CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 10

10. Hafta Konular

- **İnterpolasyon Yöntemleri:**

  --- Taylor Serisi ile İnterpolasyon Yöntemi

  --- Lagrange İnterpolasyon Yöntemi

İnterpolasyon nedir?

---- Herhangi bir deneyin sonuçları veya farklı çalışmalar ile elde edilmiş doğru bilinen değerleri kullanarak verilen aralıkta bilinmeyen noktaların değerlerini yaklaşık olarak belirleme işlemi interpolasyon olarak ifade edilir.

--- İnterpolasyon işleminde, bilinmeyen değerler bilinen değerlerin aralığında bir noktada ise bilinen noktalar kullanarak bilinmeyen değerler bulunabilir.

--- Eğer değeri bulunmak istenen nokta bilinen noktaların aralığının dışında bir yerde ise eğri uydurma işlemleri ile bilinmeyen değerler bulunabilir. Bu işlem ekstrapolasyon olarak ifade edilir.

--- İnterpolasyon işleminde çok yaygın olarak kullanılan noktalara polinom uydurarak sonuca gidilmektedir.

--- Eğer bilinen nokta sayısı iki ise bunları bir doğru ile birleştirerek ara değerleri aramak gerekir. Bilinen nokta sayısı arttıkça polinomun derecesi artacaktır. *n* adet nokta için (*n*-1). dereceden bir polinom uydurmak bütün mevcut noktaları sağlayacaktır.

--- İnterpolasyon yöntemi olarak kullanabileceğimiz literatürde birçok yöntem vardır. Öncelikle, Taylor Serisi ile İnterpolasyon Yöntemi ile Polinom elde etmeyi ele alacağız. Daha sonra ise Langrange İnterpolasyon yöntemini daha sonra da sonlu farklar ile interpolasyon yöntemini ele alacağız.

Weierstrass Yaklaşım Teoremi:

n. dereceden bir polinom ($a_n \neq 0$);

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

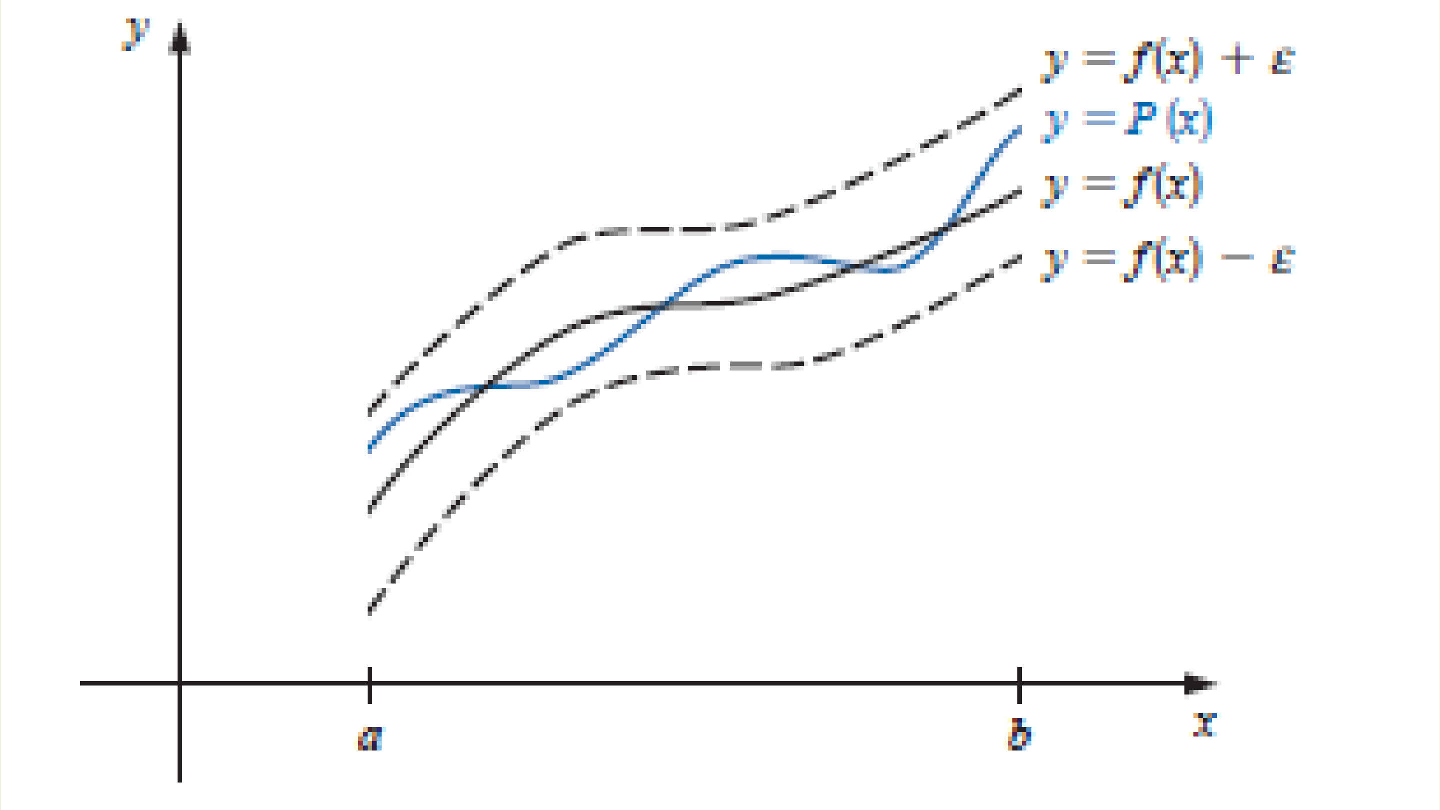
şeklinde gösterilsin. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ değerleri polinomun reel katsayılar ve $n \geq 0$, negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$f(x)$ 'in, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki,

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

ifadesi $[a, b]$ aralığındaki her x için geçerlidir.


y
$y = f(x) + \varepsilon$
$y = P(x)$
$y = f(x)$
$y = f(x) - \varepsilon$
a
b
x

Taylor Serisi ile İnterpolasyon Yöntemi

(1) $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ olsun.

Verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktası civarındaki seri açılımını yazalım.

(2) $f(x) \cong f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

(1) ve (2) yi karşılaştırdığımızda

$a_0 = f(0)$, $a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$, $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, ..., $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Böylece

$P_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

şeklindedir.

Teorem (Taylor Polinomu):

$f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında $1,2,\ldots,(n+1)$. türevlere sahip sürekli bir fonk. olsun. $x \in [a,b]$ ve x_0 sabit bir değer olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k + E_n(x)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

'dir.

Burada, $c \in (x, x_0)$.

$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ olmak üzere

$$E_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^{n+1} \quad \text{dir.}$$

$c \in (a,x)$.

$E_n(x)$ değeri, yaklaşık değer için bir üst sınır belirlenmesi için kullanılır.

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq x} |f^{(n+1)}(t)| \cdot |x-a|^{n+1}$$

$\Rightarrow$ hata sınırı (üst değer)

Gözlem: Taylor seri açılımında türev-leri içeren terimleri sadeleştirdiğimizde n. dereceden polinom:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

Örnek: $f(x) = e^x$ fonksiyonun $a=0$ civarındaki n. dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

$$P_0(x) = f(0) = e^0 = 1$$

$$P_1(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) = 1 + x$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Örnek: $[-1, +1]$ kapalı aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $a=0$ civarında $\varepsilon = 10^{-5}$'den küçük hata ile yaklaşım polinomunu Taylor polinomunu kullanarak belirleyiniz.

Hatadan küçük bir polinom için n değeri maksimum kaç olmalıdır?

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \leq 10^{-5},$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{ve} \quad c \in (a, x)$$

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq 1 \Rightarrow \text{her zaman doğru.}$$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

$x \in [-1,+1]$ ve $|x|<1$ olduğu için

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

$n=7$ $\frac{1}{8!} = 2.5 \times 10^{-5}$ $n=8$ $\frac{1}{9!} = 2.8 \times 10^{-6}$

$n=8$ için $\leq 10^{-5}$ sağlanır.

$$P_8(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$n=8$ için terim sıfır olur . . .

$x = 1$ için

$$P_8(1) \cong 0.8414682$$

$$\sin 1 \cong 0.8414710$$

$$\text{hata} = 2.73 \times 10^{-6}$$

bu değer $\frac{1}{9!}$ çok yakın.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ fonksiyonunun

$a=0$ civarındaki Taylor polinomunu

1., 2. ve 3. dereceden bulunuz.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 6$$

1. dereceden Taylor polinomu:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \cong 0 + 1 \cdot x = x$$

2. dereceden Taylor polinomu:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!}$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \cong 0 + (1) \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} = x + x^2$$

3. dereceden Taylor polinomu:

$$\frac{1}{1-x} - 1 \cong 0 + (1) \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 6 \cdot \frac{x^3}{3!} = x + x^2 + x^3$$

Örnek: $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $a=0$ civarında 5. dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0).x + f''(0).\frac{x^2}{2} + f'''(0).\frac{x^3}{3!}$$
$$+ f^{(iv)}(0).\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(0).\frac{x^5}{5!}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Örnek: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $a=1$ noktası civarındaki 5. dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(iv)}(1) = -6$$

$$f^{(v)}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f^{(v)}(1) = 24$$

$$\ln x \approx 0 + (1).(x-1) - \frac{(1).(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \frac{24(x-1)^5}{5!}$$

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

Örnek: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $a = 1$ noktası civarındaki 5. dereceden Taylor polinomunda $\ln(1.1)$ yaklaşıklık değeri için bir hata üst sınırı bulunuz.

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

6. türevi: $f^{(VI)}(x) = \frac{-120}{x^6}$

$$f^{(VI)}(t) = -\frac{120}{t^6}$$

Böylece; $\max\limits_{1 \le t \le 1.1} |f^{(vi)}(t)| = 120$ dır.

Hata:

$$|E_5| \le \frac{1}{6!} \cdot \max_{1 \le t \le 1.1} |f^{(6)}(t)| \cdot |x-1|^6$$

$$\le \frac{1}{6!} \cdot 120 \cdot |(1.1)-1|^6$$

$$\le \frac{0.000012}{720} \cong 0.0000000167$$

$$1.67 \cdot 10^{-7}$$

Gerçek değer: $\ln(1.1) = 0.0953102$

Yaklaşık değer: $f_5(1.1) = 0.0953103$

Hata: $0.0000001 = 1.10^{-7}$

$\boxed{\text{Hata} < \text{Üst Sınır}}$

Örnek:

f(x)=cos(x) fonksiyonun a=0 civarındaki *n*. dereceden Taylor polinomundan girilen bir *x* değeri için fonksiyonun yaklaşık değerini bulan, ek olarak fonksiyonun gerçek değerini ve hata değerini bulan bir C programı yazınız.

cos(x) fonksiyonun a=0 civarındaki *n*. dereceden Taylor polinomu aşağıdaki şekildedir:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

Yani,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots$$

şeklindedir.

C kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <locale.h>
#include <math.h>
float f(float a)
{return cos(a);}

int main()
{ setlocale(LC_ALL,"Turkish");
double toplam,y,x ;  int i,n, k,is,c,j,aci;
printf("Polinomun derecesini giriniz: ");
scanf("%u",&n);
printf("Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: ");
scanf("%d",&aci);
```

```
x=aci*M_PI/180;
toplam=1;  is=-1;
for (i=2;  i<=n;  i+=2)
{ c=1;
   for (j=1;j<=i;j++)
      {c*=j;}
   y=(pow(x,i)/c)*is;
    toplam += y ;
    is = is*(-1);
  }

printf("Yaklaşık değer: cos(%d)=%f \n", aci,toplam);
printf("Gerçek değer: cos(%d)=%f \n", aci,f(x));
printf("Hata=%f \n",fabs(toplam-f(x)));

getch();
return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
Polinomun derecesini giriniz: 1
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=1,000000
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,500000
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 2
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,451689
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,048311
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 3
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,451689
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,048311
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 4
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,501796
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,001796
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 5
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,501796
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,001796
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 6
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,499965
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,000035
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 7
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,499965
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,000035
```

```
Polinomun derecesini giriniz: 8
Yaklaşık değeri hesaplacak açı değerini giriniz: 60
Yaklaşık değer: cos(60)=0,500000
Gerçek değer: cos(60)=0,500000
Hata=0,000000
```

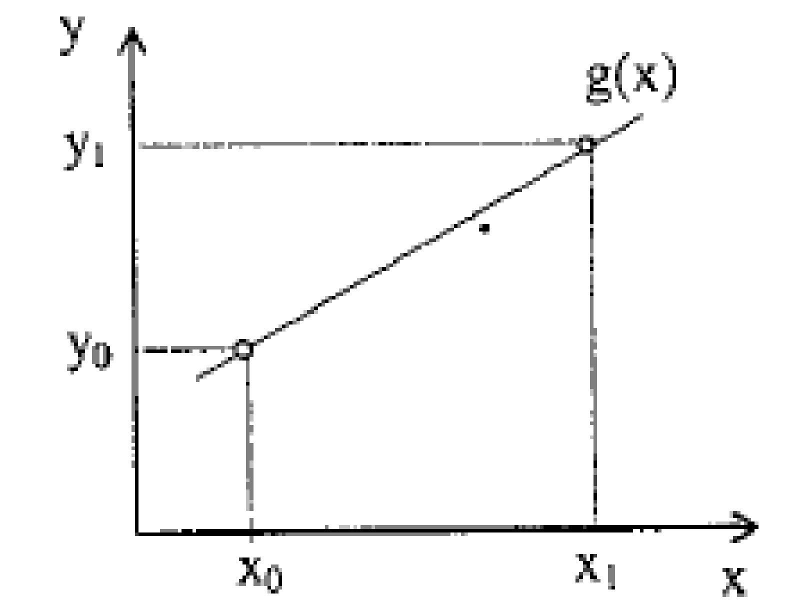
Lagrange İnterpolasyon Yöntemi

Lagrange Polinomu:

--- Lagrange interpolasyonunda ifadeleri aslında bir interpolasyon işleminden ziyade eğri uydurma işlemi olarak kullanılması daha anlamlı olabilir. Elde var olan noktalar ile bir doğru ya da eğri uydurulur. Daha sonra bu eşitlik üzerinden istenilen noktaların değerleri hesaplanır.

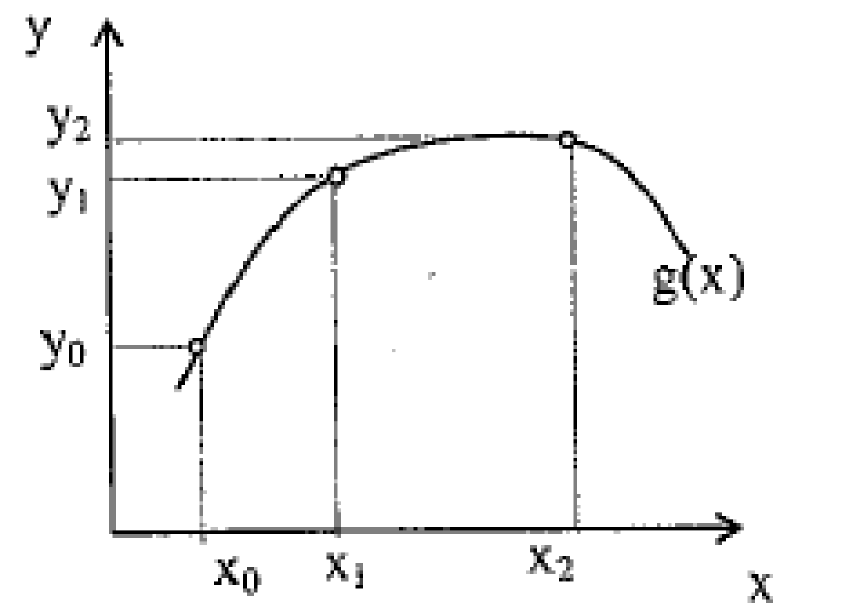
--- Bu yöntemde nokta sayısına bağlı olarak polinomun derecesi değişir. Örneğin n adet nokta için uydurulacak polinomun derecesi $(n-1)$ olur.

Aşağıdaki şekilde iki noktadan uydurulmuş doğru görülmektedir:



(a)

Aşağıdaki şekilde üç noktadan uydurulmuş eğri görülmektedir:



(b)

---- $ax + b$ gibi birinci dereceden bir polinomu belirlemek için (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarını bildiğimizi kabul edelim. Aslında bu veri $y_0 = f(x_0)$ ve $y_1 = f(x_1)$ şeklinde bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0 ve x_1 noktalarında aldığı değerlerdir.

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ ve } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen *birinci dereceden* (Lineer) Lagrange İnterpolasyon polinomu:

$$P(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

şeklinde hesaplanır.

Aşağıda hesaplandığı gibi, $P(x_0) = f(x_0)$ ve $P(x_1) = f(x_1)$ olur ve

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1.$$

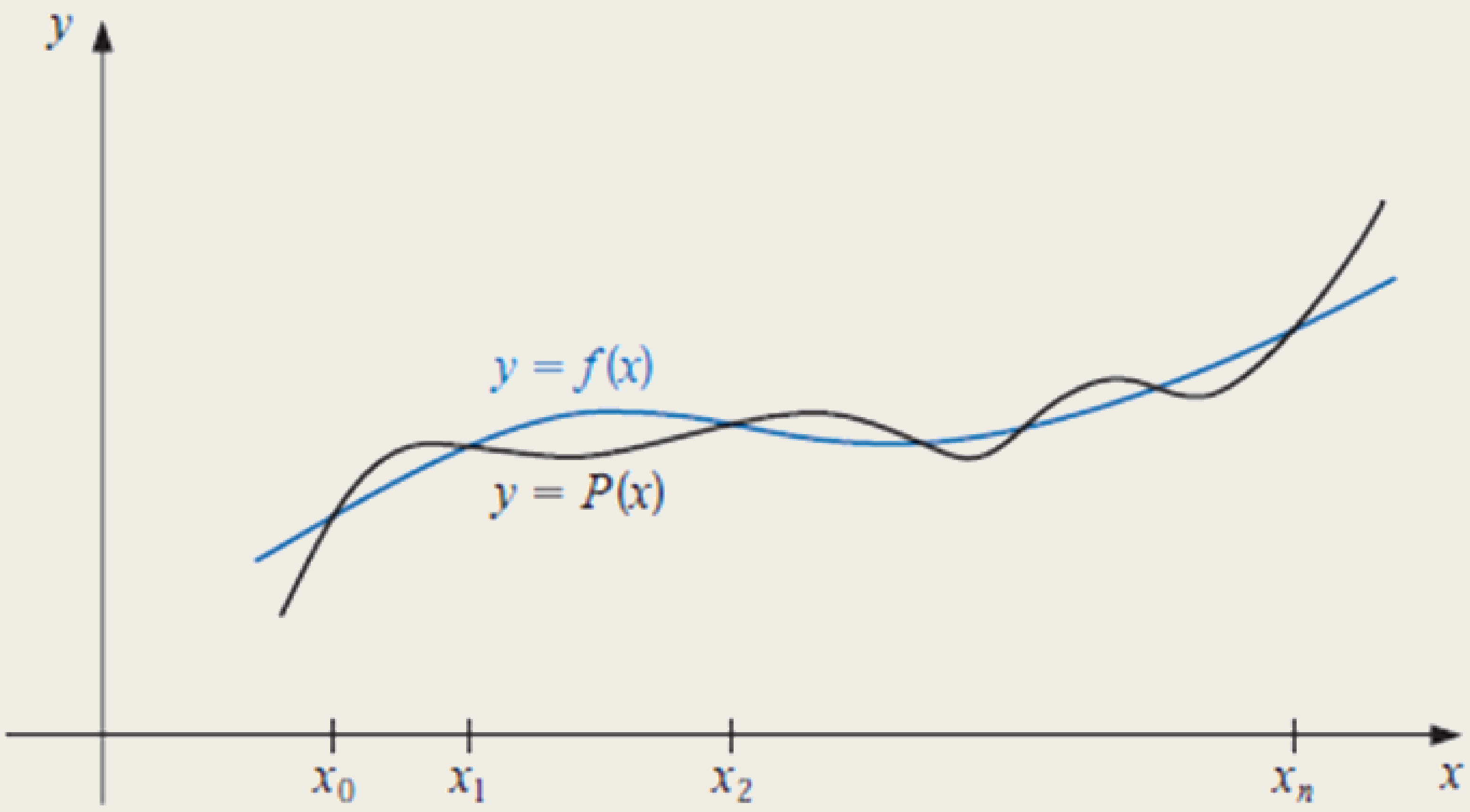
elde edilir.

Böylece:

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$
$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

şeklindedir.

--- Verilen x_i noktaları için $P(x_i)=f(x_i)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.



--- Langrange interpolasyon formüllerini genelleştirmesi aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir:

Teorem: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları verilsin. f fonksiyonu bu noktalardaki değerlere sahip olsun. Burada $f(x_k) = P_n(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ koşulunu sağlayan en fazla n. dereceden tek bir $P_n(x)$ polinomu vardır ve bu polinom

$$P_n(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + \cdots + f(x_n) \cdot L_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x)$$

şeklindedir.

Burada $L_k(x)$'ler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$L_k(x)$ yerine $L_{n,k}(x)$ şeklinde de ifade edilebilir.

Bu ifade daha kısa olarak aşağıdaki şekildedir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots\ldots(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Her bir $L_k(x)$, derecesi n den büyük olmayan birer polinomdur…

Örnek: (2,4) ve (5,1) noktalarından geçen lineer Lagrange polinomunu bulunuz.

Çözüm: $L_0 = \frac{x-5}{2-5} = \frac{5-x}{3}$ ve $L_1 = \frac{x-2}{5-2} = \frac{x-2}{3}$ bulunur.

Böylece, 1. dereceden Langrange polinomu:

$$P(x) = \left(\frac{5-x}{3}\right).4 + \left(\frac{x-2}{3}\right).1$$

$$= 6 - x$$

elde edilir.

Örnek: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun 2. derece den Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz.

$y_0 = f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(2) \Rightarrow y_0 = 0.5$

$y_1 = f(x_1) \Rightarrow y_1 = f(2.5) \Rightarrow y_1 = 0.4$

$y_2 = f(x_2) \Rightarrow y_2 = f(4) \Rightarrow y_2 = 0.25$

– 3 nokta olduğundan 2. dereceden Lagrange polinomu elde edilir.

$$P_2(x) = f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + f(x_2).L_2(x)$$

$$= y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{-4x^2+24x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{x^2-4.5x+5}{3}$$

$$P_2(x) = (x^2 - 6.5x + 10)(0.5) + \left(\frac{-4x^2 + 24x - 32}{3}\right) \cdot (0.4)$$

$$+ \left(\frac{x^2 - 4.5x + 5}{3}\right) \cdot (0.25)$$

$$P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.13$$

$$\left.\begin{array}{l} P_2(3) = 0.325 \\ f(3) = 0.333 \end{array}\right\} \text{Hata} = 0.008$$

C kodu:

```c
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<locale.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
float f(float a)
{return 1/a;   }


int main()
{setlocale(LC_ALL, "Turkish");
 float *x, *y, p, c, xt;
 char cevap;
 int i, j, n;
    printf("Lagrange İnterpolasyonu\n");
    printf("\nKaç adet ölçüm noktası var? ---> ");
    scanf("%d", &n);
    x = (float *) malloc (n * sizeof(float));
    y = (float *) malloc (n * sizeof(float));
```

```
for (i = 0; i < n; i++)
   {printf("%d. ölçümdeki x değerini giriniz: ", i+1);
      scanf("%f", &x[i]);
      printf("%d. ölçümdeki y değerini giriniz: ", i+1);
      scanf("%f", &y[i]);
   }

printf("Tahmin edilecek y=f(x) için x değerini giriniz: ");
scanf("%f", &xt);
```

```
p = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
  {c = 1;
    for (j = 0; j < n; j++)
     if (i != j) {c *= (xt - x[j]) / (x[i] - x[j]);}
    p += y[i] * c;
   }

 printf("\nTahmini değer= %f\n", p);
  printf("\nGerçek değer= %f\n", f(xt));
  printf("\nHata= %f\n", fabs(f(xt)-p));

getch();
return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
Lagrange İnterpolasyonu

Kaç adet ölçüm noktası var? ---> 3
1. ölçümdeki x değerini giriniz: 2
1. ölçümdeki y değerini giriniz: 0,5
2. ölçümdeki x değerini giriniz: 2,5
2. ölçümdeki y değerini giriniz: 0,4
3. ölçümdeki x değerini giriniz: 4
3. ölçümdeki y değerini giriniz: 0,25
Tahmin edilecek y=f(x) için x değerini giriniz: 3

Tahmini değer= 0,325000

Gerçek değer= 0,333333

Hata= 0,008333

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: (x_k, y_k) değerleri aşağıda verilmiştir.

x	0	1	3	5
y	-16	-3	-17	41

Verilen noktalar için 3. dereceden Lagrange polinomunu bulunuz.

Çözüm:

$$P_3(x) = L_0(x).y_0 + L_1(x).y_1 + L_2(x).y_2 + L_3(x).y_3$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} = \frac{x^3-9x^2+23x-15}{(-15)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)} = \frac{x^3-8x^2+15}{8}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(3-0)(3-1)(3-5)} = \frac{-x^3+6x^2-5}{12}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(5-0)(5-1)(5-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{40}$$

$$P_3(x) = -16L_0 - 3L_1 - 17L_2 + 41L_3 = \frac{376x^3-2304x^2+3313x+1595}{120}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: (x_k, y_k) değerleri aşağıda verilmiştir.

x	1	2	4	5
y	1	6	46	93

Verilen noktalar için 3. dereceden Lagrange polinomu için $P_3(3) = ?$

$$P_3(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} \Rightarrow L_0(3) = -\frac{1}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} \Rightarrow L_1(3) = \frac{2}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} \Rightarrow L_2(3) = \frac{2}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} \Rightarrow L_3(3) = -\frac{1}{6}$$

$$P_3(3) = L_0(3)\cdot y_0 + L_1(3)\cdot y_1 + L_2(3)\cdot y_2 + L_3(3)\cdot y_3$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 6 + \frac{2}{3}\cdot 46 + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 93$$

$$= 19.$$

C kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include<locale.h>
#include <stdlib.h>
int main()
{setlocale(LC_ALL, "Turkish");
  float *x, *y, p, c, xt;
  char cevap;
  int i, j, n;
       printf("Lagrange Interpolasyonu\n");
        printf("\nKaç adet ölçüm noktası var? ---> ");
        scanf("%d", &n);
        x = (float *) malloc (n * sizeof(float));
        y = (float *) malloc (n * sizeof(float));
```

```
for (i = 0; i < n; i++)
   {printf("%d. ölçümdeki x değerini giriniz: ", i+1);
       scanf("%f", &x[i]);
       printf("%d. ölçümdeki y değerini giriniz: ", i+1);
       scanf("%f", &y[i]); }

printf("Tahmin edilecek y=f(x) için x değerini giriniz: ");
scanf("%f", &xt);

p = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
      {c = 1;
        for (j = 0; j < n; j++)
         { if (i != j) {c *= (xt - x[j]) / (x[i] - x[j]);} }
         p += y[i] * c;
       }
printf("\nTahmini değer= %f\n", p);
getch();
return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
Lagrange Interpolasyonu

Kaç adet ölçüm noktası var? ---> 4
1. ölçümdeki x değerini giriniz: 1
1. ölçümdeki y değerini giriniz: 1
2. ölçümdeki x değerini giriniz: 2
2. ölçümdeki y değerini giriniz: 6
3. ölçümdeki x değerini giriniz: 4
3. ölçümdeki y değerini giriniz: 46
4. ölçümdeki x değerini giriniz: 5
4. ölçümdeki y değerini giriniz: 93
Tahmin edilecek y=f(x) için x değerini giriniz: 3

Tahmini değer= 19,000000


--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Lagrange İnterpolasyon Polinomunda Hata

Teorem: $f \in C^{n+1}[a,b]$ ve P_n, $[a,b]$ kapalı aralığındaki $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ayrık $n+1$ noktada f fonksiyonunu interpole eden (yani, $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$) en fazla n. dereceden polinom olsun.

Bu durumda her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$$

olacak şekilde $c \in [a,b]$ sayısı vardır.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$, $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak Lagrange polinomunu bulunuz.

Bu polinom $x \in [2, 4]$ için $f(x)$'e yaklaşım için kullanıldığında maksimum hatayı belirleyiniz.

$$P_2(x) = \frac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-2.75)$$

$$= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$$

Maksimum hata sınırı

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq \max_{[2,4]} \left| \frac{f'''(c)}{(2+1)!} \right| \cdot \max \left| \prod_{i=0}^{2} (x-x_i) \right|$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

g(x) alsın.

$$\frac{f'''(c(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{-1}{(c(x))^4}(x-2).(x-2.75).(x-4)$$

(2,4) aralığında c(x) in maksimum değeri: $\frac{1}{16}$

elde edilir.

$$g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4) = x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{39}{2}x - 22$$

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{49}{2} = \frac{1}{2}(3x-7)(2x-7)$$

kritik noktalar $x = \frac{7}{3}$ ve $x = \frac{7}{2}$

$$g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{108} \quad \text{ve} \quad g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{-9}{16}$$

Böylece, maksimum hata

$$\max_{[2,4]} \left| \frac{f'''(c(x))}{3!} \right| \cdot \max_{[2,4]} \left| (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right|$$

$$\leq \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{256} \cong \boxed{0.0352}$$

Örnek: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x_0=2$, $x_1=3$, $x_2=4$ noktaları için veri seti aşağıdadır.

x	2	3	4
y	0.693	1.098	1.386

- 2. dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz.
- $f(2.5)$ için yaklaşık değeri için bir üst sınır hata tahmini bulunuz.

Çözüm:

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} \cdot (0.693) + \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} \cdot (1.098) + \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} \cdot (1.386)$$

$$= -0.0539\,x^2 + 0.7\,x - 0.4713$$

elde edilir.

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{[2,4]} |f'''(c)| = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$c=2$ için

$$|E_2(2.5)| \le \max_{[2,4]} |f'''(c)| \cdot \left| \frac{(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4)}{3!} \right|$$

$$\le \frac{1}{4} \cdot \frac{(0.5)^2 \cdot (1.5)}{6} = \underline{0.156}$$

maksimum
hata
üst sınırı

Gerçek Hata:

$$f(2.5) = \ln(2.5) = 0.9165$$

$$P_2(2.5) = 0.9101$$

üst
değerden
küçük

$$\text{Hata} = |0.9165 - 0.9101| = \underline{0.0062}$$

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.