

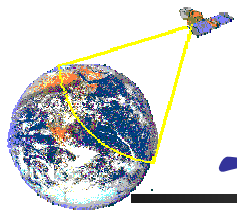
# 数字图像处理与分析

## 第四章 图像处理中的正交变换2

刘定生

中科院中国遥感卫星地面站

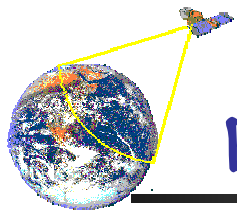
2005年春季学期



## 上次课复习

### ■ 图像的频域变换

- 频域变换的理论基础
  - ✓ 线性系统、卷积与相关
  - ✓ 正交变换及其特征
  - ✓ 离散图像的正交变换
- 傅立叶变换定义与特征
- 傅里叶变换的应用



## 图像的频域变换——傅立叶变换

### 傅立叶变换的定义(一维)

$f(x)$ 为连续可积函数, 其傅立叶变换定义为:

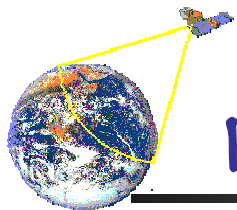
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

其反变换为:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}$$



## 图像的频域变换——傅立叶变换

### 二维离散傅立叶变换

对于二维傅立叶变换，其离散形式为：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{\left[ -j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]}$$

逆变换为：

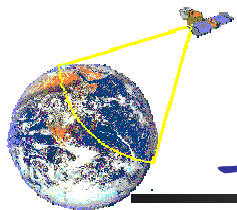
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{\left[ j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]}$$

幅频谱、相位谱：

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\varphi(u, v)} = R(u, v) + jI(u, v)$$

$$|F(u, v)| = \left[ R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{\frac{1}{2}}$$

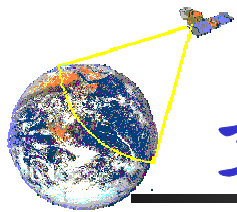
$$\varphi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$$



## 二维离散傅立叶变换的性质

1. 线性性质（加法定理）：
2. 比例性质（相似性定理）
3. 可分离性：
4. 空间位移（位移定理）：
5. 频率位移：
6. 周期性：
7. 共轭对称性：
8. 旋转不变性：
9. 平均值：
10. 卷积定理：
11. 相关定理：
12. 拉普拉斯函数：

请问！

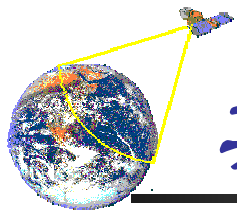


## 第四章 图像处理中的正交变换2

### ■ 其他变换

#### ➤ 其他变换

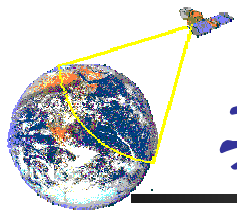
- ✓ 离散余弦变换
- ✓ 沃尔什——哈达玛变换
- ✓ 哈尔变换
- ✓ 霍特林变换（主成分变换）
- ✓ 小波变换



## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 离散余弦变换

- 问题的提出：傅里叶变换的一个最大问题是：它的参数都是复数，在数据的描述上相当于实数的两倍。为此，我们希望有一种能够达到相同功能但数据量又不大的变换。



## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 由傅里叶变换性质

- 当  $f(x)$  或  $f(x, y)$  为实的偶函数时，傅里叶变换域中得到实的偶函数
- 考察一维离散傅立叶变换

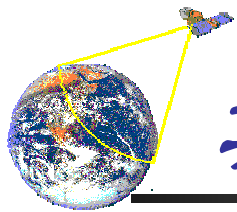
$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}} \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left( \cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \right)$$

- 当  $f(x)$  或  $f(x, y)$  为偶函数时，傅里叶变换的计算公式虚部为零，只有余弦项

余弦变换是简化傅立叶变换的一种方法





## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 一维离散余弦变换定义

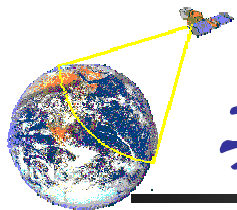
$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[ \frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$F(0) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)$$

通常归一化表示为:

$$F(u) = c(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[ \frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 一维离散余弦反变换定义

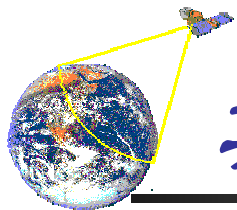
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} c(u) F(u) \cos \left[ \frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

矩阵表示:

$$F = Cf$$

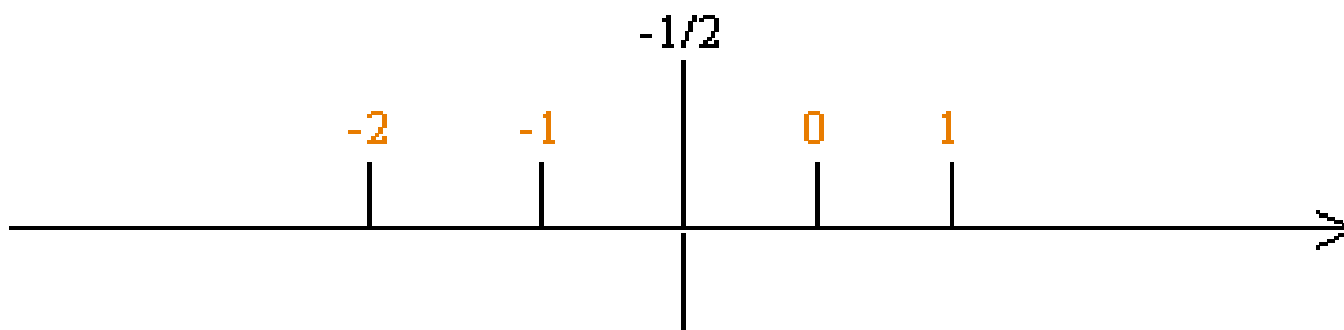
$$f = C^T F$$



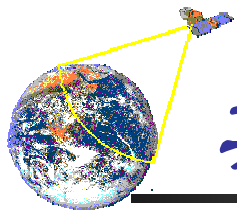
## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 任意函数离散余弦变换

- 一个任意函数采样从  $0, 1, 2, \dots, N-1$ , 若向负方向折叠形成  $2N$  采样的偶函数, 就可以进行  $2N$  的偶函数傅立叶变换。



此时可采用离散余弦变换进行。

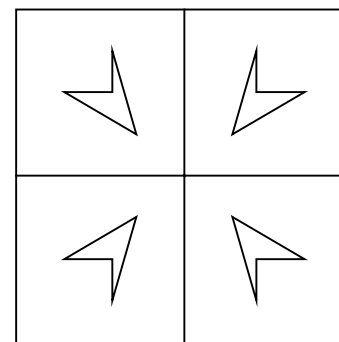


## 其他变换——离散余弦变换

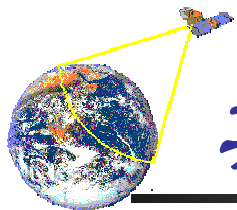
### ■ 二维离散余弦变换

➤ 偶对称偶函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-1-x, y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x, -1-y) & x \geq 0, y < 0 \\ f(-1-x, -1-y) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$



➤ 为关于 $(-1/2, -1/2)$ 对称的偶函数。



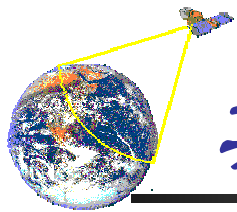
## 其他变换——离散余弦变换

➤ 偶对称偶函数二维离散余弦变换定义

$$F(u, v) = \frac{2}{N} C(u) C(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \frac{\pi}{2N} (2x+1)u \cos \frac{\pi}{2N} (2y+1)v$$

$$f(x, y) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u) C(v) F(u, v) \cos \frac{\pi}{2N} (2x+1)u \cos \frac{\pi}{2N} (2y+1)v$$

$$C(u) = C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u, v = 0 \\ 1 & u, v = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$



## 其他变换——离散余弦变换

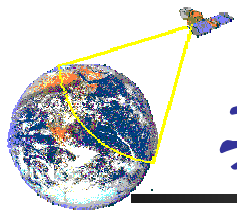
表为矩阵形式:

$$F_c = CfC \quad f = CF_cC$$

矩阵C的元素为:

$$C_{i,m} = \alpha(m) \cos \left[ \frac{\pi (2i + 1)m}{2N} \right]$$

$$\alpha(m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & m \neq 0 \end{cases}$$

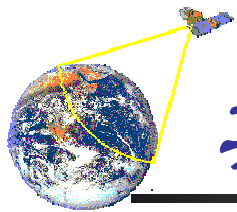


## 其他变换——离散余弦变换

$N=4$ 时

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{2N} & \cos \frac{3\pi}{2N} & \cdots & \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos \frac{3(N-1)\pi}{2N} & \cdots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

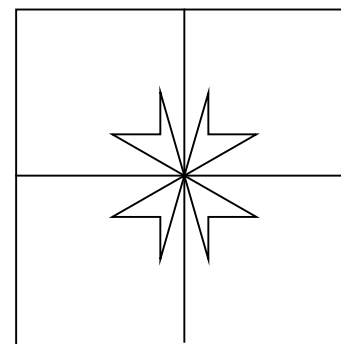


## 其他变换——离散余弦变换

### ■ 二维离散余弦变换

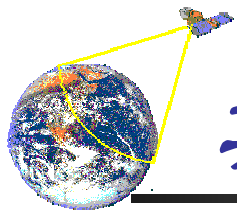
➤ 奇对称偶函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-x, y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x, -y) & x \geq 0, y < 0 \\ f(-x, -y) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$



➤ 为折叠镜像序列。





## 其他变换——离散余弦变换

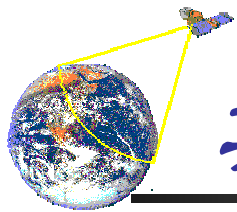
### ➤ 奇对称偶函数二维离散余弦变换

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x, y), \quad u=0, v=0$$

$$F(u, v) = \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x, y) \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} ux \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} vy \right], \quad u, v \neq 0$$

反变换:

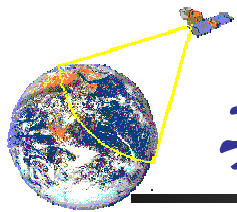
$$\hat{f}(x, y) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cos \frac{2\pi}{2N-1} ux \cos \frac{2\pi}{2N-1} vy$$
$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} f(x, y) & x=0, y=0 \\ \frac{1}{2} f(x, y) & x=0, y \neq 0 \\ \frac{1}{2} f(x, y) & x \neq 0, y=0 \\ f(x, y) & x, y = \text{others} \end{cases}$$



## 其他变换——离散余弦变换

### ➤ 余弦变换的性质

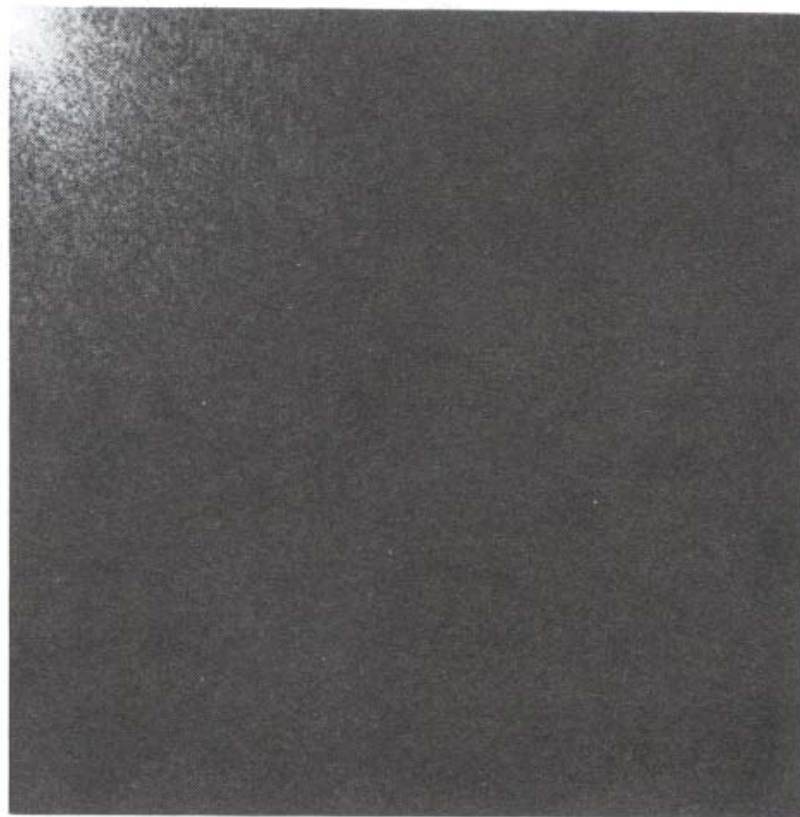
- ✓ 余弦变换为实的正交变换，变换核的基函数正交
- ✓ 序列的余弦变换是DFT的对称扩展形式
- ✓ 核可分离，可以用两次一维变换来执行
- ✓ 余弦变换的能量向低频集中
- ✓ 余弦变换有快速变换，和傅立叶变换一样，分奇偶组



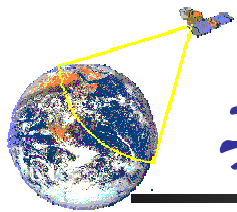
## 其他变换—离散余弦变换



(a)



(b)



## 其他变换——离散余弦变换

### ➤ 余弦变换的应用——压缩编码

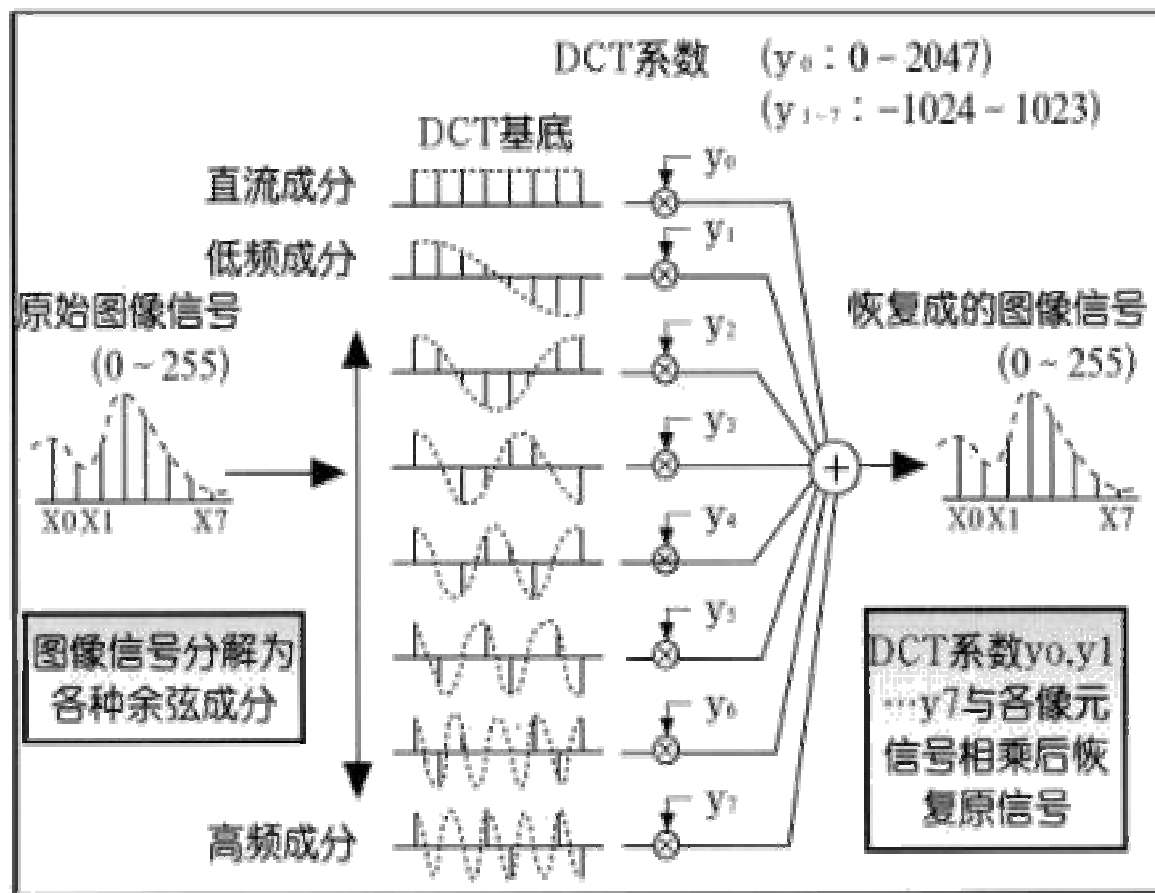
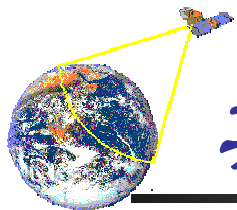


图 1



## 其他变换——离散余弦变换

### ➤ 余弦变换的应用——压缩编码

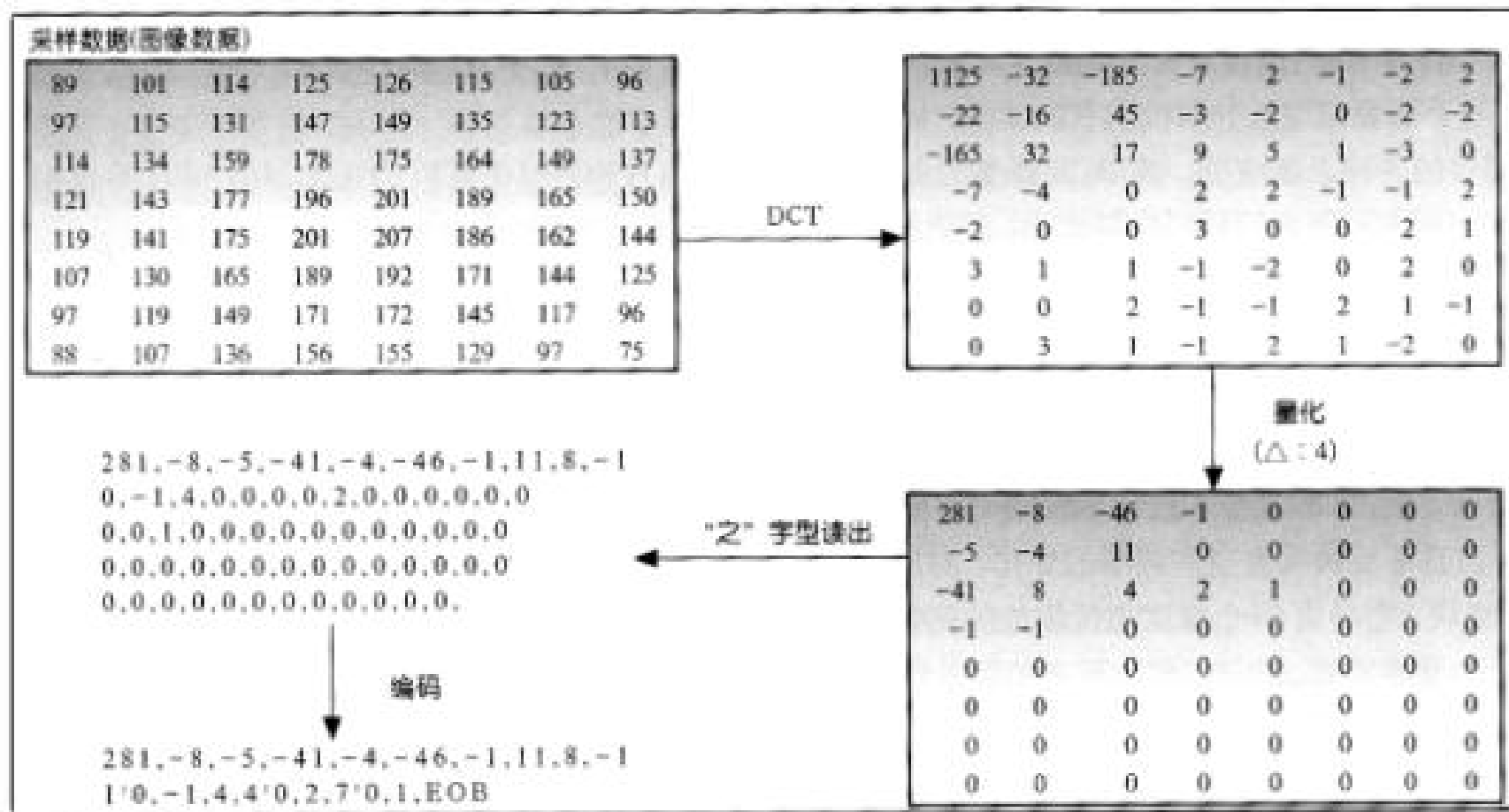
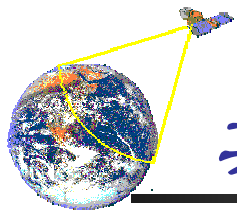


图 3

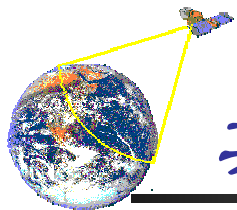


## 其他变换——沃尔什——哈达玛变换

- 沃尔什——哈达玛变换 (Walsh-Hadamard)
- 能否进一步找到计算更简单的变换?
- 方法一：构建更为简单的正交函数集，只要满足正交关系：

$$[A][A]^T = I$$

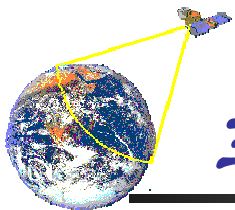
- 对正弦函数集进行深入研究，发现不考虑函数值，仅考察函数值的过零点位置分布时，可形成包含+1和-1极值状态下的正交函数集



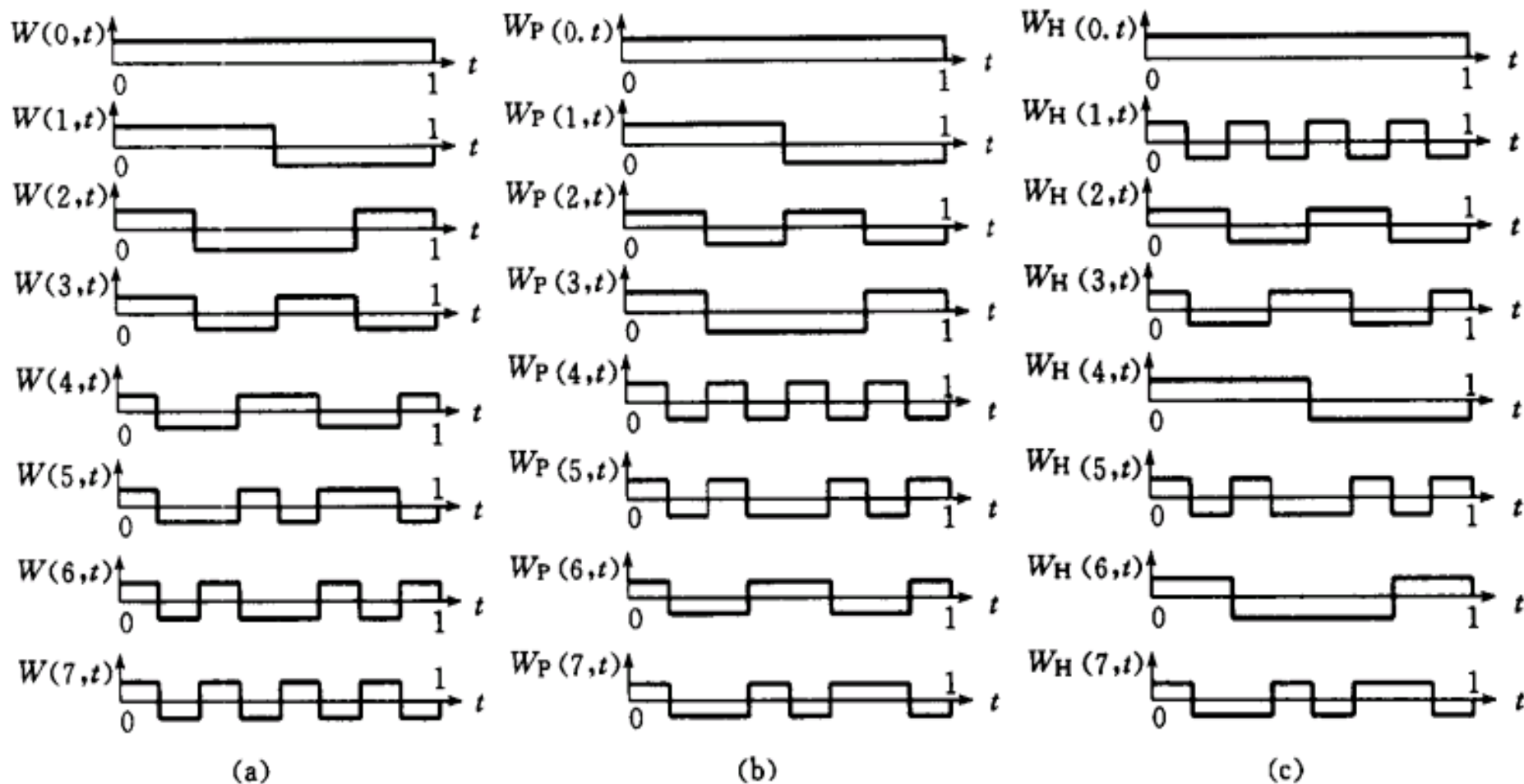
## 其他变换——沃尔什——哈达玛变换

- 1893年法国数学家哈达玛总结前人研究只包含+1和-1的正交矩阵结果，形成哈达玛矩阵，既简单又有规律
- 1923年美国数学家沃尔什提出Walsh函数，具有特点
  - 函数取值仅有两个（0,1 或-1,+1）
  - 由Walsh函数构成的Walsh函数集，具备正交性和完备性
- 将Walsh函数应用于信号的变换，建立Walsh变换基础
- 后人发现，按照哈达玛构造矩阵的排列方式，对Walsh函数进行排列，形成的函数集既满足正交性和完备性，又特别容易记忆和产生，将该正交函数集应用于信号变换，由此形成常用的沃尔什——哈达玛变换





## 三种不同排列的Walsh函数对比

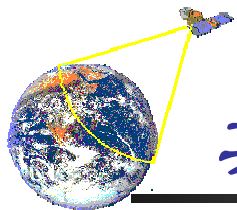


(a) Walsh排列

(b) Paley排列

(c) 按哈达玛排列





## 其他变换——沃尔什——哈达玛变换

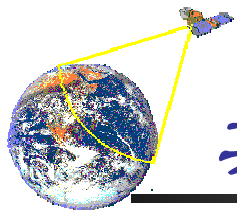
### ■ 二维沃尔什——哈达玛变换定义

$$F_H = WHT\{f\} = HfH \quad f = WHT^{-1}\{F_H\} = HF_HH$$

变换矩阵 $\mathbf{H}$ 具有递推公式:

$$H_1 = [1] \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

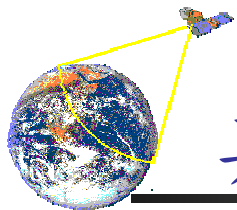
$$\mathbf{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix}$$



## 其他变换——沃尔什——哈达玛变换

### ■ 沃尔什——哈达玛变换 (Walsh-Hadamard)

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



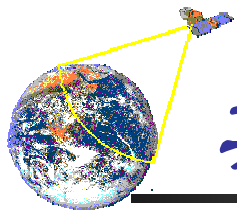
## 其他变换—沃尔什——哈达玛变换

### ■ 沃尔什—哈达玛变换特性

1. WHT变换是实的、对称的、正交变换
2. WHT可由快速算法实现，因为DHT只包括加减，因此没有任何乘法运算。
3. WHT有较好的能量集中特性

### ■ Walsh函数正交性的典型应用之一

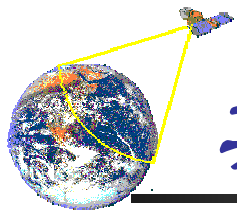
### ■ 沃尔什—哈达玛变换实例



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换

- 假定一幅图象在某个通讯信道中传输了 $M$ 次，由于任何物理信道均存在随机干扰因素，接收到的图像系列总混杂有许多随机干扰信号，称之为随机图象集合，集合中各图象之间存在相关性但又不相等
- K-L变换本质上是针对这类广泛的随机图象提出来的，当对 $M$ 个图象施加了K-L变换以后，变换后的 $M$ 新图像组成的集合中各图象之间互不相关
- 由变换结果图像集中取有限个图像 $K$  ( $K < M$ )而恢复的图像将是原图象在统计意义上的最佳逼近



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换原理

设  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  和  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

为两个  $n$  维随机向量，其元素  $x_i, y_j$  分别具有  $M$  个随机值

假定  $X$  能由  $Y$  精确表示为：

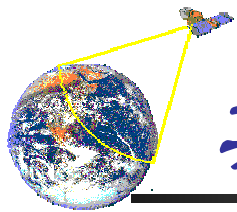
$$X = \Phi Y$$

$\Phi$  为  $n \times n$  正交矩阵，记为  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

若取  $Y$  向量的前  $m$  个向量  $Y_m$  来表示  $X$ ，记为  $X_m$ ，可有误差

$$\Delta X_m = X - X_m$$

从统计角度，如何选择  $\Phi$ ，使得上述误差的统计均方值达到极小



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换原理

- 通过数学分析，可得出结论如下：

对正交矩阵  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

- 若取 $\phi_i$ 为 $X$ 的协方差矩阵 $C_x$ 的特征向量，则对 $X$ 进行下述变换后

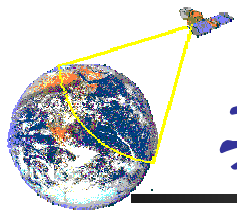
$$Y = \Phi^T X \quad (1)$$

其结果 $Y$ 向量可满足前述要求

- 上述变换式(1)与反变换

$$X = \Phi Y \quad (2)$$

称之为**K-L变换**，通常又称之为**Hotelling变换**、特征向量变换或主成分分析（变换）



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算

➤ 对 $N$ 维随机向量  $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$ , 其每个元素 $\mathbf{x}_i$ 分别具有 $M$ 个样本

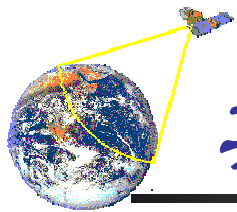
➤ 其平均值向量定义为:

$$\mathbf{M}_x = E\{X\} \qquad \mathbf{M}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i \qquad (3)$$

➤ 其协方差矩阵为一个 $N \times N$ 的矩阵, 定义为:

$$\mathbf{C}_x = E\{(X - \mathbf{M}_x)(X - \mathbf{M}_x)^T\} \qquad (4)$$

$$\mathbf{C}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T = \frac{1}{M} \left[ \sum \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right] - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T$$



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算（续）

- 令 $\mathbf{F}$ 和 $\lambda$ 为 $\mathbf{C}_x$ 的特征向量和对应的特征值，可有关系

$$|\mathbf{C}_x - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \mathbf{C}_x \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F} \quad (5)$$

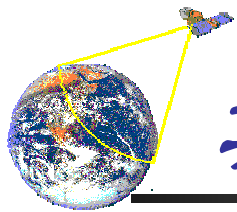
- 特征向量 $\mathbf{F}$ 为 $N$ 维矢量，由上式可解出 $N$ 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，将其按降序排列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$$

- 将各特征值分别代入（5）式，可得出对应各特征值的特征向量为：

$$\mathbf{F}_i = [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}]^T$$



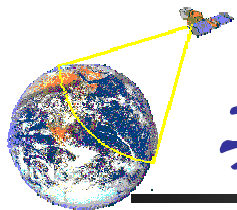


## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算（续）

➤ 将各特征向量转置后即可构成变换矩阵：

$$\Phi = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ \vdots \\ F_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ & \cdots & \cdots & \\ f_{N1} & \cdots & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$



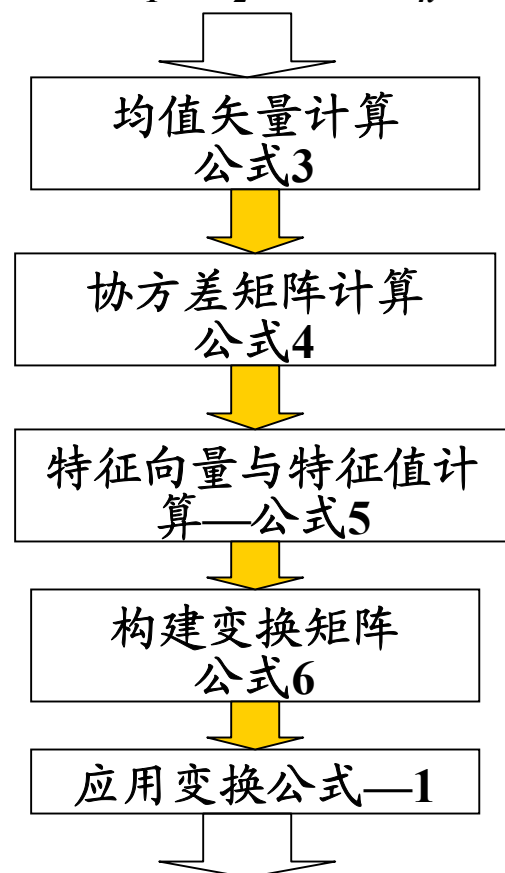
## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算（续）

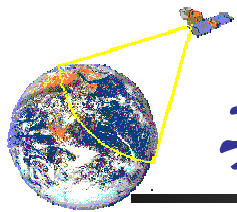
#### ➤ 计算流程与K-L讨论

- ✓ 确定随机向量 $X$ 及其样本集合范围
- ✓ 在确定的随机向量集合下，关键的是确定协方差矩阵；进而由协方差矩阵通过线性代数计算得出特征向量与特征值
- ✓ 变换的实质在于：输入随机向量 $X$ 中各分量之间存在很强的相关性，通过变换使输出随机向量 $Y$ 中各分量之间互不相关
- ✓ 若定义不同的输入随机向量组成方式，则可能导致不同的应用方向

确定随机向量集合  
 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$



获取变换结果  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换性质

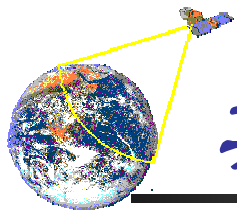
- 去相关性：上述变换结果 $Y$ 向量的各分量互不相关，具有协方差矩阵为

$$C_y = \Phi^T C_x \Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- 最佳重构特性：对变换后结果进行截断后恢复原数据，其均方误差是最小的

假定取 $Y$ 向量的前 $M$ 个分量进行反变换恢复 $X$ 向量，其均方误差为：

$$\varepsilon^2(m) = \sum_{i=M+1}^N \lambda_i$$



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算实例

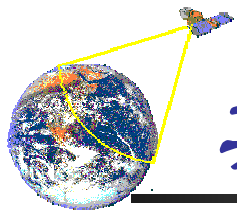
➤ 假定2x6图像矩阵为：
$$X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

➤ 将每一行作为一个随机矢量，形成随机向量为：

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$$

➤ 其均值矢量为

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+4+5+5+3+2 \\ 2+3+4+5+4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$



## 其他变换—K-L变换

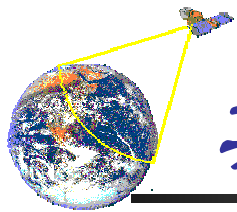
### ■ K-L变换计算实例

➤ 可有协方差矩阵:

$$C_x \cong \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T =$$

$$\frac{1}{M} \left\{ \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 \end{bmatrix}$$



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算实例

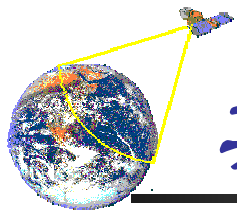
➤ 由协方差矩阵计算特征值:

➤ 由 
$$\begin{vmatrix} 1.9 - \lambda & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

➤ 可解出:  $\lambda^2 - 3\lambda + 0.88 = 0$        $\lambda_1 = 2.67$        $\lambda_2 = 0.33$

➤ 将 $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 分别代入公式(5), 可解出特征向量并构建变换矩阵为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} f_1^T \\ f_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.57 \\ -0.57 & 0.82 \end{bmatrix}$$



## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换计算实例

➤ 对X进行变换:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.57 \\ -0.57 & 0.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0.5 & 0.18 & 0.43 & 1.25 & 1.57 & 1.32 \end{bmatrix}$$

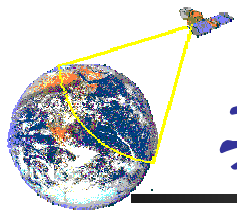
➤ Y向量的协方差矩阵为:

可见89%的能量集中在分量1中

$$C_Y = \begin{bmatrix} 2.67 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

➤ 舍弃分量2，反变换结果为:

$$X = \begin{bmatrix} 0.82 & -0.57 \\ 0.57 & 0.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.28 & 4.1 & 5.23 & 5.7 & 3.89 & 2.75 \\ 1.58 & 2.84 & 3.64 & 3.96 & 2.7 & 1.91 \end{bmatrix}$$

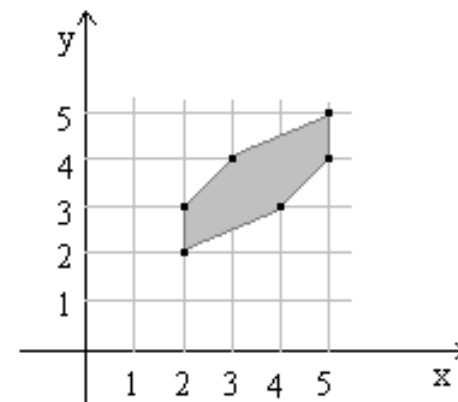


## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换的深入讨论—从另一种角度

- 对图像矩阵 $X$ ，可看作为二维平面上一组像素点坐标的集合，如图所示

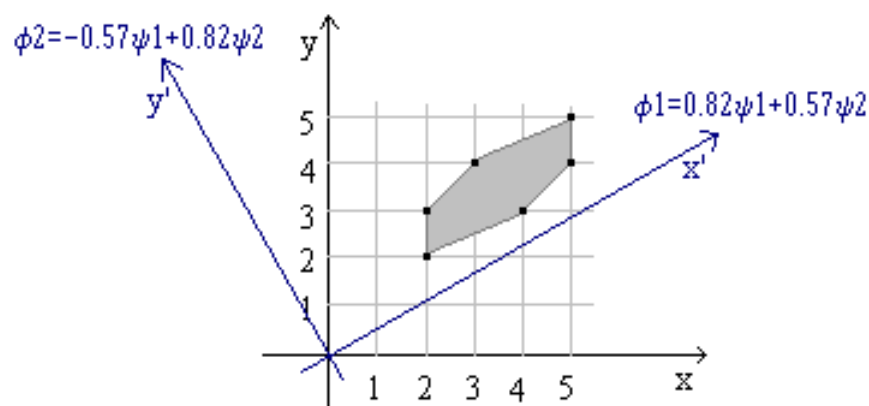
$$X = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$



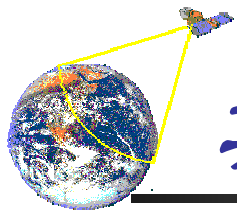
- 变换结果 $Y$ ，则可看作为一个新坐标系下相同像素点的集合

$$Y = \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0.5 & 0.18 & 0.43 & 1.25 & 1.57 & 1.32 \end{bmatrix}$$

- 该新坐标系为原坐标系的旋转，旋转矩阵即为K-L变换矩阵





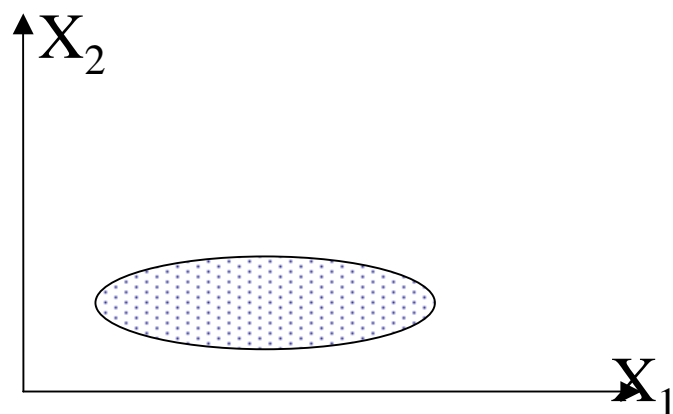


## 其他变换—K-L变换

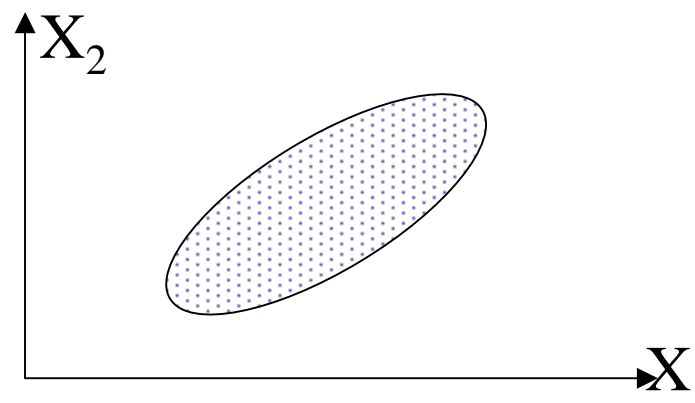
### ■ K-L变换的深入讨论

➤ 考察下图二维 $X$ 空间中框界内各矢量 $X$ :

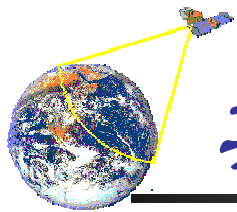
- ✓ 图(B)中, 各点的 $x_1$ 变化时, 其 $x_2$ 也必定增大或减小; 表明矢量 $X$ 的 $x_1, x_2$ 分量之间**相关性很高**
- ✓ 图(A)中, 各点的 $x_1$ 变化时, 其 $x_2$ 变化很小或没有变化; 表明矢量 $X$ 的 $x_1, x_2$ 分量之间**相关性很低或没有相关性**



A) 不相关

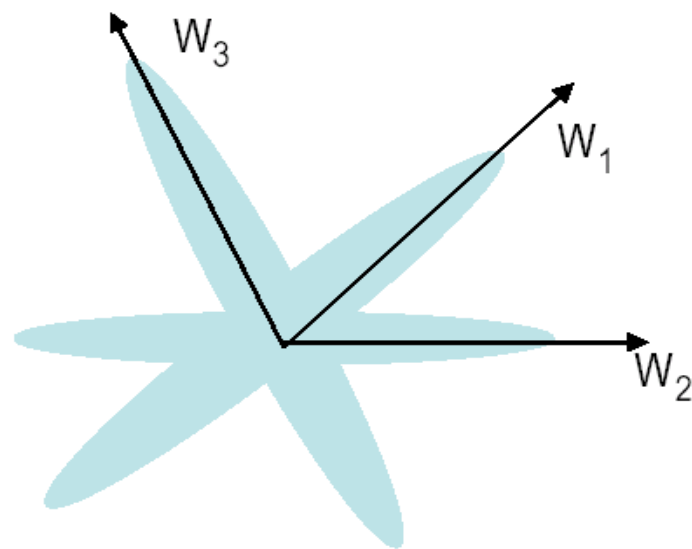
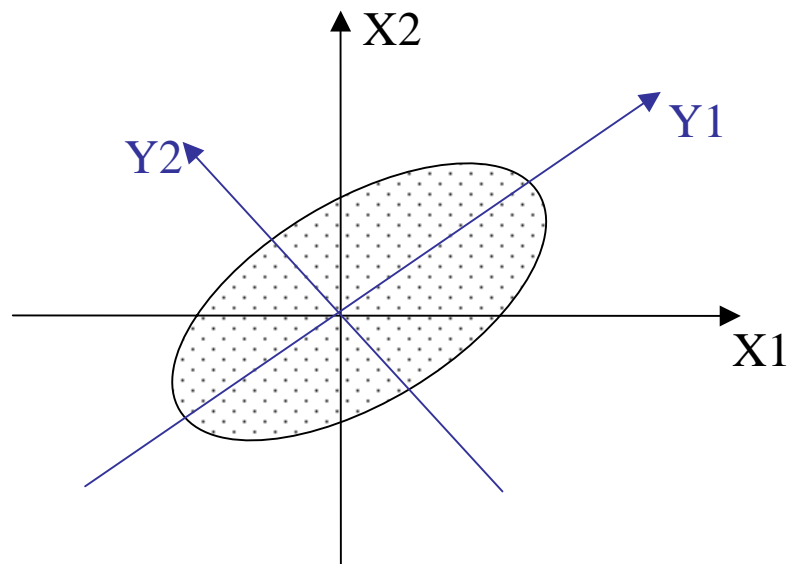


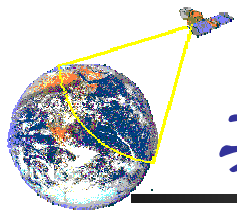
B) 相关



## 其他变换—K-L变换

- K-L变换的目标，即在于找出使 $X$ 矢量中各分量相关性降低或去除的方向，对图像进行旋转，使其新空间的坐标轴指向各主分量方向——主成分分析或主成分变换
- 扩展至多维空间，K-L变换可实现多维空间中的去相关，并将能量集中在少数主要分量上





## 其他变换—K-L变换

- 各主分量相互之间的互不相关，使得变换后的特征具有独立描述图像的全部信息
- 在遥感图像处理中，将原始的多波段图像转换为主分量图像，将使大量信息更多地集中在少数几个分量上，实现有效的特征抽取

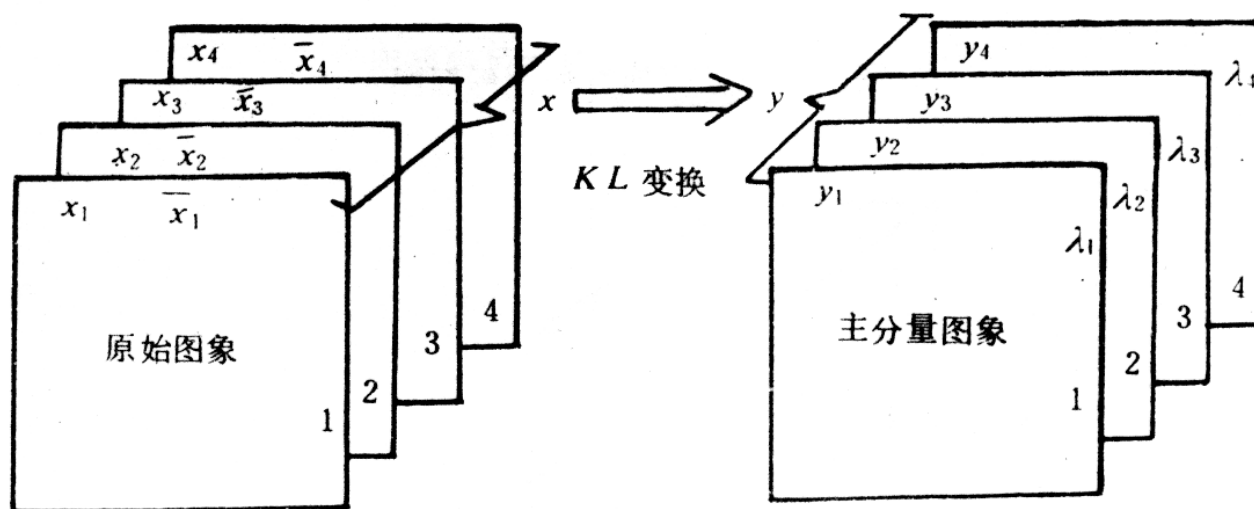
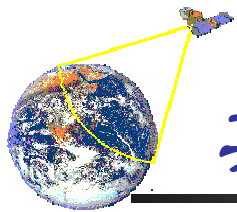
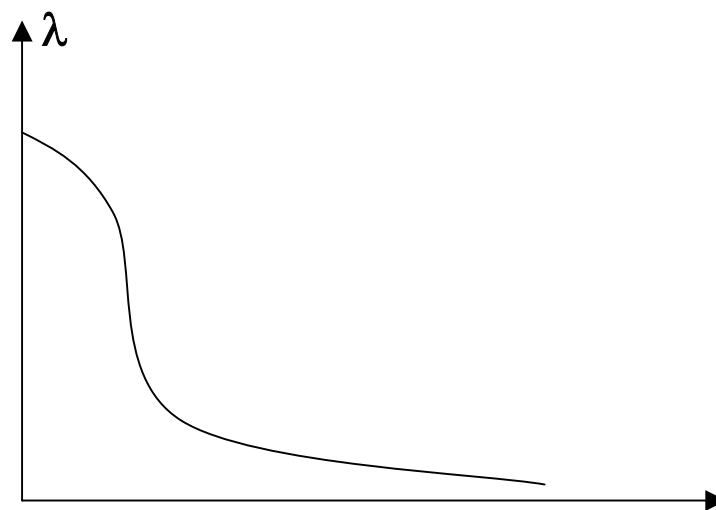


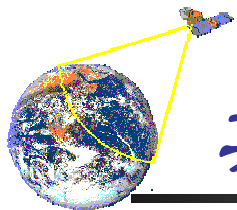
图 7-1 KL 变换过程示意图



## 其他变换—K-L变换

- 为有效的发挥K-L变换的作用，待变换的对象中各分量之间应具有较强的相关性；相关性越强，K-L变换的效果越明显，表现为变换矩阵的特征值具有快速下降的曲线
- 与傅里叶变换、Hadamard变换等不同，K-L变换的变换矩阵随不同图像的统计性质、不同的随机向量定义而不同
- K-L变换域的图像常常具有直接应用的价值
- 到目前为止，K-L变换尚无有效的快速算法，计算量巨大是其应用发展上的瓶颈





## 其他变换—K-L变换

### ■ K-L变换的应用

#### ➤ 图像目标旋转的应用

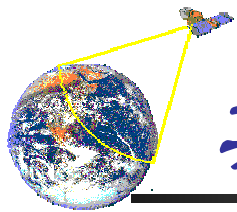
- ✓ 将图像的坐标作为随机向量的分量  $X=[x, y]$

#### ➤ 多波段图像特征抽取应用

- ✓ 将图像的波段作为随机向量的分量  $X=[b_1, b_2, \dots, b_n]$

#### ➤ 图像数据压缩应用

- ✓ 将图像的波段或像素作为随机向量的分量  $X=[p_1, p_2, \dots, p_n]$



## 其他变换——哈尔变换

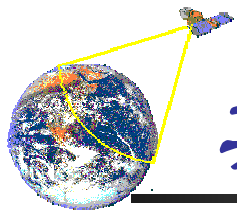
### ■ 哈尔变换—Haar Transform

- 与沃尔什—哈达玛变换的构成方法相似，寻找其他可用的正交函数
- Haar函数于1910年提出，其矩阵只有 +1, -1和另一个以 $\sqrt{2}$ 为基础的系数。它是正交稀疏矩阵，可实现快速计算
- 哈尔函数具备完备性与归一化正交性

### ■ 哈尔变换的定义

- 利用哈尔函数作为基函数的对称、可分离酉变换，要求 $N=2^n$

$$T = HFH$$



## 其他变换——哈尔变换

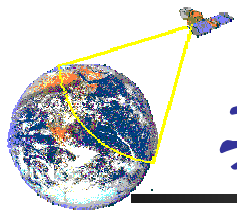
### ■ 哈尔函数的定义

➤ 令整数  $0 \leq k \leq N-1$  由其他两个整数  $p$  和  $q$  唯一决定

$$k = 2^p + q - 1$$

➤ 哈尔函数定义为:

$$h_0(x) = \frac{1}{N} \quad h_k(x) = \frac{1}{N} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-0.5}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-0.5}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

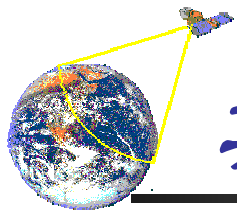


## 其他变换——哈尔变换

- 对于  $i=0, 1, \dots, N-1$ , 令  $x=i/N$ , 则形成一组基函数, 除  $k=0$  时为常数外, 每个基函数均具有独特的一個矩形脉冲对
- 这些基函数在尺度 (宽度) 和位置上均有所变化, 索引  $p$  规定了尺度,  $q$  决定了平移量
- 可以计算  $N=8$  时  $p$  和  $q$  的关系:

$N=8$	$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
	$p$	0	0	1	1	2	2	2	2
	$q$	0	1	1	2	1	2	3	4

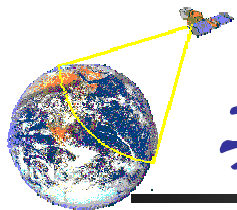




## 其他变换——哈尔变换

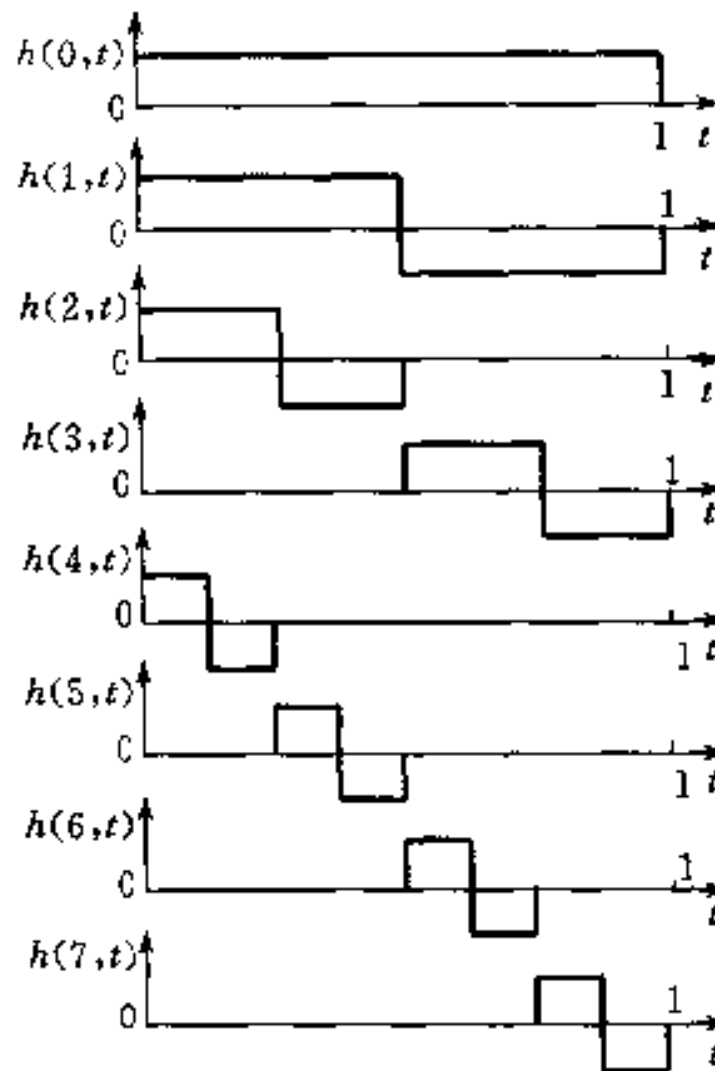
➤ 由此形成8个函数，形成哈尔矩阵：

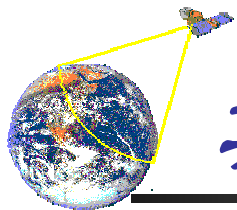
$$H_h = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$



## 其他变换——哈尔变换

- $N = 8$  哈尔函数波形如右图，可有特征：
  - 第一行反映一种整体变换，第二行反映两个半幅变换，下两行是  $N/4$  之间的变换，最后是相邻两像元之间的变换
  - 哈尔矩阵既反映整体，又反映局部
  - 如果一个信号、或信号中的一部分，可以近似地匹配上某一基函数，则在变换后，会产生一个对应那个基函数的较大的变换系数，而对于其他正交基函数产生较小的系数。由此，哈尔变换可以给出一些线和边的尺寸和位置信息

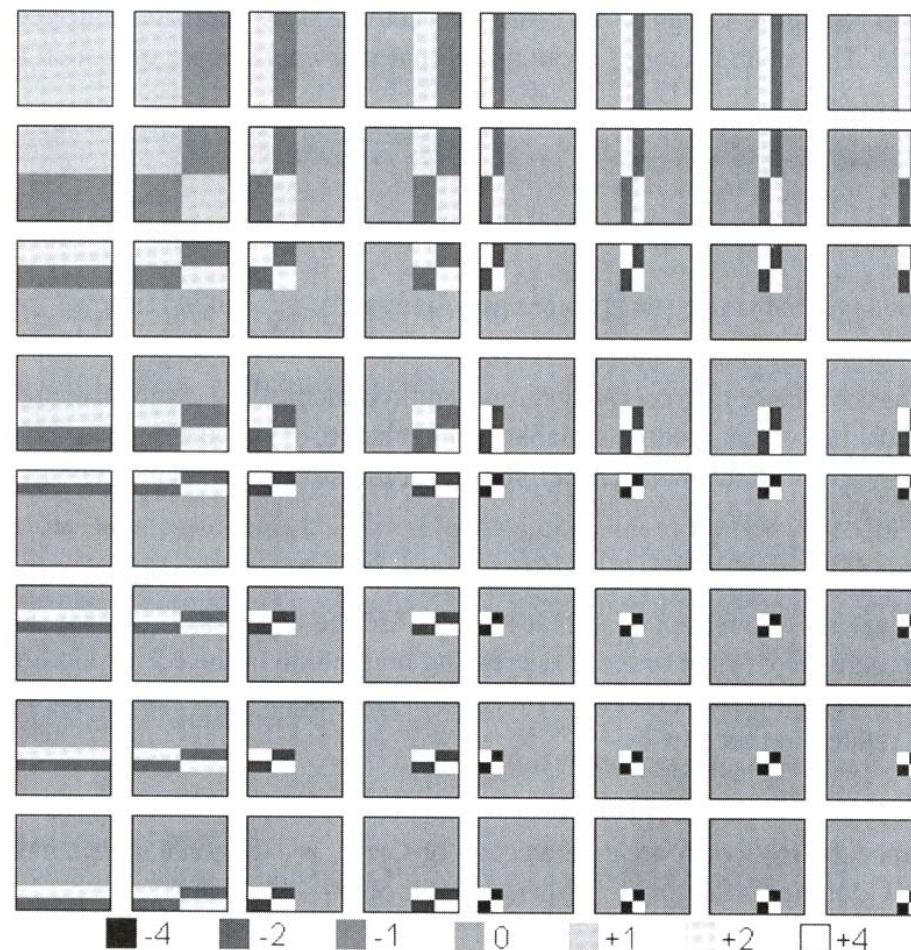


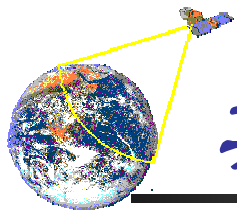


## 其他变换——哈尔变换

### ■ $N = 8$ 哈尔基图像

注意：右下象限部分可以用来搜索图像中不同位置的小特征

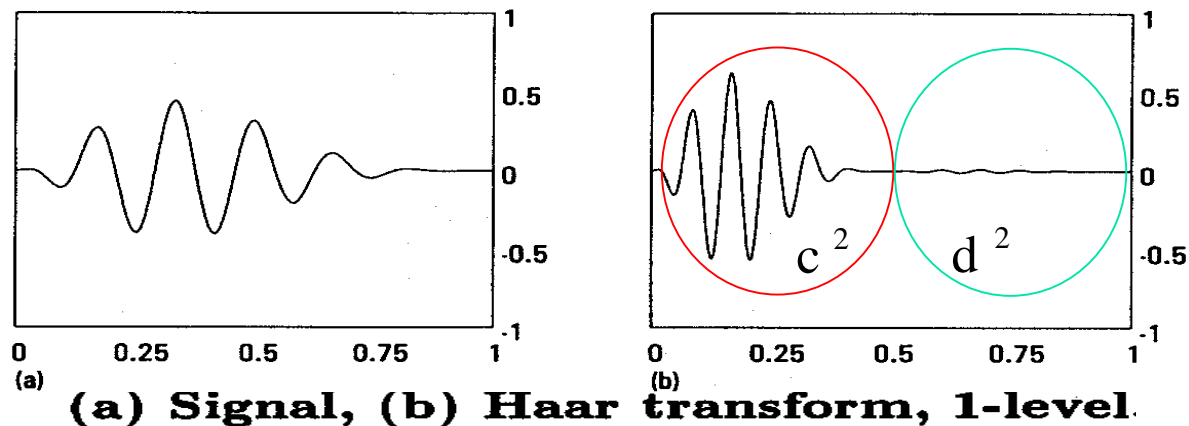


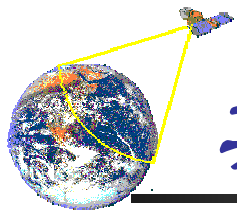


## 其他变换——哈尔变换

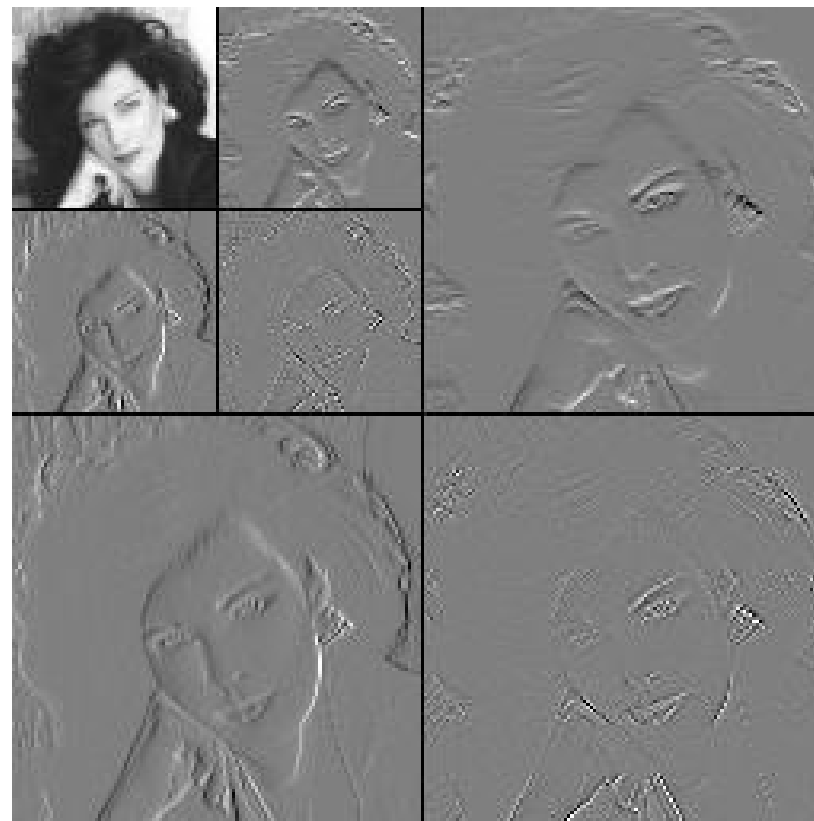
### ■ 哈尔变换的特性

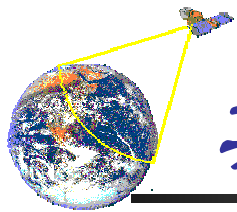
- Haar函数的一个重要特性——收敛均匀而迅速
- 傅里叶变换的基函数仅是频率不同，哈尔函数在尺度和位置上都不同
- 哈尔变换具有尺度和位置的双重性
- 全域特性和区域特性：哈尔函数系列可分为全域部分和区域部分。全域部分作用于整个变换区间，区域部分作用于局部区域
- 小波特性：  
变换后子波的尺度远小于原始信号





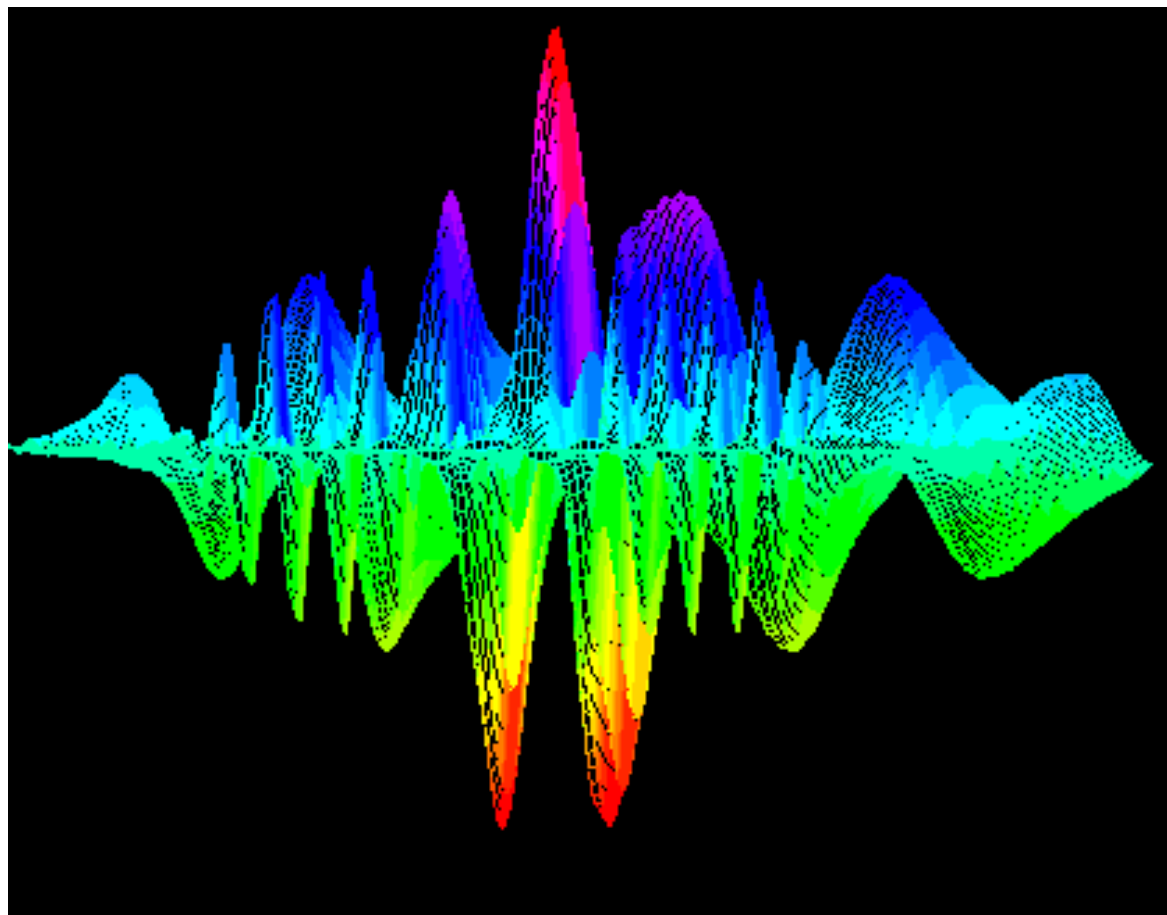
## 其他变换——哈尔变换

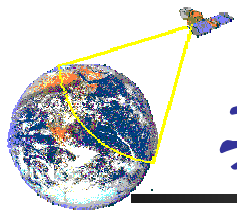




其他变换——小波变换

# 小波变换

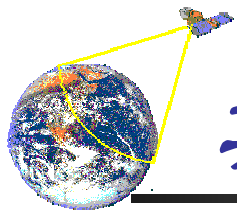




## 其他变换——小波变换

- 小波分析的发展非常迅速。最早可以追溯到1900年希尔伯特(Hilbert)的论述，和1910年哈尔提出的规范正交基
- 实际的主要工作还应该是1984年法国的Morlet在分析地震波局部性质时，因傅立叶变换难以达到要求，因而引入小波概念
- 以后，Grossman对Morlet的信号按一个确定函数的伸缩、平移系进行了研究，为小波分析的形成开了先河
- 小波变换理论的理解与解释，可从严格的理论推导、傅里叶分析的延伸、多分辨分析、子带编码等不同角度展开





## 其他变换——小波变换

- 傅里叶变换的引入，使人类对于自然界复杂信号或图像的分析与处理，转变为对于其相对较为简单的频域特征的分析与处理

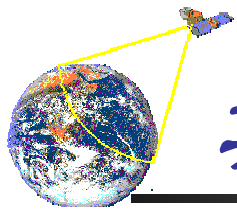
➤ 回忆调和信号与傅里叶变换

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

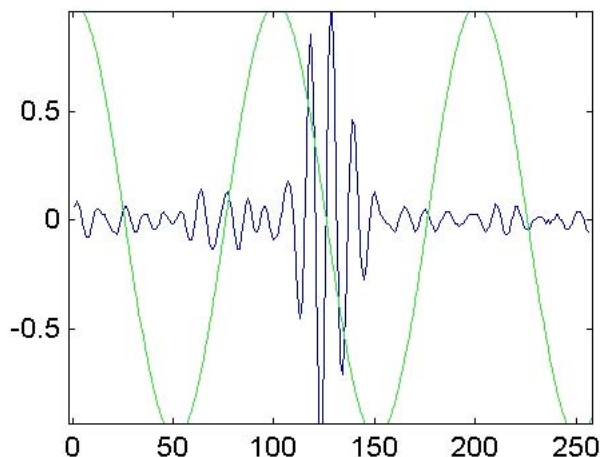
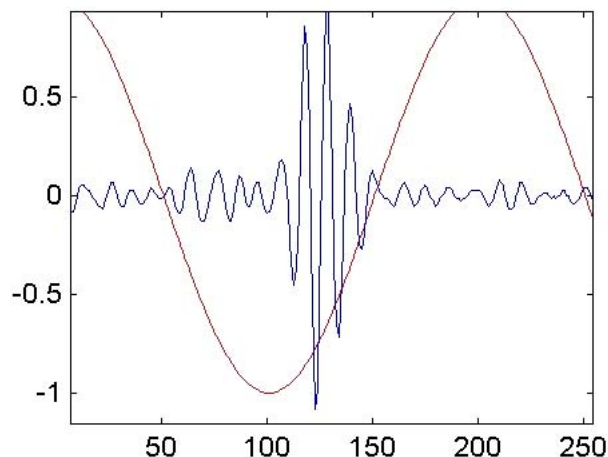
$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 实际上相当于将调和信号频率与实际信号相比较
- 若实际信号中含有对应频率，则具有较大的变换系数
- 若实际信号中没有某特定频率，则该频率对应的系数较小或为零



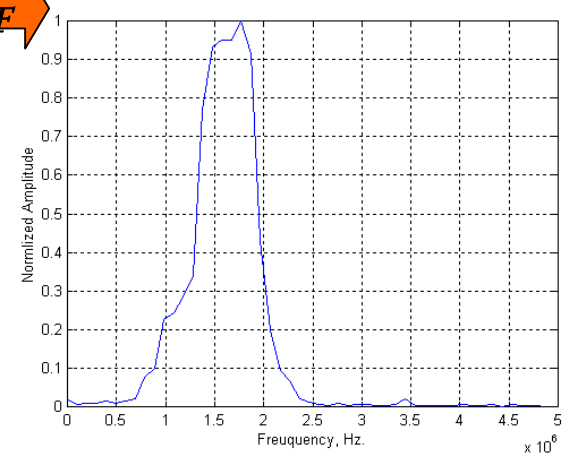
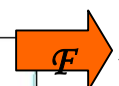
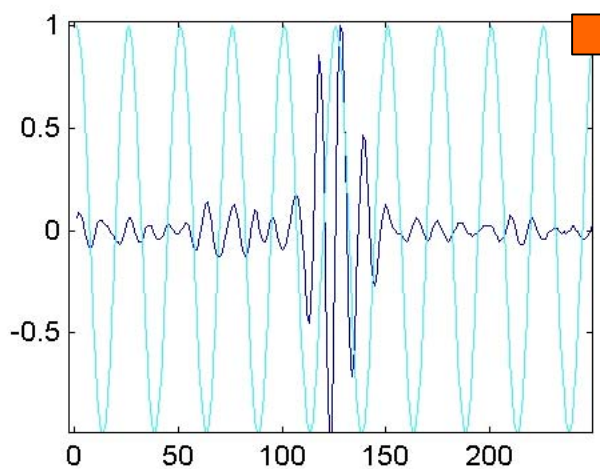
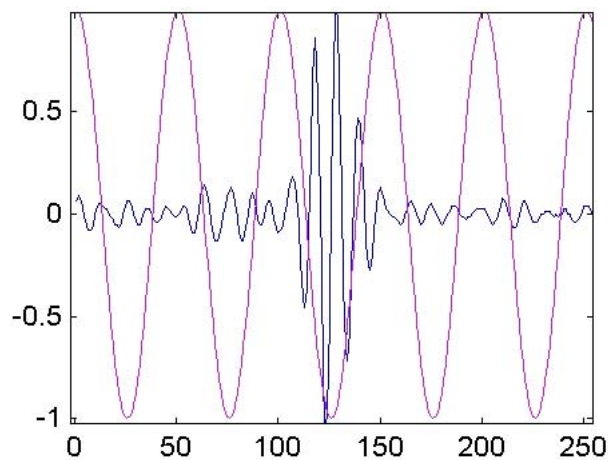


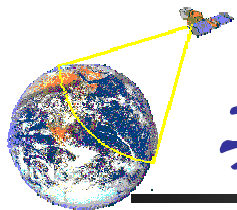
## 其他变换—小波变换



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

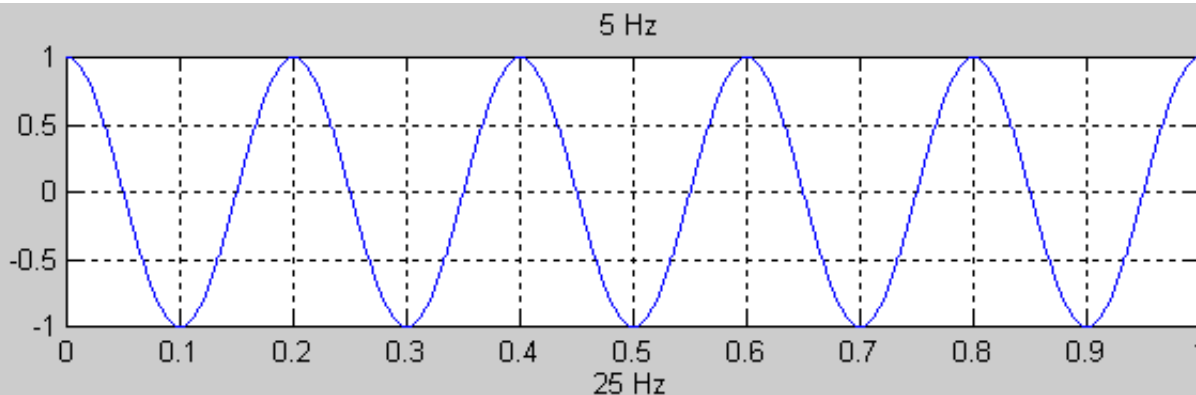
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$$



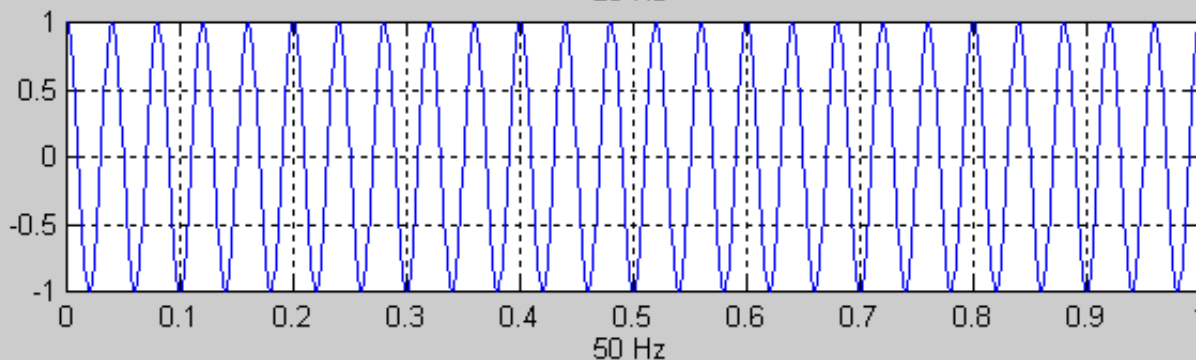


## 其他变换—小波变换

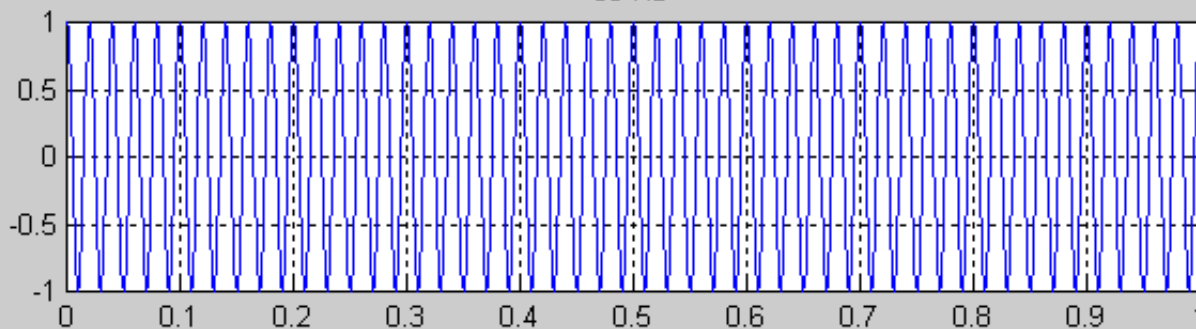
$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$

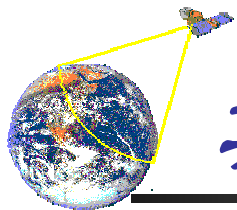


$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$



$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$



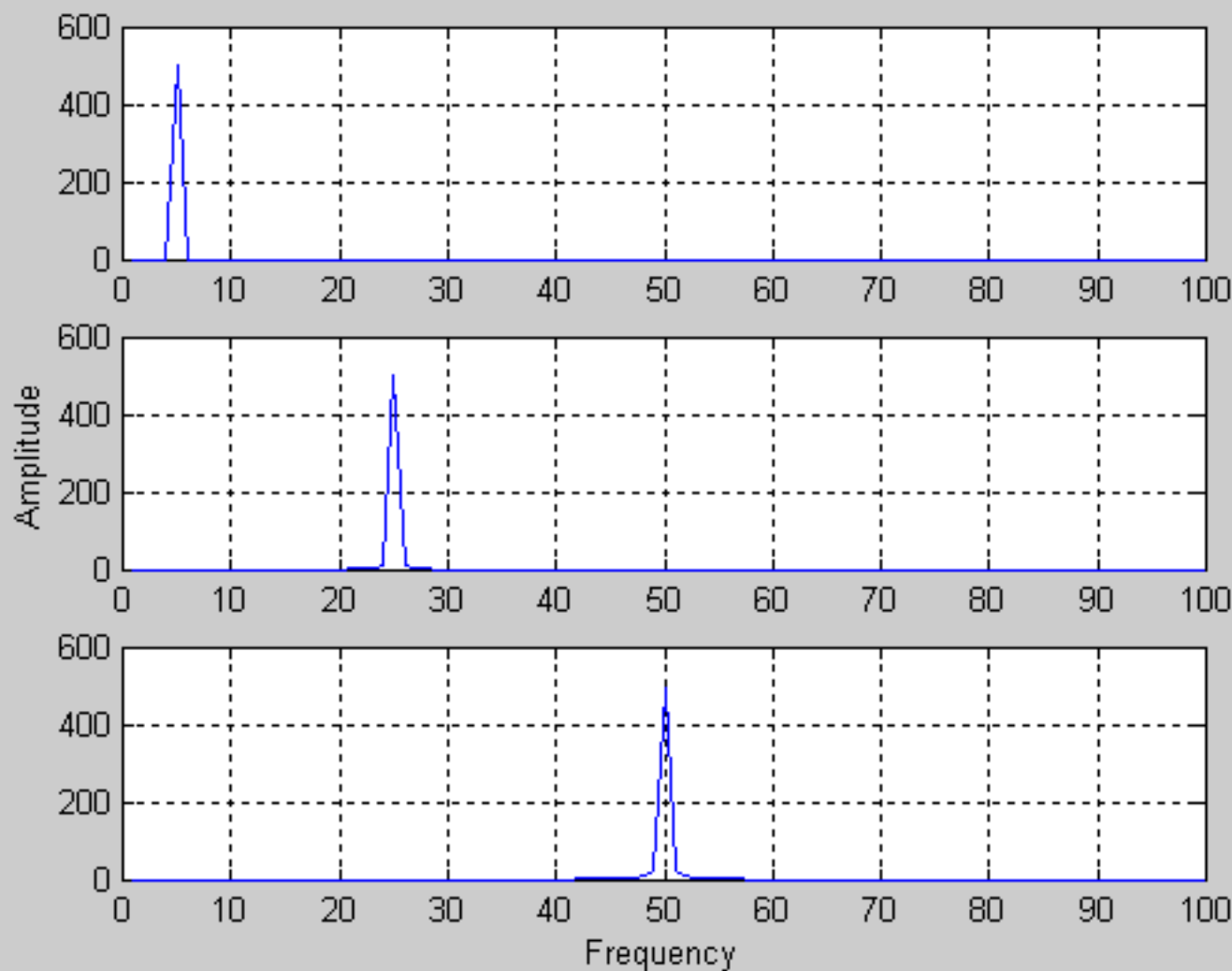


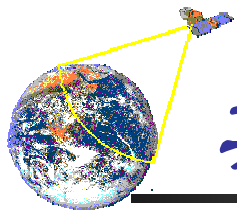
## 其他变换—小波变换

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(\omega)$$

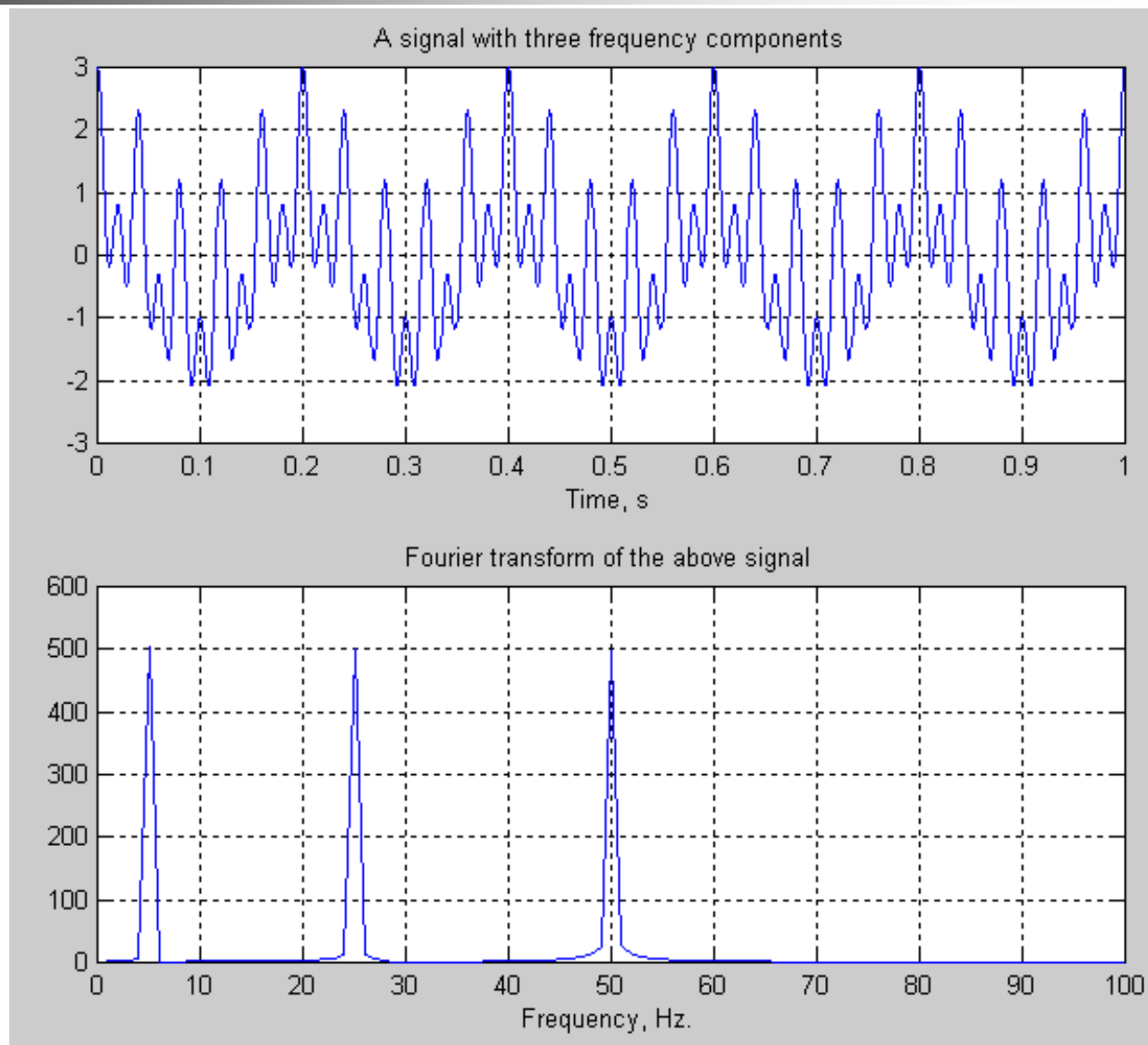


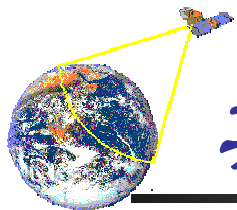


## 其他变换—小波变换

$$x_4(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\ + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\ + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

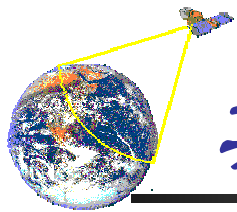
$$x_4(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_4(\omega)$$





## 其他变换——小波变换

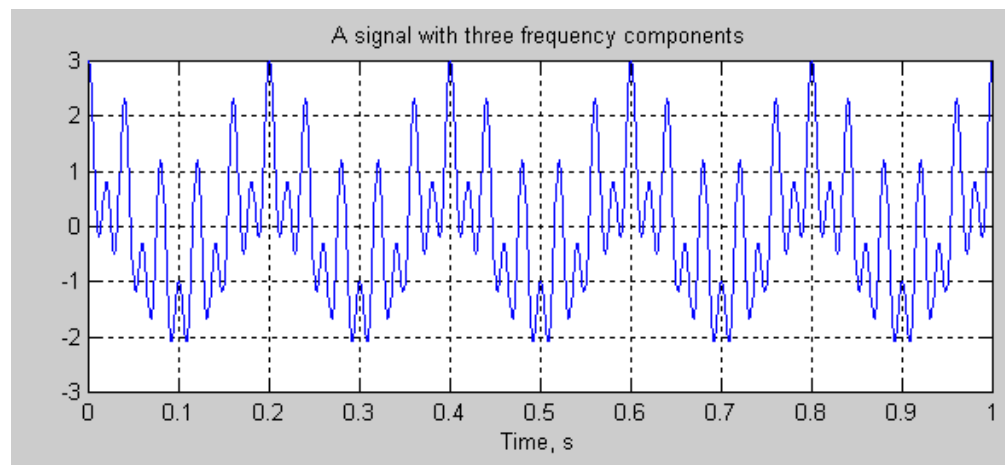
- 傅里叶变换可以准确地知道信号中含有哪些频率成分，但不知道这些成分发生的时间、位置
- 稳态信号特征
  - 由一系列不随时间变化的频率组成
  - 不需要知道任何频率的开始与停止时间
  - 傅立叶变换基于在时间轴上无限伸展的正弦曲线波作为正交基函数，十分适于表现稳态信号
- 非稳态信号具有随时间变化的频率成分，分析中需要知道
  - 什么频率在什么时候发生
  - 特定频率发生的位置



## 其他变换——小波变换

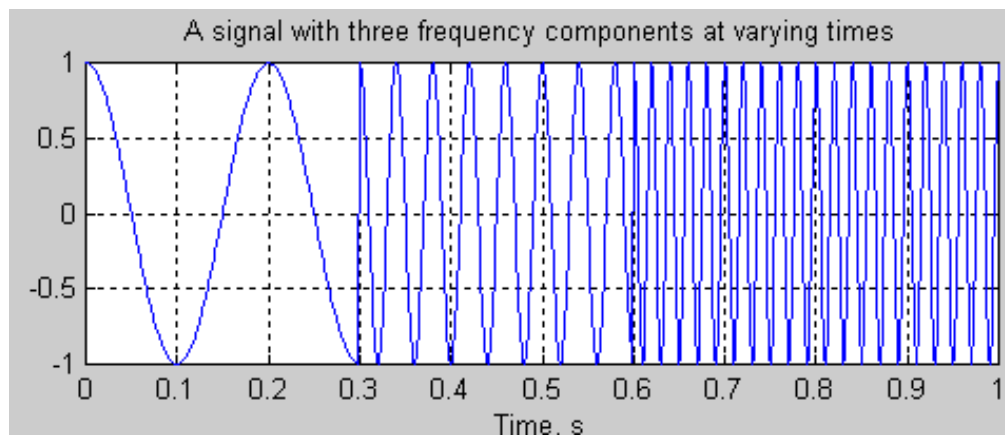
### ➤ 稳态信号

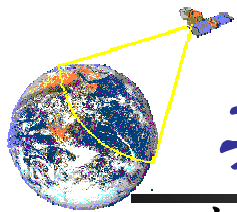
$$\begin{aligned}x_4(t) = & \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\ & + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\ & + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)\end{aligned}$$



### ➤ 非稳态信号

$$x_5(t) = [x_1 \oplus x_2 \oplus x_3]$$

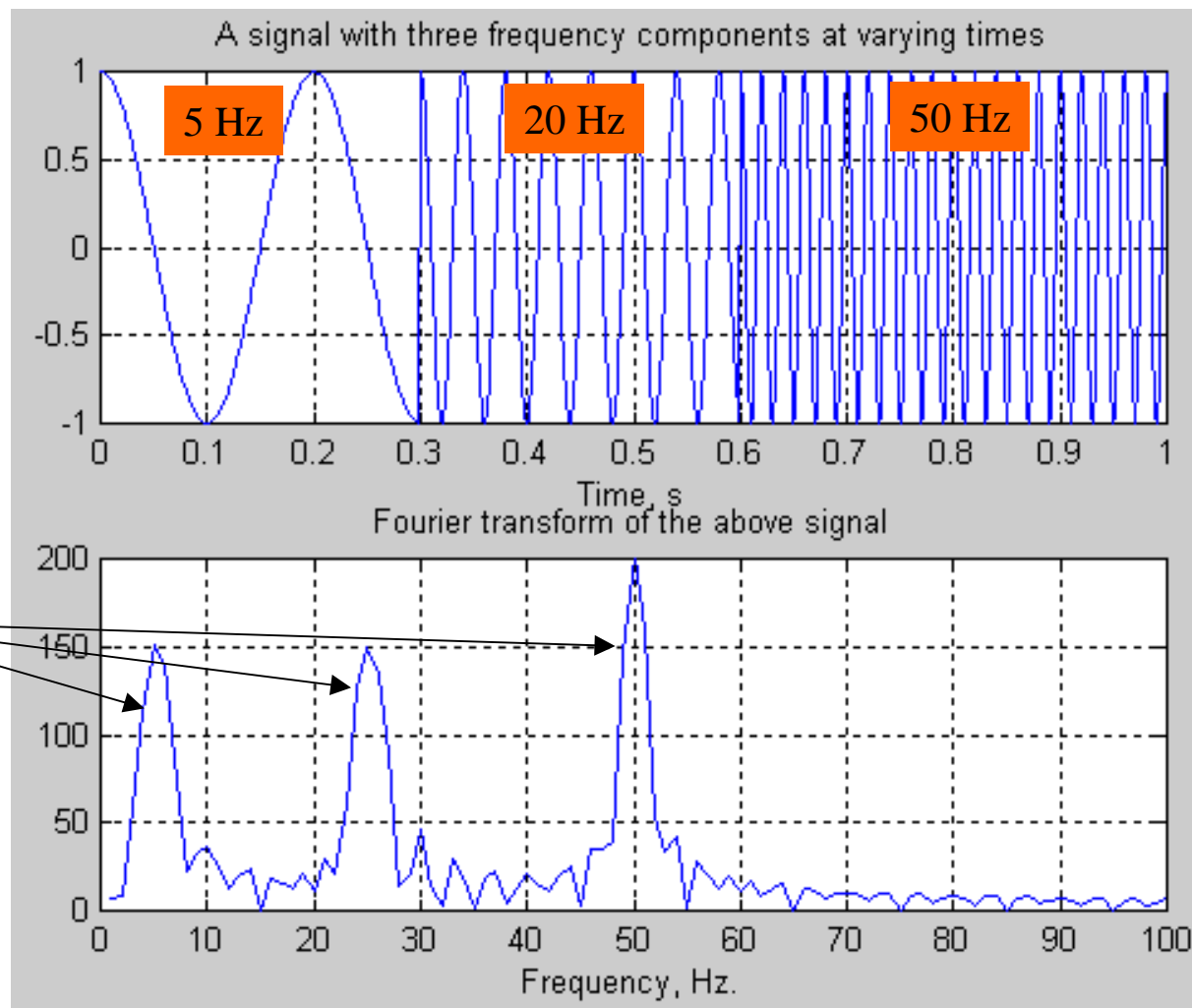


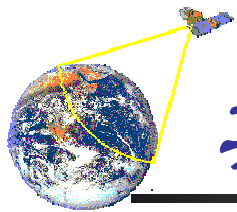


## 其他变换—小波变换

### ➤ 非稳态信号的傅里叶变换

可以准确的知道频率成分，但不知道这些频率出现的位置和延续的时间





## 其他变换——小波变换

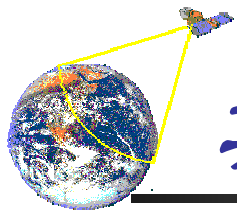
### ■ 傅里叶变换的局限性

- 时间信息损失：什么时候特定的事件发生？
- 位置信息的损失：傅里叶变换不能确定某一事件的漂移、趋势、突变、起始和结束等
- 傅里叶变换分析是全局性的分析，难以分析局部信号特征

### ■ 傅里叶变换的其他局限性

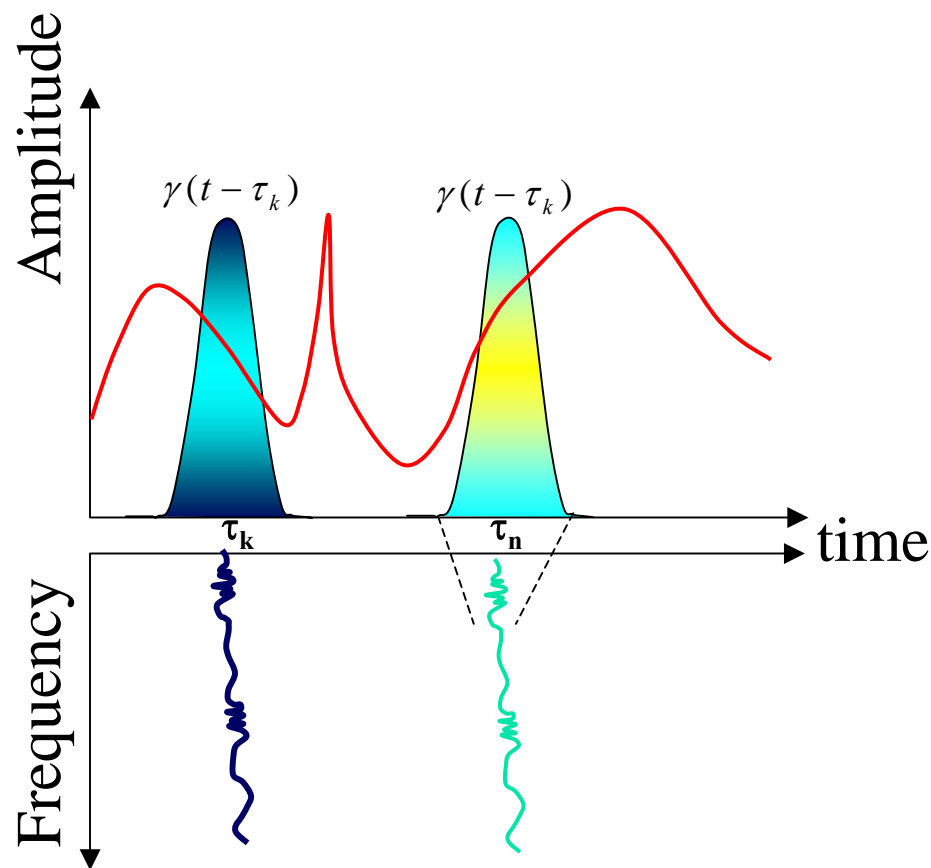
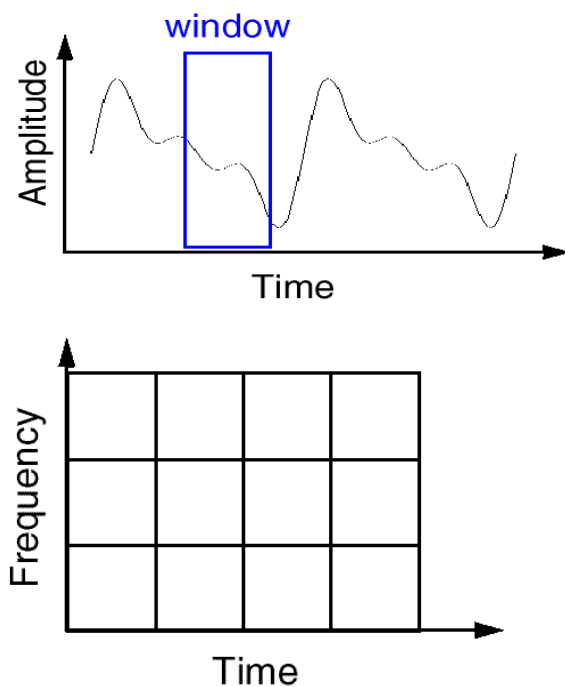
- 对于瞬态信号或高度局部化的信号（例如边缘），由于这些成分并不类似于任何一个傅立叶基函数，它们的变换系数（频谱）不是紧凑的，频谱上呈现出一幅相当混乱的构成
- 这种情况下，傅立叶变换是通过复杂的安排，以抵消一些正弦波的方式构造出在大部分区间都为零的函数而实现的
- 对于包含瞬态或局部变化成分的信号，傅里叶变换分析将难于得到最佳的表示

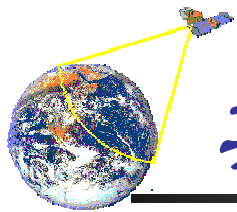




## 其他变换—小波变换

- 为了克服上述缺陷，使用有限宽度基函数的变换方法
- Gabor变换（1946），或称之为加窗付里叶变换、短时傅里叶变换（STFT）首先产生：



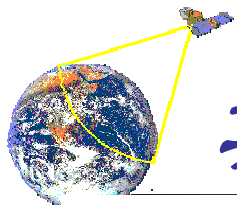


## 其他变换——小波变换

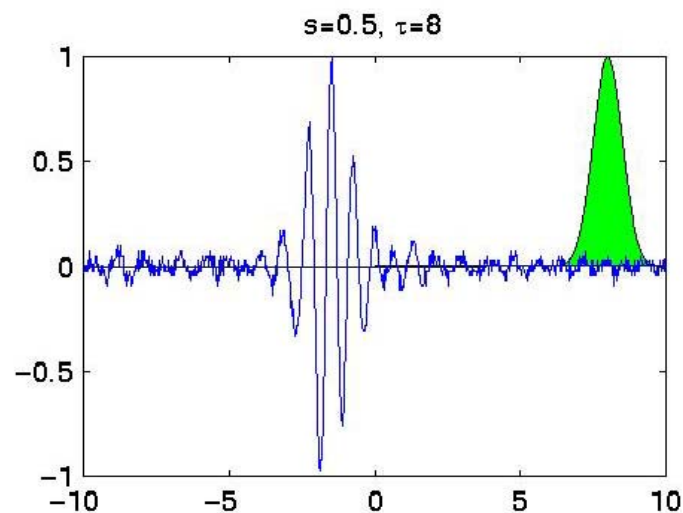
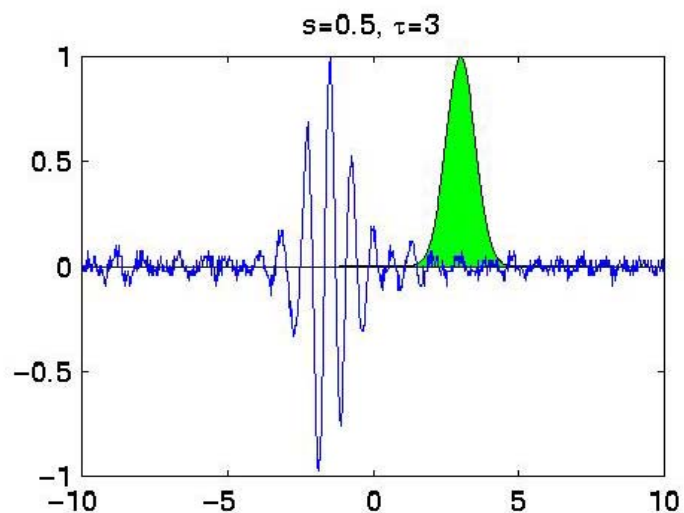
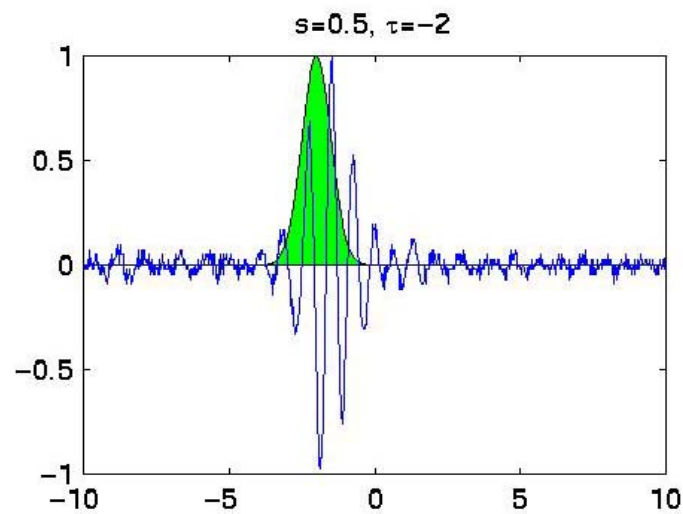
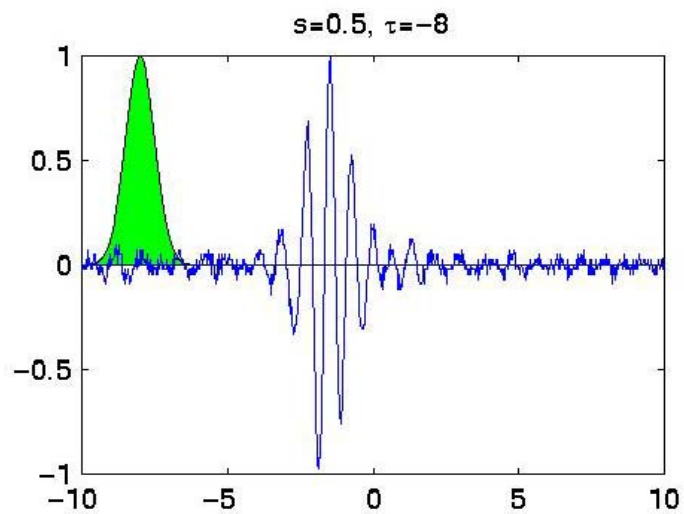
### ■ STFT变换步骤为:

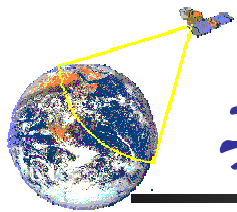
- 1) 选定一个有限窗口
- 2) 将窗口放置于信号的起点
- 3) 计算窗口内信号的傅里叶变换
- 4) 将窗口向右移动一个距离
- 5) 重复3) 4) 步, 直至达到信号的末尾

由此, 得到每个时间段内信号的频率成分



## 其他变换—小波变换



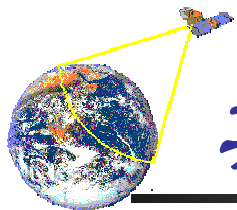


## 其他变换——小波变换

### ■ Gabor变换具有特征:

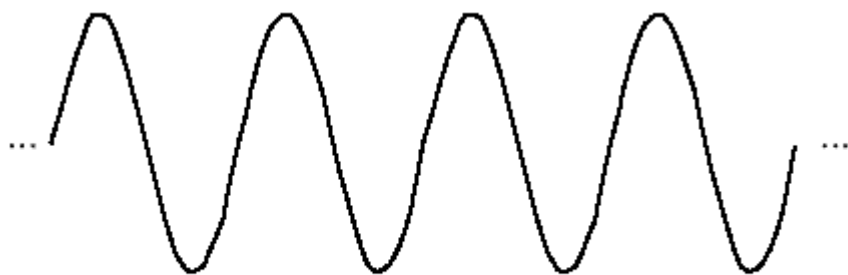
- 实现了对于信号的频率与时间观察的折衷
- 无论时间还是频率的观察均为有限精度；整体精度取决于窗口尺寸
- 一旦窗口尺寸确定，将作用于所有频率

### ■ 实际信号需要在时间与频率方面更为灵活的观察与分析



## 其他变换——小波变换

- 进一步的发展——采用频率不同、位置不同、宽度有限的基函数进行变换：小波变换出现
- 哈尔变换——最早出现的小波变换实例，其基向量均为一个函数通过不断的平移和伸缩来产生。具有奇数矩形脉冲对的哈尔函数为最古老又最简单的小波
- 什么是小波？

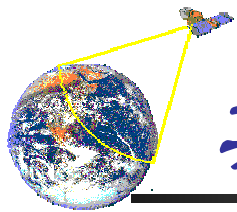


Sine Wave



Wavelet (db10)

小波是具有有限区间和均值为零的波



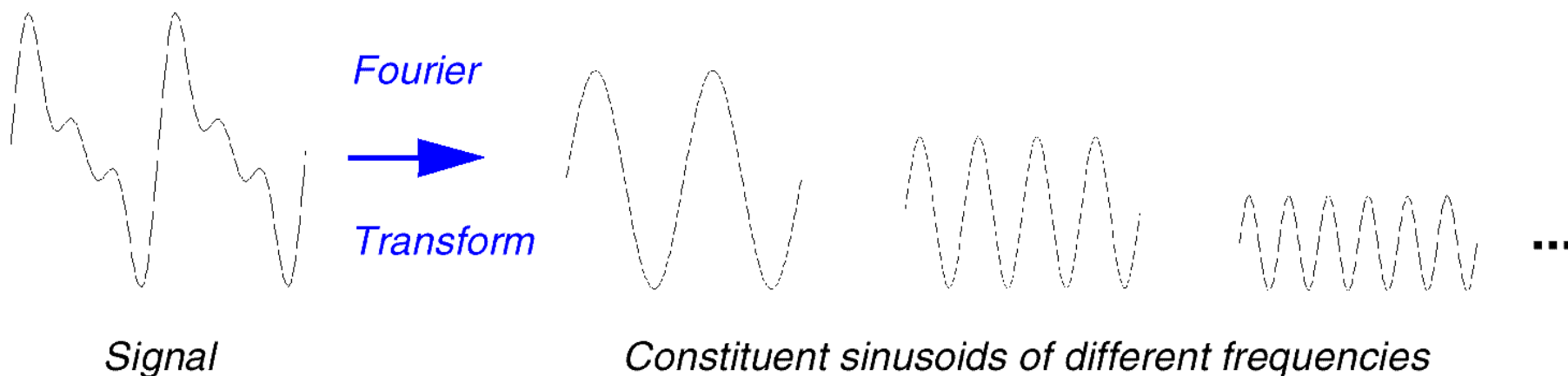
## 其他变换——小波变换

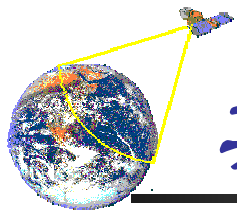
### ■ 从傅里叶变换到小波变换 (wavelet transforms)

#### ➤ 傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

- ✓ 意味着信号在所有时间区间与复指数相乘，结果产生傅里叶系数  $F(\omega)$
- ✓ 按照傅里叶系数，可将原信号分解为不同频率的组合



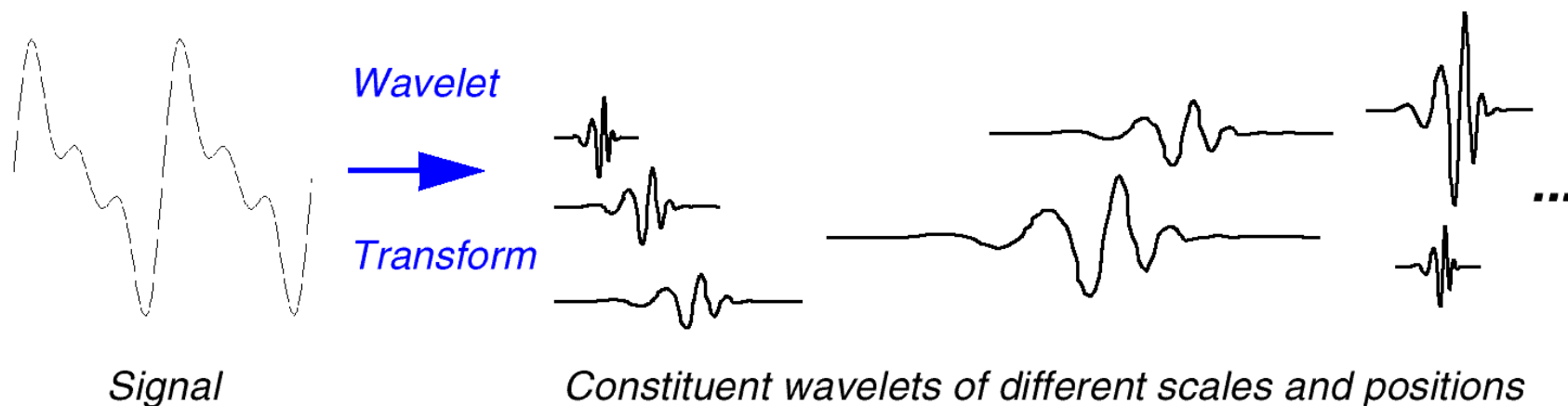


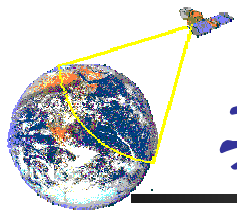
## 其他变换—小波变换

### ■ 从傅里叶变换到小波变换（续）

#### ➤ 小波变换

- ✓ 结果产生小波变换系数
- ✓ 按照小波系数，原始信号分解为不同小波的组合





## 其他变换—小波变换

### ■ 从傅里叶变换到小波变换（续）

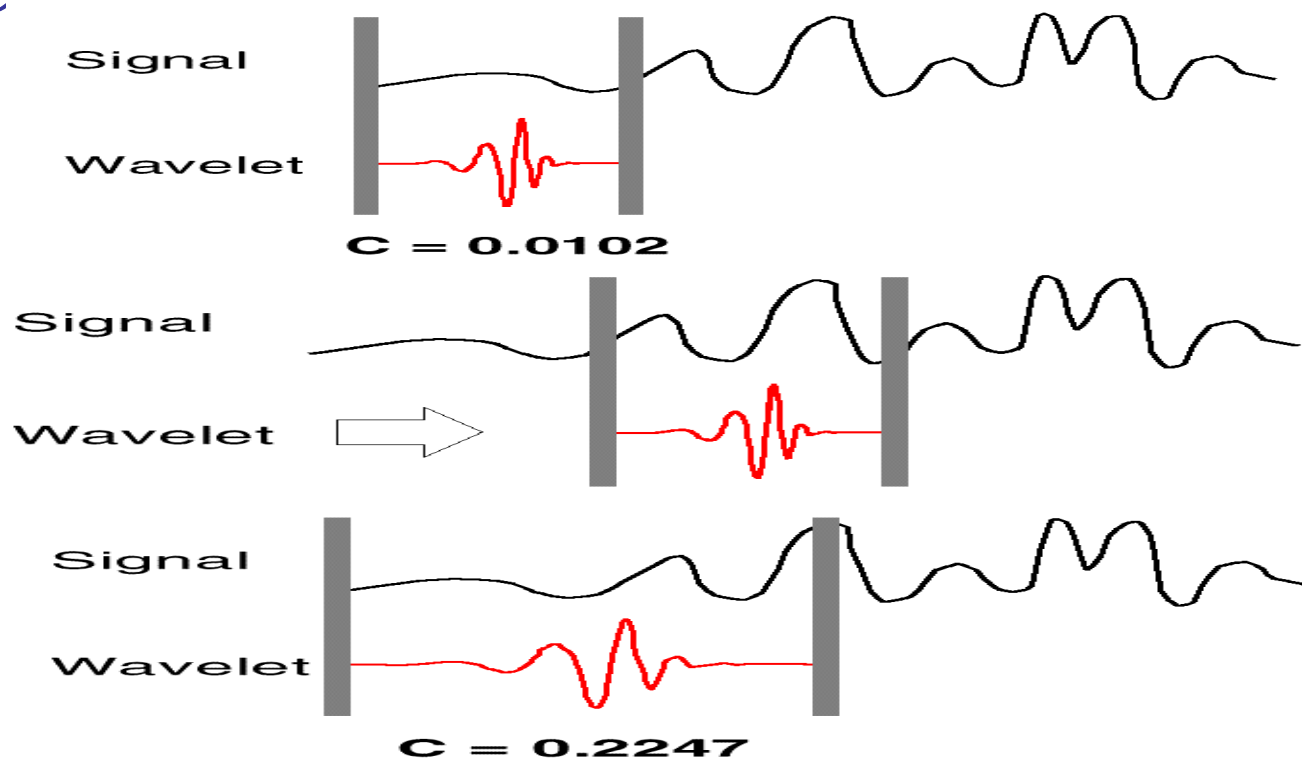
#### ➤ 小波变换步骤·

第一步

第二步

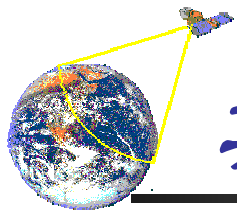
第三步

第四步



第五步：对所有尺度的小波重复一至四步





## 其他变换——小波变换

### ■ 连续小波变换

#### ➤ 基本小波

- ✓ 基本小波是一具有特殊性质的实值函数，它是震荡衰减的，而且通常衰减得很快，在数学上满足积分为零的条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

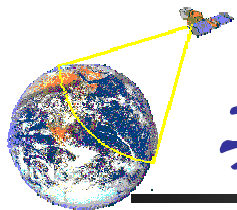
- ✓ 同时其频谱

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$$

- ✓ 满足条件：

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

两个条件可概括为：**小波应是一个具有振荡性和迅速衰减的波**



## 其他变换——小波变换

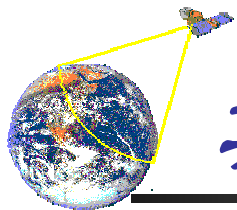
### ■ 连续小波变换（续）

#### ➤ 小波基函数

- ✓ 通过对基本小波进行尺度上的伸缩和位置上的移动，可形成一系列小波函数——**小波基函数**
- ✓ 一组小波基函数是通过尺度因子和位移因子由基本小波来产生：

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中：a - 尺度系数（伸缩系数）； b - 位移系数



## 其他变换——小波变换

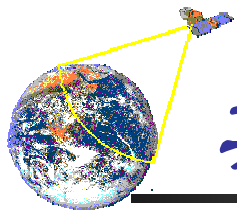
### ■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换定义（又称之为积分小波变换）：

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned}$$

➤ 连续小波变换的逆变换为：

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$



## 其他变换——小波变换

### ■ 连续小波变换（续）

#### ➤ 连续小波变换的深入讨论

✓ 观察 $L^2$ 空间的内积函数

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t) g^*(t) dt$$

✓ 以及互相关函数

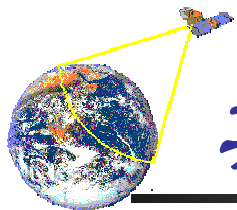
$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \\ &= \langle x(t), y(t - \tau) \rangle \end{aligned}$$

✓ 可有

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \langle x(t), \psi(a, b) \rangle \\ &= \langle x(t), \psi_{a,0}(t - b) \rangle = R_{x, \psi_{a,0}}(b) \end{aligned}$$

➤  $W(a, b)$  是信号 $x(t)$ 与小波基本函数在尺度因子 $a$ 和位移因子 $b$ 时的互相关函数

➤ 如果信号在特定的尺度因子 $a$ 和位移因子 $b$ 下与基本小波函数具有较大的相关性（相似性），则 $W(a, b)$ 值将较大



## 其他变换——小波变换

### ■ 连续小波变换（续）

#### ➤ 连续小波变换的深入讨论（续）

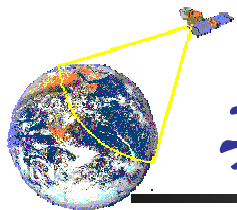
✓ 回忆线性系统输入输出关系

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

✓ 观察

$$W(a, b) = x(b) * \psi_{a,0}^*(-b)$$

- 对于任意给定的尺度因子 $a$ （频率 $\sim 1/a$ ），小波变换 $W(a, b)$ 为输入信号作用于具有响应函数 $\psi_{a,0}^*(-b)$ 的滤波器输出；
- 小波变换定义了一组由尺度因子 $a$ 规范的连续滤波器组



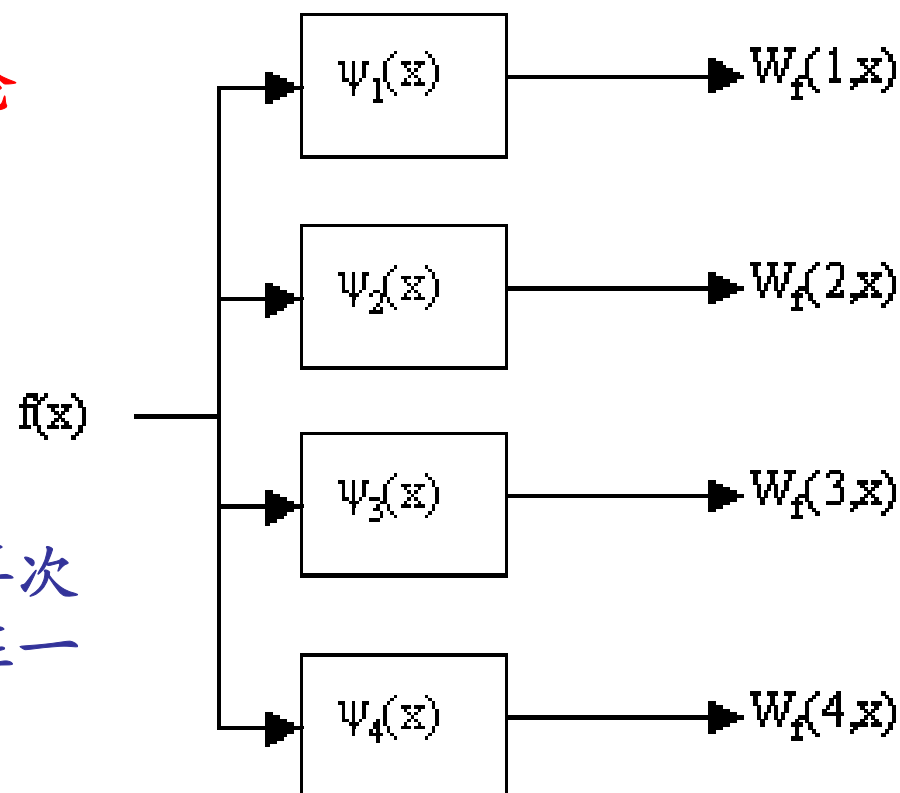
## 其他变换——小波变换

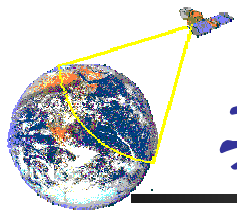
### ■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换的深入讨论  
（续）

➤ 小波变换的滤波器解释

➤ 每个滤波器的输出分量再次滤波并适当伸缩后组合在一起可重构 $f(x)$ 。



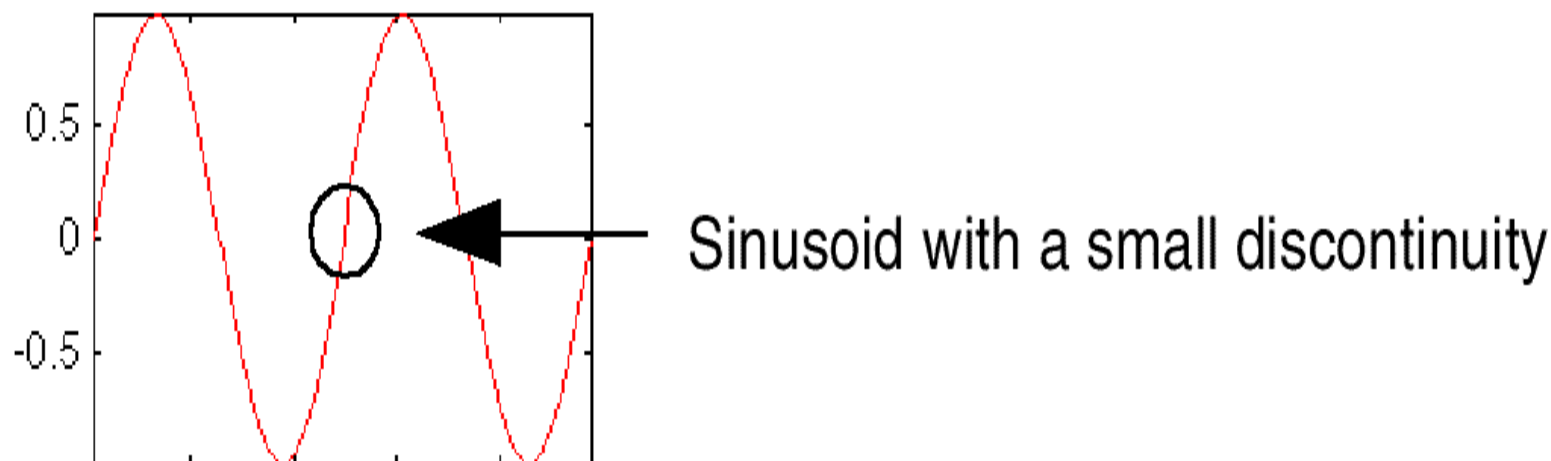


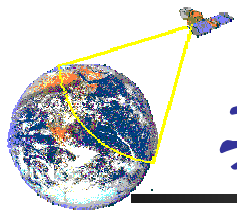
## 其他变换——小波变换

### ■ 连续小波变换（续）

#### ➤ 连续小波变换的深入讨论（续）

- ✓ 与傅里叶变换的比较
- ✓ 例：对于具有微小间断的正弦波

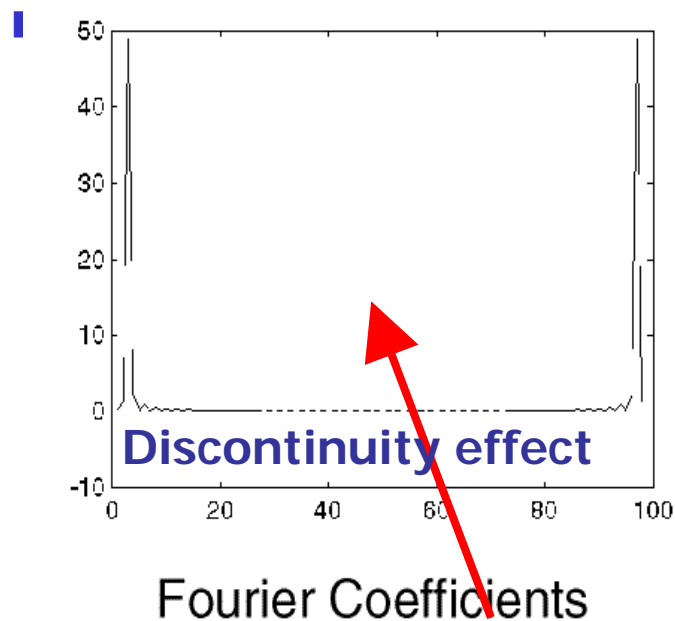




## 其他变换—小波变换

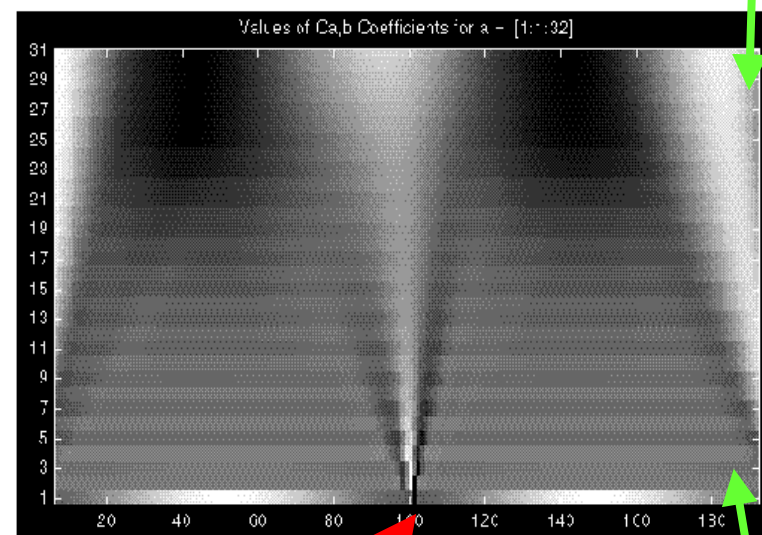
### ■ 连续小波变换（续）

#### ➤ 连续小波变换的深入讨论（续）



**NOTHING!**

scale



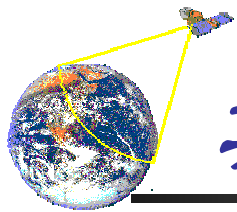
time

Wavelet Coefficients

High frequency

在时间轴上准确给出间断点.

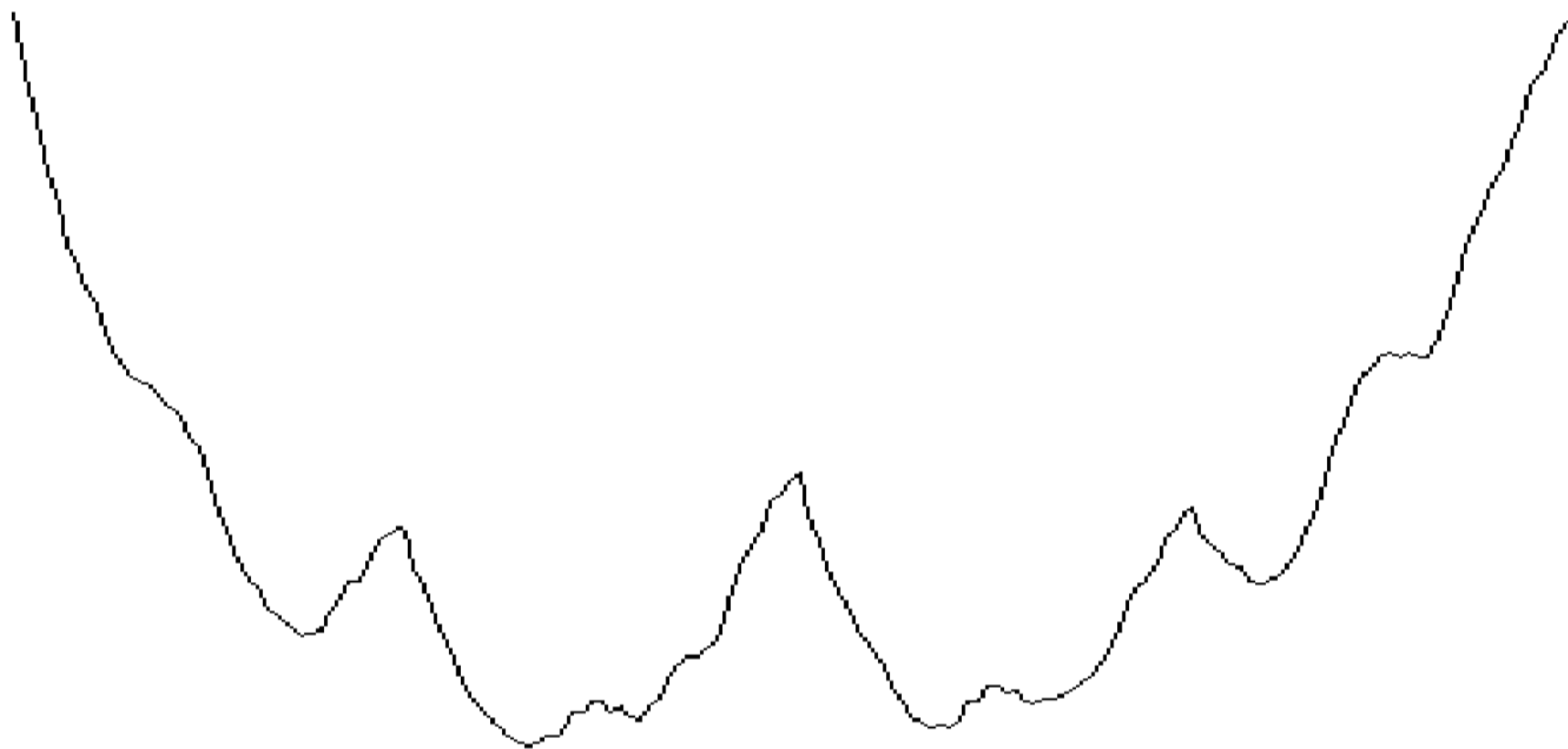


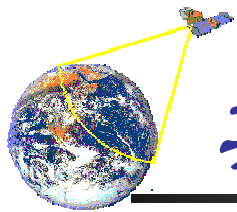


## 其他变换——小波变换

### ■ 连续小波变换（续）

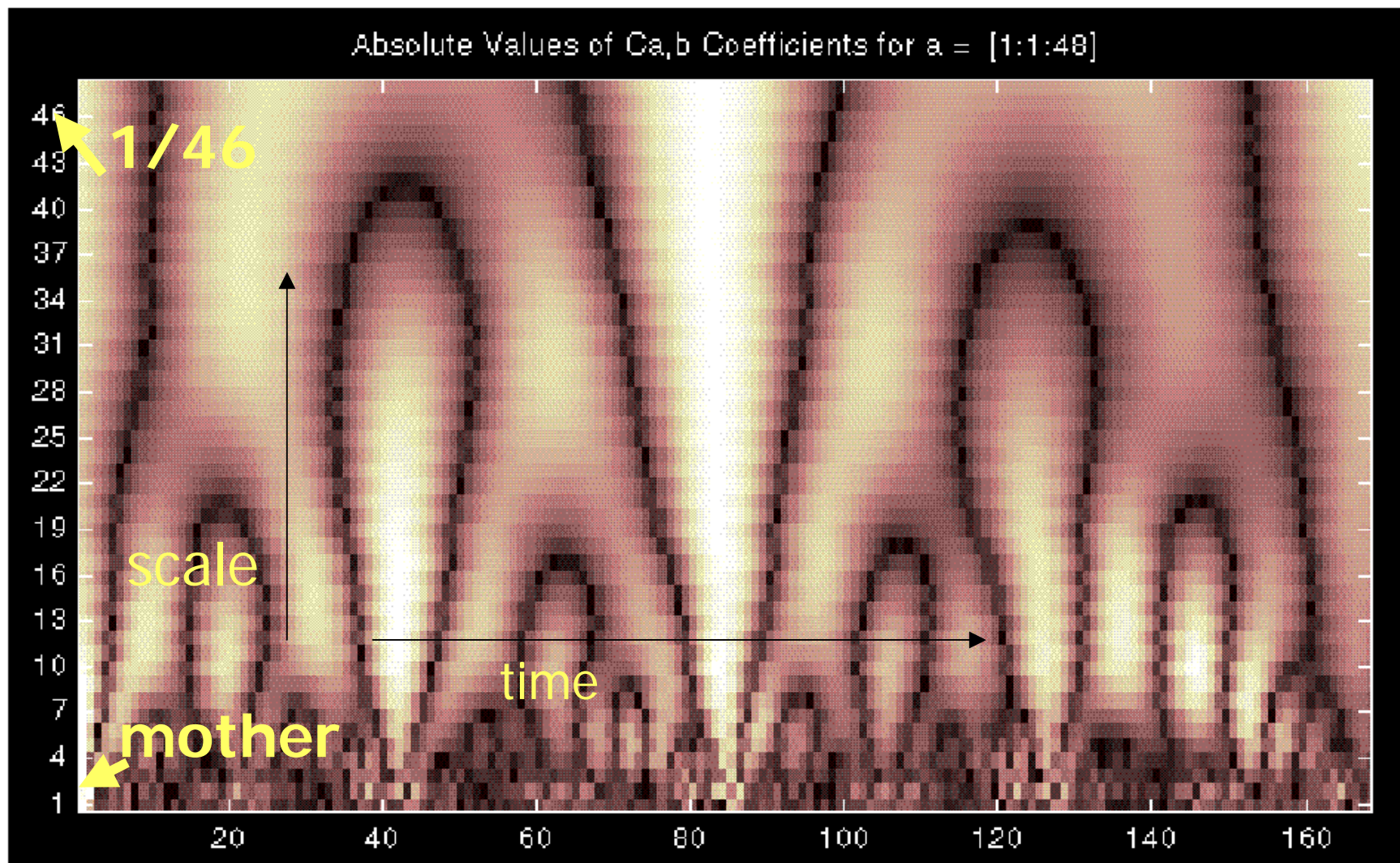
#### ➤ 小波变换实例——月球表面模拟曲线

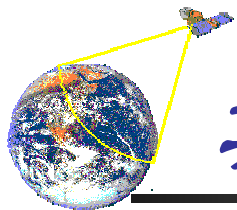




## 其他变换—小波变换

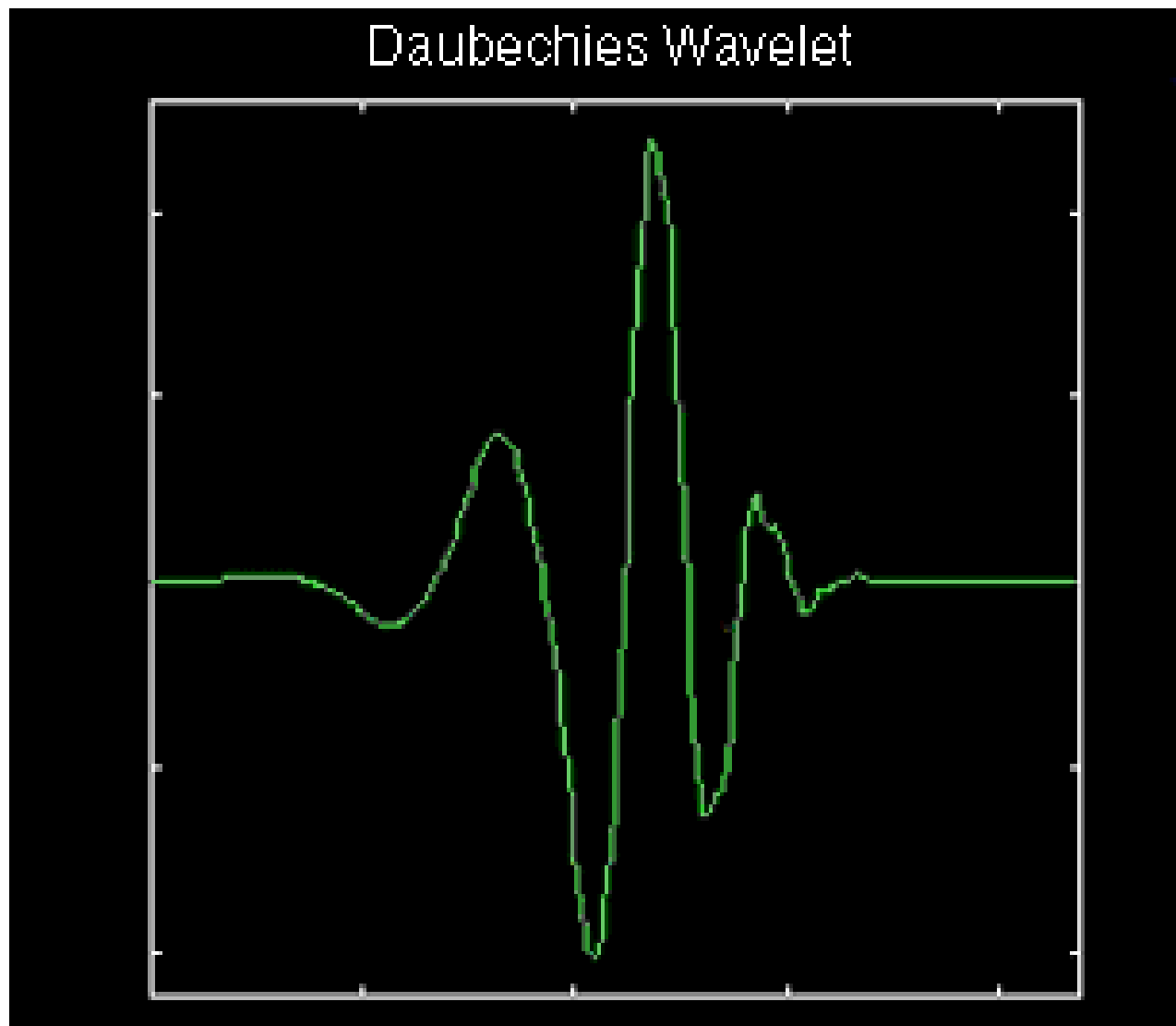
### ➤ 月球表面模拟曲线的小波变换

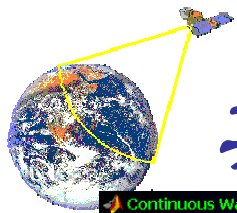




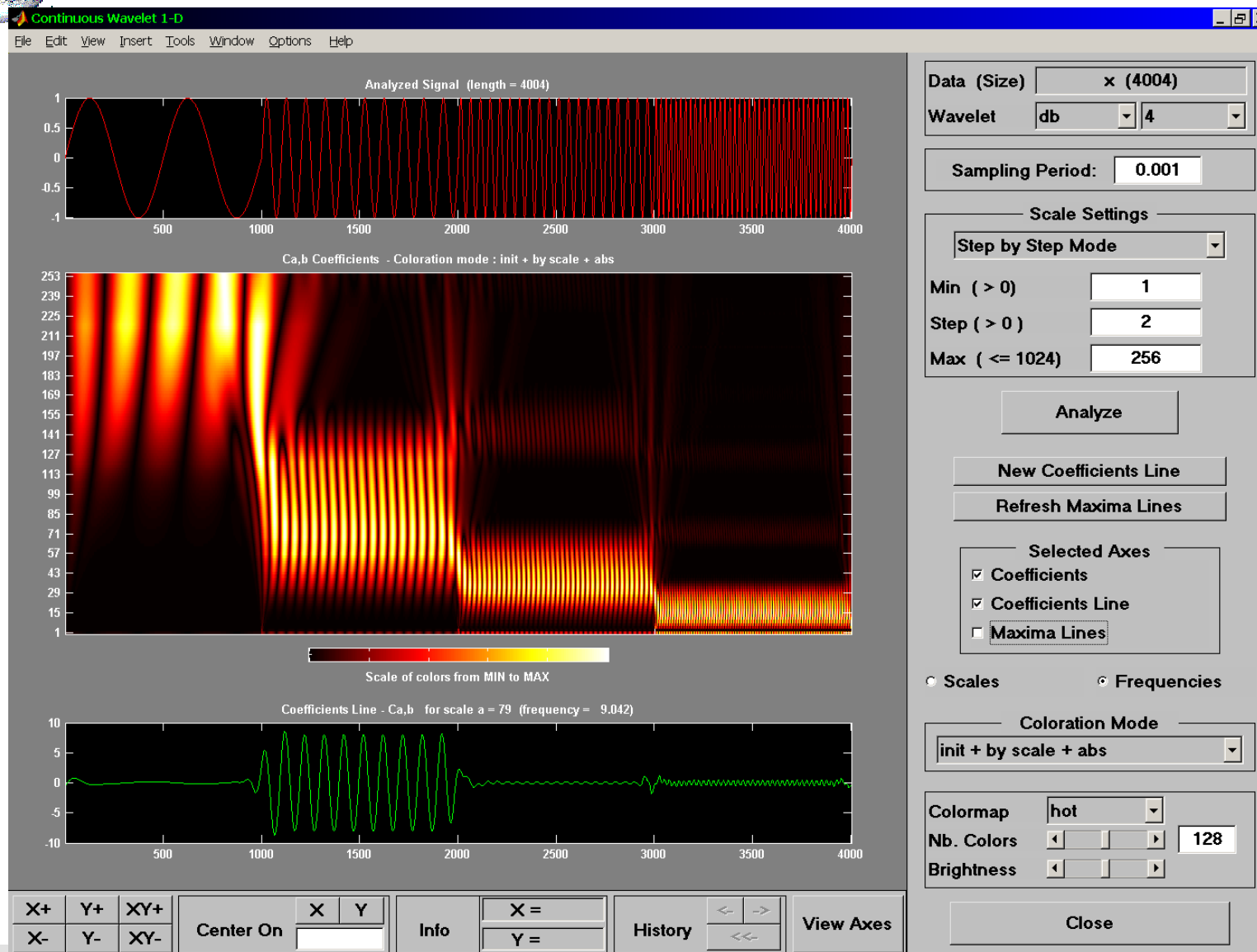
## 其他变换——小波变换

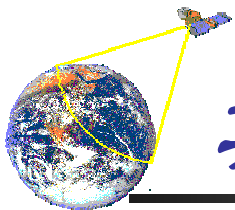
- 几种典型的一维小波
  - Mexican Hat Wavelet
  - Haar Wavelet
  - Morlet Wavelet
  - Daubechies



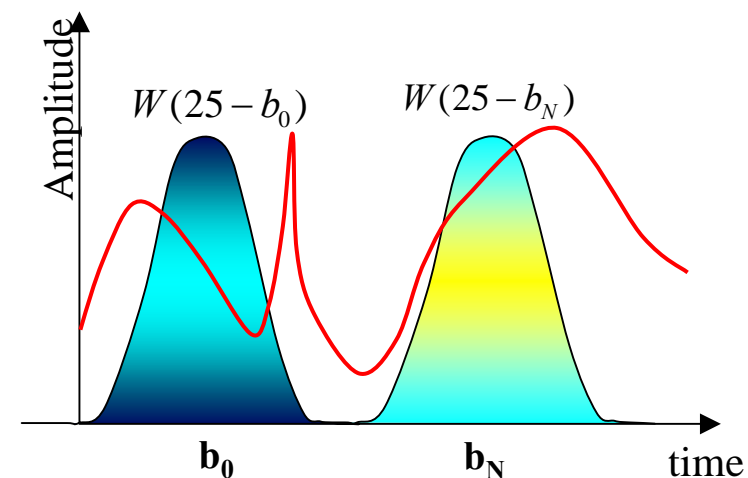
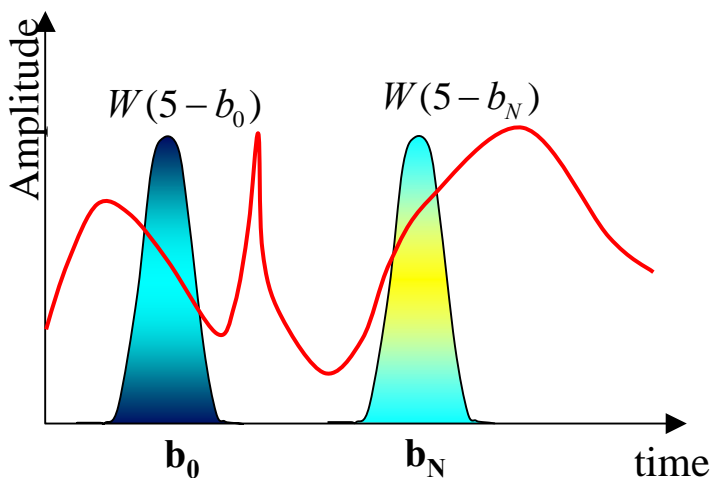
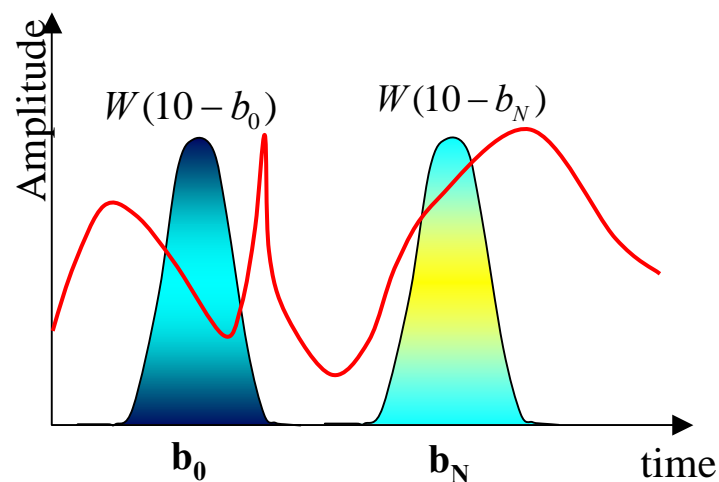
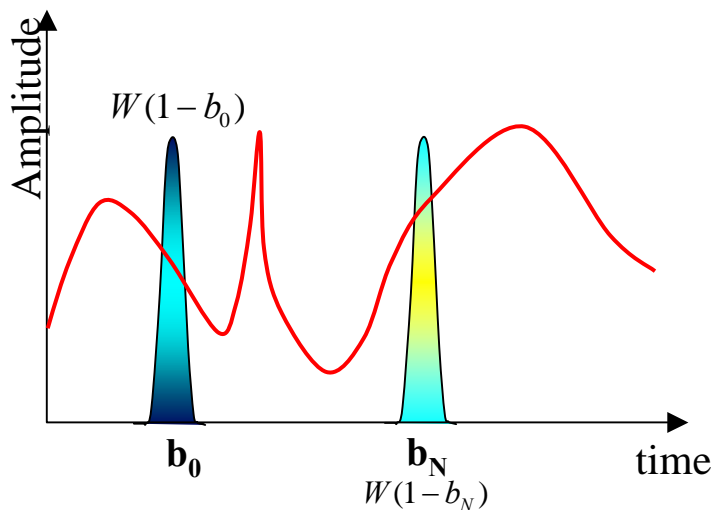


# 其他变换—小波变换

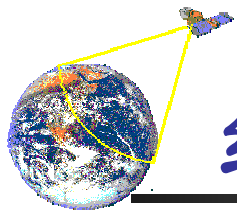




## 其他变换—小波变换



### 小波变换实例



结束

# 第四章 (2)

## 结束