第四章 随机变量的数字特征

学号：

姓名：

一、选择题（每小题 10 分，共计 30 分）

1. 设二维随机变量（X,Y）的分布律为

X\Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

则（X,Y)的协方差 Cov(X,Y)=(A)

A $-\frac{1}{9}$　　B 0　　C $\frac{1}{9}$　　D $\frac{1}{3}$

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim B(16,0.5), Y\sim \pi(9)$, 则 $D(X-2Y+1)=$（ C ）

A -14　　B 13　　C 40　　D 41

3. 设随机变量 X,Y 都服从正态分布，且它们不相关，则（ C ）

A X 与 Y 一定独立　　B （X,Y）服从二维正态分布

C X 于 Y 未必独立　　D X+Y 服从一维正态分布

二、填空题（每小题 10 分，共计 20 分）

1. 已知 EX=-1，DX=3，则 $E(3X^2-2)=$ <u>10</u>.

2. 设 X_1, X_2, Y 均为随机变量，已知 $Cov(X_1,Y)=-1, Cov(X_2,Y)=3$, 则 $Cov(X_1+2X_2,Y)=$ <u>5</u>.

三、解答题（第 1 题 20 分，第 2 题 30 分，共计 50 分）

1. 已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$, 设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,

（1）求 Z 的数学期望 EZ 和方差 DZ;

（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XY}.

解: (1) $EX=1 \quad DX=9 \quad EY=0 \quad DY=16$

$EZ=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$

$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

$=\frac{3^2}{9}+\frac{4^2}{4}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times3\times4=1+4-2=3$

(2) $Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$=\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times3\times4=0$

所以 $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DZ}}=0$

2.设随机变量（X,Y）的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} ye^{-(x+y)}, & x,y>0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

判断 X,Y 是否相关，是否独立.

解: $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xye^{-(x+y)}dxdy=1$

$EY=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}y^2e^{-(x+y)}dydx=2$

$EX^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2ye^{-(x+y)}dydx=2$

$EY^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}y^2\cdot ye^{-(x+y)}dydx=6$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=2-1=1$

$DY=EY^2-(EY)^2=6-2^2=2$

因为 $EXY=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xy\cdot ye^{-(x+y)}dydx=2$

所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$

即得 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$ 故X与Y不相关.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le0 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} ye^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le0 \end{cases}$

所以 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$ 故X,Y相互独立