

CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI

tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
- Hafta 14

14. Hafta Konular

- **Regresyon Analizi:**
 - **En Küçük Kareler Yöntemi**
 - **Lineer Hale Dönüştürülebilen Modeller**

Regresyon Analizi

En Küçük Kareler Yöntemi

Deneyisel uygulamalar sonucu elde edilen veriler incelenir ve elde edilen verileri modelleyen bir fonksiyon bulma amaçlanır. Çoğu zaman bu veri tablosuna tam olarak uyan bir fonksiyon bulmak mümkün olmayabilir; veri tablosuna en iyi uyan fonksiyon belirlenmeye çalışılır. Bir veri tablosuna en iyi uyan fonksiyonu bulma sürecine *regresyon analizi* denir.

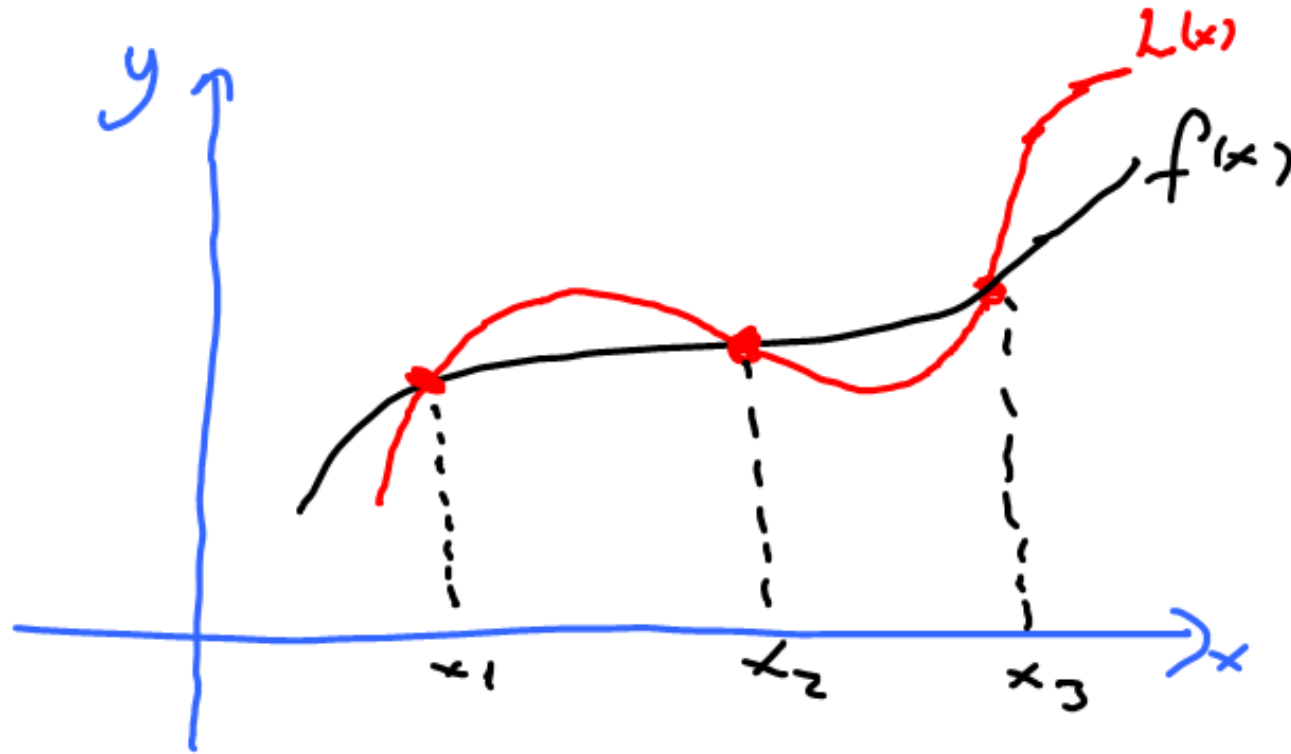
Regresyon analizi yaparken en çok kullanılan yöntemlerden biri *en küçük kareler yöntemi*dir. En küçük kareler yöntemi, tıp, finans, mühendislik, ziraat, biyoloji ve sosyoloji gibi çeşitli bilim dallarında çeşitli değişkenler arasındaki ilişkiler belirlenirken kullanılan en önemli yöntemlerden biridir.

x	x_1	x_2	-	-	-	x_n
y	y_1	y_2	-	-	-	y_n

Bu noktalarda geçen en uygun $f(x)$?

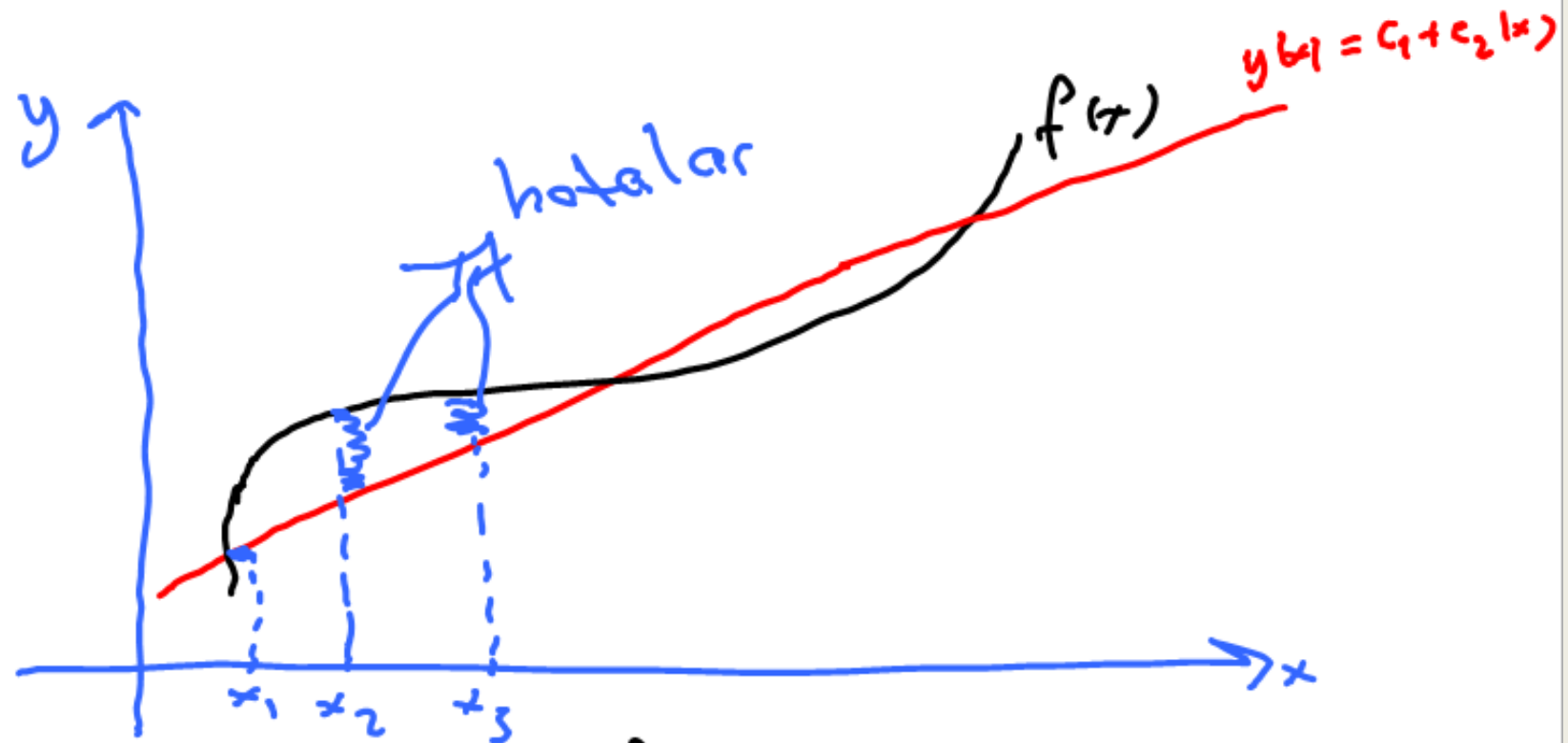
- $f(x)$ çok karmaşık bir fonksiyon
ise daha basit bir fonksiyon bulur.

~~*~~ İnterpolasyonda $y_i = f(x_i)$ olmak
zorunda fakat en küçük kareler yönteminin
de bu noktalardan geçmek zorunluluğu yoktur.



$f(x) \rightarrow$ gerçek fonksiyon

$L(x) \rightarrow$ interpolasyon polinomu



$f(x) \rightarrow$ gerçek fonksiyon

$y(x) \rightarrow$ en küçük kareler yöntemi ile elde edilen
yaklaşıklık fonksiyon

Eğri uyurma $y = F(x, c_0, c_1, \dots, c_n)$
setlidir. (c_i 'ler parametrelerdir.)

-parametrelere göre lineer bir bağımlı
ile bağımlı değişkene bağımlı modellerin sıfır
konusu olduğu durumlarda en uygun eğri
nin araştırılması problemi lineer regresyon
denir.

$$y = c_0 \cdot \varphi_0(x) + c_1 \cdot \varphi_1(x) + \dots + c_n \cdot \varphi_n(x)$$

$$\varphi_i(x) = x^i \text{ (polinom)}$$

$$\varphi_i(x) = e^{ix}$$

$$\varphi_i(x) = \sin(ix)$$

$$\varphi_i(x) = \cos(ix)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ eğri
noktaları

$$f(x_k) = y_k + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$e_k = f(x_k) - y_k \quad (\text{Hata})$$

Maksimum hata $E_\infty(f) = \max_{1 \leq k \leq N} |f(x_k) - y_k|$

Ortalama hata $E_1(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k|$

Ortalama kare hatanın karesi:

$$E_2(f) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (f(x_k) - y_k)^2}$$

→ E_n iyi sonucu veren hata formülü.

En uygun eği: $y = a + bx$ ise:

$$y_i^o = a + b \cdot x_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$e_i = y_i^o - a - bx_i$$

$$\sum_{i=1}^N (e_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^o - a - bx_i)^2 = E(a, b)$$

bu değeri minimum yapan
a ve b değerleri nedir?

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad \textcircled{2} \quad \left(\text{Ehstremum noktası koşulu} \right)$$

$$\textcircled{1} 2. \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i) (-1) = 0$$

$$a. \sum_{i=1}^n 1 + b. \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\textcircled{2} 2. \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i) \cdot (-x_i) = 0$$

$$a. \sum_{i=1}^n x_i + b. \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Bu denklemler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i \cdot y_i \end{bmatrix}$$

→ a ve b ?

2. dereceden bir polinom uydurmak istenir.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = ? \\ a_1 = ? \\ a_2 = ? \end{matrix}$$

Matrislerle gösterimi:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

Çözümüne Sırasıyla olarak bilinmektedir.

k. dereceden en uygun polinom!

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$?

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \dots & \sum x_i^k \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_i^k & \sum x_i^{k+1} & \dots & \sum x_i^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^k \end{bmatrix}$$

Örnek:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	9	7	5	4	3	0	-1
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

noktalara $y = a + b \cdot x$ tipinde öyle
bir doğru buluruz ki noktaların kareleri
toplam minimum olsun

(Bu doğruya uygun en küçük kareler yöntemi)

doğru nedir?)

$$a \cdot \sum_{i=1}^{N=8} 1 + b \cdot \sum_{i=1}^{N=8} x_i = \sum_{i=1}^{N=8} y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{N=8} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{N=8} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N=8} x_i \cdot y_i$$

x	y	x_i^2	$y_i \cdot x_i$
-1	10	1	-10
0	9	0	0
1	7	1	7
2	5	4	10
3	4	9	12
4	3	16	12
5	0	25	0
6	-1	36	-6
Σ	37	92	25

$$\begin{array}{l}
 a \cdot \sum_{i=1}^8 1 + b \cdot \sum_{i=1}^8 x_i^0 = \sum_{i=1}^8 y_i^0 \\
 a \cdot \sum_{i=1}^8 x_i + b \cdot \sum_{i=1}^8 x_i^2 = \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i
 \end{array}$$

8
20
37

20
92
25

Böylece:

$$8.a + 20.b = 37$$

$$20.a + 92.b = 25$$

çözümlenir.

$$\text{-5/ } 8.a + 20.b = 37$$

$$\text{2/ } 20.a + 92.b = 25$$

$$\text{-40a - 100b = -185}$$

$$\text{40a + 184b = 50}$$

$$84b = -135$$

$$b = -1.607143$$

1. denkleme yerine yazalım:

$$8.a + 20.(-1.607143) = 37$$

$$a = 8.642858$$

Denkleme: $y = 8.642858 - (1.607143).x$
(Doğru denkleme)

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <locale.h>

float determinant(float M[2][2]);
void matrisyaz(float N[2][2]);

int main()
{
    setlocale(LC_ALL,"Turkish");
    int m,n,i,j,t,s,topx=0,topy=0,topx2=0,topyx=0,detA;
    printf("Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->");
    scanf("%d",&n);
    float X[n],Y[n],A[2][2],B[2],tempA[2][2],c[2];

    for(i=0;i<n;i++)
    {
        printf("%d. noktadaki x değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&X[i]);
        printf("%d. noktadaki y değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&Y[i]);
    }
```





```
for(i=0;i<n;i++)
{
    topx=topx+X[i];
    topy=topy+Y[i];
    topx2=topx2+(X[i]*X[i]);
    topyx=topyx+(X[i]*Y[i]);
}
A[0][0]=n; A[0][1]=topx;
A[1][0]=topx; A[1][1]=topx2;
B[0]=topy; B[1]=topyx;
```

```
printf("Lineer Denklemler Sistemi Cramer Yöntemiyle Çözülmüştür...\n");
printf("Katsayılar matrisi:");
matrisyaz(A);
printf("B sonuç matrisi:\n");
for(i=0;i<2;i++)
    printf("%f\n",B[i]);
printf("\n");
```





```
detA=determinant(A);
for(i=0;i<2;i++)
{
    for(t=0;t<2;t++)
    {
        for(s=0;s<2;s++)
        { tempA[t][s]=A[t][s];}
    }

    for(j=0;j<2;j++)
    {tempA[j][i]= B[j]; }

    c[i]=determinant(tempA)/detA;
    printf("%d. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:",i+1);
    matrisyaz(tempA);
}
```





```
printf("Sonuclar\n");
for(i=0;i<2;i++)
    {printf("c[%d]=%f\n",i+1,c[i]);}

printf("\nElde Edilen Birinci Derecen Lineer Regresyon Denklemi (Dogru Denklemi):\n");
printf("y=%f + (%f).x\n",c[0],c[1]);
getch();
return 0;
}
```

```
float determinant(float M[2][2])
{ float det;
  det=(M[0][0]*M[1][1])-(M[0][1]*M[1][0]);
  return det;
}
```





```
void matrisyaz(float N[2][2])
{
    int i,j;
    for(i=0;i<2;i++)
    {
        printf("\n");
        for(j=0;j<2;j++)
            printf("%f\t",N[i][j]);
        printf("\n\n");
    }
}
```


Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz-->8
1. noktadaki x değerini giriniz: -1
1. noktadaki y değerini giriniz: 10
2. noktadaki x değerini giriniz: 0
2. noktadaki y değerini giriniz: 9
3. noktadaki x değerini giriniz: 1
3. noktadaki y değerini giriniz: 7
4. noktadaki x değerini giriniz: 2
4. noktadaki y değerini giriniz: 5
5. noktadaki x değerini giriniz: 3
5. noktadaki y değerini giriniz: 4
6. noktadaki x değerini giriniz: 4
6. noktadaki y değerini giriniz: 3
7. noktadaki x değerini giriniz: 5
7. noktadaki y değerini giriniz: 0
8. noktadaki x değerini giriniz: 6
8. noktadaki y değerini giriniz: -1
```



Lineer Denklem Sistemi Cramer Yöntemiyle Çözümüştür...

Katsayılar matrisi:

8,000000	20,000000
20,000000	92,000000

B sonuç matrisi:

37,000000
25,000000

1. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:

37,000000	20,000000
25,000000	92,000000

2. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:

8,000000	37,000000
20,000000	25,000000

Sonuçlar

c[1]=8,642858

c[2]=-1,607143

Elde Edilen Birinci Derecen Lineer Regresyon Denklemi (Doğru Denklemi):

$y = 8,642858 + (-1,607143) \cdot x$

Örnek! Yapılan bir gözlem sürecinde elde edilen (x_i, y_i) değerleri aşağıda verilmiştir.

x_i	0	2	3	4
y_i	1	2	3	5

1-) Bu gözlemlere uygun en küçük kareler
denklemleri: doğru mu? ($y = c_1 + c_2 \cdot x$)

2-) Bu gözlemlere uygun en küçük kareler
denklemleri: parabol mü? ($y = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2$)

$$E = \sum_{i=1}^4 (c_1 + c_2 x_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^4 (c_1 + c_2 x_i - y_i) = 0$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^4 1 + c_2 \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i \cdot (c_1 + c_2 x_i - y_i) = 0$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i + c_2 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot x_i$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 9 \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 11 \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 29 \quad \sum_{i=1}^4 y_i x_i = 33$$

Böylece: $4c_1 + 9c_2 = 11$

$$9c_1 + 29c_2 = 33$$

$$c_1 = \frac{22}{35}$$

$$c_2 = \frac{33}{35}$$

$$c_1 = 0.628571 \quad c_2 = 0.942857$$

$$y = 0.628571 + (0.942857) \cdot x$$

Program Çalıştırıldıktan Sonra Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz-->4
1. noktadaki x değerini giriniz: 0
1. noktadaki y değerini giriniz: 1
2. noktadaki x değerini giriniz: 2
2. noktadaki y değerini giriniz: 2
3. noktadaki x değerini giriniz: 3
3. noktadaki y değerini giriniz: 3
4. noktadaki x değerini giriniz: 4
4. noktadaki y değerini giriniz: 5
```



```
Lineer Denklem Sistemi Cramer Yöntemiyle Çözülmüştür...
Katsayılar matrisi:
4,000000      9,000000
9,000000      29,000000

B sonuç matrisi:
11,000000
33,000000

1. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
11,000000      9,000000
33,000000      29,000000

2. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
4,000000      11,000000
9,000000      33,000000

Sonuclar
c[1]=0,628571
c[2]=0,942857

Elde Edilen Birinci Derecen Lineer Regresyon Denklemi (Doğru Denklemi):
y=0,628571 + (0,942857).x
```

$$2 \rightarrow E = \sum_{i=1}^4 [c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2 - y_i]^2 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = \sum_{i=1}^4 2[c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2 - y_i] \cdot (1) = 0$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^4 1 + c_2 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i + c_3 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = \sum_{i=1}^4 2 \cdot [c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2 - y_i] \cdot (x_i) = 0$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i + c_2 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^2 + c_3 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^3 = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_3} = \sum_{i=1}^4 2 \cdot [c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2 - y_i] \cdot (x_i^2) = 0$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^2 + c_2 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^3 + c_3 \cdot \sum_{i=1}^4 x_i^4 = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 9 \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 11 \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 29 \quad \sum_{i=1}^4 y_i \cdot x_i = 33$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^3 = 99 \quad \sum_{i=1}^4 x_i^4 = 353 \quad \sum_{i=1}^4 y_i \cdot x_i^2 = 115$$

Böylece:

$$4c_1 + 9c_2 + 29c_3 = 11$$

$$9c_1 + 29c_2 + 99c_3 = 33$$

$$29c_1 + 99c_2 + 353c_3 = 115$$

$$c_1 = \frac{56}{55} \quad c_2 = \frac{-6}{55} \quad c_3 = \frac{15}{55}$$

$$c_1 = 1.018182 \quad c_2 = -0.109091 \quad c_3 = 0.272727$$

$$y = 1.018182 - 0.109091 \cdot x + 0.272727 \cdot x^2$$

parabol

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <locale.h>
float determinant(float M[3][3]);
void matrisyaz(float N[3][3]);

int main()
{   setlocale(LC_ALL,"Turkish");
    int m,n,i,j,t,s,topx=0,topy=0,topx2=0,topx3=0,topx4=0,topyx=0,topyx2=0,detA;
    printf("Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->");
        scanf("%d",&n);
    float X[n],Y[n],A[3][3],B[3],tempA[3][3],c[3];

    for(i=0;i<n;i++)
    {   printf("%d. noktadaki x değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&X[i]);
        printf("%d. noktadaki y değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&Y[i]);
    }
}
```

```

for(i=0;i<n;i++)
    {topx=topx+X[i];
    topy=topy+Y[i];
    topx2=topx2+(X[i]*X[i]);
    topx3=topx3+(X[i]*X[i]*X[i]);
    topx4=topx4+(X[i]*X[i]*X[i]*X[i]);
    topyx=topyx+(X[i]*Y[i]);
    topyx2=topyx2+(X[i]*X[i]*Y[i]);
    }
A[0][0]=n; A[0][1]=topx; A[0][2]=topx2;
A[1][0]=topx; A[1][1]=topx2; A[1][2]=topx3;
A[2][0]=topx2; A[2][1]=topx3; A[2][2]=topx4;
B[0]=topy; B[1]=topyx; B[2]=topyx2;
printf("Lineer Denklem Sistemi Cramer Yöntemiyle Çözülmüştür...\n");
printf("Katsayılar matrisi:");
matrisyaz(A);
printf("B sonuç matrisi:\n");
for(i=0;i<3;i++)
    printf("%f\n",B[i]);
printf("\n");

```

```
detA=determinant(A);
for(i=0;i<3;i++)
{
    for(t=0;t<3;t++)
    {
        for(s=0;s<3;s++)
        { tempA[t][s]=A[t][s];}
    }

    for(j=0;j<3;j++)
    { tempA[j][i]= B[j];}

    c[i]=determinant(tempA)/detA;
    printf("%d. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:",i+1);
    matrisyaz(tempA);
}
```

```
printf("Sonuclar\n");
    for(i=0;i<3;i++)
        printf("c[%d]=%f\n",i+1,c[i]);

printf("\nElde Edilen İkinci Derecen Lineer Regresyon Denklemi (Parabol Denklemi):\n");
printf("y=%f + (%f).x + (%f).x^2\n",c[0],c[1],c[2]);

    getch();
    return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
float determinant(float M[3][3])
{ float det,m1,m2,m3;
  m1=M[0][0]*(M[1][1]*M[2][2]-M[1][2]*M[2][1]);
  m2=M[0][1]*(M[1][0]*M[2][2]-M[1][2]*M[2][0]);
  m3=M[0][2]*(M[1][0]*M[2][1]-M[1][1]*M[2][0]);
  det=m1+(-1)*m2+m3;
  return det;
}
```

```
void matrisyaz(float N[3][3])
{
  int i,j;
  for(i=0;i<3;i++)
  {
    printf("\n");
    for(j=0;j<3;j++)
      printf("%f\t",N[i][j]);
  }
  printf("\n\n");
}
```

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz-->4
1. noktadaki x değerini giriniz: 0
1. noktadaki y değerini giriniz: 1
2. noktadaki x değerini giriniz: 2
2. noktadaki y değerini giriniz: 2
3. noktadaki x değerini giriniz: 3
3. noktadaki y değerini giriniz: 3
4. noktadaki x değerini giriniz: 4
4. noktadaki y değerini giriniz: 5
Lineer Denklem Sistemi Cramer Yöntemiyle Çözülmüştür...
Katsayılar matrisi:
4,000000      9,000000      29,000000
9,000000      29,000000      99,000000
29,000000      99,000000      353,000000

B sonuç matrisi:
11,000000
33,000000
115,000000
```



```
1. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
11,000000      9,000000      29,000000
33,000000      29,000000      99,000000
115,000000      99,000000      353,000000

2. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
4,000000      11,000000      29,000000
9,000000      33,000000      99,000000
29,000000      115,000000      353,000000

3. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
4,000000      9,000000      11,000000
9,000000      29,000000      33,000000
29,000000      99,000000      115,000000

Sonuçlar
c[1]=1,018182
c[2]=-0,109091
c[3]=0,272727

Elde Edilen İkinci Derecen Lineer Regresyon Denklemi (Parabol Denklemi):
y=1,018182 + (-0,109091).x + (0,272727).x^2
```

Yöntemin Genel Halinin C kodu Çalışma Sorusu Olarak Bırakılmıştır...

Gözüme Sorusu:

$(-3,3), (0,1), (2,1), (4,3)$ noktalarına

$y = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2$ tipinde öyle bir

egri tipi bulunuz ki hatların kareleri

toplam minimum olsun.

$$c_1 = 0.850519$$

$$c_2 = -0.192495$$

$$c_3 = 0.178462$$

Lineer Hale Dönüştürülebilir Modeller

$y = a \cdot e^{bx}$, a ve b parametre olmak

üzere lineer olmayan bir denklemdir.

(x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$ (Veri Seti)

$$y_i = a \cdot e^{bx_i} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \rightarrow \text{hata termi}$$

$$\sum (\epsilon_i)^2 = \sum (a \cdot e^{bx_i} - y_i)^2 = E(a, b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

$$a. \sum x_i e^{2bx_i} - \sum x_i y_i e^{bx_i} = 0$$

$$a. \sum e^{2bx_i} - \sum y_i e^{bx_i} = 0$$

(Linear olmayan denklem sistemi)

Basit iterasyon veya Newton-Raphson yöntemleri ile bu denklem sistemi çözülebilir.

- Fakat, şimdi bu sistemi Lineer hale dönüştüreceğiz.

$$y = a \cdot e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$$

$$\ln y = Y$$

$$\ln a = A$$

$$Y = A + bx$$

→ Lineer olmayan modelin
Lineer hali .

$$y = a \cdot x^b \Rightarrow \log y = \log a + b \cdot \log x$$

Linear
desil

$$\log y = Y$$

$$\log a = A$$

$$\log x = X$$

$$Y = A + b \cdot X$$

Linear holi

$$y = a \cdot \frac{x}{b+x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$$

Linear deşıl
(b paydadın oldıdan)

$$\frac{1}{y} = Y$$

$$\frac{1}{x} = X$$

$$\frac{b}{a} = A$$

$$\frac{1}{a} = B$$

$$Y = A \cdot X + B$$

Linear hali

Örnek:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.5	2.5	3.5	5	7.5

Verileri kullanarak $y = c \cdot e^{ax}$ olarak
en uygun eğriyi bulunuz.

$$y = c \cdot e^{ax}$$

$$\ln y = \ln c + a \cdot x$$

$$y = b + a \cdot x \quad (\text{Linear hali})$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i \end{bmatrix}$$

x_i	y_i	$Y_i = \ln(y_i)$	x_i^2	$x_i \cdot Y_i$
0	1.5	0.40547	0	0
1	2.5	0.91629	1	0.91629
2	3.5	1.25276	4	2.50553
3	5	1.60944	9	4.82831
4	7.5	2.01490	16	8.05961
+	+	+	+	+
10	20	6.19886	30	16.30974

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.19886 \\ 16.30974 \end{bmatrix}$$

$$a = ? \quad \beta = ?$$

$$5\beta + 10a = 6.19886$$

$$10\beta + 30a = 16.30974$$

$$a = 0.391202$$

$$\beta = 0.457367$$

$$\ln c = \beta \Rightarrow c = e^{\beta} = 1.579909$$

$$y = c \cdot e^{ax} \Rightarrow y = 1.579909 \cdot e^{(0.391202) \cdot x}$$

Bazı Fonksiyonların Lineerleştirilmesi :

FONKSİYON	LİNEERLEŞTİRİLMİŞ HALİ	DÖNÜŞÜM
$y = \frac{a}{x} + b$	$y = a \frac{1}{x} + b$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = y$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$X = x$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{a + bx}$	$\frac{1}{y} = a \frac{1}{x} + b$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{d}{x + c}$	$y = -\frac{1}{c}(xy) + \frac{d}{c}$	$X = x.y$, $Y = y$
$y = a \ln x + b$	$y = a(\ln x) + b$	$X = \ln x$, $Y = y$

Ödev: Aşağıda verilen veri setini ele alalım.

x_i	2	4	5	8	10
y_i	3	6	8	9	12

Bu verilere uyan en küçük kareler anlamındaki $y = \frac{a}{x} + b$ eğrisi nedir?

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.