

# CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Prof. Dr. Tufan TURACI

tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
- Hafta 13

# Ders İçeriği

- **Graf Teoriye Giriş**
  - Graf Tanımı, Graf Teori Tarihi
- **Graf Teori ile İlgili Önemli Tanım ve Teoremler**
- **Havel-Hakimi Teoremi**
- **Graflarda İşlemler**

# 1.GRAF NEDİR?

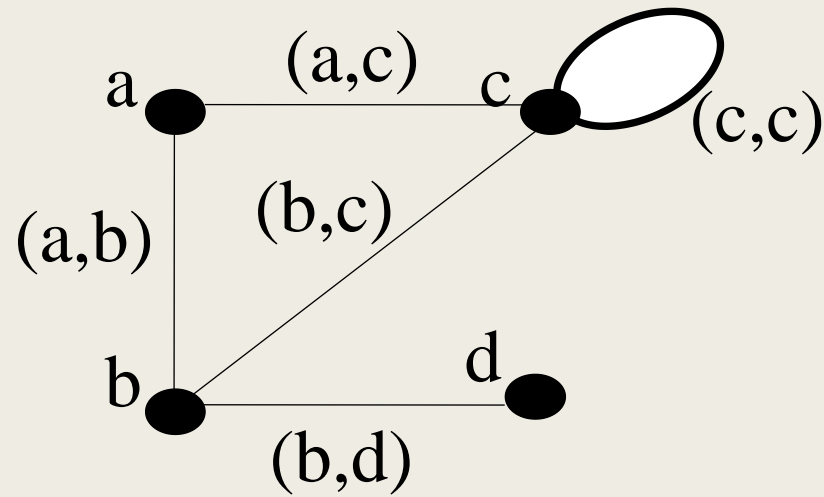
**Tanım 1.1 (Fonksiyon Tanımı):**  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  ve  $\Gamma : V \rightarrow V$  bir dönüşüm olsun. Bir  $G$  grafi  $\Gamma(V) \subset V$  olmak üzere,  $G = (V, \Gamma(V))$  şeklinde ifade edilir.

**Tanım 1.2 (Bağıntı Tanımı):** Bir  $G$  grafi, sayılabilir bir küme üzerinde tanımlanmış ikili bir bağıntının gösterimidir. Nesneler kümesi grafin  $V = V(G)$  tepeler kümesini, bağıntının ikilileri de  $E = E(G)$  ayrıtlar kümesini tanımlar. Başka bir deyişle  $G$  grafi  $G = (V, E)$  ikilisinden oluşur.

**Tanım 1.3 (Genel Tanım):** Bir  $G$  grafi, tepe(vertex) olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt(edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur.  $V = V(G)$  kümesi grafin tepeler kümesi ve  $E = E(G)$  kümesi grafin ayrıtlar kümesi olmak üzere,  $G$  grafi  $G = (V, E)$  şeklinde gösterilir.

### Örnek1.1:

$V=\{a,b,c,d\}$  ve  $E=\{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,c)\}$  olmak üzere,  $G=(V,E)$  grafi aşağıdaki şekilde çizilir.



## Örnek 1.2:

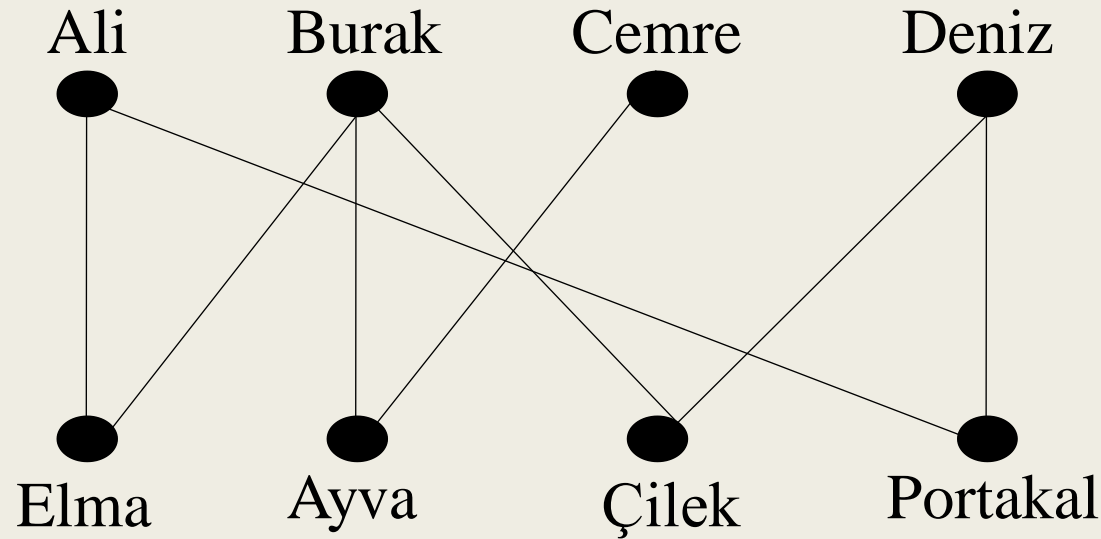
Ali, Burak, Cemre, Deniz bir sınıftaki 4 öğrencidir. Bu sınıfta öğrencilerin hangi meyveleri sevdiği ile ilgili bir anket yapılıyor. Ankette, Ali; portakal ve elmayı sevdiğini, Burak; elma, ayva ve çileği sevdiğini, Cemre; sadece ayvayı sevdiğini, Deniz ise portakal ve çileği sevdiğini söylüyor.

$$A = \{ \text{Ali, Burak, Cemre, Deniz} \}$$
$$B = \{ \text{Elma, Ayva, Çilek, Portakal} \}$$
$$A \times B = \{ (\text{Ali, Elma}), (\text{Ali, Ayva}), (\text{Ali, Çilek}), (\text{Ali, Portakal}), \\ (\text{Burak, Elma}), (\text{Burak, Ayva}), (\text{Burak, Çilek}), (\text{Burak, Portakal}), \\ (\text{Cemre, Elma}), (\text{Cemre, Ayva}), (\text{Cemre, Çilek}), (\text{Cemre, Portakal}), \\ (\text{Deniz, Elma}), (\text{Deniz, Ayva}), (\text{Deniz, Çilek}), (\text{Deniz, Portakal}) \}$$

Öğrencilerin oluşturduğu küme:

$G = \{ (Ali, Elma), (Ali, Portakal), (Burak, Elma), (Burak, Ayva), (Burak, Çilek), (Cemre, Ayva), (Deniz, Çilek), (Deniz, Portakal) \}$

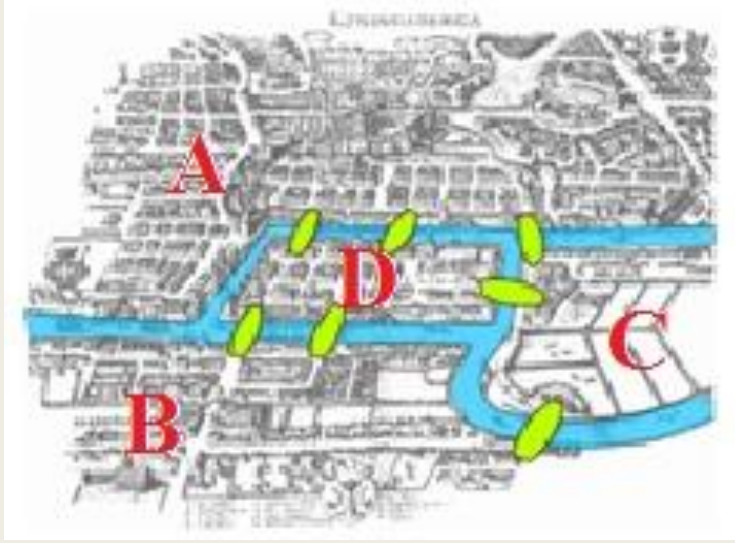
Bu  $G$  kümesini aşağıdaki şekille(grafla) modelleyebiliriz.



$G$  Grafi

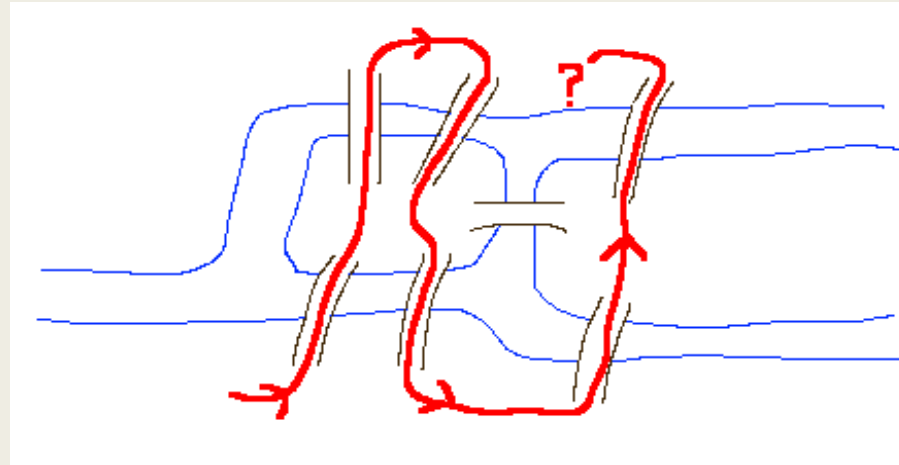
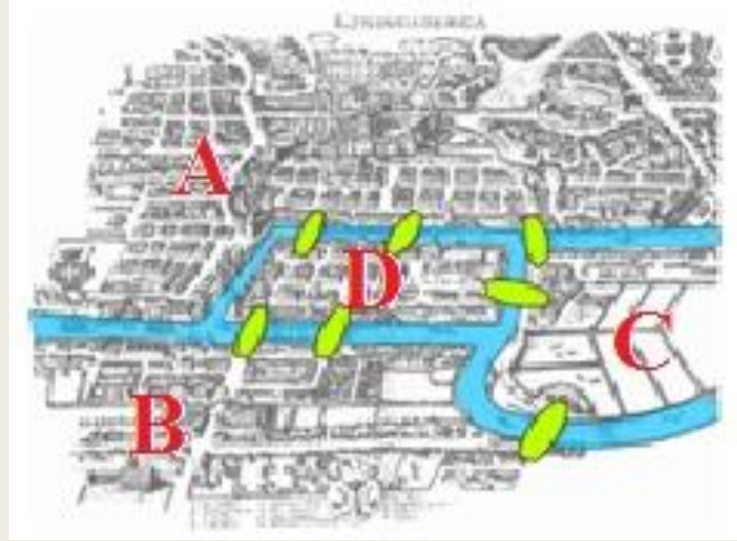
# GRAF TEORİ TARİHİ

## KONIGSBERG KÖPRÜ PROBLEMİ

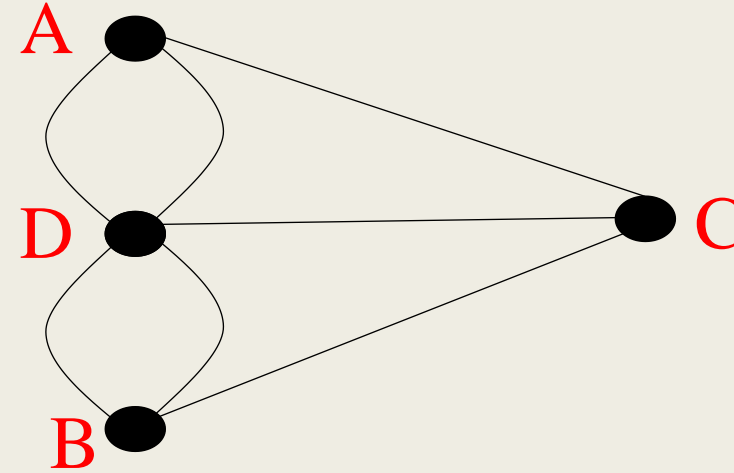


**Problem:** Yedi köprünün her birinden yalnız bir kere geçmek kaydıyla başladığımız yere tekrar gelebilir miyiz?





1739 yılında ortaya atılan ‘Konisberg Köprü Peblemi’ ni, ünlü matematikçi Leonhard EULER çözmüştür. Problemi aşağıdaki graf ile modellemiştir.



Problemin çözümünün olması için, modellenen grafın bir Euler devre içermesi gerektiğini göstermiştir.

**Teorem :** Bir  $G$  grafi bir Euler katarı sahiptir ancak ve ancak  $G$  grafi birleştirilmiş ve tüm tepe dereceleri çift veya tek dereceli tepelerin sayısı iki olmalıdır. (Leonhard Euler, 1736)

**Teorem :** Bir  $G$  grafi bir Euler devreye sahipse  $G$  grafi birleştirilmiş ve her tepe derecesinin çift olması gerekir. (Leonhard Euler, 1736)

**Teorem :** Bir  $G$  grafi birleştirilmiş ve her tepesinin derecesi çift ise  $G$  grafi Euler devreye sahiptir. (Carl Hierholzer, 1840)

**Tanım :** Euler devresi içeren bir grafa **Euler grafi** denir.

## 2.GRAF TEORİDEKİ ÖNEMLİ TANIMLAR VE TEOREMLER

**Tanım 2.1:** Bir graftaki başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan ayrıta **bukle** (loop) denir.

**Tanım 2.2:** Bir grafta en az bir ayrıt yönlü ise, bu grafa **yönlü** (directed) aksi halde **yönsüz** veya **yönlendirilmemiş** (undirected) **graf** denir.

**Tanım 2.3:** Bir grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara **katlı ayrıt**, bu tür graflara ise **katlı** (multiple) **graflar** denir.

**Tanım 2.4:** Katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara **basit** (simple) **graf** denir.

**Tanım 2.5:** Bir  $G$  grafında  $e$  ayrıtı  $u$  ve  $v$  tepelerini birleştiriyorsa,  $e=(u,v)$  biçiminde gösterilir.  $u$  ve  $v$  tepelerine **komşu tepeler** (adjacent vertices) denir.

**Tanım 2.6:** Bir grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa  $G$  grafına **bağlantılı** (connected) graf denir.

**Tanım 2.7:**  $v$  tepesi,  $G$  grafindaki herhangi bir tepe olsun.  $v$ ' ye bitişik ayrıtların sayısına  $v$  tepesinin **derecesi** denir ve  $\deg(v)$  ile gösterilir. Bir  $G$  grafında en az ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **minimum tepe derecesi** denir ve  $\delta(G)$  ile gösterilir. Benzer şekilde en çok ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **maksimum tepe derecesi** denir ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir.

**Teorem 2.1:** Bir  $G$  grafinın tepeleri  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  ve bu tepelerin dereceleri sırasıyla  $\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)$  olsun. Bu grafin ayrıtlarının sayısı  $m$  olmak üzere,

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m \text{ dir.}$$

Teorem bize gösterir ki, grafin tepe dereceleri toplamı çifttir.

**Örnek 2.1:** 7 makineden oluşan ve her bir makinenin diğer makinelerden 3 tanesiyle bağlantılı olduğu bir bilgisayar laboratuvarı oluşturunuz.

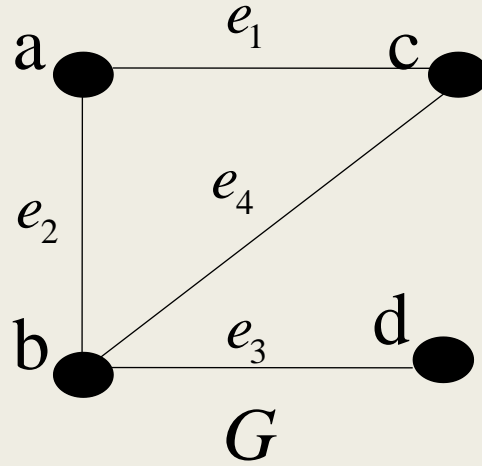
Böyle bir laboratuvar oluşturulamaz!!!

**Tanım 2.8:** *Komşuluk Matrisi*,  $n$  tepeli bir  $G = (V, E)$  grafının komşuluk matrisi  $A(G)$  ile gösterilir. Bu matris  $n \times n$  tipinde olup, grafın tepeleri matrisin satırlarını ve sütunlarını oluşturur. ( $n$ , grafın tepe sayısıdır.) Bir  $A(G)$  matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , v_i v_j \in E(G) \text{ ise,} \\ 0 & , v_i v_j \notin E(G) \text{ ise.} \end{cases}$$



## Örnek 2.2:



$$\deg(a)=2$$

$$\deg(b)=3$$

$$\deg(c)=2$$

$$\deg(d)=1$$

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**Tanım 2.9:** Bir  $G$  grafında tepelerin ve ayrıtların rasgele dizilişine bir **yürüyüş**(walk) denir.

**Tanım 2.10:** Bir yürüyüşte hiçbir ayrıt tekrarlanmıyorsa bu yürüyüşe **katar**(trail) denir.

**Tanım 2.11:** Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan her tepe ve ayrıt bir kez kullanılıyorsa bu yürüyüşe **yol** (path) denir.

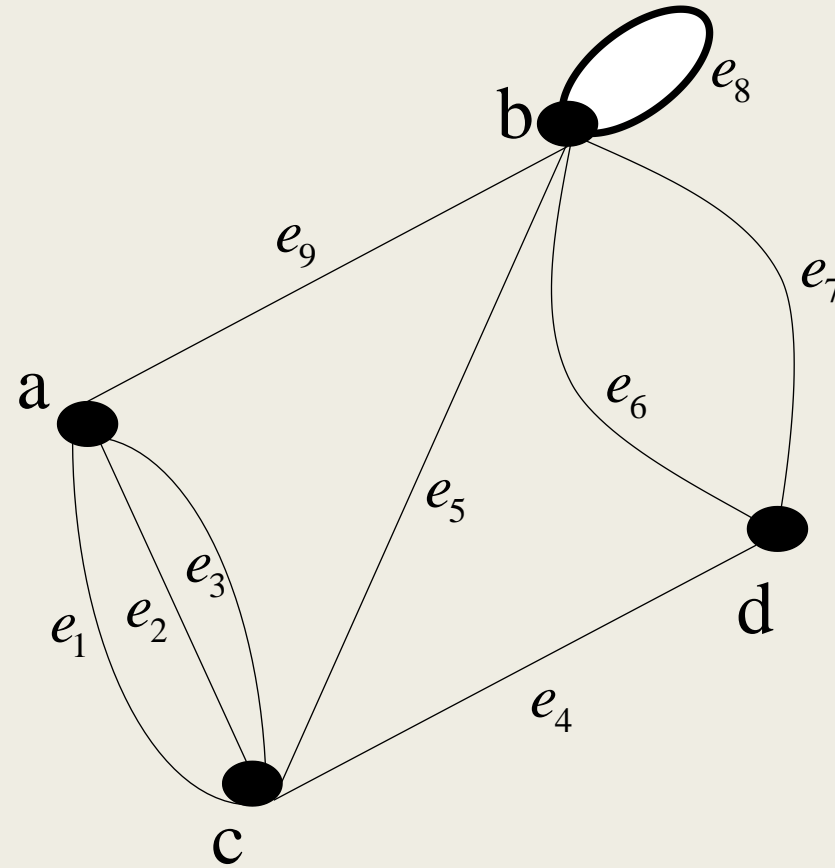
**Tanım 2.12:** Başlangıç ve bitişi aynı olan katar **devre**(circuit) denir.

**Tanım 2.13:** Başlangıç ve bitişi aynı olan yola **çevre**(cycle) denir.

**Tanım 2.14:** Bir  $G$  grafında, bir tepeden başka bir tepeye gidilen bir katar da tüm ayrıtlar bir kez kullanılıyorsa bu katar **Euler katarı** denir.

**Tanım 2.15:** Bir  $G$  grafında, bir Euler katarının başlangıç ve bitiş tepeleri aynı ise bu katar **Euler devresi** denir.

## Örnek 2.3:



a' dan d' ye bir yürüyüş:  $ae_3ce_5be_8be_9ae_3ce_1ae_9be_6d$

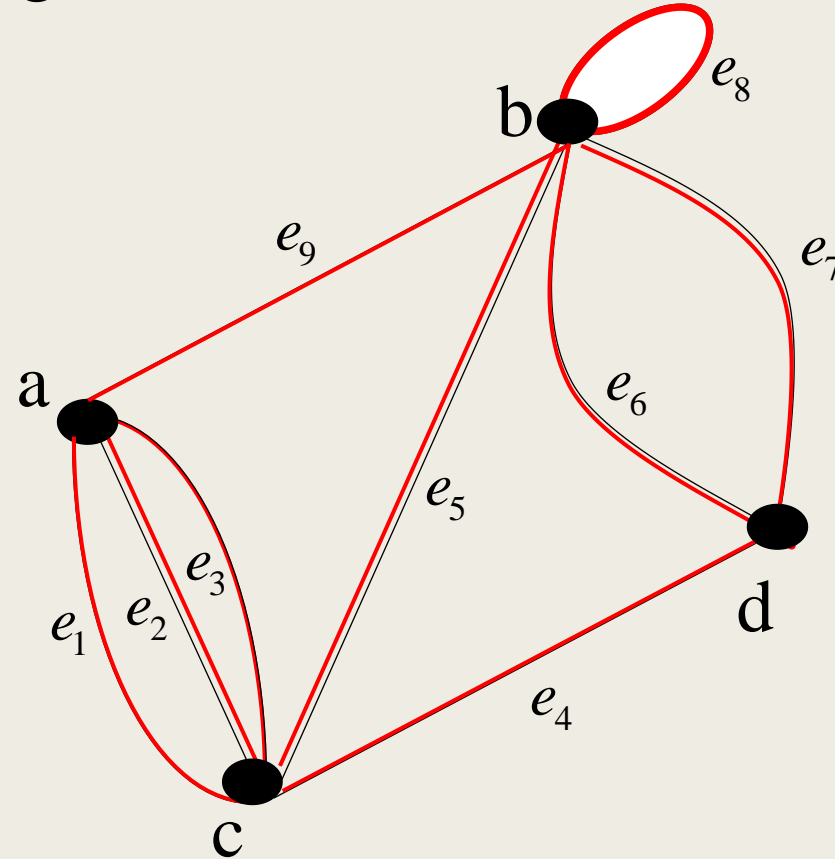
a' dan b' ye bir katar:  $ae_3ce_5be_9ae_1ce_4de_6b$

a' dan d' ye bir yol:  $ae_3ce_5be_6d$

a' dan a' ye bir devre:  $ae_3ce_4de_6be_8be_9a$

a' dan a' ye bir çevre:  $ae_9be_6de_4ce_2a$

Örnek 2.3' deki graf bir Euler katarı ve Euler devresi içerir mi?



Euler katarı:  $d e_4 c e_5 b e_7 d e_6 b e_8 b e_9 a e_3 c e_2 a e_1 c$

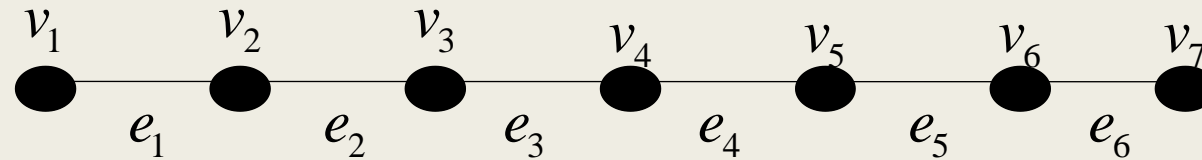
Euler devresi içermez!!!

Neden Euler katarı içerdi, fakat Euler devresi içermedi?

## 2.1. Özel Graflar

### 2.1.1. Yol Graf

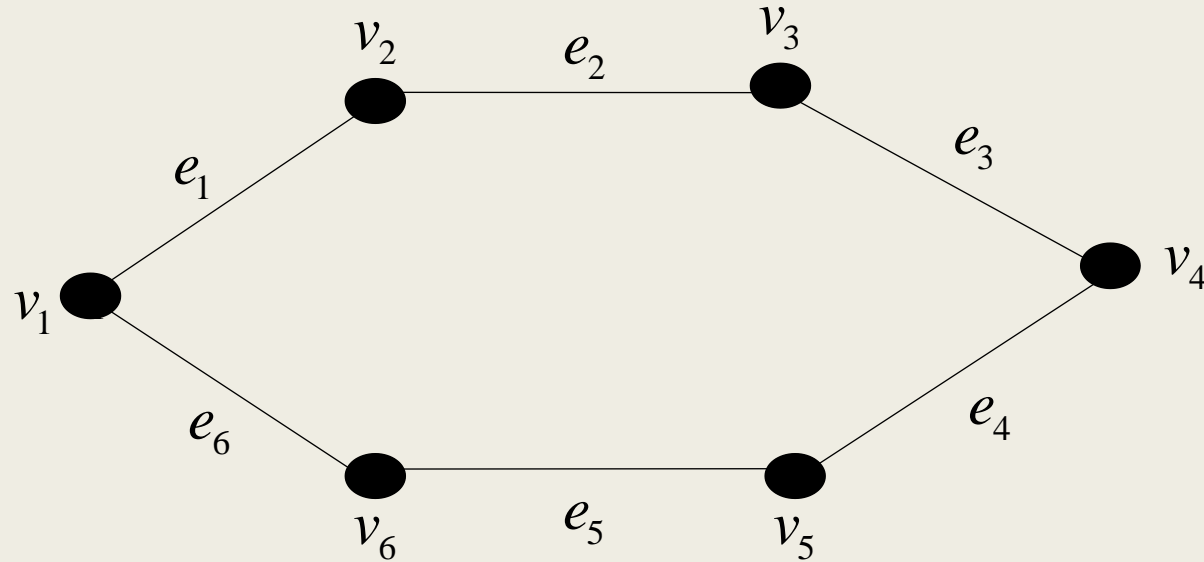
Uç tepeleri 1 dereceli, iç tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **yol**(path) graf denir.  $n$  tepeli bir yol graf  $n-1$  ayrıta sahiptir ve  $P_n$  ile gösterilir.



$P_7$  Grafı

### 2.1.2. Çevre Graf

Tüm tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **çevre**(cycle) graf denir.  $n$  tepeli bir çevre graf  $n$  ayrıta sahiptir ve  $C_n$  ile gösterilir.

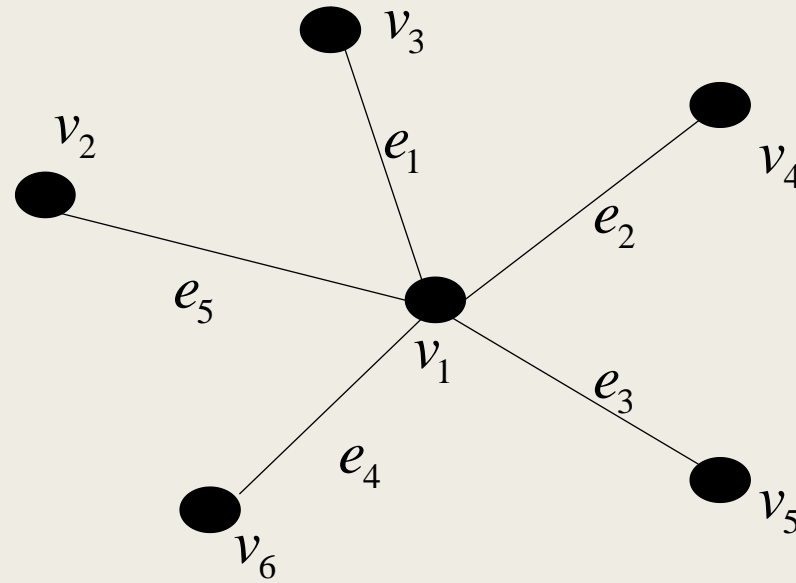


$C_6$  Grafı



### 2.1.3. Yıldız Graf

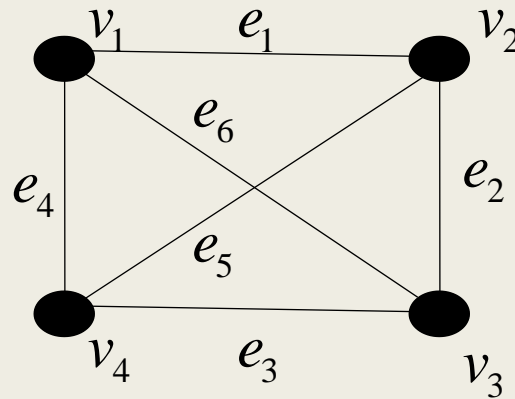
$n$  tepeli bir  $G$  grafının ,bir tepesi  $n-1$  dereceli diğer tepeleri 1 dereceli ise bu grafa **yıldız**(star) graf denir ve  $K_{1,n-1}$  ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı  $n-1$ ' dir.



$K_{1,5}$  Grafı

### 2.1.4. Tam Graf

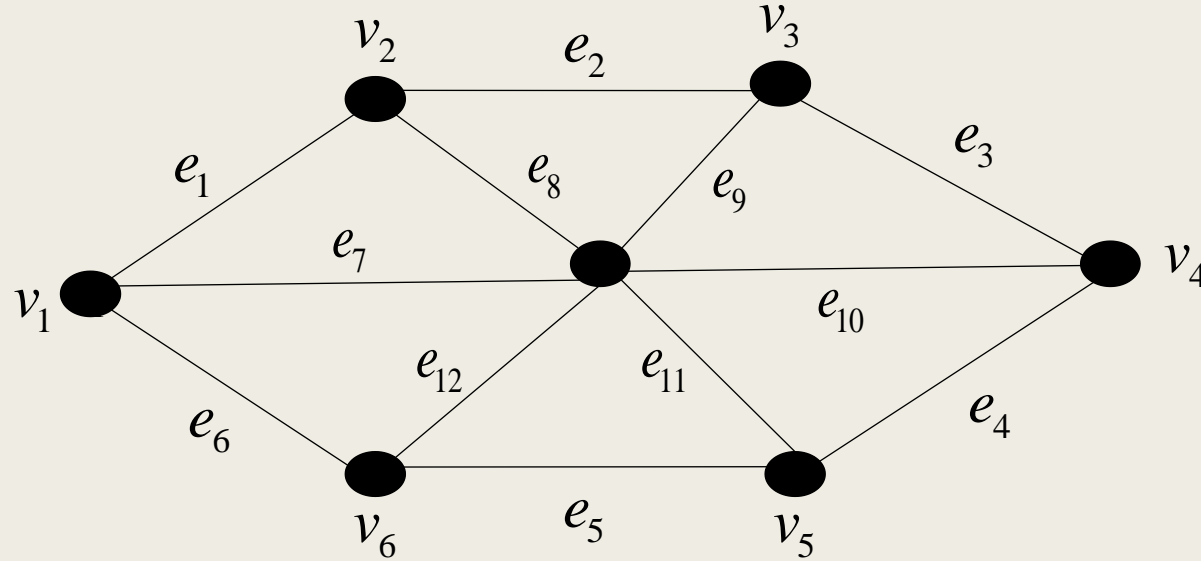
$n$  tepeli bir  $G$  grafının ,her tepesinin derecesi  $n-1$  ise bu grafa **tam**(complete) graf denir ve  $K_n$  ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı,  $\frac{n.(n-1)}{2}$  dir.



$K_4$  Grafı

### 2.1.5. Tekerlek Graf

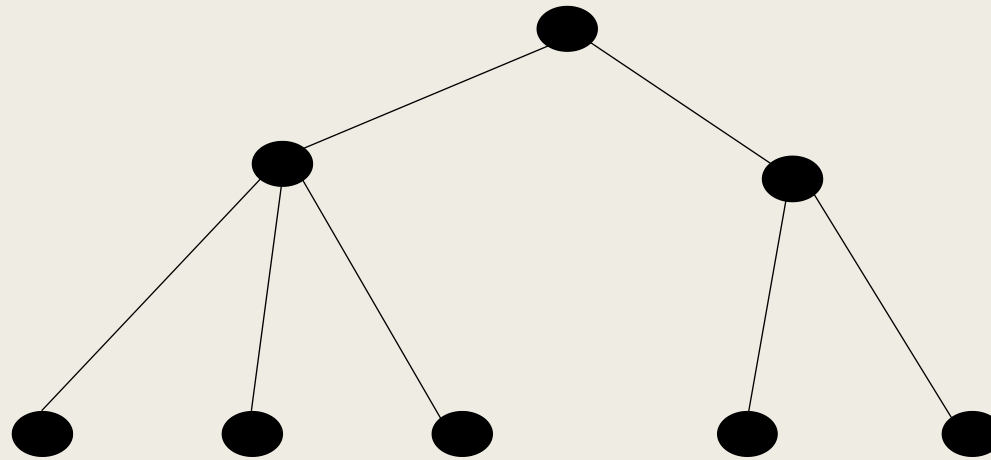
$n$  tepeli bir çevre grafının, her bir tepesinin bir tek noktadan ayrıt eklenmesiyle oluşan grafa **tekerlek**(whell) graf denir ve  $W_{1,n}$  ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı  $2n$ ' dir.



$W_{1,6}$  Grafı

### 2.1.6. Ağaç Graf

$n$  tepeli bir  $G$  grafi çevre içermiyorsa, bu grafa ağaç graf denir ve genellikle  $T$  ile gösterilir. Yol graf, star graf aynı zaman da bir ağaç graftır.



T Ağacı

### 2.1.7. İki Parçalı Graf:

$G=(V,E)$  bir graf olsun ve  $V$  kümesi  $V=V_1 \cup V_2$  şeklinde iki kümeye ayrıldığında,

- $V_1$  kümesindeki hiçbir tepe çifti bir ayrıtla birleştirilmemiş ise
  - $V_2$  kümesindeki hiçbir tepe çifti bir ayrıtla birleştirilmemiş ise
- $G$  ye iki parçalı graf denir.

Örnek:

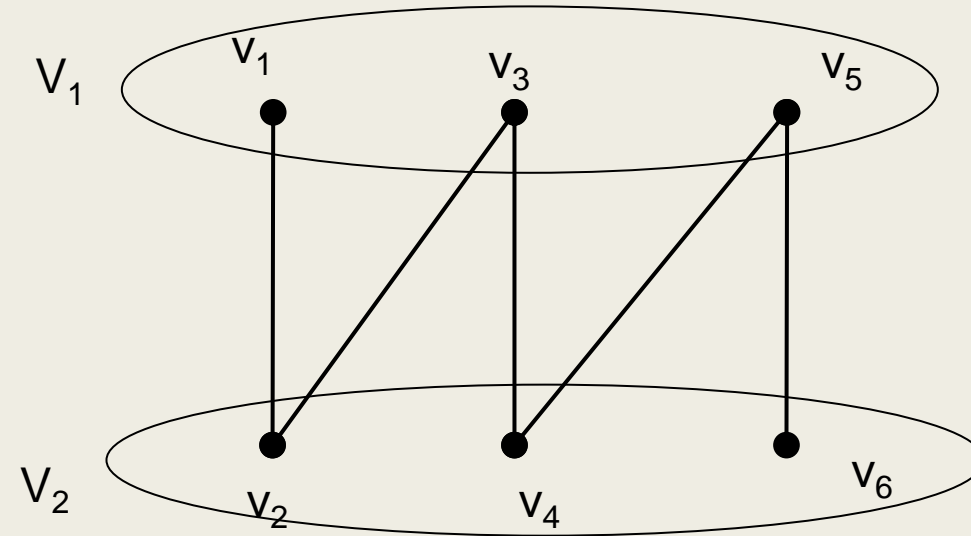


$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

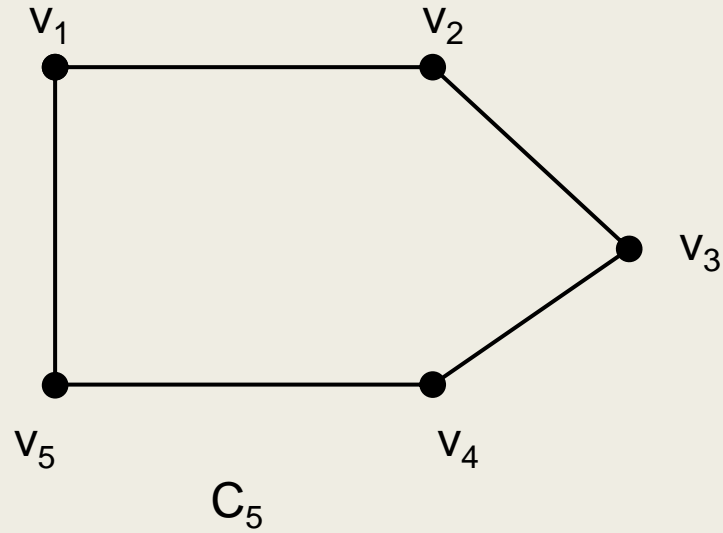
$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$\Rightarrow P_6$  iki parçalı bir graftır.



Örnek:



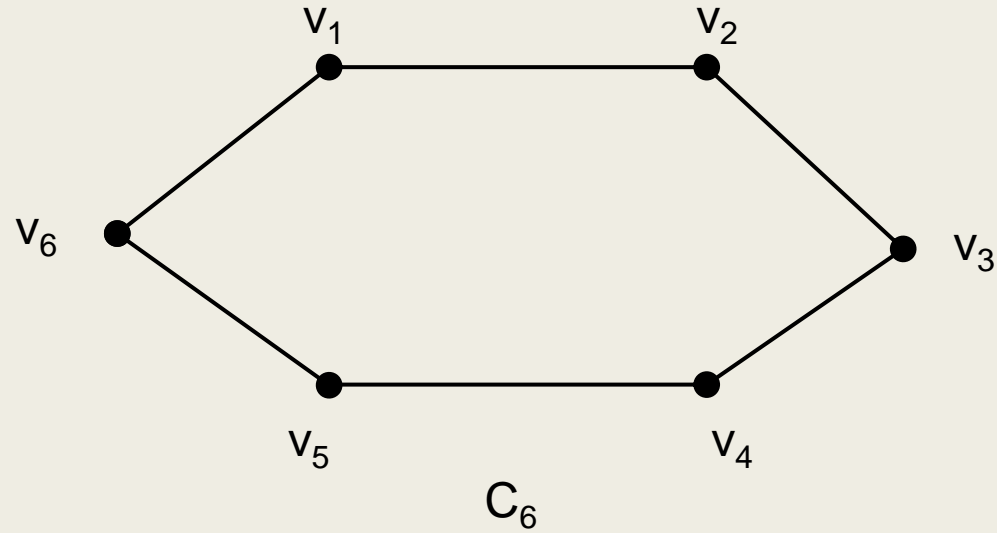
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$V_1 = \{v_1, v_3\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$$

$C_5$ ; iki parçalı graf değildir.

Örnek:



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$$

$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$C_6$ ; iki-parçalı graftır.



**Sonuç:** Her  $P_n (n \geq 2)$  yol grafi 2-parçalı graftır.

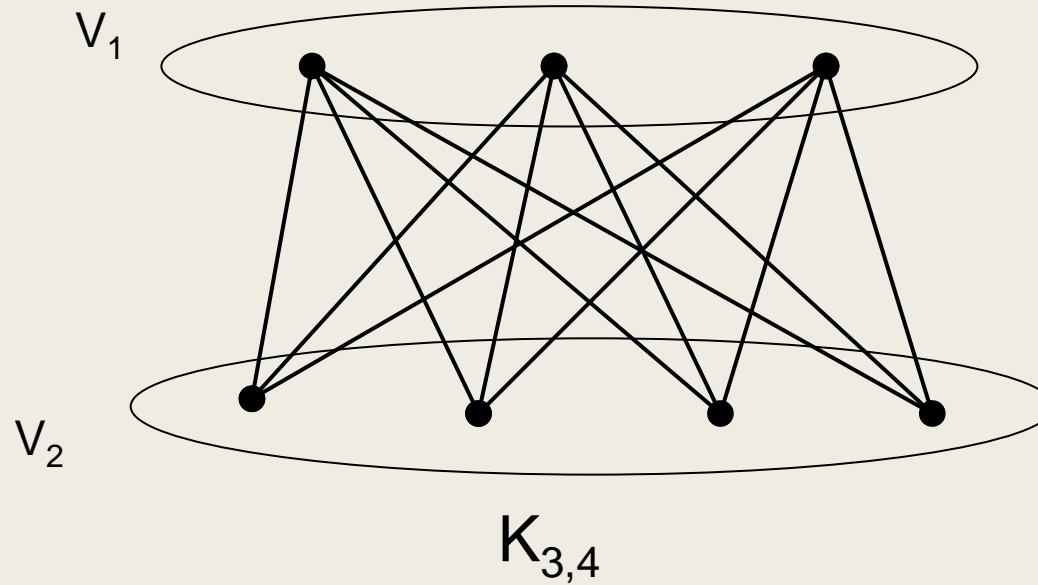
**Sonuç:** Her  $C_n (n \text{ çift})$  çevre grafi 2-parçalı graftır.

**Sonuç:** Her  $C_n (n \text{ tek})$  çevre grafi 2-parçalı graf değildir.

### 2.1.8. İki Parçalı Tam Graf:

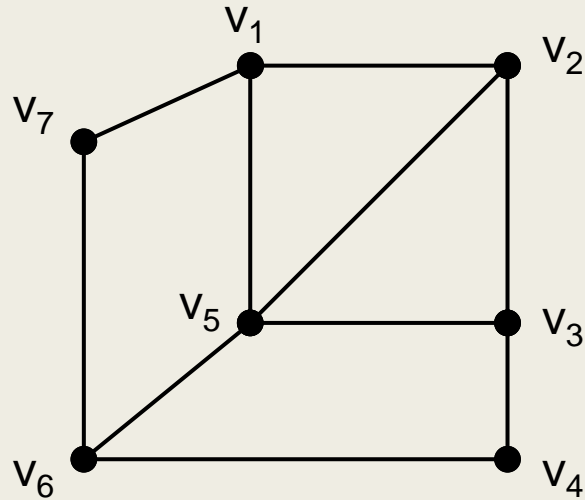
$G$  iki parçalı bir graf,  $V$  tepeler kümesi  $V=V_1 \cup V_2$  olsun  $V_1$  deki her bir tepe  $V_2$  deki her bir tepeye bir ayrıtla birleştirilmiş ise bu grafa iki-parçalı tam graf denir.  $V_1=m$ ,  $V_2=n$  olmak üzere iki-parçalı bir tam graf  $K_{m,n}$  ile gösterilir.

Örnek:

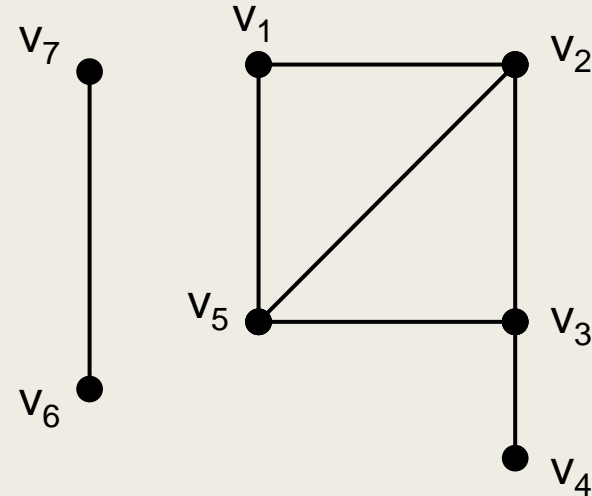


**2.1.9. Birleştirilmiş Graf:**  $G(V,E)$  bir graf olsun.  $G$  grafının tüm tepe çiftleri arasında bir yol varsa bu graf birleştirilmiş(connected) graf denir.

**Örnek:**



G



H

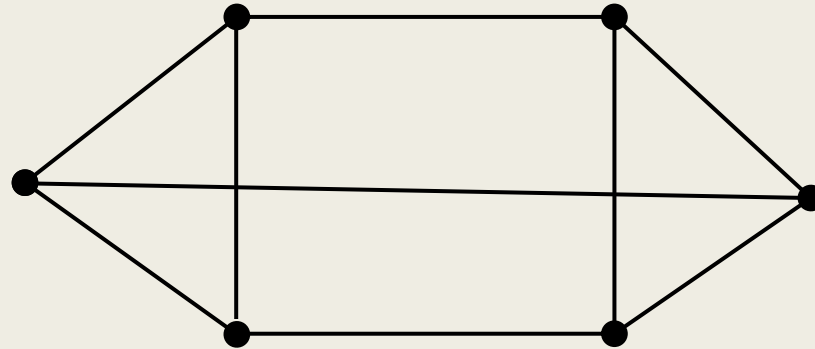
--- G grafi birleştirilmiş bir graftır.

--- H grafi birleştirilmiş graf değildir.

### 2.1.10. $r$ -düzenli ( $r$ -regular) graf:

Bir  $G$  grafının tüm tepelerine ait dereceler aynı ise bu grafa düzenli graf denir. Çevre graf ile tam graf regüler graflara örnek graflardır.

Örnek:

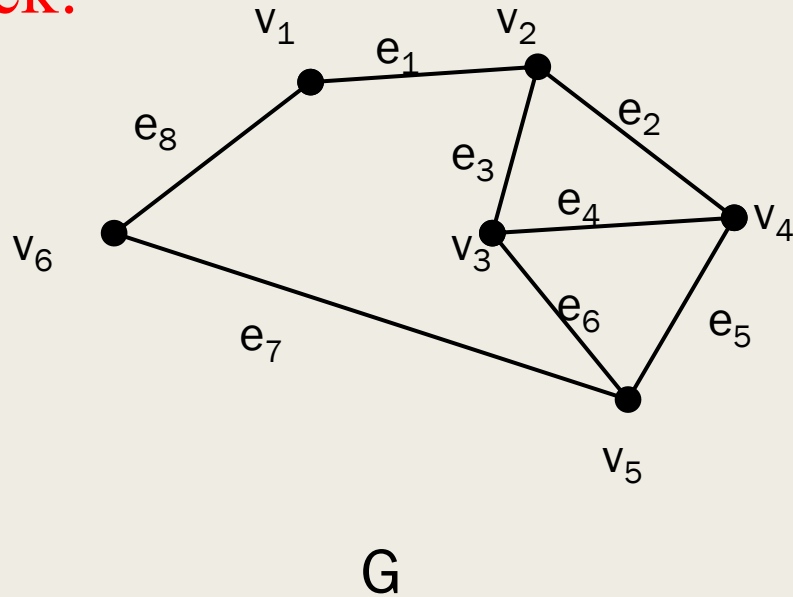


3-düzenli graf

## 2.1.11 Alt graf :

$G=(V,E)$  bir graf olsun.  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  olmak üzere  $G'=(V',E')$  grafına  $G$  nin bir altgrafı denir.

Örnek:



Alt graf örneği(1)

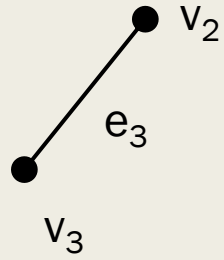
●  $v_1$

$G'$

$V'=\{v_1\}$

$E'=\emptyset$

### Alt graf örneği(2):



$G'$

$$V' = \{v_2, v_3\}$$

$$E' = \{e_3\}$$

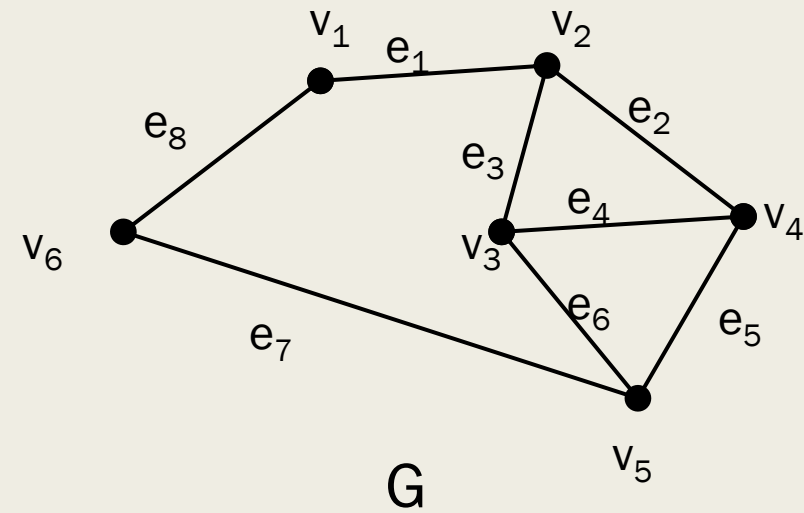
### Alt graf örneği(3):



$G'$

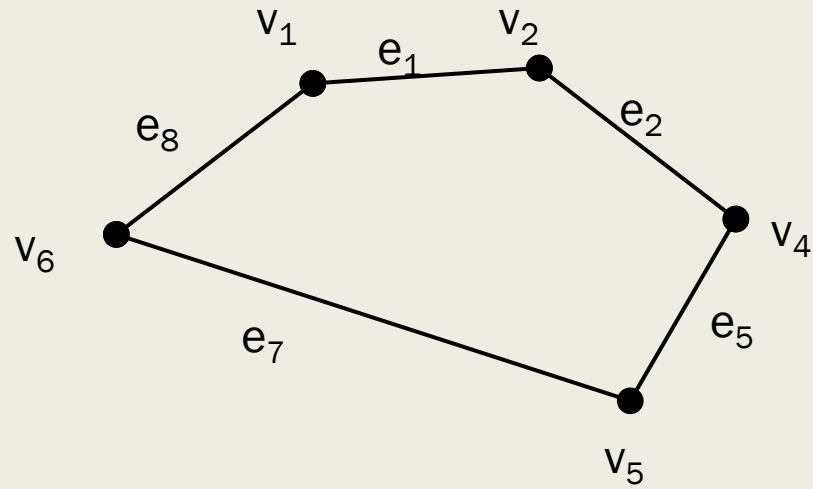
$$V' = \{v_1, v_4\}$$

$$E' = \emptyset$$



$G$

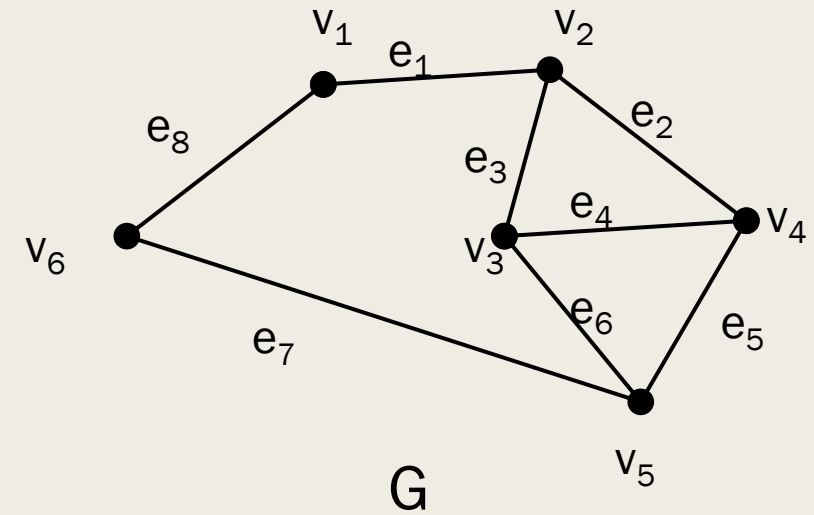
## Alt graf örneği(4):



$G'$

$$V' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E' = \{e_1, e_2, e_5, e_7, e_8\}$$

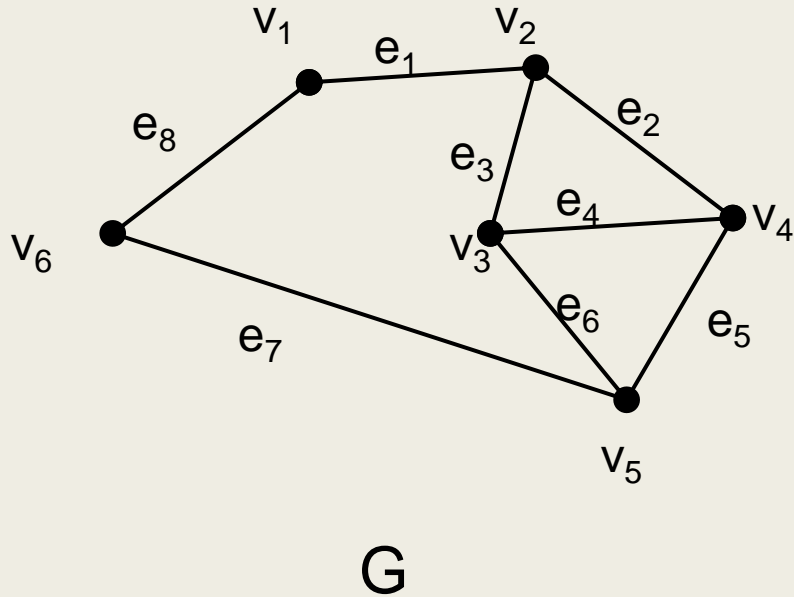


$G$

## 2.1.12. Etkilenmiş Alt Graf :

$G=(V,E)$  bir graf olsun.  $V' \subseteq V$  alt kümelerindeki tepeler ile, bu tepeler arasında  $G$  de bulunan ayrıtların oluşturduğu grafa etkilenmiş alt graf denir.

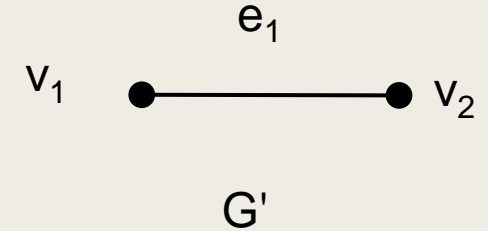
Örnek:



Etkilenmiş alt  
graf örneği(1):

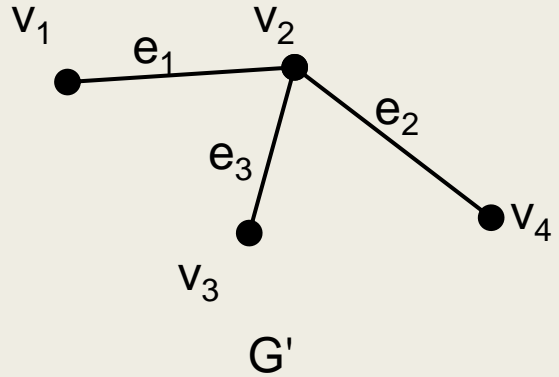


Etkilenmiş alt  
graf örneği(2):



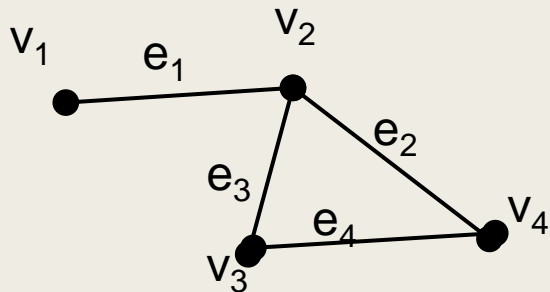


### Etkilenmiş alt graf örneği(3):

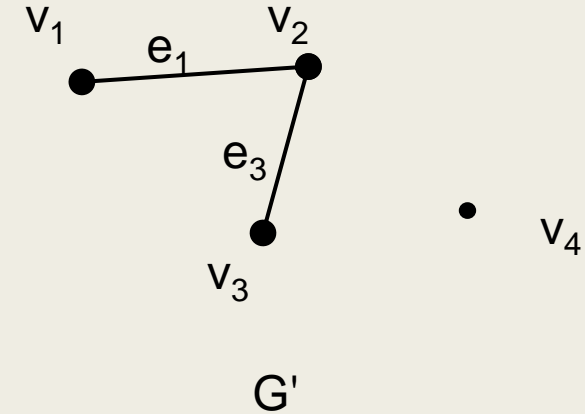


Etkilenmiş alt graf değildir...  
Olması için  $e_4$  ayrıtı da olmalıydı...

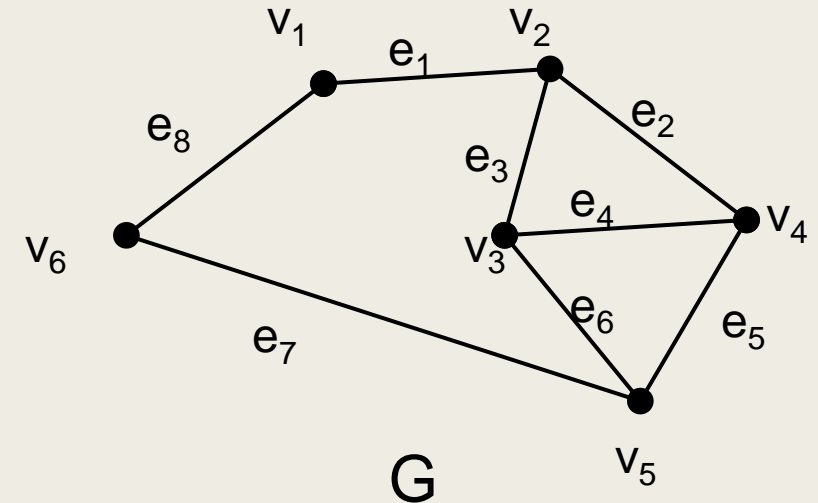
Aşağıdaki graf etkilenmiş alt graftır...



### Etkilenmiş alt graf örneği(4):



$G'$  alt graf olup, etkilenmiş alt graf değildir...



**Tanım:** Bir grafın tepe derecelerinin oluşturduğu diziye Grafik denir.

**Teorem( Havel-Hakimi)** Aşağıdaki iki diziyi ele alalım ve 1 nolu dizinin azalan bir dizi olduğunu kabul edelim.

1)  $s, t_1, t_2, \dots, t_s, d_1, \dots, d_n$

2)  $t_1-1, t_2-1, \dots, t_s-1, d_1, \dots, d_n$

(1)dizisinin grafik olması (graf göstermesi) için gerek ve yeter koşul

(2) dizisinin de grafik olmasıdır.

Terim: (Grafik)

Pozitif tam sayıların bir dizisini ele alalım.

Bu dizinin her elemanı bir grafın bir tepesinin derecesine karşılık geliyorsa, bu diziyi grafik adı verilir.

Örnek

2 2 2 2 2 → bir grafik belirtir mi?  
5 tepseli, 2 derece den

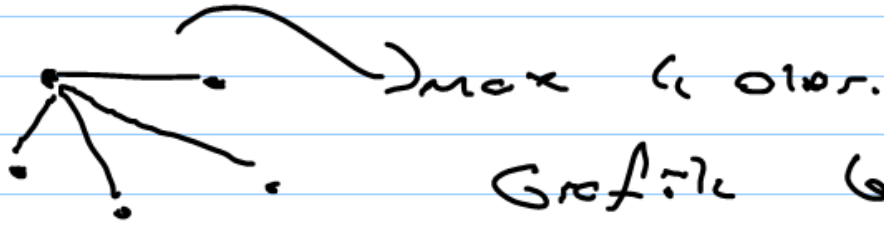


2, 2, 2, 2, 2 → grafikdir.

(-) m

5 5 5 5 5 → bir grafik belirtir mi?

5 terepli, tüm tepe dereceleri 5 olan bir graf?   
 HAYIR.



Grafik belirtmez!!

6 terepli bir graf. gösterebilir mi?

(-) m

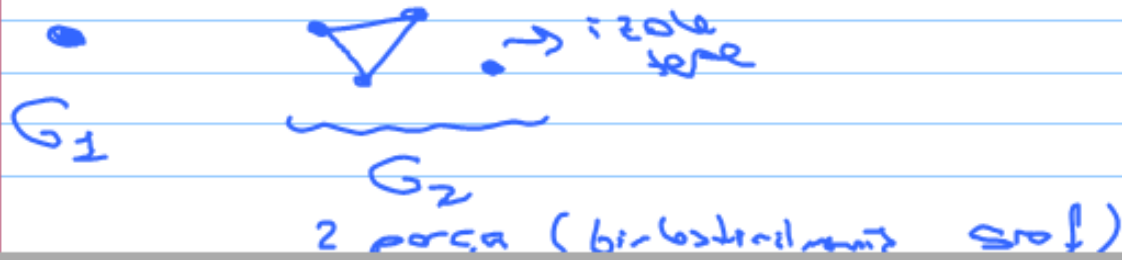
5, 4, 3, 2, 2, 1 bir grafik belirtir mi?

$$5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 17 = 2 \cdot m \rightarrow \text{arit. serisi}$$

grafik belirtmez.

$$17 = 2 \cdot m \rightarrow 8,5 \text{ arit } X$$

izole tepe: Tepe derecesi 0 olan, böyle izole tepe denir.



(1)  $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2$

Dizisi bir grafik belirtir mi?

Graf belirtir?

- Gizmek
- Havel - Hakimi teoremi

9 dereceli  $\angle$

(i) max  $\angle$

(ii) Teke mi?  
çift mi?

132  $\angle$

$\textcircled{f..rn}$   $s \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5 \ t_6 \ d_1 \ d_2$   
 (1) 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2 bir grafik belirtir mi?

(2) 4, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 2  $\rightarrow$  aif

$\downarrow$   
 genide  
 uygula

$s \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ d_1 \ d_2 \ d_3$   
 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1  $\rightarrow$  2  
 3, 2, 1, 1, 2, 2, 1  $\rightarrow$  aif

$\downarrow$   
 uygula

$s \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ d_1 \ d_2 \ d_3$   
 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1  $\rightarrow$  L  
 1, 1, 1, 1, 1, 1  $\rightarrow$  aif

$s_1, d_1, d_2, d_3, d_4$   
 $1, 1, 1, 1, 1, 1$   
 $0, 1, 1, 1, 1$

$1, 1, 1, 1, 0 \rightarrow \text{graf çizilebilir.}$



**Çalışma Sorusu:** Verilen bir pozitif tamsayı dizisinin graf gösterip göstermediğini hesaplayan veya belirten bir C programı veya algoritma yazınız.

## Graf işlemleri

### 1-) Tümleme işlemi:

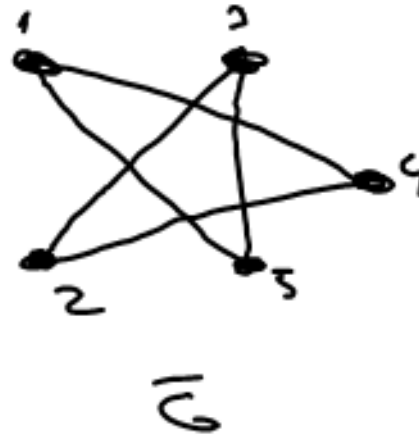
- $G$ ,  $p$  tereeli  $q$  ayrıtlı bir graf olsun.
- $G$ 'nin tümlenmesi  $\bar{G}$  ile gösterilir.
- $\bar{G}$  grafı,  $G$ 'de bulunan tereeler ile  $G$ 'de bulunmayan ayrıtları düştürdüğü bir grafır.
- $\bar{G}$  grafı birleştirilmemiş olabilir.



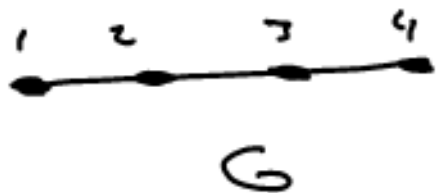
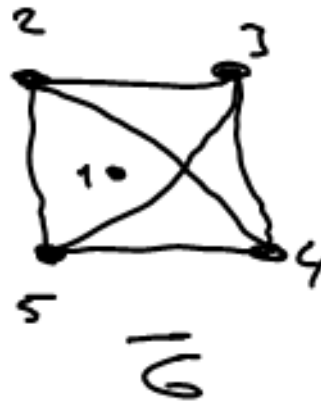
Örnek:



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



Teorem:  $G$ ,  $n$  terepli bir graf olmak üzere  $G \cup \bar{G} = K_n$  'dir.

↓  
birleşme

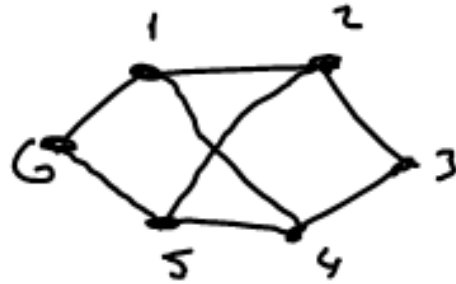
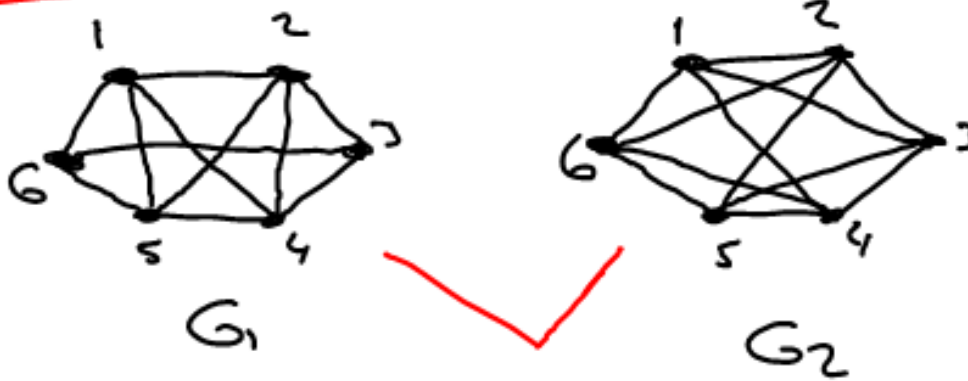
2-) Birleşme işlemi:



### 3) Kesim işlemi:

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının kesimini  $G_1 \cap G_2$  şeklinde gösterir. Her iki gratta ortak olan kenarlar ve düğümler olduğu graftır.

Örnek:



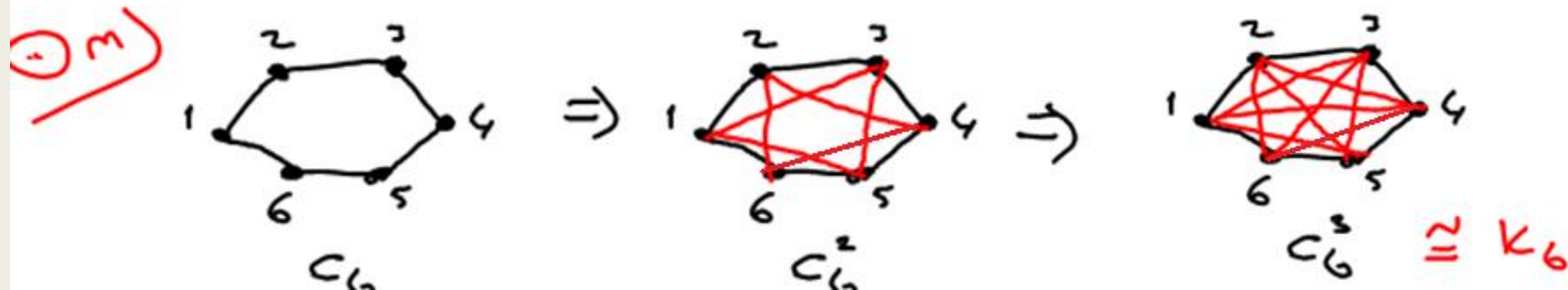
$G_1 \cap G_2$

#### 4) Bir Grafın Kuvveti.]

$G$ ,  $p$  teli  $q$  ayrıtlı bir graf olsun.

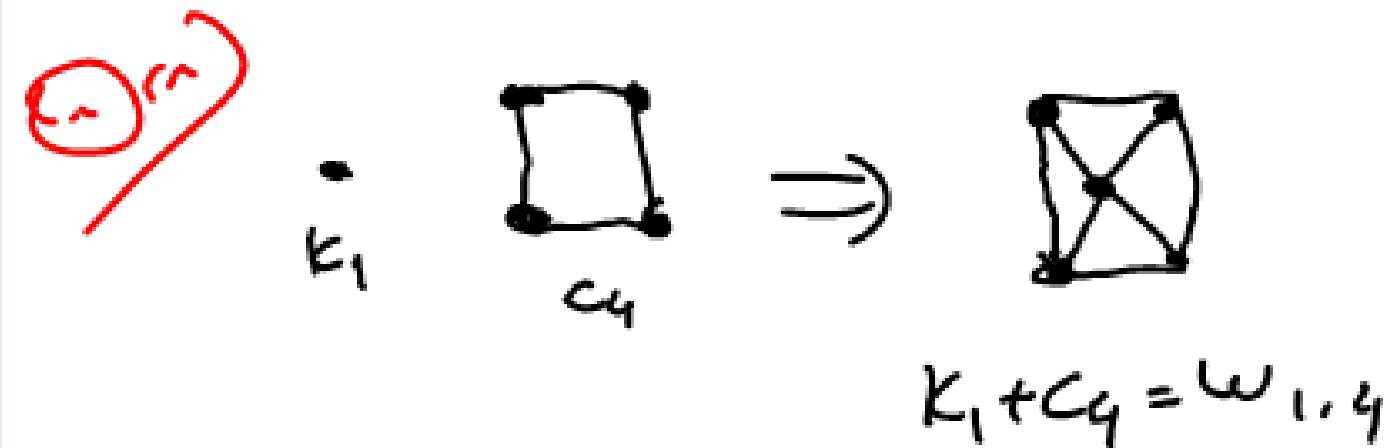
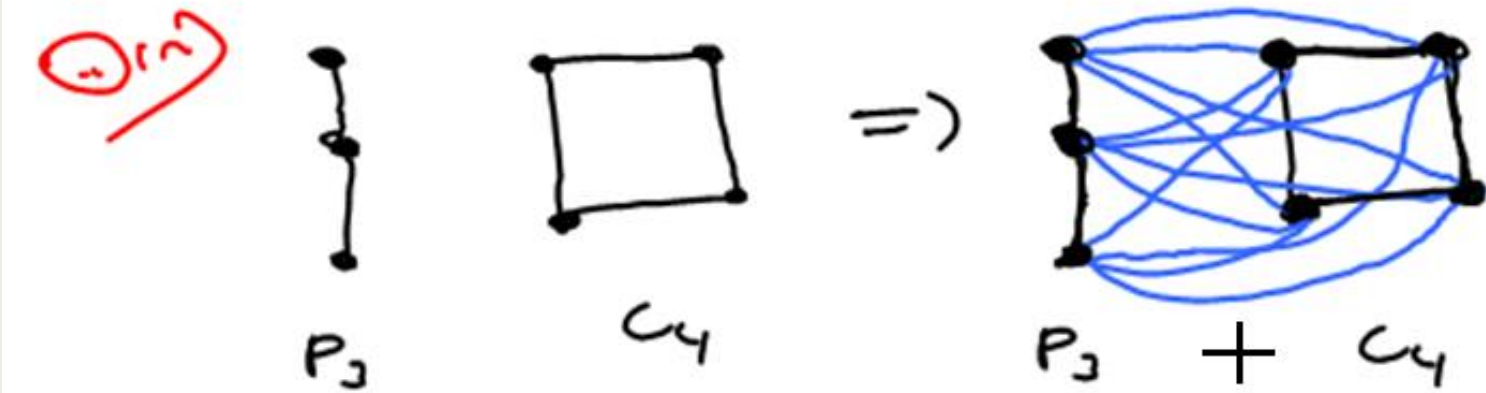
$G$  grafının,  $k$ . cı kuvveti  $G^k$  ile gösterilir.  $G^k$  grafı,  $G$  nin tepelerini içerir.

$G^k$ 'da herhangi 2 tepe arasında bir ayrıt olabilmesi için  $G$ 'de bu 2 tepenin en çok  $k$  ayrıt ile birleştirilmiş olması gereklidir.



## 5) İki Grafın Toplamı: (Join işlemi)

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının toplamı  $G_1 + G_2$  şeklinde gösterilir.  $G_1 + G_2$  grafi  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının tüm tepelerini içerir.  $G_1 + G_2$  grafindeki bağlantıları ise  $G_1$ 'deki her bir tepenin  $G_2$ 'deki her bir tepeye bir bağlantı ile birleştirilmesiyle oluşur. Ayrıca,  $G_1 + G_2$  grafi  $G_1$  ve  $G_2$  'de var olan tüm bağlantıları da içerir.



## 6) Ardışık Toplam (Sequential Join)

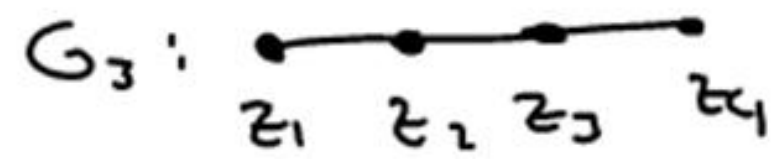
$G_1, G_2, \dots, G_k$  graflarının ardışık toplamı  $G_1 + G_2 + \dots + G_k$  ile gösterilir.

Burada,

$$G_1 + G_2 + \dots + G_k = (G_1 + G_2) \supset (G_2 + G_3) \supset \dots \supset (G_{k-1} + G_k)$$

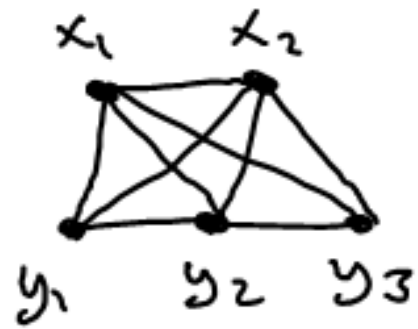
şeklinde:-.

①

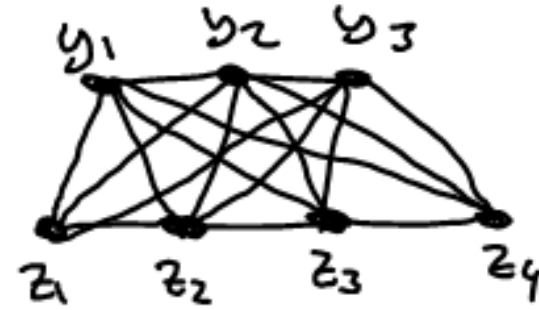


}  $G_1 + G_2 + G_3?$

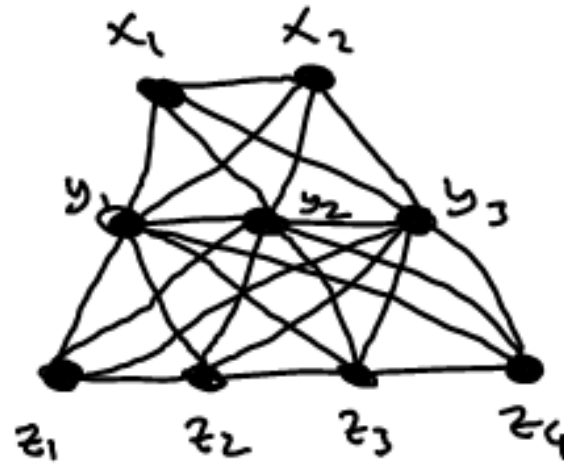




$G_1 + G_2$



$G_2 + G_3$



$G_1 + G_2 + G_3$

### 7) İki Grafın Farkı:

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının farkı her ikisinde  
var olan ağrılardan silinmesiyle elde edilir  
ve  $G_1 - G_2$  ile gösterilir.

(..m)



$G_1$



$G_2$

$\Rightarrow$



$G_1 - G_2$

### 8) iki Grafın Kartezyen Çarpımı:

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı

$G_1 \times G_2$  şeklinde gösterilir.

-  $G_1 \times G_2$  grafinin tepeler kümesini  
 $V(G_1) \times V(G_2)$  oluşturur.

- Ağırlıklar ise aşağıdaki kurala göre  
belirlenir.

Koşul:  $v = (v_1, v_2)$  ve  $u = (u_1, u_2)$  tepeleri

$G_1 \times G_2$  grafinin 2 tepesi olsun.

Eğer ;

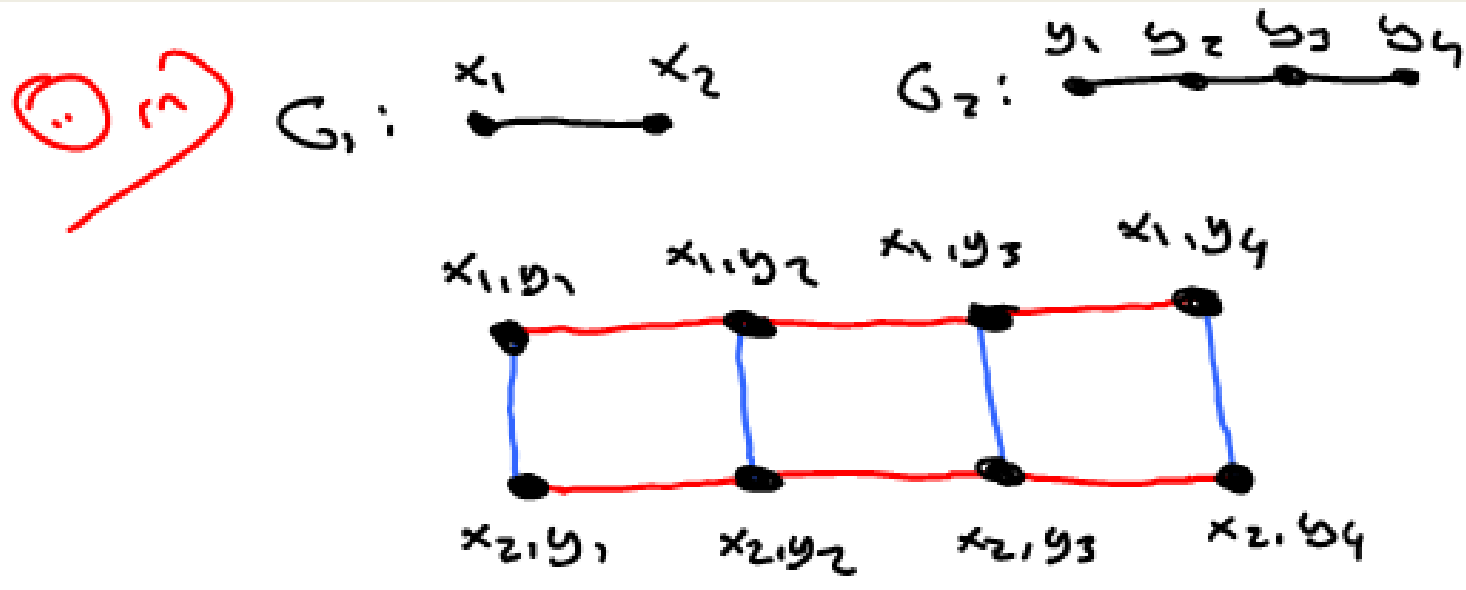
$v_1 = u_1$  ve  $G_2$ 'de  $v_2$  ;  $u_2$ 'ye bir

ayrıyla birleştirilmiş ise ya da ;

$v_2 = u_2$  ve  $G_1$ 'de  $v_1$  ;  $u_1$ 'e bir

ayrıyla birleştirilmiş ise  $v$  ve  $u$  bir

ayrıyla birleştirilir.



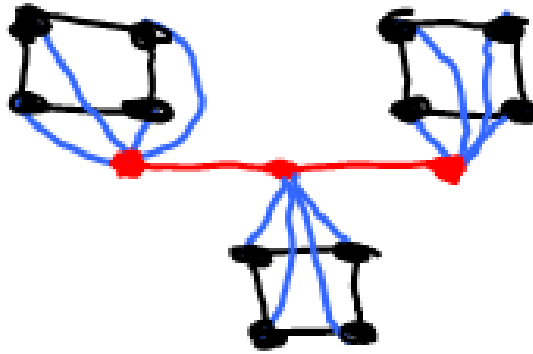
$P_m \times P_n = \text{mesh graf.}$   
 (Haberleşme sistemlerinde kullanılır.)

## 9) Corona (Taçlama) İşlemi:

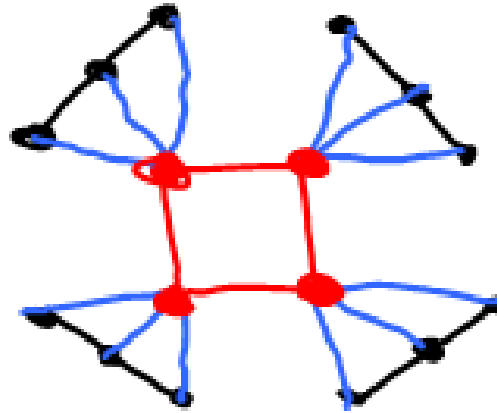
$G_1$  ve  $G_2$  grafının taçlama işleminin sonucu: grafi  $G_1 \circ G_2$  ile gösterilir.  
 $G_1 \circ G_2$  grafinde  $G_1$ 'in her bir tepesine karşılık  $G_2$ 'nin bir kopyası alınır.  
Ardından  $G_1$ 'in her bir tepesinden bir tepeye karşılık gelen  $G_2$ 'nin kopyasının her bir tepesine çizilir.



$G_1 \circ G_2 :$



$G_2 \circ G_1 :$



## 10) Composition İşlemi:

$G_1$  ve  $G_2$  graflarının composition işlemi  $G = G_1[G_2]$  ile gösterilir.

- $G$  grafinın tepelerini:  $V(G_1) \times V(G_2)$  kümesi oluşturur.
- Ayrıklar ise aşağıdaki koşula göre belirlenir.

Koşul:  $v = (v_1, v_2)$  ve  $u = (u_1, u_2)$  tepeleri

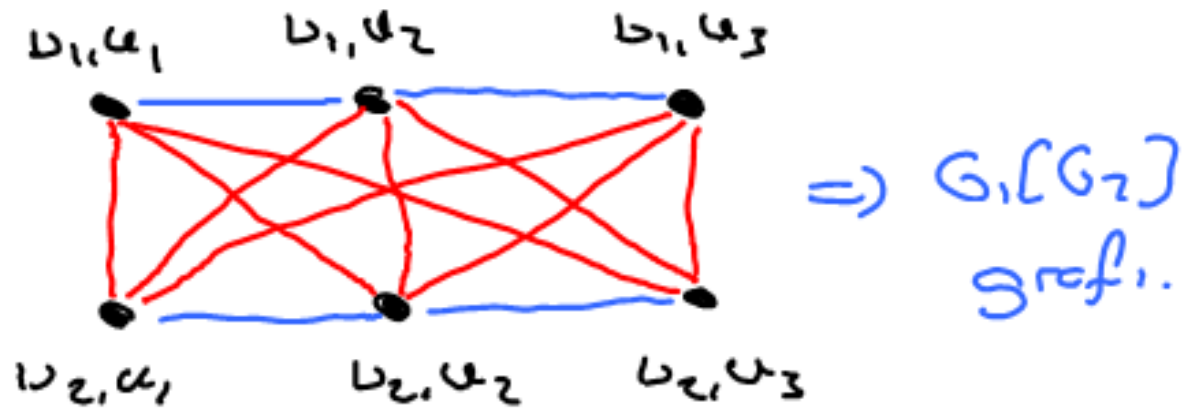
$G_1[G_2]$  grafinın iki tepesi olsun.

- Eğer  $v_1; u_1$ 'e bir ayrıt ile bitişik ise veya

- $v_1 = u_1$  ve  $v_2; u_2$ 'ye bir ayrıt ile bitişik ise  $v$  ve  $u$  tepeleri birleştirilir.



Örn)  $G_1: \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \\ \text{---} \end{array}$   $\supset$   $G_1[G_2] ?$   
 $G_2: \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ \text{---} \end{array}$



Soru:  $G_1[G_2] \cong G_2[G_1] ?$

# Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen  
(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri),  
Palme yayıncılık)
- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán,  
K. Vesztergombi, 2003.
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest,  
C. Stein, 2009.
- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.