数字图像处理与分析

第四章 图像处理中的正交变换3

刘定生

中科院中国遥感卫星地面站

2005年春季学期

其他变换——小波变换

- 连续小波变换
  - 基本小波——一个具有振荡性和迅速衰减的波
  - 小波基函数

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

  - a－尺度系数（伸缩系数）；b－位移系数

其他变换——小波变换

- 连续小波变换
  - 连续小波变换定义（又称之为积分小波变换）：

$$W_f(a,b)=\langle f,\psi_{a,b}(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi_{a,b}(t)dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

  - 连续小波变换的逆变换:

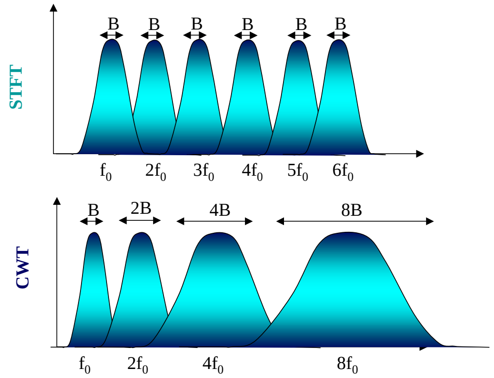
$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(a,b)\psi_{a,b}(t)db\,\frac{da}{a^2}$$

其他变换——小波变换

- 连续小波变换
  - W(a, b)是信号x(t)与小波基本函数在尺度因子a和位移因子b时的互相关函数
  - 如果信号在特定的尺度因子a和位移因子b下与基本小波函数具有较大的相关性（相似性），则W(a, b)值将较大
  - 对于任意给定的尺度因子a（频率~ **1/a**），小波变换W(a, b)为输入信号作用于具有响应函数 $\psi^*_{a,0}(-b)$ 的滤波器输出；
  - 小波变换定义了一组由尺度因子a规范的连续滤波器组

其他变换——小波变换

- 小波变换与STFT的基本区别



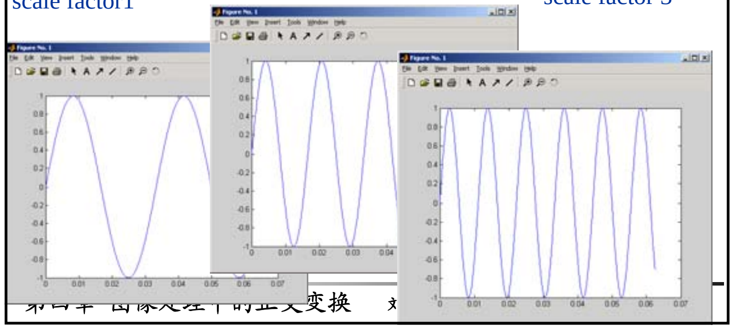
其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析
  - 尺度（Scaling）—小波的“尺度”变化意味着对小波进行“拉伸”或“压缩”

f(t) = sin(t)
scale factor1

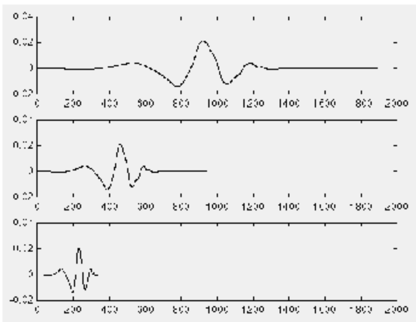
f(t) = sin(2t)
scale factor 2

f(t) = sin(3t)
scale factor 3



其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）
  - 尺度—某种程度上类似于频率：频率～1/a



$f(t) = \psi(t)$; $a = 1$

$f(t) = \psi(2t)$; $a = \frac{1}{2}$

$f(t) = \psi(4t)$; $a = \frac{1}{4}$

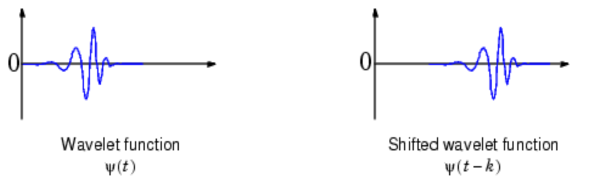
其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）
  - 尺度与频率
    - ✓ 大尺度对应于“展开”的小波，小波展开越大，该小波表征的信号特征就越粗糙（平滑）

- ✓ 小尺度a：对应于压缩的小波；可表征更好的细节（变化）：高频率
- ✓ 大尺度a：对应于展开的小波；表征粗糙部分（慢变化）：低频率

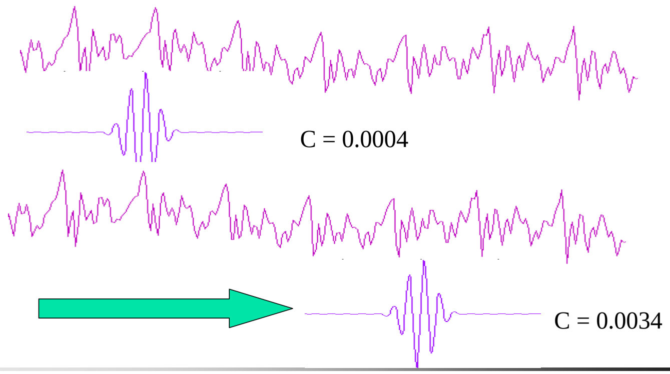
其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）
  - 位移（Shifting）——延迟或加速小波
  - 数学上，延迟一个函数f(t)表示为f(t-k)



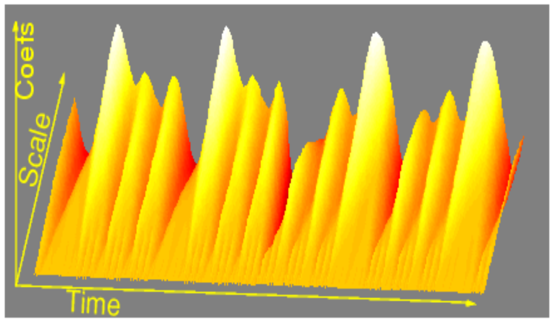
其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）



其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）
  - 小波变换系数分布图



其他变换——小波变换

- 小波变换的基本性质
  - 线性——小波变换是线性变换

$$f(t)=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$$

$$W_f(a,b)=\alpha W_{f_1}(a,b)+\beta W_{f_2}(a,b)$$

  - 平移和伸缩的共变性

$$f(a_0 t)\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}W_f(a_0 a,a_0 b)$$

  - 冗余性：连续小波变换中存在信息表述的冗余度
    - 其表现是由连续小波变换恢复原信号的重构公式不是唯一的，小波变换的核函数存在许多可能的选择
    - 尽管冗余的存在可以提高信号重建时计算的稳定性，但增加了分析和解释小波变换的结果的困难

其他变换——小波变换

- 离散小波变换
  - 连续小波变换中，尺度系数和平移系数连续取值，将产生巨大的计算量，主要用于理论分析
  - 仅取尺度与位置的某些离散量，采用离散化的尺度及位移因子，可大量减少计算量，形成离散小波变换
    - ✓令 $a = a_0^m$; $b = nb_0a_0^m$; $a_0 > 1, b_0 \neq 0$; m,n为整数系列
    - ✓可有离散小波基函数：

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{t - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-\frac{m}{2}}\psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

    - ✓及离散小波变换：

$$< f, \psi_{m,n} > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{m,n}(t)dt = a_0^{-\frac{m}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(a_0^{-m}t - nb_0)dt$$

其他变换——小波变换

- 二进小波变换
  - 若基于2的幂次方选择二进伸缩和二进位移（以2的因子伸缩和平移）构成基函数，即

$$a_0 = 2;\ \ b_0 = 1;$$

  - 则形成二进小波

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t - n2^m}{2^m}\right) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t - n)$$

其他变换——小波变换

- 二进正交小波变换
  - 满足下列条件的二进小波（正交性条件）

$$<\psi_{m,n}, \psi_{j,k}> = \delta_{m,j}\delta_{n,k} \quad (Kronecker\ \delta\ \ \text{函数})$$

$$= \begin{cases} 1 & m = j, n = k \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

  - 为二进正交小波。

其他变换——小波变换

- 二进正交小波变换
  - 由二进正交小波可得到信号的任意精度的近似表示：

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n}\psi_{m,n}(t)$$

  - 其中变换系数：

$$c_{m,n} = < f(t), \psi_{m,n}(t) > = 2^{-m/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^{-m}x - n)dt$$

  - 为小波级数展开式

其他变换——小波变换

- 紧支（Compact）二进小波变换
  - 进一步把 *f(t)* 和基本小波限制为在[0，1]区间外为零的函数时，上述正交小波函数族就成为紧支二进小波函数族，它可以用单一的索引**n**来确定：

$$\psi_n(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)$$

  - 其中***j,k*** 是***n*** 的如下函数：

$$n = 2^j + k; \quad j = 0,1,\ldots; \quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1$$

  - 对于任意***n***，***j***是满足$2^j \leqslant n$的最大整数，而***k=n-*** 2^j

其他变换——小波变换

- 紧支二进小波（续）
  - 相应的逆变换

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad 假定\psi_0(x) = 1$$

  - 变换系数为：

$$c_n = <f(x), \psi_n(x)> = 2^{-j/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(2^{-j}x-k)dx$$

  - 由此，一个连续函数可由一个单无限序列表示，积分小波变换中极大的冗余性消失

其他变换——小波变换

- 快速小波变换算法（**FWT**，**Mallat**算法）
  - 回忆线性系统输出表达式

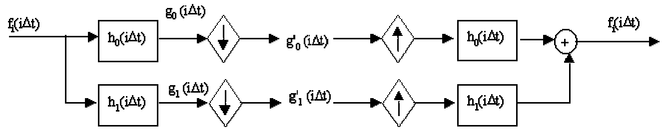
$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \\ &= \sum_{k=1}^{N} x[k]\cdot h[n-k] \\ &= \sum_{k=1}^{N} h[k]\cdot x[n-k] \end{aligned}$$

  - 系统输出相当于对输入信号的滤波

其他变换——小波变换

- 快速小波变换算法（续）
  - 对滤波器进行分解，形成一对共轭正交滤波器组，可使下述分解与重构后的信号与原始信号完全相同



  - 两个滤波器必须满足条件

$$H_0^2(s) + H_1^2(s) = 1, \quad 0 \le |s| \le s_N$$

其他变换——小波变换

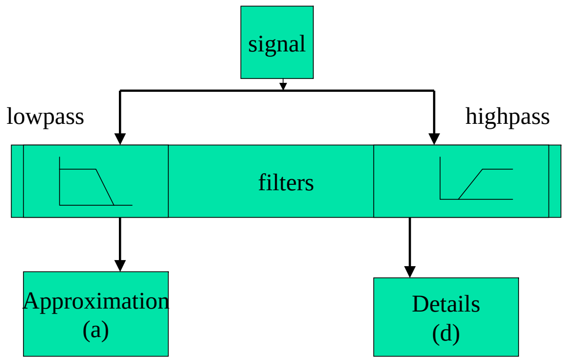
- 快速小波变换算法（续）
  - 假定$H_0(s)$为小波变换中使用的具有平滑边沿的低通滤波函数，则$H_1(s)$相应为：

$$H_1^2(s) = 1 - H_0^2(s)$$

  - 信号通过$H_0(s)$和$H_1(s)$后，相当于分解为信号的低频部分g_0（粗分量、平滑部分），与高频部分g_1（细分量、细节部分）
  - 不断的对分解滤波后的低频部分再进行分解滤波，由此得到一系列对原始信号不同部分进行描述的高频分量（细节描述分量）
  - 形成FWT算法的基本思想
  - 设计一个离散小波变换的核心，就是精心选择低通滤波器$H_0(s)$

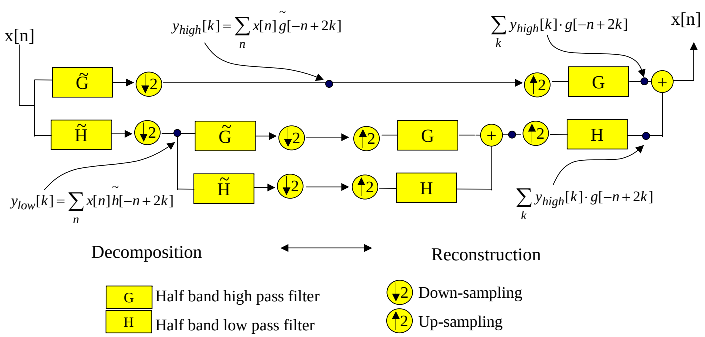
其他变换——小波变换

- 快速小波变换算法（续）



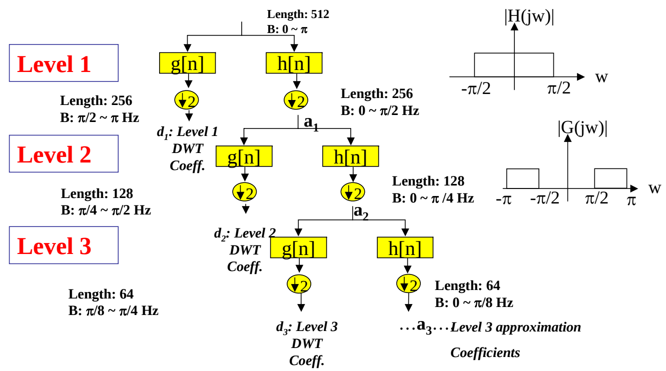
其他变换——小波变换

- 快速小波变换算法（续）



其他变换——小波变换

- 快速小波变换算法（续）



其他变换——小波变换

- 尺度向量和尺度函数
  - 为构造一个离散小波变换，仅需选择一个满足某些条件的离散低通滤波器$H_0(s)$，假定其脉冲响应为$h_0(k)$，*该脉冲响应称之为尺度向量*
  - 由$h_0(k)$又可产生一个函数$\varphi(t)$，称之为尺度函数

$$\varphi(t)=\sum_k h_0(k)\varphi(2t-k)$$

其他变换——小波变换

- 尺度向量和尺度函数
  - 进一步，定义一个称之为小波向量的离散高通脉冲响应

$$h_1(k)=(-1)^k h_0(-k+1)$$

  - 由此可从尺度函数导出基本小波

$$\psi(t)=\sum_k h_1(k)\varphi(2t-k)$$

  - 进而得到正交小波集

$$\psi_{m,n}=2^{m/2}\psi(2^m t-n)$$

  - 通常情况下，尺度函数是构造小波的必经之路

其他变换——小波变换

- 尺度函数的官方定义
  - 尺度函数具有形式 $\varphi_{j,k}(t)=2^{j/2}\varphi(2^j t-k)$
  - 基本特性

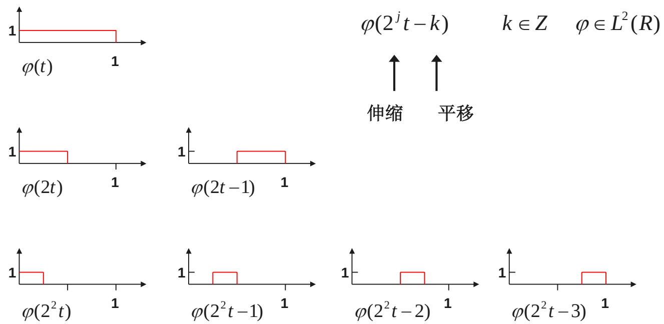
1） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1$ 式中 $\varphi(t)=\varphi_{0,0}(t)$

2） $\|\varphi(t)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2 dt=1$

3） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{j,k}(t)\varphi_{j',k'}(t)=0$ 平移的正交性

其他变换——小波变换

- 尺度函数的初步讨论—平移和伸缩（非归一化）

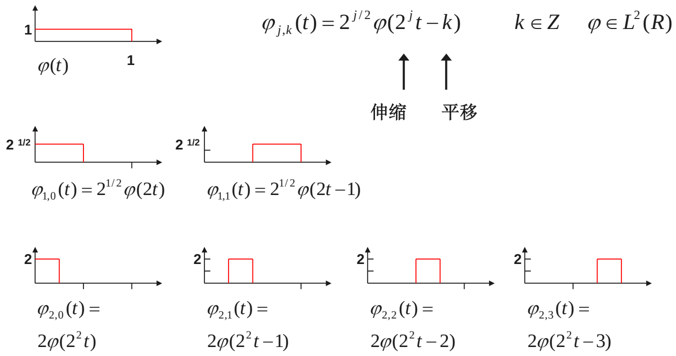


其他变换——小波变换

- 尺度函数的初步讨论—平移和伸缩（归一化）

$$\varphi_{j,k}(t)=2^{j/2}\varphi(2^{j}t-k) \qquad k\in Z \qquad \varphi\in L^2(R)$$

伸缩　平移

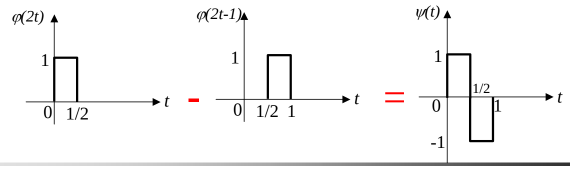


其他变换——小波变换

- 尺度函数的初步讨论
  - 通过尺度函数，可方便地导出基本小波

$$\psi(t)=\sum_k h_1(k)\varphi(2t-k)$$

$$\psi(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1/2\\ -1, & 1/2\le t\le 1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$



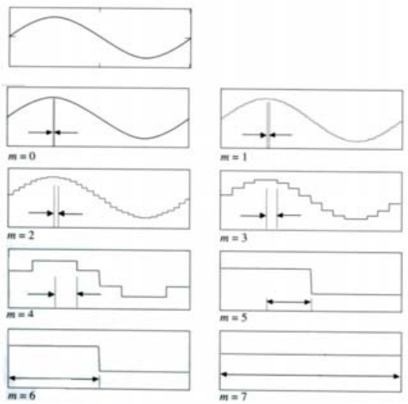
其他变换——小波变换

- 尺度函数的初步讨论
  - 由简单尺度函数，可逼近表示任意连续函数

$$f_j(t)=\frac{1}{2^j}\int_{2^j k}^{2^j(k+1)} f(\tau)\,d\tau$$

$$2^j k\le t\le 2^j k+2^j$$
$$j,k\in Z$$

$$\lim_{j\to-\infty} f_j(t)=f(t)$$
$$\lim_{j\to\infty} f_j(t)=0$$



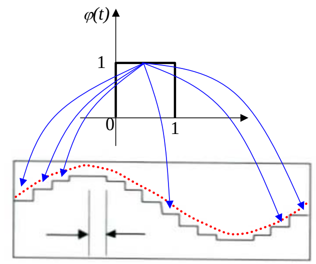
其他变换——小波变换

- 尺度函数的初步讨论
  - 既通过简单尺度函数φ(t)的伸缩与平移，逼近表示任意函数

$$f_j(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(j,k)\cdot\varphi(2^{-j}t-k)$$

$$a(j,k)=f_j(t)=\frac{1}{2^j}\int_{2^j k}^{2^j(k+1)} f(\tau)\,d\tau$$

近似表示系数



其他变换——小波变换

- 尺度函数的进一步讨论
  - 一般情况下，对任意尺度函数，任意函数x(t)的近似表示系数均可有：

$$a(j,k)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\varphi_{j,k}(t)dt \qquad j,k\in Z$$

  - 在特定的尺度j下，任意函数x(t)的近似表示则为：

$$f_j(t)=x_j(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(j,k)\cdot\varphi_{j,k}(t)$$

  - 以及有：$j\rightarrow-\infty \Rightarrow\Rightarrow x_j(t)\rightarrow x(t)$

其他变换——小波变换

- 尺度函数的进一步讨论
  - 对于任意函数x(t)的近似表示，其误差g为：

$$\cdots$$
$$g_{j-1}(t)=f_{j-2}(t)-f_{j-1}(t)$$
$$\cdots$$
$$g_0(t)=f_{-1}(t)-f_0(t)$$
$$\cdots \qquad (f_{-\infty}=0)$$

  - 同样，由误差系列可恢复任意函数：

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}g_j(t)$$

  - f_j是$f(x)$的一种近似描述，相当于$f(x)$的粗分量；相对应的，误差g则表示的是近似表示所忽略的细节，因此亦称之为任意函数的细节表示分量

其他变换——小波变换

- 尺度函数的进一步讨论
  - 类似于通过尺度函数获得任意函数的近似表示分量，细节表示分量亦可由小波基函数获得

$$W(a,b)\cong\int x(t)\cdot\psi_{j,k}^{*}(t)dt = d_{j,k}$$

$$g_j(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{j,k}\cdot\psi\left(2^{-j}t-k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{j,k}\cdot\psi_{j,k}$$

  - 由此，可得小波变换系数重建任意函数的表示式：

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}g_j(t)$$

$$f(t)=x(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d(j,k)\cdot\psi_{j,k}(t)$$

其他变换——小波变换

- 尺度函数的进一步讨论
  - 或者得到从任意尺度重建任意函数的表示式：

$$f(t)=x(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{j_0,k}\cdot\varphi_{j_0,k}+\sum_{j=-\infty}^{j_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d(j,k)\cdot\psi_{j,k}(t)$$

Approximation coefficients at scale j_0 — Smoothed, scaling-function-dependent approximation of x(t) at scale j_0

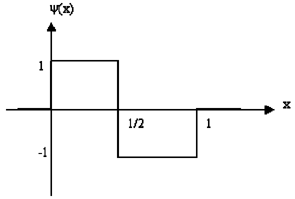
Detail coefficients at scale j_0 and below — Wavelet-function-dependent details of x(t) at scales j_0 and below

可有结论：尺度函数对应于任意函数的平滑部分（近似表示部分、粗分量）；小波基函数对应于任意函数的细节部分（细节描述部分、细分量）

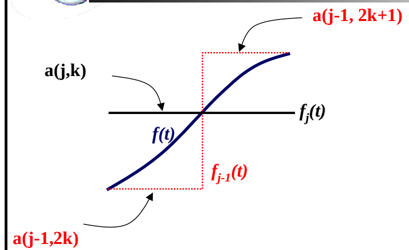
其他变换——小波变换

- 小波变换实例——Haar小波变换
  - Haar变换是紧支、二进、正交归一化小波变换最早的实例之一
  - Haar基本函数定义在区间 [0，1]上：

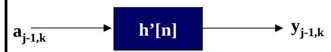
$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<0.5\\ -1 & 0.5\le x<1\\ 0 & Other\end{cases}$$



其他变换——小波变换



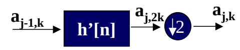
$$a_{j,k}=\frac{1}{2}[a(j-1,2k)+a(j-1,2k+1)]$$
$$=\frac{1}{2}[a_{j-1,2k}+a_{j-1,2k+1}]$$



$$h'[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]+\delta[n+1]]$$

$$y_{j-1,k}=\frac{1}{2}[a_{j-1,n}+a_{j-1,n+1}]$$

$$a_{j,k}=y_{j-1,2k}$$



Approx. coefficients at any level j can be obtained by filtering coef. at level j-1 (next finer level) by h'[n] and downsampling by 2

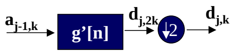
其他变换——小波变换

- 小波变换实例——Haar小波变换
  - 由此可得到
    - ✓ $a_{j,k}$可通过对$a_{j-1,k}$实行下述滤波

$$h'[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]+\delta[n+1]]$$

    - ✓ 再进行隔点抽样得到
    - ✓ 类似的，对$d_{j,k}$可通过对$a_{j-1,k}$采用滤波器g'[n]进行滤波并采样后得到

$$g'[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]-\delta[n+1]]$$

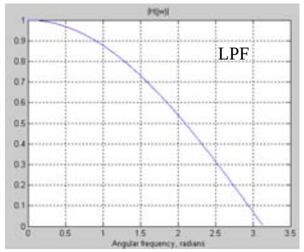


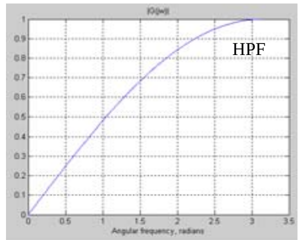
  - 这种方式在小波变换术语中称之为分解(decomposition)

其他变换——小波变换

- 小波变换实例——Haar小波变换
  - 考察h'[n]和g'[n]的傅里叶变换

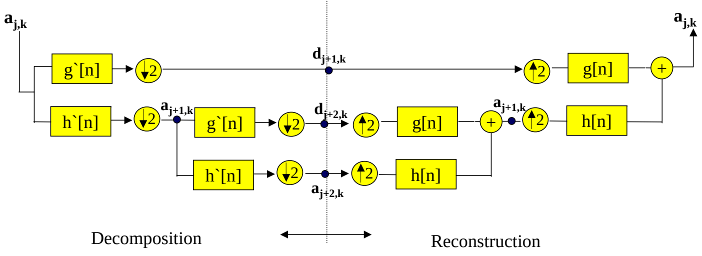
$$H'(j\omega)=e^{j\omega/2}\cos(\omega/2)$$
$$G'(j\omega)=-je^{j\omega/2}\cos(\omega/2)$$





其他变换——小波变换

- 小波变换实例—Haar小波变换
  - 由此得到Haar小波变换的计算流程

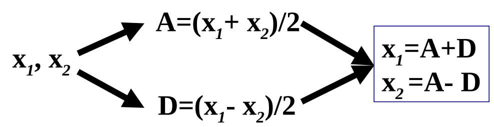


其他变换——小波变换

- 小波变换实例—Haar小波变换
  - 考察h'[n]和g'[n]的形式

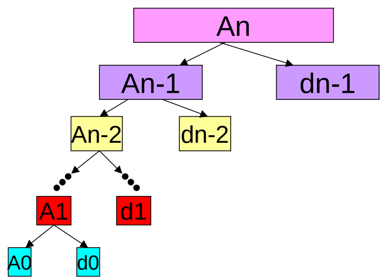
$$h'[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]+\delta[n+1]] \qquad g'[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]-\delta[n+1]]$$

  - 相当于对系列信号x_1, x_2，进行下述运算



其他变换——小波变换

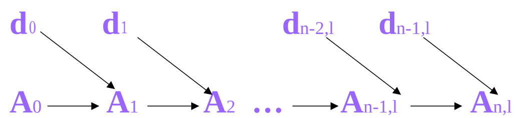
- 小波变换实例—Haar小波变换
  - 对"和"分量继续进行分解（对粗分量继续进行细化描述）



  - 由此形成另一种Haar变换计算流程

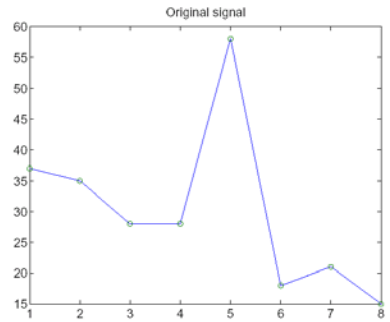
其他变换——小波变换

- 小波变换实例—Haar小波变换
  - 相应的重构过程为



其他变换——小波变换

- 小波变换实例—Haar小波变换
  - 信号系列：37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15



其他变换——小波变换

- Haar小波变换实例（续）
  - 小波分解:

37	35	28	28	58	18	21	15
36	28	38	18	1	0	20	3
32	28	4	10	1	0	20	3
30	2	4	10	1	0	20	3

Averaging	Differencing
(37+35)/2=36,	(37-35)/2=1
(28+28)/2=28,	(28-28)/2=0
(58+18)/2=38,	(58-18)/2=20
(21+15)/2=18	(21-15)/2=3

其他变换——小波变换

- Haar小波变换实例（续）
  - 原始信号：37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15
  - 信号重构（综合）：

30	2	4	10	1	0	20	3
32	28	4	10	1	0	20	3
36	28	38	18	1	0	20	3
37	35	28	28	58	18	21	15

30 + 2 = 32,　　　　30 – 2 = 28

其他变换——小波变换

- Haar小波变换实例（续）
  - 原始信号：37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15

Threshold = 2 :

37	35	28	28	58	18	21	15
30	2	4	10	1	0	20	3

其他变换——小波变换

- **Haar**小波变换实例（续）
  - 原始信号： **37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15**

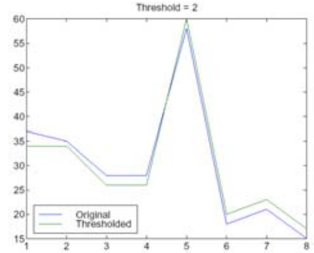
Threshold = 2 :

	37	35	28	28	58	18	21	15
Truncate!	30	X	4	10	X	0	20	3
	30	0	4	10	0	0	20	3
	30	30	4	10	0	0	20	3
	34	26	40	20	0	0	20	3
	34	34	26	26	60	20	23	17

其他变换——小波变换

- **Haar**小波变换实例（续）
  - **Threshold = 2 :**

37	35	28	28	58	18	21	15
34	34	26	26	60	20	23	17



其他变换——小波变换

- 二维小波变换
  - 二维连续小波定义

$$\psi_{a,b_x,b_y}(x,y)=\frac{1}{|a|}\psi\left(\frac{x-b_x}{a},\frac{y-b_y}{a}\right)$$

  - 二维连续小波变换

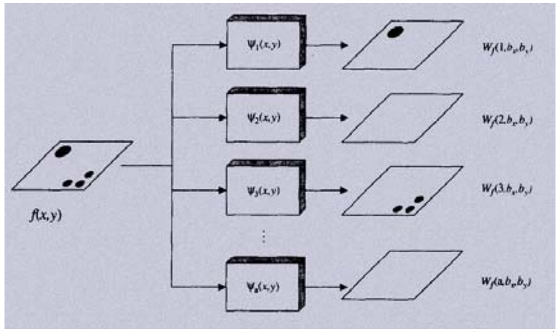
$$W_f(a,b_x,b_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\psi_{a,b_x,b_y}(x,y)dxdy$$

  - 二维连续小波逆变换

$$f(x,y)=\frac{1}{C_\psi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(a,b_x,b_y)\psi_{a,b_x,b_y}(x,y)db_x db_y\frac{da}{a^3}$$

其他变换——小波变换

- 二维小波变换的滤波器解释



- 每一滤波器都是一个二维冲激响应，输入是图象上的带通滤波器，滤波后的图象的叠层组成了小波变换

其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换
  - 二维尺度函数是可分离的情况下，将一维离散小波变换推广到二维可有多种的方式；假定

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y)$$

  - 以及

$$\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x); \quad \phi(y) \Leftrightarrow \psi(y)$$

  - 分别对x, y方向进行变换，可组合形成下述三个基本小波函数

$$\psi^1(x,y) = \phi(x)\psi(y)$$
$$\psi^2(x,y) = \psi(x)\phi(y)$$
$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

其他变换——小波变换

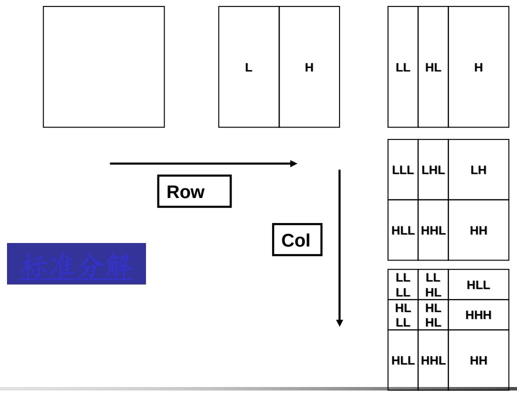
- 二维离散小波变换（续）
  - 由这些基本小波形成的小波函数集

$$\{\psi^l_{j,m,n}(x,y)\} = \{2^j\psi^l(x-2^jm, y-2^jn)\} \quad j \geq 0, l = 1,2,3$$

  - 为$L^2(R^2)$下的正交归一基
  - 这些二维基本小波函数集与二维尺度函数一起，建立了二维小波变换的基础
  - 按照Mallat算法的分解与重构方式，在二维可分离情况下，形成两种基本的二维离散分解算法（快速算法）
  - 标准分解—列分解完毕，再进行行方向分解
  - 非标准分解—每一级独立进行列行分解，整体上列行分解交叉进行

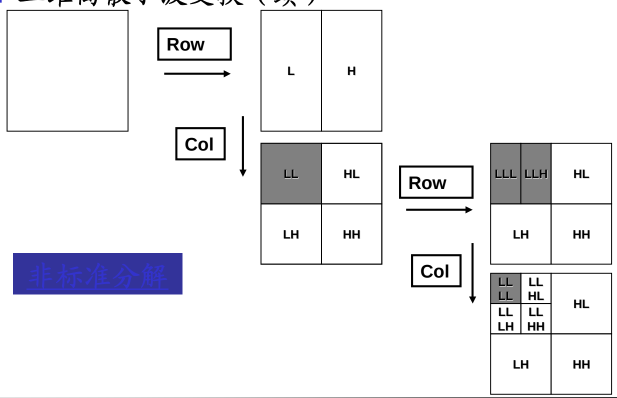
其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换（续）



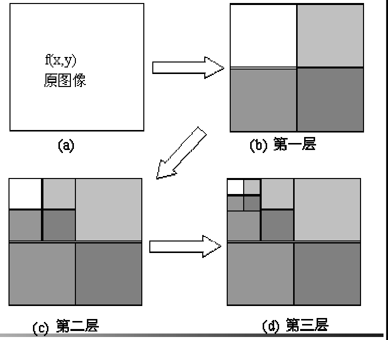
其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换（续）



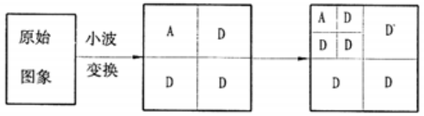
其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换（续）
  - 实用中，非标准分解方式讨论更为广泛
  - 与一维分解类似，可进行不同层次的分解

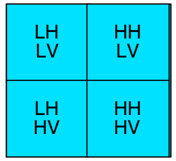


其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换（续）
  - 每一层次的分解，分别形成一个平滑子图（低频分量）和三个细节子图（高频分量）

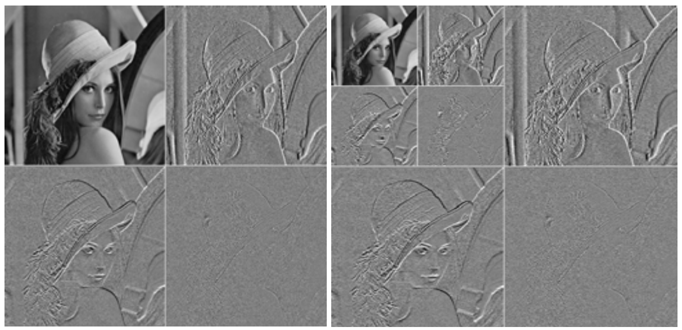


  - 深入考察二维小波基，细节子图又可进一步分解为垂直细节、水平细节的组合



其他变换——小波变换

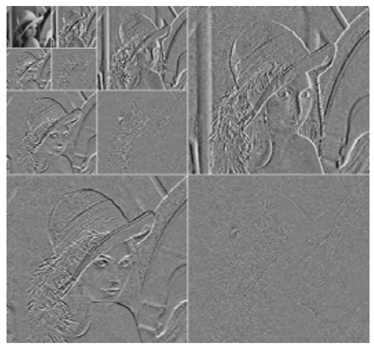
- 二维离散小波变换（续）



Level 1 Level 2

其他变换——小波变换

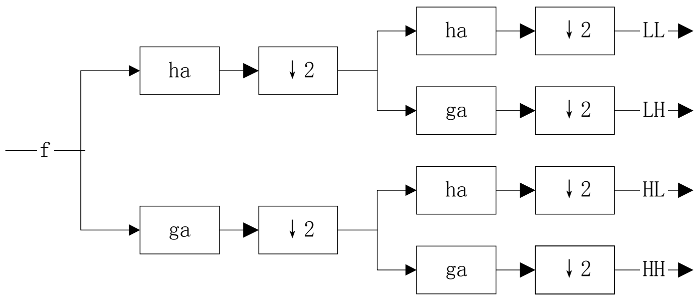
- 二维离散小波变换（续）



Level 3

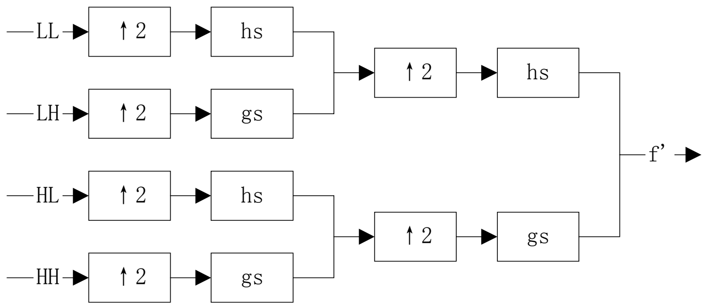
其他变换——小波变换

- 二维离散小波变换（续）
  - 分解步骤（金字塔变换）

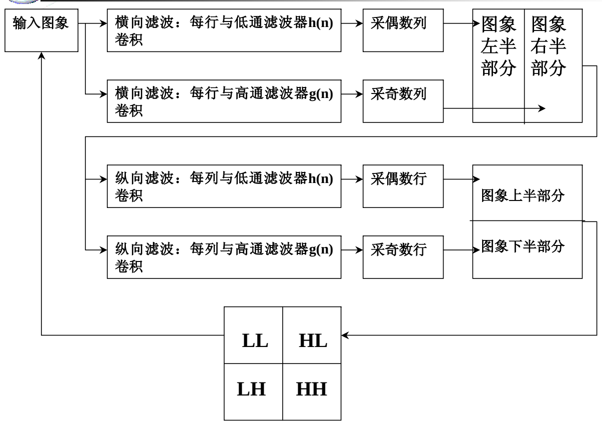


其他变换——小波变换

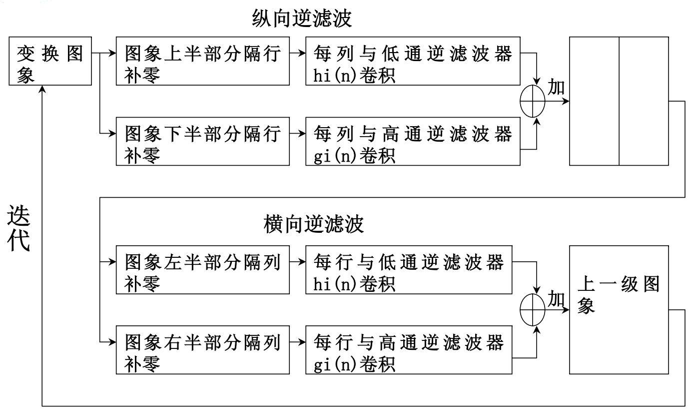
- 二维离散小波变换（续）
  - 重构过程



其他变换——小波变换



其他变换——小波变换



其他变换——小波变换

- 小波变换的应用
  - 在图像压缩中的应用
  - 在噪声滤波中的应用
  - 在图像融合中的应用

其他变换——小波变换

- 小波变换的不足
  - 正交小波基结构复杂
  - 具有紧支集的正交小波基不可能具有对称性，作为滤波器时将不具有线性相位，易于产生重构失真
- 进一步发展
  - 双正交小波理论的发展
  - 周期小波、多元小波、……
- 应用上的扩展
  - 非线性逼近
  - 统计信号处理

其他变换

- 习题
  - 阅读并使用Matlab小波变换工具，观察小波变换在不同尺度因子和位移因子下作用于任意信号的的效果
- 编程
  - 试编写一个小波变换程序，进行同上的变换试验，并比较与Matlab的结果

结束

第四章（3）
结束