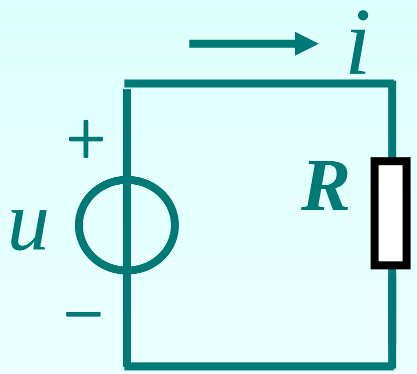
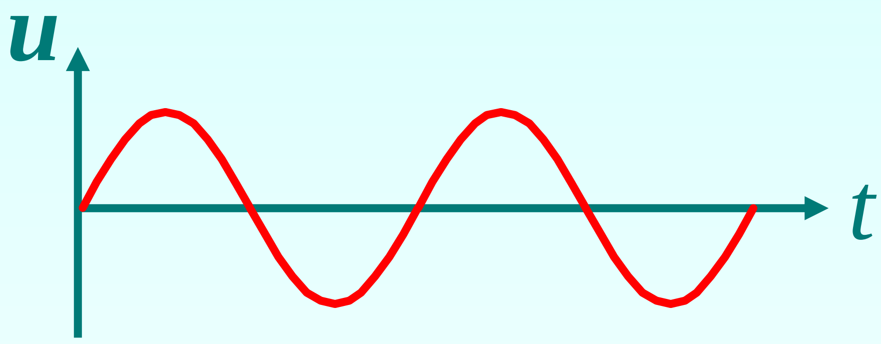
正弦稳态分析

线性动态电路在正弦电源激励下的响应。



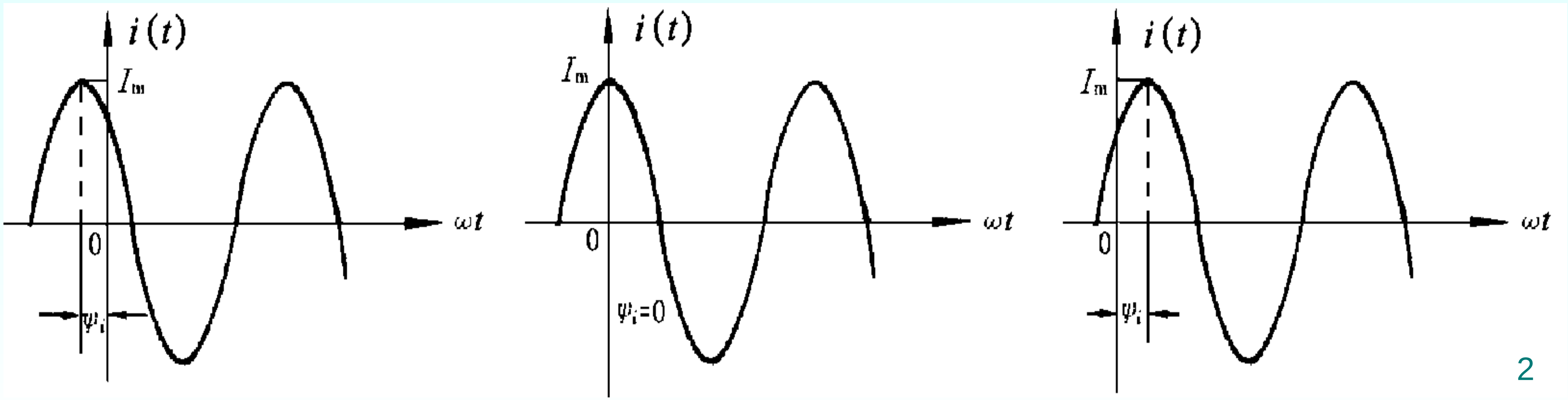


正弦电压和电流

一、正弦电压电流

按照正弦规律随时间变化的电压(或电流)称为正弦电压(或电流)，它是使用最广泛的一种交流电压(电流)，常称为交流电，用AC或ac表示。常用函数式和波形图表示正弦电压和电流，例如振幅为I_m,角频率为ω，初相位为ψ_i的正弦电流的函数表达式如式所示，其波形图如图所示。

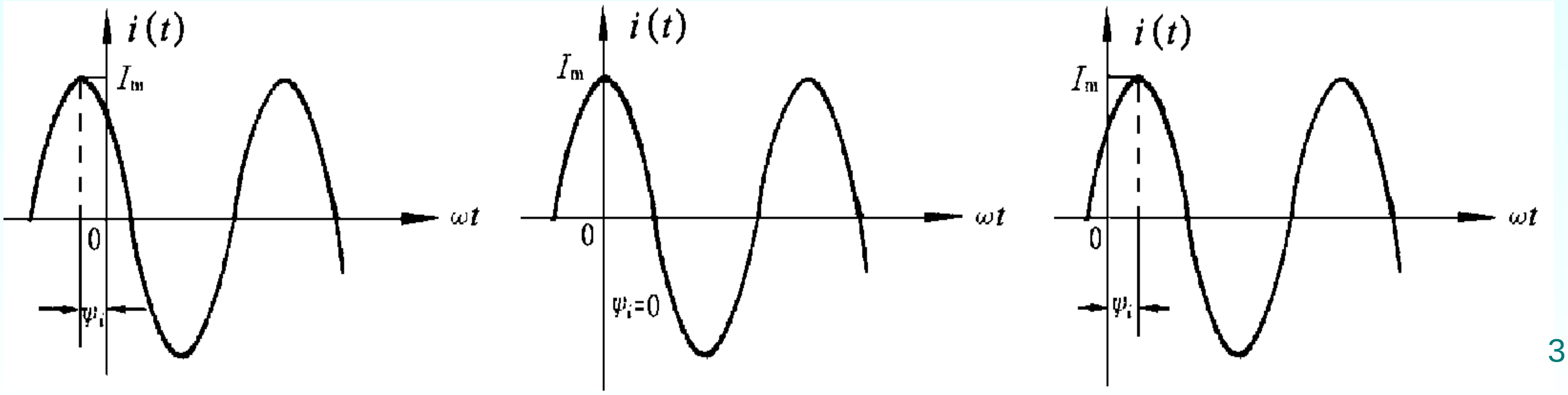
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$



$$i(t)=I_{\rm m}\cos(\omega t+\psi_{\rm i})$$

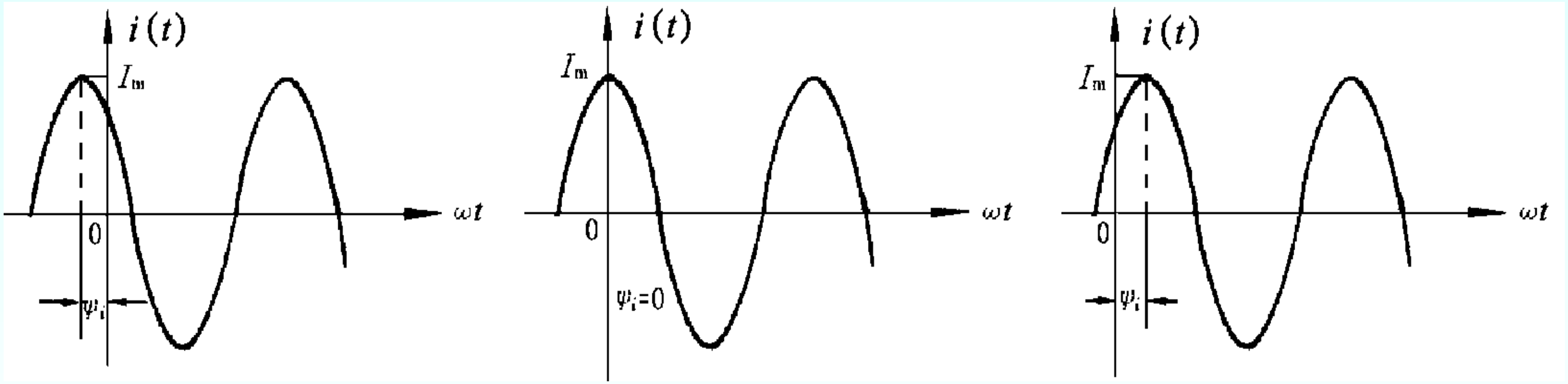
上式中的$I_{\rm m}$是正弦电流的最大值，称为正弦电流的振幅(取正值)。上式中的ω表示每单位时间变化的弧度数，称为正弦电流的角频率，其单位为弧度/秒(rad/s)。由于正弦量的一个周期对应2π弧度，角频率与周期 T 和频率 f 的关系为：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$



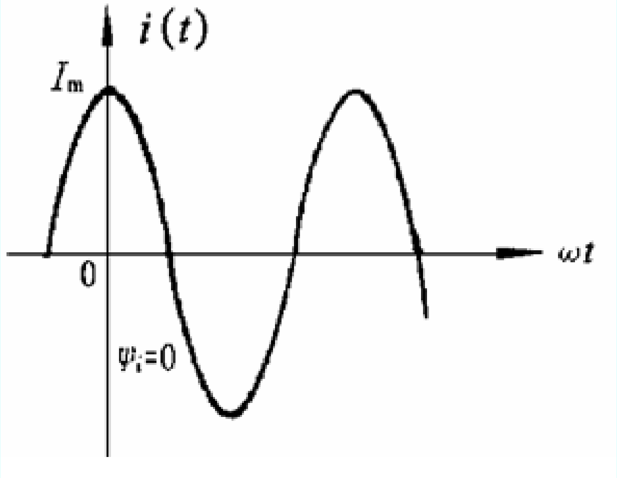
$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_{\mathrm{i}})$$

我国供电系统使用的正弦交流电，其频率f=50Hz(赫兹)，周期$T=1/f$=20ms。上式中的$(\omega t+\psi_i)$称为正弦电流的相位，其中$\psi_i = (\omega t+\psi_i)|_{t=0}$是$t$=0时刻的相位，称为初相。初相的取值范围在-π到+π之间，其数值决定正弦电流波形起点的位置。



(a) 初相ψ>0的情况 (b) 初相ψ=0的情况 (c) 初相ψ<0的情况

由于已知振幅I_m，角频率ω和初相ψ_i，就能够完全确定一个正弦电流，称它们为正弦电流的三要素。



与正弦电流类似，正弦电压的三要素为振幅U_m，角频率ω和初相ψ_u，其函数表达式为：

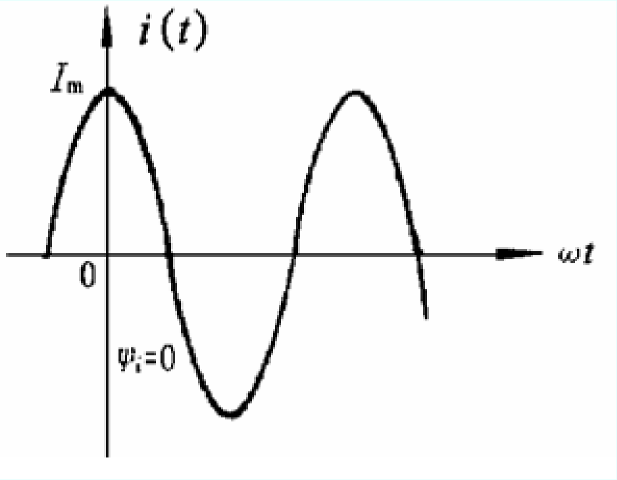
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

由于正弦电压电流的数值随时间t变化，它在任一时刻的数值称为瞬时值，又称为正弦电流和正弦电压的瞬时值表达式。

1、 频率与周期

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\cos(2\pi f t + \psi_{\mathrm{i}})$$



正弦量变化一次所需的时间(秒)称为周期T。每秒钟时间内变化的次数称为频率 f 。

频率是周期的倒数，即 $$f = \frac{1}{T}$$

周期是频率的倒数，即 $$T = \frac{1}{f}$$

工程中常用的一些频率范围：

我国电力的标准频率为50Hz；国际上多采用此标准，但美、日等国采用标准为60Hz。

下面是几个国家的电源频率情况：

中国、香港、欧洲等 220V、50HZ

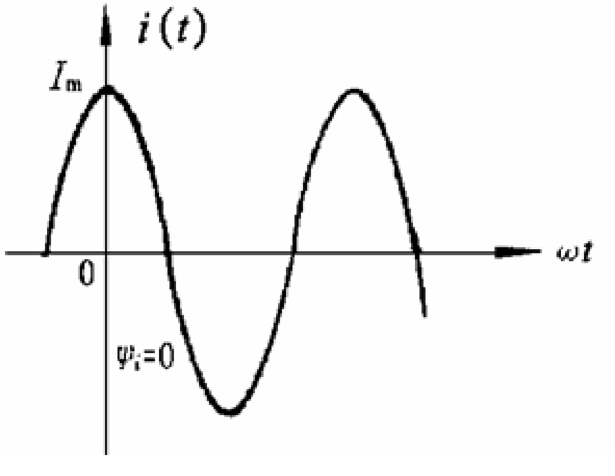
印度 230V、50HZ

澳洲 240V、50HZ

美国、加拿大 120V、60HZ

日本 110V、60HZ

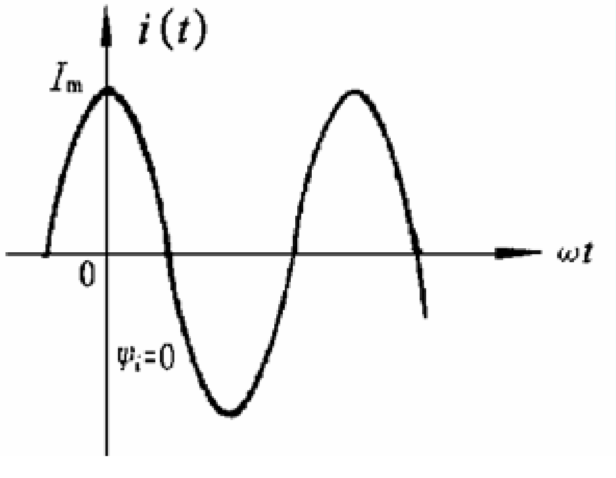
台湾 220V、60HZ



工程中常用的一些频率范围：

- 中频电炉的工作频率为500~8000Hz；
- 高频电炉的工作频率为200~300kHz；
- 无线电工程的频率为10^4~30×10^{10}Hz。
- 低频电子工程的频率为20~20×10^3Hz。

收音机：中波段530~1600KHz
短波2.3~23MHz
SW1 2.3~7MHz
SW2 7.1~23MHz
FM 88~108MHz

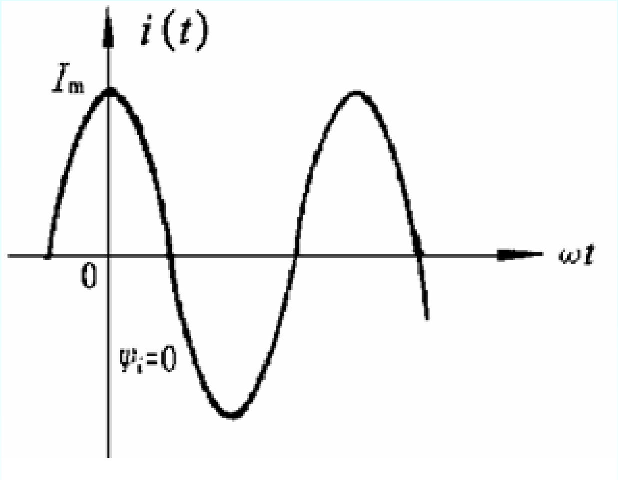


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \qquad i(t) = I_m \cos(2\pi f t + \psi_i)$$

正弦量变化快慢的衡量有时还用角频率ω来描述。角频率ω，每秒变化的弧度数rad/s。

它与频率和周期的关系为：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

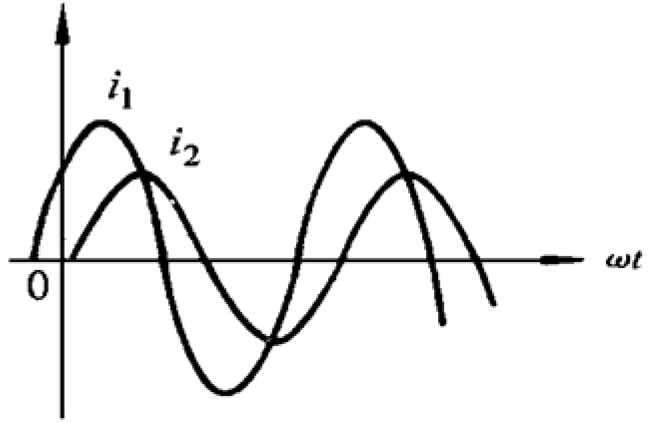


$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

同频率正弦电压电流的相位差

正弦电流电路中，各电压电流都是频率相同的正弦量，我们分析这些电路时，常常需要将这些正弦量的相位进行比较。两个正弦电压电流相位之差，称为相位差，用φ表示，[－180° ～180°]。例如有两个同频率的正弦电流：

$$i_1(t) = I_{1\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_1)$$
$$i_2(t) = I_{2\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_2)$$

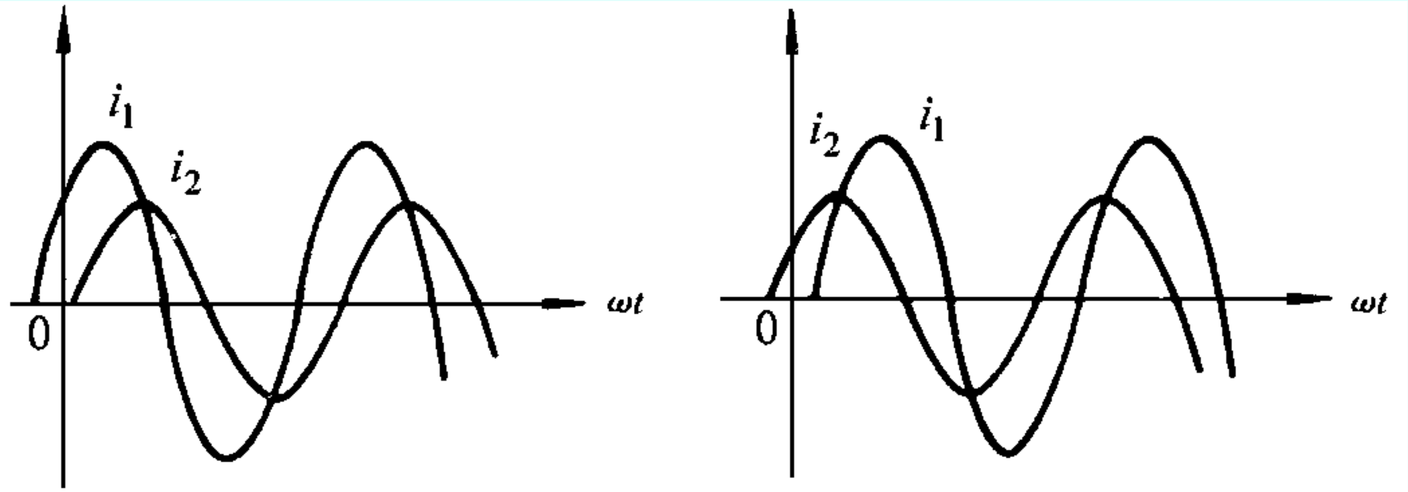


电流$i_1(t)$与电流$i_2(t)$之间的相位差为：

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2$$

$$\varphi=(\omega t+\psi_1)-(\omega t+\psi_2)=\psi_1-\psi_2$$

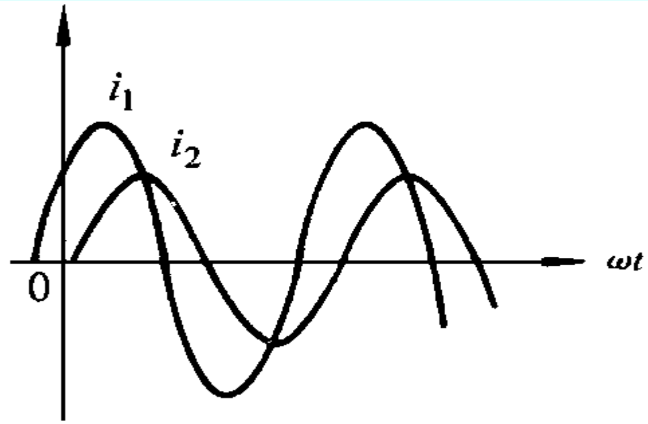
上式表明两个同频率正弦量在任意时刻的相位差均等于它们初相之差，与时间t无关。相位差φ的量值反映出电流$i_1(t)$与电流$i_2(t)$在时间上的超前和滞后关系。



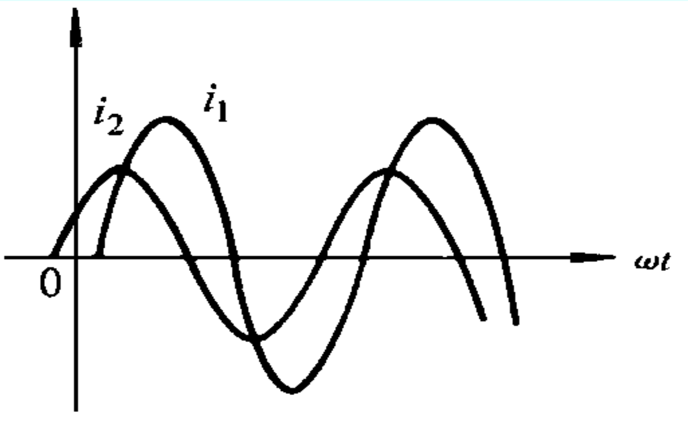
$\varphi>0$　　　　$\varphi<0$

当$\varphi=\psi_1-\psi_2>0$时，表明$i_1(t)$超前于电流$i_2(t)$，超前的角度为φ，超前的时间为φ/ω。当$\varphi=\psi_1-\psi_2<0$时，表明$i_1(t)$滞后于电流$i_2(t)$，滞后的角度为$|\varphi|$，滞后的时间为$|\varphi|/\omega$。

图 (a)表示电流$i_1(t)$超前于电流$i_2(t)$的情况，图(b)表示电流$i_1(t)$滞后于电流$i_2(t)$的情况。

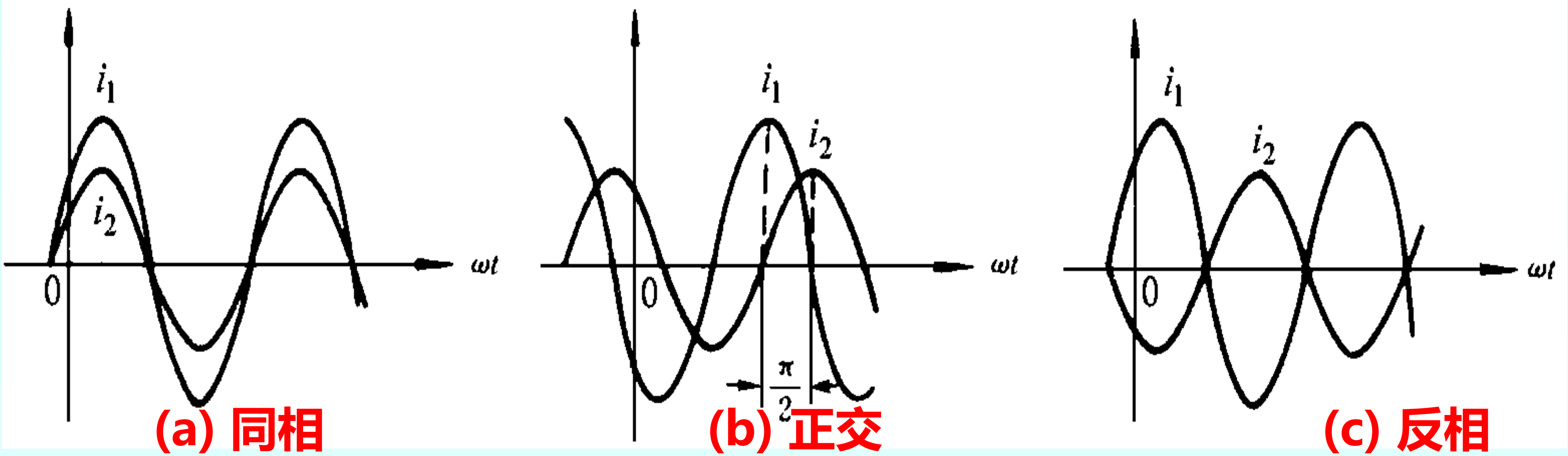


a:电流$i_1(t)$超前于电流$i_2(t)$



b:电流$i_1(t)$滞后于电流$i_2(t)$

同频率正弦电压电流的相位差有几种特殊的情况:



(a) 同相　(b) 正交　(c) 反相

1. 同相:如果相位差$\varphi=\psi_1-\psi_2=0$,称电流$i_1(t)$与电流$i_2(t)$同相，如图(a)所示;

2. 正交:如果相位差$\varphi=\psi_1-\psi_2=\pm\pi/2$，称电流$i_1(t)$与电流$i_2(t)$正交，如图(b)所示，图中电流$i_1(t)$超前电流$i_2(t)$一个$\pi/2$或90°;

3. 反相:如果相位差$\varphi=\psi_1-\psi_2=\pm\pi$，称电流$i_1(t)$与电流$i_2(t)$反相，如图(c)所示。

例2　已知正弦电压$u(t)$和电流$i_1(t)$，$i_2(t)$的瞬时值表达式为:

$$u(t) = 311\cos(\omega t - 180^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$i_1(t) = 5\cos(\omega t - 45^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t) = 10\cos(\omega t + 60^\circ)\ \mathrm{A}$$

试求电压$u(t)$与电流$i_1(t)$和$i_2(t)$的相位差。

$$u(t) = 311\cos(\omega t - 180°)\ \mathrm{V}$$
$$i_1(t) = 5\cos(\omega t - 45°)\ \mathrm{A}$$
$$i_2(t) = 10\cos(\omega t + 60°)\ \mathrm{A}$$

解：电压$u(t)$与电流$i_1(t)$的相位差为:

$$\varphi_1 = (-180) - (-45°) = -135°$$

电压 $u(t)$与电流$i_2(t)$的相位差为:

$$\varphi_2 = (-180) - 60° = -240°$$

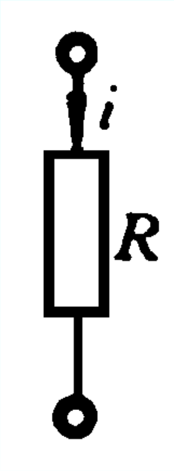
习惯上将相位差的范围控制在 -180°到+180°之间，我们不说电压$u(t)$与电流$i_2(t)$的相位差为-240°，而说电压$u(t)$与电流$i_2(t)$的相位差为(360°-240°)=120°。

有效值

将直流电流 I 和正弦电流$i(t)$通过电阻R时的能量作一比较，由此导出正弦电压电流的有效值，它是一个十分有用的量。

直流电流 I 和正弦电流 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$通过同一电阻$R$，令它们在时间$T$内获得的能量相等。

$$W=I^2RT=\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$$



正弦电压、电流的有效值

有效值的定义式称为方均根值。

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

用此式计算出正弦电流$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$的方均根值，称为正弦电流的有效值。具体计算如下：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\psi)\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t+2\psi)]\mathrm{d}t}=\boxed{\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m}$$

幅值与有效值

正弦量在任一瞬间的值称为瞬时值，用小写字母表示，如i、u。

瞬时值中最大的值称为幅值或最大值，

如I_m、U_m。

正弦交流电流的数学表达式为：$i = I_m \cos(\omega t + \psi)$

说明或计量正弦交流电时一般不用幅值或瞬时值，而用有效值。（重点）

幅值与有效值

计算结果表明，振幅为I_m的正弦电流与数值为$I=0.707I_m$的直流电流，在一个周期内，对电阻R提供相同的能量。也就是说正弦电压电流的有效值为振幅值的0.707倍，或者说正弦电压电流的振幅是其有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。

与此相似，正弦电压$u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi)$的有效值为：

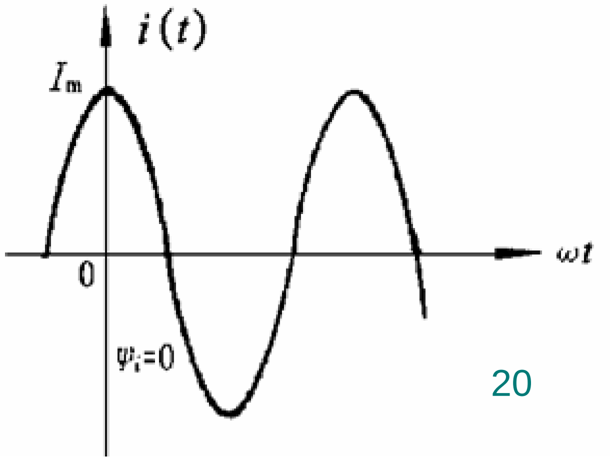
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}=0.707U_m$$

• 幅值与有效值

有效值的概念在电力工程上非常有用，常用的交流电压表和电流表都是用有效值来进行刻度的，当我们用交流电压表或普通万用表测量正弦电压的读数为220V时，是指该电压的有效值为220V，其振幅值为：

$$\sqrt{2}\times 220\text{V} = 311\text{V}$$

表达式：$u(t)=311\cos(314t+\psi)$



正弦电压电流的相量表示（重点）

分析正弦稳态的有效方法是相量法，相量法的基础是用一个称为相量的向量或复数来表示正弦电压和电流。假设正弦电压为：

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$$

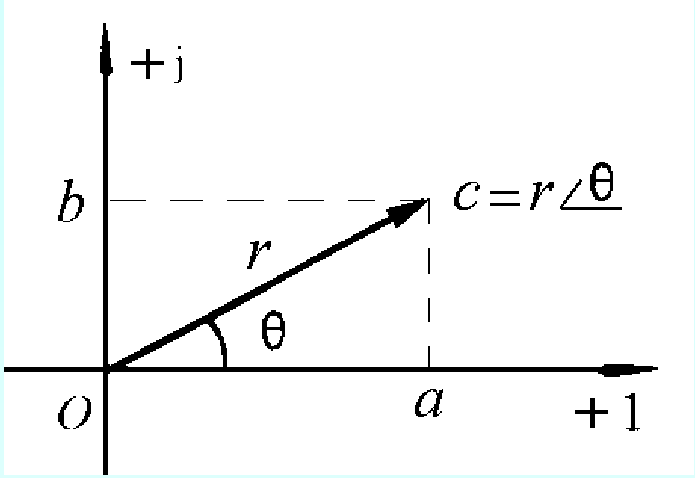
利用它的振幅U_{m}和初相ψ来构成一个复数，复数的模表示电压的振幅，其幅角表示电压的初相，即

$$\dot{U}_{\mathrm{m}}=U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=U_{\mathrm{m}}\angle\psi$$

应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$ 可以得到.

关于复数的几个公式

1. 假设复数 $c = r\angle\theta = a + jb$



则有 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

$a = r\cos\theta$ $b = r\sin\theta$

2. 假设复数 $c_1 = r_1\angle\theta_1$，$c_2 = r_2\angle\theta_2$

$c_1 c_2 = r_1 r_2 \angle\theta_1 + \theta_2$

则有

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1 - \theta_2$$

3. 假设复数 $c_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1, c_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$

则有

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2)$$

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}(b_1 - b_2)$$

电路分析中采用符号 $j=\sqrt{-1}$

应用欧拉公式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ **可以得到**

$$\Theta \quad e^{j90^{\circ}}=\cos 90^{\circ}+j\sin 90^{\circ}=j$$

$$\therefore \quad j=\sqrt{-1}=e^{j90^{\circ}}=1\angle 90^{\circ}$$

$$\Theta \quad e^{-j90^{\circ}}=\cos(-90^{\circ})+j\sin(-90^{\circ})=-j$$

$$\therefore \quad -j=\frac{1}{j}=e^{-j90^{\circ}}=1\angle -90^{\circ}$$

$$\Theta \quad e^{j180^{\circ}}=\cos 180^{\circ}+j\sin 180^{\circ}=-1$$

$$\therefore \quad -1=j^{2}=e^{j180^{\circ}}=1\angle 180^{\circ}$$

三、正弦电压电流的相量表示（重点）

分析正弦稳态的有效方法是相量法，相量法的基础是用一个称为相量的向量或复数来表示正弦电压和电流。假设正弦电压为：

$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$$

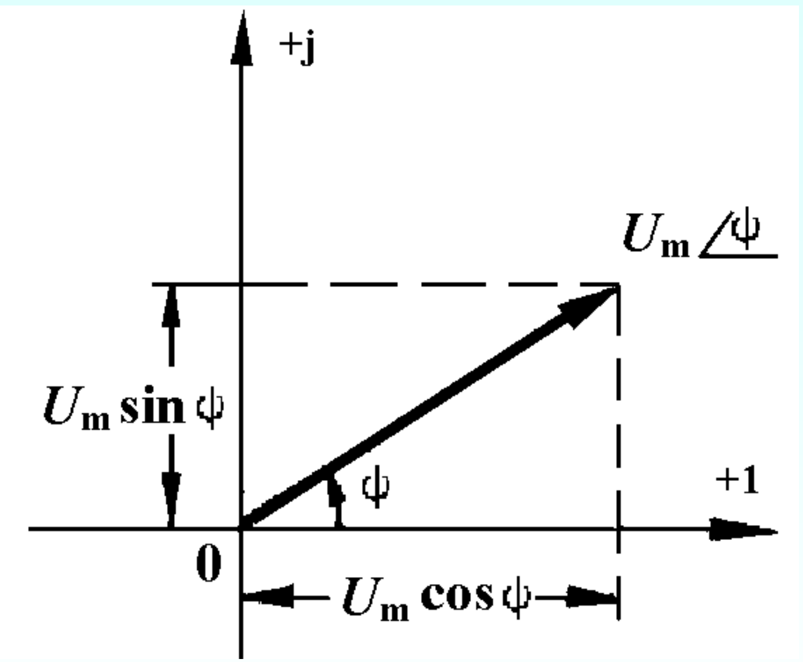
利用它的振幅U_{m}和初相ψ来构成一个复数，复数的模表示电压的振幅，其幅角表示电压的初相，即

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U_{\mathrm{m}} \angle \psi$$

应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ 可以得到.

$$\dot{U}_{m} = U_{m} e^{j\psi} = U_{m} \angle \psi$$

它在复数平面上可以用一个有向线段来表示，如图所示。这种用来表示正弦电压和电流的复数($U_m\cos\psi + jU_m\sin\psi$)，称为振幅相量。



$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U_{\mathrm{m}} \angle \psi$$

随时间按正弦规律变化的电压和电流，可以用一个称为相量的复数来表示。

已知正弦电压电流的瞬时值表达式，可以得到相应的电压电流振幅相量。反过来，已知电压电流振幅相量，也能够写出正弦电压电流的瞬时值表达式。即

$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_{\mathrm{u}}) \xleftrightarrow{\omega} \dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \angle \psi_{\mathrm{u}}$$

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_{\mathrm{i}}) \xleftrightarrow{\omega} \dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi_{\mathrm{i}}$$

例3 已知正弦电流 $i_1(t)=5\cos(314t+60°)\text{A}$,

$i_2(t)=-10\sin(314t+60°)\text{A}$。

写出这两个正弦电流的相位差，电流相量，画出相量图，并求出$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

例3 已知正弦电流$i_1(t)=5\cos(314t+60°)\text{A}$，

$i_2(t)=-10\sin(314t+60°)\text{A}$。

写出这两个正弦电流的相位差，电流相量，画出相量图，并求出$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

解：根据以下关系：

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{u}})\xleftrightarrow{\ \omega\ }\dot{U}_{\mathrm{m}}=U_{\mathrm{m}}\angle\psi_{\mathrm{u}}$$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})\xleftrightarrow{\ \omega\ }\dot{I}_{\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}\angle\psi_{\mathrm{i}}$$

得到表示正弦电流$i_1(t)=5\cos(314t+60°)\text{A}$的相量为：

$$\boxed{\dot{I}_{1\mathrm{m}}=5\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^{\circ}}\,\mathrm{A}=5\angle 60^{\circ}\,\mathrm{A}}$$

正弦电流与其电流相量的关系可以简单表示为：

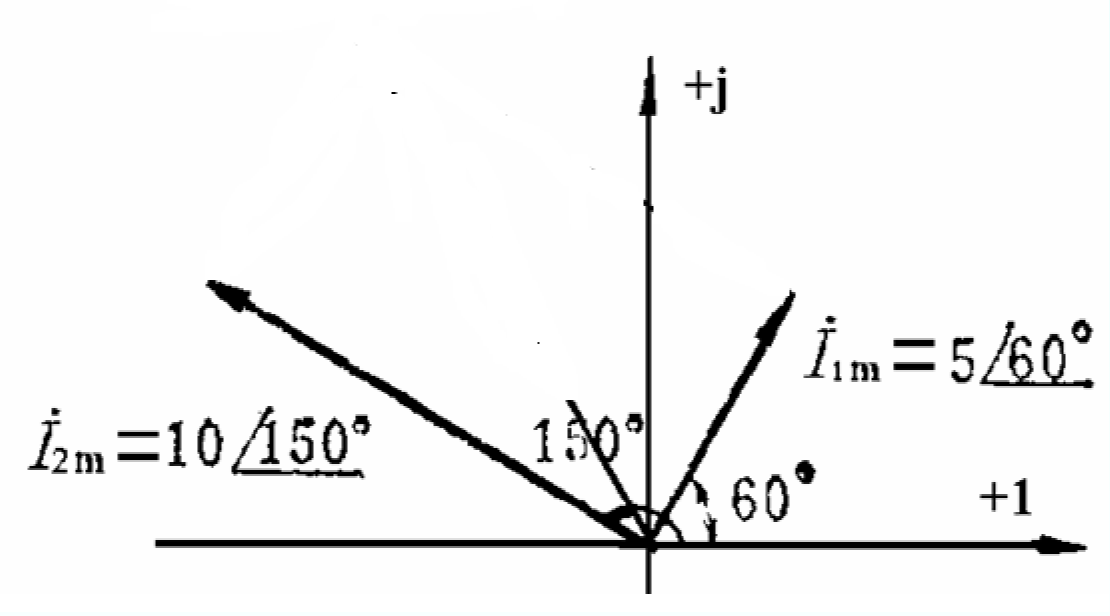
$$i_1(t) = 5\cos(314t + 60^\circ)\text{A} \longrightarrow \dot{I}_{1\text{m}} = 5\text{e}^{\text{j}60^\circ}\text{A} = 5\angle 60^\circ\text{A}$$

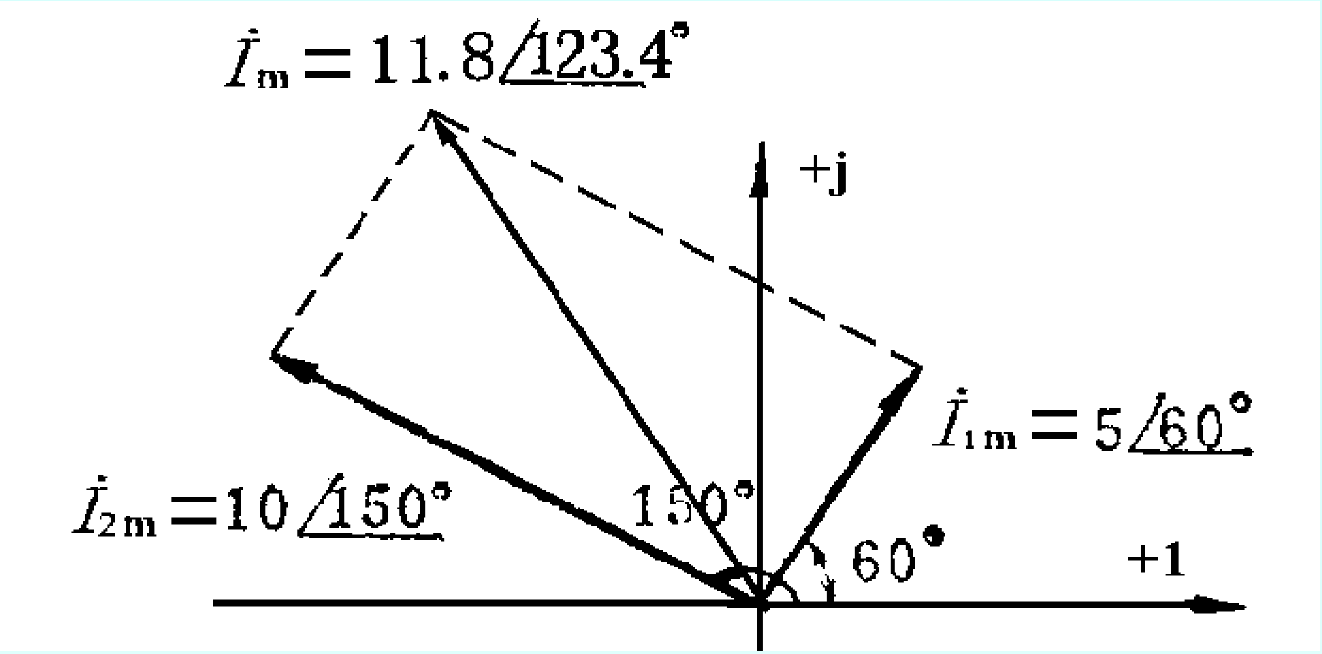
与此相似，对于正弦电流$i_2(t)$=-10sin(314t+60°)A可以得到以下结果：

$$\begin{aligned} i_2(t) &= -10\sin(314t + 60^\circ)\text{A} \\ &= -10\cos(314t + 60^\circ - 90^\circ)\text{A} \\ &= 10\cos(314t - 30^\circ + 180^\circ)\text{A} \longrightarrow \dot{I}_{2\text{m}} = 10\angle 150^\circ\text{A} \end{aligned}$$

注意：今后在用相量法分析电路时，应该将各正弦电压电流的瞬时表达式**全部用余弦函数/全部用正弦函数**表示。

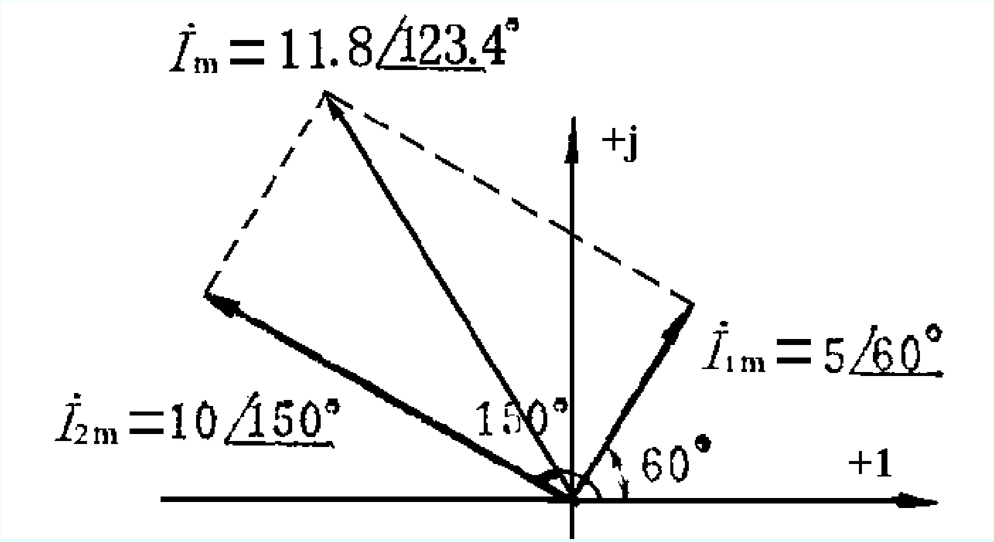
将各电流相量 $\dot{I}_{1m}=5\angle 60^{\circ}\text{A}$ 和 $\dot{I}_{2m}=10\angle 150^{\circ}\text{A}$ 画在一个复数平面上，就得到相量图，从相量图上容易看出各正弦电流的相位关系 $\varphi=60^{\circ}-150^{\circ}=-90^{\circ}$（$i_1$ 滞后 i_2 90°）。如何求 $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$?





相量图的另外一个好处是可以用向量和复数的运算法则求得几个同频率正弦电压或电流之和。

例如用向量运算的平行四边形作图法则可以得到电流相量，从而知道电流$i(t)=I_m\cos(314t+\psi)$的振幅大约为12A，初相大约为124°。作图法的优点是简单直观，但不精确。



采用复数运算可以得到更精确的结果：

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_{m} &= \dot{I}_{1m}+\dot{I}_{2m}=5\angle 60^{\circ}+10\angle 150^{\circ} \\
&=(2.5+\mathrm{j}4.33)+(-8.66+\mathrm{j}5) \\
&=(-6.16+\mathrm{j}9.33) \\
&=11.8\angle 123.4^{\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=I_{m}\cos(314t+\psi)=11.8\cos(314t+123.4^{\circ})\mathrm{A}$$

由于正弦电压电流的振幅值与有效值间存在 $\sqrt{2}$ 的关系，今后除了使用前面介绍的振幅相量 $\dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}\angle\psi_{\mathrm{u}}$ 和 $\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}\angle\psi_{\mathrm{i}}$ 外，更多使用的是有效值相量 $\dot{U} = U\angle\psi_{\mathrm{u}}$ 和 $\dot{I} = I\angle\psi_{\mathrm{i}}$ 。

正弦时间函数与有效值相量之间的关系如下：　（重点）

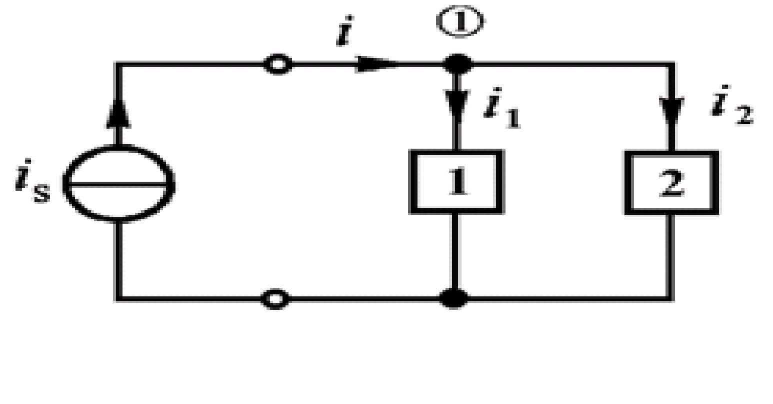
$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{u}}) \longleftrightarrow \dot{U} = U\angle\psi_{\mathrm{u}}$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{i}}) \longleftrightarrow \dot{I} = I\angle\psi_{\mathrm{i}}$$

基尔霍夫定律的相量形式

一、基尔霍夫电流定律的相量形式

基尔霍夫电流定律(KCL)叙述为：**对于任何集中参数电路中的任一结点，在任何时刻，流出该结点的全部支路电流的代数和等于零。**



(a)

其数学表达式为：

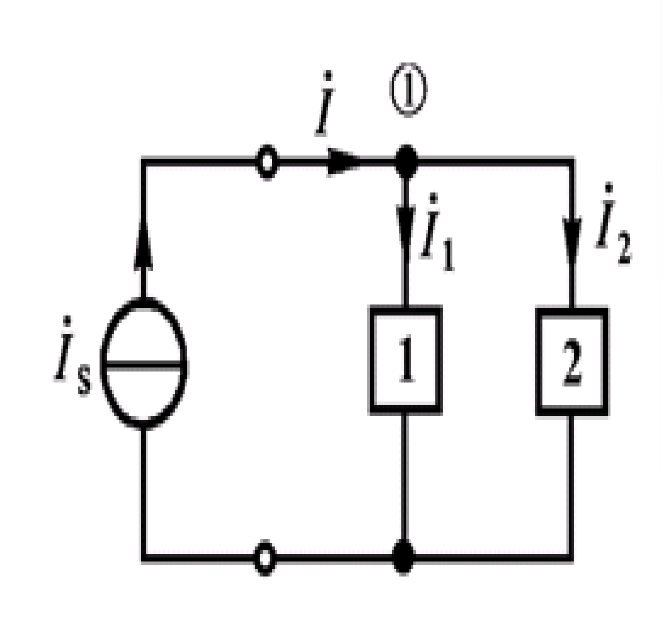
$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0$$

相量形式的KCL定律表示：对于具有相同频率的正弦电流电路中的任一结点，流出该结点的全部支路电流相量的代数和等于零。在列写相量形式KCL方程时，对于参考方向流出结点的电流取“ +”号，流入结点的电流取“—”号。

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{km} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{k} = 0$$

特别注意的是:

$$\sum_{k=1}^{n} I_{km} \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} I_{k} \neq 0$$

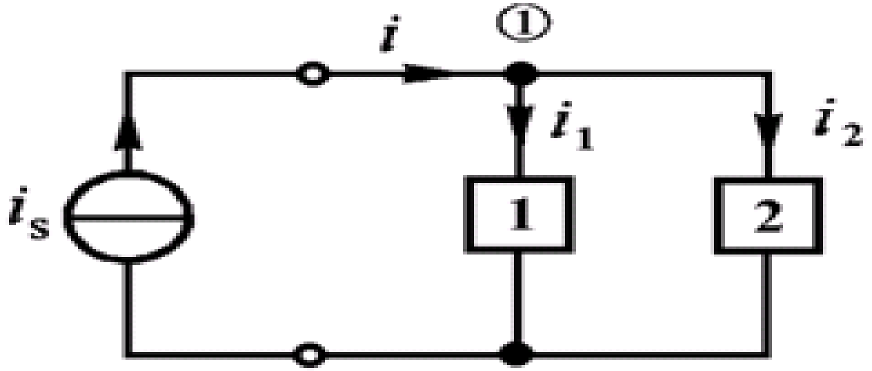


例1 电路如图所示,已知

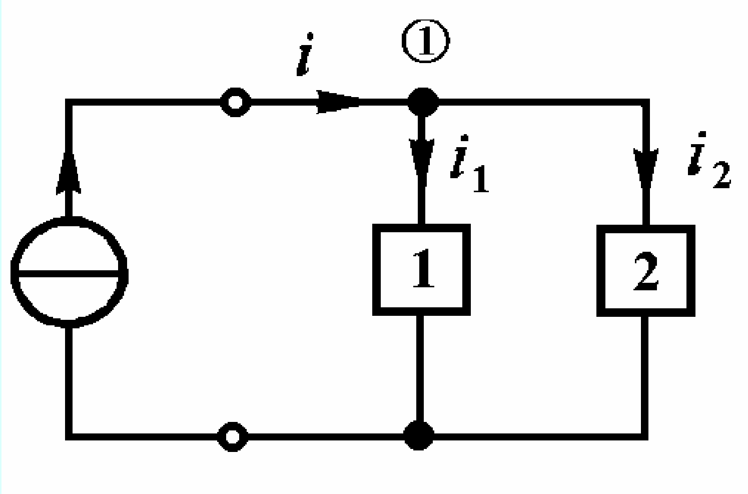
$$i_1(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ)\ \mathrm{A}$$

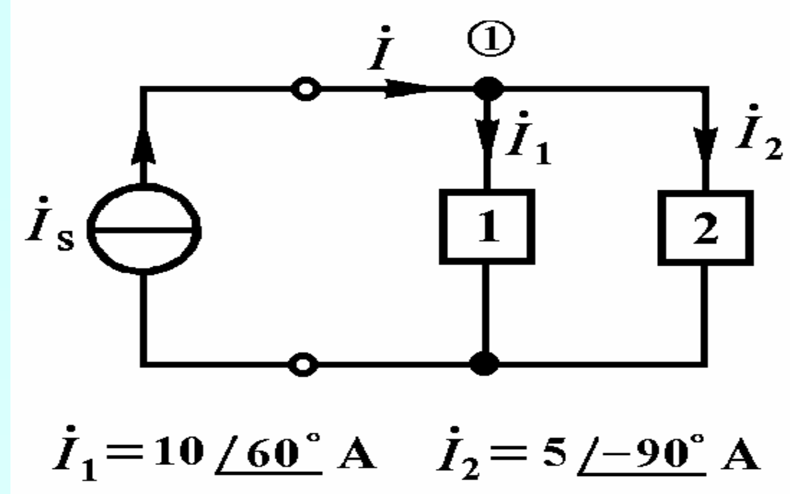
$$i_2(t) = 5\sqrt{2}\sin\omega t\ \mathrm{A}$$

试求电流$i(t)$及其有效值相量。



(a)



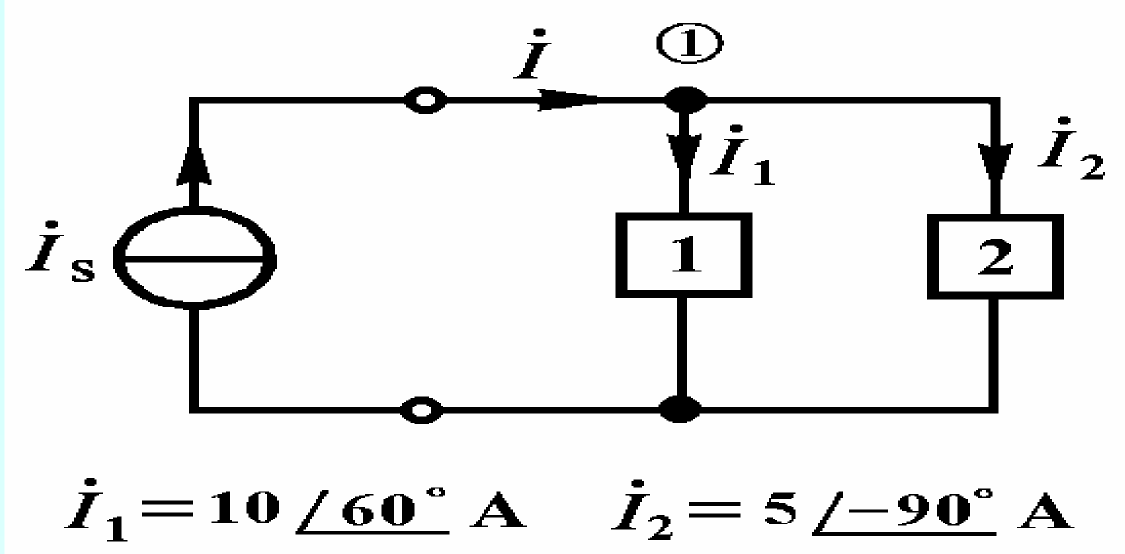


解： 根据电路的时域模型，画出相量模型，图中各电流参考方向均与时域模型相同，仅将时域模型中各电流符号：i_S、i、i_1、i_2 用相应的相量符号：$\dot{I}_S$、$\dot{I}$、$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 表示，并计算出电流相量。

$$\dot{I}_1 = 10\angle 60^\circ \text{A} \qquad \dot{I}_2 = 5\angle -90^\circ \text{A}$$

列出相量模型中结点1的KCL方程，其相量形式为：

$$-\dot{I} + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$$



由此可得：

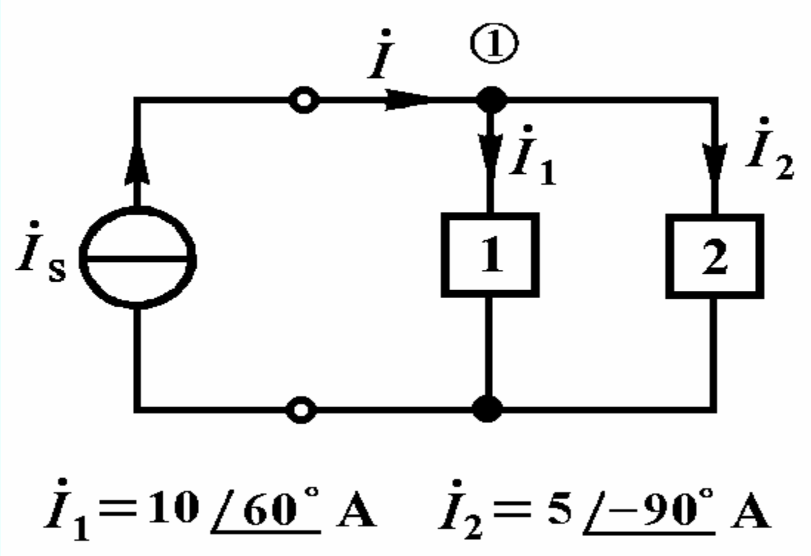
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 60^\circ + 5\angle -90^\circ$$

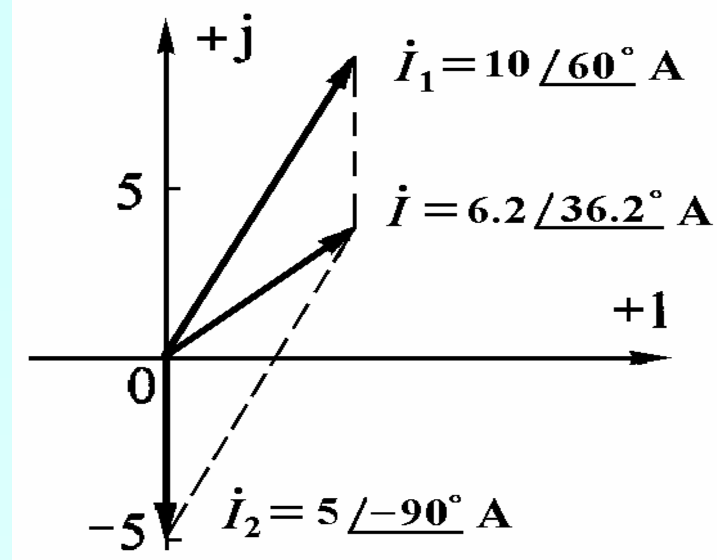
$$= 5 + \mathrm{j}8.66 - \mathrm{j}5 = 5 + \mathrm{j}3.66 = 6.2\angle 36.2^\circ \mathrm{A}$$

相应的电流瞬时值表达式：

$$i(t) = 6.2\sqrt{2}\cos(\omega t + 36.2^\circ)\mathrm{A}$$

注意：正弦电流电路中流出任一结点的全部电流有效值之代数和并不一定等于零，例如本题中的$I=6.2\neq I_1+I_2=10+5=15$A。





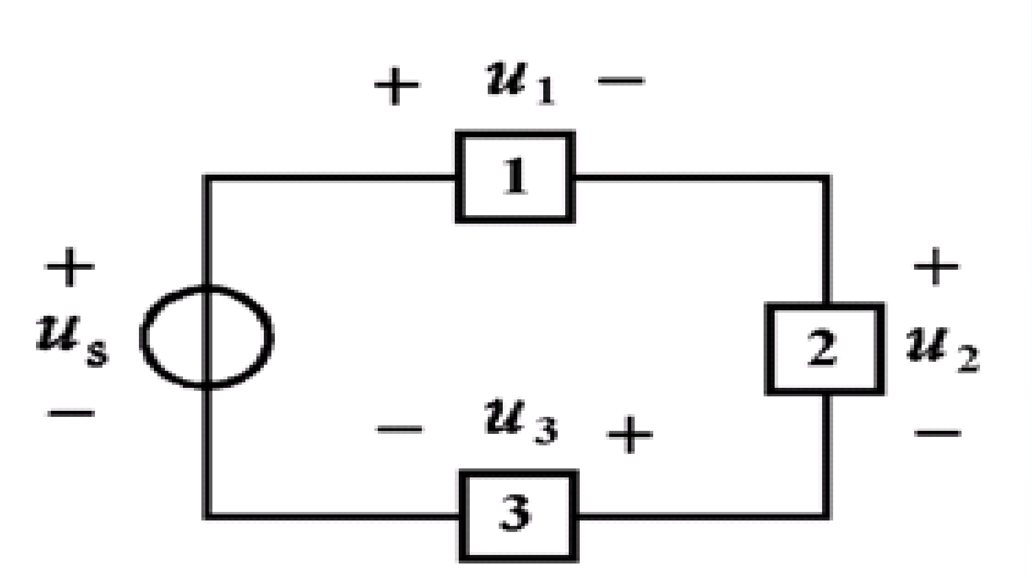
本题也可以用作图的方法求解。在复数平面上，画出已知的电流相量，再用向量运算的平行四边形法则，求得电流相量，如图所示。相量图简单直观，还是可以用来检验复数计算的结果是否基本正确。

从相量图上容易看出电流 i 超前于电流i_2，超前的角度为36.2°+90°=126.2°。

二、基尔霍夫电压定律的相量形式

基尔霍夫电压定律(KVL)叙述为：对于任何集中参数电路中的任一回路，在任何时刻，沿该回路全部支路电压代数和等于零。其数学表达式为:

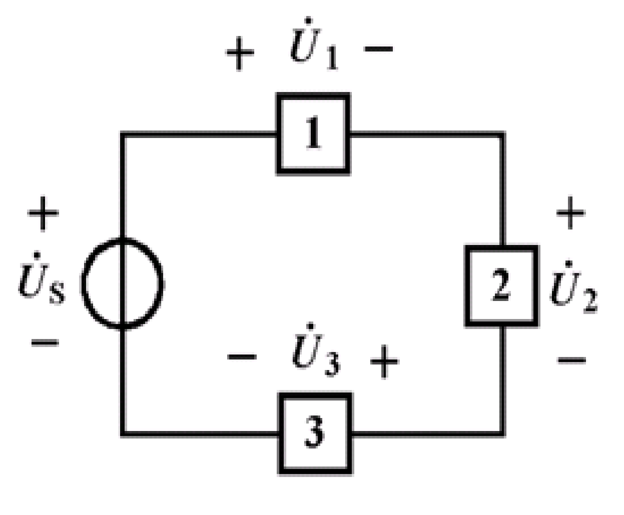
$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0$$



相量形式的KVL定律----对于<u>具有相同频率的正弦电流电路中的任一回路，沿该回路全部支路电压相量的代数和等于零</u>。在列写相量形式KVL方程时，对于参考方向与回路绕行方向相同的电压取“ + ”号，相反的电压取“ - ”号。”遇+为+，遇-为-”

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_{km}=0$$

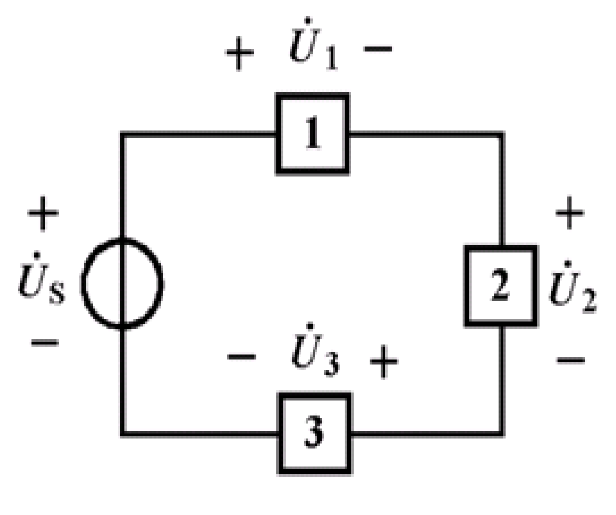
$$\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_{k}=0$$



相量形式的KVL定律----对于具有相同频率的正弦电流电路中的任一回路，沿该回路全部支路电压相量的代数和等于零。在列写相量形式KVL方程时，对于参考方向与回路绕行方向相同的电压取“ + ”号，相反的电压取“ - ”号。”遇+为+，遇-为-”

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{km} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{k} = 0$$



值得特别注意的是沿任一回路全部支路电压振幅(或有效值)的代数和并不一定等于零，即一般来说:

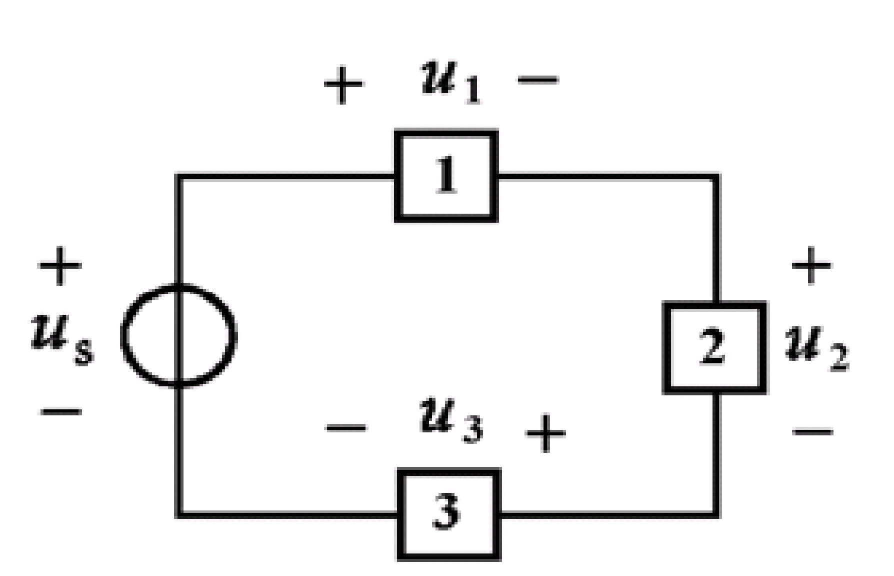
$$\sum_{k=1}^{n} U_{km} \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} U_{k} \neq 0$$

例2 电路如图所示，试求电压源电压$u_S(t)$和相应的电压相量，并画出相量图。已知：

$$u_1(t) = -6\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$$

$$u_2(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + 90^\circ)\,\mathrm{V}$$

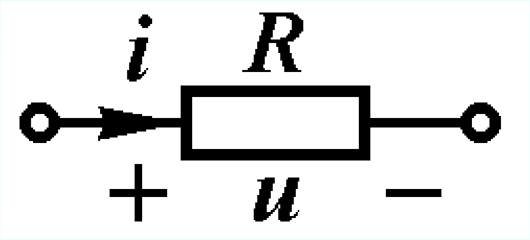
$$u_3(t) = 12\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$$



*RLC*元件电压电流关系的相量形式

一、电阻元件电压电流关系的相量形式

线性电阻的电压电流关系服从欧姆定律，在电压电流采用关联参考方向时，其电压电流关系表示为



$$u(t)=Ri(t)$$

当其电流$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)$随时间按正弦规律变化时，电阻上电压电流关系如下：

$$u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)=Ri(t)=RI_m\cos(\omega t+\psi_i)$$

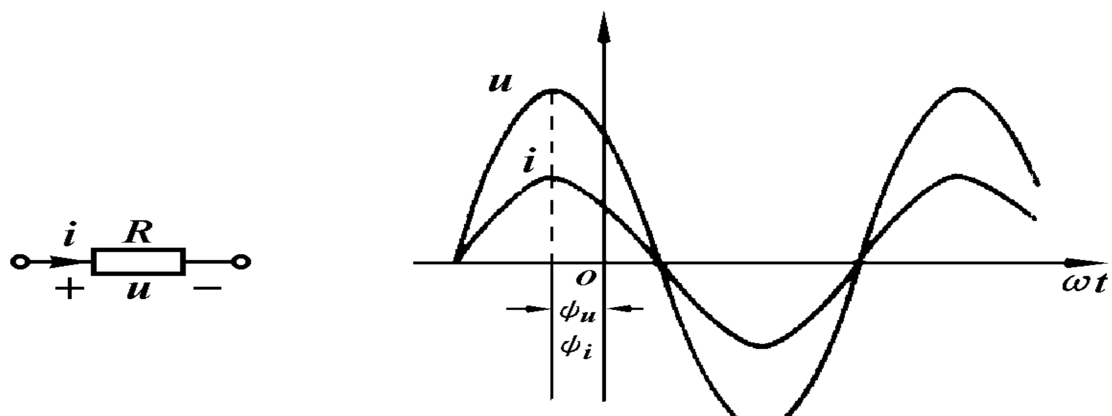
$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{u}})=Ri(t)=RI_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})$$

上式表明，线性电阻的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。其振幅或有效值之间服从欧姆定律，其相位差为零(同相)，即：

$$U_{\mathrm{m}}=RI_{\mathrm{m}} \quad \text{或} \quad U=RI$$

$$\psi_{\mathrm{u}}=\psi_{\mathrm{i}}$$

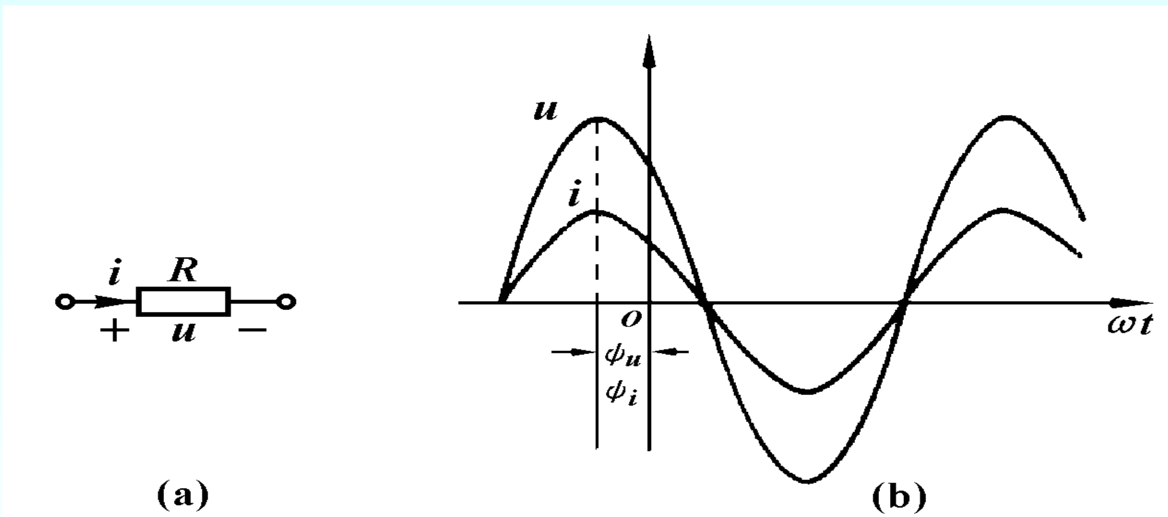
线性电阻元件的时域模型如图(a)所示，反映电压电流瞬时值关系的波形图如图(b)所示。



(a) (b)

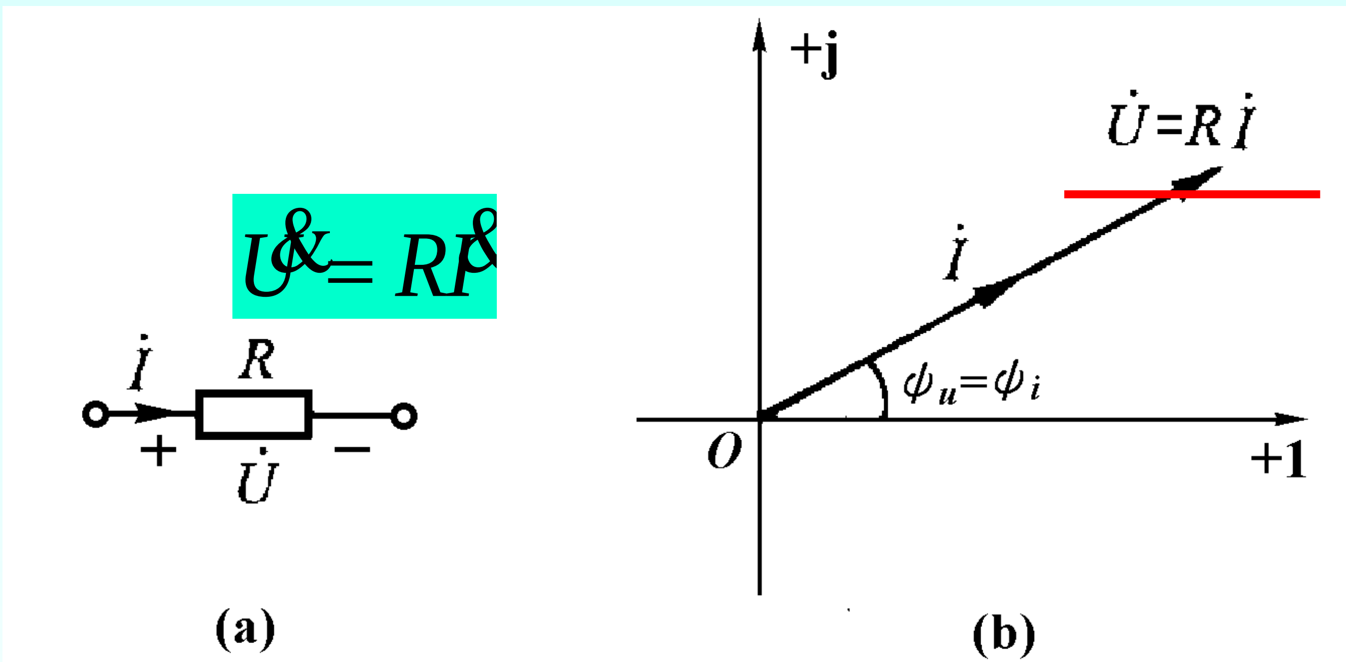
在任一时刻，电阻电压的瞬时值是电流瞬时值的R倍，电压的相位与电流的相位相同，即电压电流波形同时达到最大值，同时经过零点。

由此得到线性电阻电压电流关系的相量形式为： $\dot{U} = R\dot{I}$



线性电阻元件的相量模型如图(a)所示，反映电压电流相量关系的相量图如图(b)所示，由此图可以清楚地看出电阻电压的相位与电阻电流的相位相同。

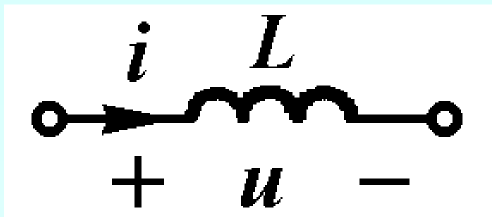
$$\dot{U}=R\dot{I}$$



正弦电流电路中电阻元件的电压电流相量关系

二、电感元件电压电流关系的相量形式

线性电感的电压电流关系采用关联参考方向时，



$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

当电感电流$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})$随时间按正弦规律变化时，

电感上电压电流关系如下：

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{u}})=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})]$$

$$=-\omega LI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})=\omega LI_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}}+90^{\circ})$$

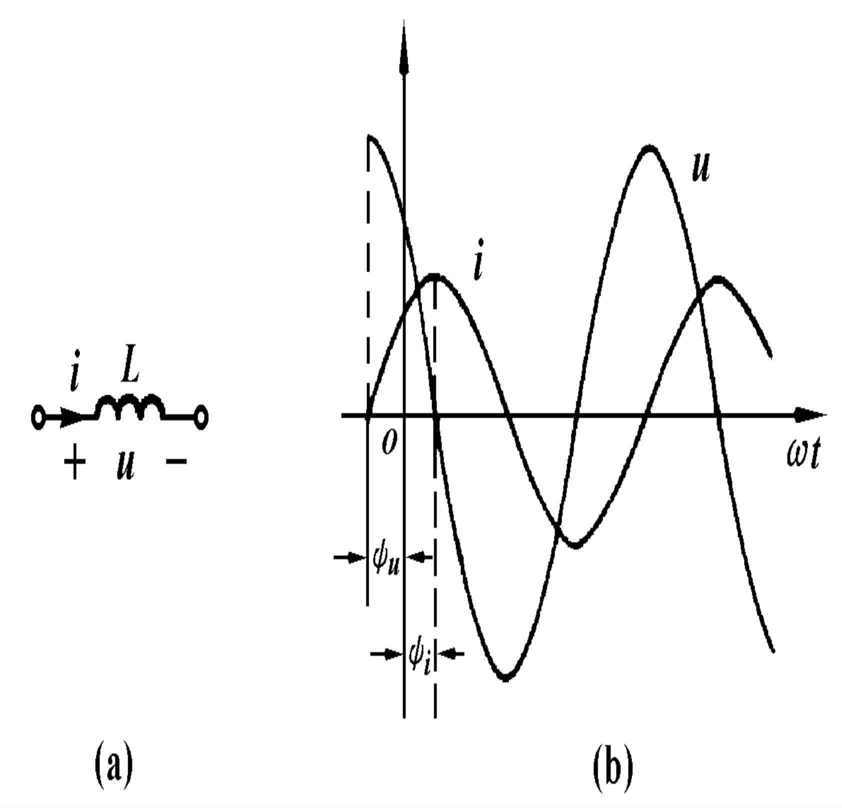
$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{u}})=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})]$$

$$=-\omega LI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})=\omega LI_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}}+90^{\circ})$$

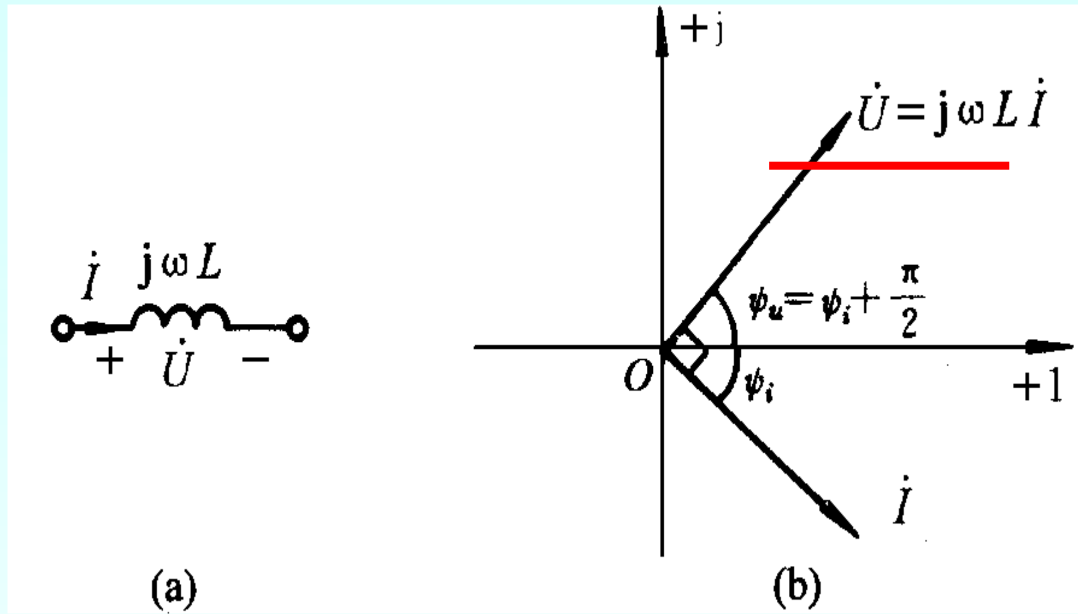
表明线性电感的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。其振幅或有效值之间的关系以及电压电流相位之间的关系为：

$$U_{\mathrm{m}}=\omega LI_{\mathrm{m}} \quad 或 \quad U=\omega LI$$

$$\psi_{\mathrm{u}}=\psi_{\mathrm{i}}+90^{\circ}$$



电感元件的相量模型如图(a)所示，电压电流的相量图如(b)所示。由此可以清楚看出**电感电压的相位超前于电感电流的相位90°**。



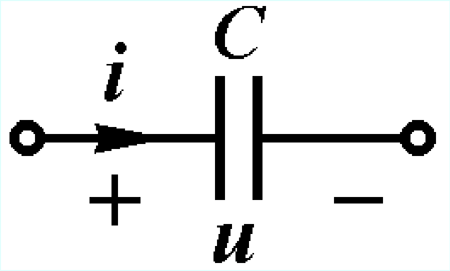
由此得到电感元件电压相量和电流相量的关系式：

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$$

$$e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j$$

三、电容元件电压电流关系的相量形式

线性电容在电压电流采用关联参考方向时：



$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

当电容电压$u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$随时间按正弦规律变化时：

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m\cos(\omega t+\psi_i) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U_m\cos(\omega t+\psi_u)] \\ &= -\omega C U_m\sin(\omega t+\psi_u) = \omega C U_m\cos(\omega t+\psi_u+90^\circ) \end{aligned}$$

当电容电压$u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$随时间按正弦规律变化时：

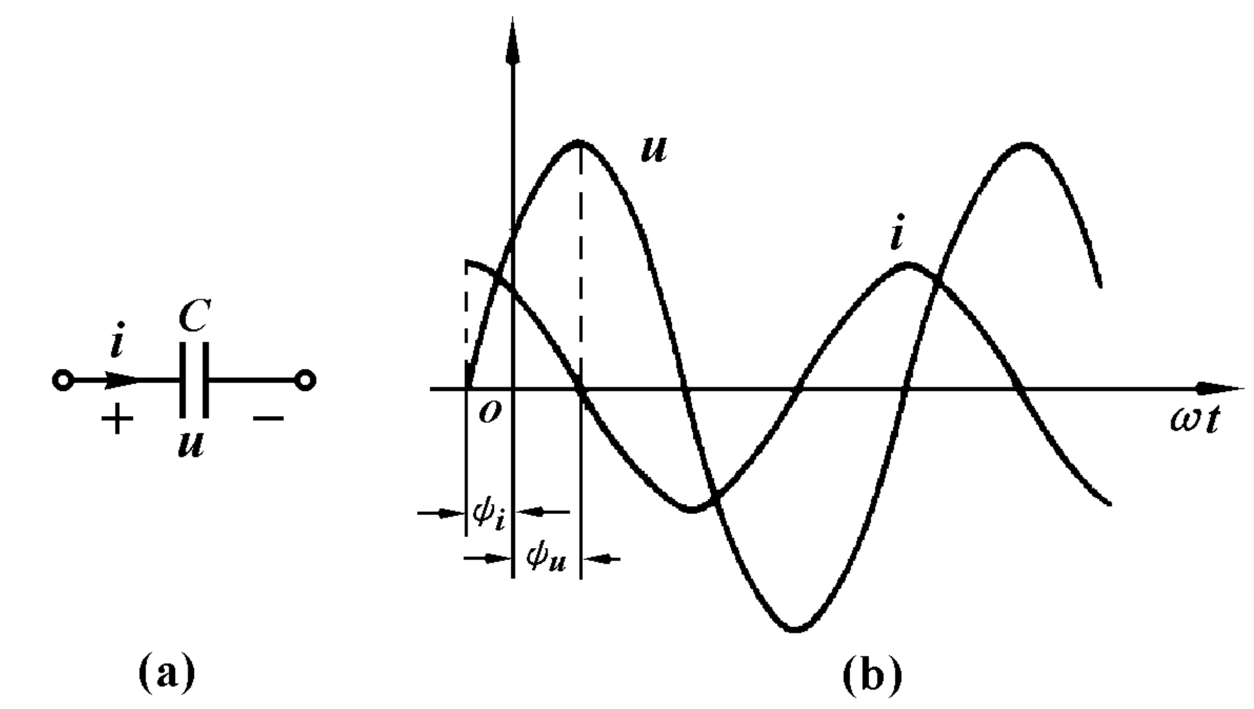
$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)=C\frac{d}{dt}[U_m\cos(\omega t+\psi_u)]$$
$$=-\omega CU_m\sin(\omega t+\psi_u)=\omega CU_m\cos(\omega t+\psi_u+90^\circ)$$

线性电容的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。

其振幅或有效值之间的关系，电压电流相位之间的关系为

$$I_m=\omega CU_m \quad \text{或} \quad I=\omega CU$$
$$\psi_i=\psi_u+90^\circ$$

电容元件的时域模型如图(a)所示，反映电压电流瞬时值关系的波形图如图(b)所示。由此图可以看出**电容电流超前于电容电压90°**，当电容电压由负值增加经过零点时，其电流达到正最大值。



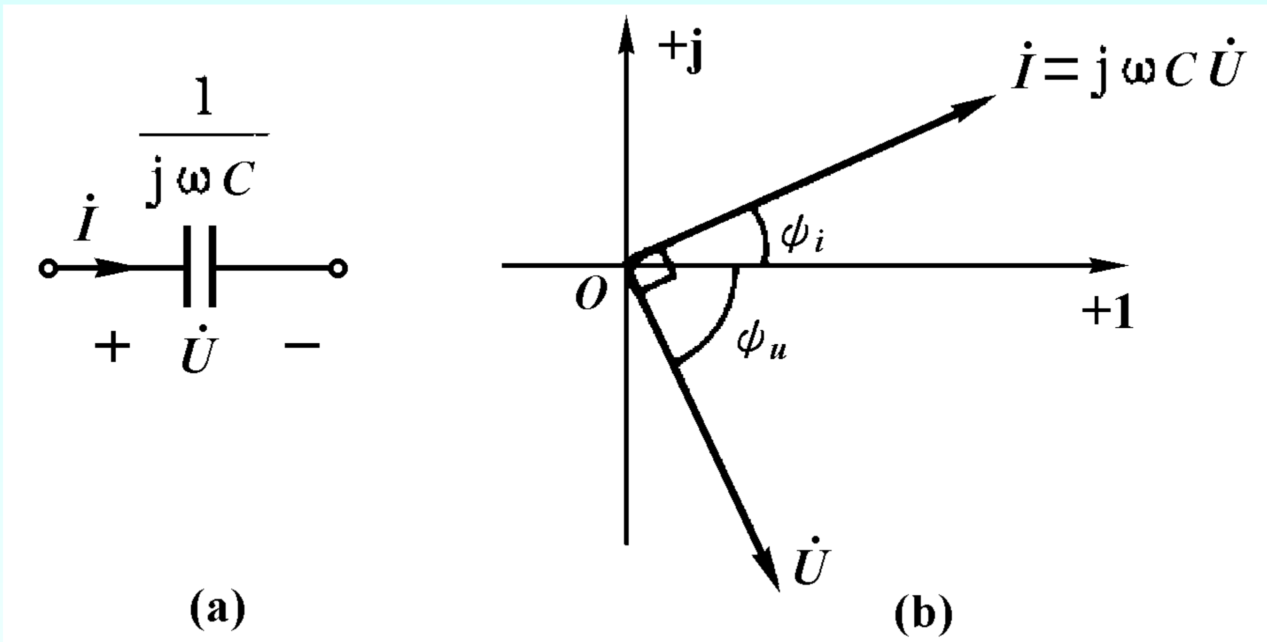
$$I_m = \omega C U_m \quad 或 \quad I = \omega C U$$

$$\psi_i = \psi_u + 90^\circ$$

$$I_{\mathrm{m}} = \omega C U_{\mathrm{m}} \quad 或 \quad I = \omega C U$$

$$\psi_{\mathrm{i}} = \psi_{\mathrm{u}} + 90^{\circ}$$

电容元件的相量模型如图(a)所示，其相量关系如图(b)所示。



由此得到电容元件电压相量和电流相量的关系式：

$$\dot{I} = \mathrm{j}\omega C \dot{U}$$

总结：

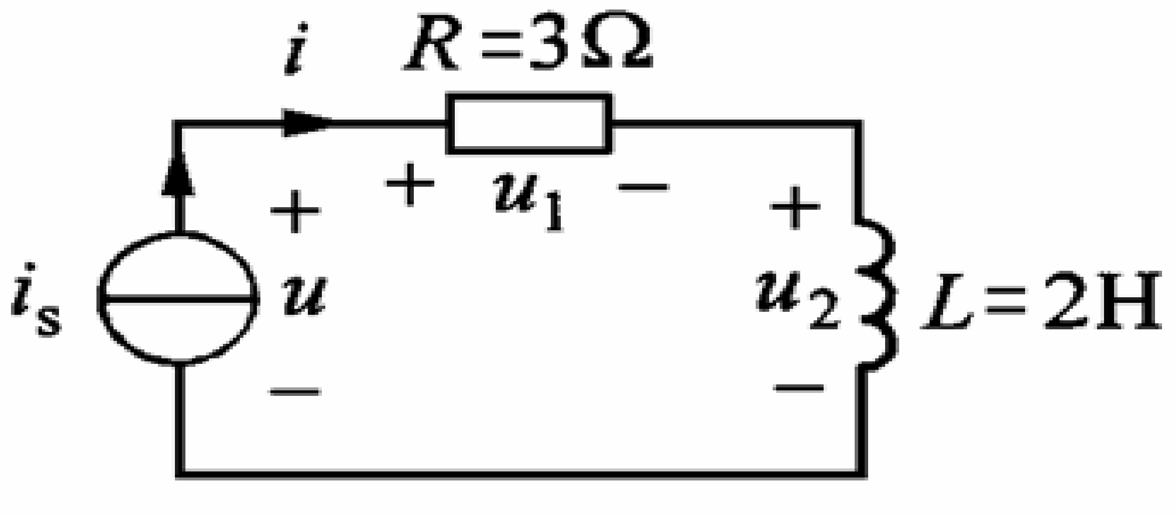
RLC元件电压电流的相量关系列写如下：

$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\dot{I}_{\mathrm{R}}$	$\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{R}}} = R$	称为电阻
$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$	$\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}} = \mathrm{j}\omega L$	称为电感的电抗，简称为感抗
$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}$	$\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{I}_{\mathrm{C}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$	称为电容的电抗，简称为容抗

例1 电路如图所示，已知

$$R=3\Omega, L=2\text{H}, i_S(t)=\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{A}, \omega=2\text{rad/s}$$

试求电压$u_1(t)$, $u_2(t)$, $u(t)$及其有效值相量。

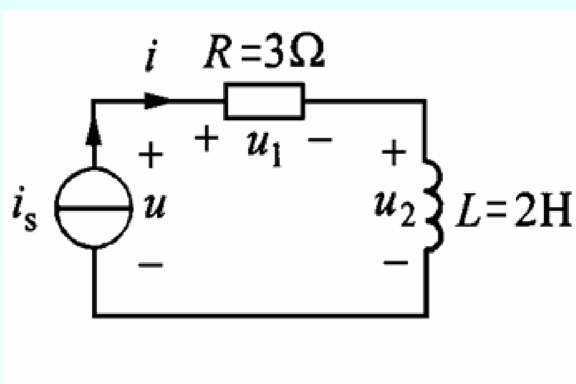


(a)

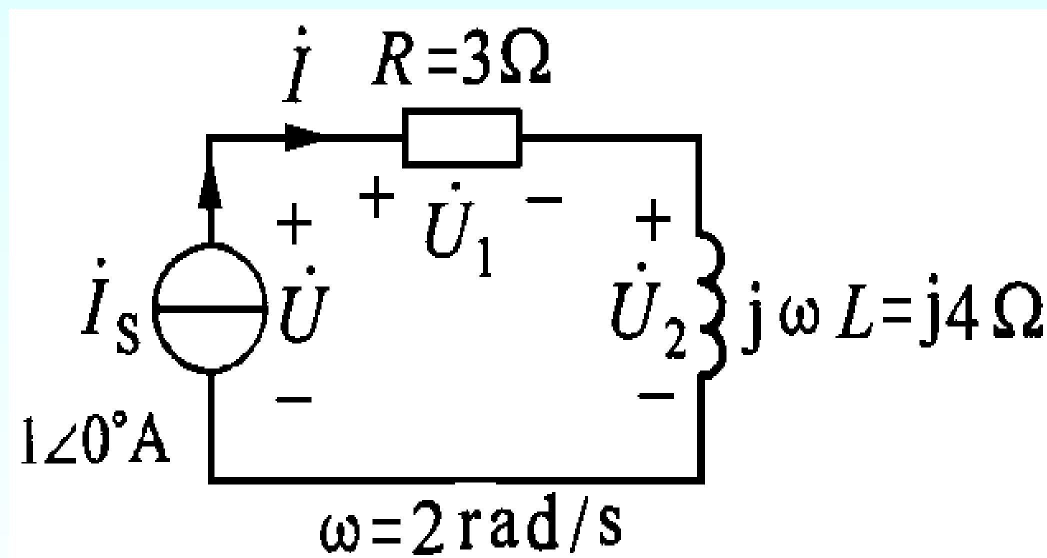
解：根据图(a)所示电路的时域模型，画出图所示的相量模型，图中各电压电流参考方向均与时域模型相同，仅将时域模型中各电压电流符号 i_S、i、u_1、u_2、u 用相应的相量符号 $\dot{I}_S$、$\dot{I}$、$\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$、$\dot{U}$ 表示，

根据相量形式的KCL求出电流相量：

$$\dot{I} = \dot{I}_S = 1\angle 0^{\circ}\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{A}$$



(a)



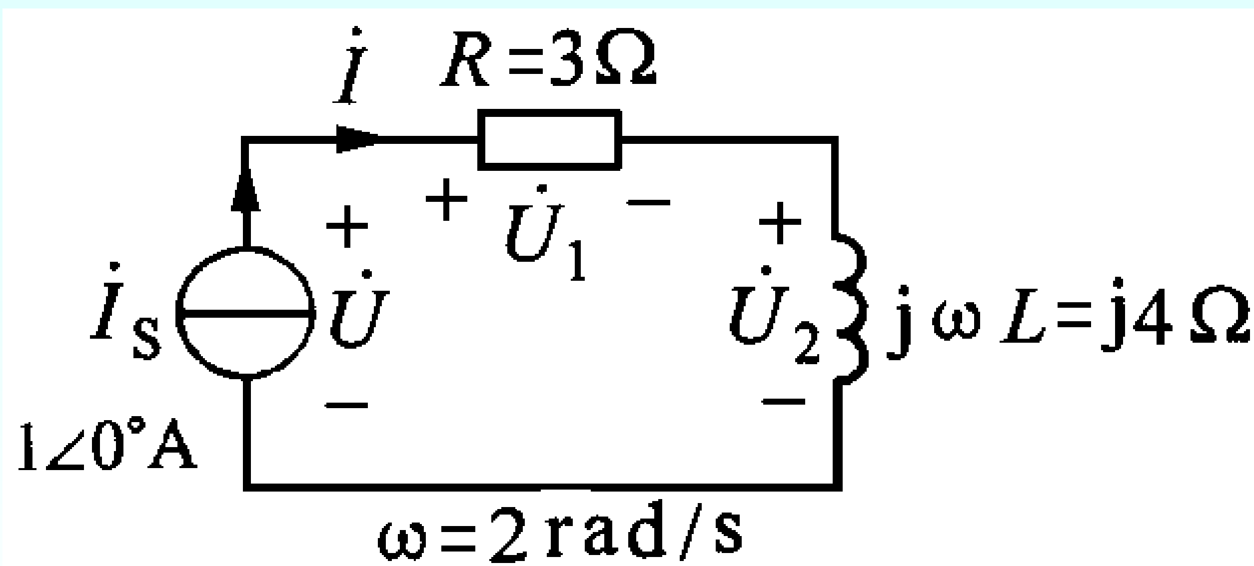
$$\dot{I} = \dot{I}_S = 1\angle 0^\circ \text{A} = 1\text{A}$$

由相量形式的VCR方程求出电压：

$$\dot{U}_1 = R\dot{I} = R\dot{I}_S = 3\times 1\angle 0^\circ = 3\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = \text{j}\omega L\dot{I} = \text{j}\omega L\dot{I}_S = \text{j}2\times 2\times 1\angle 0^\circ$$

$$= \text{j}4\text{V} = 4\angle 90^\circ \text{V}$$



根据相量形式的KVL方程式得到：

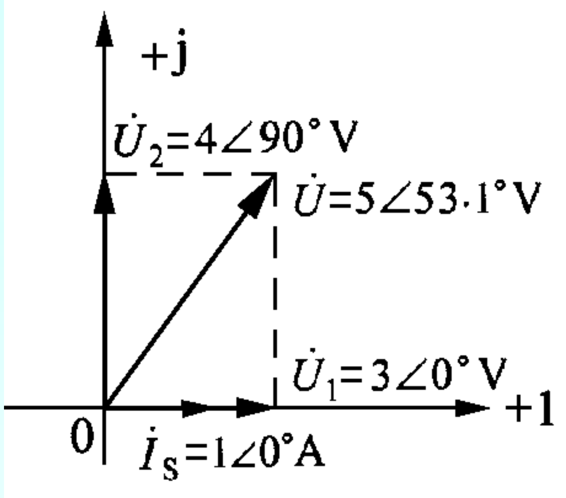
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=3+\mathrm{j}4=5\angle 53.1^\circ\,\mathrm{V}$$

得到相应电压的瞬时值表达式：

$$u_1(t)=3\sqrt{2}\cos 2t\ \mathrm{V}$$

$$u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(2t+90^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$u(t)=5\sqrt{2}\cos(2t+53.1^\circ)\ \mathrm{V}$$

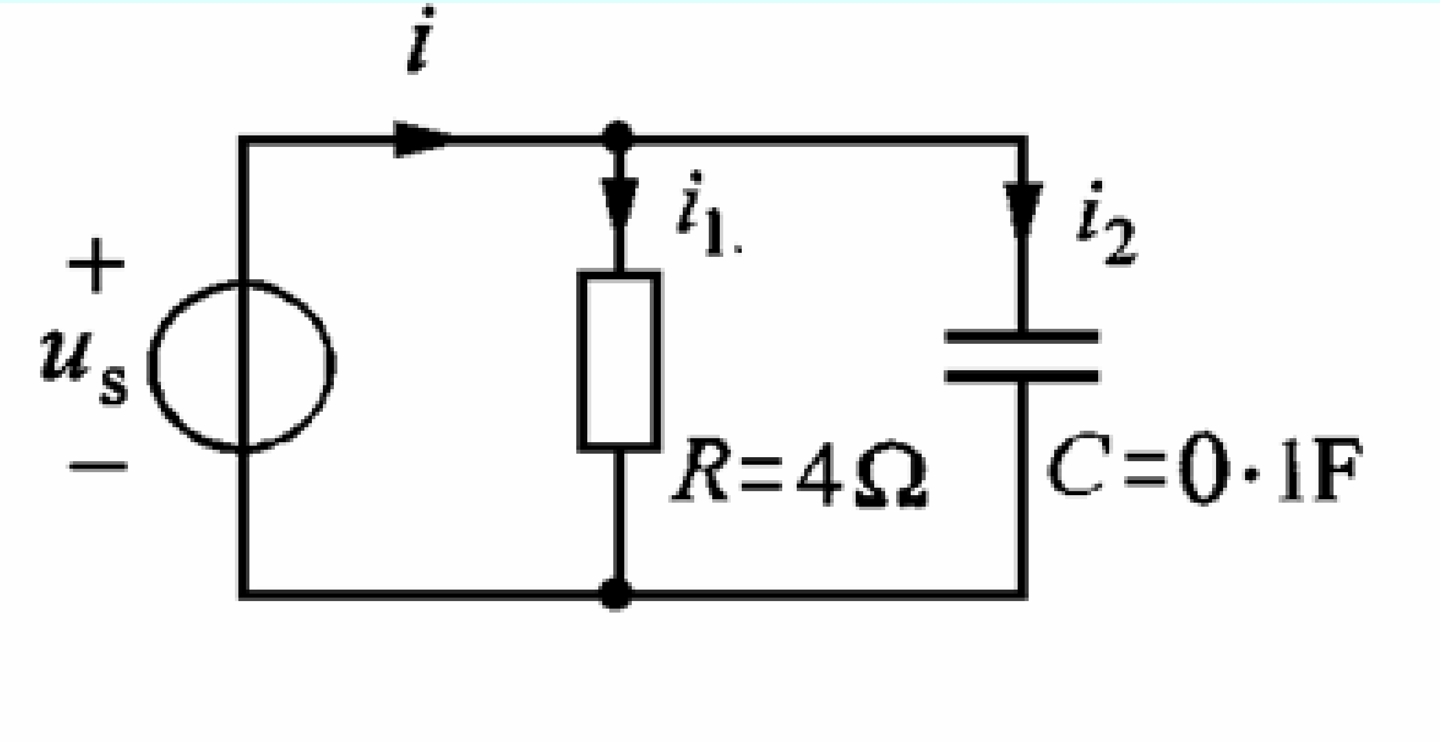


相量图如图所示。由此图可以看出电压$u(t)$超前于电流$i(t)$的角度为53.1°。此例中，$U=5\neq U_1+U_2=3+4=7$v

例2 电路如图所示,已知

$$R = 4\Omega, C = 0.1\text{F}, u_S(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{V}, \omega = 5\text{rad/s}$$

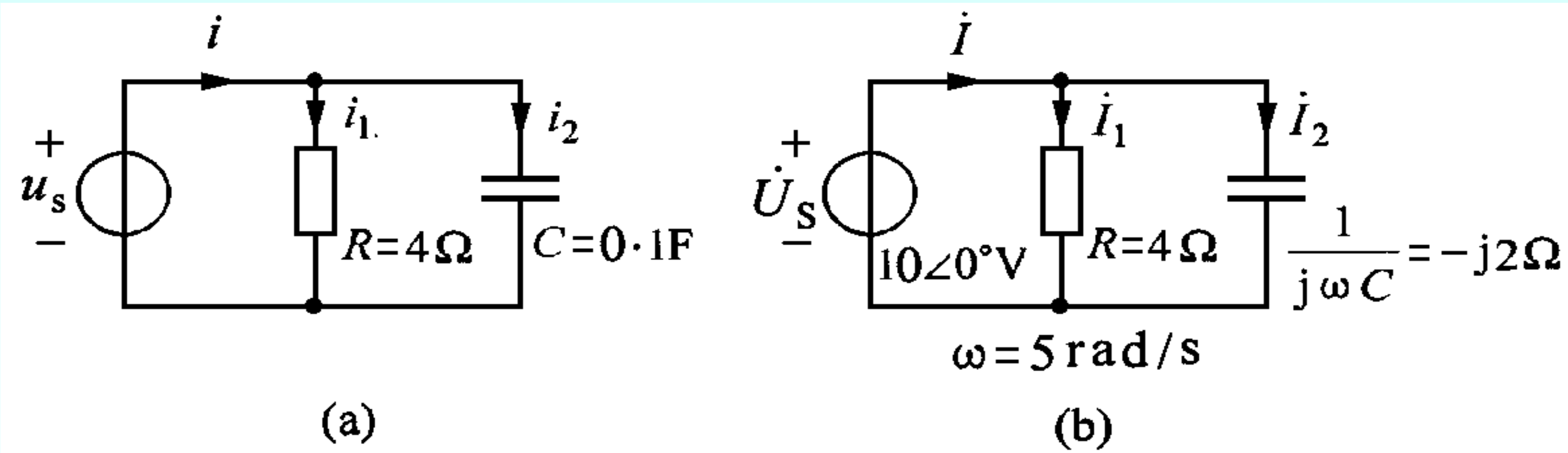
试求电流$i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$及其有效值相量。



例2 电路如图所示,已知

$$R=4\Omega, C=0.1\text{F}, u_S(t)=10\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{V}, \omega=5\text{rad/s}$$

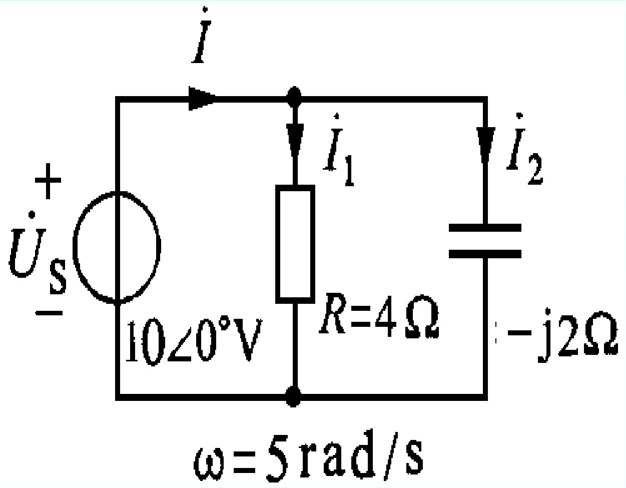
试求电流$i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$及其有效值相量。



解：画出图(a)相量模型如图(b)所示。根据*RLC*元件相量形式的VCR方程计算出电流相量。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{R}=\frac{10\angle 0^\circ}{4}=2.5\angle 0^\circ=2.5\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_s}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{10\angle 0^\circ}{-\mathrm{j}\dfrac{1}{5\times 0.1}} = \frac{10\angle 0^\circ}{-\mathrm{j}2} = \mathrm{j}5\mathrm{A} = 5\angle 90^\circ \mathrm{A}$$



根据相量形式的KCL方程得到：

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 2.5 + \mathrm{j}5 = 5.59\angle 63.4^\circ \mathrm{A}$$

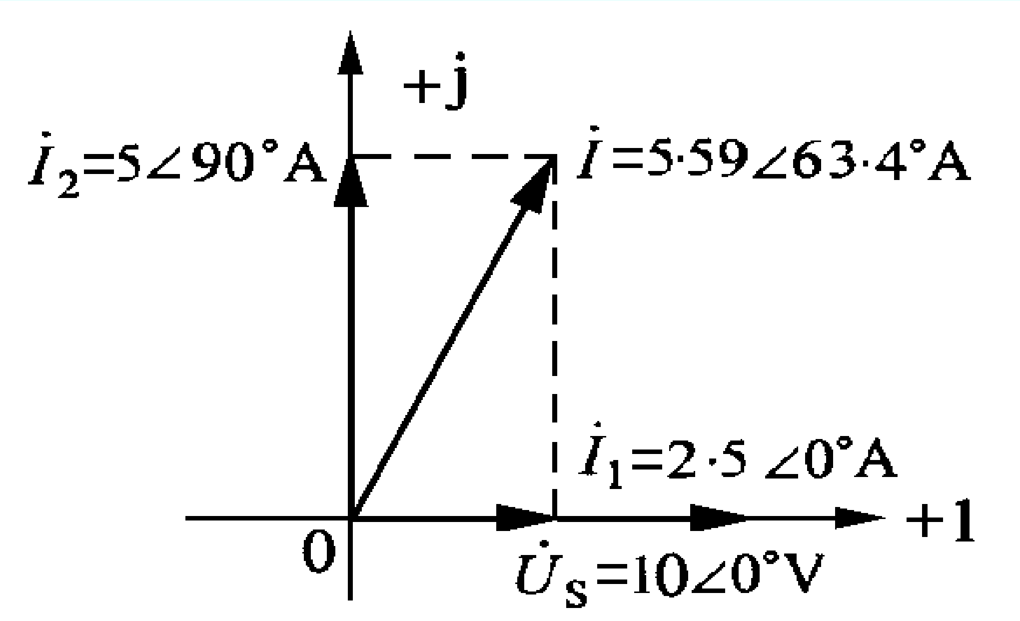
得到电流的瞬时值表达式：

$$i_1(t) = 2.5\sqrt{2}\cos 5t\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t) = 5\sqrt{2}\cos(5t + 90^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$i(t) = 5.59\sqrt{2}\cos(5t + 63.4^\circ)\ \mathrm{A}$$

根据所求得的各电压电流相量画出相量图。



由此图可以看出电流$i(t)$超前于电压$u_S(t)$的角度为63.4°。

此例中，$I=5.59\neq I_1+I_2=2.5+5=7.5$A,再次说明正弦电流电路中流出任一结点的全部电流有效值的代数和并不一定等于零。

四、阻抗与导纳 欧姆定律的相量形式

现将*RLC*元件电压电流的相量关系列写如下：

$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\dot{I}_{\mathrm{R}}$ $\qquad \dfrac{\dot{U}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{R}}} = R$ 称为电阻

$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$ $\qquad \dfrac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}} = \mathrm{j}\omega L$ 称为电感的电抗，简称 为感抗

$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}$ $\qquad \dfrac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{I}_{\mathrm{C}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ 称为电容的电抗，简称 为容抗

$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\dot{I}_{\mathrm{R}}$ $\quad$ $\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{R}}} = R$ 称为电阻

$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$ $\quad$ $\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}} = \mathrm{j}\omega L$ 称为电感的电抗，简称 为感抗

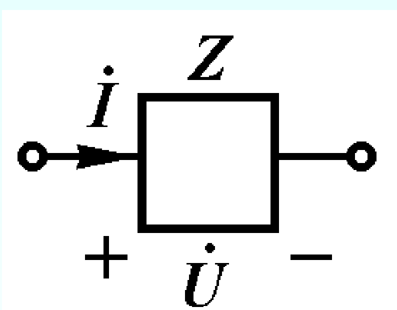
$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}$ $\quad$ $\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{I}_{\mathrm{C}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ 称为电容的电抗，简称 为容抗

我们注意到，*RLC*元件电压相量与电流相量之间的关系类似欧姆定律，电压相量与电流相量之比是一个与时间无关的量，其中R，称为电阻；jωL，称为电感的电抗，简称为感抗；1/jωC，称为电容的电抗，简称为容抗。为了使用方便，我们用大写字母*Z*来表示这个量，它是一个复数，称为阻抗。

阻抗定义为电压相量与电流相量之比，即

$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}=\begin{cases} R \\ \mathrm{j}\omega L \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{cases}$$

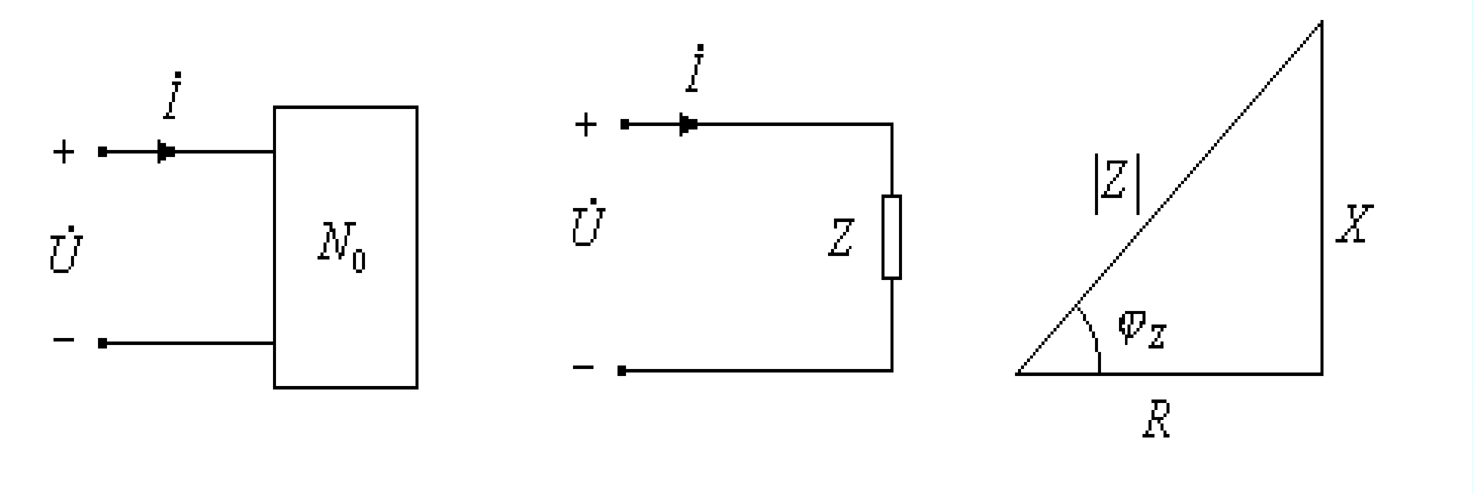
引入阻抗后，我们可以将以上三个关系式用一个式子来表示。



$$\dot U = Z\dot I \qquad \frac{\dot U}{\dot I}=Z$$

称为欧姆定律的相量形式。

一. 阻抗



1. $$Z \overset{def}{=\!=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = \frac{U}{I}\angle\varphi_u - \varphi_i = |Z|\angle\varphi_Z$$

阻抗模 $$|Z| = \frac{U}{I}$$

阻抗角 $$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$ **欧姆定律的相量形式**

2 阻抗 Z 的代数形式

$$Z = R + jX$$

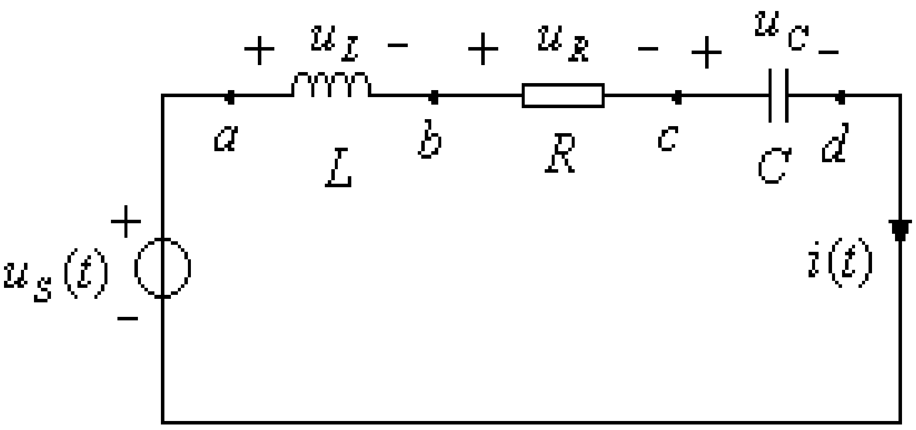
$$\begin{cases} R = \mathrm{Re}[Z] = |Z|\cos\varphi_Z & \text{电阻} \\ X = \mathrm{Im}[Z] = |Z|\sin\varphi_Z & \text{电抗} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\text{：} \quad Z_R = R \\ L\text{：} \quad Z_L = j\omega L = jX_L\text{，} \quad X_L = \omega L \quad \text{感抗} \\ C\text{：} \quad Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -jX_C\text{，} \quad X_C = \dfrac{1}{\omega C} \quad \text{容抗} \end{cases}$$

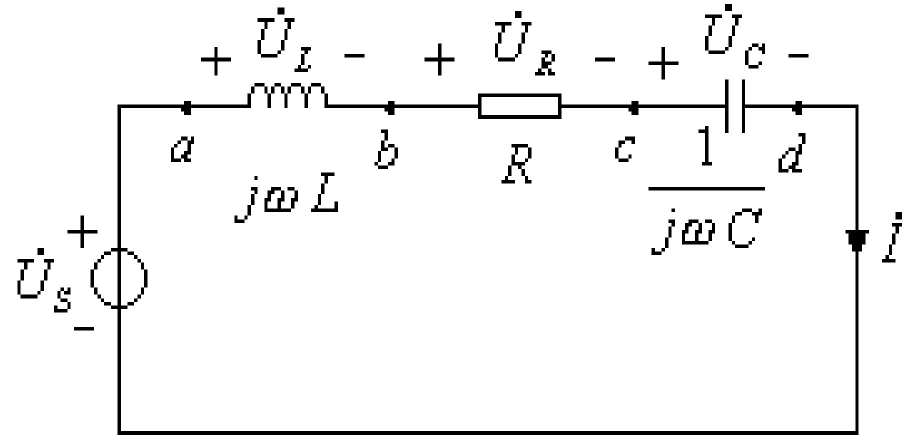
3 RLC串联电路的阻抗

相量模型是一种运用相量能很方便地对正弦稳态电路进行分析、计算的假想模型。

3. *RLC*串联电路的阻抗



电路模型N



相量模型N_ω

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=R+jX=|Z|\angle\varphi_Z$$

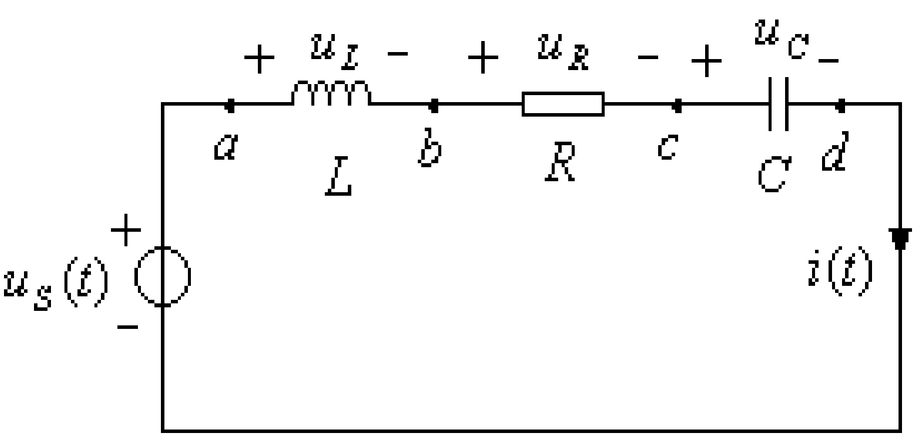
$$X=X_L-X_C=\omega L-\frac{1}{\omega C}$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+X^2}\quad,\quad \varphi_Z=\arctan(\frac{X}{R})$$

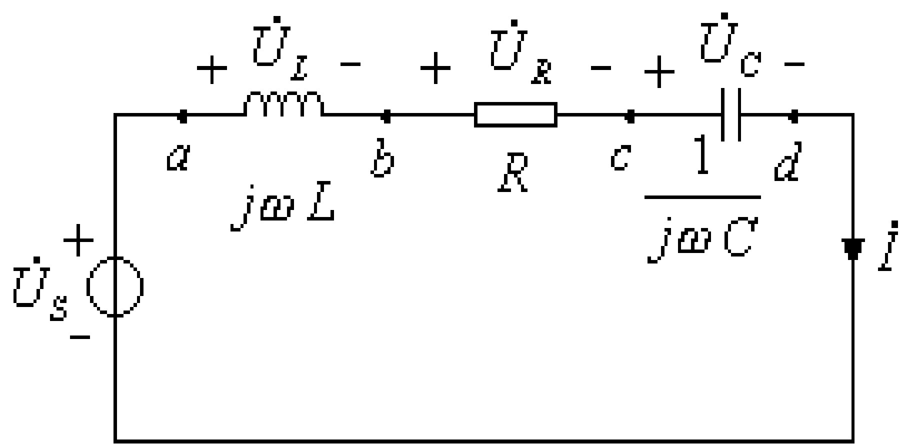
$$R=|Z|\cos\varphi_Z\quad,\quad X=|Z|\sin\varphi_Z$$

阻抗角 $\varphi_Z = \arctan\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$

$$\begin{cases} 1)\ X > 0\ ,\ \omega L > \dfrac{1}{\omega C}\ ,\ \varphi_Z > 0, Z\text{呈电感性，电压超前电流} \\ 2)\ X < 0\ ,\ \omega L < \dfrac{1}{\omega C}\ ,\ \varphi_Z < 0, Z\text{呈电容性，电压滞后电流} \\ 3)\ X = 0\ ,\ \omega L = \dfrac{1}{\omega C}\ ,\ \varphi = 0, Z\text{呈电阻性，电压电流同相} \end{cases}$$



电路模型N



相量模型N_ω

与上相似，*RLC*元件电压电流的相量关系也可以写成以下形式

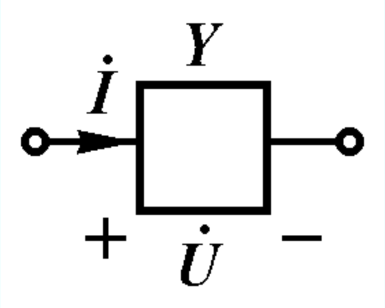
$\dot{I}_{\mathrm{R}} = G\dot{U}_{\mathrm{R}}$	$\dfrac{\dot{I}_{\mathrm{R}}}{\dot{U}_{\mathrm{R}}} = G$	称为电导
$\dot{I}_{\mathrm{L}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}_{\mathrm{L}}$	$\dfrac{\dot{I}_{\mathrm{L}}}{\dot{U}_{\mathrm{L}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}$	称为电感的电纳，简称为感纳
$\dot{I}_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{C}}$	$\dfrac{\dot{I}_{\mathrm{C}}}{\dot{U}_{\mathrm{C}}} = \mathrm{j}\omega C$	称为电容的电纳，简称为容纳

我们注意到，*RLC*元件电流相量与电压相量之比是一个与时间无关的量，其中G，称为电导；$1/\mathrm{j}\omega L$，称为电感的电纳，简称为感纳；$\mathrm{j}\omega C$，称为电容的电纳，简称为容纳。我们用大写字母Y来表示这个量，它是一个复数，称为导纳。

导纳Y定义为电流相量与电压相量之比，即

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \begin{cases} G \\ \mathrm{j}\omega C \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} \end{cases}$$

引入导纳后，可以将以上关系式用一个式子来表示。



$$\dot{I} = Y\dot{U} \qquad \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y \qquad (10-33)$$

显然，同一个二端元件的阻抗与导纳互为倒数关系，即

$$Z = \frac{1}{Y} \qquad Y = \frac{1}{Z}$$

二. 导纳

1 $$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U}\angle\varphi_i - \varphi_u = |Y|\angle\varphi_y$$

导纳模 $$|Y| = \frac{I}{U}$$

导纳角 $$\varphi_y = \varphi_i - \varphi_u$$

$$\dot{I} = Y\dot{U}$$

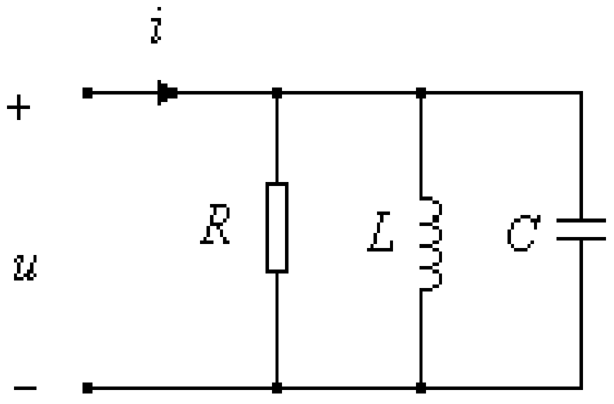
2 导纳 Y 的代数形式

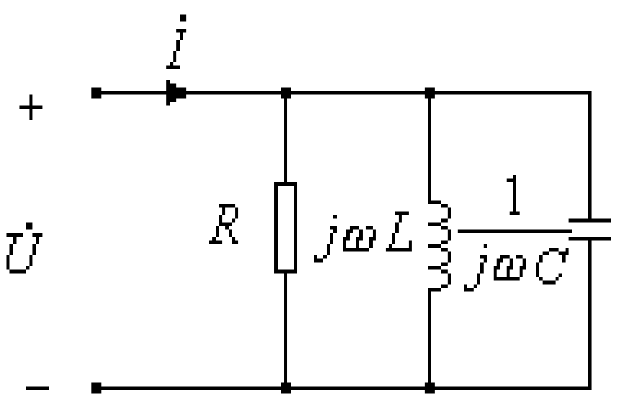
$$Y = G + jB$$

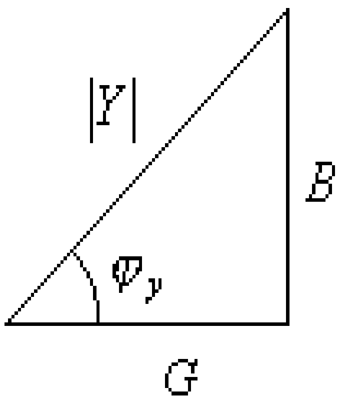
$$\begin{cases} G = \mathrm{Re}[Y] = |Y|\cos\varphi_y & \text{电导} \\ B = \mathrm{Im}[Y] = |Y|\sin\varphi_y & \text{电纳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R: & Y_R = G = \dfrac{1}{R} \\ L: & Y_L = \dfrac{1}{j\omega L} = -j\dfrac{1}{\omega L} = -jB_L, \quad B_L = \dfrac{1}{\omega L} \quad \text{感纳} \\ C: & Y_C = j\omega C = jB_C, \qquad B_C = \omega C \quad \text{容纳} \end{cases}$$

3. *RLC*并联电路的导纳







$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$= G + jB = |Y|\angle\varphi_y \qquad\qquad B = \omega C - \frac{1}{\omega L} = B_C - B_L$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi_y = \arctan\left(\frac{B}{G}\right) = \arctan\left(\frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

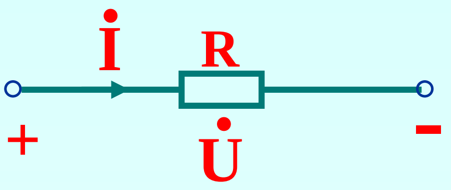
$$G = |Y|\cos\varphi_y, \quad B = |Y|\sin\varphi_y$$

导纳角 $$\varphi_y = \arctan\left(\frac{B_C - B_L}{G}\right)$$

$$\begin{cases} 1)\ B > 0,\ \omega C > \dfrac{1}{\omega L},\ \varphi_y > 0, Y \text{ 呈容性，电流超前电压} \\ 2)\ B < 0,\ \omega C < \dfrac{1}{\omega L},\ \varphi_y < 0, Y \text{ 呈感性，电流滞后电压} \\ 3)\ B = 0,\ \omega C = \dfrac{1}{\omega L},\ \varphi_y = 0, Y \text{ 呈电阻性，电压电流同相} \end{cases}$$

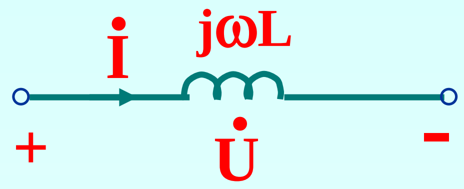
4. $Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$

电路元件的相量模型，阻抗和导纳



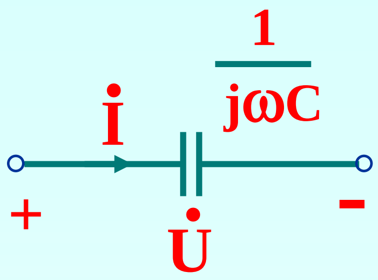
$\dot{U}=R\dot{I}$

$\dot{I}=G\dot{U}$



$\dot{U}=j\omega L\dot{I}$

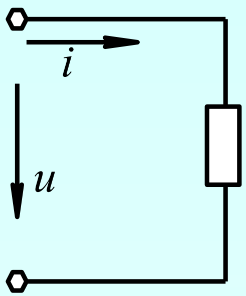
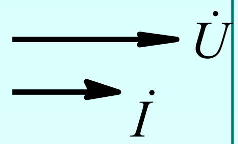
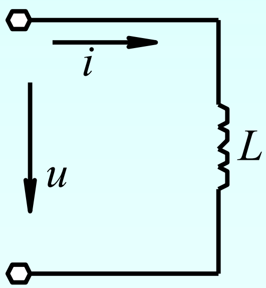
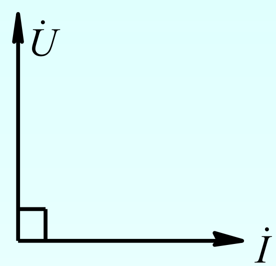
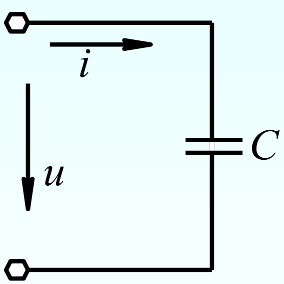
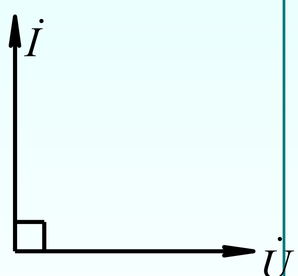
$\dot{I}=\dfrac{1}{j\omega L}\dot{U}$



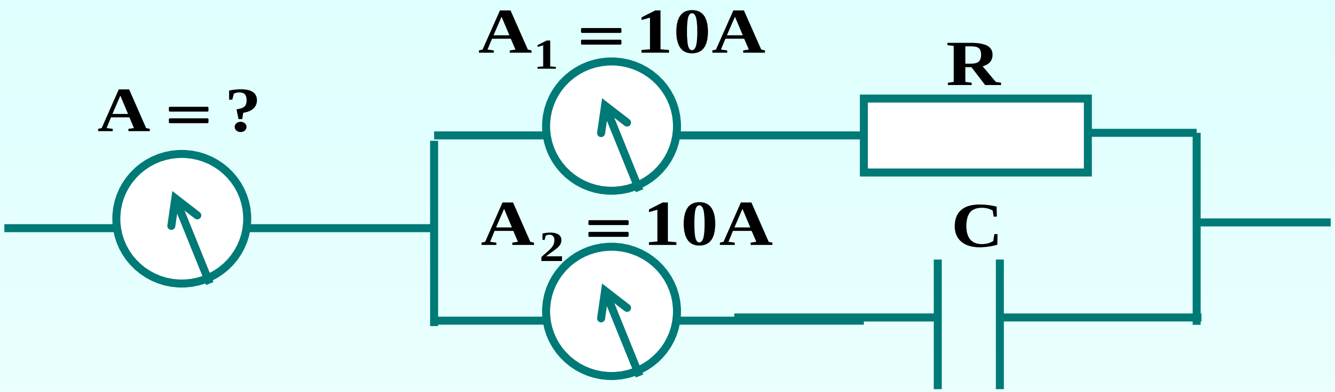
$\dot{U}=\dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}$

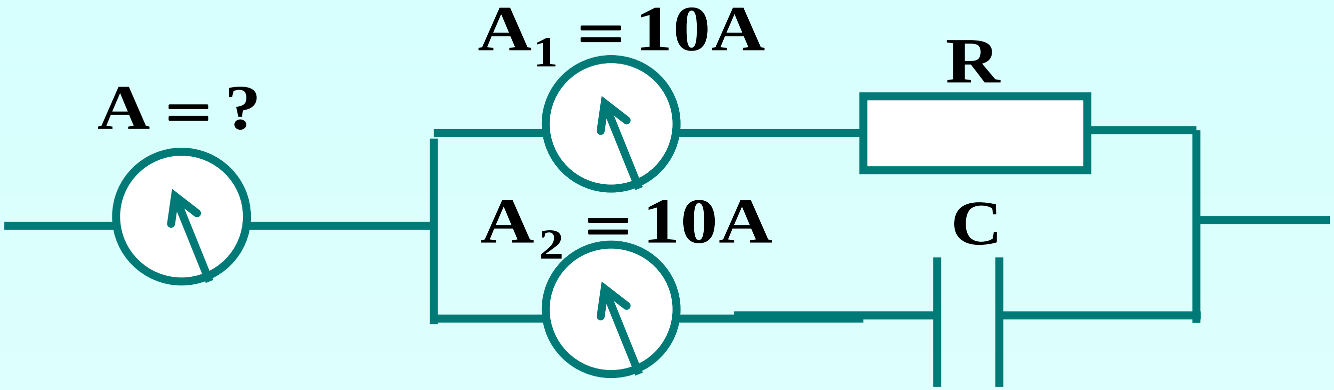
$\dot{I}=j\omega C\dot{U}$

RLC电路元件的相量模型

电路	电压和电流的大小关系	相位关系	阻抗	功率	相量关系
	$U = IR$ $I = \frac{U}{R}$		电阻R	$P = UI$ $= I^2R$ $= \frac{U^2}{R}$	$\dot{U} = \dot{I}R$
	$U = I\omega L = IX_L$ $I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}$		感抗 $X_L = \omega L$		$\dot{U} = jX_L\dot{I}$
	$U = I\frac{1}{\omega C} = IX_C$ $I = U_\omega C = \frac{U}{X_C}$		容抗 $X_C = \frac{1}{\omega C}$		$\dot{U} = -jX_C\dot{I}$

已知正弦交流驱动下，电流表A_1、A_2 的读数如图，求电流表A的读数。





解：设并联支路两端电压 $\dot{U}=U\angle 0^{0}$

则 $\dot{I}_1=10\angle 0^{0}\,\mathrm{A}$， $\dot{I}_2=10\angle 90^{0}\,\mathrm{A}=j10\mathrm{A}$

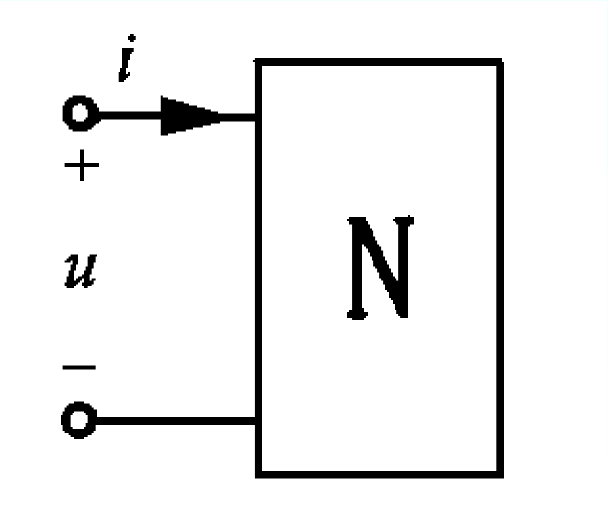
$\therefore \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10+j10=14.1\angle 45^{0}\,\mathrm{A}$

即电流表 A 的读数为 14.1A。

瞬时功率和平均功率

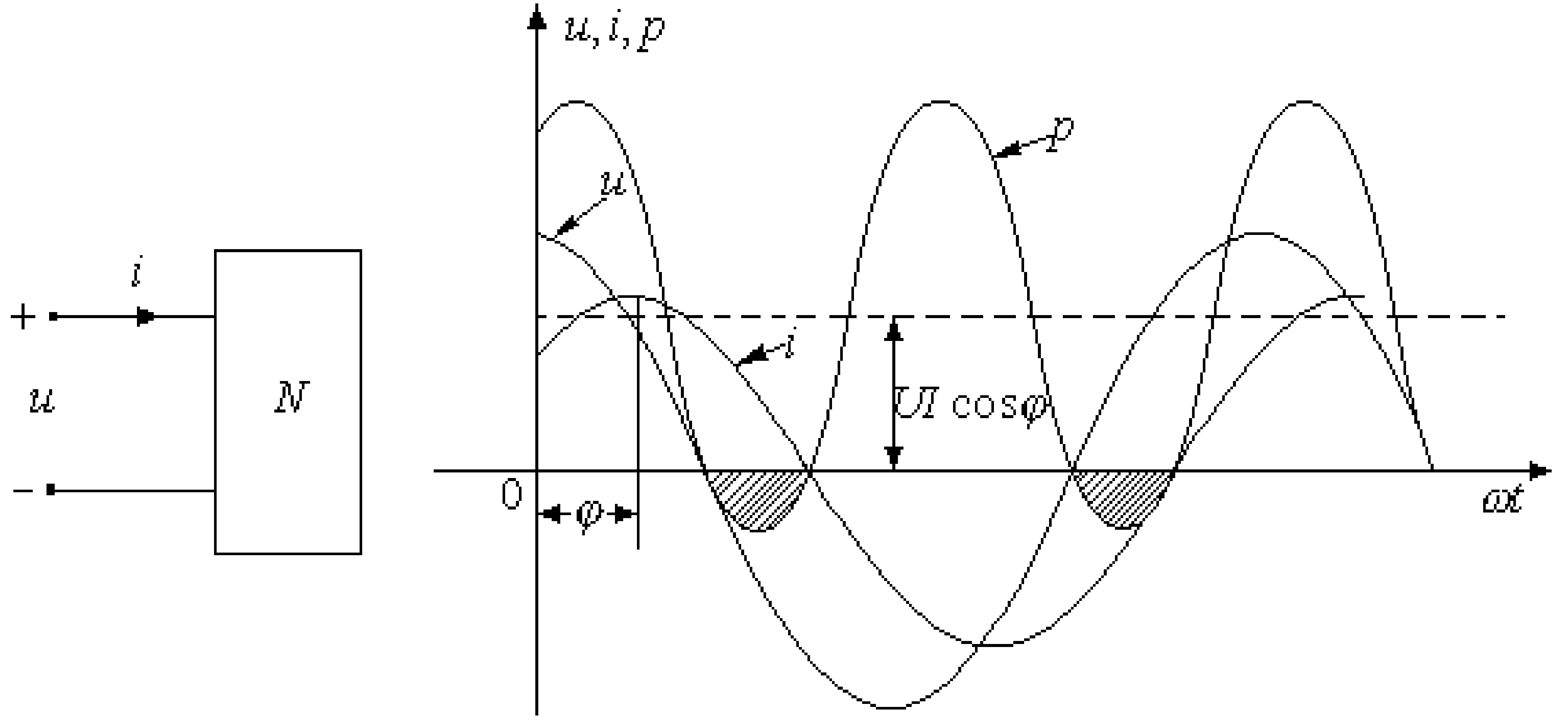
一、瞬时功率和平均功率

图示单口网络，在端口电压和电流采用关联参考方向的条件下，它吸收的（瞬时）功率为：



$$p(t) = u(t)i(t)$$

1. 瞬时功率 $p(t) = u(t)i(t)$



$$p = ui = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u)\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p = 2UI\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$= UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

$$= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

① p>0, N 吸收功率， p<0, 发出功率；

② p 以 2ω 角频率变化；

③ 恒定分量 $UI\cos\varphi$

正弦分量 $UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$ 角频率为 2ω

$$p = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

2.平均功率（有功功率）：电阻上的功率.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi \qquad \text{(W)}$$

其中:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$ **功率因数**

一般: $|\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2}$

则：0≤cosφ≤1

阻抗角= $\varphi_u - \varphi_i$ **=功率因数角**

3 视在功率与功率因数

正弦电流电路中，二端网络吸收的平均功率为：

$$P = UI\cos\varphi$$

视在功率： $S = UI = \frac{1}{2}U_m I_m$ 表示电器设备的容量。

功率因数： $\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi$

功率因数的取值范围： $1 \le \lambda \le 0$

当 $\lambda=1$ 时 $|\varphi|=0^o$ 网络的视在功率等于平均功率，网络为纯电阻电路或谐振电路。

当 $\lambda=0$ 时 $|\varphi|=90^o$ 网络的平均功率等于零，网络为纯电抗电路。

4 复功率和无功功率

复功率定义：

$$\tilde{S} = \dot{U}\,\dot{I}^{*} = \frac{1}{2}\dot{U}_m\,\dot{I}_m^{*}$$

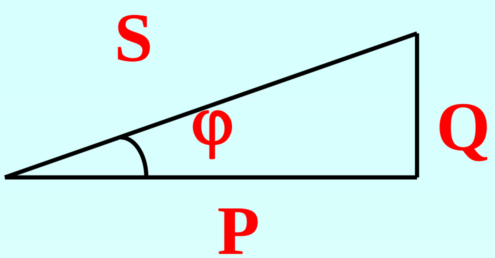
注意：复功率取实部即等于平均功率。

而复功率取虚部则称之为无功功率(单位：var，乏)，定义如下：

$$Q = UI\sin(\psi_u - \psi_i) = UI\sin\varphi$$

动态元件上的功率.

. 视在功率



表示电器设备的容量。

S = U I　（ VA 或 伏安 ）

S、P、Q之间关系

功率三角形.

$$\begin{cases} P = UI\cos\varphi = S\cos\varphi & \text{(W)} \\ Q = UI\sin\varphi = S\sin\varphi & \text{(var)} \\ S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} & \text{(VA)} \end{cases}$$

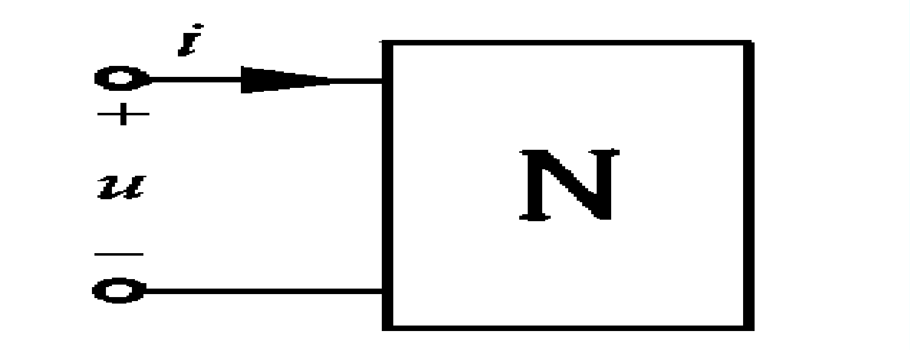
总结:正弦稳态单口网络功率关系

符号	名称	公式	备注
p	瞬时功率	$p=ui=\mathrm{Re}\left[\dot{U}\overset{*}{I}\right]+\mathrm{Re}\left[\dot{U}\dot{I}e^{j2\omega t}\right]$	
P	平均功率	$P=UI\cos\varphi_Z=I^2\,\mathrm{Re}[Z]$ $=U^2\,\mathrm{Re}[Y]=\mathrm{Re}\left[\dot{U}\overset{*}{I}\right]$	有功功率，$\varphi_Z=\varphi_u-\varphi_i$
Q	无功功率	$Q=UI\sin\varphi_Z=I^2\,\mathrm{Im}[Z]=-U^2\,\mathrm{Im}[Y]$ $=\mathrm{Im}\left[\dot{U}\overset{*}{I}\right]=2\omega(W_L-W_C)$	瞬时功率交变分量最大值 $W_L=\frac{1}{2}LI^2,\ W_C=\frac{1}{2}CU^2$
S	视在功率	$S=UI=I^2\lvert Z\rvert=U^2\lvert Y\rvert=\left\lvert\dot{U}\overset{*}{I}\right\rvert$	动态元件瞬时功率最大值
$\overline{S}$	复功率	$\overline{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=P+jQ$	
λ	功率因数	$\lambda=\cos\varphi_Z=\frac{P}{S}=\frac{R}{\lvert Z\rvert}=\frac{G}{\lvert Y\rvert}$	$\varphi_Z>0$, 电流滞后

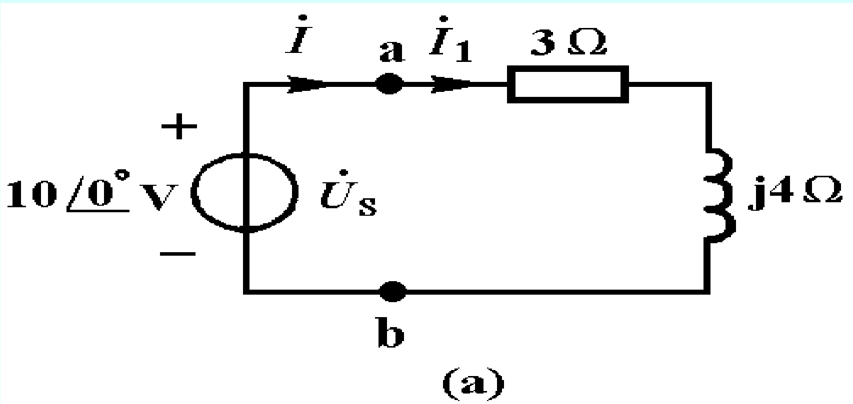
例1 ：单口网络电压 $u = 300\sqrt{2}\cos(314t + 10°)\ V$ **，电流** $i = 50\sqrt{2}\cos(314t - 45°)\ A$ **，且为关联参考方向， 求网络吸收的平均功率。**

解： $U = 300\ V,\ I = 50\ A,\ \varphi = \varphi_Z = 10° - (-45°) = 55°$

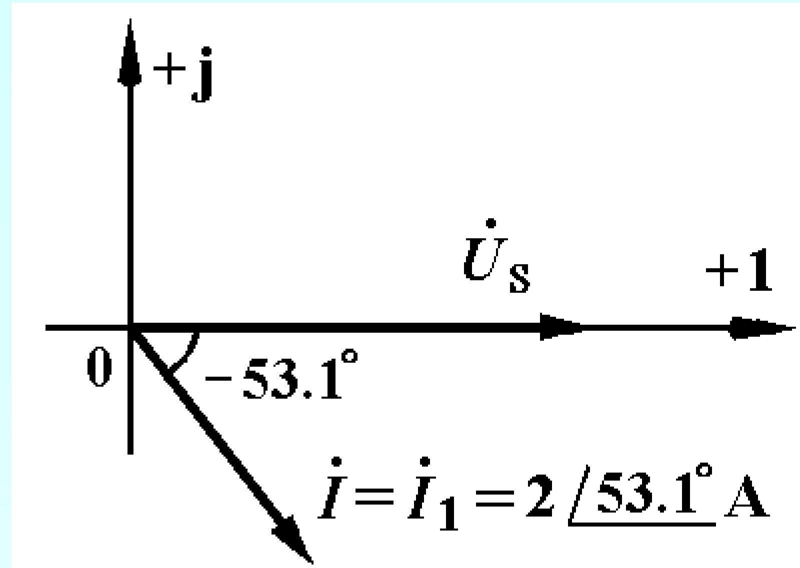
$$P = UI\cos\varphi = 300 \times 50 \times \cos 55^0 = 8610\ W$$



例2 图(a)表示电压源向一个电感性负载供电的电路模型，试用ab端口并联电容的方法来提高负载的功率因数。



(a)



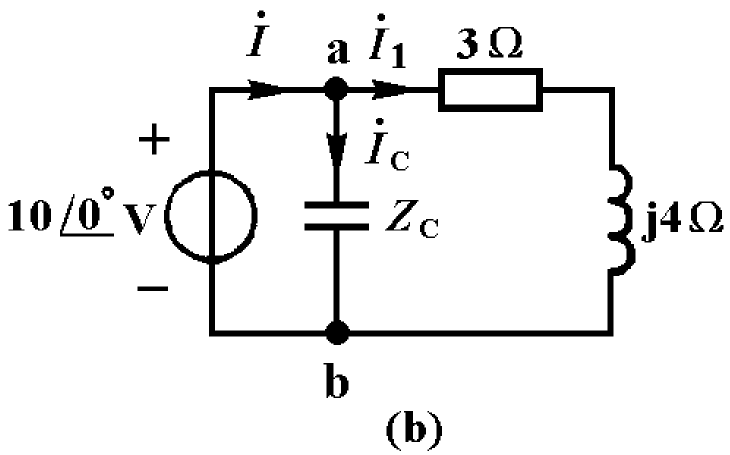
解：图(a)电路中的电流为：

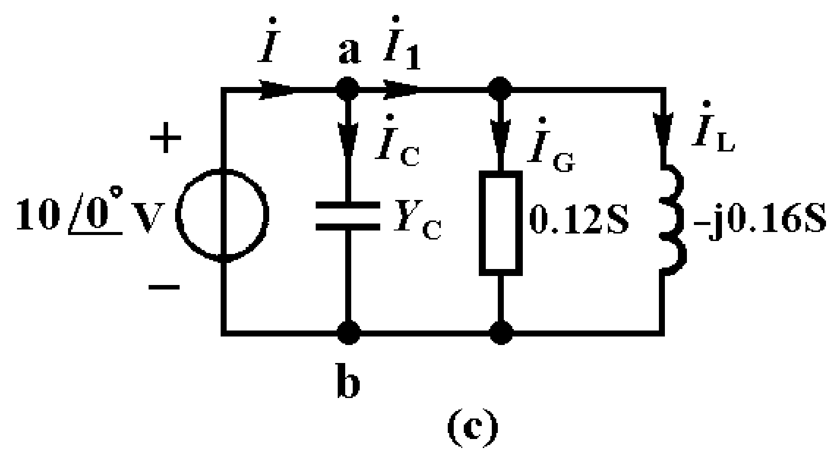
$$\dot I = \dot I_1 = \frac{\dot U_S}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{3+j4} = 2\angle -53.1^\circ \mathrm{A}$$

其相量图如图(d)所示。单口网络吸收的平均功率为：

$$P = UI\cos\varphi = 10\times 2\times \cos(53.1^\circ) = 12\mathrm{W}$$

此时的功率因数$\lambda=\cos\varphi=0.6$，功率的利用效率很低。

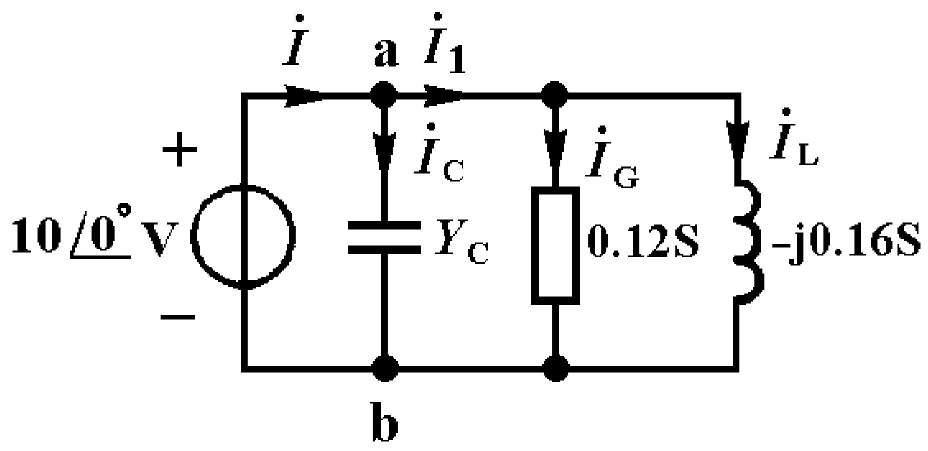




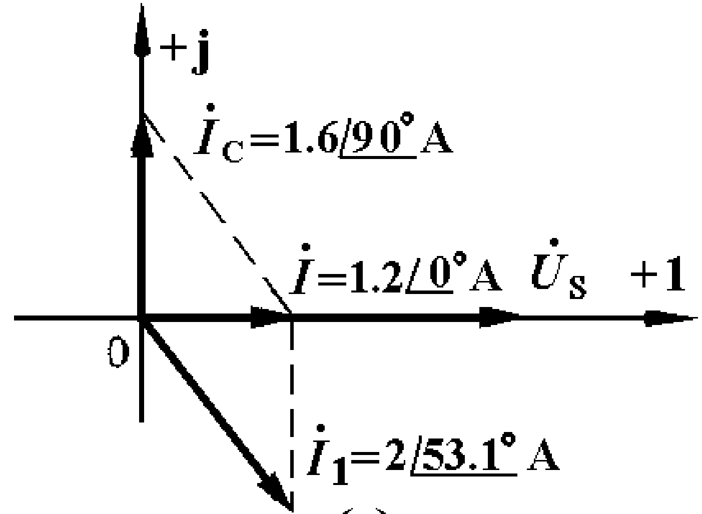
为了提高功率因数，可以在ab两端上并联一个电容，如图(b)所示。为分析方便，先将电阻与电感串联等效变换为电阻和电感的并联，如图(c)所示，其电导和电纳值由下式确定：

$$Y = G + \mathrm{j}B = \frac{1}{3+\mathrm{j}4} = \frac{3-\mathrm{j}4}{3^2+4^2} = (0.12 - \mathrm{j}0.16)\mathrm{S}$$

从此式可见，并联的电容的导纳为$Y_C=\mathrm{j}\omega C=+\mathrm{j}0.16\mathrm{S}$时，单口网络呈现为纯电阻，可以使功率因数提高到1，即效率达到100%。



(c)



(e)

并联电容后，图(b)和(c)电路端口的电流变为

$$\dot I=\dot I_1+\dot I_C=(\dot I_G+\dot I_L)+\dot I_C=(G\dot U_S+Y_L\dot U_S)+Y_C\dot U_S$$

$$=(1.2-\mathrm{j}1.6)+\mathrm{j}1.6=1.2\angle 0^\circ\mathrm{A}$$

其相量图如图(e)所示，由此可见，并联电容后，不会影响电阻中的电流和吸收的平均功率P=12W。而端口电流由2A减小到1.2A，提高了电源的利用效率。可以将节省下来的电流，提供给其它用户使用。