CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 3

Ders İçereği

- **İspat Yöntemleri**

İspat Yöntemleri

Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen matematiksel ifadelere aksiyom denir.

Doğruluğu ispat edilebilen doğru bir matematiksel ifadeye teorem denir.

$p \Rightarrow q$ şeklindeki teoremlerin ispatları için ispat tekniklerini verelim.

1) Doğrudan ispat:

Keyfi bir $x \in E$ için $p(x)$ in doğru olduğu kabul edilerek $q(x)$'in doğru olduğu ispatlanırsa "$\forall x \in E \; [p(x) \Rightarrow q(x)]$" önermesi doğru olur. Bu tür ispata doğrudan ispat denir.

Örnek

Tamsayılar tek tamsayı iki tamsayının farkıdır.

İspat: n tek tamsayı olsun. Böylece $n=2k+1$ olur, $k \in \mathbb{Z}$ 'dir.

$$n = 2k+1 = (k+1)^2 - k^2 \text{ 'dir.}$$

$k \in \mathbb{Z}$ old.dan n, 2 tamsayının farkıdır. İspat biter.

Teorem: Eğer n tek tamsayı ise, o zaman $3n+7$ bir çift tamsayıdır.

İspat: n tek sayı olsun. $n=2k+1$ olur, $k \in \mathbb{Z}$.

$$3n+7 = 3.(2k+1)+7$$
$$= 6k+10 = 2.(3k+5)$$

$(3k+5) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3n+7$ çift tamsayı olur.

Teorem: Eğer n tek tamsayı ise o zaman, $4n^3+2n-1$ bir tek tamsayıdır.

İspat: n tek olsun. yani $n=2k+1$ olsun.

$$4n^3+2n-1 = 4\cdot(2k+1)^3+2\cdot(2k+1)-1$$

$$= 4\cdot(8k^3+3\cdot 4k^2+3\cdot 2k+1)+4k+2-1$$

$$= 32k^3+48k^2+24k+4+4k+1$$

$$= 2(\underbrace{16k^3+24k^2+14k+2}_{\in \mathbb{Z} \text{ olduğundan}})+1$$

$4n^3+2n-1$ sayısı tektir.

Teorem: $x \in Z$ için eğer $2 | x^2-1$ ise o zaman $4 | x^2-1$ 'dir.

İspatlayınız.

$2 | x^2-1$ olduğundan $x^2-1 = 2y$ olacak şekilde $y \in Z$ vardır.

$x^2 = 2y+1$ olur. (x^2 tektir)

Böylece $x = 2k+1$ olur, $k \in Z$.

$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$

$x^2-1 = 4k^2+4k = 4(k^2+k)$, $k^2+k \in Z$ olduğundan $4 | x^2-1$ 'dir.

② Karşıt Ters ile İspat!

Eğer $\forall x \in [p(x) \Rightarrow q(x)]$ niceleme önermesinin doğruluğunun ispatı "$\forall x \in [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)]$" karşıt tersi kullanılarak doğrudan ispat yapılırsa bu tekniğe karşıt ters ile ispat denir.

Örnek)

Teorem: Eğer $x \in \mathbb{Z}$ için $5x-7$ bir çift tam sayı ise o zaman x bir tek tamsayıdır.

İspat: x'in çift sayı old. kabul edelim. yani $x = 2k$ olsun, $k \in \mathbb{Z}$.

$$5x-7 = 5\cdot(2k)-7 = 10k-7$$
$$= 10k-8+1$$
$$= 2(\underbrace{5k-4}_{\in \mathbb{Z}})+1$$

$\in \mathbb{Z}$ olduğundan $5x-7$ tek tamsayıdır.

Böylece $\forall x \in [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)]$ old. gösterdik. İspat biter.

Teorem: $x \in Z$ olsun. $11x-7$'nin çift sayı olması için gerek ve yeter şart x'in tek olmasıdır.

① eğer x tek ise $11x-7$ çifttir.

② eğer $11x-7$ çift ise x tektir.

① 'i ispatlayalım.
(doğrudan ispatı kullanalım.)

$x = 2k+1$ olsun.

$$11(2k+1)-7 = 22k+4$$
$$= 2(\underbrace{11k+2}_{\in Z \text{ old. dan}})$$

$11x-7$ çifttir.

② 'yi ispatlayalım
(karşıt ters)

x çift olsun. $(x=2k)$

$$11(2k)-7 = 22k-7$$
$$= 2(\underbrace{11k-4}_{\in Z \text{ old. dan}})+1$$

$11x-7$ tek olur.

ispat biter.

Örnek: x, bir tamsayı olsun. Eğer, 5x-7 tek bir tamsayı ise o zaman 9x+2 çift tamsayıdır.

Çözüm: Derste yapılacaktır…

③ Durum İncelemeli İspat !

$x \in \mathbb{Z}$ olsun. x'in özelliklerini içeren durumlar gözönüne alınarak ispat yapmaya durum ile ispat tekniği denir.

Teorem: Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise o zaman n^2+3n+5 tektir.

İspat: İspat n'in çift yada tek olma durumuna göre 2 durumda incelenir.

Durum 1: $n = 2k$ olsun.

$$n^2+3n+5 = 4k^2+6k+5$$
$$= 2(\underbrace{2k^2+3k+2}_{\in \mathbb{Z}})+1 \quad \text{(tek tanımı)}$$

Durum 2: $n = 2k+1$ olsun

$$n^2+3n+5 = 4k^2+4k+1+6k+3+5$$
$$= 2(\underbrace{2k^2+5k+4}_{\in \mathbb{Z}})+1 \quad \text{(tek tanımı)}$$

Durum 1 ve 2 'den ispat biter.

Örnek: x ve y iki tamsayı olsun. Eğer, x.y çift sayı olması için gerek ve yeter şart x’ in çift veya y’ nin çift sayı olmasıdır.

Çözüm: Derste yapılacaktır…

④ Çelişki ile İspat !

$\forall x \in E\, P(x)$ nicelenmiş önermesi için doğ. değeri her zaman 1 olmayabilir. Bu durum araştırılırken;

$$\neg[\forall x \in P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in \neg P(x)$$

mantıksal denkliği yardımıyla elde edilen $x \in E$ ye "$\forall x \in P(x)$" nicelenmiş önermesi için aykırı örnek denir.

Örnek:/ Real sayılar kümesinde tanımlı "$\forall x \in R$ için $(x^2-1)^2 > 0$" nicelenmiş önermesinin doğ. değerini bulalım. ($\times$) Önerme yanlış. $x = \mp 1$ olarak örneklerden.

$x = 1$ için $(x^2-1)^2 = 0$

$x = -1$ için $(x^2-1)^2 = 0$

\# $\forall x \in E \; [p(x) \Rightarrow q(x)]$ önermesi verilsin.

Bir $x \in E$ için $p(x)$ açık önermesinin doğru ve $q(x)$ açık önermesinin yanlış old. kabul edilerek hipotez, teorem, bir aksi- yom yada bir teorem ile çelişki elde edilebiliyorsa

$$\forall x \in E \; [p(x) \Rightarrow q(x)]$$

nicelenmiş önermesi doğru olur. Bu tekniğe çelişki ile ispat denir.

$\boxed{\text{Teorem:}}$ Pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut değildir.

$\boxed{\text{İspat!}}$ Kabul edelim ki en küçük sayı mevcut olsun. Bu durumda eğer $r \in \mathbb{R}^+$ en küçük ise her $x \in \mathbb{R}^+$ için $r < x$ olur.

Fakat her zaman $\frac{r}{2} < r$ ve $r/2 \in \mathbb{R}^+$ olup $0 < \frac{r}{2} < r$ elde edilir. Bu ise r'nin en küçük reel sayı olması ile çelişir. Bu sebeple pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut değildir.

Teorem | $\sqrt{5}$ irrasyonel sayıdır.

İspat: $\sqrt{5}$ rasyonel olsun.

$\sqrt{5} = \dfrac{a}{b} \longrightarrow \sqrt{5} = \dfrac{5k}{b}$

$a^2 = 5b^2$

a^2, 5'in katı olduğundan

$a = 5k$ olur.

$5b^2 = 25k^2$

$b^2 = 5k^2$

b^2, 5'in katı old.dan

$b = 5t$ olsun.

Rasyonel sayı tanımından $\frac{a}{b}$ rasyonel olmak üzere; a ve b aralarında asal olmalıdır. $a=5k$, $b=5t$ old. dan a ve b aralarında da asal değildir. O zaman $\frac{a}{b}=\sqrt{5}$ rasyonel değildir.

Biz $\sqrt{5}$'i rasyonel kabul etmiştik, çelişki elde ettik.

İspat biter, $\sqrt{5}$ rasyonel değildir.

5 Tümevarım ile İspat

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı $P(n)$ açık önermesi verilsin. Eğer;

(i) $P(1)$ doğru

(ii) her $n \geq 0$ doğal sayısı için $P(n)$ doğru iken $P(n+1)$ doğru ise o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

$\boxed{\text{Teorem:}}$ Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $1+2+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir.

İspat:

(1) $n=1$ için $1 = \frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}}$

$1 = 1$ ✓ doğru

(2) $n=k$ için kabul edelim

$1+2+\dots+k = \frac{k.(k+1)}{2}$ olsun.

③ $n=k+1$ için doğru mudur?

$$1+2+\cdots+k+k+1 \overset{?}{=} \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k\cdot(k+1)}{2} + k+1$$

$$\Rightarrow \frac{k\cdot(k+1) + 2\cdot(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Eşitliği bulduk.
İspat biter.

Örnek

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ dı

İspat!

① $n=1$ için $1^2 = \frac{1.2.3}{6} \Rightarrow 1=1$ ✓

② $n=k$ için doğru olsun.

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$$ olsun.

3 $n = k+1$ için doğru mudur?

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{} + (k+1)^2 \overset{\boxed{?}}{=} \underbrace{\frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}}_{A \text{ olsun.}}$$

$$\Rightarrow \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k.(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)[(2k^2+k) + (6k+6)]}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1).[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1).(k+2)(2k+3)}{6} = A$$

olduğundan ispat biter.

Örnek

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $5^n - 2^n$ sayısı 3 ile bölünebilirdir. $(3 \mid 5^n - 2^n)$

İspat

(1) $n=1$ için $5^1 - 2^1 = 3$, $3 \mid 3$ old. dan doğru ✓

(2) $n=k$ için doğru olsun.

$5^k - 2^k = 3.a$ olsun.

(3) $n=k+1$ için doğru mudur?

$5^{k+1} - 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 3.b$

$\Rightarrow 5^k.5 - 2^k.2$

$\Rightarrow 3.5^k + 2.5^k - 2.2^k$

$\Rightarrow 3.5^k + 2.\underbrace{(5^k - 2^k)}_{3a}$

$\Rightarrow 3.5^k + 6a = 3.\underbrace{(5^k + 2a)}_{b \text{ olmak üzere}}$

$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3b$ old. dan $3 \mid 5^{k+1} - 2^{k+1}$ 'dir.

İspat biter.

Çalışma Sorusu:

$\forall n \in N^{+}$ için $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ old. ispatlayınız

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen

(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri), Palme yayıncılık)

- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, 2003.

- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, 2009.

- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.