

CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Prof. Dr. Tufan TURACI

tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
- Hafta 4

Ders İçereği

- **Bilgisayar Bilimlerinde Kümeler**
- **İkilik, Onluk, Onaltılık Tabanda Sayıların Yazımı**

Küme Teorisi

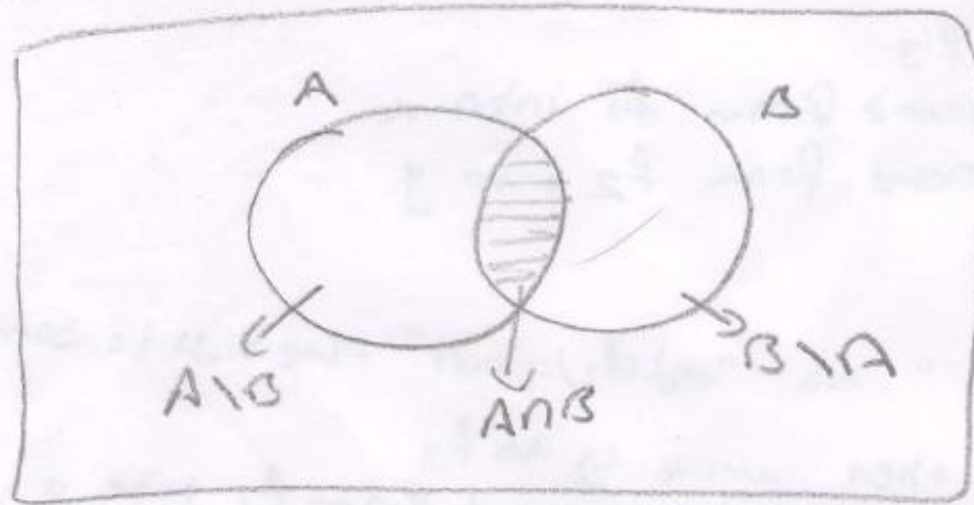
Herhangi bir olursa olsun objeler topluluğu küme olarak adlandırılır. Objeler her şey olabilir ve bunlara kümenin elemanları denir.

Eleman Sayısı = Eğer A sonlu bir küme ise kardinalitesi, $|A|$, i kadar \hat{g} (farklı) elemanların sayısıdır.

*Eğer A sonsuz sayıda elemana sahip ise, sonsuz kardinalite vardır denir ve $|A| = \infty$ ile gösterilir.

Kümelerin Eşitliği: Eğer $\forall x$ için $\{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ ise $A = B$ denir.

Alt kümeler: A'nın tüm elemanları aynı zamanda B'nin de elemanları ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir. Sembolik olarak $\forall x$ için $\{x \in A \rightarrow x \in B\}$ ise $A \subseteq B$ dir.



E Ayrık küme / Kesişim
boş küme olan kümelere
ayrık küme denir.

Simetrik Fark / A ve B
kümelerinin simetrik farkı
yolunda A ya da B'nin B
kümeye ait olan elemanların kümesi
dir. A Δ B ile gösterilir.

$$A \Delta B = (A/B) \cup (B/A)$$

Küme Özellikleri ve İspat Yöntemleri

$A, B, C \in E$ ve A 'nın tamamlayıcı \bar{A} olsun.

① $\bar{\bar{A}} = A$

② a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (De Morgan)

③ $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$

④ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑤ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

⑥ $A \cup A = A$ (eşitlik)
 $A \cap A = A$

⑦ $A \cup \bar{A} = E$ (bütün olma)
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

⑧ $A \cup \emptyset = A$ (boşluk)
 $A \cap \emptyset = \emptyset$

⑨ $A \cup \emptyset = A$ (bütün olma)
 $A \cap E = A$

⑩ $A \cup (A \cap B) = A$
 $A \cap (A \cup B) = A$ (yutma özelliği)

İşaret

2.a) $x \in E(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}x \in \overline{A \cup B} &\equiv x \notin A \cup B \\&\equiv x \notin A \text{ ve } x \notin B \\&\equiv x \in \bar{A} \text{ ve } x \in \bar{B} \\&\equiv x \in \bar{A} \cap \bar{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5.a) \quad x \in A \cap (B \cup C) &\equiv x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C) \\&\equiv x \in A \text{ ve } x \in B \text{ veya } x \in C\end{aligned}$$

⊕ $x \in B$ ise $x \in A \cap B$ olur. Başka $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 'dir.
⊖ $x \in C$ ise $x \in A \cap C$ olur. Başka $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 'dir.

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C) \text{ midir?}$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \equiv x \in A \cap B \text{ veya } x \in A \cap C$$

$$* x \in A \cap B \text{ ise } x \in A \text{ ve } x \in B \equiv x \in A \text{ ve } x \in B \cup C \text{ dir.}$$

$$* x \in A \cap C \text{ ise } x \in A \text{ ve } x \in C \equiv x \in A \text{ ve } x \in B \cup C \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece } (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C) \text{ dir. ispat biter.}$$

⊗ Bir kümenin eleman sayısına kümenin **cardinalitesi** denir. A kümesi için $|A|$ ile gösterilir.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow |A| = 4$$

$$B = \{ \} \Rightarrow |B| = 0$$

$$C = \mathbb{Z}^+ \Rightarrow |C| = \infty$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

Kuvvet Kümesi = Herhangi bir $A \subseteq E$ için A kümesinin

tüm alt kümelerden oluşan küme A 'nın kuvvet kümesidir.

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ 'dir.

Özellik $P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

$2^{|A|} - 1$ 'dir.

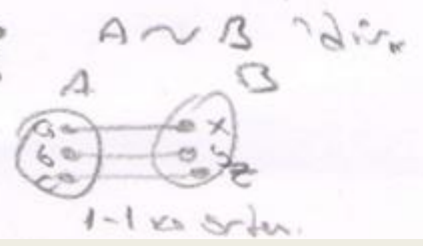
Sonsuz Küme = ?

A, B iki küme $f: A \rightarrow B$ bir fonk. olsun. f fonk. no 1-1 ko öten

ise bu fonksiyona birebir eşleme denir. A 'den B 'ye en az bir 1-1 eşleme varsa A ve B kümelere eşit güçlülük kümelere denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

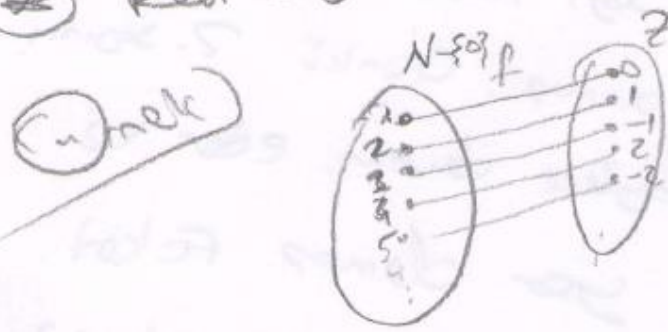
Örnek

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{x, y, z\}$

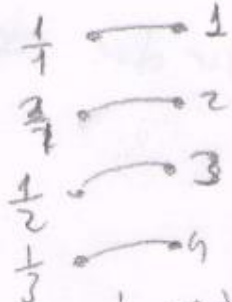
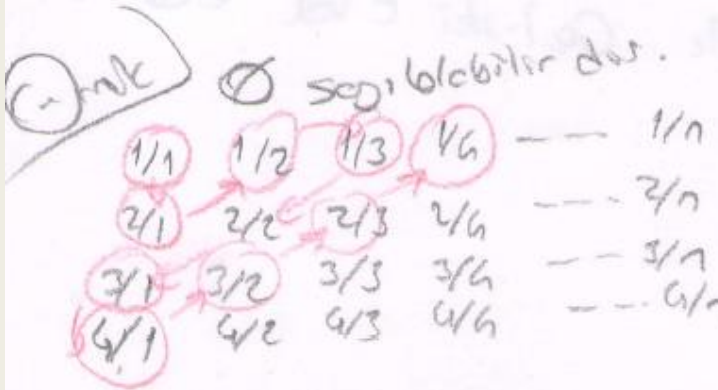


Tanım Doğal sayıların bir alt kümesine eşit jürlü olan küme seçilebilir küme denir. Bir küme seçilebilir değilse sayılamaz küme denir.

- Doğal sayılar, Tam sayılar, Rasyonel sayılar, Asel sayılar seçilebilir sayılardır.
- Doğal sayılar, Tam sayılar, Asel sayılar → Sayılamaz sayılardır.
- Real sayılar, kompleks sayılar → Sayılamaz sayılardır.



$N \sim Z$ old. den Z seçilebilir bir kümedir.



$\frac{1}{1}$ var $(\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4})$ yok
1-1 olmaz.

$\frac{1}{2}$ var $(\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8})$ yok
1-1 olmaz.

old den Q seçilebilir dir.

Çalışma Sorusu: Reel sayılar kümesi sayılabilir mi? Kanıtlayınız.

Bilgisayar Bilimlerinde Kümeler

1) f_1 ve f_2 içerdikleri kayıtlar toplamı olarak belirli ve sonlu kümeleri bilinmeyen bir dizi olsun. Eğer bu 2 dosyadaki kayıtlar küçülden büyüğe sıralı ise, içine iki kayıtlar küçülden büyüğe sıralı, olarak şekilde bu iki dosyanın kayıtlarının birleşimini $A \cup B$ f_3 dosyasını yazdırınız. { Pseudocode yazınız. }

function ^(merge) ~~birlesim~~ (file f1, file f2, file f3)

get next record from f1 into x

get next record from f2 into y

while (not eof(f1) OR not eof(f2))

if $x < y$ then

write x to f3

get next record from f1 into x

else if $(y < x)$ then

write y to f3

get next record from f2 into y

else

write x to f3

get next record from f1 into x

get next record from f2 into y

end if

end while

if "eof(f1) = null" and "eof(f2) = null" then go to join

bas1: if "eof(f1) = null" then write y to f3
get next record from f2 into y
if eof(f2) = null then go to join
else
go to bas1
end if

end if

bas2:

```
if "eof (f2) = null" then write x to f3
    get next record from f1 into x
    if eof (f1) = null then go to son
    else
        goto Bas 2
    endif
endif
end if

son:
---end function.
```

Çalışma Sorusu:

Aynı soruda;
i) $A \cap B$ ii) A/B iii) B/A ler f_3 ile yazdırınız.

Çalışma Sorusu:

n elementli bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n 'dir.
5 elementli bir $S = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin elementlerin 5
isimli bir dizide sıralanmış olduğunu varsayalım. S kümesinin
tüm alt kümelerini listeler algoritması oluşturunuz.

İkilik Tabandan Onluk Tabana Sayıların Çevrilmesi

$$(abcde)_2 = a.2^4 + b.2^3 + c.2^2 + d.2^1 + e.2^0 \quad (a, b, c, d, e \in \{0, 1\})$$

$$(10011)_2 = 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 19$$

Sözde Kodu veya Program Nasıl yazılabilir?

C kodu:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
int main()
{ int s = 0, bd = 0, kat = 0, top = 0;
  printf("2 lik tabanda sayiyi giriniz: ");
  scanf("%d", &s);
  while(s > 0)
  {
    bd = s % 10;
    if (bd>=2) { printf("Sayi ikilik tabanda degildir... \n");
                 goto son;}
    s = s/10;
    top = top + bd * pow(2,kat);
    kat++;
  }
  printf("Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : %d\n",top);
son:
  getch ();
  return 0;
}
```

```
2 lik tabanda sayiyi giriniz: 10011
Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : 19
-----
```

```
2 lik tabanda sayiyi giriniz: 00111
Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : 7
-----
```

```
2 lik tabanda sayiyi giriniz: 12001
Sayi ikilik tabanda degildir...
-----
```

```
2 lik tabanda sayiyi giriniz: 100532
Sayi ikilik tabanda degildir...
-----
```

İstenilen Tabandan Onluk Tabana Sayıların Çevrilmesi

$$(abcde)_t = a.t^4 + b.t^3 + c.t^2 + d.t^1 + e.t^0 \quad (a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, \dots, t-1\})$$

$$(12003)_5 = 1.5^4 + 2.5^3 + 0.5^2 + 0.5^1 + 3.5^0 = 878$$

$$(121)_3 = 1.3^2 + 2.3^1 + 1.3^0 = 16$$

Sözde Kodu veya Program Nasıl yazılabilir?

C kodu:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
int main()
{ int s = 0, bd = 0, kat = 0, top = 0, t;
  printf("Sayinin hangi tabanda oldugunu giriniz: ");
  scanf("%d", &t);
  printf("%d tabanindaki sayiyi giriniz: ", t);
  scanf("%d", &s);
  while(s > 0)
  {
    bd = s % 10;
    if (bd>=t) { printf("Sayi %d tabanindan degildir... \n",t);
                  goto son;}
    s = s/10;
    top = top + bd * pow(t,kat);
    kat++;
  }
  printf("Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : %d\n",top);
  son:
  getch ();
  return 0;
}
```

```
Sayinin hangi tabanda oldugunu giriniz: 5
5 tabanindaki sayiyi giriniz: 12003
Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : 878
-----
```

```
Sayinin hangi tabanda oldugunu giriniz: 3
3 tabanindaki sayiyi giriniz: 121
Sayinin 10 luk tabandaki karsiligi : 16
-----
```

```
Sayinin hangi tabanda oldugunu giriniz: 5
5 tabanindaki sayiyi giriniz: 12053
Sayi 5 tabanindan degildir...
-----
```

```
Sayinin hangi tabanda oldugunu giriniz: 3
3 tabanindaki sayiyi giriniz: 1242
Sayi 3 tabanindan degildir...
-----
```

Onluk Tabandan İstenilen Bir Tabana Sayıların Çevrilmesi

$$133 = (?)_5$$

Çözüm: Verilen sayı sürekli 5'e bölünür. (Bölüm 5 den küçük olana kadar devam eder.)

$$\begin{aligned} 133 &= 26.5 + 3 \\ 26 &= 5.5 + 1 \\ 5 &= 1.5 + 0 \end{aligned}$$



$$133 = (1013)_5$$

Çalışma Sorusu: Sözde Kodu veya Programı Nasıl yazılabilir?

Onaltılık Tabanda Sayıların Yazılımı

$$A \Rightarrow 10 \quad D \Rightarrow 13$$

$$B \Rightarrow 11 \quad E \Rightarrow 14$$

$$C \Rightarrow 12 \quad F \Rightarrow 15$$

Örnek:

$$\begin{aligned}(1AB3)_{16} &= 1.16^3 + A.16^2 + B.16^1 + 3.16^0 \\ &= 4096 + 10.256 + 11.16 + 3 \\ &= 4096 + 2560 + 176 + 3 \\ &= 6835\end{aligned}$$

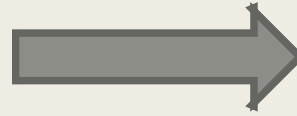
Örnek:

$$6835 = (?)_{16}$$

$$6835 = 427 \cdot 16 + 3$$

$$427 = 26 \cdot 16 + 11$$

$$26 = 1 \cdot 16 + 10$$



$$(1AB3)_{16}$$

Aritmetik İşlemler

Örnek: $(124)_5 + (562)_7 = (?)_3$

Örnek: $(1572)_8 - (662)_8 = ?$

Örnek: $(5A3B6)_{16} + (F25E4)_{16} + (1CB25)_{16} = ?$

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen
(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri),
Palme yayıncılık)
- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán,
K. Vesztergombi, 2003.
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest,
C. Stein, 2009.
- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.