CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 9

Ders İçereği

- **Listeler ve Sayma (Kombinatorik)**

  --- Kombinasyon

- **Olasılık**

Kombinasyon (Seçme)

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq n$ olmak üzere;

n elemanlı A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r'li kombinasyonu denir.

$\binom{n}{r}$ veya $C(n,r)$ ile gösterilir.

Örn) $A=\{1,2,3,4\}$

$P(4,3) = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \underline{24}$ (4 elemanlı kümenin 3 elemanlı listelerinin sayısı.)

1,2,3	2,1,3	2,3,1	1,3,2	3,1,2	3,2,1
1,2,4	1,4,2	2,1,4	2,4,1	4,1,2	4,2,1
1,3,4	1,4,3	3,1,4	3,4,1	4,1,3	4,3,1
2,3,4	2,4,3	3,2,4	3,4,2	4,2,3	4,3,2

24 adet 3'lü liste var.

$A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde 3 eleman kaç farklı şekilde seçilir. $\underline{\{1,2,3\}}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\cancel{\underline{\{3,2,1\}}}$

4 farklı sayı seçme işlemi ... gösterilir.

$$C(4,3) = \binom{4}{3} \qquad \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$ olarak tanımlanır.

(Seçme)

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ olarak tanımlanır. (sıralama)

Örn: 20 kişiden 3 kişi kaç farklı şekilde seçilir?

$$C(20,3) = \frac{20!}{(20-3)!\cdot 3!} = \frac{20\cdot 19\cdot \cancel{18}^{3}\cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 1140$$

Örn: 13 erkek 14 kız öğrencinin bulunduğu bir sınıfta 5 kişilik gruplar oluşturuluyor.

i) Kaç farklı grup oluşur; $\binom{27}{5}$

ii) Grupların hepsinde kız olacak şekilde kaç grup oluşur: $\binom{14}{5}$

iii) 2 erkek 3 kız kaç şekilde oluşur: $\binom{13}{2}\cdot\binom{14}{3}$

iv) Gruplardan en az bir kız olmak üzere kaç grup oluşturulur?

1.yol

$$\binom{27}{5} - \binom{13}{5}$$

tüm durum − 5 kişinin erkek olması durumu

2.yol

$$\underset{E}{\binom{13}{4}} \cdot \underset{K}{\binom{14}{1}} + \underset{E}{\binom{13}{3}} \cdot \underset{K}{\binom{14}{2}} + \underset{E}{\binom{13}{2}} \cdot \underset{K}{\binom{14}{3}} + \underset{E}{\binom{13}{1}} \underset{K}{\binom{14}{4}}$$

$$+ \underset{E}{\binom{13}{0}} \cdot \underset{K}{\binom{14}{5}}$$

Özellikler

1) $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

2) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$

Örn:

$\underbrace{\binom{10}{3} = \binom{10}{x-1}}$ $x > 4$ ise ise $\binom{x}{2} = ?$

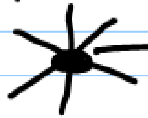
$3 + x - 1 = 10$

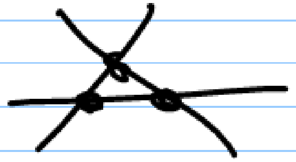
$\boxed{x = 8}$

$\binom{8}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 1} = 28$

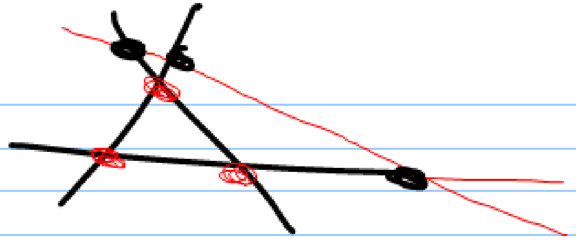
$$3)\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(*) n doğru en çok $\binom{n}{2}$ noktada kesişir.

3 doğru en az =  → 1 noktada

en çok =  $\binom{n}{2}$

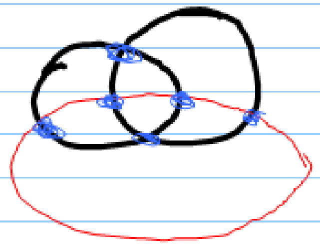
4 doğru en çok $\binom{4}{2} = 6$



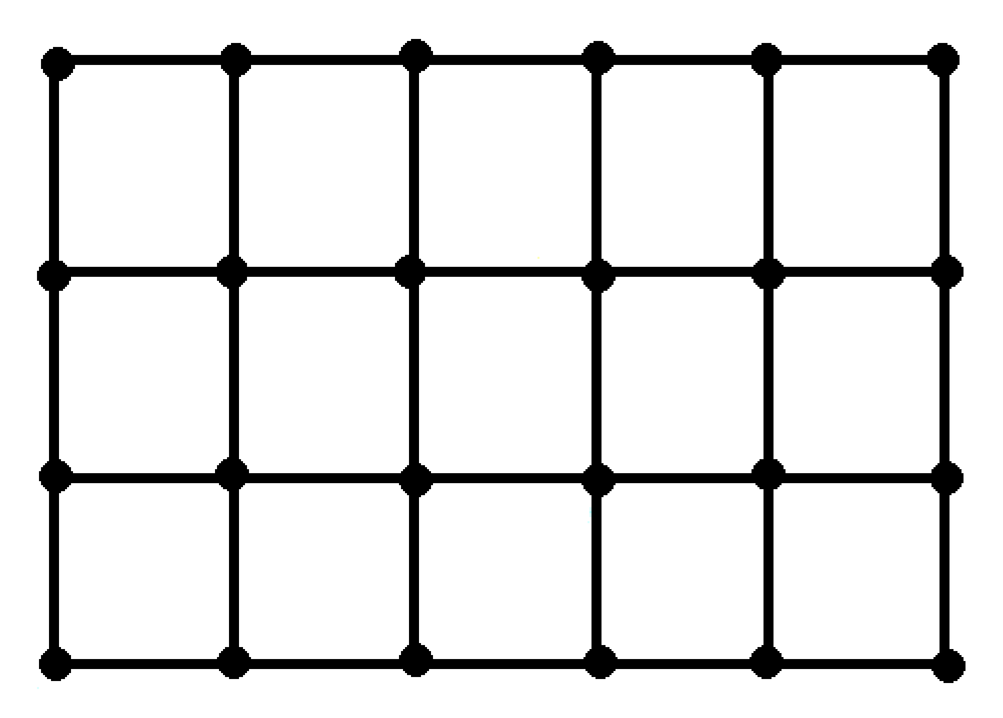
⋮

(*) n (bir farklı) çember en çok $2 \cdot \binom{n}{2}$ noktada kesişir.

2 çember 

3 çember 

Örnek:



Şekilde kaç tane dörtgen vardır ?

Çözüm:

n satır m sütun genelleme:

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$

Sorunun çözümü:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15.6 = 90$$

11

Bir pansiyonda 2 yataklı 1 oda
4 " 2 oda vardır.
10 kişilik bir grupta belirli 2 kişi farklı odada kalmak koşuluyla bu 10 kişi kaç farklı şekilde pansiyonda kalır?

Tüm durum − yanyana kalma durumu

$2_A \quad 4_B \quad 4_C$

Tüm durum = $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 3150$

istenmeyen durum

8 kişi

2 kişi aynı odada

A odasında olsun $\Rightarrow \binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4} = 70$

8 kişi

B " " $\Rightarrow \underset{A}{\binom{8}{2}}\cdot\underset{B}{\binom{6}{2}}\cdot\binom{4}{4} = 420$

8 kişi

C " " $\Rightarrow \underset{A}{\binom{8}{2}}\cdot\underset{B}{\binom{6}{4}}\cdot\underset{C}{\binom{2}{2}} = 420$

$+$

$\boxed{910}$

durumda aynı odada kalırlar.

$3150 - 910 = \boxed{2240}$

durumda farklı odada kalır.

Çalışma Sorusu: Klavyeden girilen n ve r değerleri için C(n,r) değerini hesaplayan Algoritma veya programı yazıp karmaşıklığını hesaplayınız.

Olasılık

Örnek Uzay: istenen bir durum için oluşacak tüm durumların oluşturduğu uzaya örnek uzay denir. ve E ile gösterilir.

Örn) Bir zar havaya atılıyor.

Örnek uzay nedir? $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ⇒ 6 (zar adedi: 1)

2 zar atılırsa: $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)\}$

36 farklı durum vardır.

Bir para havaya atıldığında

$E = \{T, Y\}$

2 para için: $E = \{TT, TY, YY, YT\}$ $\Rightarrow 2^{n}$ → para adedi.

Örn Bir torbada 12 toptan 3'lü topların sayısı?

↳ Kaç farklı şekilde seçilir $\Rightarrow \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = \boxed{220}$

Örnek uzayın her bir alt kümesine bir olay denir.

2 zar atılsın: $\{(1,1)(1,2)\boxed{\underbrace{(1,3)}_{\text{olay}}}, \ldots, (6,6)\}$

$\Rightarrow$ 2 zarın toplamının 4 olması olayları hangileridir?

$\boxed{(1,3), (3,1), (2,2)}$

⇒ Boş küme imkansız olay

⇒ E'nin kendisine kesin olay denir.

Ayrık Olay: Bir örnek uzaya ait 2 olayın kesişimi $\emptyset$ ise bu 2 olaya ayrık olaylar denir.

Örn: 2 zar atılıyor.

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1)\}$ ⇒ Zarların toplamının 7 olması olayı

$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ ⇒ Zarların aynı gelmesi olayı

$A \cap B = \emptyset$ olduğundan

A ve B ayrık olaylardır...

Olasılık Fonksiyonu

Bir E örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi E_A olsun.
Tanım kümesi E_A, değer kümesi $\{x \mid 0 \leq x \leq 1$ ve $x \in R\}$ olan
ve aşağıdaki 3 şartı sağlayan her $\boxed{P \text{ fonk.}}$ na E_A
üzerinde bir olasılık fonk.nu denir.

1-) $0 \leq P(A) \leq 1$

2-) $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

3-) $A, B \in E_A$ için $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Örn: Havaya atılan bir paranın yazı gelme olasılığı nedir?

Bir A olayının gelme olasılığı $\Rightarrow P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)}$

$s(A) \rightarrow$ A olayının eleman sayısı

$s(E) \rightarrow$ Evrensel kümenin eleman sayısı

$E = \{T, Y\}$ $A = \{Y\}$ $P(A) = \dfrac{|A|}{|E|}$ *

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$A = \{Y\}$

$E = \{Y, T\}$

$P(A) = \dfrac{|A|}{|E|} = \dfrac{1}{2}$

Örn: 2 zar havaya atılıyor. İki zarın toplamının en az 9 olma olasılığı nedir?

$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)\} \Rightarrow s(E) = 36$

$A = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow s(A) = 10$

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{10}{36} = \boxed{\dfrac{5}{18}}$

Örn İçerisinde 7 beyaz, 6 sarı topun bulunduğu bir torbadan rastgele 3 top seçiliyor. En az birinin sarı olma olasılığı nedir?

$S(E) = \binom{13}{3} = \dfrac{13 \cdot \cancel{12}^{2} \cdot 11}{\cancel{3 \cdot 2}} = \underline{286}$ farklı şekilde seçilir.

En az birinin sarı ? $P(A) + \underline{P(A')}$ 3'de beyaz.

hepsinin beyaz olma durumuna bakalım $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2}} = 35$

$286 - 35 = \boxed{251} \Rightarrow$ en az 1 tane sarı var.

$$\boxed{P(A) = \frac{251}{286}}$$

= Olasılık Fonksiyonun Özellikleri =

① $P(A) + P(A') = 1$

② $A \cap B \neq \emptyset$ ise $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

③ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ikişer ikişer ayrık olsunlar ve

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ ise

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

④ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ 'dir.

Ex) $P(A) = \frac{5}{8}$

$P(B) = \frac{1}{8}$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ise $P(A \cap B) = ?$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} - P(A \cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

(...)'ın A ve C takımları karşılaşıyorlar.

A takımının kazanma veya berabere kal. olas. $= \frac{7}{16}$

C takımının " " " " " $= \frac{6}{8}$'dir.

Maçın berabere bitme olasılığı nedir?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{16}$

$P(C \cup B) = P(C) + P(B) = \frac{6}{8}$

$+$ (2)

$\underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{\text{Ol. 3'ten } = 1} + \boxed{P(B)} = \frac{19}{16}$

$P(B) = \frac{3}{16}$

Örn:

1'den 6'ya kadar numaralandırılmış 6 tane toptan 3'ü bir A torbasına ve diğer 3'ü de B torbasına rastgele konuyor.

1, 2 ve 3 nolu topların ayrı torbada olma olasılığı nedir?

1, 2, 3, 4, 5, 6

tüm olay

A B

$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20$ farklı durum

olma olasılığı?

2 farklı durum vardır!

$$E \Rightarrow \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ farklı durum var}$$

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Şartlı Olasılık

Bir B olayı olduğunda A'nın olma olasılığı $P(A|B)$ ile gösterilir. $\Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A\cap B|}{|B|}$

B olayı old. da A'nın olma olasılığı.

Örn: Bir zar atılıyor. Zarın çift geldiğinde, asal olma olasılığı nedir?

A olayı = Asal olması $= \{2,3,5\}$

B olayı = Çift gelmesi $= \{2,4,6\}$

$A\cap B = \{2\}$

$$P(A|B) = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

Örnek

244557 sayıları ile 6 basamaklı sayılar oluşturuluyor. Bu sayılardan biri seçiliyor. Seçilen sayının tek olduğunda 5 ile bölünebilme olasılığı nedir?

A = 5 ile bölünebilme

B = Tek olma durumu

$|B| = ?$

24455 _ _ _ _ _ $\frac{1}{7}$ $\qquad \frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$

24457 _ _ _ _ _ $\frac{1}{5}$ $\qquad \frac{5!}{2!} = 60$

$30 + 60 = 90$ tek olma

5 ile bölünebilme

$\underline{\underline{60}}$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Bağımsız Olaylar

Bir olayın olması yada olmaması, diğer olayın olmasını yada olmamasını etkilemiyorsa bu olaylara bağımsız olaylar denir.

A ve B bağ. olaylar olmak üzere;

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ dur.}$$

(5) Bir para ve zar!! (bağımsız)

Örnek) Ali'nin (?) geleme olasılığı, $\frac{1}{4}$, Can'ın $\frac{1}{3}$ 'tür.

(i) Ali ve Can gel. olasılığı $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

(ii) Yalnız Ali'nin " " $= P(A \cap C') = P(A) \cdot P(C')$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(iii) İlkisininde bolma " $= P(A') \cdot P(C')$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(iv) Ali veya Can'ın seçme " =

$\Rightarrow$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Örnek: Aşağıdaki tablonun verilerinden yararlanarak bazı olasılıkları hesaplamaya çalışalım:

	20 yaş	21 yaş	Toplam
Kız	18	12	30
Erkek	32	38	70
Toplam	50	50	100

Bu grup içinden seçilecek bir öğrencinin kız olma olasılığı: P(Kız) =30 / 100 = 0.30

Erkek olma olasılığı: P(Erkek) = 70 / 100 =0.70

20 yaşında olma olasılığı : P(20) = 50 / 100 = 0.50

Şimdi de bileşik olasılıkları hesaplayalım:

P(Kız ve 20 yaş) = 18 / 100 = 0.18

P(Erkek ve 21 yaş) = 38 / 100 = 0.38
Bir öğrencinin kız veya 20 yaşında olma olasılığı da:
P(Kız veya 20 yaş)= (30/100) + (50/100) – (18/100) = 62 / 100 = 0.62

Soru

Bir zar arka arkaya 3 kez atılıyor.

En az 2 sinin 1 gelme olasılığı nedir?

116 256

211 332

151 ⋮

111 ⋮

⋮ iştemiyoruz!!

?

$A \to 1$ gelme olasılığı $\quad P(A) \cdot P(A) \cdot P(A') = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3$

$A' \to 1$ gelmeme " $\quad$ AAA' sıraları? $\quad = \frac{15}{216}$

AAA'

AA'A $\quad \frac{3!}{2!} = 3$

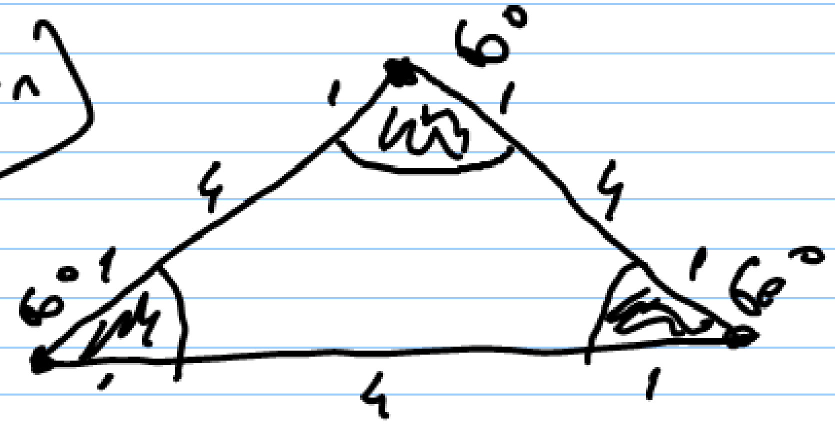
A'AA sıralar!!

en az 2 tane 1 var!!

Hepsinde bir olma olasılığı

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$$\frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{\cancel{16}}{216} = \frac{2}{27}$$



Atılan bir dart,
Taralı alanları vurma
olasılığı?

A : Taralı alanı vurması : yarım daire $r = 1$

$$|A| = \frac{\pi}{2}$$

$$E = \text{üçgenin alanı} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{54}$$

Ör: 1 byte uzunluğunda veriler üretiliyor.

Üretilen bir verinin en az 3 bitinin 1 olma olasılığı nedir?

_ _ 1 1 _ _ 1 _ 8 bit

0 0 0 0 0

$$\frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56 \Rightarrow 3 \text{ tane } 1 \text{ var}$$

$$\frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{4!}} = 70 \quad 4 \text{ tane } 1 \text{ var.}$$

$$\frac{8}{5!\cdot 3!} = 56 \Rightarrow 5 \text{ tane } 1 \text{ var}$$

$$\frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28 \Rightarrow 6 \text{ tane } 1 \text{ ve}$$

$$\frac{8!}{7!\cdot 1!} = 8 \Rightarrow 7 \text{ tane } 1 \text{ ve}$$

$$\frac{8!}{8!} = 1 \Rightarrow 8 \text{ tane } 1$$

$$\frac{219}{2^8} = \frac{219}{256}$$

$$\frac{2}{0,1} \cdot \frac{2}{0,1} \_ \_ \_ \_ \_ \_ \cdot \frac{2}{}$$

$\boxed{2.\text{yol}}$ 2 tane 1

1 tane 1

0 tane 1

$$\frac{8!}{2!.6!} = 28$$

$$\frac{8!}{1!.7!} = 8$$

$$\frac{8!}{8!} = 1$$

37 istenmediği durum.

$$P(A') = \frac{37}{256}$$

$$P(A) = 1 - \frac{37}{256} = \frac{219}{256}$$

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen

(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri), Palme yayıncılık)

- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, 2003.

- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, 2009.

- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.