**高等数学**

**下册**

**知识点**

**集锦**

**备注：期末考试以课本所要求掌握知识为主，各题目解答过程均出自个人，仅供参考！**

**文档中有部分积分解题方法课本中属于自学内容**

**或课本中未涉及的，可忽略！**

**目录**

[一、机考套题 3](#_Toc482650695)

[1.判断题 3](#_Toc482650696)

[2.选择题 7](#_Toc482650697)

[二、各类积分常见解题方法 26](#_Toc482650698)

[3.二重积分计算技巧 26](#_Toc482650699)

[3.1.画出积分区域，选择适当的积分次序. 26](#_Toc482650700)

[3.2.选取适当坐标系 27](#_Toc482650701)

[3.3.准确表示被积函数和积分区域，巧妙处理特殊积分的转换 28](#_Toc482650702)

[3.4.二重积分的计算练习： 29](#_Toc482650703)

[4.三重积分计算方法的总结 32](#_Toc482650704)

[4.1.在直角坐标系下将三重积分转化成三次累次积分进行计算 32](#_Toc482650705)

[4.2.三重积分的变量替换法 36](#_Toc482650706)

[4.3利用空间区域的对称性以及被积函数的奇、偶性来计算 42](#_Toc482650707)

[4.4 练习题 44](#_Toc482650708)

[5.第一类曲线积分的计算方法 47](#_Toc482650709)

[5.1.化为定积分 47](#_Toc482650710)

[5.3.利用积分曲线的对称性和被积函数的奇偶性 49](#_Toc482650711)

[5.4.利用轮换对称性 49](#_Toc482650712)

[5.5.利用曲线的形心计算 51](#_Toc482650713)

[6.第二类曲线积分的计算方法 53](#_Toc482650714)

[6.1.利用格林公式 53](#_Toc482650715)

[6.2.应用积分与路径无关化为参数的定积分法求解 53](#_Toc482650716)

[6.3.利用对称性计算第二类曲线积分 55](#_Toc482650717)

[6.4.利用斯托克斯公式计算第二类曲线积分 59](#_Toc482650718)

[6.5.对于第二类空间曲线积分 63](#_Toc482650719)

[7.第一类曲面积分的计算和解题技巧 65](#_Toc482650720)

[7.1.计算时需要注意的问题 65](#_Toc482650721)

[7.2.选择适当的微分元计算第一类曲面积分 65](#_Toc482650722)

[8.第二类曲面积分的五种求法 70](#_Toc482650723)

[8.1.直接利用投影法进行计算 70](#_Toc482650724)

[8.2.利用高斯公式化为三重积分计算 71](#_Toc482650725)

[8.5.利用区域对称性计算第二类曲面积分 75](#_Toc482650726)

[9.傅里叶级数 77](#_Toc482650727)

[9.1求下列定积分： 77](#_Toc482650728)

# 一、机考套题

## 1.判断题

1. 1.积分区域，则（ 正确 ）

解析：知识点：估值定理.

解：令.

∵3≤x≤5,0≤y≤1,且函数f（x，y）在给定区域上单调递增，

∴ln(3+0)=ln3 ＞lne=1,

∴在给定区域上单调递增,

∴f(x,y) ≤g(x,y)在给定区域上恒成立.

故：根据二重积分性质，有



1.2.若积分区域，则从二重积分的几何意义知.（ 正确 ）

解析：该积分可以表示为以圆为底，以.则.

1.3.在直角坐标系中，三重积分中的体积元素dv=dxdydz.（ 正确 ）

解析：类比法。类比在直角坐标系中，二重积分中的面积元素ds=dxdy.

1.4.三重积分.（ 正确 ）

解析：

∵,则椭圆面积：S=πab（1-），且-c≤z≤c.

原积分=.

1.5. L 为xOy平面上一光滑曲线，f(x,y),g(x,y)在L上连续，则.（ 正确 ）

解析：对弧长积分的性质：设α、β均为常数，则

1.6.L是圆心在原点的单位圆，则.（ 错误 ）

解析：从几何意义方面讲：因为L表示的是圆心在原点的单位圆，可设，有，此时表示的是单位圆的周长；

从代数运算方面讲：因为L表示的是圆心在原点的单位圆，可设.

1.7. L为xOy平面上一光滑有向曲线，f(x,y),g(x,y)在L上连续，f(x,y) ≤g(x,y)，则（ 错误 ）

解析：L为xOy平面上一光滑有向曲线，具有方向性，积分上下限无法确定.

1.8. L是圆心在原点的单位圆，取逆时针方向，则.（ 错误 ）

解析：因为， 且L是圆心在原点的单位圆，取逆时针方向，此时有

1.9.二重积分也可以看成是在平面D上的第一类曲面积分.（ 正确 ）

1.10.设∑为柱面被平面z=0及z=3所截得的在第一卦限的部分，∑在yOz平面上的投影区域为yOz面上的边长分别为1,3的矩形闭区域.（ 正确 ）

1.11. 设∑是有向曲面，-∑表示与∑取相反侧面的有向曲面，则有.（ 正确 ）

1.12.设∑为球面的外侧，.（ 错误 ）

解析：积分对称问题.表示的是球心在原点的以R为半径的球面外侧的上半球面面积，积分为正值，而表示的是球心在原点的以R为半径的球面外侧的下半球面面积，积分为负值，故有：

1.13.设曲面∑为x+y+z=1上侧，则.（ 正确 ）

解析：因为x+y+z=1，故：

1.14.设L是任意一条分段光滑的闭曲线，则有.（ 正确 ）

x

0

y

解析：格林公式应用：

L1



L2

1.15.（x+2y）dx+(2x+y)dy在整个xOy面内是某个函数u（x，y）的全微分。（ 正确 ）

解析：令P=x+2y，Q =2x+y，则，

则为xoy面内的某个函数的全微分，即



1.16.级数，称为调和级数.（ 正确 ）

1.17.设为正项级数，如果，那么当＜1**时**，级数收敛（ 正确 ）

1.18.如果级数在处收敛，则它在满足不等式的一切x处绝对收敛.（ 正确 ）

1.19.一个定义在（-∞，+∞）上周期为2π的函数f（x）如果它在一个周期上可积，则一定可以作出f（x）的傅里叶级数.（ 正确 ）

1.20.在三角函数系中，.（ 正确 ）

## 2.选择题

2.1.比较与的大小，其中积分区域D是由圆周所围成，则（ C ）

选项A）

选项B）

选项C）

选项D)无法比较

解析：令

，

积分区域：



此时：因



因此：



2.2.设区域D1:-1≤x≤1，-2≤y≤2；D2：0≤x≤1，0≤x≤2.又，，则正确的是（ C ）

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：





可得：

另解1：观察积分区域范围大小，可知前者是后者的四倍，被奇函数相同，因此也可得出积分前者是后者的四倍.

另解2：一般地，如果f(x，y)≥0，被积函数f(x，y)可以解释为曲顶柱体的顶在点(x，y)处的竖坐标，所以，二重积分的几何意义就是柱体的体积.

根据上述二重积分的几何意义，令

，

变形后的等式在二维平面上表示圆，但在三维空间上则表示的是圆锥面.此时，由于D1:-1≤x≤1，-2≤y≤2；D2：0≤x≤1，0≤x≤2

各自对应的圆锥的高相等，现求其底面积:

2.3设区域在第一象限部分，则（ C ）

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：可采用x型，或y型进行积分.也可转换成极坐标形式.

2.4.设R＞0，f(x,y)连续，则( D )

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：极坐标的转换

2.5.（ C ）.其中，.

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：极坐标的转换

2.6.设D为圆域，如果，则a=（ A ）.

选项A）2

选项B）4

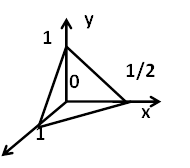
选项C）

选项D）

解析：遇到圆域，采用极坐标或者柱面坐标（三重积分）计算



2.7.设为三个坐标面及平面x+2y+z=1所围成的闭区域，则（ A ）

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）1

解析：积分区域如图所示



2.8.在柱面坐标系中，=（ C ）.

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：柱面坐标的表示方法：其中两个坐标转换成极坐标形式，另一个坐标按直角坐标计算.

2.9.设为三个坐标面及平面x+y+z=1所围成的闭区域，则在直角坐标系中可化为以下三次积分来算（ D ）.

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：参照第七题

2.10.已知：，则（ D ）.

选项A）64π

选项B）16π

选项C）4π

选项D）0

解析：空间闭区域

其中椭圆面积为16π.



2.11.L为曲线上介于点（0,0）和（1,1）的一段，（ B ）.

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

解析：

2.12.：，a＞0， （ B ）.

选项A）0

选项B）2πa3

选项C）2πa2

选项D）2πa

解析：



其中：L为过球心的平面截得球体的最大圆的周长，即：L=2πa

推论：



2.13.L：y=x2，（0≤x≤1），对于下列说法正确的是（ B ）.

选项A）0

选项B）＞0

选项C）=0

选项D）无法判断

解析：

而，



在（0,1）内f＇（x）＞0恒成立，则f（x）单增，且



另解：直接积分.也可求得

2.14.是zox平面上的一条长度为1的光滑有向曲线，（ D ）.

选项A）0

选项B）-1

选项C）1

选项D）无法计算

解析：类比14题，但积分区域未知.

2.15.L：x2+y2=a2，y≥0，a＞0，取逆时针方向，（ C ）.

选项A）2a

选项B）2a3

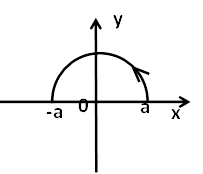
**0**

**y**

**x**

选项C）-2a3

选项D）-2a

解析：积分区域如图：



2.16.：，a＞0，方向从z轴正向向下看为顺时针方向，则（ A ）.

选项A）0

选项B）2πa3

选项C）2πa2

选项D）2πa

解析：向下看是将球体投影在xoy平面上的一个圆，其方程为，则

沿顺时针方向时，该积分为零.

2.17. 设∑是平面被柱面截出的有限部分，则 ( A )

选项A）0

选项B）

选项C）

选项D）

思路点拨：积分区域对称问题.

根据题意，截面是一个椭圆，关于xoz平面对称。被积函数是关于y的奇函数，故曲面积分

解析：将积分区域投影在xoy面上，利用二重积分化成极坐标形式来解题.



截面在xoy面上的投影区域D：



2.18.设∑是平面x+y+z=1被柱面x2+y2=1，平面y=0及x=0截出的在第一卦限的有限部分，则的值为（ C ）.

**1**

**1**

**0**

**1**

**z**

**y**

**x**

选项A）0

选项B）

选项C）

选项D）

解析：积分区域如图红色三角形所示，将积分区域投影到xoy平面上，有：0≤x≤1,0≤y≤1-x，

由于：，

则：

2.19.设∑为外侧在a＞0的部分，则曲面积分（ B ）.

选项A）2πa4

选项B）πa4

选项C）-πa4

选项D）0

解析：



2.20.设∑为区曲面，是曲面法向量与z轴正方向所成锐角（ A ）.

选项A）

选项B）-

选项C）

选项D）

解析：因



且是曲面法向量与z轴正方向所成锐角，则＞0，

所以



2.21.设曲面∑为平面在第一卦限内的部分的下侧，将转化为对面积的曲面积分的结果为（ C ）.

选项A）

选项B）

选项C）

选项D）

思路点拨：因为







合并后，两类曲面积分之间的关系为：

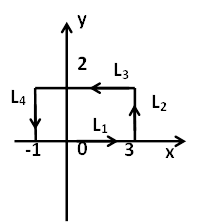


其中，

解析：

2.22.设L是-1≤x≤3,0≤y≤2围成的正向闭曲线，则（ C ）.

选项A）0

选项B）8

选项C）-8

选项D）1

思路点拨：可采用对坐标的曲线积分计算，也可采用格林公式计算.

解析：

解法一：取图示的方向

其中，

在L1上，y=0，x从-1变到3，所以



在L2上，x=3，y从0变到2，所以



在L3上，y=2，x从3变到-1，所以



在L4上，x=-1，y从2变到0，所以



解法二：

设则：



2.23.设∑为及所围成闭区域边界曲面的外侧，则（ B ）.

选项A）

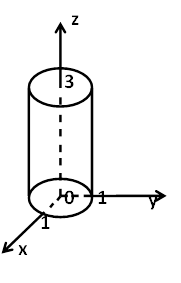
选项B）

选项C）

选项D）

思路点拨：利用高斯公式把所给对面积的曲面积分化成三重积分，再转换成柱面坐标求积分.

高斯公式：

解析：如右图所示，可作出题设的封闭区域，

设

则



2.24.关于的描述以下正确的是（ C ）.

选项A）是函数项级数

选项B）收敛

选项C）发散

选项D）不是级数

解析：利用公式

.

2.25.关于级数，以下说法正确的是（ A ）.

选项A）级数的和存在

选项B）级数收敛但和不存在

选项C）级数的和不存在

选项D）级数发散

解析： 取级数：则（近似值），此时可视为所给级数的和的近似值，则证明所给级数和存在.

26.关于级数，以下说法正确的是（ A ）.

选项A）级数收敛

选项B）级数收敛但和不存在

选项C）级数的和不存在

选项D）级数发散

解析：（比较审敛法的极限形式）设和都是正项级数，

（1）如果，且级数收敛；那么级数收敛；

（2）如果，且级数发散；那么级数发散.

因此，取正项级数和正项级数，则=1，而且可知正项级数收敛，则正项级数收敛

2.27.级数是（ C ）.

选项A）幂级数

选项B）调和级数

选项C）p级数

选项D）等比级数

2.28.设常数a≠0，级数收敛，则q应该满足（ B ）.

选项A）q＜1

选项B）-1＜q＜1

选项C）q=1

选项D）q＞1

解析：等比级数公比q满足时，级数收敛；时，级数发散.

2.29.函数（ C ）.

选项A）0

选项B）4

选项C）2

选项D）-2

解析：将f（x）作奇延拓，则a0=0，



2.30.设周期为6的函数在的傅里叶展开式为，则其中a3的 值为（ D ）.

选项A）0

选项B）

选项C）

选项D）

解析：对于，则则：

# 二、各类积分常见解题方法

## 3.二重积分计算技巧

#### 3.1.画出积分区域，选择适当的积分次序.

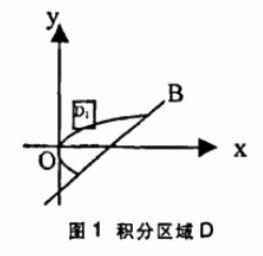
**3.1.1.先x后y**

**例1 计算，其中D：所围成的区域.**

**解：**

**（1）解方程组：**

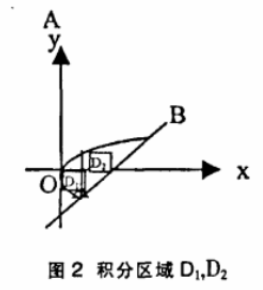
**得交点坐标A（2，-2），B（8,4）**

**（2）画出积分区域D，如图1所示**

**即：**

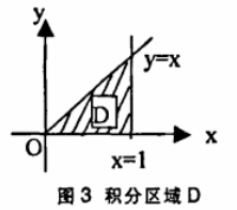
**（3）化为先积x，后积y，即：**

****

**注意，此题也可先对一积分，后对x积分，只不过积分区域要涉及到分区.具体分区参照图2.**

**3.1.2. 先y后x**

**例2 计算**

**解：根据题意，是先积x，后积y，但对于积x时****无法用初等函数表示，则考虑先y后x.**

**（1）做出积分区域，如图3所示**

**（2）先y后x**

****

#### 3.2.选取适当坐标系

**对于积分函数是或积分区域为圆域、扇形域、椭圆域、圆环域时，可考虑换用极坐标系计算.还可考虑利用被积函数与积分区域的对称性，简化计算.**

**例3 计算**

**解：选用极坐标系**

**（1）由现有直角坐标系下的积分域找出极坐标系下的积分域**

****

**（2）计算**

**例4 求，其中D是由所围成的在x轴上方的区域.**

**推论3.2.1.若f(x，y)是关于x的偶函数，而积分区域D关于y轴对称，且在x轴右方部分记为D1，则当f(x，y)在D上连续时，则有**

****

**若f(x，y)是关于x的奇函数，则有**



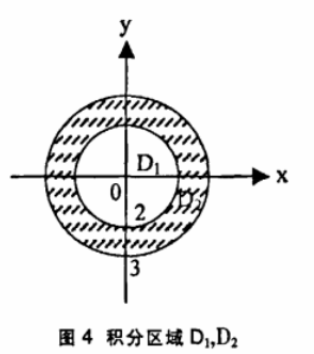
**解：此题由对称性有**

****

#### 3.3.准确表示被积函数和积分区域，巧妙处理特殊积分的转换

**当被积函数中含有绝对值符号时，此类二重积分应将积分区域划分成几个子区域，使被积函数在每个子区域中保持同一符号，以消除被积函数的绝对值符号.**

**例5 计算，其中D为围成的区域.**

**解：被积函数中含有绝对值，则根据积分域，将其划分成两个子区域如图4所示**

**即，采用极坐标计算**

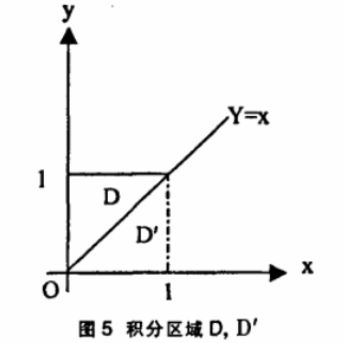
**例6 设f（x）在区间[0,1]上连续，证明：**

****

**证明：这是一个二元函数积分转化成一元函数积分问题，由重积分定义先将累次积分表示成重积分，有：**

****

**其中**

****

**做出其关于y=x对称的区域D＇，如图5所示**

****

**则**

****

#### 3.4.二重积分的计算练习：

**3.4.1.计算：**

y

x

0

2

1

**所围成的第一象限部分.**

**解：画出积分区域，如右图：**

**可得：，**

**所以**



**3.4.2.改换积分次序：计算：**和之间的环线.

**解;可知积分区域：**

**则：**



**3.4.3.估值：估计：****的值.其中D是椭圆区域：**

**解：区域D的面积：，在D上，**

**因**

**，**

**所以**

****

**由二重积分的中值定理有：**



**即：**

**3.4.4.估计****的值，其中**

**解：因**

**区域面积：，在D上，**

**故：**

**3.4.5.比较积分：与的大小，其中D是三角形区域，顶点坐标为（1,0）、（1,1）、（2,0）.**

**解：三角形的斜边方程：，在D内：，**

**故**

**于是**＞**，故＞**

**3.4.6.比较下列积分的大小：，其中D：**

**解：积分区域的边界为圆周：与x轴的交点为（1,0），与直线相切，而区域D位于直线上方，故在D上，从而有：**

****

**3.4.7.比较下列积分的大小：**

****

**解：由于被积函数相同，且非负，则，易得：**



## 4.三重积分计算方法的总结

#### 4.1.在直角坐标系下将三重积分转化成三次累次积分进行计算

**4.1.1.当空间积分区域是由长方体、四面体形成时，将三重积分转化成三次累次积分.**

**例1 计算三重积分，其中.**

**解：因积分区域是长方体，故**

**4. 1.2.采用“先一后二”的方法计算三重积分**

**首先，介绍一个定理：**

**定理4.1.1：若函数f（x，y，z）在长方体上的三重积分存在，且对，二重积分存在，其中，则积分也存在，且**

** （1）**

**证明：用平行于坐标面的平面网T作分割，它把V分割成有限个小长方体**

**.**

**设分别为f（x，y，z）在****上的上、下确界.对于****上任意一点，在上有**

**.**

**现按下标j，k相加，则有**

**及**

.**（2）**

**上述不等式两边是分割T的下和与上和.由于f（x，y，z）在V上可积，当T→0时，下和与上和具有相同的极限，所以由（2）式得I(x)在[a，b]上可积，且**

**.**

**为了讨论一般区域上的三重积分计算，先研究一类简单区域上的积分，设积分区域V由集合**

**所确定，这里V在xoy平面上的投影区域**



**上是一个x型区域，它对于平行于z轴且通过D点的直线与V的边界至多交于两点.**

**现设f(x，y，z)在V上连续，z1（x，y），z2（x，y）在D上连续，y1（x），y2（x）在[a，b]上连续，则有**

**（3）**

**同样地，当把区域V投影到zox面上或yoz面上时，也可以写出相应的累次积分公式.**

**对于一般区域上的三重积分，常可把它分解成有限个简单的区域上的积分和来计算.**

**例2 计算****， 其中V为由平面x=1，y=2，z=0，y=x与z=y所围的区域.**

**解：V在xoy面上的投影区域是x型区域，这里z1（x，y）=0，z2（x，y）=y，由公式（3）有**

**4.1.3.用“先二后一”法计算三重积分**

**一般地，若积分区域Ω是X-型，Y-型，Z-型区域，且被积函数形如f(z),f(x)g(y,z), f(x)g(y)h(z)等，则采用“先二后一”法.**

**现计算积分**

**为此做下面工作：**

**▲把立体域偶Ω向坐标轴投影.**

**例如向z轴投影，假设得到区间[z1，z2]，（立体域Ω恰好夹在平行面z= z1，z=z2之间）.**

**▲在区间[z1，z2]的内部任意取一点z，过点z做垂直于z轴的平面，假设它与立体域Ω的截面是Dz.**

**▲在截面Dz上，求积分具体方法是：把截面Dz向xoy坐标面投影，在投影上求二重积分（把z看成常量）.于是，函数f(x,y,z)在立体域Ω上的积分表示为**

****

**这种方法的特点是：先求关于x，y二重积分，后求关于z定积分.因此叫做“西先二后一”法**

**类似的还有其他两个“先二后一”法：**

**▲先求关于y，z二重积分，后求关于x定积分.**

**▲先求关于x，z二重积分，后求关于y定积分.**

**例3 求积分,Ω是锥面和平面z=h＞0围成的立体域.**

**解：把立体域Ω向z轴投影，得到区间[0，h]，在这个区间上任取一点z，过点z作垂直于z轴的平面与立体域Ω的截面是Dz.截面在oxy平面上的投影是平面域，则有**

****

**应用“先二后一”法，有**

****

**其中的积分**等于截面Dz的面积，因此，



**最后求得的积分值为**

**.**

**例4 求**

****

**其中V是椭球体：**.

**解：由于**

****

**其中**



**这里Rx表示椭圆面：**

.

**它的面积为：**



**于是**

**同理**





**因此**



#### 4.2.三重积分的变量替换法

**4.2.1.一般原理——体积元素**

**（1）从体积求法说起**

**关于立体域的体积，分两种情形.**

**情形1 直接求立体域Ω的体积V，这时用公式**.

**例5 平面与三个坐标面围成了四面体，求其体积.**

**解：四面体体积为**



**但在很多情况下，体积问题并不简单，需要采取间接的办法.**

**情形2 假设存在一个一一对应的映射，把某个立体域Ω＇映射为Ω的体积.**

**假设这个映射是**

** （4）**

**如果这三个函数有一阶连续偏导数，那么这个映射的雅可比行列式为**

****

**在这种情况下，关于立体域Ω的体积，有下面的结论.**

**定理4.2.1：假设映射（4）是一一对应的，立体域Ω＇的边界是分片光滑的，并且雅可比行列式处处不等于0（在有限个分片光滑的曲面上，这些条件可以有例外），立体域Ω的体积为**



**此结论说明：立体域Ω的体积可以表示为“雅可比行列式在立体域Ω＇上的三重积分”，记****，把它叫做映射（4）下的体积元素.**

**（2）三重积分的变量替换：一般原理**

**现在计算积分****（被积函数f（x，y，z）在区域Ω上连续）再看一个定理.**

**定理4.2.2：在定理4.2.1的条件下，**

**为了得到有段的被积表达式，只需在左端的被表达式中，把变量x，y，z用参数函数代替，再把dV用体积元素代替.**

**4.2.2 .球面坐标变换**

**球面坐标替换**

****

**这里 r：点p到原点o的距离；**

：**向量与z轴的夹角；**

**θ：向量****与x轴的夹角.**

**（p＇是点p在xoy坐标平面上的投影）**

**根据这样的对应关系，有三重积分的球面坐标替换，雅可比行列式是：**

****

**故体积元素的表达式为：**

**于是，三重积分的球面坐标替换是**

****

**Ω＇表示跟立体域Ω对应的有界闭区域，确定方法如下：**

**▲做两个半平面：，使立体域Ω恰好夹在它们的中间；**

**▲在半平面之间，任取一个半平面，使它和zox坐标面前半部分的夹角恰好是θ，用表示半平面跟立体域Ω的截面：=∩Ω.**

**▲在半平面上，把z轴看成极轴，根据截面的形状，确定变量r，****的积分限（相当于“在二重积分的极坐标替换中确定积分限”）.**

**这样确定的区域Ω＇就可以表示为：**

**因此，三重积分的球面坐标替换就有下面的形式：**

****

**例6 求积分是由下述球面和锥面围成的立体：**

****

**解：角θ的变化范围是[0,2π]，在平面上，根据截面确定变量r，θ的变化范围：**

****

**于是**

****

**4.2.3.柱面坐标替换**

**柱面坐标替换**

****

**这里 .**

**θ：向量****与x轴的夹角.**

**Z：同点p的直角坐标里的z.**

**（p＇是点p在xoy坐标平面上的投影）**

**根据这样的对应关系，有三重积分的球面坐标替换，雅可比行列式是：**

****

**故体积元素的表达式为：**

**于是，三重积分的柱面坐标替换是**

****

**Ω＇表示跟立体域Ω对应的有界闭区域，确定方法如下：（对立体域Ω形状有一定的要求，例如：平行于z轴，通过区域内点的直线，跟区域边界七号有两个交点：中心轴是z轴的柱体，就是这样的典型代表）.**

**▲把立体域Ω向xoy坐标面投影，假设投影与为D；**

**▲根据平面域D的形状，确定变量r，θ的积分限（相当于“在二重积分的极坐标替换中确定积分限”）.**

**▲任取（r，θ）∈D，过点（r，θ）作平行于z轴的直线，假设它与立体域Ω的边界恰好有上下两个交点：**

**关于上面的交点，设z=z2（r，θ）；**

**关于下面的交点，设z=z1（r，θ）.**

**这样确定的区域Ω＇就可以表示为：**

****

**因此，三重积分的柱面坐标替换就有下面的形式：**

****

**例7 求积分是圆柱体**

**解：对于主题Ω，变量r，θ，z的变化范围是：**

****

**因此**

****

**4.2.4.其他变量替换**

**4.2.4.1.广义球面坐标替换**

**这种替换的形式是：**

****

**它的雅可比行列式为：**

****

**故体积元素的表达式是：**

**因此，三重积分的广义球面坐标替换是：**

**例8 求积分是圆柱体**

**解：采用广义球面坐标替换，**

****

**4.2.4.2.广义柱面坐标替换**

**这种替换的形式为：**

****

**它的雅可比行列式为：**

****

**故体积元素的表达式是：**

**因此，三重积分的广义柱面坐标替换是：**

****

**例9 求积分是圆柱体**

**解：采用广义柱面坐标替换，**

****

#### 4.3利用空间区域的对称性以及被积函数的奇、偶性来计算

**4.3.1.若空间闭区域是关于xoy平面对称，即**

**，**

**则当f（x,y,-z）=- f(x,y,z)，即被积函数在Ω上是关于z的奇函数时，有**

****

**当f（x,y,-z）=- f(x,y,z)，即被积函数在Ω上是关于z的偶函数时，有**

****

**Ω1是xoy面上侧的部分.**

**积分区域关于其他两个坐标面yoz，xoz对称时，被积函数是x，y的奇偶函数时，也有上述的相应结论.**

**例10 计算**

**解：积分区域关于xoy面对称，被积函数是关于z的奇函数，故积分值为零.**

**4.3.2.若空间闭区域是关于z轴对称，即**

****

**则当被积函数f(x，y，z)在Ω上是关于x，y的奇函数时，有**

****

**当被积函数f(x，y，z)在Ω上是关于x，y的偶函数时，有**

****

**Ω1是Ω位于过z轴的平面一侧的部分.**

**例11 计算所围成的空间闭区域.**

**解：积分区域关于z轴对称，被积函数是关于x，y的偶函数，将积分区域在第一卦限的部分记作Ω1，则**

****

**4.3.3.若空间闭区域Ω是关于原点对称，即**

****

**则当被积函数f(x，y，z)在Ω上是关于x，y，z的奇函数时，有**

****

**当被积函数f(x，y，z)在Ω上是关于x，y的偶函数时，有**

****

**Ω1是过原点O的平面一侧的部分.**

**例12 计算所围成的四面体.**

**解：积分区域关于原点对称，被积函数是关于x，y，z的奇函数，故积分值为零.**

**4.3.4.若空间闭区域Ω具有轮换对称性，即**

****

**例13 计算，及三个坐标平面围成的区域.**

**解：因f（x，y，z）=**，积分区域具有轮换性，故

****

**于是**

****

#### 4.4 练习题

**4.4.1.计算三重积分：****，其中Ω是由抛物面****与平面****所围成.**

**解：在柱面坐标下：Ω：**

**原式=**

**4.4.2.将****用三次积分表示，其中Ω是由六个平面****所围成，**

**解：**



**4.4.3.设****计算**

**解：利用对称性：**

**（由于被积函数中z为奇函数，故被积函数为奇函数，且积分区域是对称的）**

**4.4.4.计算：****其中，Ω是由** **所围成.**

**解：由于Ω是由** **所围成.**

**故：Ω：**

**则**

**4.4.5.计算：****其中，Ω是由** **所围成.**

**解：**



## 5.第一类曲线积分的计算方法

#### 5.1.化为定积分

**将第一类曲线积分化为定积分计算.当L为平面曲线时，若L的参数方程为**

**表示，则计算公式为**

****

**此方法可以总结为“一代一定一换”，其中“一代”是将曲线L的参数方程代入被积函数. “一定”是指确定定积分的积分上下限（必须下限小于上限），“一换”是指将弧微分ds换成.对于空间曲线****的情形可以类比得到.**

**特别地，若L由极坐标方程** **表示，则**

**进而**

****

**代入可得**

****5.2.化为第二类曲线积分计算

**利用两类曲线积分之间的关系，化为第二类曲线积分计算，即有**

****

**其中cosα和cosβ为有向曲线弧L在点（x，y）处的切向量的方向余弦. 对于空间曲线的情形可以类比得到.**

**例1 计算**

****

**解1：利用方法1计算.令**

**则有**

****

**解2：记，则取L（取正向，取逆时针）在任意一点（x,y）处的切向量为，单位化得**

****

**由方法2，得**

****

#### 5.3.利用积分曲线的对称性和被积函数的奇偶性

**情形1 设L关于x=0（y=0）对称，则**

**（1）若f（x，y）关于x（y）为奇函数，则**

****

**（2）若f（x，y）关于x（y）为偶函数，则**

****

**其中L1为L位于x=0右方（或y=0上方）的部分曲线段.**

**情形2 设L关于原点对称，则**

**（1）若f（x，y）关于（x，y）为奇函数，则**

****

**（2）若f（x，y）关于（x，y）为偶函数，则**

****

**其中L1为L位于x=0右方（或y=0上方）的部分曲线段.**

#### 5.4.利用轮换对称性

**情形1 设平面曲线L关于y=x对称，则**

****

****

**情形2 若将空间曲线Г表达式中的变量x，y和z按顺序轮换，即x→y→z→x，而曲线Г表达式不变，则有**

****

**其中f连续，特别地**

****

**例2 计算**

****

**解 由轮换对称性得**

****

**及**

****

**则**

****

**故有**

****

#### 5.5.利用曲线的形心计算

**对于形心易求的平面曲线L，可方便计算两类第一类曲线积分记曲线L的形心坐标为，则有**

**对于空间曲线Г情形可类比得到.**

**例3 计算，其中L：**

**解 由于xsiny是关于x的奇函数，且L关于x=0坐标轴对称，由方法3可得**

****

**易知圆周L的形心坐标为**

****

**则**

****

**故有**

****

## 6.第二类曲线积分的计算方法

#### 6.1.利用格林公式

**以及它们的一阶连续偏导在D上连续，L为区域D的边界曲线，按正向取定（逆时针）.**

#### 6.2.应用积分与路径无关化为参数的定积分法求解

**（1）若（与路径无关的条件），则**

****

**（2），**

**α是起点，β是终点.**

**例1 求，其中a，b为正常数，L为从点A（2a，0）沿曲线到点原点O（0,0）的弧.**

**法一：格林公式法**

**解 添加从原点O（0,0）沿y=0到点A（2a，0）的有向直线段L1，则**

****

**记为：**

**I=I1-I2，**

**则由格林公式得**

****

**其中D为L1∪L所围成的半圆区域.**

**计算I2时，由于在L1时，y=0，所以dy=0**

**因而：**

**从而有**

****

**法二：应用积分与路径无关化为参数的定积分法求解**

****

**记为：**

**I=I1-I2，**

**对于I1，积分与路径无关，所以**



**对于I2，取L的参数方程所以**

**从而**

****

#### 6.3.利用对称性计算第二类曲线积分

**定理6.3.1 设L为xoy平面上关于x轴对称的一条有向光滑曲线弧，其方程是一双值函数，设为**。**记****分别为L位于X轴的上半部分与下半部分，****分别在上的投影方向相反，函数P（x，y）在L上连续，那么**

**（1）当P（x，y）关于y为偶函数时，则**



**（2）当P（x，y）关于为奇函数时，则**



**证明：依定理条件不妨设**

**从点a变到点b**

**从点b变到点a**

**于是由对坐标曲线积分的性质及计算方法有**



**故（1）当P（x，y）关于为偶函数时，有**

**（2）当P（x，y）位于为奇函数时，有**



**注1 对于****也有定理1的结论**

**注2 定理6.3.1可用两句口诀来简言之，即“反∪对∪偶∪零”“与反∪对∪奇∪倍”。其中“反”指在轴上的投影方向相反；“对”指关于轴对称；“偶”指被积函数在上关于为偶函数；“零”指曲线积分的结果等于零。口诀“反∪对∪奇∪倍”涵义类似解释。**

**关于曲线积分****还有另一个对称性的结论是：**

**定理6.3.2 设为平面上关于轴对称的一条有向光滑曲线弧，其方程为****，记****分别L为位于y轴的右半部分，****分别在x轴上的投影方向相同，函数P（x，y）在L上连续，那么**

**（1）当P（x，y）关于x为奇函数时，则**



**（2）当P（x，y）关于x为偶函数时，则**



**证明： 依定理条件不妨设**

**从点0变到a**

**从点-a变到0（a＞0）.**

**于是由对坐标曲线积分的性质及计算方法有**



****

**对右端第2个积分，令x=-t，有**



**因此有**





**故（1）当P（x，y）在L上关于x为奇函数时，有**



**（2）当P（x，y）在L上关于x为偶函数时，有**





**注1 对于****也有类似2的结论。**

**注2 定理6.3.1与定理6.3.2虽然都是对坐标x的曲线积分，但定理1中积分曲线弧的对称性及其投影都是针对x轴而言的，而定理2积分曲线弧的对称性及其投影是分别针对y轴和x轴而言的。另外，被积函数P（x，y）的奇偶性也是分别针对不同的变量而言的，故定理2的结论恰好与定理1相反，定理2用口诀简言之是：“同∪对∪奇∪零∪倍”。其中“同”指分别在x轴的投影方向相同，“对”指L关于y轴对称“奇”指被积函数P（x，y）关于x为奇函数，“零”指曲线积分结果等于零“同∪对∪偶∪倍”的涵义类似解释。**

**例4 计算**.**其中为抛物线** **从点A（1，-1）到B（1,1）上的一段弧。**

**解：以题设条件知，该曲线积分满足定理1中“反对奇倍”的结论，故有**，

**其中，****，x从点0变到1.**

**例5**  **计算****其L为****按逆时针方向从点A（a，0）到点B（-a，0）的上半圆周。**

**解可将原式改写为3个曲线积分的代数和，即**

，

**依题设条件分析知，等式右端第一、第二、第三个曲线积分依次满足定理2中“同∪对∪偶∪倍”、“同∪对∪奇∪零”及定理1的注1中“反∪对∪偶∪乘∪零”的结论，故有**

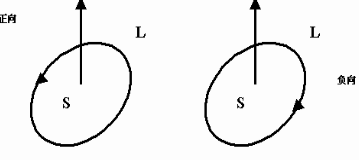




**其中，**，**x从点a变到0.**

#### 6.4.利用斯托克斯公式计算第二类曲线积分

**斯托克斯（Stokes）公式建立了沿空间双侧曲面S的积分与沿S的边界曲线L的积分之间的联系。在介绍下述定理之前，先对双侧面S的侧与边界L的方向作如下规定：设有人站在S上指定的一侧，若沿L行走，指定的侧总在人的左方，则人的前进方向为边界L正向；若沿L行走，指定的侧总在人的右方，则人的前进方向为边界线L的负向，这个规定方法也称为右手法则，如下图所示。**

**定理6.4.1 设光滑曲面S的边界L是按段光滑的连续曲线，若函数P,Q,R在S（连同L）上连续，**

**且有一阶连续偏导数，则**



  **（2）**

**其中S的侧面与L的方向按右手法则确定。**

**公式（2）称之此公式为斯托克斯公式。**

**证明： 先证**   **（3）**

**其中曲面S由方程确定，它的正侧法线方向数为****，方向余弦为****，所以**

**若S在xy平面上投影区为Dxy，L在xy平面上的投影曲线记为，现由第二类曲线积分定义及格林公式有**



**因为**



**所以**



**由于**

****

**从而**









**综合上述结果，便得所要证明的（3）式。**

**同样对于曲面S表示x=x（y，x）和y=y（z，x）时，可得**

 **（4）**

**和**

  **（5）**

**将（3）、（4）、（5）三式相加即得斯托克斯公式（2）。**

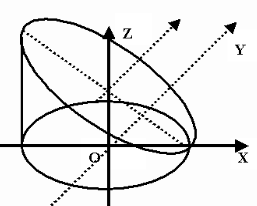
**如果曲线S不能以z=z（x，y）的形式给出，则用一些光滑曲线把S分割为若干小块，使每一小块能和这种形式表示，因而这时斯托克斯公式也能成立。**

**为了便于记忆，斯托克斯公式也常写成如下形式：**



**例1，** **其中C为椭圆**.**若从轴ox正向看去，此椭圆是依次反时针方向进行的。**

**解：椭圆如图所示，把平面上C所包围的区域记为S，则S的法线方向为（h，0，a），**

**注意到S的法线和曲线C的方向是正向联系的，**

**可知S的法线与轴正向的夹角为锐角，因此，**



**于是由斯托克斯公式知**



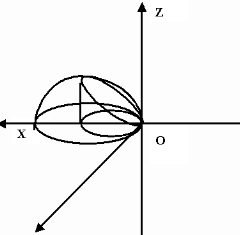






**例2**  **，式中C是曲线**



**此曲线是如下进行的：由它所包围在球处表面上的最小区域保持在左方如图所示。**

**解： 注意到球面的法线的方向余弦为**

****

**由斯托克斯公式有**







**由于曲面S关于oxz平面对称，y关于y是奇函数，有**



**于是**



#### 6.5.对于第二类空间曲线积分

**一般解题过程为：**

**6.5.1.若空间曲线Г闭合，P，Q，R对各元偏导数连续，则**

****

**6.5.2若空间曲线Г非闭，其参数方程为**

**其中：分别为Г的起点，终点参数值.**

**例2 计算空间曲线积分：，其中曲线Г为圆柱面与平面的交线（a＞0，h＞0），从x轴正向看，曲线是逆时针方向.**

**解 **

## 7.第一类曲面积分的计算和解题技巧

#### 7.1.计算时需要注意的问题

**对于第一类曲面积分，基本方法就是经过“一投、二代、三换”转化为投影区域上的二重积分.**

**例1：计算，其中∑为界于z=0和z=h两平行面之间的圆柱面.**

**错解：∑在xoy面上的投影是圆周，面积为零，故原积分为零**

**错误原因在于按一般计算方法，如果要投影到xoy面上，那么曲面方程必须可以写成z=z（x，y）的表达式.然而本题中的圆柱面方程无法写成这种形式，因此把∑投影到xoy面上是无法计算的.**

**正解：若投影到yoz面上，那么投影区域为：圆柱面方程可表示为，从而**

****

**又因对称性，只要在∑上x≥0的那部分曲面上积分乘以2倍即可：**

****

**所以，向坐标平面投影时，一定要注意：**

**（1）曲面在做表面上的投影区域的面积不能为0；**

**（2）z=z（x，y）必须为单值函数，若曲面∑可表示为单值函数x=x（y，z）或y=y（x，z）也可得到相应曲面积分化为二重积分公式，否则就要对积分区域分片.**

#### 7.2.选择适当的微分元计算第一类曲面积分

**7.2.1.转化为定积分.如果被积函数为一元函数，比如f（z），则可以考虑将曲面元华为积分元dS=h(z)dz，假设积分曲面夹在两平面z=a和z=b之间，那么，**

**.**

**例2：对例1进行求解：**

**解：注意到被积函数，若将积分曲面**

代入，**则为z的一元函数，取微元：，如图1所示，则**

**1**

**1**

**0**

**1**

**z**

**y**

**x**

**z**

**dz**

**图1**

****

**7.2.2.转化为曲面积分.如果被积函数是二元函数，比如f(x,y)，而积分曲面向xoy面的投影是一条平面曲线时，可考虑将曲面元化为弧微元dS=h(x,y)ds,那么**

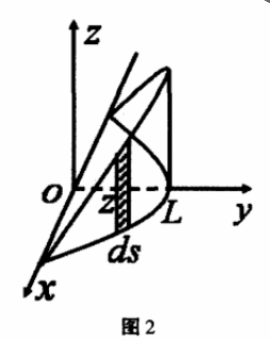
****

**例3：求椭圆柱面（三维空间上）位于xoy面上及平面z=y下方的那部分柱面∑的侧面积S.**

**解：如图2，将∑向xoy面投影，得投影曲线L：（y≥0）（二维平面上），取面积微元dS=zds，那么**

****

**将投影曲线用参数方程表示**

****

**则**

****

**7.2.3.利用球面坐标系计算.如果积分曲面是球面或球面的一部分，则可转化到球面坐标系下计算，此时曲面微元为.**

**例4计算**

**解：取球面坐标系，则所以**

****7.3.常用的计算技巧

**7.3.1.利用积分曲面的方程简化被积函数.因为被积函数是定义在积分曲面上的，所以可以先用曲面方程简化被积函数后再计算.**

**例5 计算，其中∑为界于z=0和z=h两平行面之间的圆柱面**.

**解：**

**7.3.2.利用对称性和重心公式计算**

**例6 求，其中∑是球面**

**解：**

**对于积分****，利用重心公式****（A为∑的面积），可得.同理可得****.对于积分****中的被积函数xy是关于y的奇函数，而积分区域关于xoz面对称，所以****.同理可得**.

**所以**

****

**7.3.3利用轮换对称性计算**

**例6 求，其中∑是球面**

**解：利用轮换对称性有：**

****

**故**



## 8.第二类曲面积分的五种求法

#### 8.1.直接利用投影法进行计算

**定理8.1.1：**

**（1）若曲面**

****

****

**（2）若曲面**

****

****

**（3）若曲面**

****

****

**例1：计算****，其中∑为曲面在第一象限部分（0≤z≤1）的上侧.**

**解：设分别表示在****平面、****平面、****平面的投影.**

**相应的方程分别为：**

****

**则：**



#### 8.2.利用高斯公式化为三重积分计算

**定理8.2.1：设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面∑围城，函数P（x，y，z）、Q（x，y，z）、R（x，y，z）在Ω上具有一阶连续偏导数，则有公式：**

**.**

**这里∑取曲面外侧.**

**注意，高斯公式的实质：表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系，利用高斯公式计算曲面积分，根据条件可以有以下三种方法.**

**8.2.1.直接利用高斯公式（具备使用高斯公式的条件）**

**例2：计算：，其中f具有连续导数，∑为锥面与两球面所围成的立体Ω的表面取外侧.**

**解：由高斯公式，**

****

**注意，本题被积函数为抽象函数，用了高斯公式后，将其化为被积函数较具体的且常见的三重积分计算问题.**

**8.2.2.如果区域不是封闭的，可通过填补使其封闭，再用高斯公式.**

**例3：计算，其中∑是旋转抛物面介于z=0和z=4两平面间的部分取上侧.**

**解：添补平面取下侧；则是一个封闭的曲面的内侧，及其所围成的空间区域为Ω.**

**则由高斯公式有：**

****

**8.2.3.如果函数P（x，y，z）、Q（x，y，z）、R（x，y，z）在Ω上不具有一阶连续偏导数，可通过清除奇点，再用高斯公式.**

**例4：计算曲面积分，其中∑是椭球面的外侧，.**

**解：P=ylnr、Q=xlnr、R=z，则当（x，y，z）≠（0,0,0，）时，**

**.**

**作球面，使****所包围的部分包含在∑所围成的区域Ω内，且球面****的法向量指向球心.**

**由高斯公式有：**

****8.3.利用两类曲面积分之间的关系计算第二类曲面积分

**定理3：设有向曲面∑在点（x，y，z）处的单位法向量为，则有**

**即向量值函数在有向曲面∑上的第一类曲面积分.**

**例5：计算**

**其中f（x，y，z）为连续函数，∑为平面在第四象限部分的上侧.**

**解：的法向量，**

**则，**

8.4.利用矢量点积法计算第二类曲面积分

**定理4：曲面，法向量为，**

**（注意：上侧取正，下侧取负，同样有其它两种形式）**

**例6：计算****，Ω为锥面被所截部分外侧.**

**解：**

#### 8.5.利用区域对称性计算第二类曲面积分

**例7：计算：****，其中∑是球面的外侧.**

**解：由轮换对称性：**



## 9.傅里叶级数

#### 9.1求下列定积分：

**（1） （2） （3）**

**（4） （5） （6）**

**解：（1）**

****

**（2）**

****

**（3）**

****

**（4）**

****

**（5）**

**（6）**

****

**推论9.1.1：所谓三角函数系**

****

**在区间上正交，就是指在三角函数系中任意不同的两个三角函数的乘积在区间上的积分为零，即：**

****

**在三角函数系中任意相同的两个三角函数的乘积在区间上的积分不为零，即：**

****