

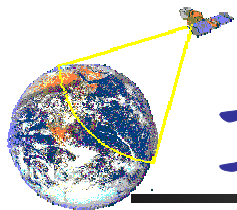
数字图像处理与分析

第七章 图像复原

刘定生

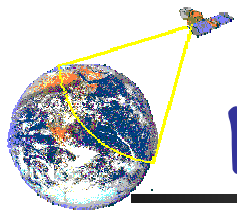
中科院中国遥感卫星地面站

2004年春季学期



第七章 图像复原

- 图像复原基本概念
 - 图像退化与复原模型
 - 图像复原基本原理
- 噪声单独干扰下的图像滤波复原
 - 噪声模型及参数估计
 - 空间滤波器设计
 - 自适应空间滤波器
 - 周期性干扰频域滤波器设计
- 系统退化复原
 - 线性系统退化函数的估计
 - 逆滤波复原方法
 - 最小均方误差滤波（维纳滤波）
 - 约束最小二乘方滤波器



图像复原基本概念

■ 图像复原—基本概念

➤ 从客观角度，改善图像的质量

✓ 图像增强—**Enhancement is subjective**

❖ 从主观视觉角度，改善图像质量；

❖ 不着重考虑引起图像质量下降的客观因素

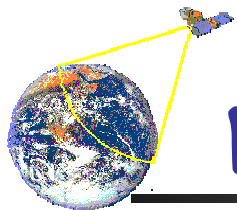
✓ 图像复原—**Restoration is objective**

❖ 从造成图像质量下降的客观原因出发，改善图像质量；

❖ 试图恢复图像原来的面貌

➤ 图像复原总是试图寻找引起图像质量下降的客观原因，有针对性地进行“复原”处理

➤ 获得使图像质量下降的先验知识，建立退化模型是图像复原处理的前提与关键

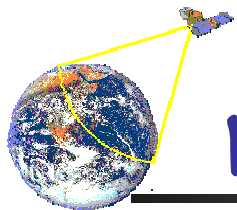


图像复原基本概念

■ 引起图像质量下降的客观因素

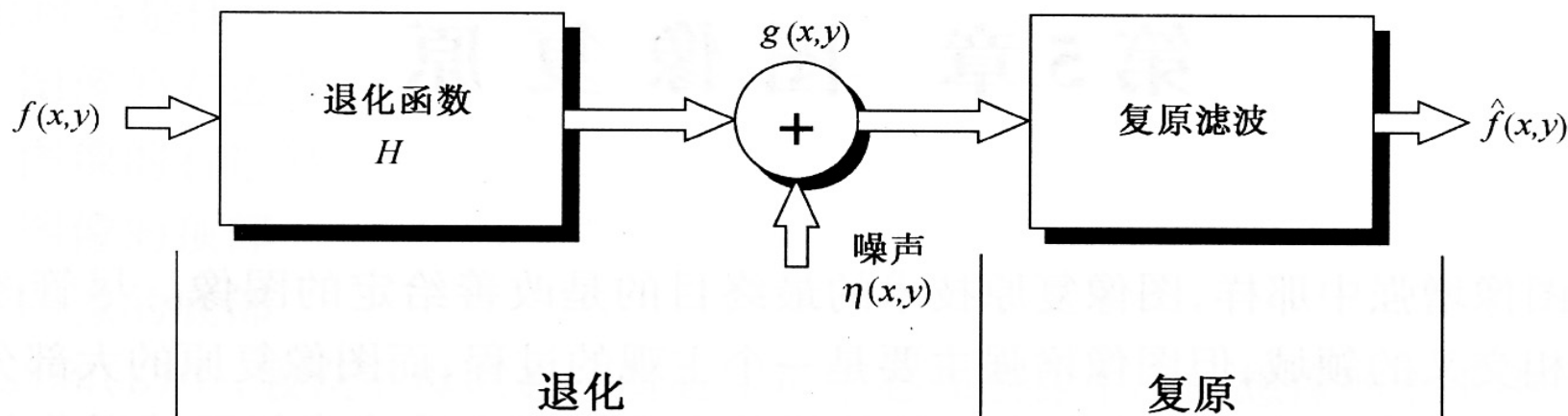
- 成象系统的象差、畸变、带宽有限等造成图象失真;
- **几何失真**: 由于成象器件拍摄姿态和扫描非线性引起;
- **灰度失真**: 光学系统或成象传感器本身特性不均匀, 造成同样亮度景物成象灰度不同;
- **运动模糊**: 成象传感器与被拍摄景物之间的相对运动, 引起所成图象的运动模糊;
- **辐射失真**: 由于场景能量传输通道中的介质特性如大气湍流效应、大气成分变化引起图象失真;
- **噪声干扰**: 图象在成象、数字化、采集和处理过程中引入的噪声等。

■ 针对上述客观因素, 建立图像退化模型, 是进行图像复原处理的第一步



图像退化与复原模型

■ 图像退化与复原模型

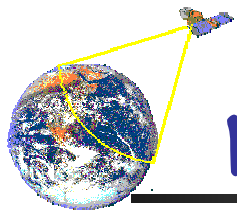


➤ 降质图像可表示为:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

➤ 其中 $H[\cdot]$ 是综合所有退化因素的函数

有效地获得退化系统 H 和噪声 η 的模型，
是成功进行图像复原的关键



图像退化与复原模型

■ 线性移不变图像退化模型

➤ 考察图像退化模型

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

其中 $H[\cdot]$ 是综合所有退化因素的函数

➤ 假定噪声干扰为零，进一步考察上述模型

✓ 若

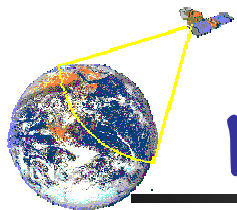
$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$$

则该系统为线性系统

✓ 若

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

则该系统为位移不变系统



图像退化与复原模型

■ 线性移不变退化模型

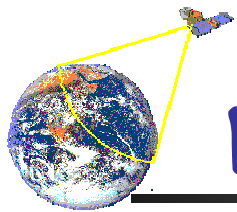
➤ 连续函数退化模型

- ✓ 对线性移不变系统，假定噪声为加性噪声，可有连续函数退化模型

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \\ &= f(x, y) * h(x, y) + \eta(x, y) \end{aligned}$$

- ✓ 及其频域表示

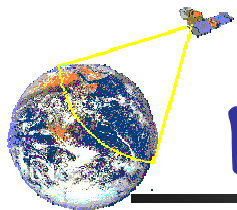
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$



图像复原基本原理

■ 图像复原基本原理

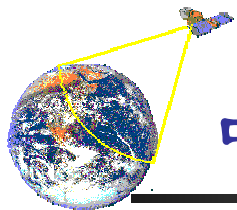
- 图象复原正是根据退化原因，建立相应的数学模型，从被污染或畸变的图象信号中提取所需要的信息，处理过程相当于沿着使图象降质的逆过程恢复图象本来面貌
- 实际的复原过程相当于设计一个滤波器，使其能从降质图象 $g(x, y)$ 中计算得到真实图象的估值 $\hat{f}(x, y)$ ，使其根据预先规定的误差准则，最大程度地接近真实图象 $f(x, y)$ 。
- 广义上讲，图象复原是一个求逆（反演）问题，逆问题经常存在非唯一解，甚至无解。为了得到逆问题的有用解，需要有先验知识以及对解的附加约束条件



图像复原基本原理

■ 图像复原基本原理（续）

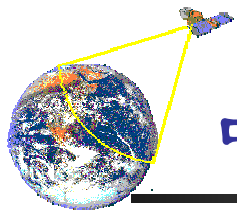
- 引起图像退化的原因常常为非线性的，非线性以及与位置相关的退化处理技术，虽然可得到更加精确的结果，但在处理上将会非常困难并常常可能无解
- 对许多退化过程用线性系统近似不但可以方便求解，而且可得到基本满意的结果
- 从线性系统角度，图像的退化可看作为原始图像与退化函数的卷积，因此线性图像复原往往称之为“图像去卷积”，所采用的滤波器称之为“去卷积滤波器”



噪声模型及参数估计

■ 噪声模型

- 数字图像中的噪声主要来源于图像获取与传输过程
- 白噪声 (White noise)
 - ✓ 白噪声的傅里叶频谱为常数
 - ✓ 假定白噪声与空间坐标系相互独立
 - ✓ 假定白噪声与图像像素之间相互独立
- 周期性噪声
 - ✓ 噪声分布与空间坐标系相关
 - ✓ 大多数周期性噪声可通过频域滤波基本消除



噪声模型及参数估计

■ 噪声模型

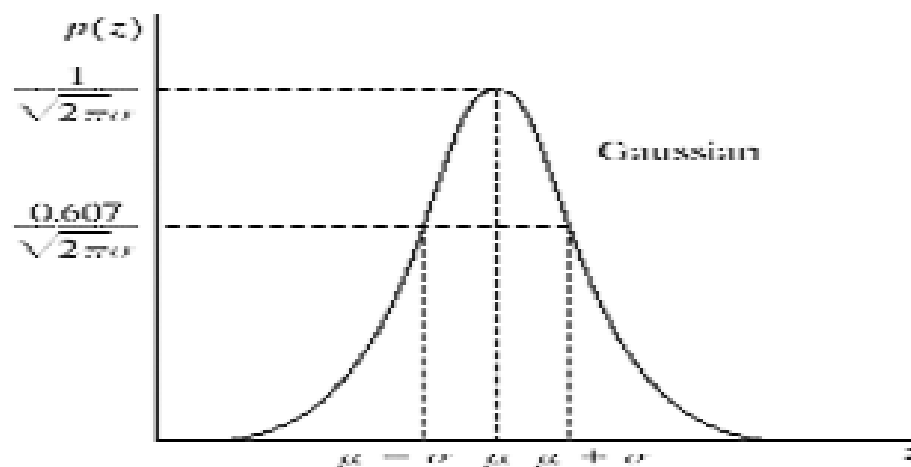
➤ 主要噪声的概率密度函数

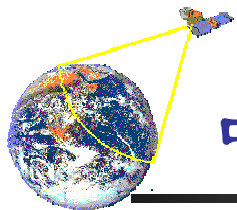
✓ 高斯噪声 (Gaussian noise)

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = \mu$$

$$\sigma^2 = \sigma^2$$





噪声模型及参数估计

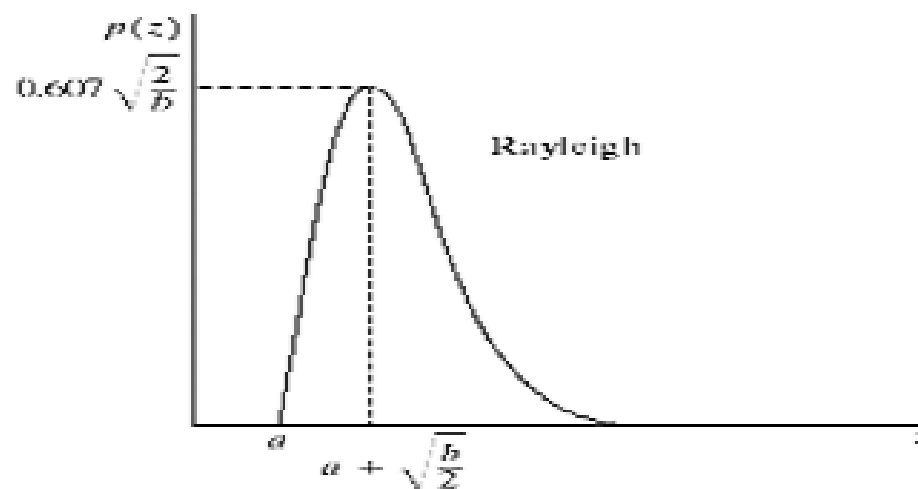
■ 噪声模型

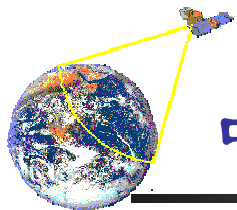
➤ 主要噪声的概率密度函数

✓ 瑞利噪声 (Rayleigh noise)

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

$$\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}}$$
$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$





噪声模型及参数估计

■ 噪声模型

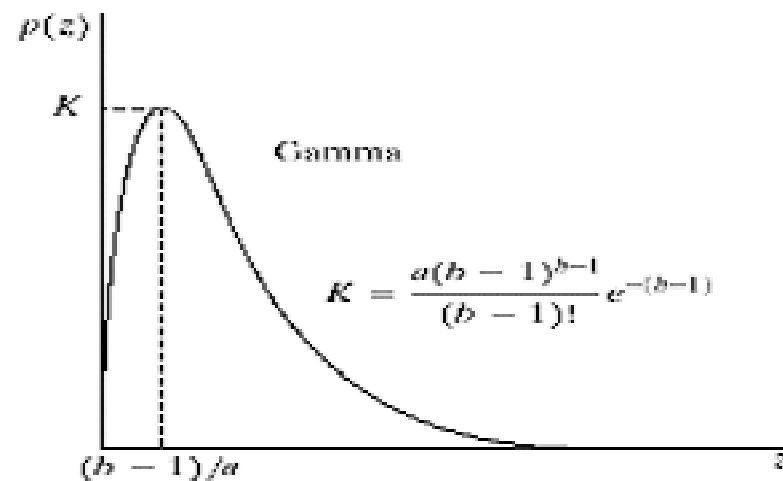
➤ 主要噪声的概率密度函数

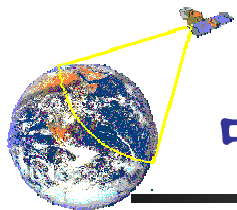
✓ 爱尔兰（伽马）噪声（Erlang(Gamma) noise）

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$





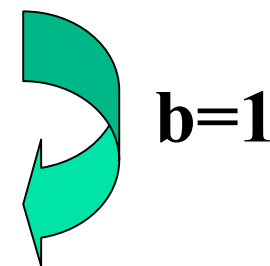
噪声模型及参数估计

■ 噪声模型

➤ 主要噪声的概率密度函数

✓ 爱尔兰（伽马）噪声（Erlang(Gamma) noise）

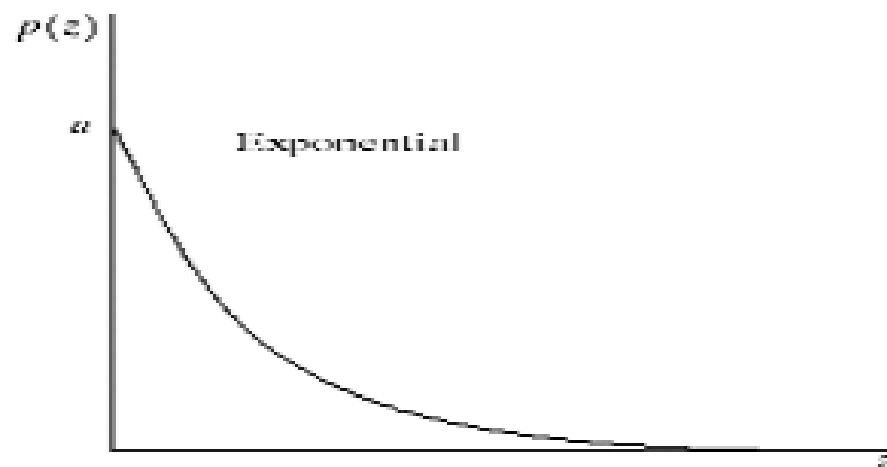
✓ 指数分布噪声（Exponential noise）

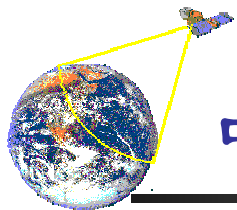


$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$





噪声模型及参数估计

■ 噪声模型

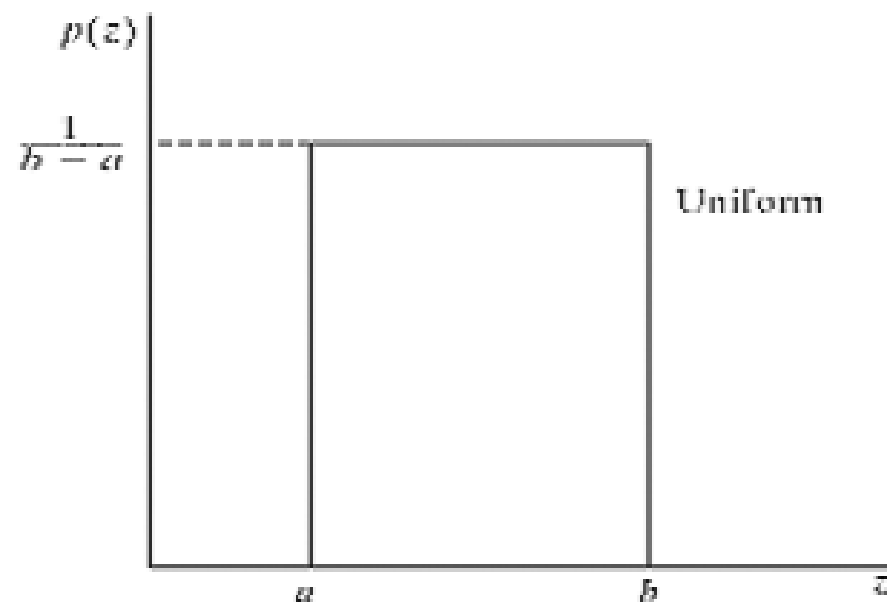
➤ 主要噪声的概率密度函数

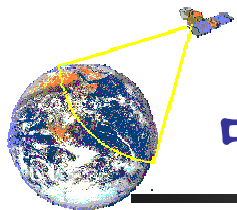
✓ 均匀分布噪声 (Uniform noise)

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$





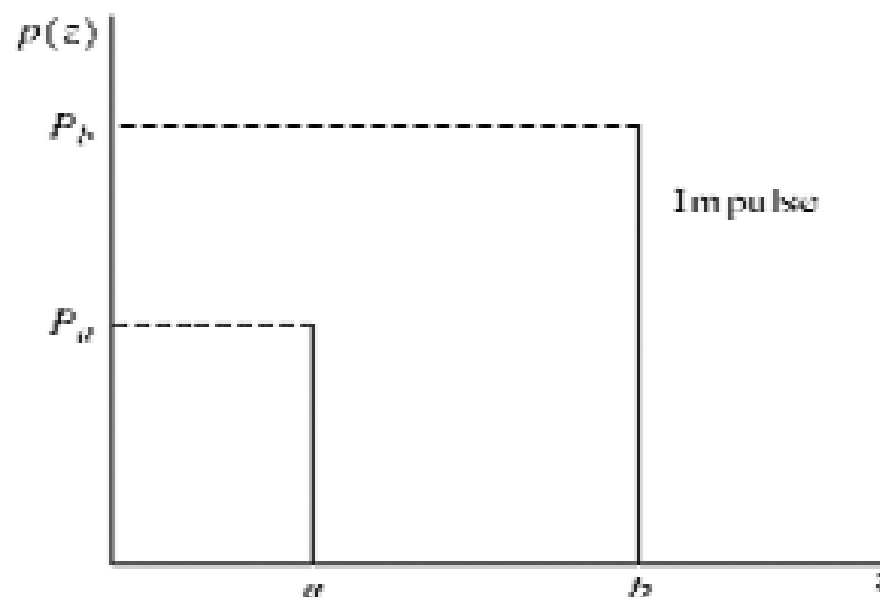
噪声模型及参数估计

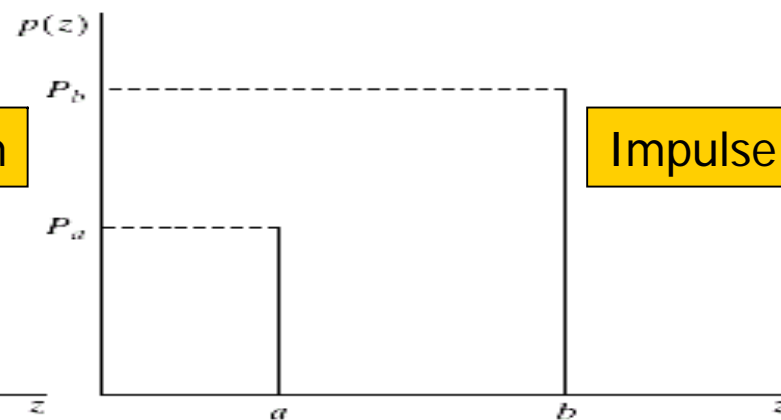
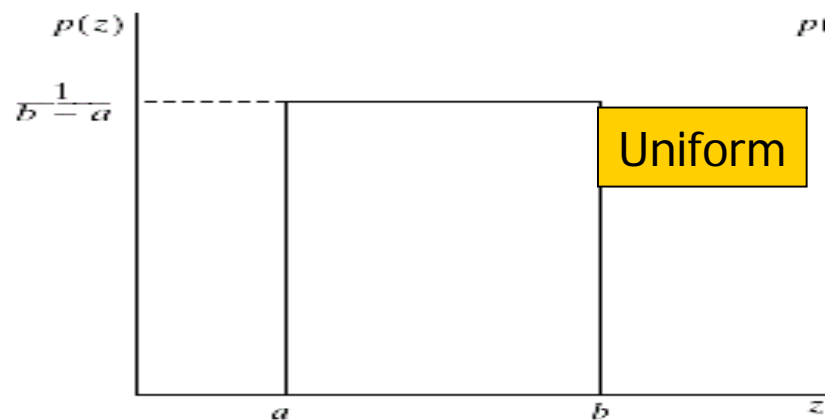
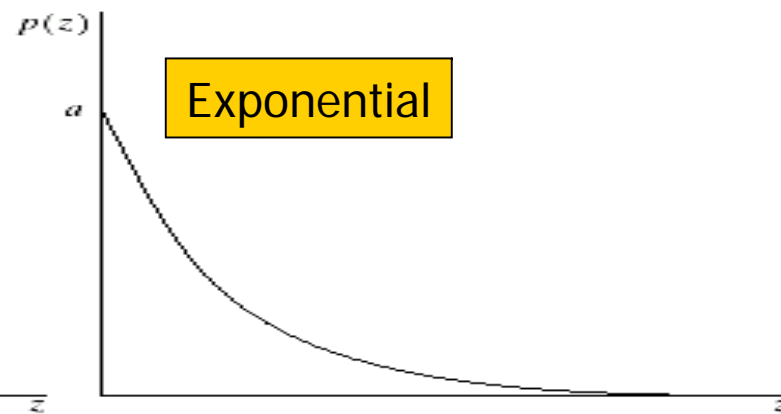
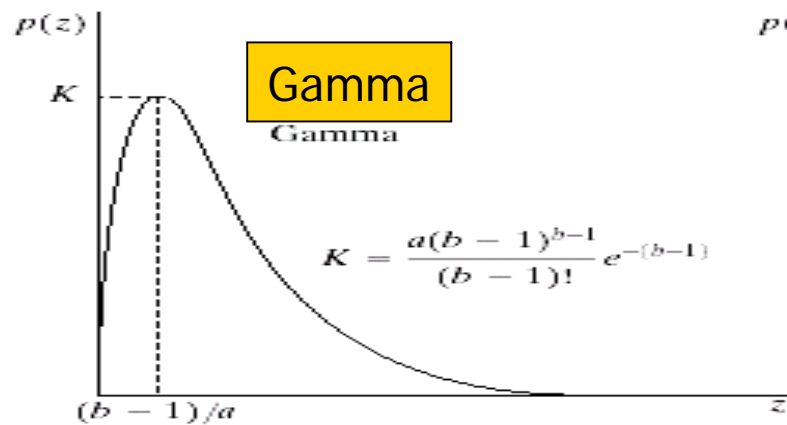
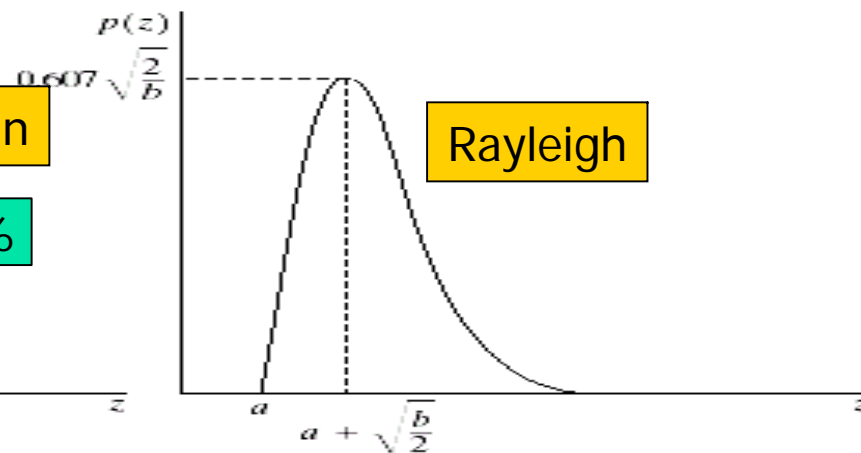
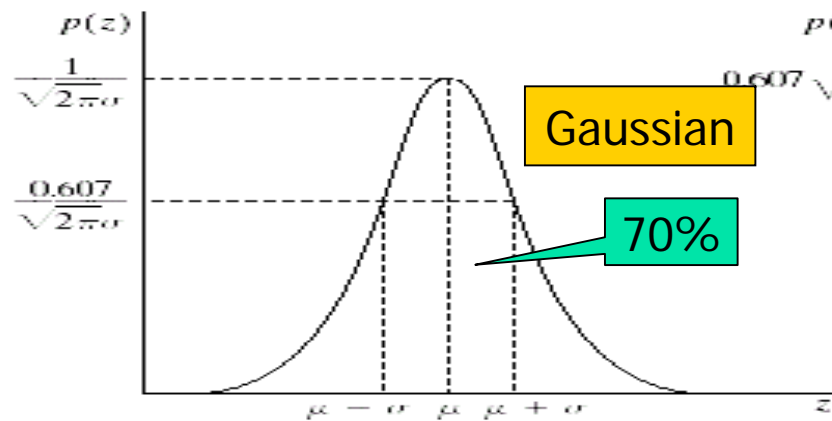
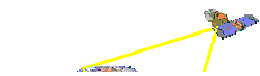
■ 噪声模型

➤ 主要噪声的概率密度函数

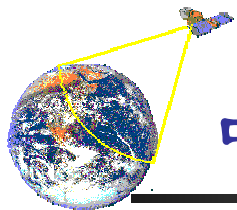
✓ 脉冲噪声（椒盐噪声）（Impulse(Salt-and-Pepper) noise）

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





噪声对于图像的影响



噪声模型及参数估计

■ 噪声参数的估计

➤ 所需参数

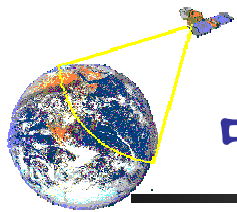
$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

➤ 通过传感器特性进行估计

- ✓ 分析传感器成像器件特性（温度、光谱响应、电子电路特性、...）
- ✓ 使传感器针对均匀灰度图像成像

➤ 从图像本身进行估计

- ✓ 在图像中截取具有恒定灰度值区域进行计算
 - ❖ 直方图 → σ 、 μ



噪声模型及参数估计

■ 噪声参数的估计

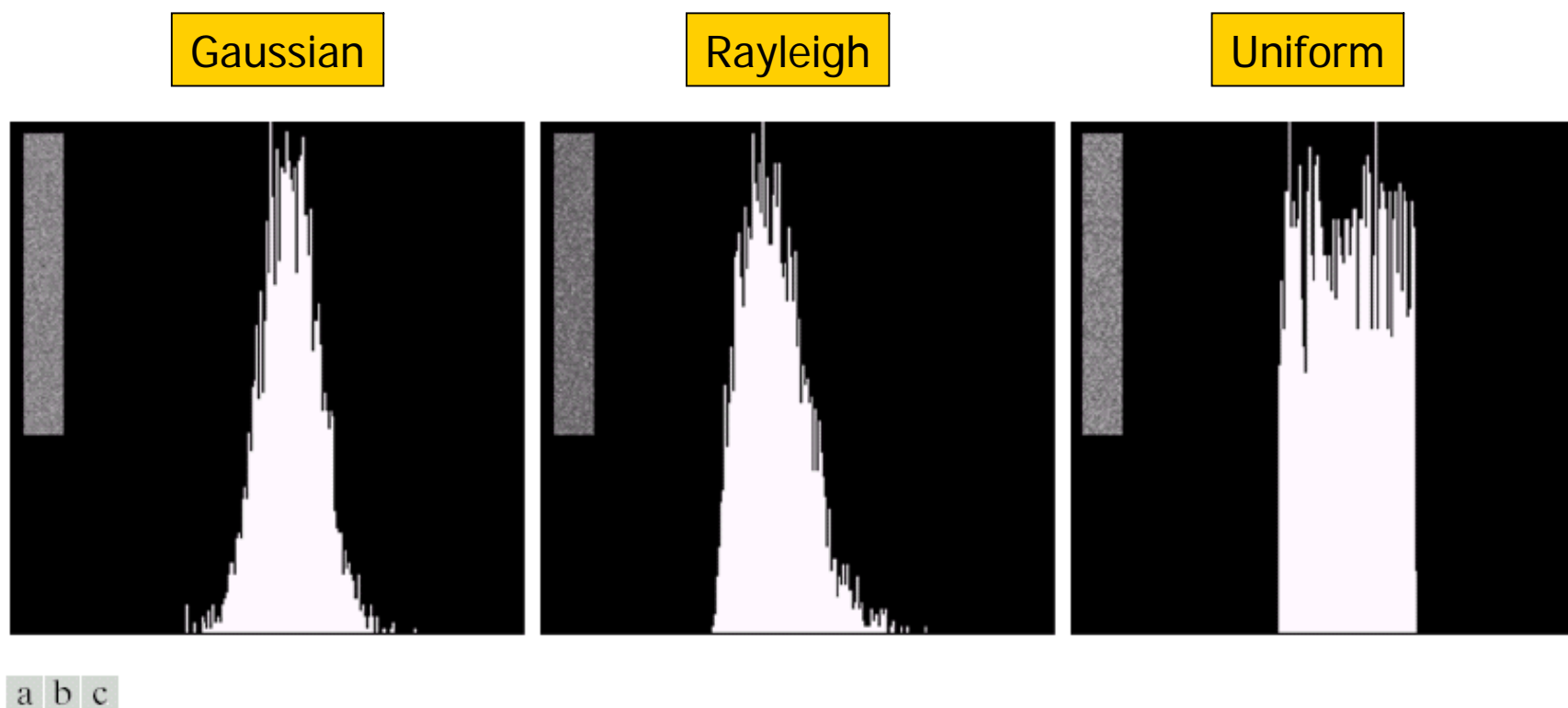
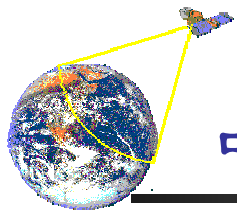


FIGURE 5.6 Histograms computed using small strips (shown as inserts) from (a) the Gaussian, (b) the Rayleigh, and (c) the uniform noisy images in Fig. 5.4.



噪声单独干扰下的图像滤波复原

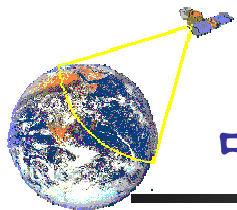
■ 噪声单独干扰下的图像滤波复原基本原理

➤ 引起图像降质的唯一原因是噪声干扰时，退化模型变为：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \quad \Rightarrow \quad g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad \Rightarrow \quad G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

- 噪声函数 $\eta(x, y)$ 一般很难得到
- 仅当噪声为周期性噪声时，可通过分析 $G(u, v)$ 得到 $N(u, v)$ ，但难于建立分析规律
- 其他加性噪声存在时，通常选择空间滤波技术，与图像增强中滤波机理完全一样
- 结合噪声模型可建立一些特殊滤波器，其效果可优于在图像增强中常用方法



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间滤波器设计

➤ 算术均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

➤ 几何均值滤波器

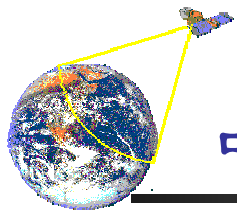
- ✓ 平滑度与算术滤波器相当
- ✓ 图像细节丢失更少

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

➤ 谐波均值滤波器

- ✓ 对“盐”噪声较好
- ✓ 不适用于“胡椒”噪声
- ✓ 善于处理高斯噪声

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间滤波器设计

➤ 逆谐波均值滤波器

式中Q称为滤波器的阶数

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

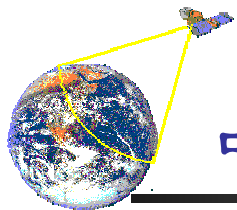
$Q < 0$ for salt
 $Q > 0$ for pepper

$Q = 0$

算术均值

$Q = -1$

谐波均值



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间滤波器设计

➤ 顺序统计滤波器——基于像素的顺序统计特性决定其相应

✓ 中值滤波器

- ❖ 适用于多种噪声
- ❖ 由其对脉冲噪声效果显著

$$\hat{f}(x, y) = \text{media} \{g(s, t)\}_{(x, y) \in S_{xy}}$$

✓ 最大值滤波器

- ❖ 对胡椒噪声效果较好

$$\hat{f}(x, y) = \max \{g(s, t)\}_{(x, y) \in S_{xy}}$$

✓ 最小值滤波器

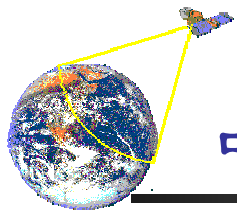
- ❖ 对盐噪声效果较好

$$\hat{f}(x, y) = \min \{g(s, t)\}_{(x, y) \in S_{xy}}$$

✓ 中点滤波器

- ❖ 对高斯和均匀分布噪声具有最好效果

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \max \{g(s, t)\}_{(x, y) \in S_{xy}} \\ + \min \{g(s, t)\}_{(x, y) \in S_{xy}} \end{array} \right\}$$



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间滤波器设计

- 顺序统计滤波器—基于像素的顺序统计特性决定其相应
 - ✓ 修正阿尔法均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

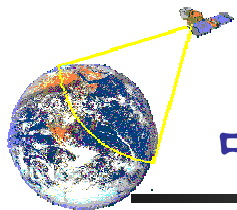
$$d=0$$

算术均值

$$d = \frac{mn-1}{2}$$

中值

在包含多种噪声的情况下效果较好



噪声单独干扰下的图像滤波复原

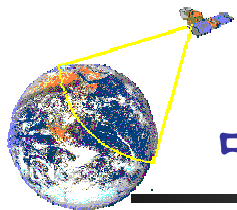
■ 空间滤波器设计

➤ 固定滤波器缺陷

- ✓ 固定滤波器未考虑图像的局部特性，难以达到更好效果
- ✓ 为提高滤波性能，固定滤波器日益复杂，但适用面却日益缩小

➤ 自适应滤波器

- ✓ 结合图像的局部特性自动修改滤波器参数或滤波策略
- ✓ 良好设计的自适应滤波器其性能要优于所有固定滤波器，而滤波器结构可能更为简单



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间自适应滤波器

➤ 局部噪声自适应滤波器

✓ 以局部区域随机变量的统计特性（均值、方差）为基础

设

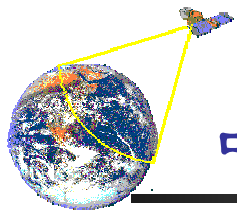
$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

具有整体噪声方差 σ_η^2

在局部区域 S_{xy} （为 $g(x, y)$ 的子集），像素点具有局部均值 m_l 和方差 σ_l^2 ；

✓ 可有自适应滤波器：

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_l^2} [g(x, y) - m_l]$$

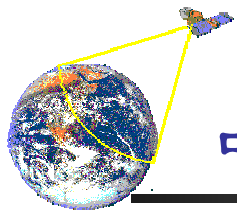


噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间自适应滤波器

➤ 该自适应滤波器基于如下的设想:

- ✓ 如果噪声方差为零, 则表明没有噪声; $f(x,y)$ 等于 $g(x,y)$
- ✓ 如果局部方差高于噪声方差, 表明该局部图像信息多于噪声, 可能存在较多的边沿, 应尽可能保留; 则返回一个 $g(x,y)$ 的近似值
- ✓ 如果局部方差与噪声方差相等, 表明该区域噪声干扰严重; 返回局部区域像素的算术平均值
- ✓ 实际效果



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间自适应滤波器

➤ 自适应中值滤波器

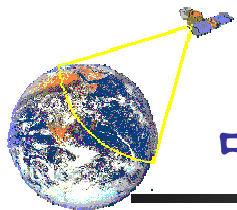
设: $z_{\min} = S_{xy}$ 中灰度级的最小值

$z_{\max} = S_{xy}$ 中灰度级的最大值

$z_{\text{med}} = S_{xy}$ 中灰度级的中值

z_{xy} = 在 S_{xy} 中中心化坐标 (x, y) 处的像素值

$S_{\max} = S_{xy}$ 允许的最大尺寸



噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间自适应滤波器

➤ 自适应中值滤波器

可有算法

A层:

$$A1 = z_{med} - z_{min} \quad A2 = z_{med} - z_{max}$$

如果: $A1 > 0$ 且 $A2 < 0$, 转到 B层

否则: 增大窗口尺寸

如果窗口尺寸 $\leq S_{max}$, 重复 A层

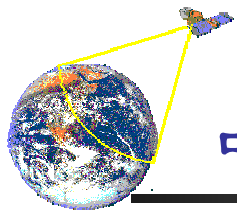
否则输出 B层

B层:

$$B1 = z_{xy} - z_{min} \quad B2 = z_{xy} - z_{max}$$

如果: $B1 > 0$ 且 $B2 < 0$, 输出 z_{xy}

否则: 输出 z_{med}

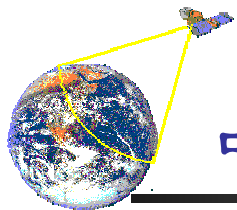


噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 空间自适应滤波器

➤ 自适应中值滤波器—算法讨论

- ✓ 目标：滤出椒盐噪声（冲激噪声）；平滑其他非冲激噪声；减少物体边界失真
- ✓ 设想： z_{\max} 、 z_{\min} 可粗略认为相当于冲激噪声的噪声成分
- ✓ 算法思路：
 - 1) 首先检测中值 z_{med} 是否为噪声脉冲
 - 2) 若不是，进一步判断中心像素 z_{xy} 是否为噪声脉冲，若不是，直接输出该点；若是，输出中值
 - 3) 若中值 z_{med} 为噪声脉冲，则增大窗口尺寸，直至在允许的范围内找到非噪声脉冲中值；否则输出中心像素 z_{xy} 值
- ✓ 算法效果

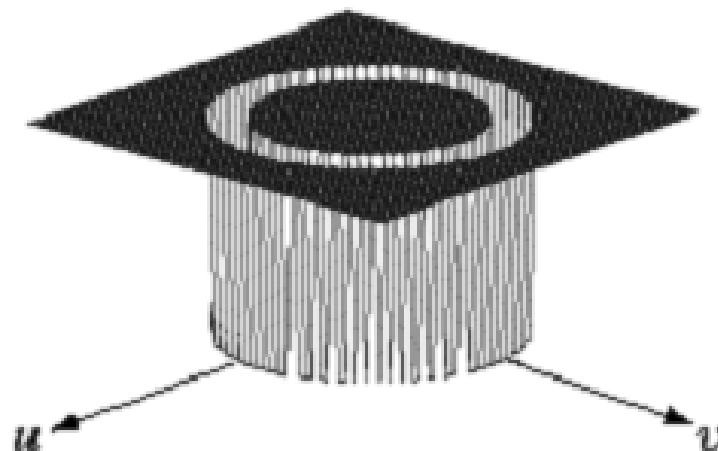


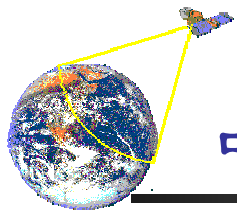
噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 周期性噪声频域滤波—带阻滤波器

➤ 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) < D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$





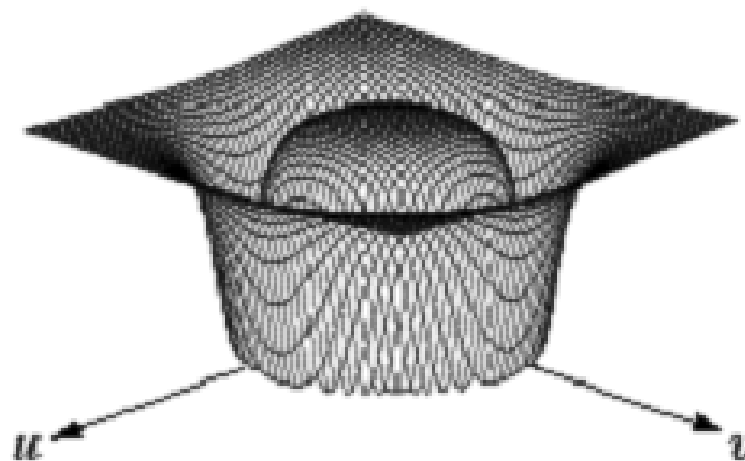
噪声单独干扰下的图像滤波复原

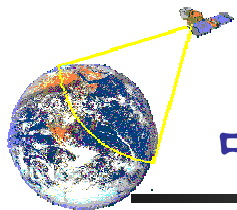
■ 周期性噪声频域滤波——带阻滤波器

➤ 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



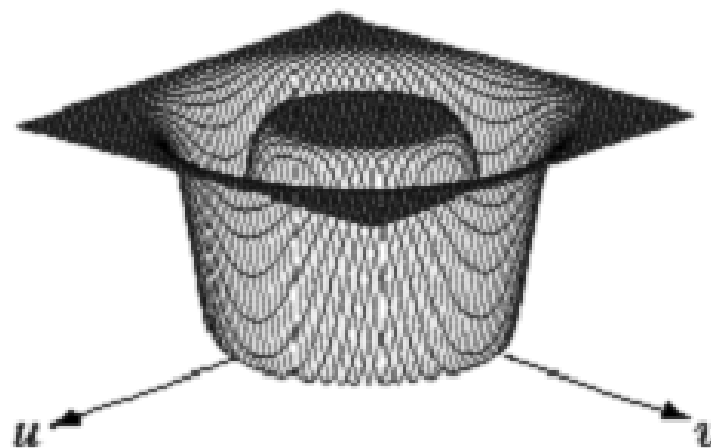


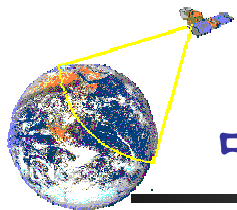
噪声单独干扰下的图像滤波复原

■ 周期性噪声频域滤波—带阻滤波器

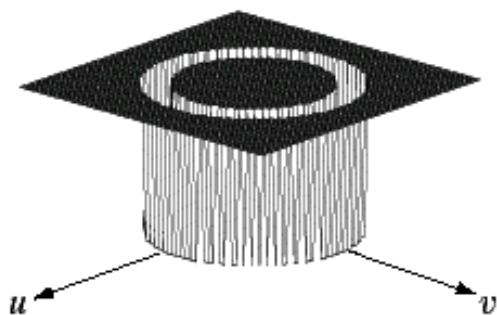
➤ 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

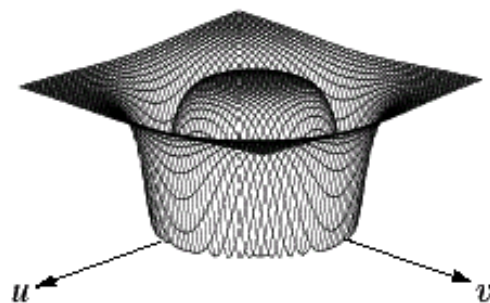




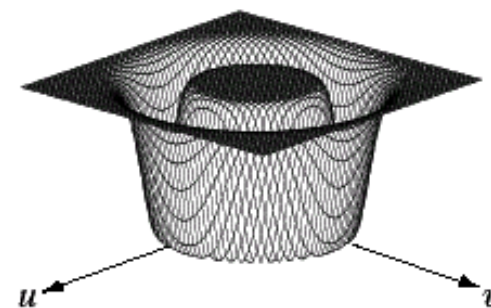
噪声单独干扰下的图像滤波复原



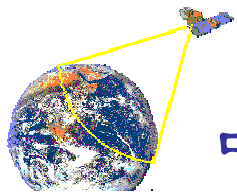
理想带阻滤波器



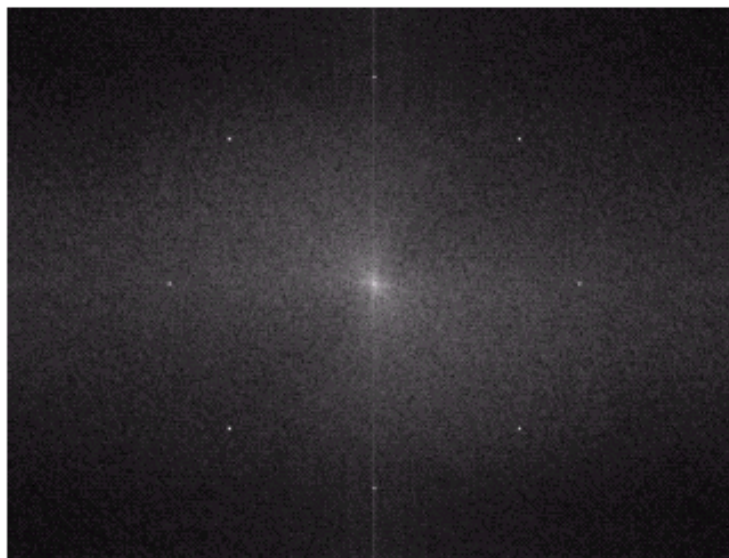
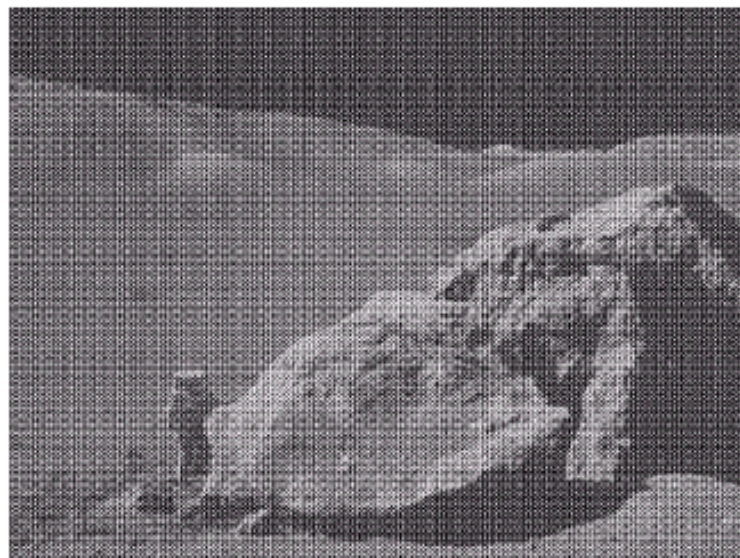
巴特沃斯带阻滤波器



高斯带阻滤波器



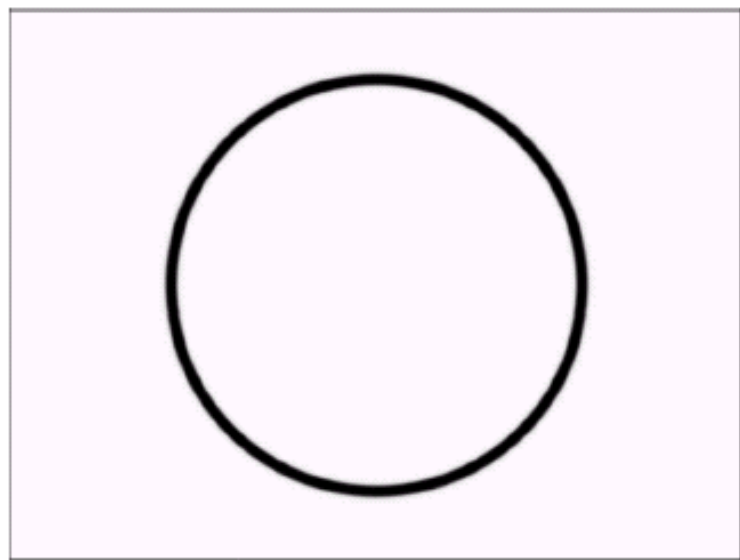
噪声单独干扰下的图像滤波复原

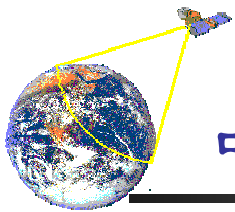


a	b
c	d

FIGURE 5.16

(a) Image corrupted by sinusoidal noise.
 (b) Spectrum of (a).
 (c) Butterworth bandreject filter (white represents 1).
 (d) Result of filtering. (Original image courtesy of NASA.)





噪声单独干扰下的图像滤波复原

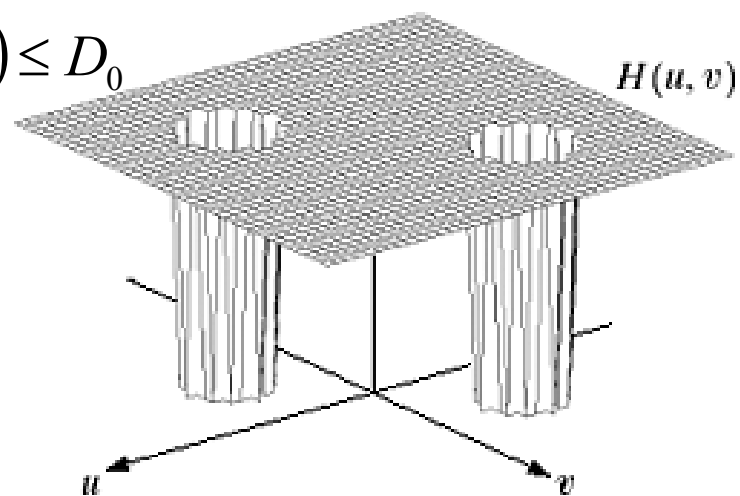
■ 周期性噪声频域滤波——陷波滤波器（Notch Filters）

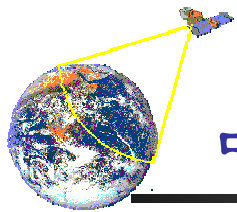
- 在指定的中心频率点，阻止该中心频率点领域内的频率
- 由于傅里叶变换的对称性，陷波器必须以关于原点对称的形式出现，常常为一对或两对出现
- 理想陷波滤波器——中心在 (u_0, v_0) 并在 $(-u_0, -v_0)$ 对称的理想陷波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





噪声单独干扰下的图像滤波复原

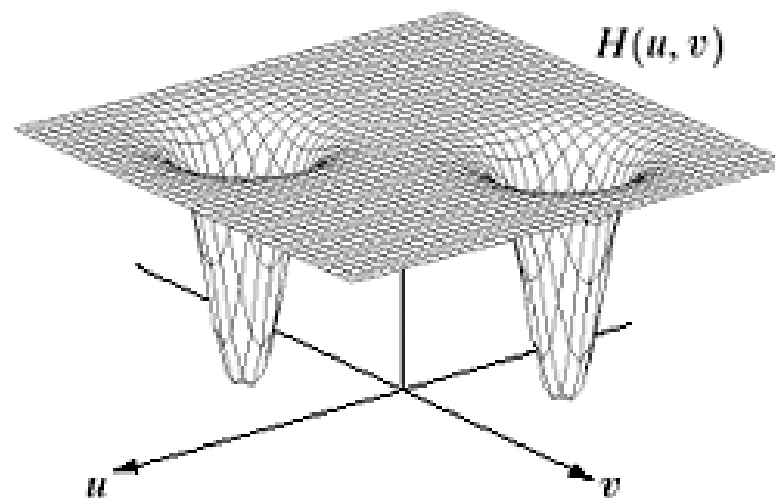
■ 周期性噪声频域滤波——陷波滤波器（Notch Filters）

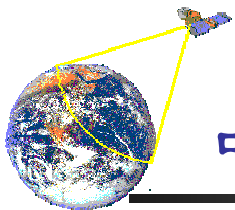
➤ 巴特沃斯陷波滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





噪声单独干扰下的图像滤波复原

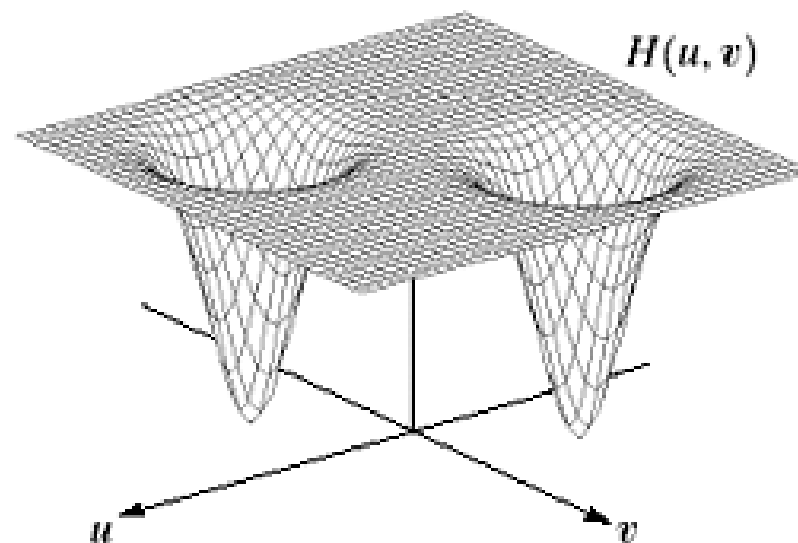
■ 周期性噪声频域滤波—陷波滤波器（Notch Filters）

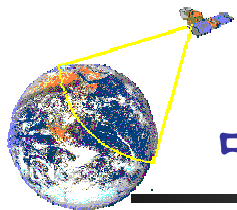
➤ 高斯陷波滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]^2}$$

$$D_1(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

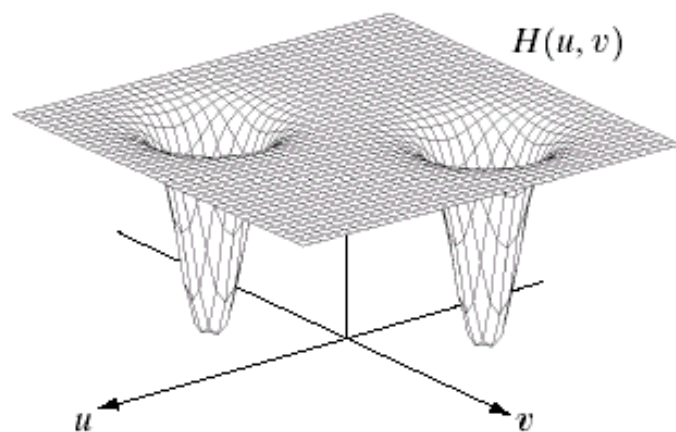
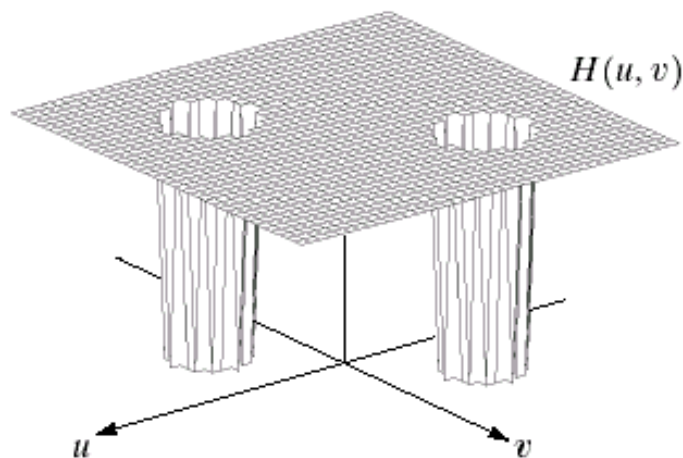
$$D_2(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$



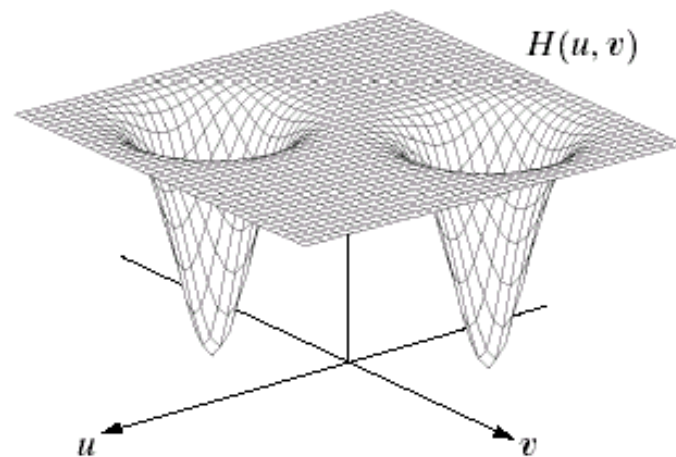


噪声单独干扰下的图像滤波复原

理想陷波滤波器

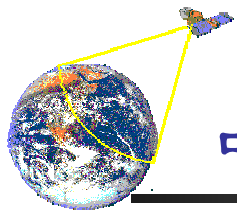


巴特沃斯陷波滤波器



高斯陷波滤波器

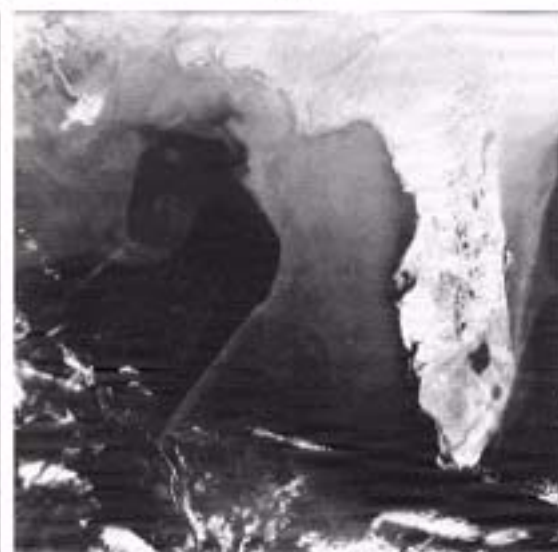
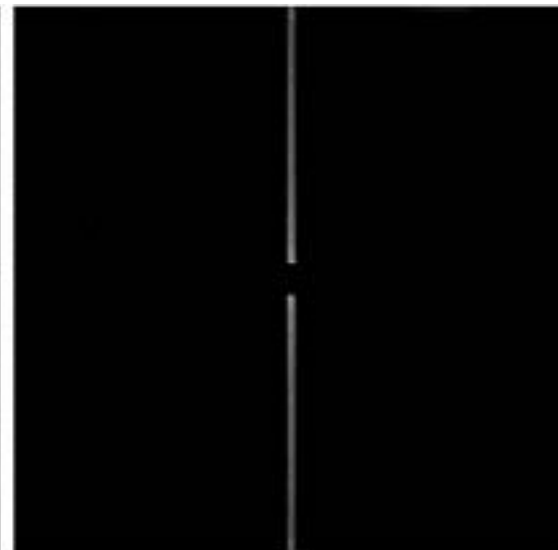
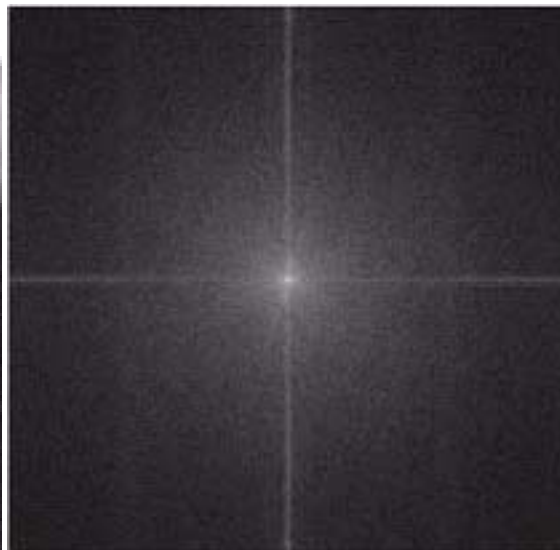
FIGURE 5.18 Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.

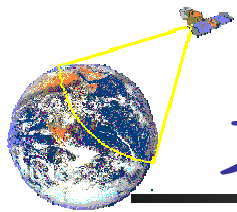


噪声单独干扰下的图像滤波复原



具有扫描线条纹干扰
图像及其陷波滤波结
果





系统退化复原

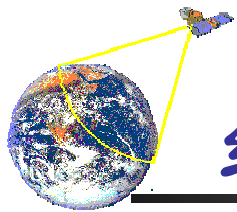
■ 系统退化复原

- 假定退化图像中噪声干扰为零，退化模型变为

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \quad \Rightarrow \quad g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad \Rightarrow \quad G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

- 退化函数 $H(u, v)$ 的估计，是进行系统退化复原的关键一步，对 H 的估计过程常称为“系统辨识过程”
- 常用方法为：
 - ✓ 观察法
 - ✓ 实验法
 - ✓ 数学建模法



线性系统退化函数的估计

■ 图像观察估计法

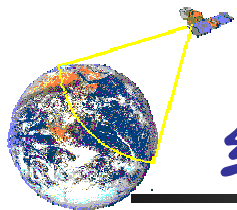
➤ 通过图像自身结构信息进行估计

选择图像中具有强信号与强特征的局部区域图像 $g_s(x,y)$ ，设法构建一个具有相同大小与特征、但没有退化的近似图像 $\hat{f}_s(x,y)$ ，可有

$$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}_s(u,v)}$$

利用从这一函数出发，进一步假设 $H(u,v)$ 的数学表达形式，从而构建 $H(u,v)$ 使其与 $H_s(u,v)$ 具有基本相同的形状

如对于运动模糊图像的参数估计

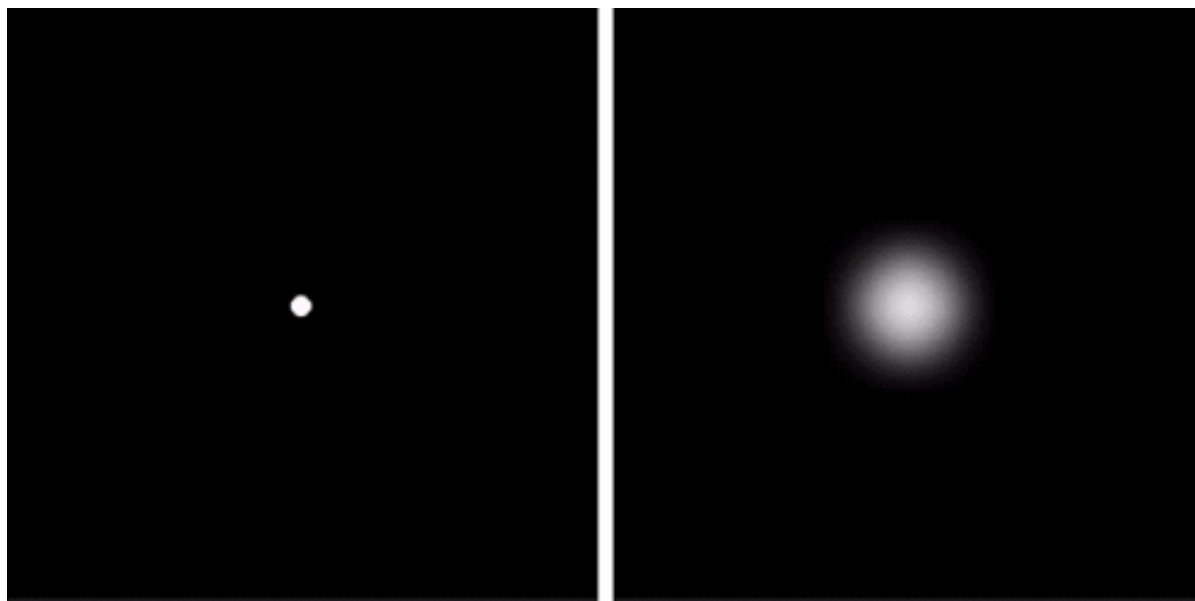


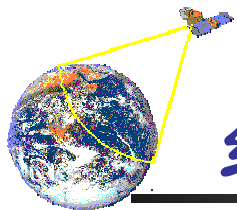
线性系统退化函数的估计

■ 试验估计法

- 使用或设计一个与图像退化过程相似的装置（过程），使其成像一个脉冲，可得到退化系统的冲激响应

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A} \quad G(u, v) \text{ 为观察图像的傅里叶变换}$$





线性系统退化函数的估计

■ 模型估计法

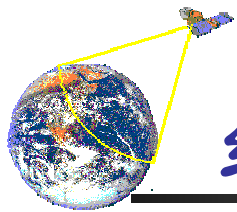
- 从引起图像退化的基本原理进行推导，进而对原始图像进行模拟，在模拟过程中调整模型参数以获得尽可能精确的退化模型

- ✓ 大气湍流模型 (Hufnagel and Stanley)

$$h(i, j) = \exp\left(-k \cdot (i^2 + j^2)^{5/6}\right)$$

- ✓ 大气扰动模型（由于通过大气进行长时间曝光）

$$h(i, j) = K \cdot \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}\right)$$

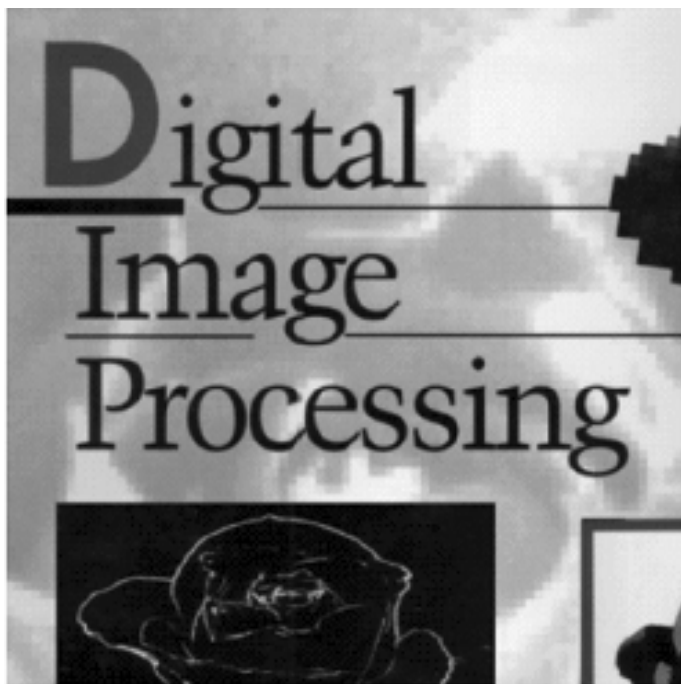


线性系统退化函数的估计

■ 模型估计法

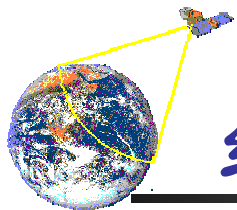
✓ 运动模糊模型—由于物体向一个方向线性移动

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + ub)} \sin[\pi(ua + ub)] e^{-j(ua + ub)}$$



a=b=0.1

T=1



线性系统退化函数的估计

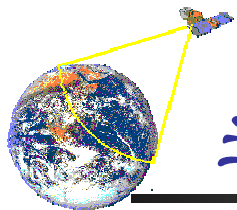
■ 模型估计法

- ✓ 运动模糊—由于相机摇晃或快速运动

$$h(i, j) = \begin{cases} 1 & ai + bj = 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- ✓ 归一化散焦模型

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & i^2 + j^2 \leq R^2 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$



逆滤波复原方法

■ 逆滤波复原方法

➤ 由退化模型

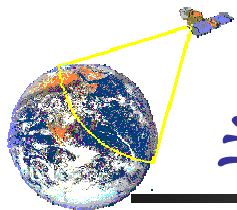
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

➤ 若已知退化函数 $H(u, v)$ ，则复原过程为

$$F(u, v) = G(u, v) / H(u, v) \rightarrow f(x, y)$$

➤ 实验证明，当退化图像的噪声较小，即轻度降质时，采用逆滤波复原的方法可以获得较好的结果



逆滤波复原方法

■ 逆滤波复原方法

➤ 逆滤波复原的病态问题

由
$$F(u, v) = G(u, v) / H(u, v)$$

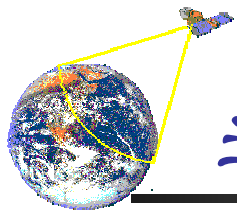
在 $H(u, v)$ 等于零或非常小的数值点上, $F(u, v)$ 将变成无穷大或非常大的数

进一步考虑噪声影响
$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

由于噪声分布在很宽的频率空间, 即使数值很小也会因为 $H(u, v)$ 使得上式右侧第二项变得很大, 噪声影响大大增强

➤ 改进方法——伪逆滤波复原

$$\begin{aligned} H^{-1}(u, v) &= 1/HG(u, v); & \text{if } H(u, v) \neq 0 \\ &= 0; & \text{if } H(u, v) = 0 \end{aligned}$$



逆滤波复原方法

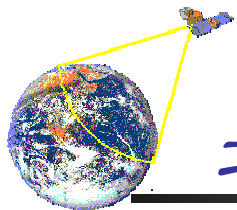
■ 逆滤波复原方法

- 通常直接逆滤波复原的性能较差
- 通常，在离频率平面原点较远的地方数值较小或为零，因此图象复原在原点周围的有限区域内进行
- 即将退化图象的傅立叶谱限制在没出现零点而且数值又不是太小的有限范围内
- 实例—大气湍流复原

对大气湍流，有退化函数

$$H(u, v) = e^{-k[(u-M/2)^2 + (v-N/2)^2]^{5/6}}$$

- ✓ 直接使用该函数进行全滤波将使结果没有任何用处；
- ✓ 对全滤波结果施加限制，即在一定的半径范围内进行，可得较好结果



最小均方误差滤波（维纳滤波）

■ 最小均方误差滤波（维纳滤波-1942）

- 假定图像 $f(x,y)$ 和噪声 η 均为随机信号，且相互之间互不相关
- 目标：寻求最佳复原图像，使得均方误差

$$e^2 = E \left\{ \left| f - \hat{f} \right|^2 \right\} \quad \text{为最小}$$

➤ 设

$$H(u, v)$$

退化函数

$$H^*(u, v)$$

退化函数的复共轭

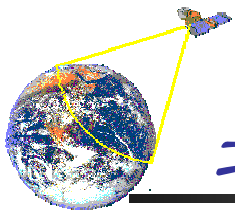
$$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$$

$$S_\eta(u, v) = E \{ |N(u, v)|^2 \}$$

噪声功率谱

$$S_f(u, v) = E \{ |F(u, v)|^2 \}$$

未退化图像功率谱



最小均方误差滤波（维纳滤波）

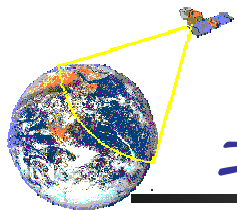
■ 最小均方误差滤波（维纳滤波）

➤ 推导过程为

$$\begin{aligned}
 C &= E \left\{ \|f - h_{win} g\|^2 \right\} = E \left\{ \|F(u, v) - H_{win}(u, v)G(u, v)\|^2 \right\} \\
 &= E \left\{ \|F(u, v)\|^2 \right\} - H_{win}(u, v) \cdot E \left\{ F^*(u, v)G(u, v) \right\} \\
 &\quad - H_{win}^*(u, v) \cdot E \left\{ F(u, v)G^*(u, v) \right\} + \|H_{win}(u, v)\|^2 \cdot E \left\{ \|G(u, v)\|^2 \right\} \\
 &= S_f(u, v) + \|H_{win}(u, v)\|^2 \cdot \left(\|H(u, v)\|^2 \cdot S_f(u, v) + S_n(u, v) \right) \\
 &\quad - H_{win}(u, v) \cdot H(u, v) \cdot S_f(u, v) - H_{win}^*(u, v) \cdot H^*(u, v) \cdot S_f(u, v)
 \end{aligned}$$

$$\text{Set } \partial C / \partial H_{win}(u, v) = 0 \Rightarrow$$

$$H_{win}(u, v) = \frac{H^*(u, v)S_f(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 S_f(u, v) + S_n(u, v)}$$



最小均方误差滤波（维纳滤波）

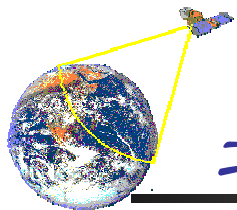
■ 最小均方误差滤波（维纳滤波）

➤ 维纳滤波结果为

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

➤ 维纳滤波器讨论

- ✓ 维纳滤波为均方误差最小意义下的最佳滤波，可使具有噪声干扰图像的客观复原性能达到最佳
- ✓ 维纳滤波器假定图像与噪声均为平稳随机过程，若图像与噪声实际随机特性平稳性差距较大时，维纳滤波器难以得到最佳结果
- ✓ 维纳滤波器建立在最小化统计准则基础上，只是在平均意义上最优



最小均方误差滤波（维纳滤波）

■ 最小均方误差滤波（维纳滤波）

➤ 维纳滤波讨论（续）

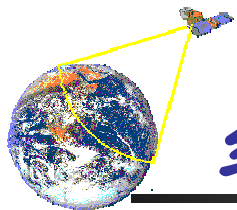
- ✓ 维纳滤波需大量先验知识，实用中常常难以进行
- ✓ 尤其是噪声功率谱、未退化图像的功率谱很难获取

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_{\eta}(u, v) / S_f(u, v)} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad \leftarrow K = \frac{S_{\eta}(u, v)}{S_f(u, v)} = \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2} = \frac{\text{noise_power}}{\text{image_power}}$$

- ✓ 通过在滤波过程中调节K值以得到准最佳结果
- ✓ 进一步假设噪声为白噪声， $K=0$ ，维纳滤波器退化为逆滤波器

➤ 与逆滤波的比较



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器

➤ 正则化方法

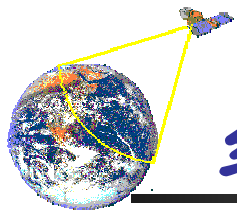
- ✓ 进一步考察复原处理模型，并表示为矩阵形式

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad \longrightarrow \quad g = Hf$$

- ✓ 在没有退化系统 H 先验知识的情况下，通过模型估计方法由 g 求 f ，原则上可归结为一种病态的反演，面临反演的不稳定性和多解性
- ✓ 对于这类不确定性问题的解决，正则化理论以某种途径提供了有效的方法，其原理是：定义一个稳定算子 q ，及 qf 的模

$$\|qf\| = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} (qf)^2 dx dy$$

- ✓ 通过 q 的作用， qf 描述了 f 的平滑程度；上式则描述了 f 在全部定义区域内的平滑程度，其值越小， f 越平滑



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器

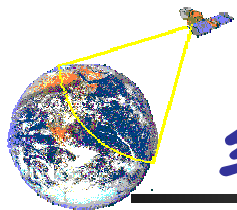
➤ 正则化方法

✓ 在正则化方法下求解 f 一般有三种方法:

- 1) 在约束 $\|qf\| < C$ 的条件下求解 f , 使 $\|q-Hf\|$ 达到最小
- 2) 在约束 $\|q-Hf\| < C$ 的条件下, 求 f 使 $\|qf\|$ 最小
- 3) 求解 f 使下式达到最小

$$E = \|g - Hf\| + \lambda \|qf\|$$

➤ 正则化方法求解的思想是, g 为观察信号, 由于观察误差, 它与 Hf 不可能处处相等, 但它毕竟是确定 f 的唯一依据, 因此我们希望所求的 f 使 $\|g-Hf\|$ 尽可能小, 同时, 由于 f 为理想物理信号, 与噪声比较, 它应是一个变化相对缓慢的连续函数, 因此, 我们定义的稳定泛函 $\|qf\|$ 也应较小。



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器

- 对退化模型表示为矩阵形式

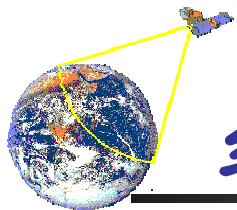
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \Rightarrow g = Hf + \eta$$

式中 g 为 $MN \times 1$ 维向量，是 $M \times N$ 图像矩阵 $g(x, y)$ 一维化的结果； f 与 η 类似构成； H 为 $MN \times MN$ 矩阵

对退化图像 g 的复原处理得到图像 \hat{f} ，其结果若满足上式，表明得到完全的复原；进一步将上式写为：

$$g - H\hat{f} = \eta$$

- 从某种角度，任何变通的复原处理，其结果均应满足上式，即若处理结果使上式不成立，表明该项处理有奇异点，尤其在有噪声存在时
- 这一条件可作为求取最佳滤波的约束条件



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

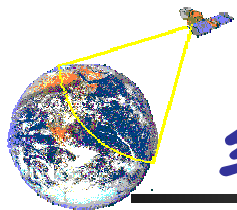
➤ 为方便推导，上述约束条件可归结上式两端的范数相等

$$\left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2 \Rightarrow \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 - \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2 = 0$$

➤ 考虑对 $\hat{\mathbf{f}}$ 施加某种线性运算 \mathbf{Q} ，按照正则化方法，问题可归结为最小化如下目标函数

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{f}}) = \left\| \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 + \lambda \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 - \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2$$

式中 λ 为拉格朗日因数



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

➤ 令 $W(\hat{\mathbf{f}})$ 对 $\hat{\mathbf{f}}$ 的导数为零

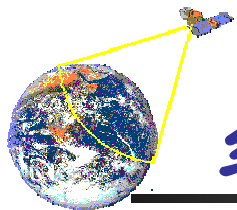
$$\frac{\partial W(\hat{\mathbf{f}})}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = 2\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}} - 2\lambda\mathbf{H}^T(\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) = 0$$

➤ 可得：

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \gamma\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g}$$

式中 $\gamma = 1/\lambda$ ，作为使等式 $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$ 成立的常数

上式称为约束最小二乘复原解的通用方程式



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

➤ 在约束最小二乘复原解通用方程式基础上，通过选择不同的 Q ，可得到不同类型的复原滤波器

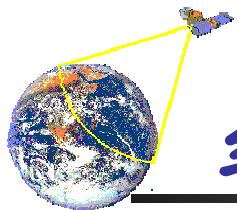
✓ 伪逆滤波器

令 $Q = I$ ， I 表示 $MN \times MN$ 单位矩阵，可有

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

上式称之为伪逆滤波器

令 $\gamma=0$ ，则上式成为标准的逆滤波器



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 参数化维纳滤波器

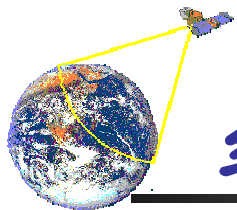
将 \mathbf{f} 、 η 视为随机矢量，选择 \mathbf{Q} 为：
$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{\mathbf{R}_\eta}}{\sqrt{\mathbf{R}_f}}$$

式中 $\mathbf{R}_f = E\{\mathbf{f}\mathbf{f}^T\}$ 和 $\mathbf{R}_\eta = E\{\eta\eta^T\}$ 分别为信号和噪声的协方差矩阵可有

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{R}_\eta)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

上式称之为参数化维纳滤波器； γ 为可调节参数

令 $\gamma=1$ ，则上式成为经典维纳滤波器



约束最小二乘方滤波器

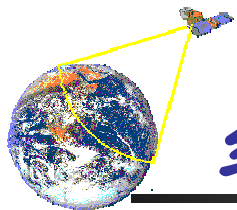
■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 平滑约束滤波器

- ❖ 对一幅带噪声模糊图像的逆滤波复原处理往往会放大噪声，产生预料之外的结果；
- ❖ 解决方法之一是选择适当的 Q ，对复原图像 f^{\wedge} 施加一定程度的光滑性约束；
- ❖ 由此可从约束最小二乘复原解通用方程式中导出一个光滑的、去模糊的、无噪声的复原滤波器

令 Q 对应于一个高通滤波运算（二阶拉普拉斯算子）

$$\nabla^2 f(x, y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f(x, y)$$



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 平滑约束滤波器

在空域下，Q可相当于高通卷积模板，如二阶拉普拉斯算子：

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

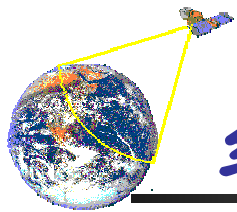
根据约束最小二乘复原解通用方程式，可得到线性位移不变系统下复原图像的频域表达式

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

式中P(u,v)为p(x,y)的傅里叶变换，对拉普拉斯算子

$$P(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

➤ 实际滤波结果比较



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 参量 γ 的调整

❖ 交互式调整——直至取得可接受的结果

❖ 最优化迭代计算——通过计算方式得到理论上的最优

定义一个残数向量 $\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}}$ (1)

选定一个调整因数 a ，以使： $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$ (2)

步骤：

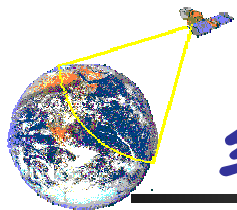
1) 制定初始 γ 值

2) 计算 $\|\mathbf{r}\|^2$

3) 如果（2）式满足，停止；否则

如果 $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - a$ ，增加 γ ；

如果 $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + a$ ，减少 γ ；返回第2）步



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 参量 γ 的调整

$\|\mathbf{r}\|^2$ 和 $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$ 的计算问题

由前述（1）式，可有

$$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v) \hat{F}(u, v)$$

对 $\mathbf{R}(u, v)$ 进行傅里叶反变换，

可得 $\mathbf{r}(x, y)$ ，从而有：

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y)$$

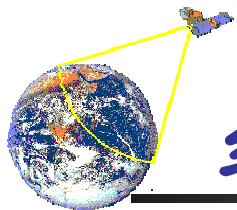
对于 $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$ ，可有：

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 - m_\eta]$$

其中的噪声均值和方差，可通过取样平均方式获得

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$$

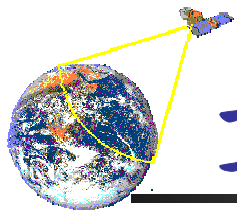
$$m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y)$$



约束最小二乘方滤波器

■ 约束最小二乘方滤波器讨论

- 与维纳滤波器相比，约束最小二乘方滤波器假定噪声为高斯分布，只需要噪声方差和均值的知识
- 噪声方差和均值常常可从退化图像中获得，因而该方法基本上可适用于大多数图像
- 使约束最小二乘方滤波器发挥最佳效果的重要因素，一是选择合适的 Q ；二是调整参量 γ ，使其满足约束条件
- 假定噪声与图像灰度值互不相关，可通过取样方式获得图像中的噪声均值与方差，由此即可进行最佳复原；噪声参数获得的正确与否，是取得最佳效果的关键
- 虽然约束最小二乘方滤波器导出经典维纳滤波器，但维纳滤波器在均方意义上的最佳滤波性能却不能在这里得到证明
- 参量 γ 的调整已研究了多种方法，如贪婪算法、模拟退火算法、共轭梯度法、牛顿-拉佛森算法等，但仍然是一个有待解决的问题



第七章 图像复原

■ 习题一:

➤ 对右图（图中白条为7像素宽、210像素高），应用下列滤波器后图像的变化结果是什么，可给出定性的描述

(a) 3x3 算术平均滤波

(b) 7x7 算术平均滤波

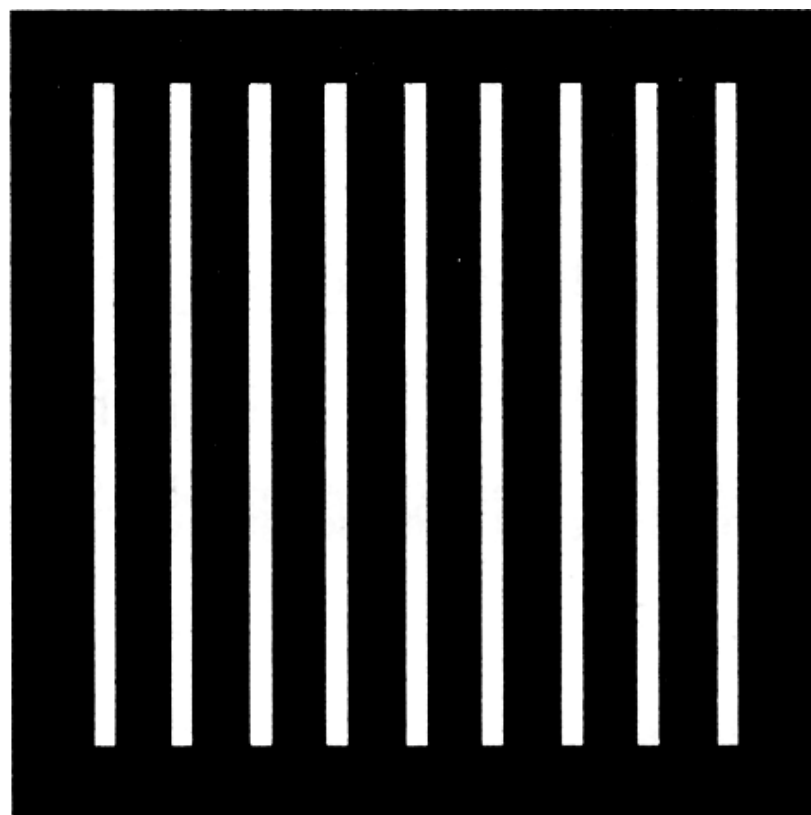
(c) 9x9 算术平均滤波

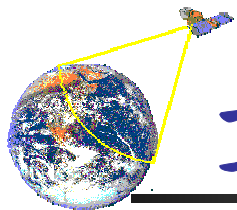
(d) 中值滤波

(e) 最大值滤波

(f) 最小值滤波

(g) 中点滤波





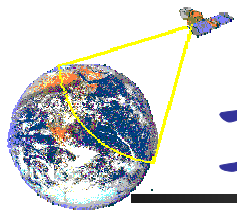
第七章 图像复原

■ 习题二：

- 考察与分析逆滤波谐波滤波器，解释：
 - ✓ 为什么当 Q 值为正值时滤波器对去除“胡椒”噪声有效？
 - ✓ 为什么当 Q 值为负值时滤波器对去除“盐”噪声有效？
 - ✓ 为什么当 Q 值选择不当时滤波效果较差？

■ 习题三：

- 教材p361页： 12、 13



第七章 图像复原

第七章结束