最后，例 4.23 加上第 4 个圆. 4 个方程 3 个未知变量 x、y、K 的问题又成为最小二
231 乘问题，需要高斯-牛顿方法求解. 最后一个公式和 GPS 计算相关，具体见事实验证 4.

例 4.21 考虑中心在$(x_1, y_1)=(-1, 0)$，$(x_2, y_2)=(1, 1/2)$，$(x_3, y_3)=(1, -1/2)$的平面上的三个圆，半径分别是 $R_1=1$，$R_2=1/2$，$R_3=1/2$. 使用高斯-牛顿方法找出一个点，该点到三个圆的距离的平方和最小.

圆如图 4.13a 所示. 点(x, y)最小化余项误差的平方和：

$$r_1(x,y)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-R_1$$
$$r_2(x,y)=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}-R_2$$
$$r_3(x,y)=\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}-R_3$$

它遵从一点(x, y)到圆心为(x_1, y_1)，半径为 R_1 的圆的距离为$\left|\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-R_1\right|$的事实(见习题 3). $r(x, y)$的雅可比矩阵如下

$$Dr(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{x-x_1}{S_1} & \frac{y-y_1}{S_1}\\ \frac{x-x_2}{S_2} & \frac{y-y_2}{S_2}\\ \frac{x-x_3}{S_3} & \frac{y-y_3}{S_3}\end{bmatrix}$$

其中 $S_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$，$i=1, 2, 3$. 初值为$(x^0, y^0)=(0, 0)$的高斯-牛顿插值，收敛到$(\bar{x}, \bar{y})=(0.412891, 0)$，7 步后精确到小数点后 6 位.

例 4.10 使用线性化拟合给定的高度-体重数据，使用幂法则模型.

年龄在 2～11 岁之间男孩的身高数据来自疾病控制中心在 2002 年得到的美国国家健康与营养检查报告，如下表：

年龄(yrs)	身高(m)	体重(kg)	年龄(yrs)	身高(m)	体重(kg)
2	0.9120	13.7	7	1.2600	27.2
3	0.9860	15.9	8	1.3200	32.7
4	1.0600	18.5	9	1.3800	36.0
5	1.1300	21.3	10	1.4100	38.6
6	1.1900	23.5	11	1.4900	43.7

使用前面的策略，得到的关于体重-身高的幂法则模型是 $W=16.3H^{2.42}$. 该关系如图 4.8所示. 由于重量和体积相关，系数 $c_2\approx2.42$ 可以看做是人的"有效维".

血液中的药物浓度 y 可以很好地由下面的模型描述：

199

$$y=c_1te^{c_2t} \tag{4.21}$$

其中 t 表示药物服用后的时间. 模型特点是当药物进入血管后浓度出现一个明显上升，随后是一个缓慢的指数衰减. **半衰期**对应药物从峰值浓度降低到一半所花的时间. 通过在两侧使用自然对数，模型可以线性化：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots \\ & r_{nn} \end{bmatrix}$$

或者 $A=QR$，其中 A 是包含列向量 A_j 的矩阵. 我们把这称为**消减 QR 分解**；完整的形式在前面. 关于 A_j 线性无关的假设保证主对角线系数 r_{jj} 非 0. 相反地，如果 A_j 在 A_1，…，A_{j-1} 所张的空间中，则 A_j 在向量 A_1，…，A_{j-1} 上的投影构成整个向量 A_j，$r_{jj}=\|y_j\|_2=0$.

例 4.12 使用格拉姆-施密特正交找出消减 QR 分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 2 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$ 213

令 $y_1=A_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，则 $r_{11}=\|y_1\|_2=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$，第一个单位向量是

$$q_1=\frac{y_1}{\|y_1\|_2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

为找出第 2 个单位向量，令

204

相同数量的加法(习题 11).

> **正交** 第 2 章中，我们发现 LU 分解是对高斯消去中信息进行有效编码的方式. 以相同方式，QR 分解记录了矩阵正交化的信息，即构造一个正交集，张出由 A 的列向量构成的空间. 使用正交矩阵计算更好的原因是(1)根据定义它们很容易求逆，(2)由引理 4.2 知，它们不会放大误差.

215

例 4.13 找出矩阵 A 的完全 QR 分解：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 2 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

在例 4.12 中，我们找到正交单位向量，

$$q_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}, q_2=\begin{bmatrix}-\frac{14}{15}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{15}\end{bmatrix}$$

加上第三个向量 $A_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 得到

$$y_3=A_3-q_1q_1^{\mathrm{T}}A_3-q_2q_2^{\mathrm{T}}A_3$$

206