学号：

姓名：

第五、六单元

一、选择题（每小题 10 分，共计 30 分）

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots X_{50}, \cdots$ 相互独立，且 X_i 服从泊松分布 $P(0.1), i=1,2,\cdots,50,$

则 $\sum_{i=1}^{50} X_i$ 近似服从 （A）

A N(5, 5)　　B N($\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$)　　C N(5, $\frac{1}{5}$)　　D N(0.1, $\frac{1}{500}$)

2. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i = \begin{cases} 0, A\text{不发生}, \\ 1, \ A\text{发生} \end{cases} (i=1,2,\cdots,100)$, 且 $P(A)=0.8$, $X_1, X_2, \cdots X_{100}$ 相互独立，令 $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（B）

A $\Phi(y)$　　B $\Phi(\frac{y-80}{4})$　　C $\Phi(16y+80)$　　D $\Phi(4y+80)$

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1-2X_2)^2 + b(3X_3-4X_4)^2$，若统计量 X 服从 χ^2 分布，则（D

A $a=20, \ b=100$　　B $a=\sqrt{20}, \ b=10$

C $a=\frac{1}{\sqrt{20}}, \ b=\frac{1}{10}$　　D $a=\frac{1}{20}, \ b=\frac{1}{100}$

二、填空题（每小题 10 分，共计 20 分）

1. 设随机变量 $X \sim U[0,1]$，由切比雪夫不等式可得 $P\left\{\left|X-\frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \leq$ $\frac{1}{4}$.

2. 设总体 $X \sim N(0, \ 0.25)$, $X_1, X_2, \cdots, X_7$ 为来自总体的样本，要使 $a\sum_{i=1}^{7} X_i^2 \sim \chi^2(7)$, 则 $a=$ 4.

三、解答题（第 1 题 20 分，第 2 题 30 分，共计 50 分）

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geq 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 EY

解：考虑 $(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots(X_n+X_{2n})$，将其视为取自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，则其样本均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$

样本方差为 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_i+X_{n+i})-2\overline{X}]^2=\frac{1}{n-1}Y$

由于 $E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$

所以 $EY=(n-1)\cdot(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2$

2.设某供电网有 10000 盏灯，夜晚每一盏灯开灯的概率是 0.7，而所有电灯开或关是彼此独立的，试用切比雪夫不等式估计夜晚同时开着的灯数在 6800 到 7200 的概率.

解：设 X 表示同时开着的电灯数量，则 $X\sim B(10000,0.7)$

于是 $EX=np=7000$，$DX=np(1-p)=2100$

由切比雪夫不等式

$P\{6800<X<7200\}=P\{|X-7000|<200\}$

$\geq 1-\frac{2100}{200^2}\approx 0.95$

故夜晚同时开灯数在 6800～7200 的概率超过 95%