06.03.2023

Teorem: Eğer $2 \mid x^2-1$ ise $4 \mid x^2-1$'dir.

$x^2-1 = 2y$

$x^2 = 2y+1$ (Tektir.)

$(y \in \mathbb{Z})$

x^2 tek ise, x tek olmalıdır.

$\boxed{x = 2k+1 \text{ olsun. } k \in \mathbb{Z}}$

$$x^2-1 = (2k+1)^2-1$$

$$= 4k^2+4k\cancel{+1}\cancel{-1}$$

$$x^2 - 1 = 4k^2 + 4k$$
$$= 4 \cdot \underbrace{(k^2 + k)}_{s \text{ olsun}}$$

4'ün katı

$s \in \mathbb{Z}$

$$x^2 - 1 = 4 \cdot s$$

$\hookrightarrow$ $4 \mid x^2 - 1$ dir.

Örn

$x = 5$ olsun

$$x^2 - 1 = 24$$

$2 \mid 24$

$\boxed{4 \mid 24}$

Teorem: $x \in \mathbb{Z}$ olsun.

$11x-7$'nin çift tamsayı olması için x'in tek olması gerek ve yeter şarttır. İspatlayınız.

$\Longrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ ancak ve ancak

(i) $11x-7$ çift ise, x tektir. ($p \Rightarrow q$)

(ii) x tek ise, $11x-7$ çifttir.

İspat (i):

$p \Rightarrow q$

Doğrudan ispat ?

$11x-7 = 2a$ olsun, $a \in \mathbb{Z}$

$11x = 2a+7$

$x = \dfrac{2a+7}{11}$ tek olup olmadığı?

Karşıt ters ile ispat

$\neg q \Rightarrow \neg p$

x çift ise, $11x-7$ tektir.

$x = 2k$ olsun, $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$

$11x-7 = 11(2k)-7$
$= 22k-7$
$= 22k-8+1$

$= 2.(11k-4)+1$

$\underbrace{11k-4}_{t \in \mathbb{Z}}$

$= \underbrace{2.t+1}_{\text{tek sayı}}$

İspat ii: x tek, $11x-7$ çift

doğrudan

$x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\underline{11x-7} = 11.(2k+1) - 7$$

$$= 22k + 11 - 7$$

$$= 22k + 4$$

$$= 2.(\underbrace{11k+2}_{t \in \mathbb{Z}})$$

$$= \underbrace{2.t}\ \text{çift}$$

Teorem: $x \in \mathbb{Z}$ olsun.

Eğer $\overset{p}{5x-7}$ tek ise, $\overset{q}{9x+2}$ çifttir olduğunu tanıtlayın.

doğrudan

$p \Rightarrow q$

karşıt ters

$\neg q \Rightarrow \neg p$

$5x-7$ tek

$\underbrace{5x-7}_{\text{Tek}} = 2y+1, \ y \in \mathbb{Z}$

$5x = 2y+8$

$5.x = \underbrace{2.(y+4)}_{\text{çift}}$

tek ?

$\boxed{\text{çift ?}}$

x çift ise, $9x+2$ çift midir?

$\Downarrow$

$x = 2k, \ k \in \mathbb{Z}$

$$9x+2 = 9 \cdot 2k + 2$$

$$= 2 \cdot (\underbrace{9k+1}_{t \in \mathbb{Z}})$$

$$= 2 \cdot t$$

çift

<u>çifttir</u>

Teorem:

$x \cdot y$ çift $\Longleftrightarrow$ x'in çift veya y'nin çift olmasıdır.

İspat:

$\boxed{x \cdot y \text{ çift}} \Longrightarrow$ x çift veya y çift

x çift veya y çift $\Longrightarrow x \cdot y$ çifttir.

$\Downarrow$

$\boxed{\text{1. durum} \quad x \text{ tek } 2m+1, \quad y \text{ tek } 2n+1}$

$$x \cdot y = (2m+1)(2n+1)$$
$$= 4mn + 2m + 2n + 1$$
$$= 2 \cdot \underbrace{(2mn + m + n)}_{t \in \mathbb{Z}} + 1$$
$$= \underbrace{2t + 1}_{\text{Tektir.}}$$

2. durum x tek $2m+1$, y çift $2n$

3. durum x çift $2m$, y tek $2n+1$

4. durum x çift $2m$, y çift $2n$

2. durum: $(2m+1) \cdot 2n = 4mn + 2n$

$x \cdot y$

$= 2 \cdot (2mn + n)$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

$= 2t$

çift

y çift

3. durum $(2m)(2n+1) = 4mn + 2m$

$x \cdot y$

$= 2(2mn + m)$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

$= 2 \cdot t$

çift

x çift

4. durum: $2m \cdot 2n = 4mn$

$x \cdot y$

$= 2 \cdot (2mn)$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

$= 2t$

çift

hem x hem y çift

Teorem: $\sqrt{5}$ irrasyonel sayıdır. İspatlayınız.

İspat: $\sqrt{5}$ irrasyonel sayı olmasın.

Yani, $\sqrt{5}$ rasyonel sayı olsun.

$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ olsun

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \\ (a,b) = 1 \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{obeb}(a,b) = 1}$

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

her iki tarafın karesi alınır.

$$5 = \frac{a^2}{b^2}$$

$a^2 = 5b^2$

↳ a^2, 5'in katı ise

a'da 5'in katı olur.

$\boxed{a = 5k}$ olsun.

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

$5 = \frac{a^2}{b^2}$

$5 = \frac{(5k)^2}{b^2}$

$5 = \frac{25k^2}{b^2}$

$5b^2 = 25k^2$

$b^2 = 5k^2$

b^2, 5'in katı ise b'de 5'in katı olmalıdır.

$b = 5m$ olsun

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \qquad (a, b) = 1$$

$$\sqrt{5} = \frac{5k}{5m} \qquad (5k, 5m) = ?$$

1 olmayan

Çelişki elde ederiz

Çelişkinin sebebi?

$\sqrt{5}$'i rasyonel sayı kabul etmem.

Çelişki elde edildiğinden, $\sqrt{5}$ rasyonel sayı değildir. → ispat biter.

O zaman, irrasyonel sayıdır!!

Teorem: Her $(n \geq 1)$ için

$$1+2+\cdots+n = \frac{n.(n+1)}{2} \text{ 'dir.}$$

$$1+2+3+4+5 = \frac{5.6}{2} = \boxed{15}$$

İspat: i) $n=1$ için $1 = \frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}}$

$$\boxed{1=1}$$

ii) $n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$1+2+\cdots+k = \frac{k.(k+1)}{2} \text{ olsun.}$$

iii) $n=k+1$ için doğru mudur?

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}+k+1 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{\frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{k+1}{\underset{(2)}{1}}} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} \checkmark = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ispat biter!!!

Örnek: $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$1^2+2^2+ \dots +n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$ 'dir.

İspat:

i) $n=1$ için

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6} \Longrightarrow 1=1 \checkmark$$

ii) $n=k$ için doğru olsun.

$$1^2+2^2+ \dots +k^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$$

iii) $n=k+1$ için doğru mudur?

$$\underbrace{1^2+2^2+ \dots +k^2}_{\Downarrow}+(k+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2).(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + \frac{(k+1)^2}{1}_{(6)}$$

$$= \frac{k.(k+1)(2k+1) + 6.(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1).\left[(2k^2+k) + 6.(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1).\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[\underset{\substack{2k \\ k}}{2k^2} + 7k + \underset{\substack{3 \\ 2}}{6}\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(2k+3).(k+2)}{6}$$

ispat tamamlandı

Örnek:

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $5^n - 2^n$ sayısı 3 ile bölünebilirdir. İspatlayınız.

$\left(3 \mid 5^n - 2^n \text{ 'dir.} \right)$

i) $n=1$ için $5^1 - 2^1 = 3$

$3 \mid 3$ olduğundan ✓

ii) $n=k$ için doğru olsun.

$\boxed{5^k - 2^k = 3.a}$ olsun.

$3 \mid 5^k - 2^k$

iii $n=k+1$ için doğru mu?

$$5^{k+1}-2^{k+1}\overset{?}{=}3.b$$

3'ün katı mıdır?

$$=5^k.\overbrace{5}^{(3+2)}-2^k.2$$

$$=3.5^k+2.5^k-2^k.2$$

$$=3.5^k+2.(\underbrace{5^k-2^k}_{3a})$$

$$=3.5^k+6a$$

$$=3.(\underbrace{5^k+2a}_{b\in\mathbb{Z}})$$

$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3 \cdot 6$

ispat biter.