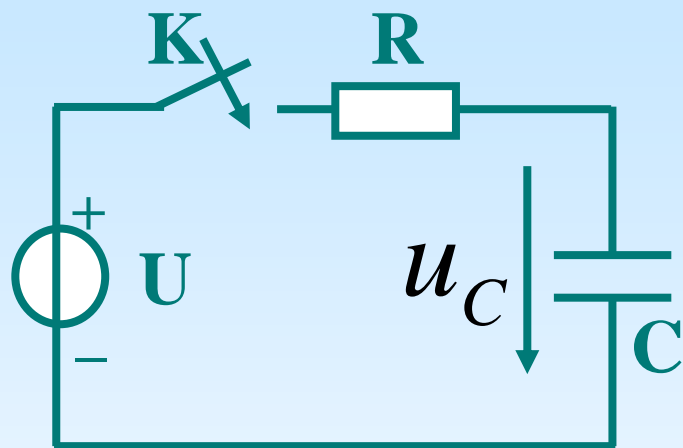


**K接通电源后很长时间:**

$$i(\infty) = 0\text{A} , \quad u_C(\infty) = U_s$$

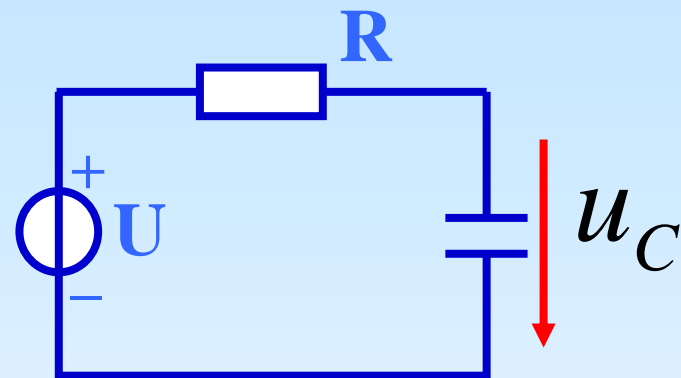
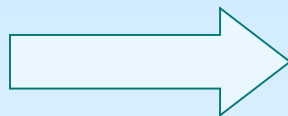
**过渡过程:** 电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程, 即**电路变化**.

♣ “稳态” 与 “暂态” 的概念:



电路处于旧稳态

开关K闭合



电路处于新稳态

过渡过程：

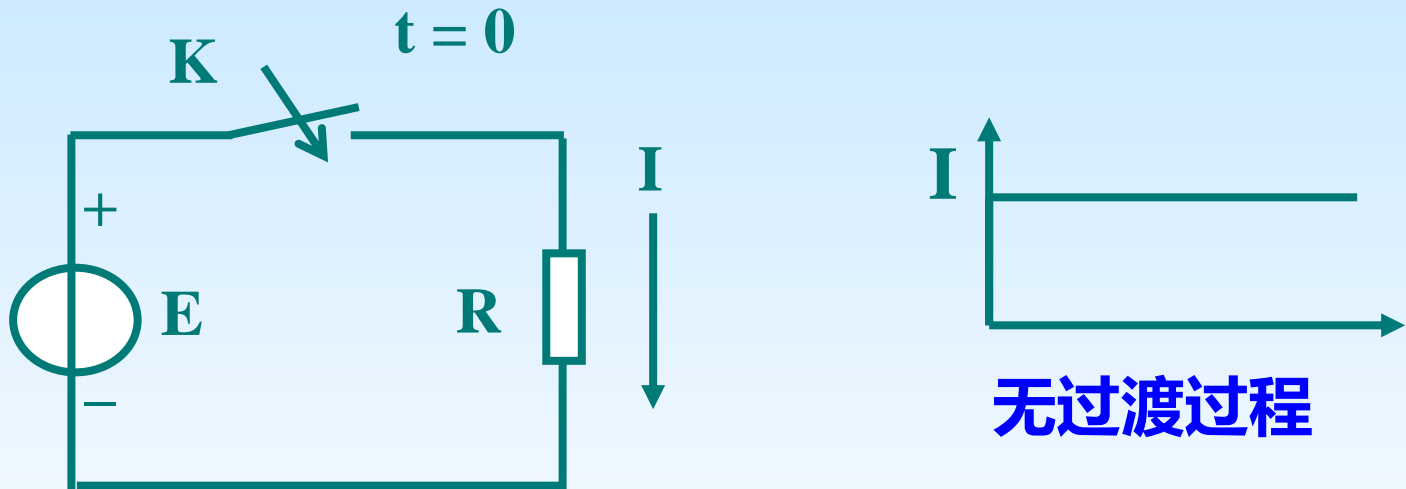
旧稳态  $\longrightarrow$  新稳态





# 产生过渡过程的电路及原因？

## 电阻电路



电阻是耗能元件，其上电流随电压比例变化，不存在过渡过程。

电容为储能元件，它储存的能量为电场能量，  
其大小为：

$$W_C = \int_0^t u i dt = \frac{1}{2} C u^2$$

因为能量的存储和释放需要一个过程，所以有**电容**  
**的电路存在过渡过程。**

电感为储能元件，它储存的能量为磁场能量，其  
大小为：

$$W_L = \int_0^t u i dt = \frac{1}{2} L i^2$$

因为能量的存储和释放需要一个过程，所以有**电**  
**感的电路存在过渡过程。**

# 零输入响应

零输入响应：激励(独立电源)为零，仅由电容或电感的初始储能作用于电路产生的响应。

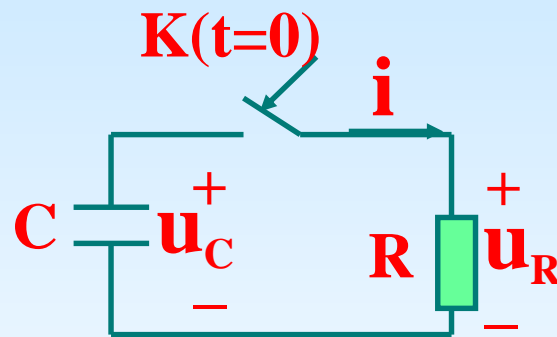
## 一、RC电路的零输入响应

已知  $u_C(0_-)=U_0$  求  $u_C$  和  $i$ 。

解:  $i = i_c = -C \frac{du_C}{dt}$

$$u_C - u_R = u_C - Ri = 0$$

$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ u_C(0_+) = U_0 \end{cases}$$



令  $u_C = Ae^{pt}$

特征方程  $RCp + 1 = 0$

特征根  $p = -\frac{1}{RC}$

则  $u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$   
e=? e=2.71828

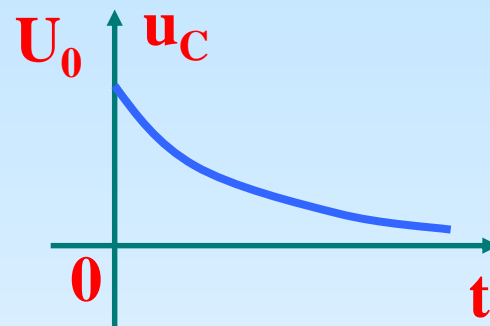
# 一、RC电路的零输入响应

$$u_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

初始值  $u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$

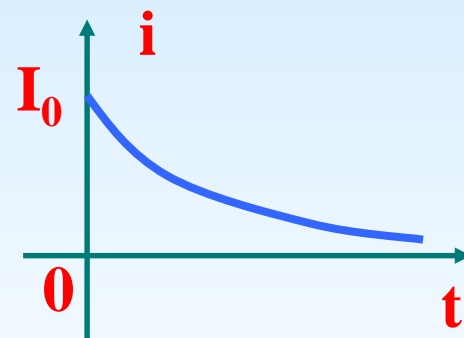
$$U_0 = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Big|_{t=0}$$

$$A = U_0$$



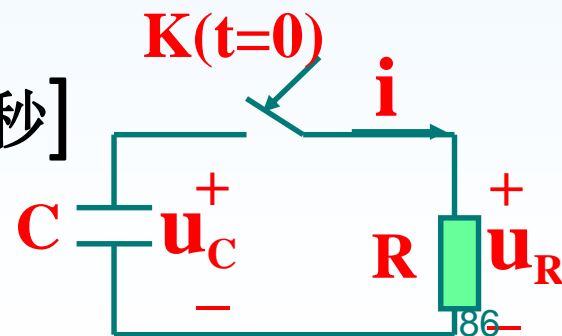
$$\therefore u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0_+$$

$$i = \frac{u_c}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0_+$$



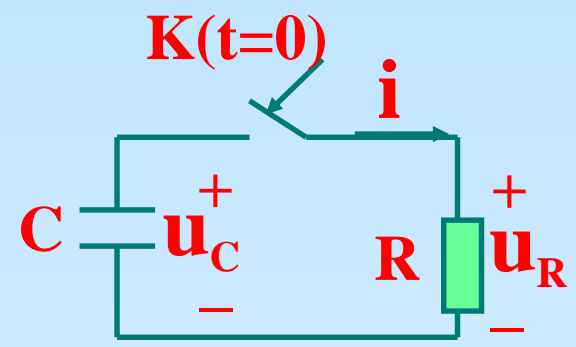
令  $\tau = RC$ ，称  $\tau$  为一阶电路的时间常数。

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right] = [\text{秒}]$$



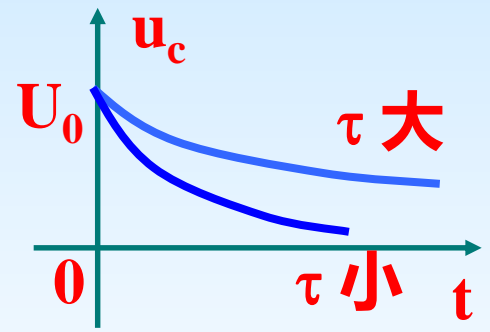
一、RC电路的零输入响应

$$\tau = RC \quad u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$
$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$



时间常数  $\tau$  的大小反映了电路过渡过程时间的长短.

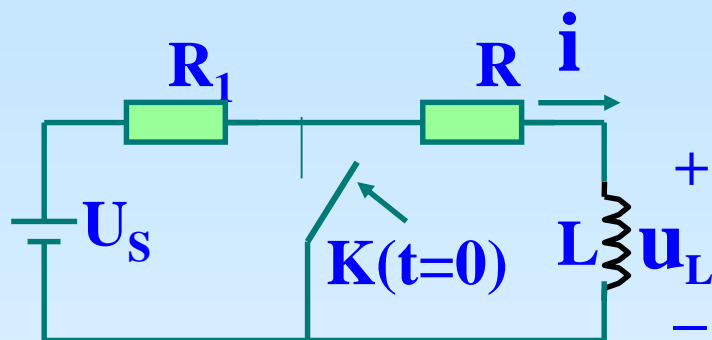
$\tau$  大      过渡过程时间的长  
 $\tau$  小      过渡过程时间的短



电压初值一定:

C 大 (R不变)	$W=0.5Cu^2$	储能大	} 放电时间长
R 大 (C不变)	$i=u/R$	放电电流小	

## 二. RL电路的零输入响应



$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad t \geq 0_+$$

特征方程  $Lp + R = 0$

特征根  $p = -\frac{R}{L}$

$$i(t) = Ae^{pt}$$

由初始值  $i(0_+) = I_0$  确定积分常数A

$$A = i(0_+) = I_0$$

$$\text{得 } i(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0_+$$

## 二. RL电路的零输入响应

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0_+$$

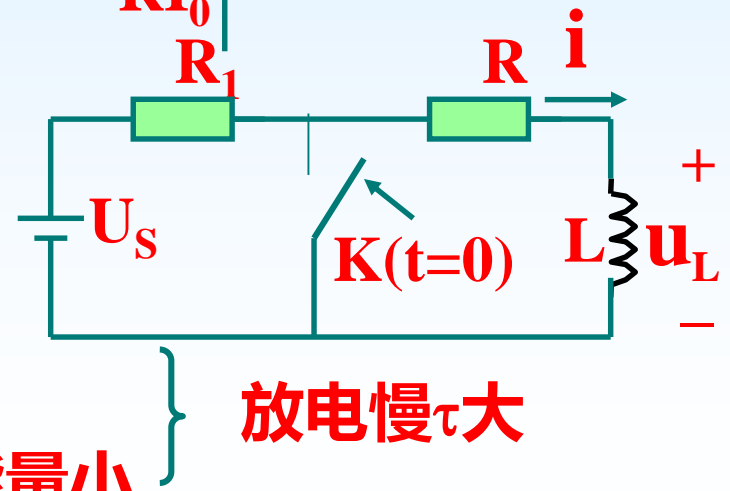
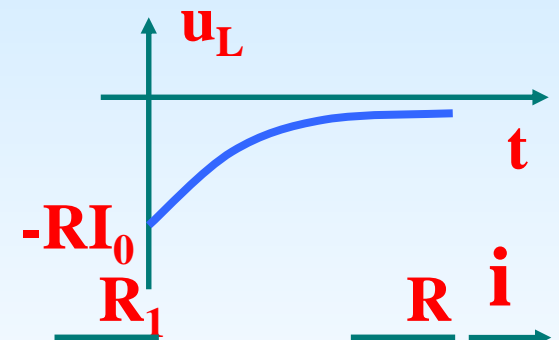
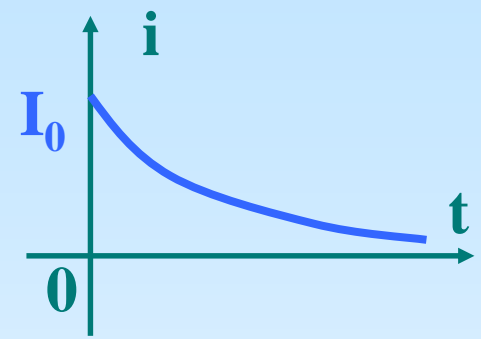
$$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0_+$$

令  $\tau = L/R$  (左/右 Left/Right),  
称为一阶RL电路时间常数;

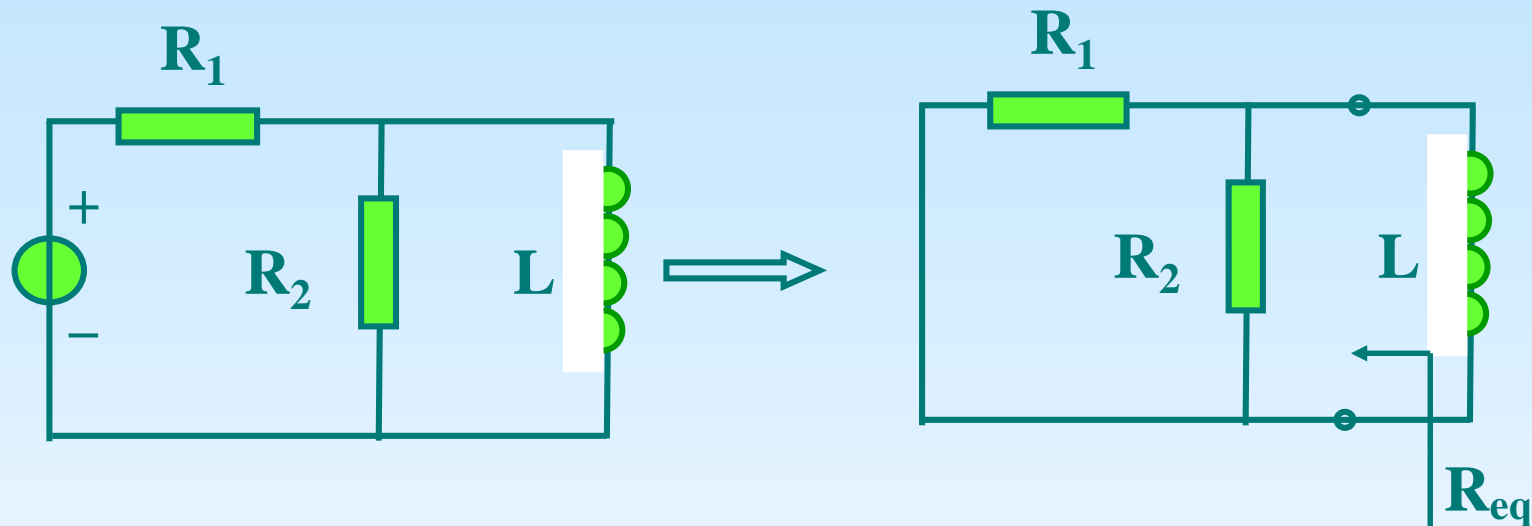
电流初始值一定:

L大 (R不变)      起始能量大

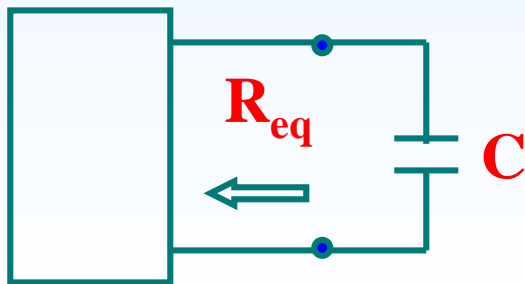
R小 (L不变)      放电过程消耗能量小



## 时间常数 $\tau$ 的计算方法:



$$\tau = L / R_{eq} = L / (R_1 // R_2)$$

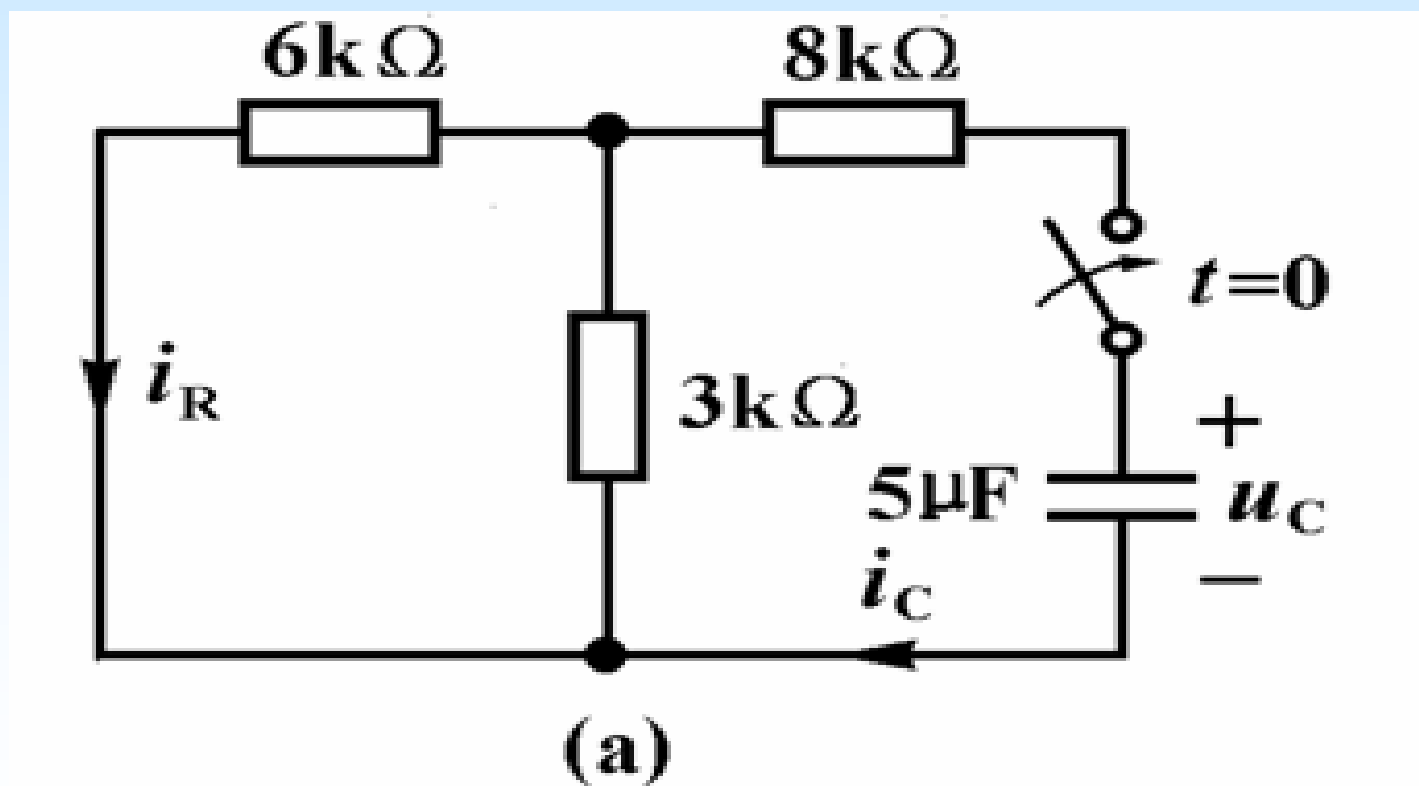


$$\tau = R_{eq} C$$



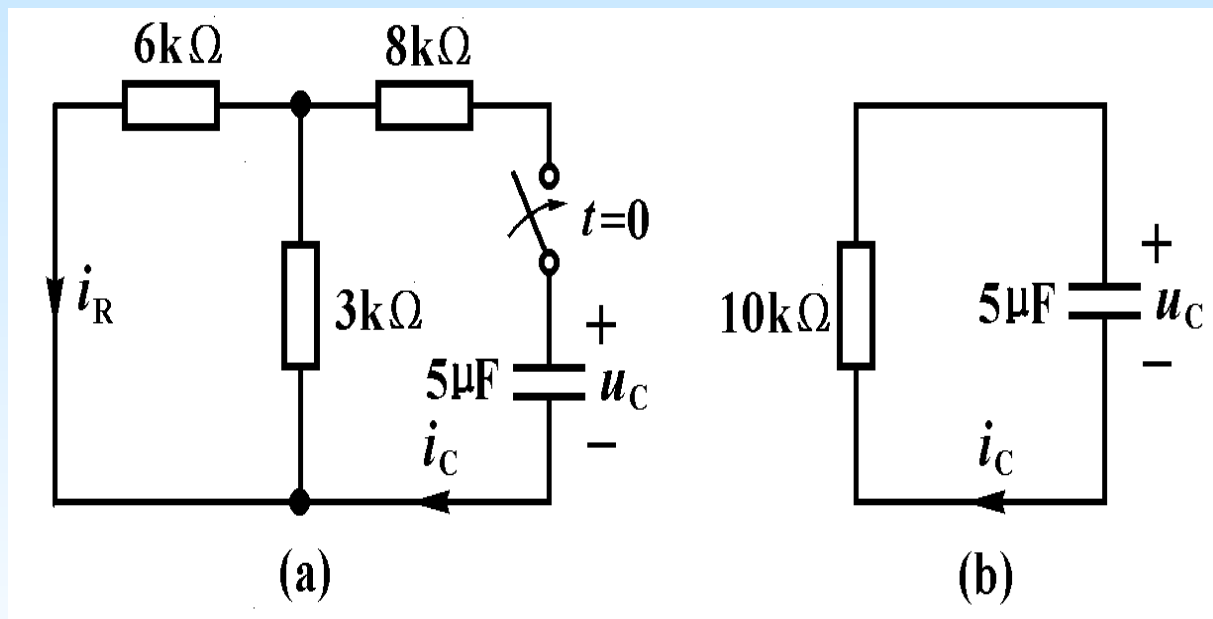
**例** 电路如图所示，已知电容电压 $u_C(0_-)=6\text{V}$ 。

$t=0$ 闭合开关，求 $t > 0$ 的电容电压和电容电流。



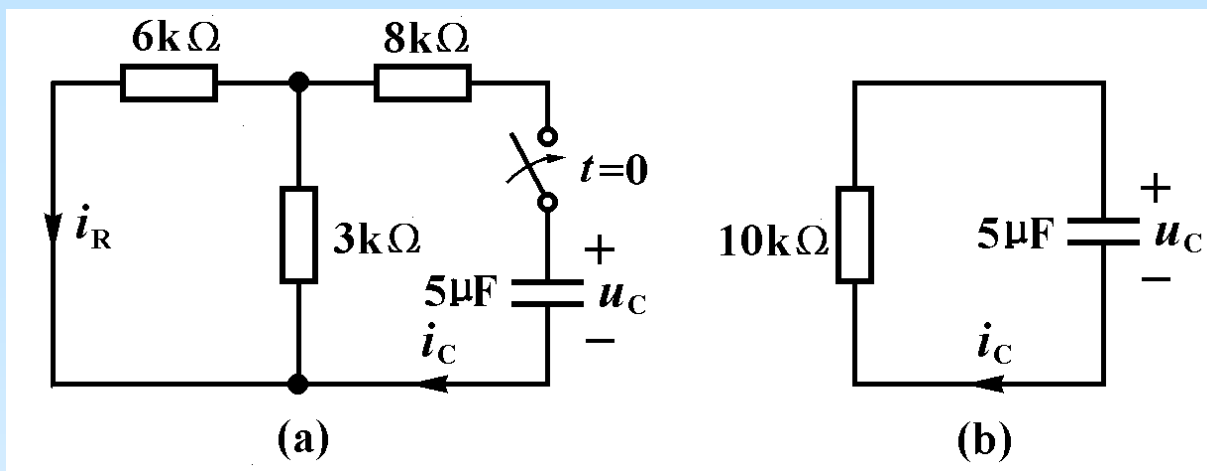
**例3 电路如图(a)所示，已知电容电压 $u_C(0_-)=6V$ 。**

**$t=0$ 闭合开关，求 $t > 0$ 的电容电压和电容电流。**



**解：在开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，由此得到**

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6V$$

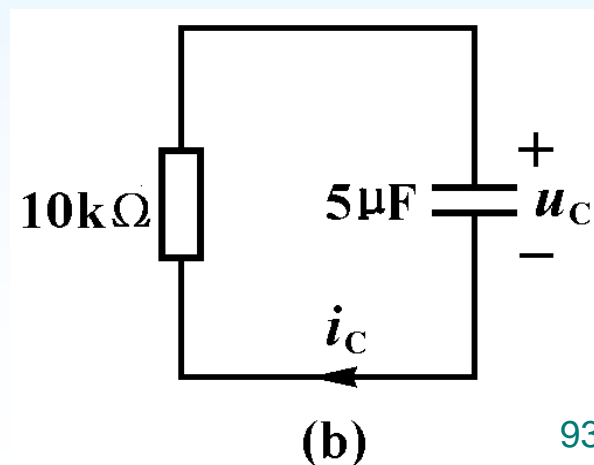


将连接于电容两端的电阻单口网络等效于一个电阻，其电阻值为：

$$R_o = \left(8 + \frac{6 \times 3}{6 + 3}\right) \text{k}\Omega = 10 \text{k}\Omega$$

得到图(b)所示电路，其时间常数为：

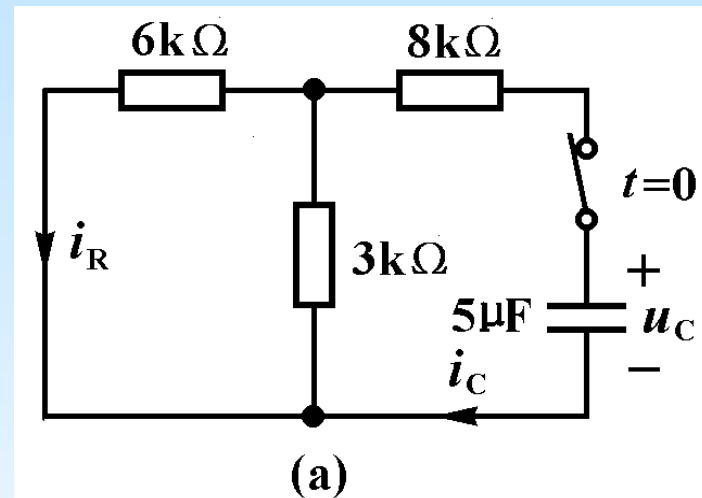
$$\begin{aligned} \tau &= RC = 10 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} \text{ s} \\ &= 5 \times 10^{-2} \text{ s} = 0.05 \text{ s} \end{aligned}$$



由零输入响应公式得到：

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-20t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -\frac{6}{10 \times 10^3} e^{-20t} \text{ mA} \\ &= -0.6e^{-20t} \text{ mA} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

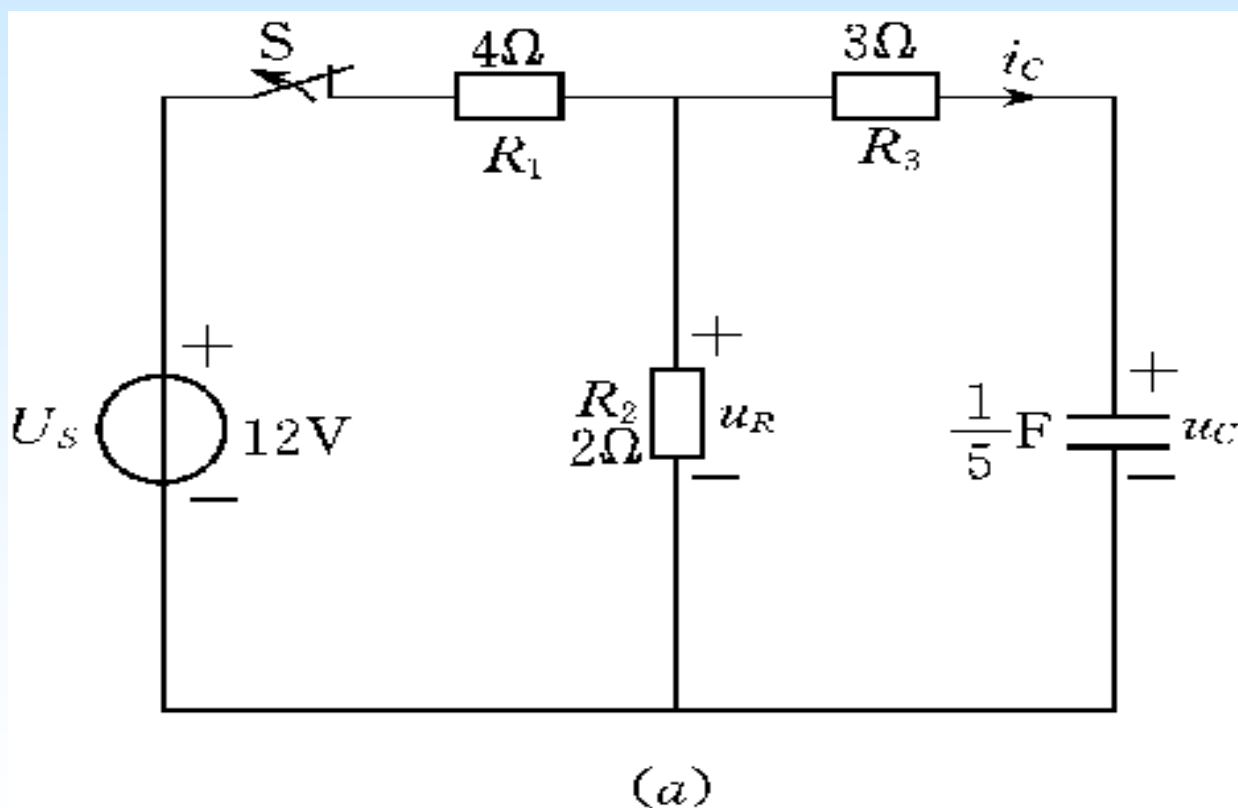


电阻中的电流 $i_R(t)$ 可以用与 $i_C(t)$ 同样数值的电流源代替电容，用电阻并联的分流公式求得  $i_R(t)$ ：

$$i_R(t) = -\frac{3}{3+6} i_C(t) = \frac{1}{3} \times 0.6e^{-20t} \text{ mA} = 0.2e^{-20t} \text{ mA}$$

**例 4：如图 (a)所示电路， $t=0_-$  时电路已处于稳态， $t=0$ 时开关S打开。**

**求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_c$ 、 $u_R$ 和电流 $i_c$ 。**



**解：** 由于在 $t=0_-$  时  
电路已处于稳态，在  
直流电源作用下，电  
容相当于开路。

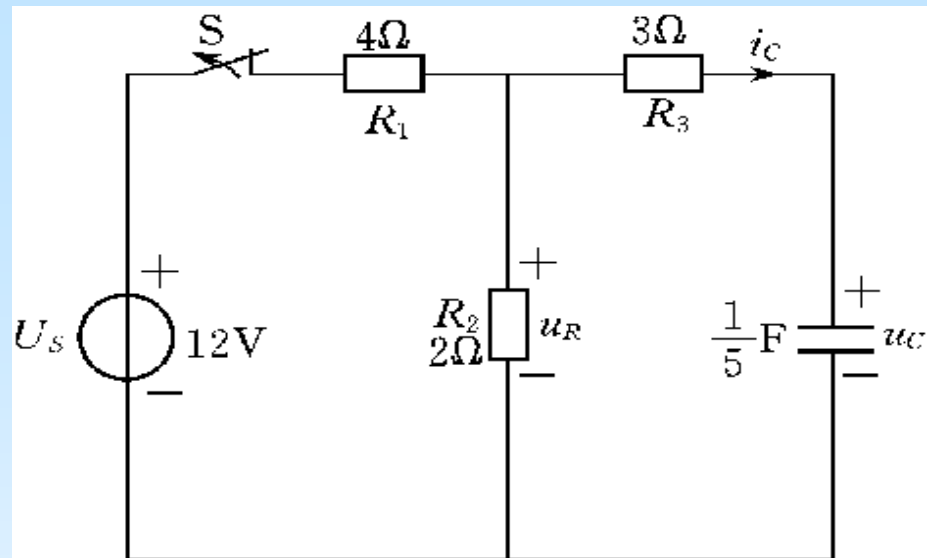
**所以**

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s = \frac{2 \times 12}{4 + 2} = 4V$$

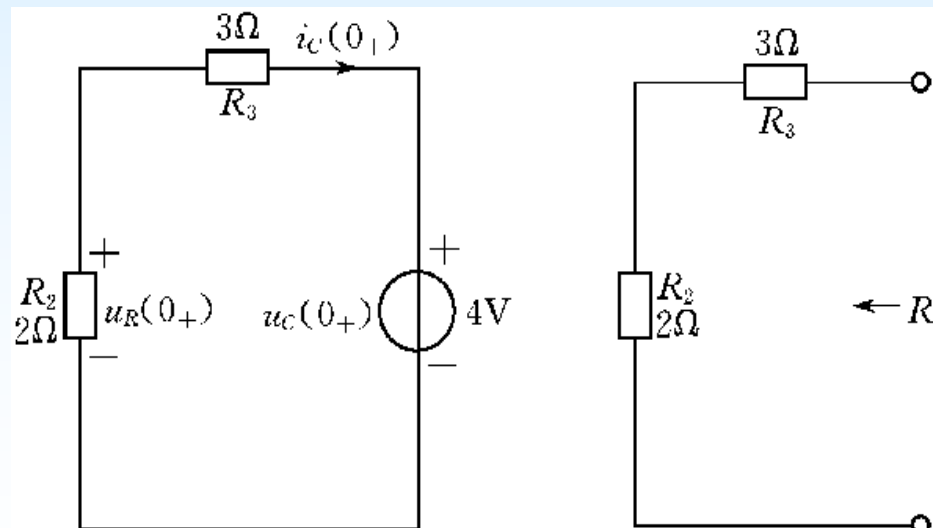
**由换路定律，得：**

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4V$$

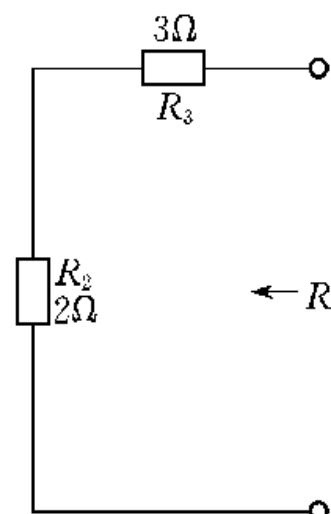
**作出 $t=0_+$ 等效电路如  
图(b)所示，**



(a)



(b)

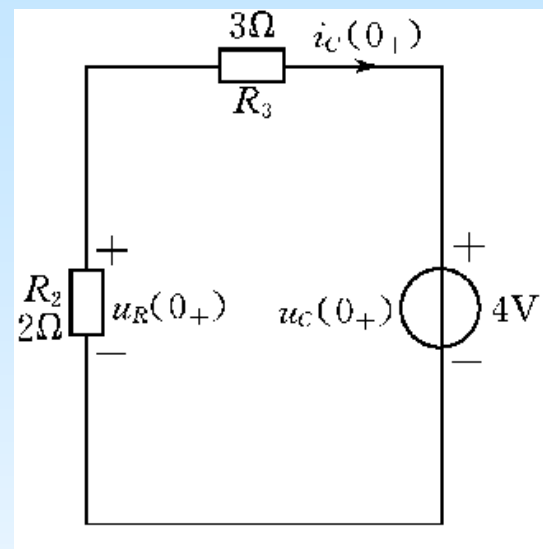


(c)

**电容用4V电压源代替，由图(b)可知**

$$u_R(0_+) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_C(0_+) = \frac{2 \times 4}{2 + 3} = 1.6V$$

$$i_C(0_+) = -\frac{u_C(0_+)}{R_2 + R_3} = -\frac{4}{2 + 3} = -0.8A$$



**换路后从电容两端看进去的等效电阻如图 (C) 所示，为：**

$$R = R_3 + R_2 = 3 + 2 = 5\Omega$$

**时间常数为：**

$$\tau = RC = 5 \times \frac{1}{5} = 1S$$

计算零输入响应，得：

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

$$u_R = u_R(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.6e^{-t} \text{ V} \quad t > 0$$

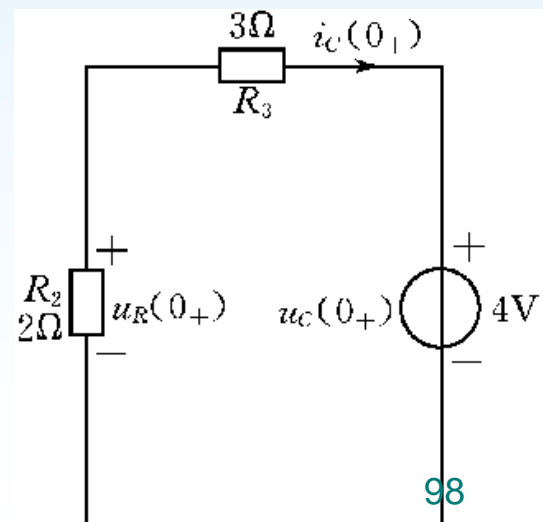
$$i_C = i_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.8e^{-t} \text{ A} \quad t > 0$$

也可以由：

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

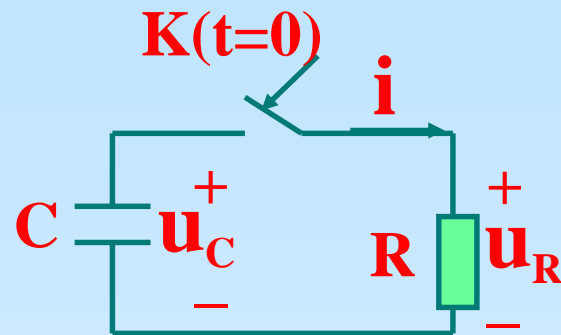
求出：

$$i_C = -0.8e^{-t} \text{ A} \quad t > 0$$





## 小结:



1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

2. 衰减快慢取决于时间常数 $\tau$

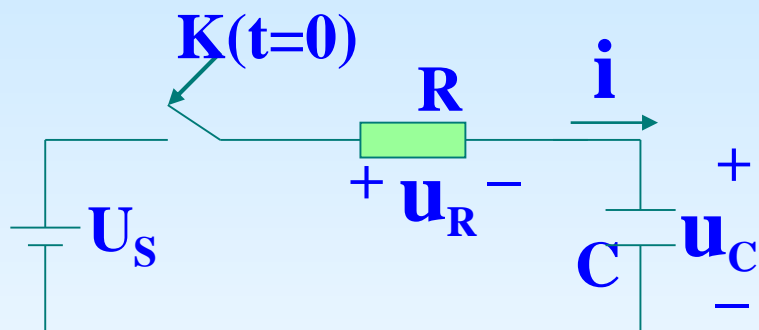
RC电路  $\tau = RC$  , RL电路  $\tau = L/R$

3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

# 零状态响应

零状态响应：储能元件初始能量为零的电路在输入激励作用下产生的响应。

## 一、RC电路的零状态响应



已知  $u_C(0_-)=0$  求：电容电压  $u_C(t)$  和电流  $i(t)$ ?

列方程：

$$Ri + u_C = U_s$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

解答形式为：  $u_c = u'_c + u''_c$

齐次方程的通解

齐次方程的特解

$$u_c = u'_c + u''_c$$

$u'_c$  : 特解 (强制分量、稳态分量)  $u'_c = U_s$

因为它由输入激励决定, 称为强制分量; 它也是电路的稳态解, 也称为稳态分量;

$u''_c$  : 通解 (自由分量, 暂态分量)

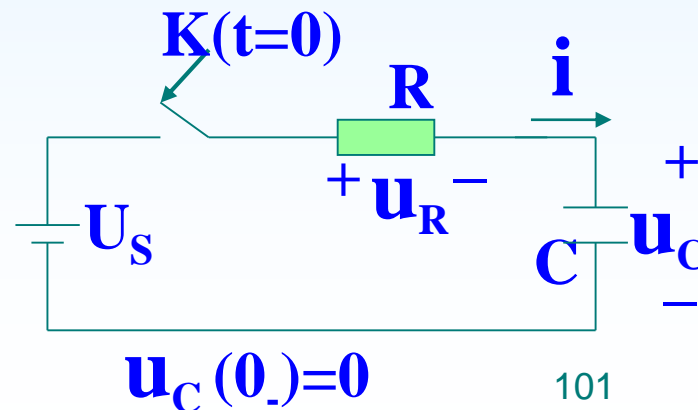
齐次方程  $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$  的通解

$u''_c = A e^{-\frac{t}{RC}}$  变化规律由电路结构和参数决定;

全解:  $u_c = u'_c + u''_c = U_s + A e^{-\frac{t}{RC}}$

由起始条件  $u_c(0_+) = 0$  定积分常数  $A$

$$u_c(0_+) = A + U_s = 0 \quad \therefore A = -U_s$$

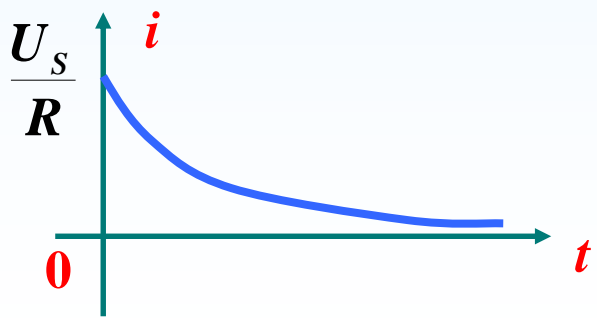
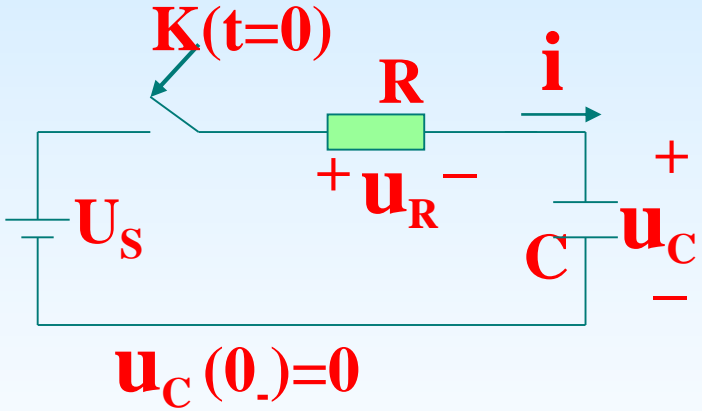
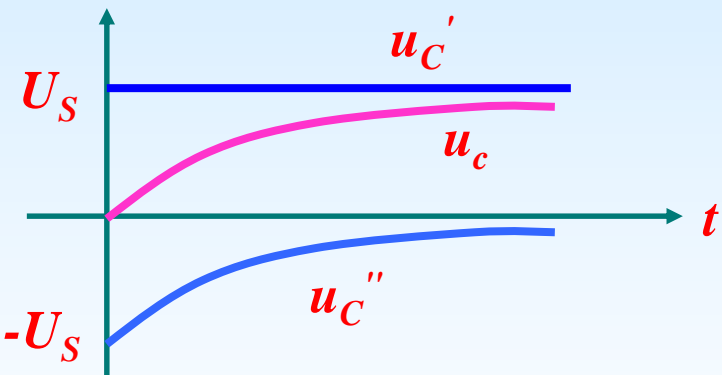


# §8-2 零状态响应

$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0_+)$$

强制分量(稳态)

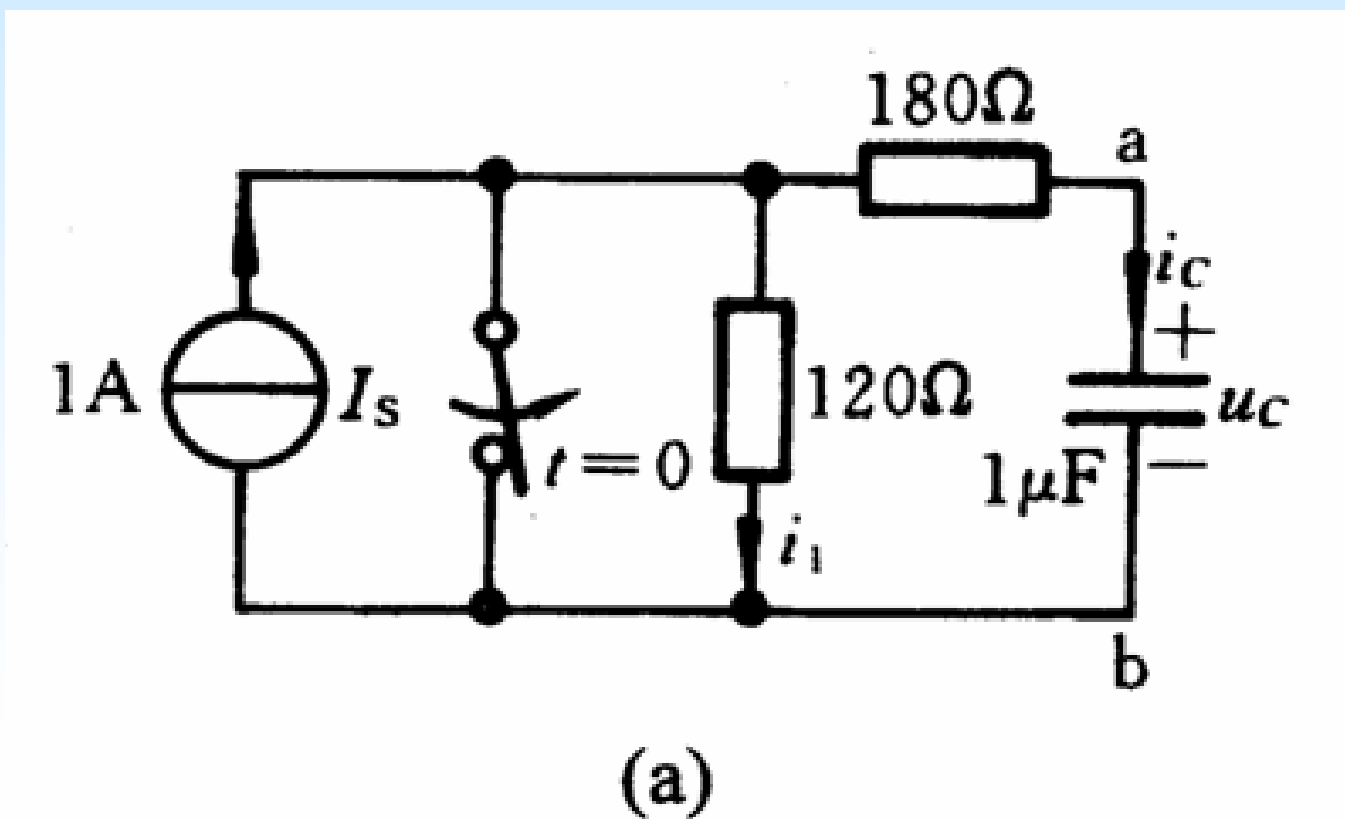
自由分量(暂态)



$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

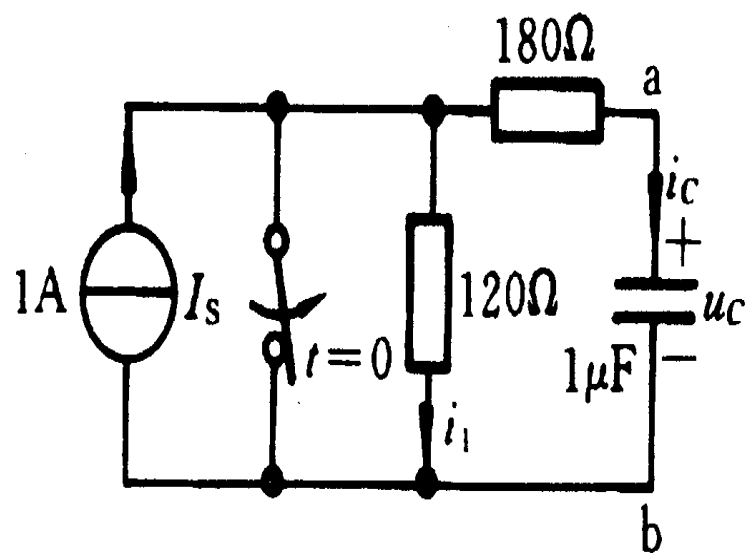
**例6 电路如图所示，已知电容电压 $u_C(0_-)=0$ 。  $t=0$**

**打开开关，求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ ，电容电流 $i_C(t)$ 以及电阻电流 $i_1(t)$ 。**



例6 电路如图所示，已知电容电压 $u_C(0_-)=0$ 。  $t=0$

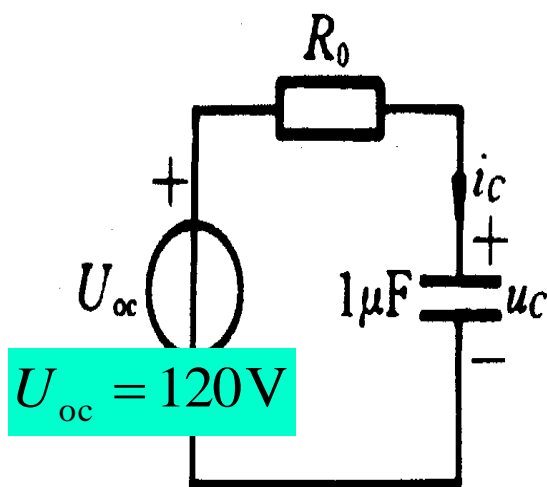
打开开关，求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ ，电容电流 $i_C(t)$ 以及电阻电流 $i_1(t)$ 。



(a)

$$u_C(0_-)=0$$

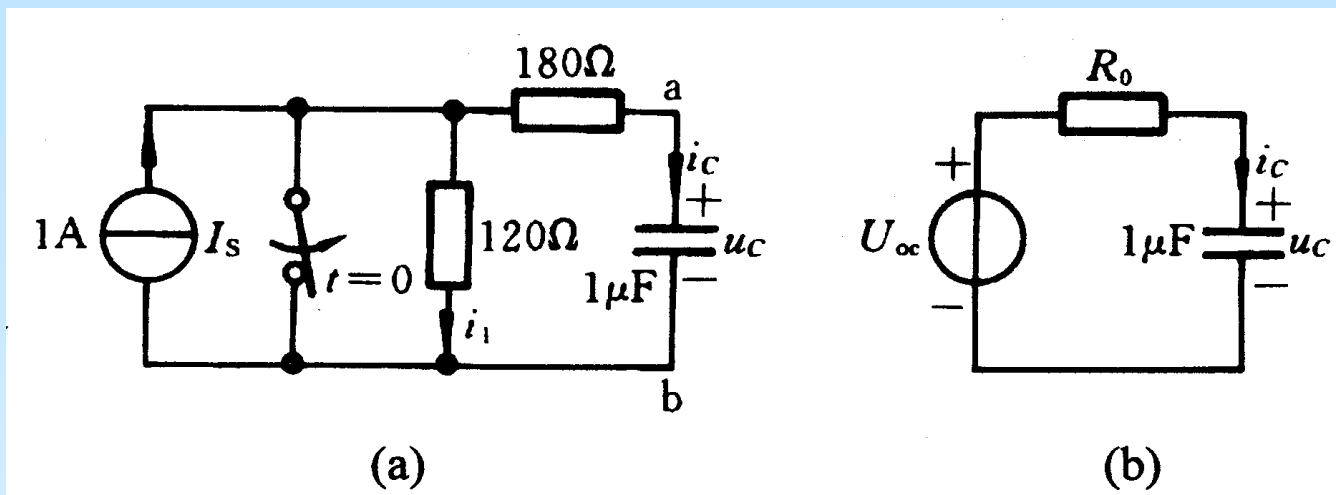
$$R_o = 300\Omega$$



(b)

$$U_{oc} = 120\text{V}$$

$$u_C(0_+) = 0$$



**解：在开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，由此得到**

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

**先将连接于电容两端的含源电阻单口网络等效于戴维宁等效电路，得到图(b)所示电路，其中：**

$$U_{oc} = 120V$$

$$R_0 = 300\Omega$$

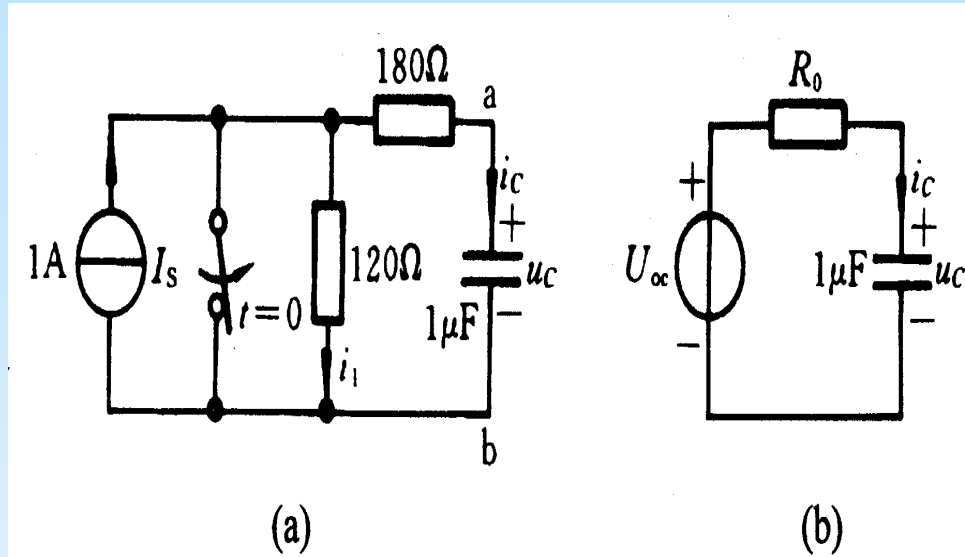
**电路的时间常数为：**

$$\tau = R_0 C = 300\Omega \times 10^{-6}F = 3 \times 10^{-4}s = 300\mu s$$

当电路达到新的稳定状态时，  
电容相当开路，由此求得：

$$U_C(\infty) = U_{oc} = 120V$$

由零状态响应可以得到：



$$u_C(t) = U_{oc}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 120(1 - e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t})V \quad (t \geq 0)$$

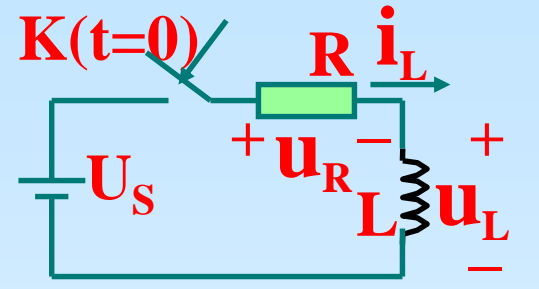
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-6} \times 120 \times \frac{1}{3} \times 10^4 e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} = 0.4e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} A \quad (t > 0)$$

为了求得 $i_1(t)$ ，根据图 (a) 所示电路，用KCL方程得到：

$$i_1(t) = I_s - i_C(t) = (1 - 0.4e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t})A \quad (t > 0)$$



# 二、RL电路的零状态响应



已知  $i_L(0_-)=0\text{A}$       求: 电感电流  $i_L(t)$  和电压  $u_L(t)$ ?

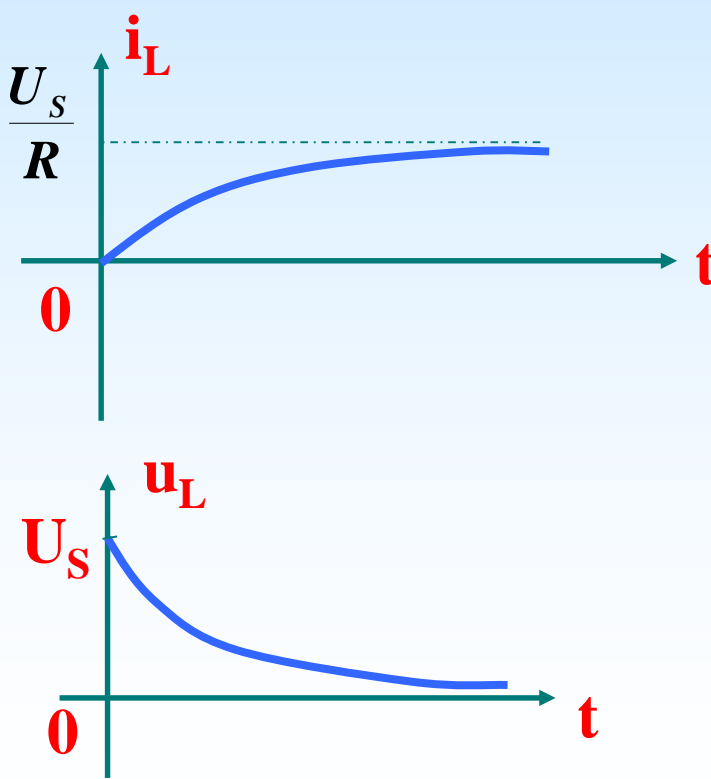
$$\left. \begin{aligned} Ri_L + u_L &= U_s \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} + Ri_L &= U_s \end{aligned}$$

$$i = i' + i'' = \frac{U_s}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_s}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(0_+) = 0 \implies A = -\frac{U_s}{R}$$

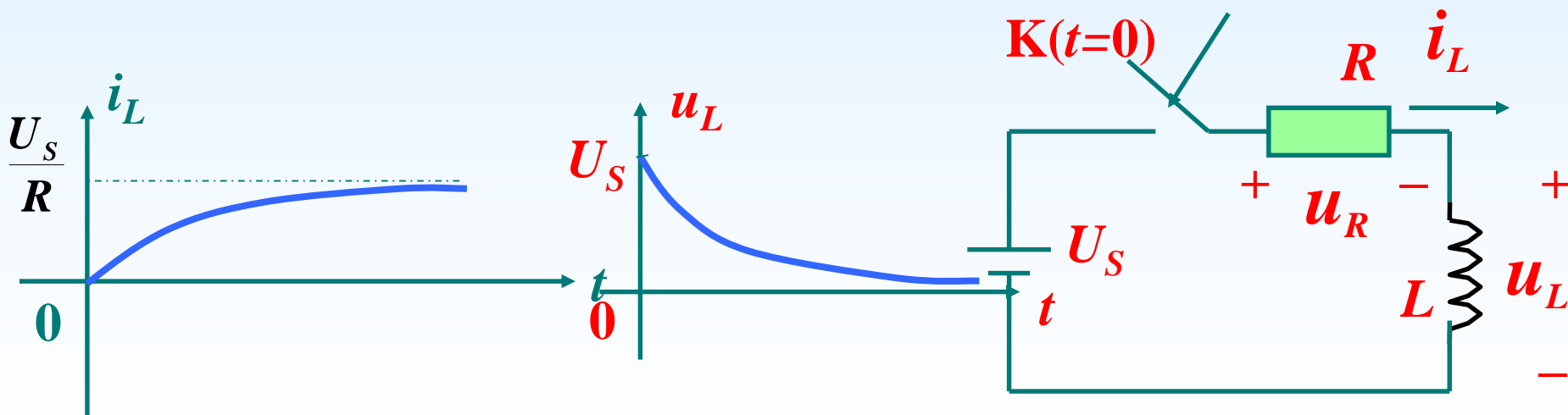
$$i_L = \frac{U_s}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0_+$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$



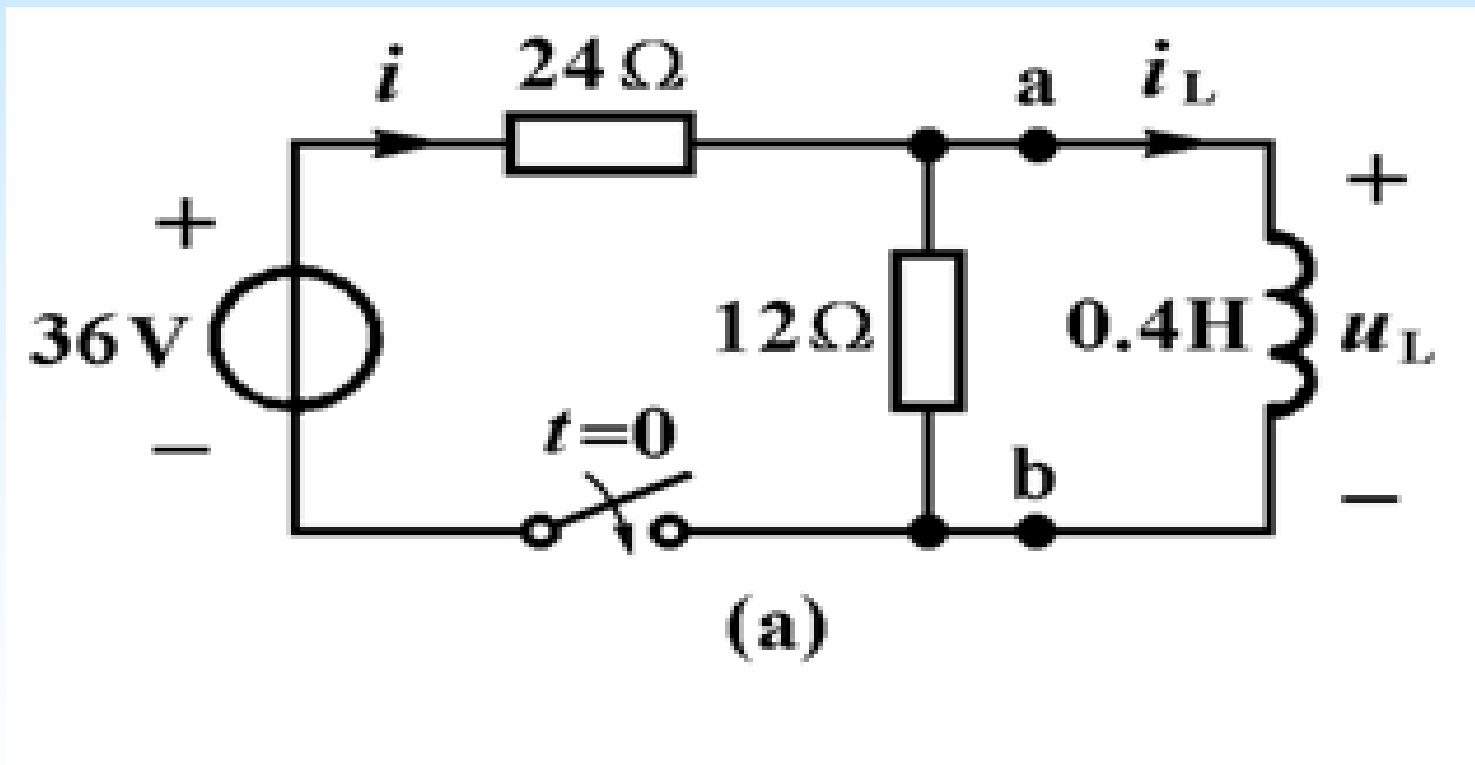
## 二、RL电路的零状态响应

其物理过程是，K闭合后， $i_L$  (即  $i_R$ ) 从初始值零逐渐上升， $u_L$  从初始值  $u_L(0_+) = U_S$  逐渐下降，而  $u_R$  从  $u_R(0_+) = 0$  逐渐上升，当  $t = \infty$ ，电路达到稳态，这时L相当于短路， $i_L(\infty) = U_S / R$ ， $u_L(\infty) = 0$ ， $u_R(\infty) = U_S$ 。从波形图上可以直观地看出各响应的变化规律。



**例7 电路如图所示，已知电感电流 $i_L(0_-)=0$ 。**

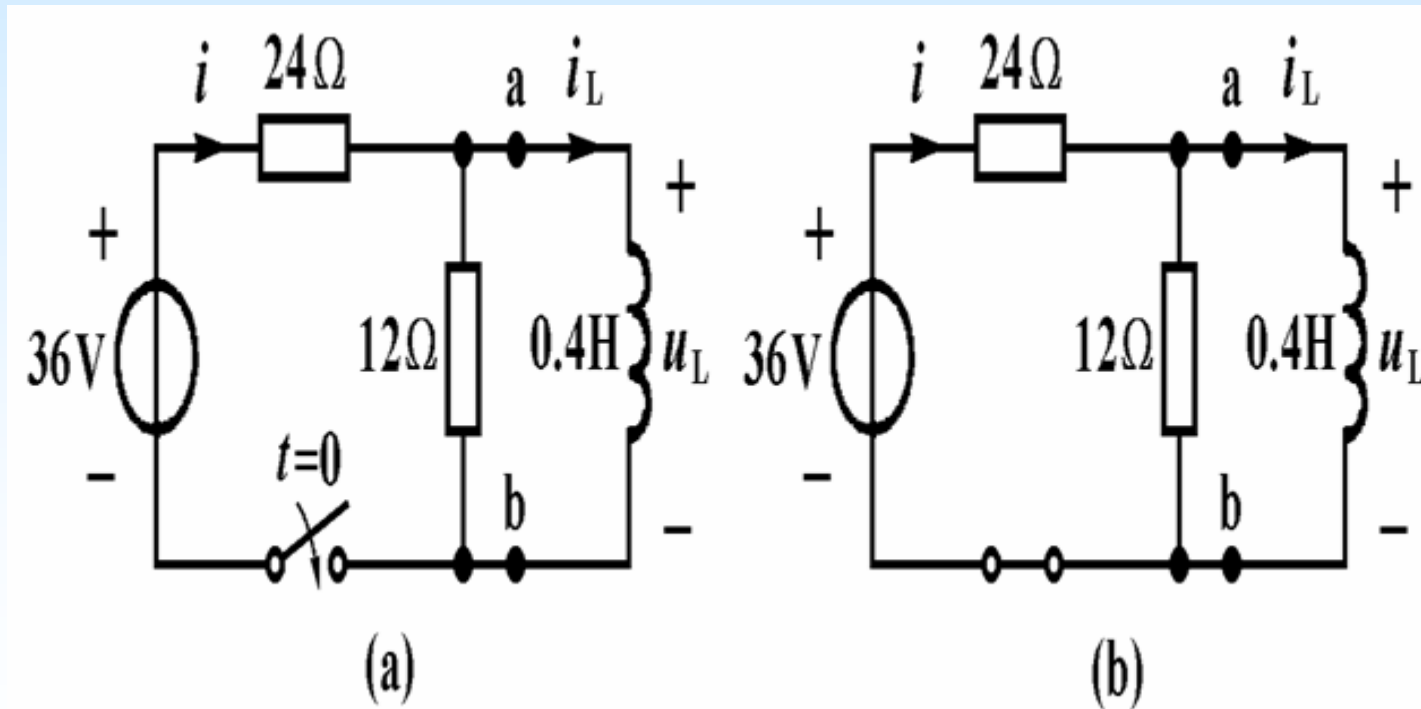
**$t=0$ 闭合开关，求 $t \geq 0$ 的 $i(t)$ ，电感电流和电感电压。**



**例7 电路如图所示，已知电感电流 $i_L(0_-)=0$ 。**

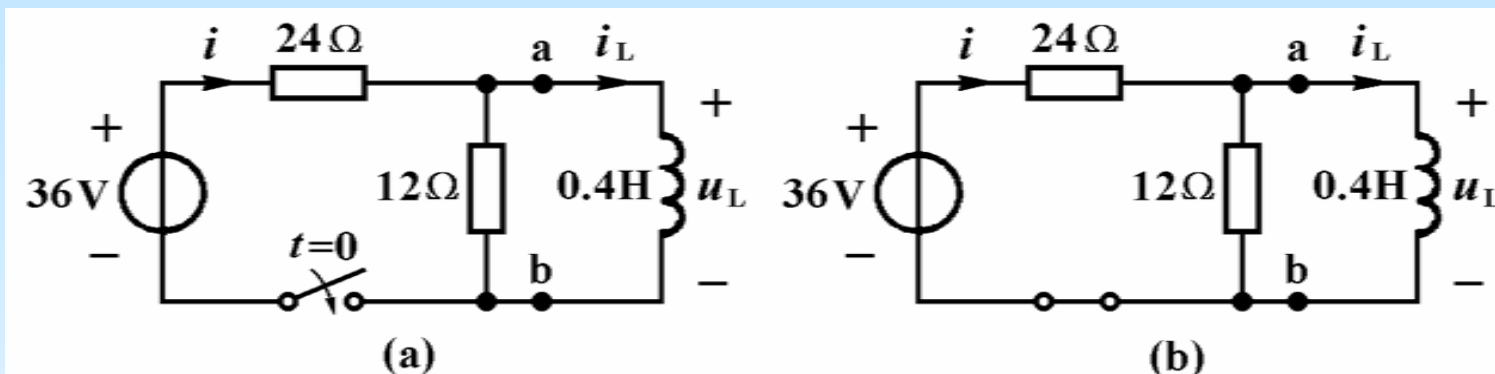
**$t=0$ 闭合开关，求 $t \geq 0$ 的电感电流和电感电压。**

$$i_L(0_-) = 0$$



**例7 电路如图所示，已知电感电流 $i_L(0_-)=0$ 。**

**$t=0$ 闭合开关，求 $t \geq 0$ 的电感电流和电感电压。**



**解：开关闭合后的电路如图(b)所示，由于开关闭合瞬间电感电压有界，电感电流不能跃变，即**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

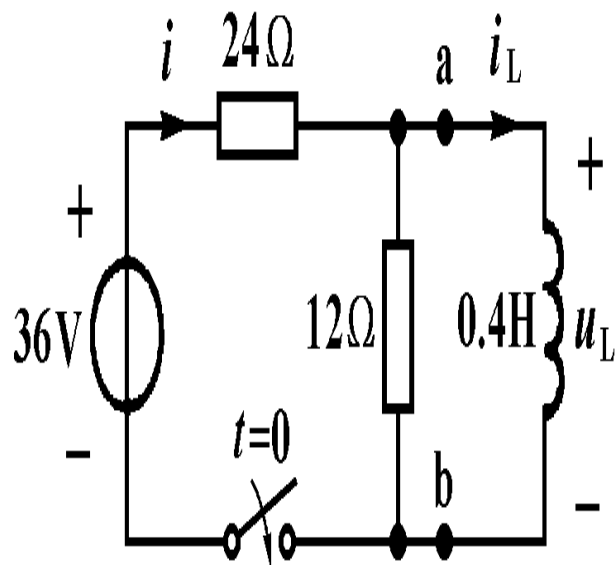
**将图(b)中连接电感的含源电阻单口网络用诺顿等效电路代替：**

$$i_{sc} = 1.5\text{A}$$

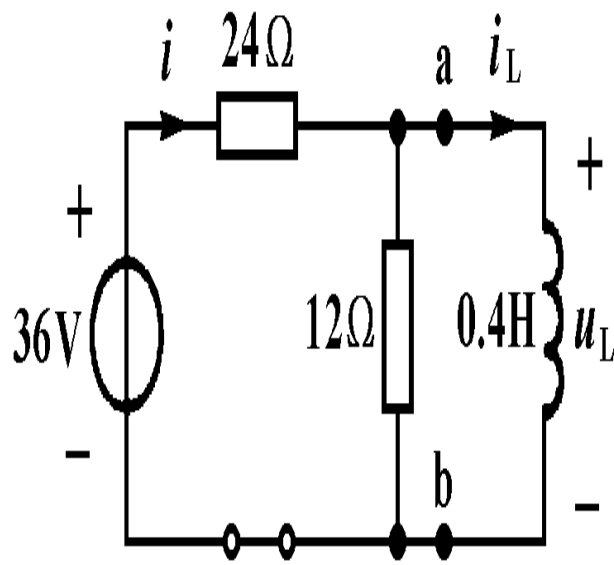
$$R_o = 24 // 12 = 8\Omega$$

**例7 电路如图所示，已知电感电流 $i_L(0_-)=0$ 。**

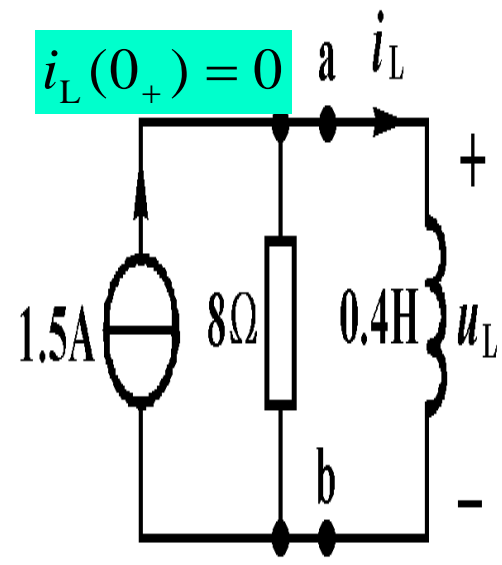
**$t=0$ 闭合开关，求 $t \geq 0$ 的电感电流和电感电压。**



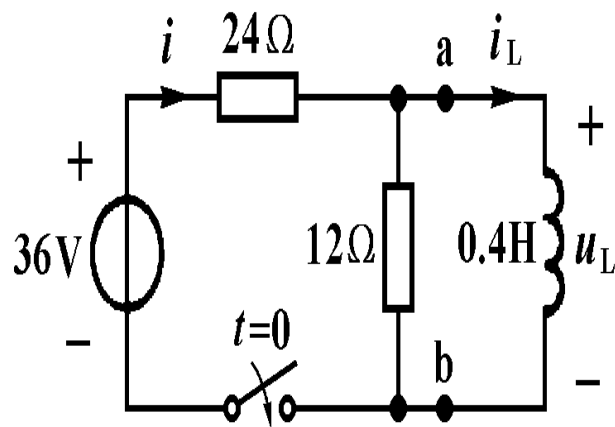
(a)



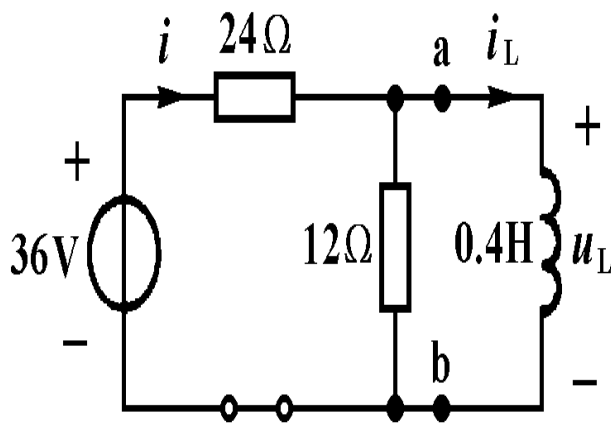
(b)



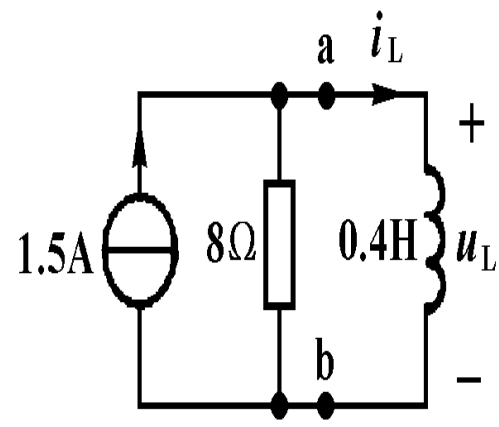
(c)



(a)



(b)



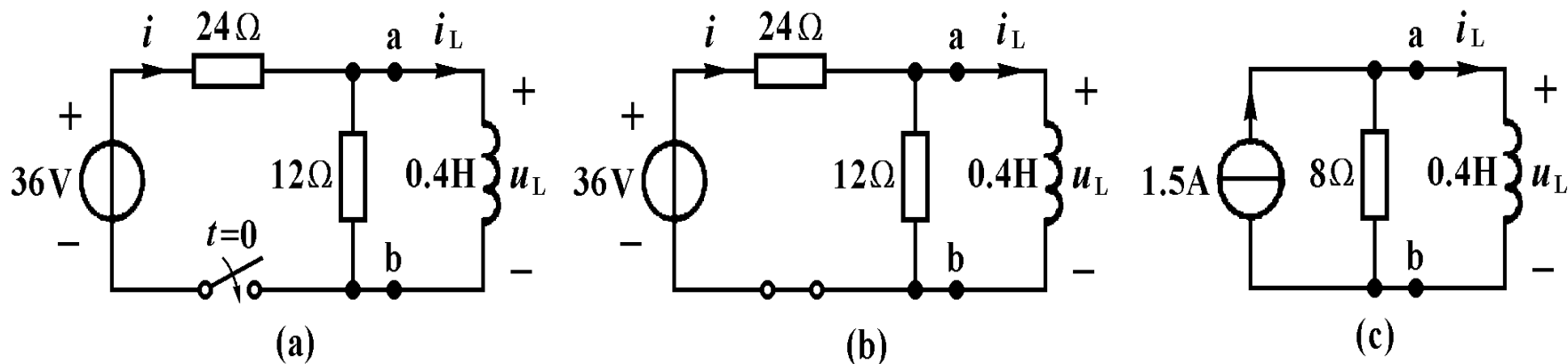
(c)

**解：**

**将图(b)中连接电感的含源电阻单口网络用诺顿等效电路代替，得到图(c)所示电路。由此电路求得时间常数为：**

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.4}{8} \text{ s} = 0.05 \text{ s}$$

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t}) \text{ A}$$



可以得到：

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20 e^{-20t} \text{ V} = 12 e^{-20t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

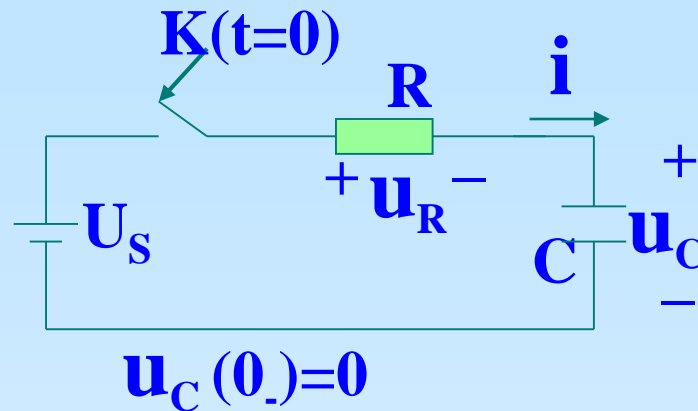
假如还要计算电阻中的电流*i(t)*，可以根据图(b)电路，

用欧姆定律求得：

$$i(t) = \frac{36 \text{ V} - u_L(t)}{24 \Omega} = \frac{36 \text{ V} - 12 e^{-20t} \text{ V}}{24 \Omega} = (1.5 - 0.5 e^{-20t}) \text{ A} \quad t > 0$$



## 小结:



1. 一阶电路的零状态响应是储能元件初始能量为零的电路在输入激励作用下产生的响应。

$$f(t) = f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

2. 衰减快慢取决于时间常数 $\tau$

$$\text{RC电路} \quad \tau = RC, \quad \text{RL电路} \quad \tau = L/R$$

3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

# 完全响应

## 一、一阶电路全响应

**全响应：**换路瞬间储能元件已有初始储能，且换路后电路中有激励。

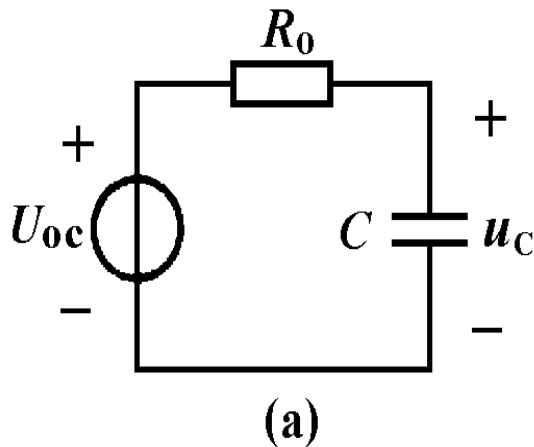
**全响应=零状态响应+零输入响应 =稳态分量+暂态分量**

# 三要素法(重点)

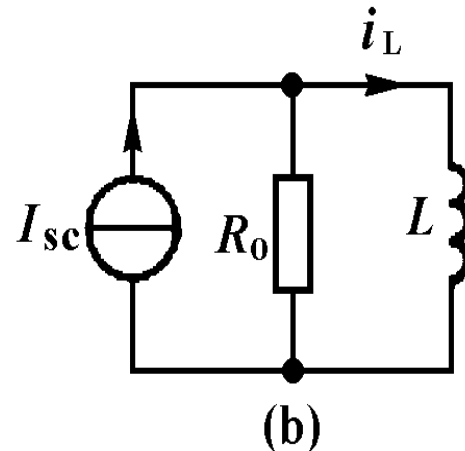
本节专门讨论由直流电源驱动的只含一个动态元件的一阶电路全响应的一般表达式，并在此基础上推导出三要素法。

## 一、三要素法

仅含一个电感或电容的线性一阶电路，将连接动态元件的线性电阻单口网络用戴维宁和诺顿等效电路代替后，可以得到图 (a)和(b)所示的等效电路。



(a)  $RC$  一阶电路



(b)  $RL$  一阶电路

## 三要素法

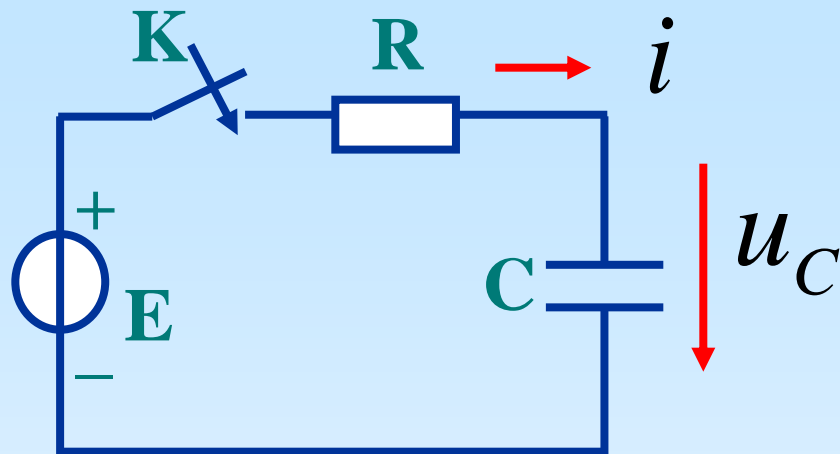
根据经典法推导的结果：

$$u_C(t) = u'_C + u''_C$$

$$= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-t/RC}$$

可归纳得一阶电路微分方程解的通用表达式：

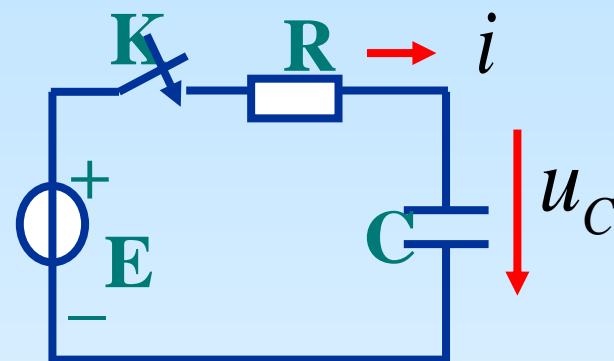
$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-t/\tau}$$



三要素法：总结一阶电路规律所得：

响应由初始值、稳态值、时间常数决定

三要素



不用列微分方程，可直接由三要素写出响应表达式。

直流电源激励时，稳态值和初始值均为稳态值 $f(\infty)$

$$f(t) = \underbrace{f(\infty)}_{\text{稳态值}} + \underbrace{[f(0_+) - f(\infty)]}_{\text{初始值}} \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{时间常数}}$$

## 三要素法(重点)

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$$

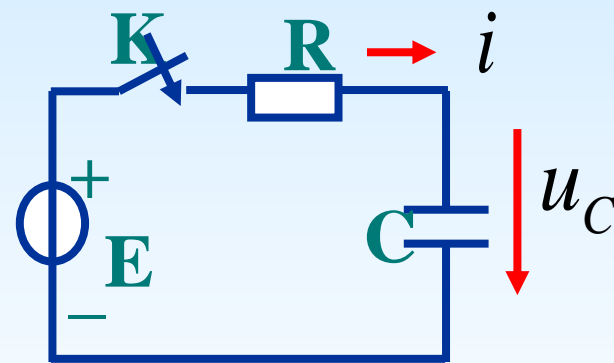
式中  $f(t)$  代表一阶电路中任一电压、电流函数。

其中三要素  
为:

初始值 ----  $f(0_+)$

稳态值 ----  $f(\infty)$

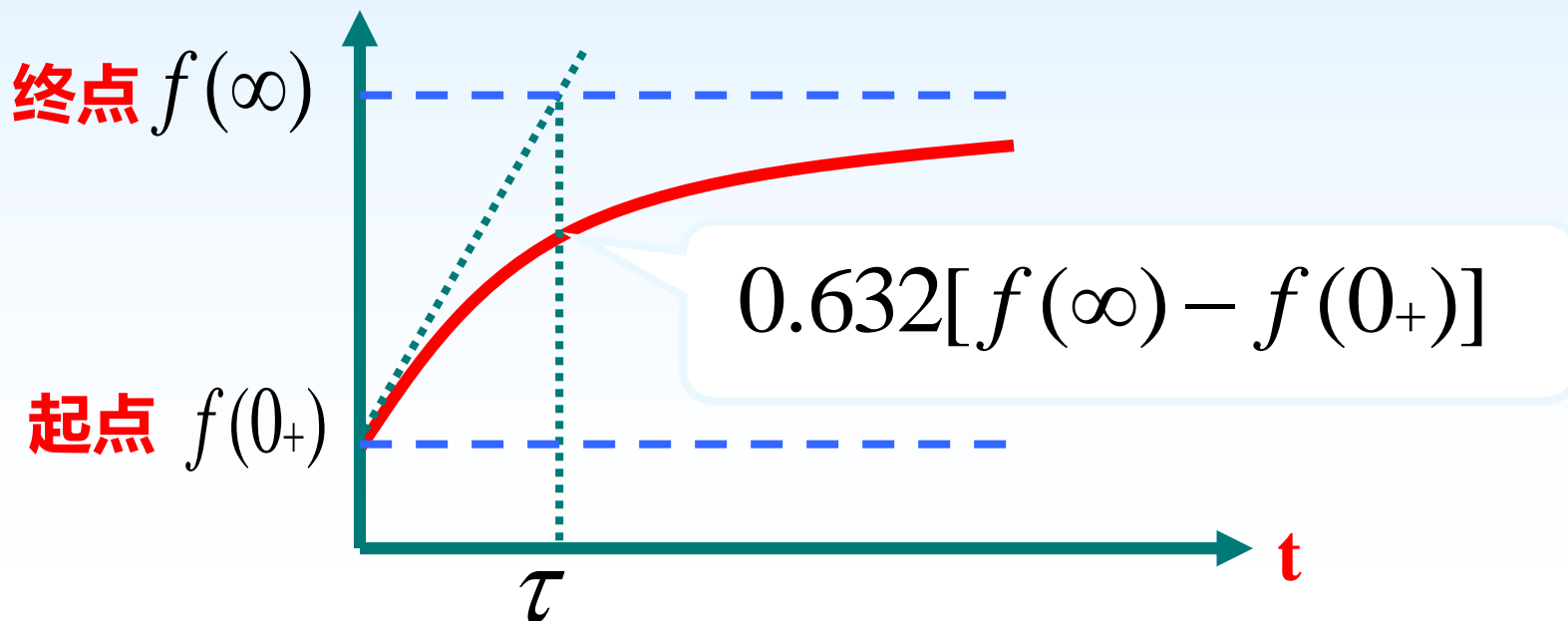
时间常数 ----  $\tau$



利用求三要素的方法求解过渡过程，称为三要素法。只要是一阶电路，就可以用三要素法。

## 三要素法求解过渡过程要点：

- 分别求初始值、稳态值、时间常数；
- 将以上结果代入过渡过程通用表达式；
- 画出过渡过程曲线（由初始值→稳态值）  
（电压、电流随时间变化的关系）



# “三要素”的计算 (之一)

初始值  $f(0_+)$  的计算:

步骤: (1)求换路前的  $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$

(2)根据换路定理得出: 
$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

(3)根据换路后的等效电路, 求未知的  $u(0_+)$   
或  $i(0_+)$ 。



# “三要素”的计算 (之二)

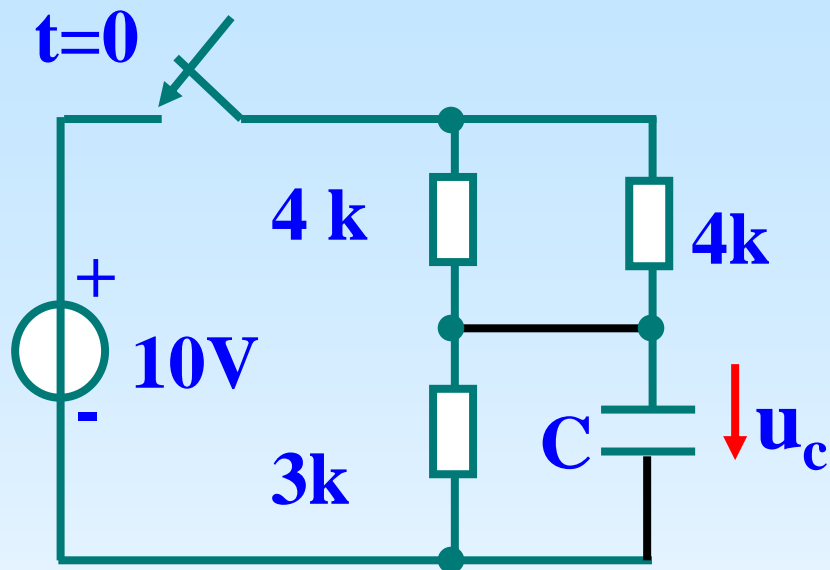
稳态值  $f(\infty)$  的计算:

步骤: (1) 画出换路后的等效电路 (注意:在直流激励的情况下,令C开路, L短路) ;

(2) 根据电路的解题规律, 求换路后所求未知数的稳态值。

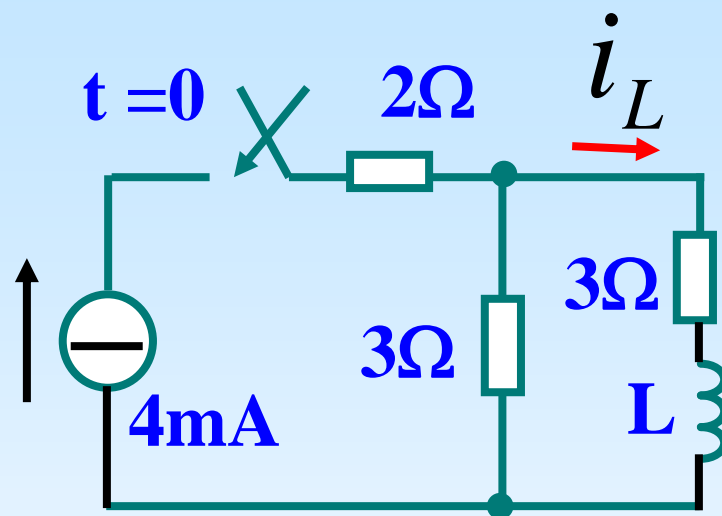
注: 在交流电源激励的情况下, 要用相量法来求解。

# 求稳态值举例



$$u_C(\infty) = \frac{3}{3 + 4 // 4} \times 10$$

$$= 6V$$



$$i_L(\infty) = 4 \times \frac{3}{3 + 3}$$

$$= 2 \text{ mA}$$

# “三要素”的计算 (之三)

时间常数

$\tau$ 的计算:

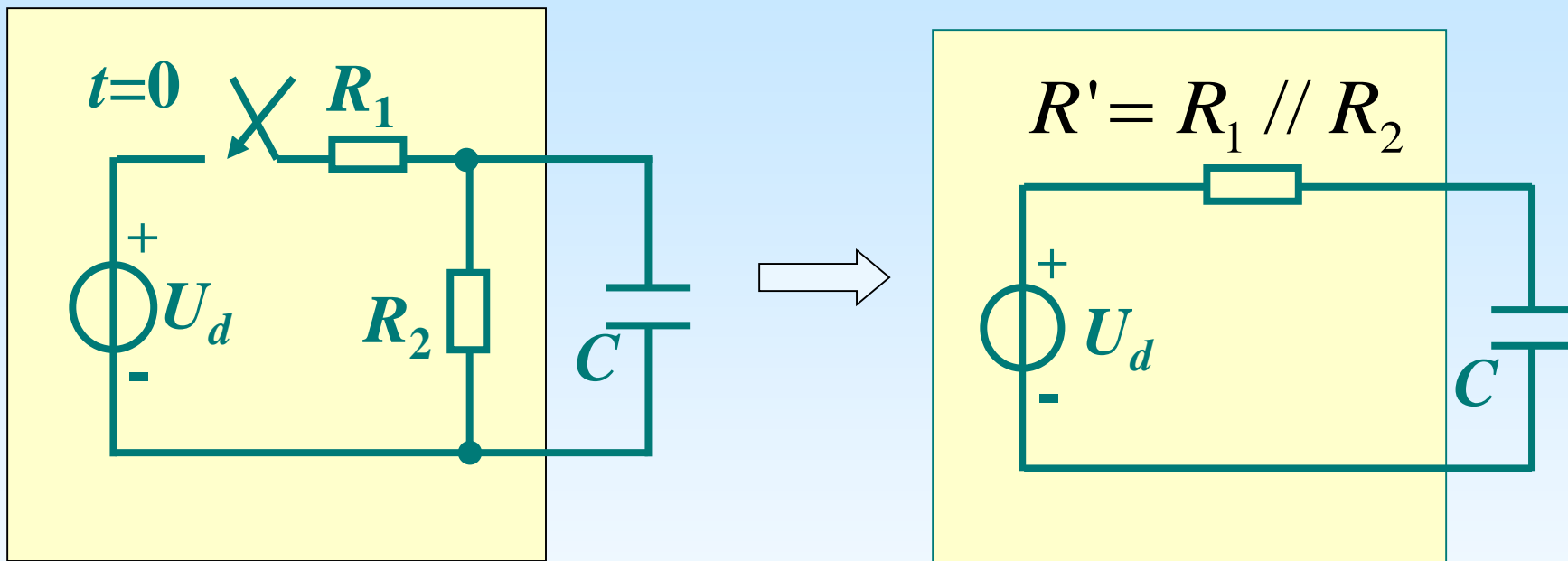
原则:  $\tau$  要由换路后的电路结构和参数计算。

( 同一电路中各物理量的  $\tau$  是一样的)

步骤: (1) 对于只含一个R和C的简单电路,  $\tau = RC$ ;  
对于较复杂的一阶RC电路, 将C以外的电路, 视为有源二端网络, 然后求其等效内阻  $R'$ 。则:

$$\tau = R'C$$

## $RC$ 电路 $\tau$ 的计算举例

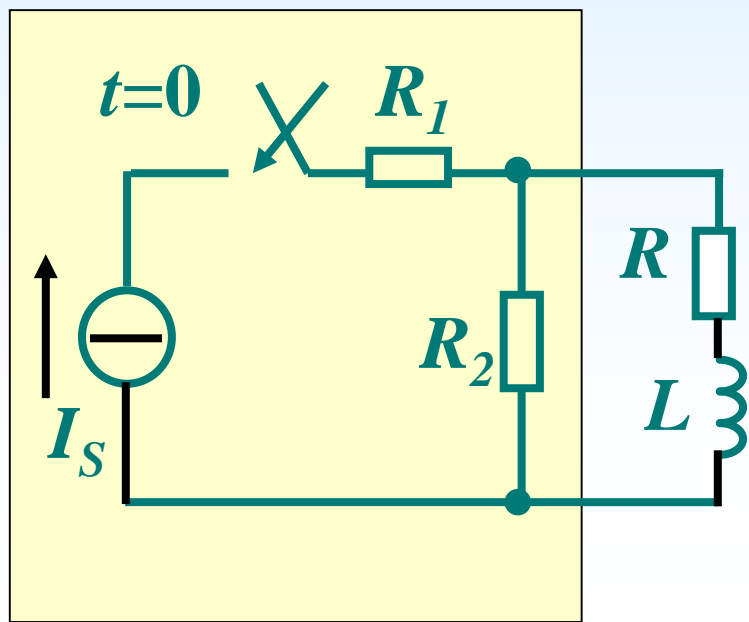


$$\tau = R'C$$

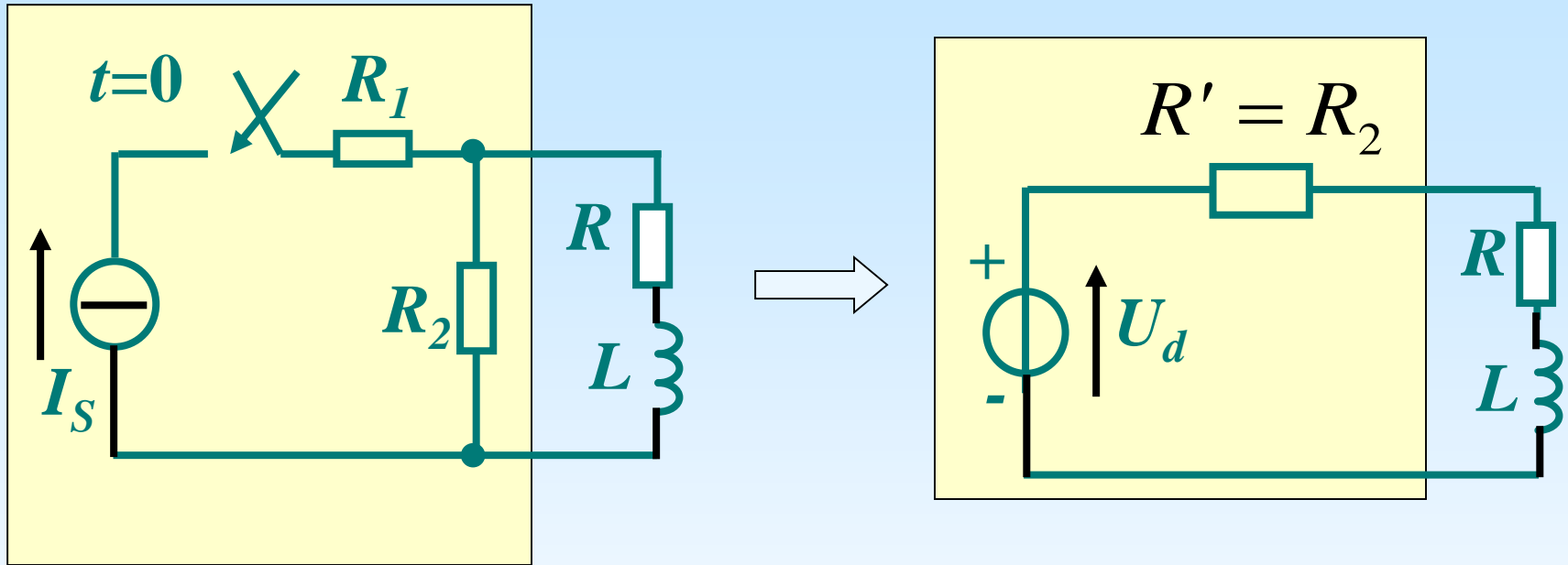
(2) 对于只含一个  $L$  的电路, 将  $L$  以外的电路, 视为有源二端网络, 然后求其等效内阻  $R'$ 。则:

$$\tau = \frac{L}{R'}$$

$R$ 、 $L$  电路  $\tau$  的求解:



# $R$ 、 $L$ 电路 $\tau$ 的计算举例



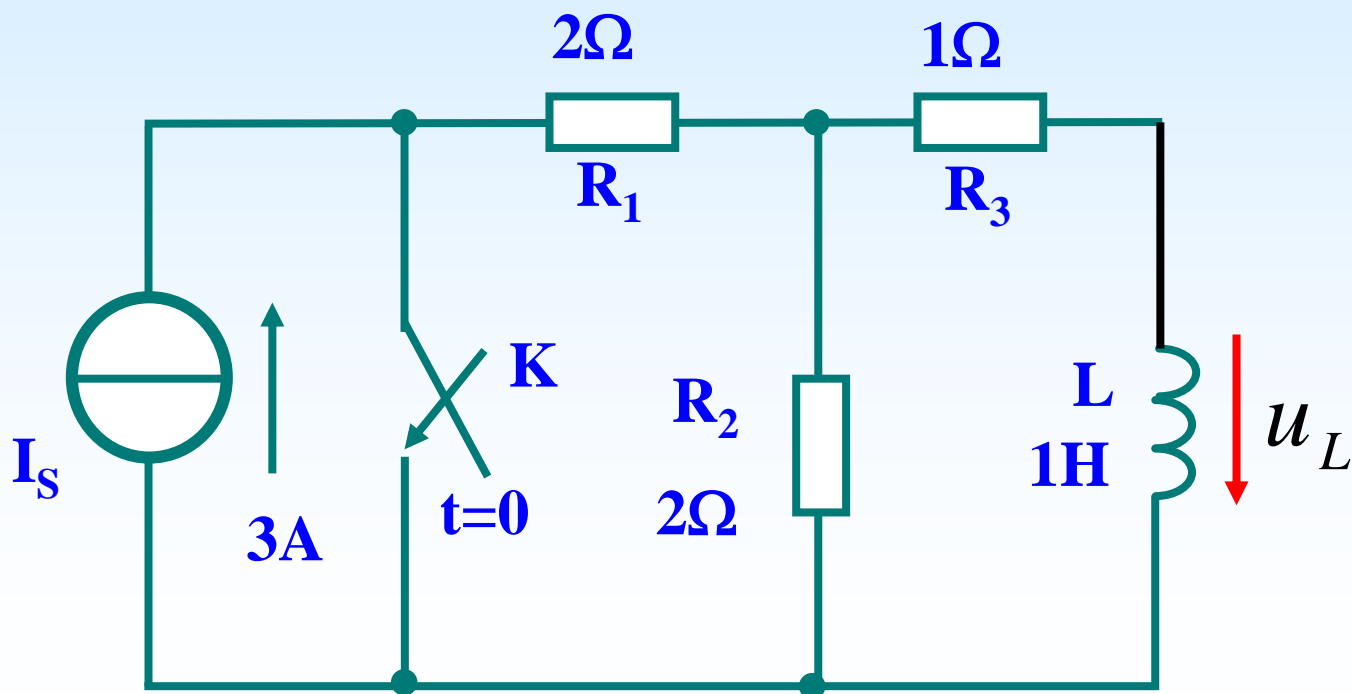
$$\tau = \frac{L}{R' + R}$$

# “三要素法” 例题

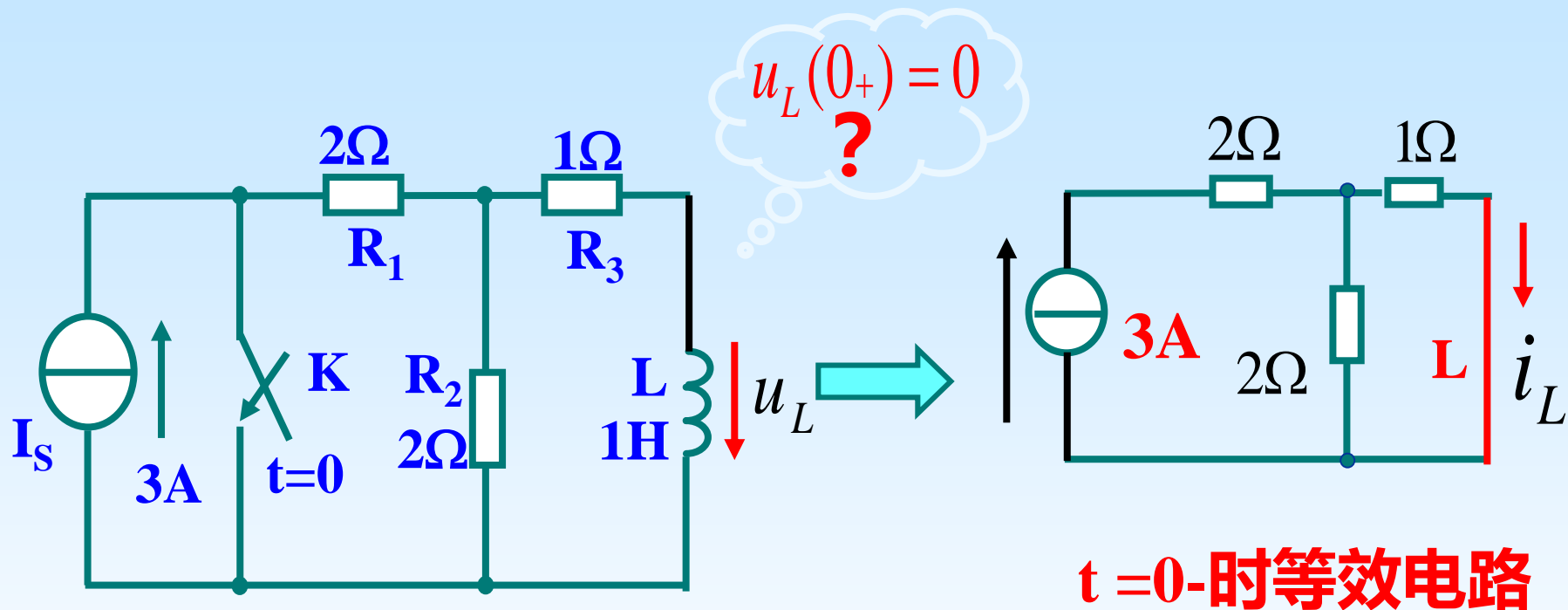
**例1**

已知：K 在 $t=0$ 时闭合，换路前电路处于稳态。

求：电感电压  $u_L(t)$

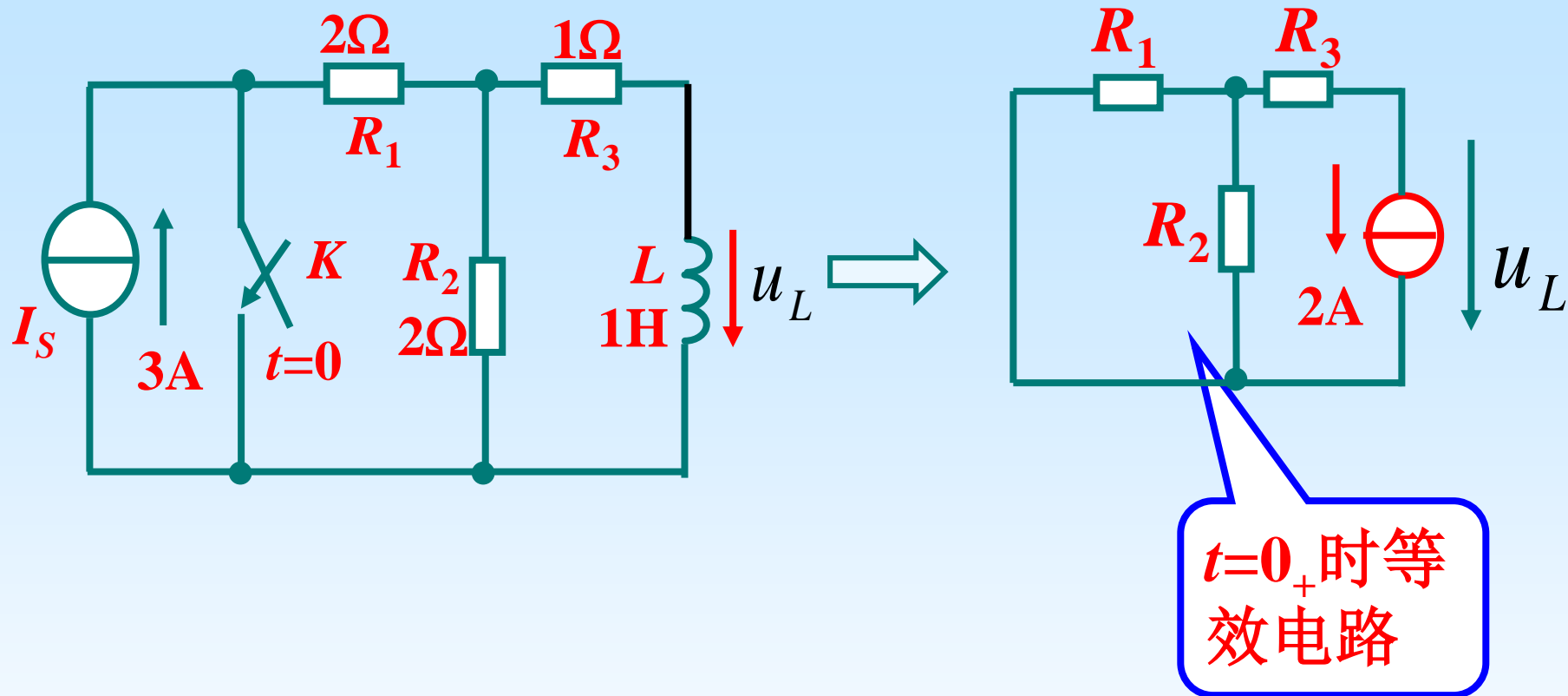


# 第一步:求初始值 $u_L(0_+)$



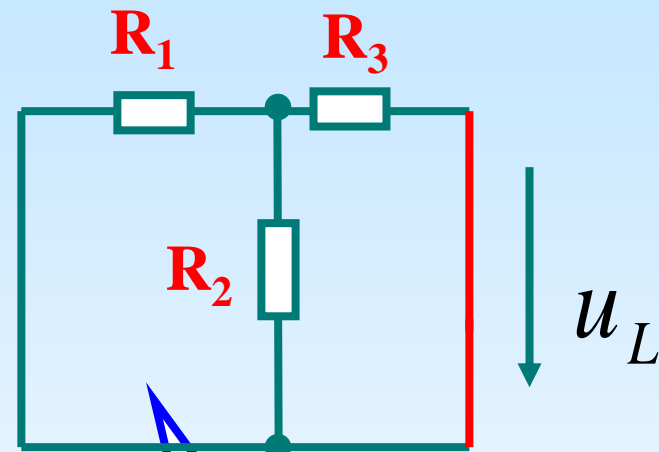
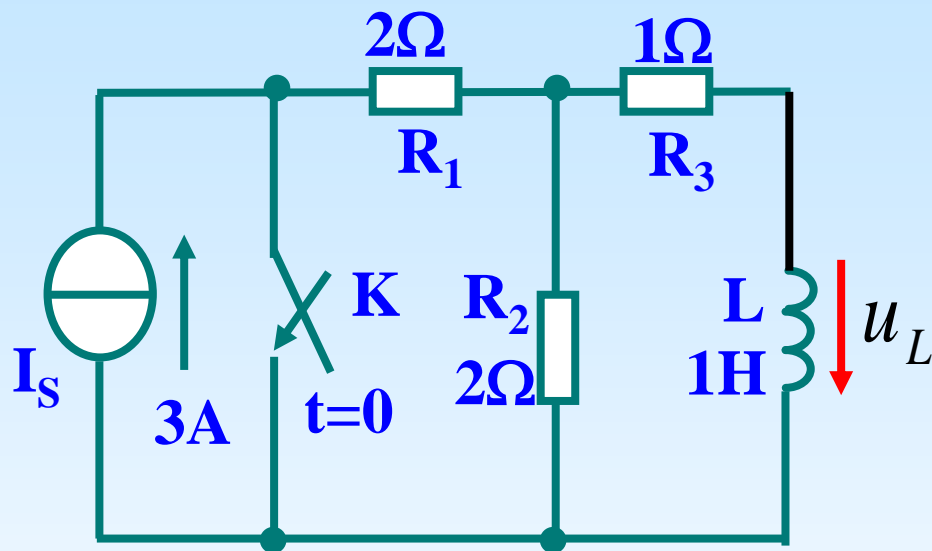
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{2}{1+2} \times 3 = 2 \text{ A}$$





$$\begin{aligned}
 u_L(0_+) &= -i_L(0_+)[R_1 // R_2 + R_3] \\
 &= -4\text{ V}
 \end{aligned}$$

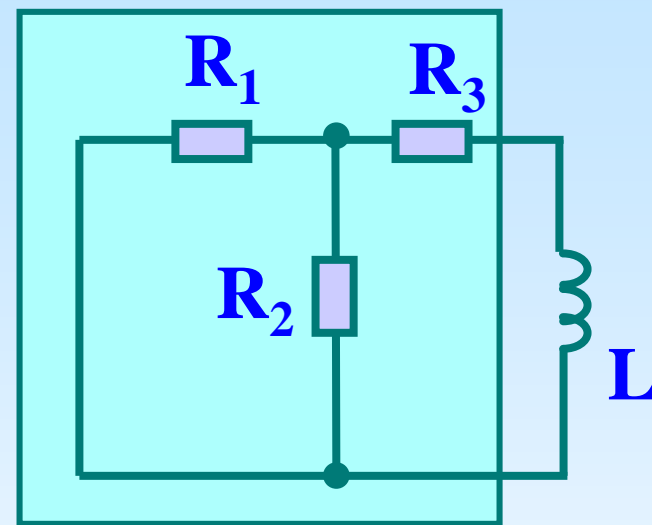
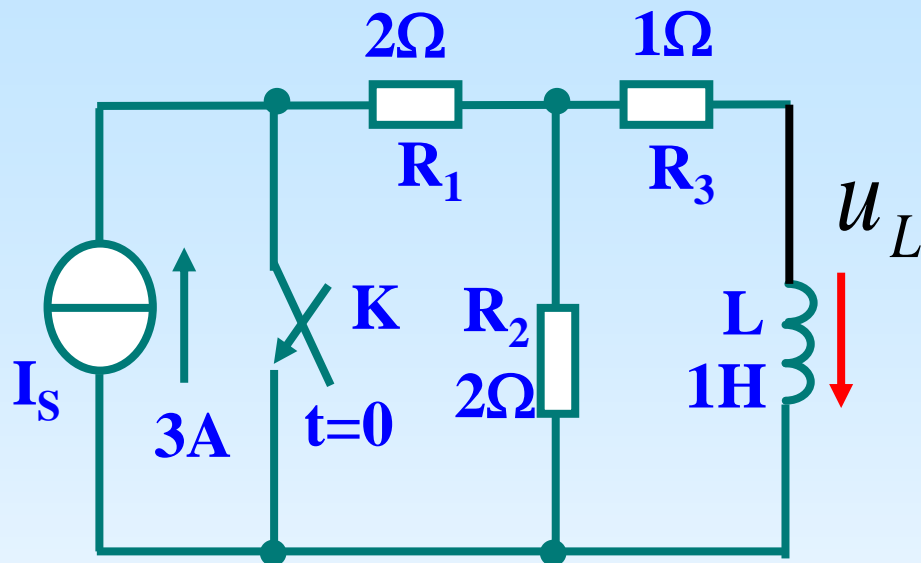
## 第二步:求稳态值 $u_L(\infty)$



**$t = \infty$  时等效电路**

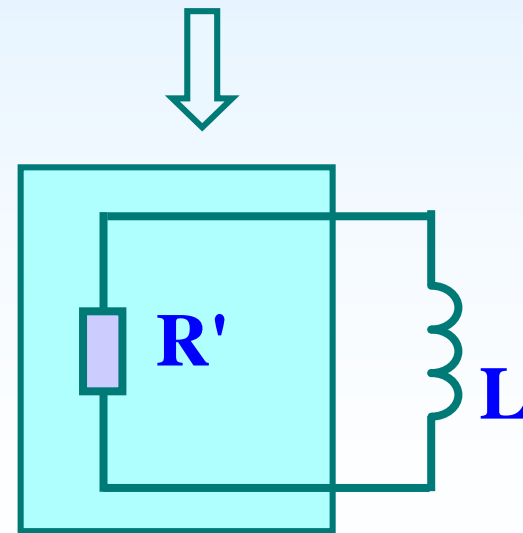
$$u_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

### 第三步:求时间常数 $\tau$



$$R' = R_1 \parallel R_2 + R_3$$

$$\tau = \frac{L}{R'} = \frac{1}{2} = 0.5(\text{s})$$



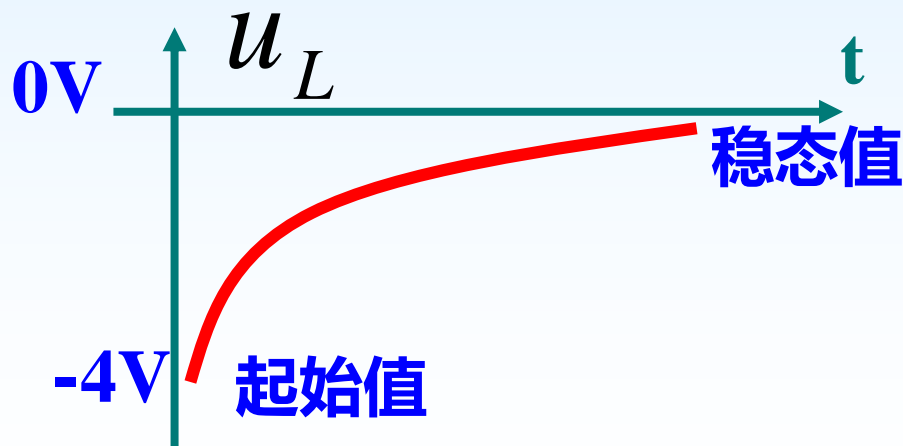
第四步：将三要素代入通用表达式得过渡过程方程；

$$\left\{ \begin{array}{l} u_L(0^+) = -4\text{V} \\ u_L(\infty) = 0 \\ \tau = 0.5\text{s} \end{array} \right.$$

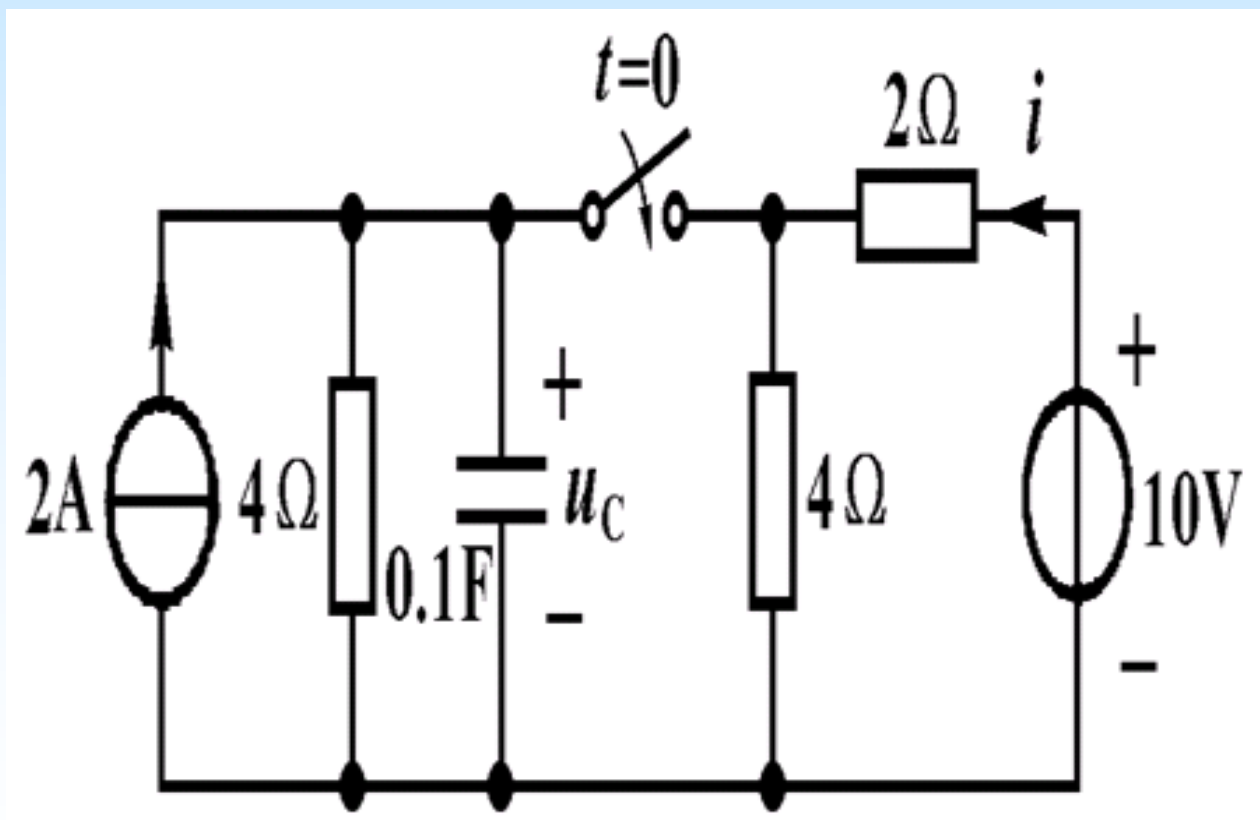
$$\begin{aligned} u_L(t) &= u_L(\infty) + [u_L(0^+) - u_L(\infty)] e^{-t/\tau} \\ &= 0 + (-4 - 0) e^{-2t} \\ &= -4 e^{-2t} \text{V} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

## 第五步：画过渡过程曲线（由初始值→稳态值）

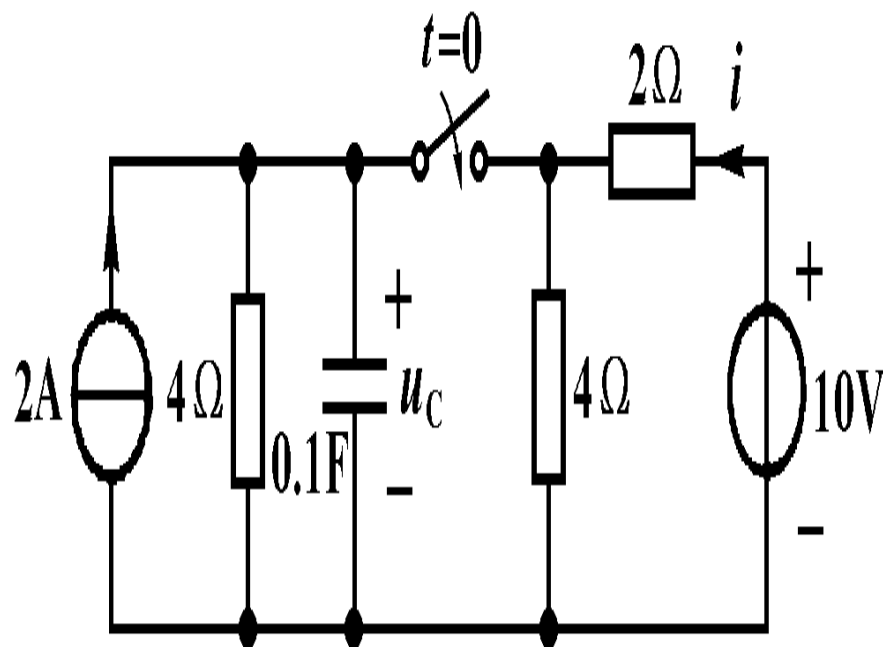
$$\begin{aligned}u_L(t) &= u_L(\infty) + [u_L(0^+) - u_L(\infty)]e^{-t/\tau} \\&= 0 + (-4 - 0)e^{-2t} \\&= -4e^{-2t}\text{V} \quad t \geq 0\end{aligned}$$



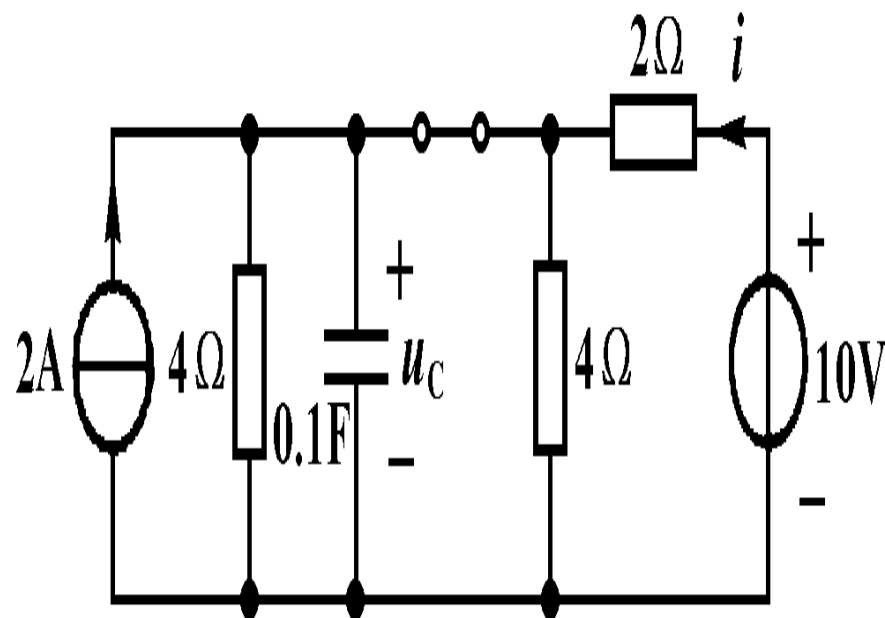
**例2** 图示电路原处于稳定状态。 $t=0$ 时开关闭合，  
求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ ，并画波形图。



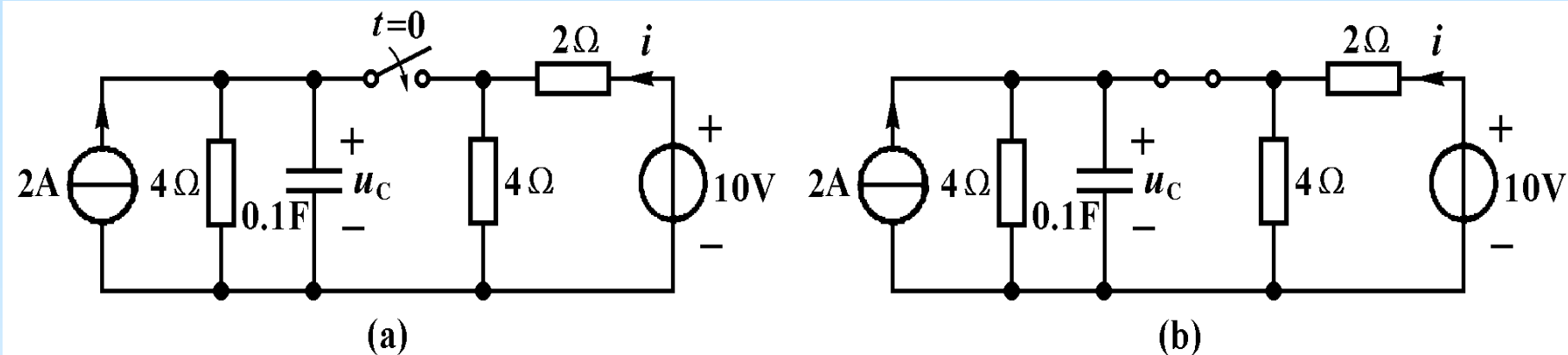
**例2 图示电路原处于稳定状态。 $t=0$ 时开关闭合，**  
**求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ ，并画波形图。**



(a)



(b)



**解：1. 计算初始值  $u_C(0_+)$**

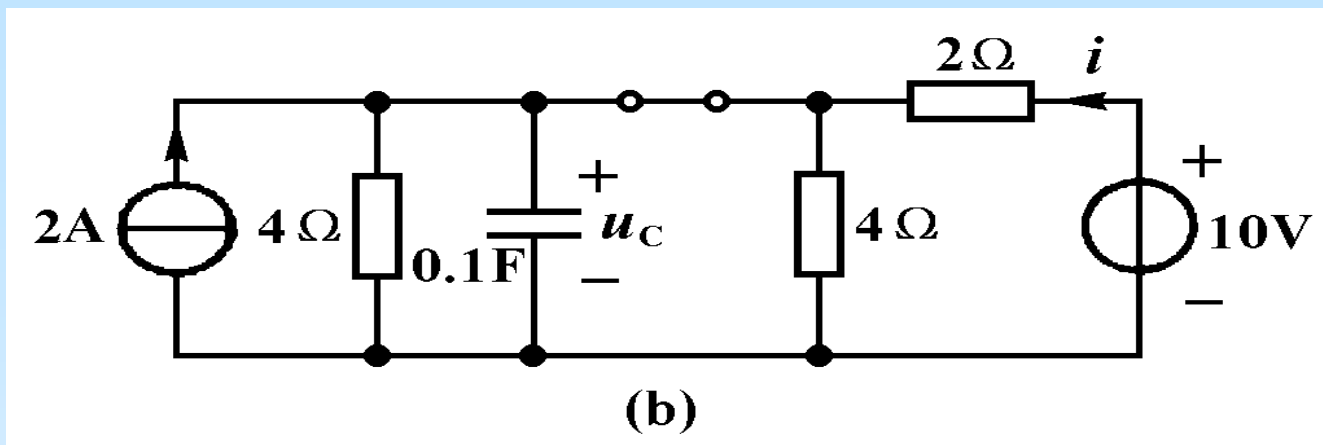
开关闭合前，图(a)电路已经稳定，电容相当于开路，电流源电流全部流入4Ω电阻中，此时电容电压与电阻电压相同：

$$u_C(0_-) = 4\Omega \times 2A = 8V$$

由于开关转换时电容电流有界，电容电压不能跃变，故：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8V$$

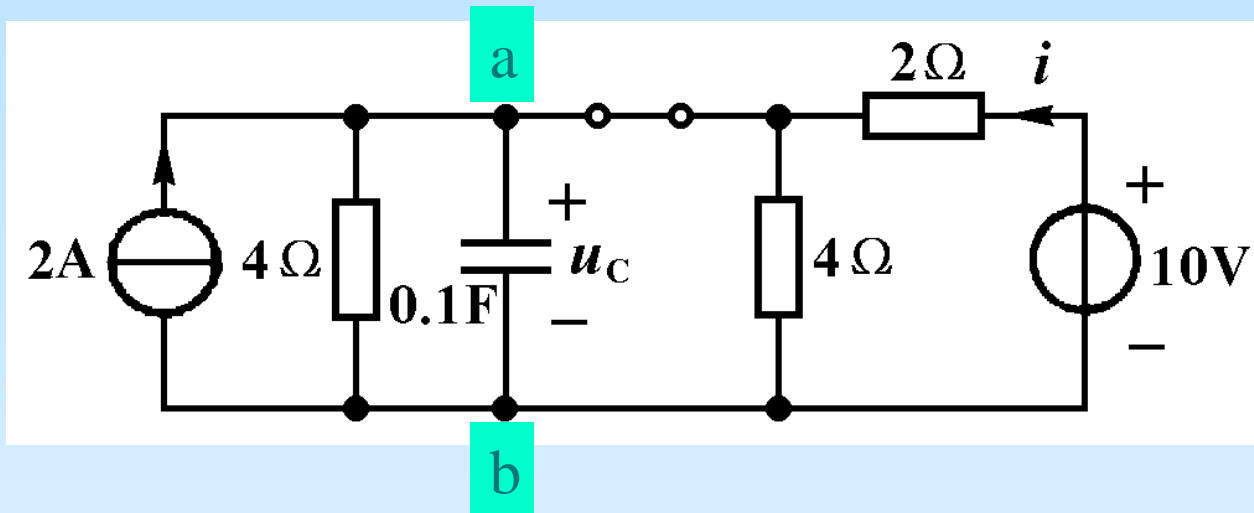




## 2. 计算稳态值 $u_C(\infty)$

开关闭合后，电路如图(b)所示，经过一段时间，重新达到稳定状态，电容相当于开路，根据用开路代替电容所得到一个电阻电路，运用叠加定理求得：

$$u_C(\infty) = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \times 2V + \frac{\frac{4 \times 4}{4 + 4}}{2 + \frac{4 \times 4}{4 + 4}} \times 10V = 2V + 5V = 7V$$



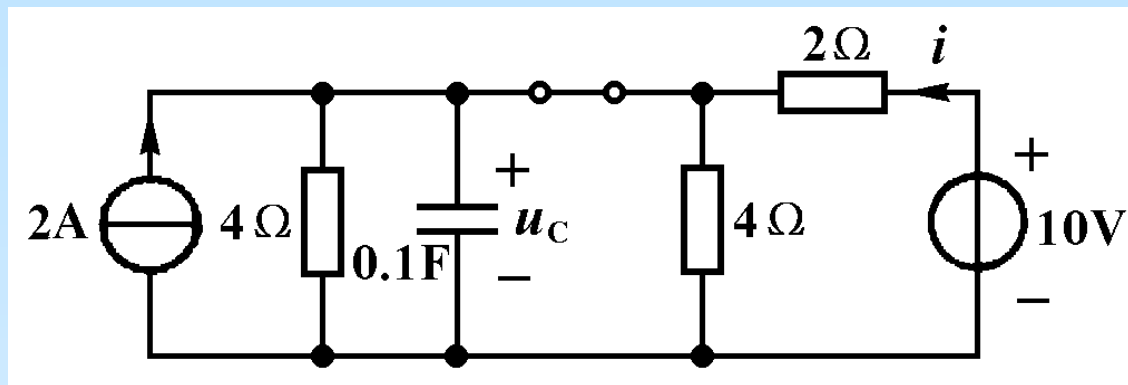
### 3. 计算时间常数 $\tau$

计算与电容相连接的电阻单口网络的输出电阻，它是三个电阻的并联：

$$R_o = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \Omega = 1\Omega$$

时间常数为：

$$\tau = R_o C = 1\Omega \times 0.1F = 0.1s$$



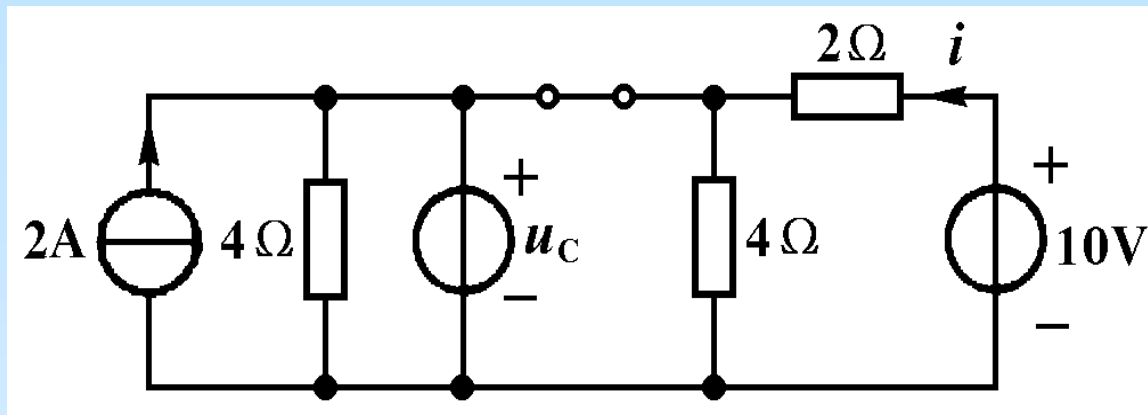
$$f(t) = [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)$$

4. 将 $u_C(0_+) = 8\text{V}$ ,  $u_C(\infty) = 7\text{V}$ 和 $\tau = 0.1\text{s}$ 代入得到响应的一般表达式:

$$u_C(t) = [(8 - 7)e^{-10t} + 7]\text{V} = [7 + 1e^{-10t}]\text{V} \quad (t \geq 0)$$

求得电容电压后, 电阻电流 $i(t)$ 可以利用欧姆定律求得:

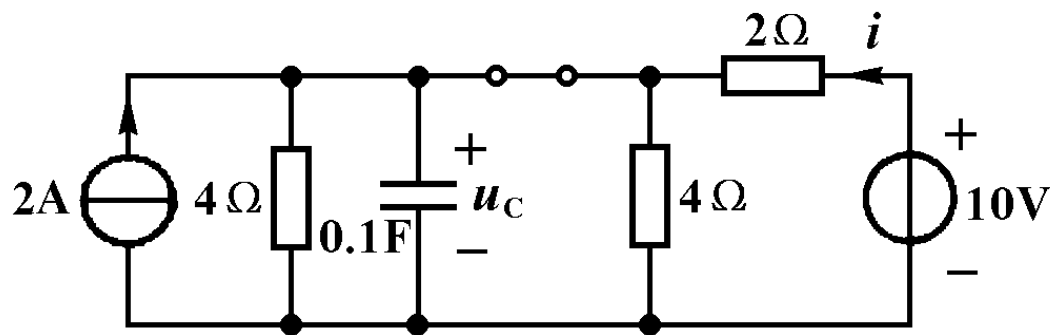
$$i(t) = \frac{10\text{V} - u_C(t)}{2\Omega} = \frac{10 - (7 + 1e^{-10t})}{2} \text{A} = (1.5 - 0.5e^{-10t})\text{A} \quad (t > 0)$$



$$u_C(t) = [7 + 1e^{-10t}]V$$

也可以用叠加定理分别计算2A电流源，10V电压源和电容电压 $u_C(t)$ 单独作用引起响应之和：

$$\begin{aligned} i(t) &= i'(t) + i''(t) + i'''(t) = 0 + \frac{10V}{2\Omega} - \frac{u_C(t)}{2\Omega} \\ &= (5 - 3.5 + 0.5e^{-10t})A \\ &= (1.5 - 0.5e^{-10t})A \quad (t > 0) \end{aligned}$$



$$u_C(0_+) = 8\text{V}$$

电阻电流*i(t)*还可以利用三要素法直接求得:

$$i(0_+) = \frac{10\text{V} - u_C(0_+)}{2\Omega} = \frac{10 - 8}{2} \text{A} = 1\text{A}$$

$$i(\infty) = \frac{10\text{V} - u_C(\infty)}{2\Omega} = \frac{10 - 7}{2} \text{A} = 1.5\text{A}$$

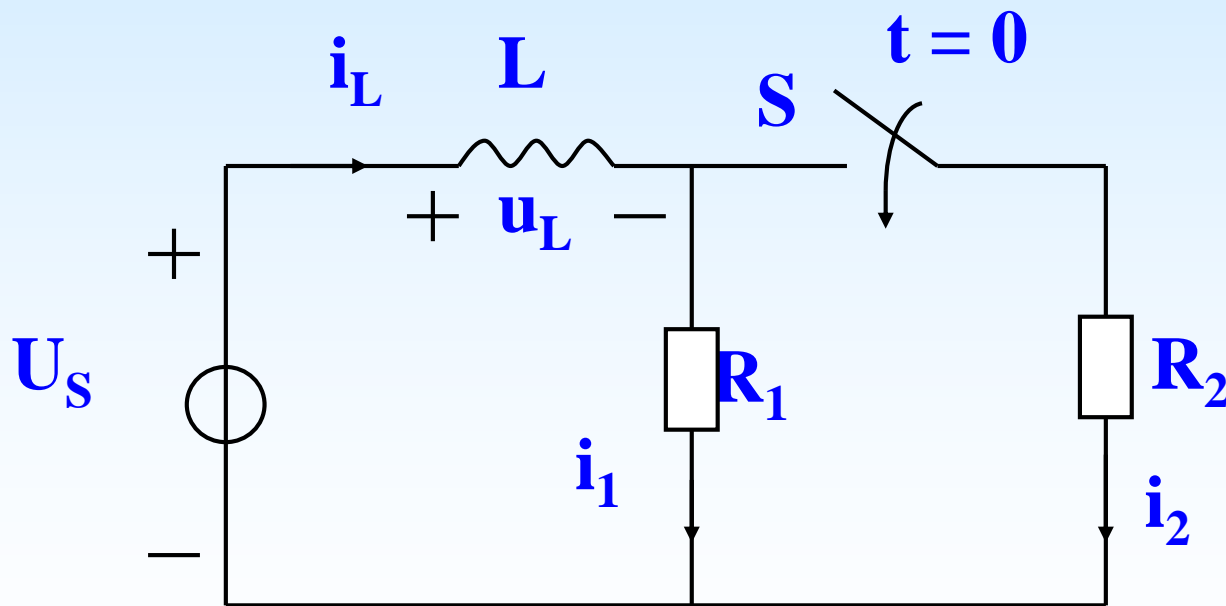
由于电路中每个响应具有相同的时间常数，不必重新计算，用三要素公式得到:

$$i(t) = [(1 - 1.5)e^{-10t} + 1.5]\text{A} = (1.5 - 0.5e^{-10t})\text{A} \quad (t > 0)$$

值得注意的是该电阻电流在开关转换时发生了跃变，  
 $i(0_+) = 1\text{A} \neq i(0_-) = 1.667\text{A}$ ，因而在电流表达式中，标明的时间范围是  $t > 0$ ，而不是  $t \geq 0$ 。

### 例3:

图示电路原来已稳定，已知： $L = 2\text{ H}$ ， $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$ ， $U_S = 12\text{ V}$ 。在  $t = 0$  时将S闭合，试求S闭合后的  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_L$  和  $u_L$ 。



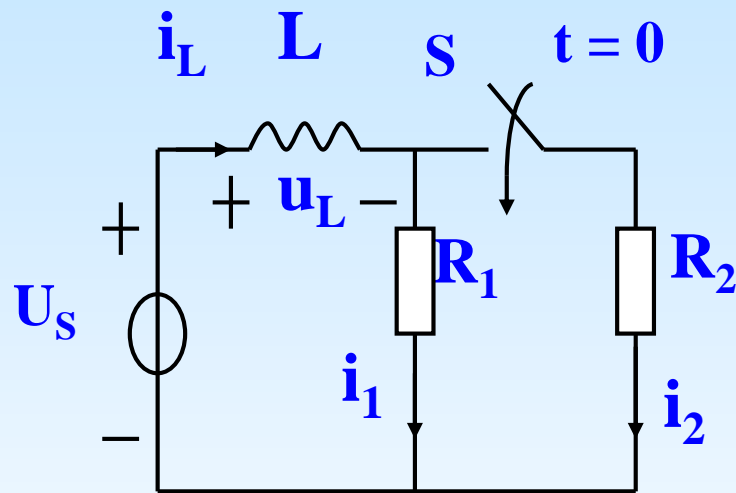
**解：利用三要素法：**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1} = 3\text{A}$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = 1.5\text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_1 // R_2} = 1\text{s}$$

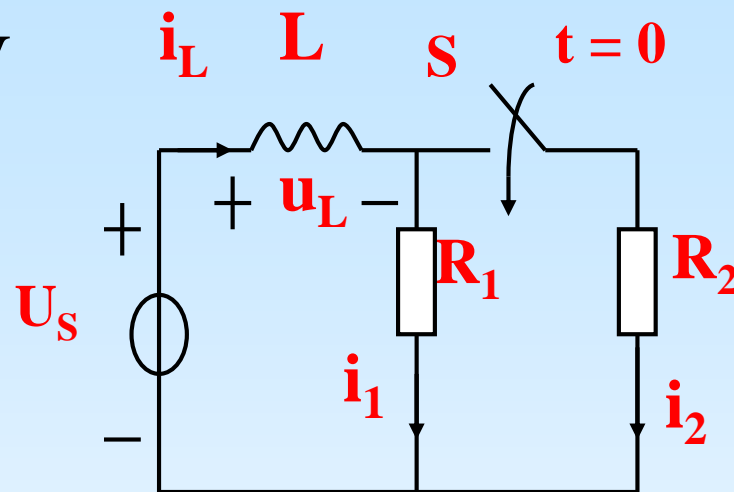
$$u_L(0_+) = U_S - i_1(0_+)R_1 = 6\text{V}$$



解:

$$u_L(0_+) = U_S - i_1(0_+)R_1 = 6\text{V}$$

$$i(\infty) = \frac{U_S}{R_1 // R_2} = 6\text{A}$$



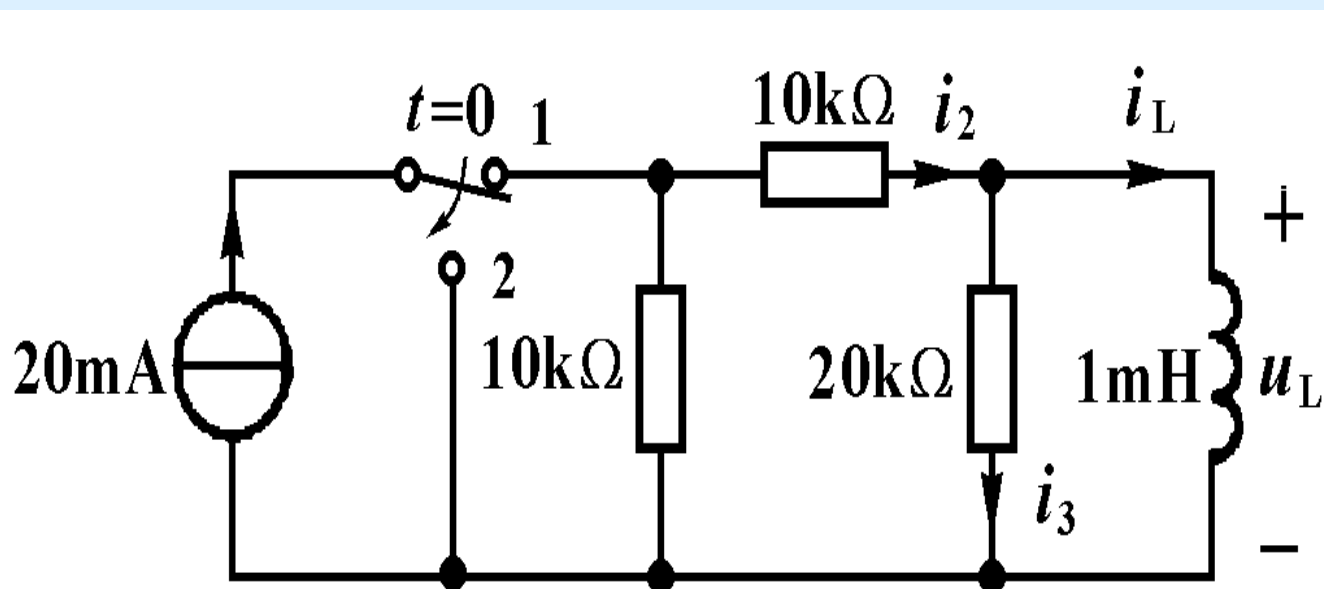
$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = 3\text{A}$$

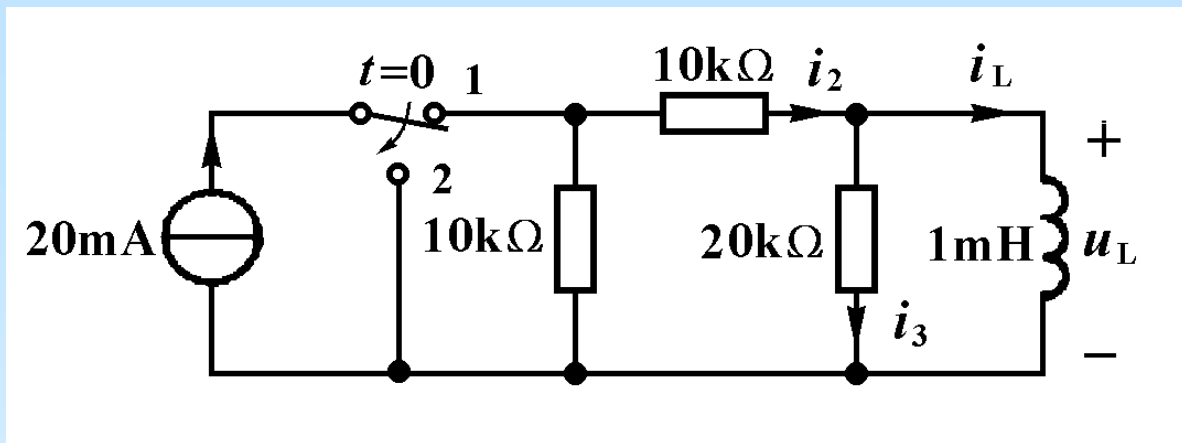
$$u_L(\infty) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_1(t) = i_2(t) = 3 - 1.5 e^{-t} & \text{A} \quad t > 0 \\ i_L(t) = 6 - 3 e^{-t} & \text{A} \quad t \geq 0 \\ u_L(t) = 6 e^{-t} & \text{V} \quad t > 0 \end{array} \right.$$



**例5** 图示电路中，开关转换前电路已处于稳态，  
 $t=0$  时开关S由1端接至2端，求 $t>0$ 时的电感电流  
 $i_L(t)$ ，电阻电流 $i_2(t)$ ， $i_3(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 。





**解：用三要素法计算电感电流。**

### 1. 计算电感电流的初始值 $i_L(0_+)$

**直流稳态电路中，电感相当于短路，此时电感电流为：**

$$i_L(0_-) = \frac{20\text{mA}}{2} = 10\text{mA}$$

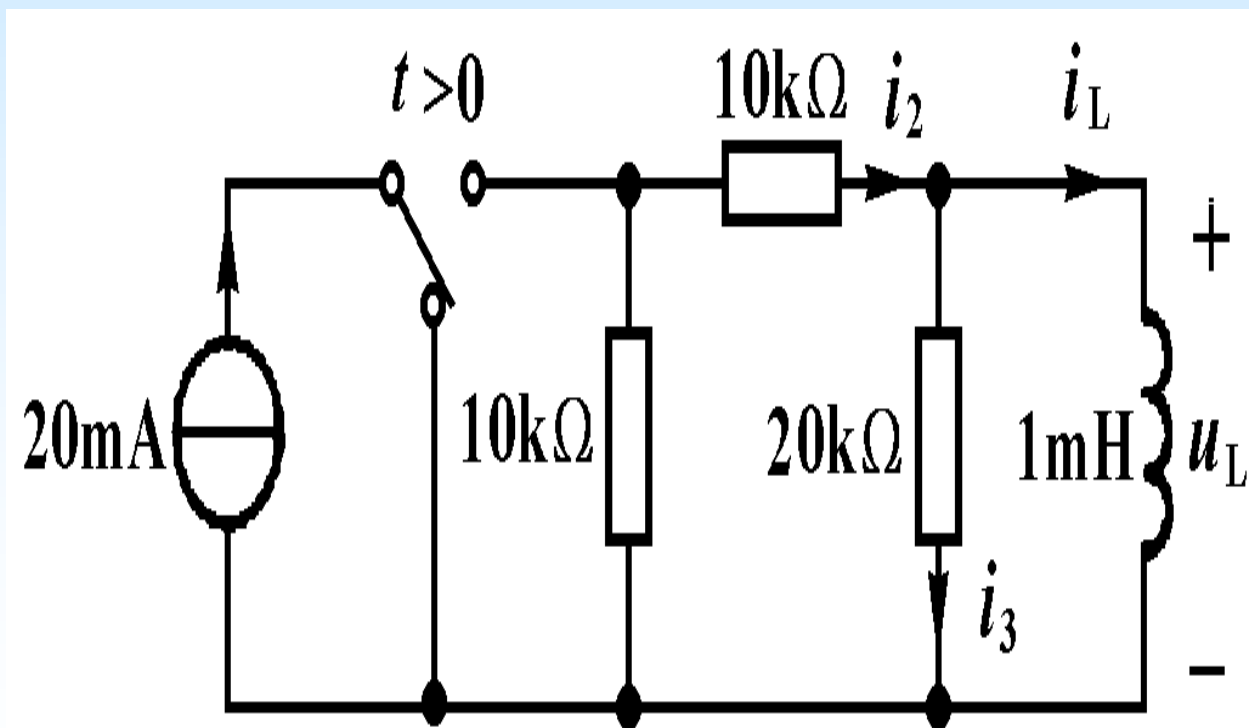
**开关转换时，电感电压有界。电感电流不能跃变，即**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10\text{mA}$$

## 2. 计算电感电流的稳态值 $i_L(\infty)$

开关转换后，电感与电流源脱离，电感储存的能量释放出来消耗在电阻中，达到新的稳态时，电感电流为零，即

$$i_L(\infty) = 0$$



### 3. 计算时间常数 $\tau$

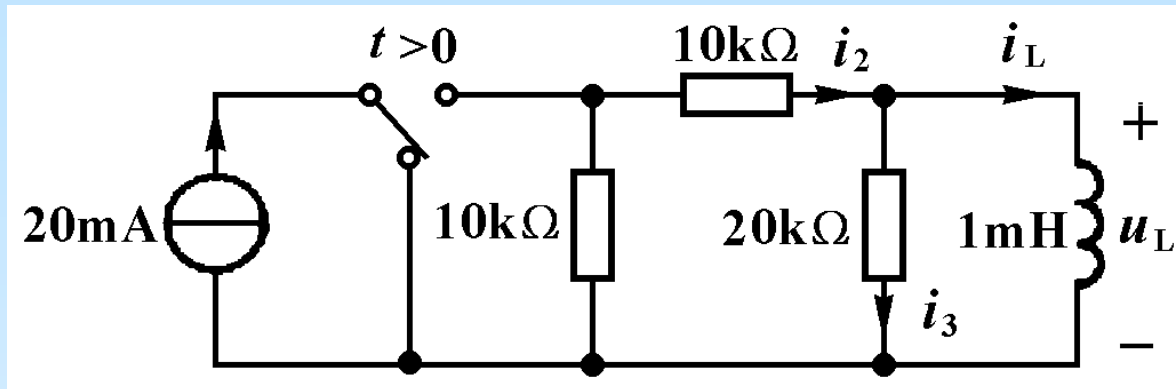
与电感连接的电阻单口网络的等效电阻以及时间常数为:

$$R_o = \frac{20(10+10)}{20+10+10} \text{ k}\Omega = 10 \text{ k}\Omega \quad \tau = \frac{10^{-3}}{10 \times 10^3} \text{ s} = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$$

### 4. 计算 $i_L(t)$ , $u_L(t)$ , $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 。

将 $i_L(0_+) = 10 \text{ mA}$ ,  $i_L(\infty) = 0$ 和 $\tau = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$ 代入得到电感电流的表达式:

$$i_L(t) = [(10 \times 10^{-3} - 0)e^{-10^7 t} + 0] \text{ A} = 10e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t \geq 0)$$



然后根据KCL, KVL和VCR求出其它电压电流:

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 10^7 e^{-10^7 t}$$

$$= -100e^{-10^7 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_3(t) = \frac{u_L(t)}{20\text{k}\Omega} = \frac{-100e^{-10^7 t} \text{ V}}{20 \times 10^3}$$

$$= -5e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$

$$i_2(t) = i_L(t) + i_3(t) = 10e^{-10^7 t} \text{ mA} - 5e^{-10^7 t} \text{ mA}$$

$$= 5e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$

# 小 结

(1) 含有动态元件L、C的电路是动态电路，其伏安关系是微分或积分关系。

电容C:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{或} \quad u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi$$

电感L:  $u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{或} \quad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi$

(2) 换路定律是指：电容电流和电感电压不能跃变：

即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

(3) 零输入响应：当外加激励为零，仅有动态元件初始储能所产生所激发的响应。

零输入响应：电路的初始储能为零仅由输入产生的响应。

全响应：由电路的初始状态和外加激励共同作用而产生的响应，叫全响应。

(4) 求解一阶电路三要素公式为：

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

## 求解一阶电路三要素法(重点)

如用  $f(t)$  表示电路的响应,  $f(0_+)$  表示该电压或电流的初始值,  $f(\infty)$  表示响应的稳定值,  $\tau$  表示电路的时间常数, 则电路的响应可表示为:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

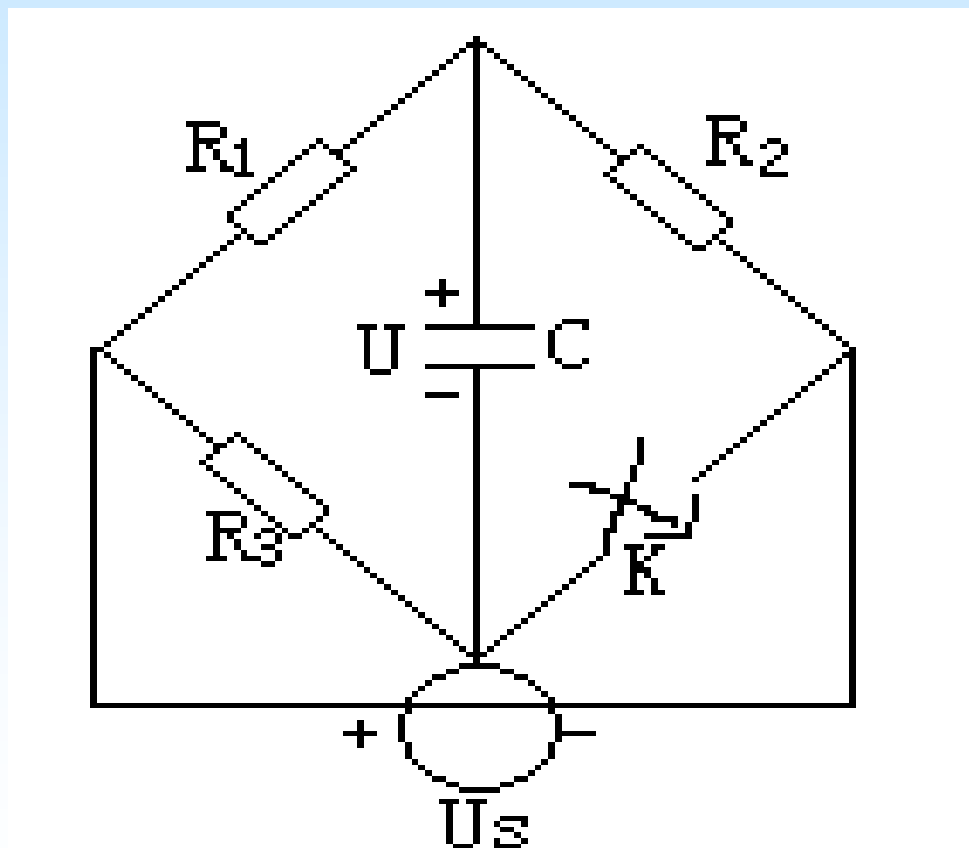
上式称为一阶电路在直流电源作用下求解电压、电流响应的三要素公式。

式中  $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$  和  $\tau$  称为三要素, 把按三要素公式求解响应的方法称为三要素法。

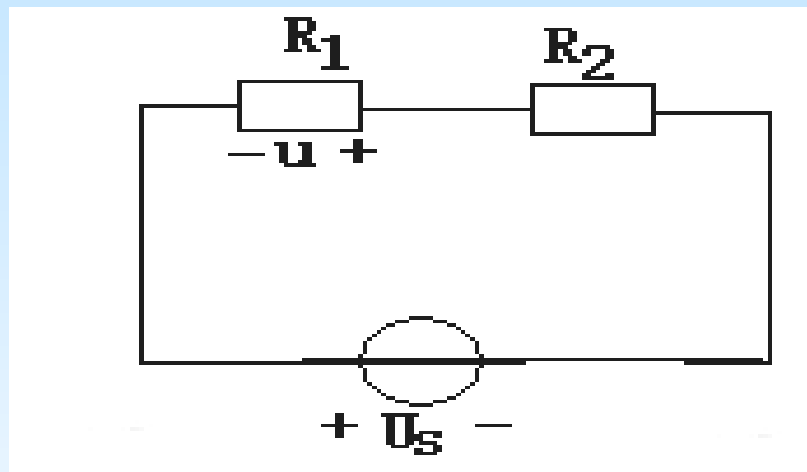
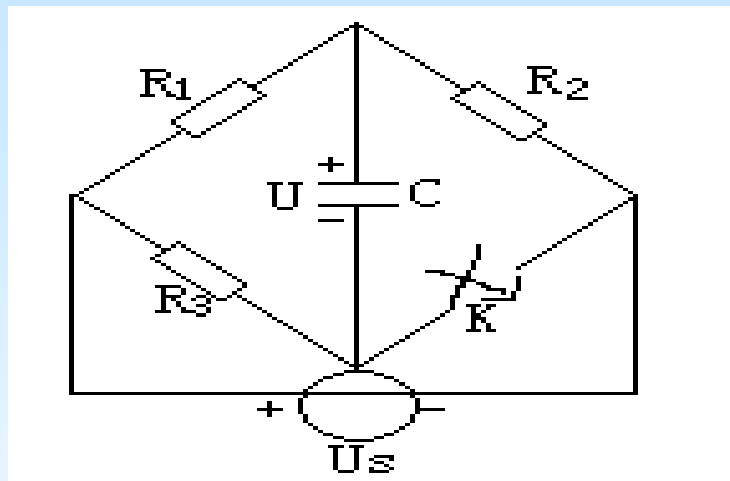
由于零输入响应和零状态响应是全响应的特殊情况, 因此, 三要素公式适用于求一阶电路的任一种响应, 具有普遍适用性。



**例4** 如图所示电路中，直流电压源的电压 $U_S = 10V$ ， $R_1=R_2=2\Omega$ ， $R_3=5\Omega$ ， $C=0.5F$ ，电路原已稳定，试求换路后的 $u_c(t)$ 。



**例4** 如图所示电路中，直流电压源的电压 $U_S = 10V$ ， $R_1=R_2=2\Omega$ ， $R_3=5\Omega$ ， $C=0.5F$ ，电路原已稳定，试求开关闭后的 $u_C(t)$ 。



**解：用三要素法求解：** (a) 原电路图 (b)  $t=0_-$  时的等效电路

(1) 画 $t=0_-$ 时的等效电路，如图 (b) 所示。电路原已稳定，电容等于开路，与C串联的 $R_3$ 的电流及电压皆为零所以：

$$u_C(0_-) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} U_S = -\frac{U_S}{2} = -10/2V = -5V$$

(2) 由换路定律可得  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = -5V$ 。

(3) 画  $t=\infty$  时的等效电路，如图 (c) 所示。

$$u_C(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_S = \frac{U_S}{2} = 10 / 2V = 5V$$

(4) 求电路时间常数  $\tau$ 。

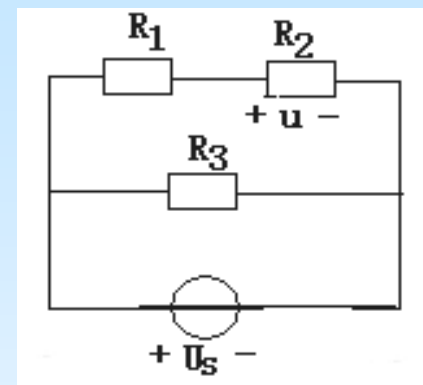
$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 / 2 = 2 / 2\Omega = 1\Omega$$

$$\tau = R_i C = 1 \times 0.5s = 0.5s$$

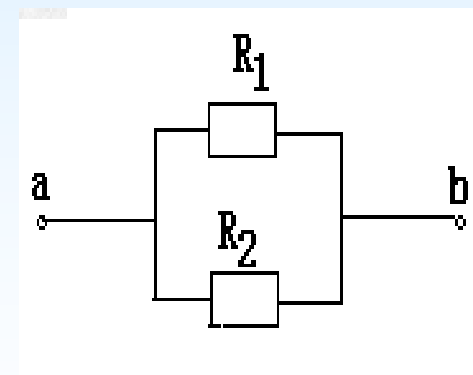
(5) 由公式得

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 5 + (-5 - 5) V = (5 - 10e^{-2t}) V \quad t \geq 0$$



(c)  $t=\infty$  时的等效电路



(d) 求等效电阻的等效电路