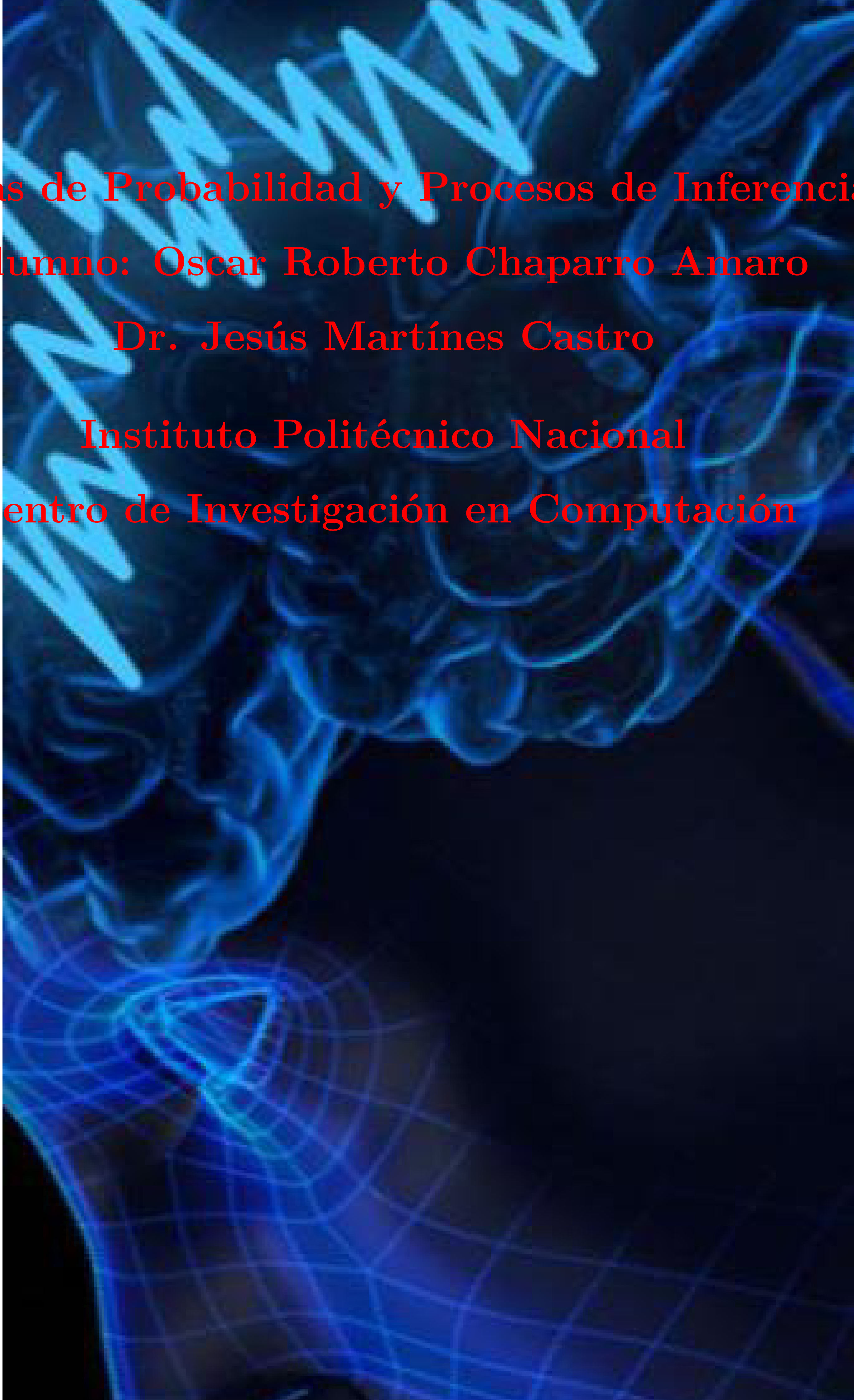


Tareas de Probabilidad y Procesos de Inferencia

Alumno: Oscar Roberto Chaparro Amaro

Dr. Jesús Martínes Castro

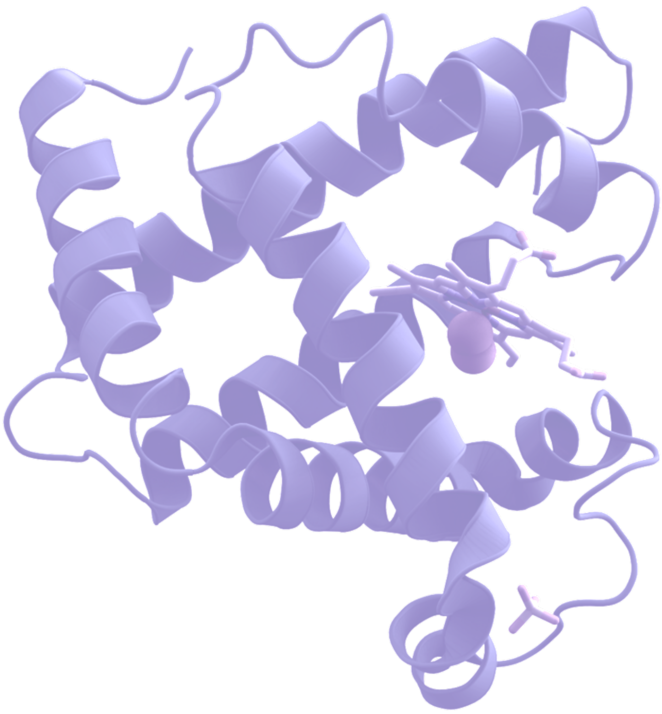
Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Computación

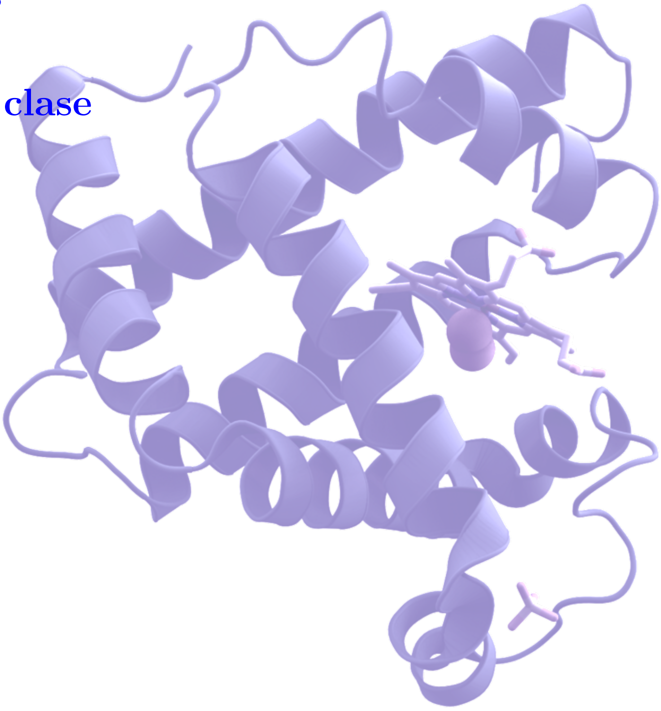
Chaparro Amaro Oscar Roberto

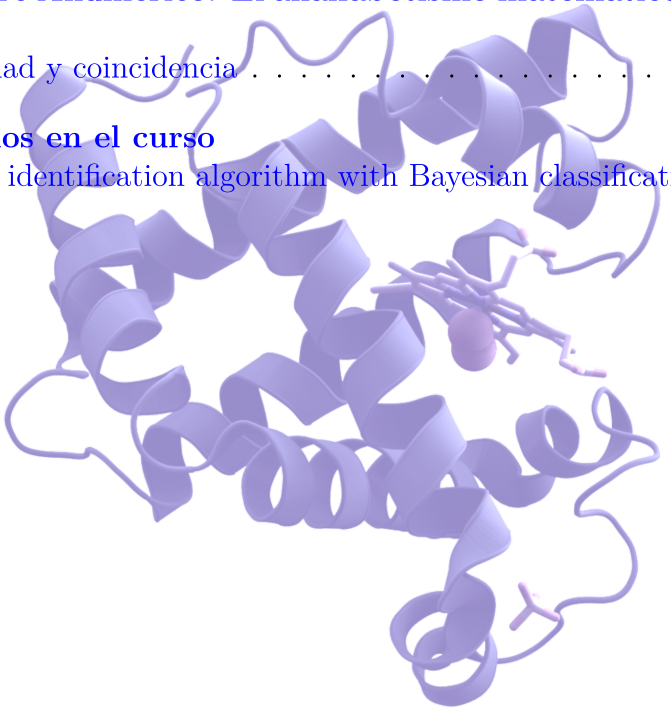
"La estadística es una ciencia según la cual todas las mentiras se tornan cuadros"
Pitigrilli (1893-1975) Escritor italiano.
"Las cifras no mienten, pero los mentirosos también usan cifras"
Anónimo.
"La estadística suele ser amiga de los tiranos y déspotas"
Abel Pérez Rojas (1863) Educador mexicano.
"La estadística es la primera de las ciencias inexactas"
Edmond Gouncourt (1822-1896) Novelista naturalista francés.

Chaparro Amaro Oscar Roberto

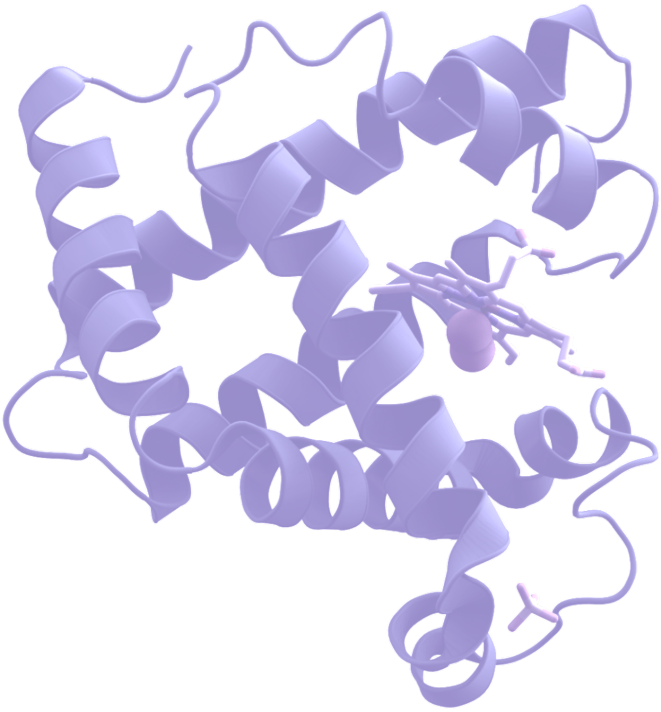


Índice

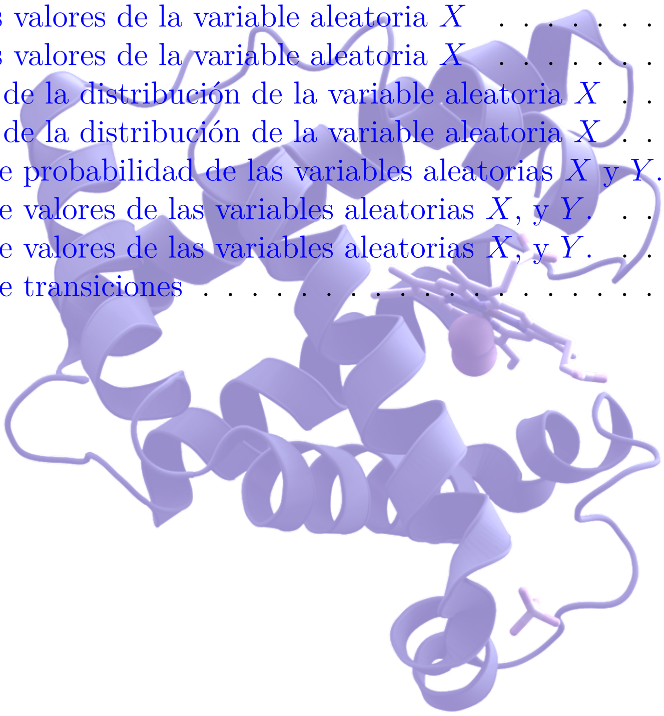




Lista de Imágenes ó figuras



Lista de Tablas



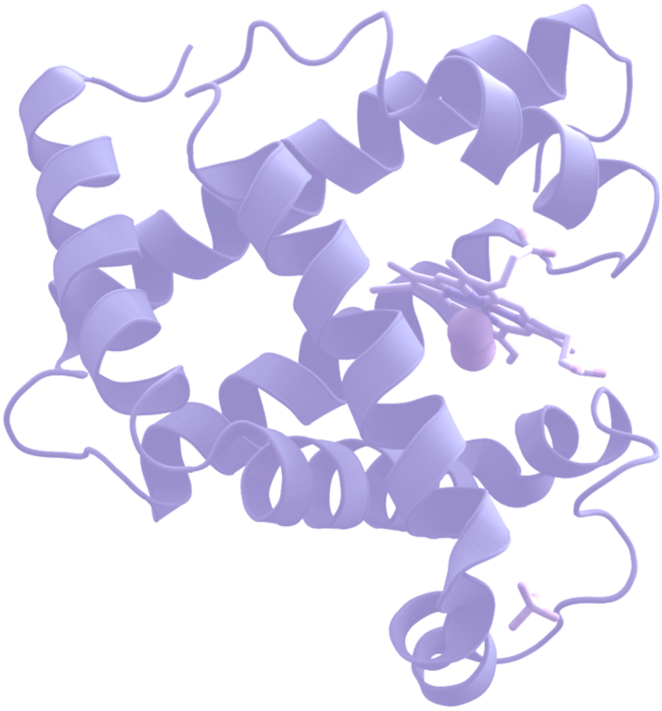
Bitácora de clase

Clase 1

En la primera clase, se revisó lo que és la introducción a la probabilidad, los conceptos revisados , muy usuales en la jerga coloquial, tales como suerte, fortuna, relacionado mucho éstos conceptos con la probabilidad , sorprendentemente se me hizo notorio la observación de que no hay una definición "normalizada" para éstos conceptos, más áun de que se no se tiene capacidad de aterrizarlos a algo más general. De ahí la importancia de la representación de tales conceptos tan difíciles de vislumbrar para la creación de nueva tecnología, es definitiva, estoy de acuerdo que todo modelo hecho y por hacer acerca del funcionamiento de la naturaleza es mera copia o "caricatura" de la naturaleza, nadie sabe, por lo menos en nuestra conotación , si las matemáticas son una buena representación de la naturaleza, tan sólo es una forma de representarla, que en definitiva, ha sido muy útil para tantas y tantas cosas.
Es verdad que llamar experimento a un suceso no controlado como la naturaleza parece muy arbitrario, de igual manera que consideramos las matemáticas nuestro modelo, sin embargo, así como fue el tema, la diferencia de un experimento determinista y aleatorio se basa sólo en que según nuestros propios conocimientos, sabremos de tales posibilidades y sus resultados aparentes. Lo que me recuerda el ejemplo dado por el profesor, acerca de pensar todas las series de eventos que tuvieron que pasar para tener hoy en día la forma de vida que se tiene, en lo particular, pienso que el resultado obtenido (nuestras vidas como las conocemos) no son un evento del cúal se diseño un plan maestro, si no más bien fue una serie de procesos , entre miles de fracasos y miles de aciertos, que dieron con la solución más óptima o posible en cada diferencia infinitesimal de tiempo desde un punto de partida hasta éste último segundo.
Particularmente, en el momento de buscar ejemplos entre experimentos aleatorios y deterministas, encontré complicaciones en hacer dicha clasificación, ya que,algún experimento puede ser dual dependiendo del punto de vista, información y perspectiva relativa de los fenoómenos. Un pensamiento interesante reflexionado acerca de la aleatoriedad y el determinismo de nuestra existencia partió del hecho de pensar en que si tomáramos de punto de inicio cuando se creó el planeta tierra,

y en ese momento conocieramos las condiciones iniciales de la probabilidad que tuviéramos de existir como un todo en éste momento, seguramente estaríamos en un punto casi imposible, ya que por la infinidad de sucesos que pasaron desde ése momento hasta éste, sería imposible determinar nuestra existencia; por éste tipo de cuestiones, fue las que complicaron el análisis de determinar aleatoriedad o determinismo.
Se revisaron entonces símbolos importantes para las matemáticas como:

$$\begin{array}{ll} \forall & Para\,todo \\ \exists & Existe \\ ! & Operador\,factorial \end{array}$$



Clase 2

En la segunda clase se tuvo introducción a trabajos terminales, instalación , seguimiento, y algunos tópicos básicos de Jupyter, Atom , JUlia e Emacs.Se observó la dificultad de determinar si un experimento es determinista o nó, es algo que no tiene una definición exacta, se tomo entonces un fenómeno determinista el hecho de tener una sola posibilidad según las variables finitas, y aleatorio aquella que tiene varias, en las exposición se revisaron definiciones muy importantes tales como las probabilidades clásica y geométrica , referida la primera a grandes rasgos como casos favorables entre el espacio muestral o total de casos, y la geometríca, referida a áreas en un plano y la probabilidad de hallar ciertos puntos en un espacio.

Se revisaron también los 2 primeros axiomas de la probabilidad, dados como principalmente:

$P(E) \geq 0$ y la probabilidad del conjunto total Ω de un fenómeno es igual a 1: $P(\Omega) = 1$.

Clase 3

En ésta tercera clase se vió lo relvante a la instalación de software Root Cern. Se observó y se estudió lo relacionado a diagramas de árboly su forma que facilita la interpretación de problemas relacionados con decisiones, así experimentos que se pueden representar con ello, tal como el lanzamiento sucesivo de monedas y sus respectivas probabilidades.

Se revisaron también en una breve introducción las técnicas de conteo , sobre todo el principio conmutativo de la multiplicación , que as u vez se puede representar en cajones y diagramas de árbol. se empezó a revisar lo correspondiente a permutaciones y algunas leyes de conjuntos básicos:

La Unión se define como:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{1}$$

La intersección se define como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{2}$$

La diferencia entre conjuntos como:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \tag{3}$$

El complemento se define como:

$$\mathrm{A}^c = \{x \mid x \notin A\} \tag{4}$$

Inclusión de subset:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \rightarrow x \in B \tag{5}$$

Igualdad entre sets se establece como:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{6}$$

Algunas leyes muy útiles en el álgebra de conjuntos son por ejemplo:

Leyes de Idempotencia:

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A \tag{7}$$

Leyes Asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{8}$$

Leyes Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A \tag{9}$$

Leyes Distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup c) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{10}$$

Leyes de Identidad:

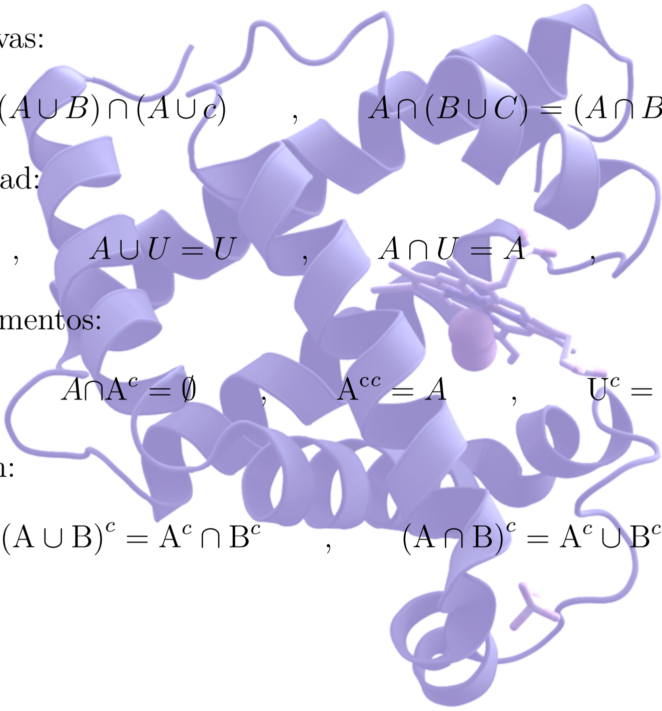
$$A \cup \emptyset = A \quad , \quad A \cup U = U \quad , \quad A \cap U = A \quad , \quad A \cap \emptyset = \emptyset \tag{11}$$

Leyes de complementos:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{A}^c = U \quad , \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c = \emptyset \quad , \quad \mathrm{A}^{cc} = A \quad , \quad \mathrm{U}^c = \emptyset \quad , \quad \emptyset^c = U \tag{12}$$

Leyes de Morgan:

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \quad , \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c \tag{13}$$



Clase 4

En la cuarta clase se empezó a platicar acerca del teorema del binomio, que es una proporción en el desarrollo de enésima potencia de un binomio.

De acuerdo con el teorema, es posible expandir la potencia en una suma que implica términos de la forma ax^by^a donde los exponentes b y c son números naturales con $b+c=n$, y el coeficiente a de cada término es un número entero positivo que depende de n y b. Cuando un exponente es cero, la correspondiente potencia es usualmente omitida del término. Por ejemplo, [31]:

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2 = \mathrm{x}^4 + 4\mathrm{x}^3 y + 6\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 + 4x\mathrm{y}^3 + \mathrm{y}^4 \tag{14}$$

El coeficiente a en los términos de $x^by^c - x^cy^b$ es conocido como el coeficiente binomial:

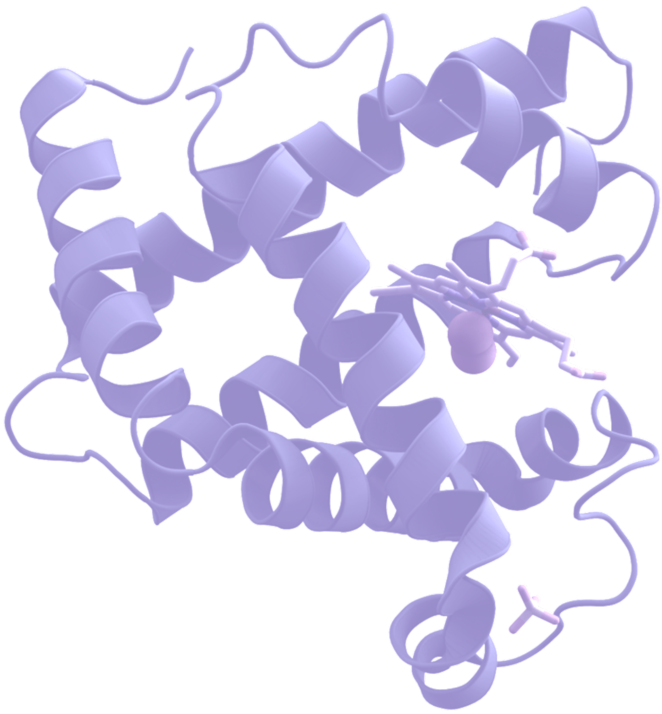
$$\binom{n}{b} \quad o \quad \binom{n}{c} \tag{15}$$

Este teorema establece: Usando la fórmula para calcular el valor del coeficiente binomial,se obtiene [31]:

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k \tag{16}$$

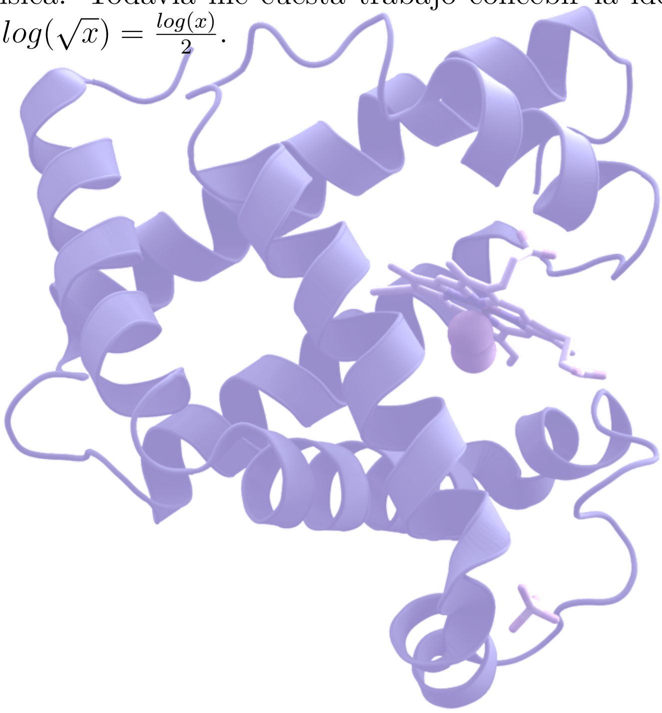
Donde el coeficiente binomial representa el número de formas de escoger k elementos a partir de un conjunto con n elementos. Usualmente el teorema del binomio se expresa en la siguiente variante [31]:

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \tag{17}$$



Clase 6

En ésta clase se analizó y se revisó lo referente a el cifrado, sus implicaciones y lo que conlleva su uso en diferentes casos,además se revisaron tópicos selectos de computación y física. Todavía me cuesta trabajo concebir la idea de cifrado sin desempaquetar. $log(\sqrt{x}) = \frac{log(x)}{2}$.



Clase 9

Propiedades binomiales

Los coeficientes binomiales tienen varias propiedades:

El coeficiente binomial se describe como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{18}$$

La identidad más útil que se usa en las demostraciones para las propiedades binomiales es:

$$x! = x(x-1)! \tag{19}$$

Propiedad recursiva:

Hay una fórmula recursiva para los coeficientes binomiales ,para todos los números enteros$n, k > 0$ de la siguiente manera:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \tag{20}$$

Aplicando la fórmula se demuestra que equivale a el binomio natural de n, k:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} = \tag{21}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \tag{22}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-k)(n-k-1)!]} + \frac{(n-1)!}{[k(k-1)!]\,(n-k-1)!} = \tag{23}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \tag{24}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n-k+k}{k(n-k)}\right) = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)k} = \tag{25}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)k!/(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)k!} \tag{26}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{27}$$

Propiedad de Simetría:
La simetría de los coeficientes binomiales ,para todos los números enteros$n, k > 0$ de la siguiente manera:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \tag{28}$$

Aplicando la fórmula se demuestra que equivale a el binomio natural de n, k:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} \tag{29}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{30}$$

Propiedad de la Adición:

La adición de los coeficientes binomiales ,para todos los números enteros$n, k > 0$ de la siguiente manera:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \tag{31}$$

Aplicando la fórmula se demuestra que equivale a el binomio natural de n, k:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[n-1-(k-1)]!} \tag{32}$$

$$\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \tag{33}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\left(\frac{1}{k(n-k-1)!} + \frac{1}{(n-k)!}\right) = \tag{34}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\left(\frac{(n-k)! + k(n-k-1)!}{k(n-k-1)!(n-k)!}\right) = \tag{35}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\left(\frac{(n-k-1)!(n-k) + k(n-k-1)!}{k(n-k-1)!(n-k)!}\right) = \tag{36}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\left(\frac{(n-k-1)!\,[(n-k)+k]}{(n-k-1)!(n-k)!k}\right) = \tag{37}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)!k}\right) = \tag{38}$$

$$\frac{(n-1)!n}{(k-1)!k!/(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{39}$$

Propiedad del multiconjunto o combinatoria con repetición

La fórmula general usada para calcular combinaciones con repetición , se deriva del caso particular de coeficientes binomiales para todos los números enteros$n, k > 0$ de la siguiente manera:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \tag{40}$$

Aplicando la fórmula se demuestra que equivale a el binomio natural de n, k:

$$\frac{[(k+(n-1)]!}{(n-1)![k+(n-1)-(n-1)]!} = \tag{41}$$

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k+n-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k} \tag{42}$$

Clase 9

Probabilidad condicional

Probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que también sucede otro evento B. La probabilidad condicional se escribe P(A|B).No tiene por qué haber una relación causal o temporal entre A y B. A puede preceder en el tiempo a B,puede sucederlo o pueden ocurrir simultáneamente. A puede causar B, viceversa o pueden no tener relación causal. Las relaciones causales o temporales son nociones que no pertenecen al ámbito de la probabilidad. Pueden desempeñar un papel o no dependiendo de la interpretación que se le dé a los eventos. El condicionamiento de probabilidades puede lograrse aplicando el teorema de Bayes .

Dado un espacio de probabilidad (Ω, f, P) y dos eventos (o sucesos) $A, B, \epsilon F$ con $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B está definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{43}$$

Partición

Una partición de un conjunto es una división del mismo en subconjuntos disjuntos no vacíos. Una partición de un conjunto es una división del mismo en pedazos separados y no vacíos. Esta división se representa mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo recubren. Una partición del conjunto A es una familia P de subconjuntos no vacíos de A, disjuntos dos a dos, cuya unión es A. Es decir, $P = \ A_{i:} i \epsilon I$, donde se cumple [63]:

1. Para cada $i \epsilon I, A_i \subseteq A \; y \; A_i \neq \emptyset$
2. Para cada par $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $U_{i \epsilon I} A_i = A$

El concepto de partición es equivalente al de relación de equivalencia: toda relación de equivalencia sobre un conjunto A define una partición de A, y viceversa. Cada elemento de la partición corresponde a una clase de equivalencia de la relación [63].

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A, vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Es decir, por ejemplo, que sabiendo la probabilidad de tener un dolor de cabeza dado que se tiene gripe, se podría saber la probabilidad de tener gripe si se tiene un dolor de cabeza.

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0). Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión [44]:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \tag{44}$$

donde:

$P(A_i)$ son las probabilidades a priori.
$P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis de A_i.
$P(A_i|B)$ son las probabilidades a posteriori.

Aveces:$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.

Clase 10

Caminante al azar en una dimensión

Se tiene el problema de que , a partir de una posición inicial x, se contarán los pasos que se darán ya sea hacia la izquierda n_2, o hacia la derecha n_1, de manera no determinista,en un principio, y considerando que sólo se mueve en una dimensión, es decir, izquierda o derecha, y que la zancada de los pasos es constante. Entonces en esa dimensión , se considera m la posición final con respecto a un número de pasos dado, si se termina en la posción inicial, se tomara $m = 0$, si se queda por la izquierda m será un número negativo, por el contrario, si se queda en el lado derecho será un número positivo. El número total de pasos será N.

Entonces se requiere calcular la probabilidad de $P_N(m)$, que quiere decir la probabilidad de que despúes de dar N pasos en m, de donde dicha posición final considerando el sistema en cuestión siempre es menor o igual que N y mayor o igual que -N.No hay un órden específico de cada paso, así que podemos denotar N como la suma de los pasos que se den a la izquierda (si se dan) más los pasos que se den a la derecha (si se dan)$N = n_1 + n_2$, se sabe entonces, que podemos calcular la posición final en función de los pasos que se dan a la izquierda y los que da a la derecha como $m = n_1 - n_2$.

Si $N = n_1 + n_2$,entonces $n_2 = N - n_1$, sustituyendo esta igualdad en la última tenemos: $m = n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1 = n_1 - N + n_1 = 2n_1 - N$. Si N es impar, los valores posibles de m también son impares; y si N es par, m también es par.

Con técnicas de conteo, estableciendo entonces la probabilidad de que de un paso p de que sea a la derecha, y con probabilidad q = 1 - p de que sea a la izquierda. La suposición fundamental es que los pasos sucesivos son estadísticamente independientes. Por lo tanto, sin importar los pasos anteriores, cada paso está caracterizado por las probabilidades p y q. Por el principio de multiplicación, se sabe que la probabilidad de que un evento A ocurra sucesivamente se representa como $AxAxA$... hasta n veces, lo que a su vez se presenta como : A^n para un evento que se repite n veces, entonces, se traslada a la probabilidad de que en ésta vez sea la probabilidad de dar un paso a la derecha p, y las veces que se repite el evento son el número de pasos de que se dan a la derecha n_1, quedando como : p^{n_1}, de la misma manera que para la probabilidad de dar n_2 pasos a la izquierda q se puede escribir como: q^{n_2}, combinando las 2 ecuaciones tenemos:

$$probabilidad\ de\ tomar\ una\ cierta\ ruta\ de\ pasos = p^{n_1}q^{n_2} \tag{45}$$

En el caso de ver el número de formas de dar éstos pasos es equivalente a buscar todas las posibles ordenaciones de pasos a la izquierda y pasos a la derecha , es decir todas las permutaciones , el número de posibilidades distintas para que el borracho llegue a la posición x , o lo que lo mismo que de n_1 pasos a la derecha y $n_2 = N - n_1$ pasos a la izquierda, no importando el orden, es el número del coeficiente binomial, que representa, para el caso de saber del total de pasos N que se dan, cuantas formas de dar n_1 pasos a la derecha existen, sin tomar en cuenta dicho órden (no se puede tomar en cuenta permutación por que no puede pasar que la última casilla de N, o el último paso, vaya primero que en el inicial y que a su vez cuente como diferente combinación de pasos), por lo que tenemos:

$$\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \tag{46}$$

Sin embargo, sabemos que $n_2 = N - n_1$, lo que a pesar de ser un problema de combinación sin repetición, el coeficiente binomial puede escribirse como:

$$\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!} \tag{47}$$

Entonces, para la probabilidad de que se de n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda consecutivamente denotado por:$p^{n_1}q^{n_2}$, se tiene que cualquiera de ellas tiene la misma probabilidad total, entonces la probabilidad total de que nuestro borracho llegue a m, que lo podemos reducir a la variable n_1 ,que representa que dé una cierta cantidad de pasos a la derecha (ya que la probabilidad de que de n_2 pasos a la izquierda es simplemente el complemento de la probabilidad de que de

n_1 pasos a la derecha para éste caso), y entonces la probabilidad de que dé el total de pasos N a la derecha es $P_N(n_1, n_2)$, obtenida de multiplicar la probabilidad de una de las posibilidades por el número de posibilidades o formas de dar n_1 pasos, correspondiente a la regla de multiplicación de probabilidad :

$$P_N(n_1, n_2) = Probabilidad\ de\ un\ evento = \tag{48}$$

$$(N\tilde{u}mero\ de\ posibilidades) * (Probabilidad\ de\ una\ combinaci\tilde{o}n\ final)$$

Ésto debido a que no se sabe cuantos pasos en realidad se dan, por lo que si se representa en un árbol podemos ver que la probabilidad de un suceso de pasos de N se obtiene multiplicando la probabilidad de tal evento o extremo de esa rama por todas las posibles acomodaciones que ocurran nos dará éste resultado.Juntando las anteriores ecuaciones podemos escribirlas como:

$$P_N(n_1, n_2) = p^{n_1} q^{n_2} \frac{N!}{n_1! n_2!} \tag{49}$$

Como estamos calculando la probabilidad de que dé un paso de N a la derecha , y en éste caso estamos dependiendo de dos variables, recordamos que podemos reducirlo a solo una porque: $n_2 = N - n_1$, entonces, la expresión anterior puede sólo referirse a la probabilidad de que de n_1 pasos a la derecha:

$$P_N(n_1) = p^{n_1} q^{N-n_1} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \tag{50}$$

La anterior expresión puede representarse con la distribución binomial, de los N pasos puede ser que ninguno fuera a la derecha $(n_1 = 0)$ o por el contrario, en el otro extremo de posibilidades, todos fueran a la derecha $(n_1 = N)$,por lo que n_1 puede valer 0,1,2..N, entonces, para poder representar la probabilidad de N pasos que se pueden dar a la derecha lo representamos como:

$$\sum_{n_1=0}^{N} p^{n_1} q^{N-n_1} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \tag{51}$$

La $P_N(n_1)$ está normalizada a 1, ya que se puede representar como:

$$\sum_{n_1=0}^{N} P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} p^{n_1} q^{N-n_1} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} = (p+q)^N = 1^N = 1 \tag{52}$$

$P_N(n_1)$ son los distintos términos del binomio , por eso a esta distribución de probabilidades $P(N)$ se le llama distribución binómica, también es conocida como distribución normal.

Si queremos obtener la probabilidad particular de que el borracho se encuentre en m después de dar N pasos dado como: $P_N(n_1) = P_N(m)$ (P denota probabilidad, mas nó la misma función).Se sabe entonces que :$m = n_1 - n_2$, $N = n_1 + n_2$,entonces:

$$n_2 = N - n_1 \to n_1 = m + n_2 = m + N - n_1 \to 2n_1 = m + N \tag{53}$$

$$\to n_1 = \frac{m+N}{2} \tag{54}$$

Sustituyendo esta relación en la anterior:

$$n_2 = N - n_1 = N - \frac{m+N}{2} = \frac{2N - (m+N)}{2} = \frac{2N - m - N}{2} = \frac{N-m}{2} \tag{55}$$

Si: $P_N(n_1) = P_N(m)$, $N - n_1 = n_2$, sustituimos en:

$$P_N(n_1) = p^{n_1} q^{N-n_1} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} = p^{n_1} q^{n_2} \frac{N!}{n_1! n_2!} \tag{56}$$

Que a su vez de las anteriores relaciones se tiene considerando $q = 1 - p$:

$$p^{(m+N)/2} (1-p)^{(N-m)/2} \frac{N!}{((m+N)/2)!((N-m)/2)!} \tag{57}$$

Ésta última expresión ya no depende de n_1, si no de la posición final m y p, cumpliendo que: $P_N(n_1) = P_N(m)$:

$$P_N(m) = p^{(m+N)/2}(1-p)^{(N-m)/2}\frac{N!}{((m+N)/2)!((N-m)/2)!} \tag{58}$$

Funciones de probabilidad y valores medios

Para el caso discreto sea u una variable tipo vector con M posiciones :$u_1, u_2, u_3...., u_M$. Cada posición puede tener su propia probabilidad para su valor ::$P(u_1), P(u_2), P(u_3)...., P(u_M)$, que depende claramente de la longitud de M , es decir, de la cantidad de posiciones y el peso o valor de cada posición. Para obtener el valor medio de dicho vector, así como en medias aritméticas se define como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{59}$$

Trasladando el mismo procedimiento para el vector y que u pueda asumir M valores discretos y tomando en cuenta el peso de las probabilidades así como el valor que cada posición que guarda, ahora se expresa como:

$$\bar{u} = \frac{P(u_1)u_1 + P(u_2)u_2 + P(u_3)u_3 + ..., P(u_M)u_M}{P(u_1) + P(u_2) + P(u_3) + P(u_M)} \tag{60}$$

En notación de sumatoria como en la media aritmética, se puede representar como:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)} \tag{61}$$

Donde normalizando las probabilidades se tiene:

$$\sum_{i=1}^{M} P(u_i) = 1 \tag{62}$$

Para el caso de valores discretos de un vector. Sin embargo, si queremos trasladar el mismo principio pero ahora con funciones, donde cada posición del vector u_i

tiene un valor de la función evaluada en $f(u_i)$, el valor medio de la función se expresa como la anterior de manera que :

$$\overline{f(u)} = \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i)}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)} \tag{63}$$

Recordando la normalización a 1 del denominador, podemos simplificarla como:

$$\overline{f(u)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i) \tag{64}$$

Que representa el valor medio de una función que en cada posición u_i tiene un peso o una probabilidad de $P(u_i$ evaluada cada posición en $f(u_i)$ hasta el tamaño del vector M.

Si consideramos 2 funciones que se evalúan con el mismo vector u_i,entonces $f(u_i)$ y $g(u_i)$; cumplen la propiedad de la superposición, ya que si se suman podemos obtener:

$$h(u_i) = f(u_i) + g(u_i) \tag{65}$$

Entonces el valor medio de la función $h(u_i)$ puede expresarse como:

$$\overline{h(u)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i) h(u_i) \tag{66}$$

Sin embargo, sabemos que por las propiedades de álgebra lineal :$h(u_i) = f(u_i) + g(u_i)$, y podemos entonces sustituirlo en la anterior relación de manera que:

$$\overline{h(u_i)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)(f(u_i) + g(u_i)) \tag{67}$$

Por la propiedad distributiva se puede expresar lo anterior como:

$$\overline{h(u_i)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)f(u_i) + \sum_{i=1}^{M} P(u_i)g(u_i) \tag{68}$$

Pero sabemos que las anteriores expresiones corresponde a los valores medios de cada función y ésta a su vez se puede expresar como:

$$\overline{h(u_i)} = \overline{f(u_i)} + \overline{g(u_i)} \tag{69}$$

Donde sigue siendo :$h(u_i) = f(u_i) + g(u_i)$.Por otro lado, por la propiedad de álgebra lineal de homogeneidad, si tenemos una constante que multiplique la función $f(u_i)$ tal que $\alpha f(u_i)$, entonces su media o valor medio estará definida como:

$$\overline{\alpha f(u_i)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\alpha f(u_i) \tag{70}$$

Por la propiedad de la sumatoria, se puede sacar a α del operador, entonces tenemos:

$$\overline{\alpha f(u_i)} = \alpha \sum_{i=1}^{M} P(u_i)f(u_i) \tag{71}$$

Que es entonces:

$$\overline{\alpha f(u_i)} = \alpha \overline{f(u_i)} \tag{72}$$

Clase 14

Variable aleatoria

Una variable aleatoria es aquella que asigna un número real (generalmente natural) a eventos posibles de un espacio muestral , generalmente asociados con la frecuencia de dicho evento [67] o bien, a los posibles valores num éricos que pueda tomar un evento . Debido a la naturaleza de los eventos, una variable aleatoria puede ser discreta (valores únicos) o aleatoria(rango de valores), normalmente denotado por una letra mayúscula como X.Por ejemplo, si se lanzan 2 dados a la vez, el espacio muestral Ω puede representarse como una variable aleatoria X a la suma de dichas caras como $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, dónde la caracter ística más importante de estos valores sea que la variable aleatoria tenga cierta probabilidad de tomarlo.
Sea la variable aleatoria discreta $X = \{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ con el número de elementos que puede tomar X finito ordenados de menor a mayor magnitud, se define la distribución de probabilidad de X como el conjunto de pares de cada x_i asignado un valor de probabilidad de que la variable aleatoria tome ese valor : (x_i, p_i), donde $p_i = P(X = x_i)$, tal que la suma de todas las probabilidades de todos los elementos que puede tomar X sea 1 [4]. Entonces la función de probabilidad o distribución de probabilidad se escribe como [67]:

$$P(X = x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, ..n \tag{73}$$

Las principales características que cumple una función de probabilidad discreta para todos los valores posibles de X son:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$
2. $\sum f(x) = 1$

Clase 15

Funciones de Distribución acumulada

La función de distribución acumulada para una variable aleatoria X se define como [67]:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x}^{x} f(u) \tag{74}$$

Donde X está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f(x_1) + \ldots.. + f(x_n) & x_n \leq x < \infty \end{cases} \tag{75}$$

Si la variable aleatoria es continua, hay infinitos valores posibles de la variable y entra cada dos de ellos se podrían definir infinitos valores. En estas condiciones no es posible deducir la probabilidad de un valor puntual de la variable como se puede hacer en el caso de las variables discretas. Pero sí es posible calcular la probabilidad entre 2 valores diferentes. Sea X una variable aleatoria continua, se llama función de densidad y se representa como $f(x)$ tal que cualquier intervalo que observamos se verifica[4]:

$$\forall A \qquad P(X \epsilon A) = \int f(x)dx \tag{76}$$

Las principales características que cumple dicha función, las cuales la acreditan como función de densidad de probabilidad son [67]:

1.$f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3.$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

La función de distribución acumulada para variables aleatorias continuas se define como [67]:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds \tag{77}$$

Para: $-\infty \leq x \leq \infty$, la cual cumple las siguientes propiedades [4]:

1.$F(-\infty) = 0$

2.$F(\infty) = 1$

3.$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

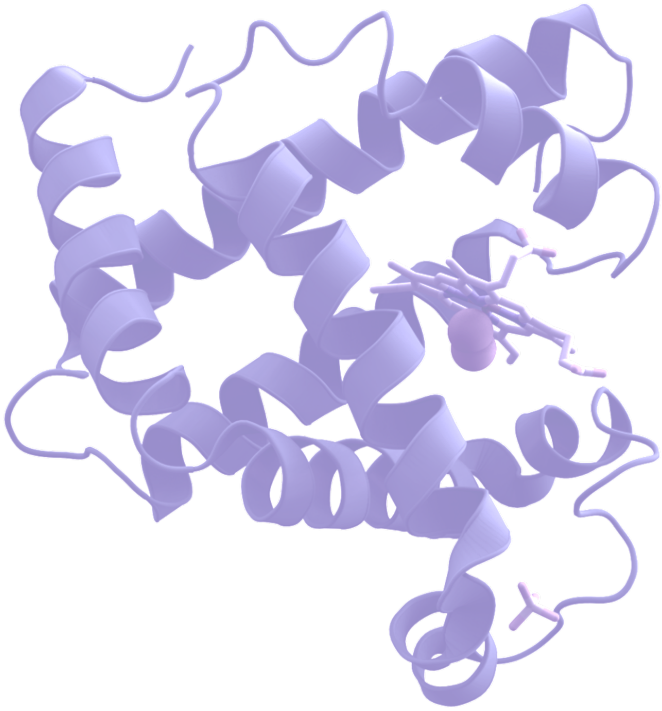
4.$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

También , es posible sea X una variable aleatoria continua , con una función de distribución de probabilidad $f(x)$ y una función de distribución acumulada $F(x)$, para cualquier posible valor que pueda tomar X como x , la probabilidad se puede expresar como:

$$P(X > x) = 1 - F(x); \qquad P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{78}$$

Y para un intervalo de probabilidades, que es lo más adecuado para éstos casos, entre las posibles variables x_1 y x_2 , de manera que $x_2 > x_1$ se puede escribir como

[4] arriba.



Clase 16

Esperanza Matemática

Llamada también valor esperado de una variable aleatoria discreta o continua . Para el caso discreto de X que sea posible que tome los valores $x_1, x_2, x_3....x_n$ se define como $E(X)$ [1]:

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ..x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \quad (79)$$

Recordemos que antes definimos que una función de distribución de probabilidad para una variable discreta como: $P(X = x_i = f(x_i)$, entonces podemos también denotarlo como:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + ... + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \quad (80)$$

Para una variable aleatoria continua X que tiene una función de densidad $f(x)$, la esperanza de X o media de X continua se define como:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (81)$$

La media o esperanza de X da un valor típico o promedio de los valores de X y por esta razón también se le llama medida de centralización [67].

La varianza de un valor de la variable aleatoria X es un número positivo ó 0 dada por la expresión [67]:

$$Var(X) = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sigma_X^2 \quad (82)$$

Dónde μ_x es el valor esperado o la media de X, de aquí, se desprende el concepto de desviación típica σ_X del valor esperado de la variable aleatoria X, la cúal es la raíz cuadrada de la varianza de se valor denotada como:

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{E\left[(X - \mu_X)^2\right]} \tag{83}$$

Para una variable aleatoria discreta donde cada posible valor de X tiene una función de probabilidad $f(x)$ la varianza discreta se escribe como:

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 f(x_i) \tag{84}$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces la varianza es:

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 f(x)dx \tag{85}$$

Así la desviación típica se expresa como : $\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$.

Clase 17

Variables aleatorias normalizadas

Si X es una variable aleatoria cuya media μ_X y desviación típica $\sigma_X > 0$, se realiza un procedimiento llamado normalización, el cúal consiste en acotar los valores de las medidas de dispersión de manera que sea mucho más fácil clasificar y ordenar los datos que de la variable surja y compararlos con otros resultados, de manera que se crea una nueva variable aleatoria $X*$ de la forma:

$$X* = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{86}$$

Las propiedades más importantes que debe de cumplir dicha normalización es hacer que ahora $E(X*) = 0$ y $\sigma_X^2 = 1$.

Clase 18

Distribución Conjunta de 2 variables aleatorias

Sean X e Y dos variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad común , la función de distribución conjunta , o simplemente distribución conjunta, de X e Y ,se define como [4]:

$$f(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{87}$$

Por lo anterior $f(x, y)$ es la probabilidad de que el punto (X, Y), gráficamente, pertenezca al cuadrante que queda abajo y a la izquierda del punto (x, y), incluyendo el borde, sin embargo, como en los casos de una sola variable, éstos tienen evidentemente límites en donde será probable encontrar el valor de las variables aleatorias, en donde se define entonces:

$$f(x, y) = P(a < X \leq b, c < Y \leq d) \tag{88}$$

Su equivalente en el plano puede representarse como:

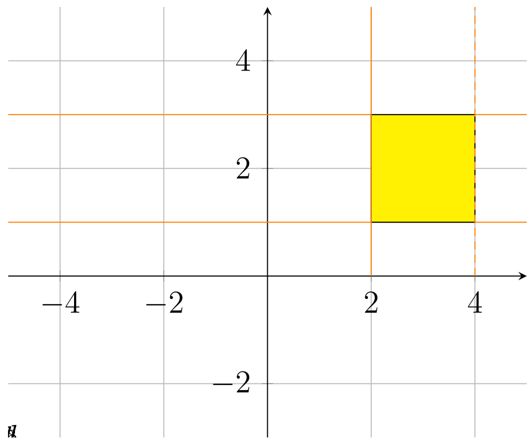


Figure 1: Equivalente de 2 variables en el plano

.

Para el caso discreto tenemos la función masa de probabilidad conjunta X, Y, como:

$$1 \leq P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \leq 0 \tag{89}$$

Entonces definimos la función de distribución conjunta discreta como:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} P(x_i, y_j) \tag{90}$$

Para el caso continuo tenemos la función masa de probabilidad conjunta X, Y como: $f(x, y)$, y la función de distribución conjunta continua se define como [4]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \tag{91}$$

Si en particular X se acota por a, b, y Y por c, d, tenemos:

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) dx dy \tag{92}$$

Si X, Y son dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(x,y)$, las medias o esperanzas de X,Y son en caso continuo:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy \tag{93}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy \tag{94}$$

Para cada variable las varianzas de la función de densidad conjunta:

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f(x,y,)dxdy \tag{95}$$

$$\sigma_Y^2 = E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2 f(x,y,)dxdy \tag{96}$$

En el caso de de 2 variables aleatorias dependientes, existe la covarianza, que relaciona la varianción de éstas 2 variables, su expresión se denota para el caso continuo:

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \tag{97}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y f(x,y)dxdy \tag{98}$$

Para variables aleatorias discretas podemos escribir las medias de X,Y como:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j} x_i f(x_i,y_j) \tag{99}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j} y_i f(x_i,y_j) \tag{100}$$

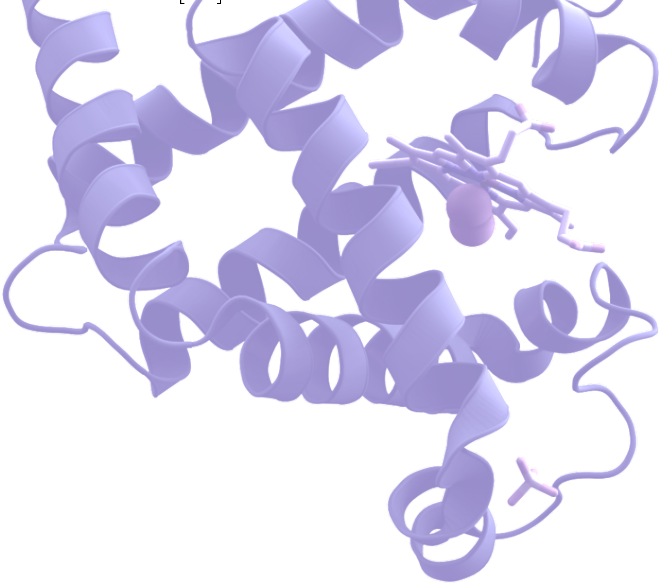
Y entonces su covarianza puede expresarse como:

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j}(x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)f(x,y) \tag{101}$$

Si X y Y son independientes entonces $Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = 0$. De o otra manera si son dependientes tenderá a : $Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = \sigma_X\sigma_Y$, la medida de dependencia de las variables X y Y se da por el coeficiente de correlación:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{102}$$

ρ puede tomar valores desde -1 a 1, donde el valor 0 representa que las variables X y Y no están relacionadas [67]



Clase 19

Otras medidas de centralización

Moda

La moda es el valor propio que puede tomar una variable aleatoria que más se repite en el experimento o mayor frecuencia, o en otras palabras, tiene la mayor probabilidad de ocurrir. Algunas veces tenemos dos, tres o más valores que tienen relativamente grandes probabilidades de ocurrencia, en tales casos se dice que la distribución es bimodal, trimodal o multimodal respectivamente [67].

Mediana

La mediana es el valor de x para el cual $P(X \leq x) = P(X \geq x) = 1/2 = 0.5$.En el caso de una distribución continua la mediana corresponde a la ordenada que separa una curva de densidad en dos partes que tienen áreas iguales de 0.5 cada una. En el caso de una distribución discreta puede no existir una mediana única cuando se el número de la longitud de la variable aleatoria es par, donde suele tomar la mediana el promedio de los los valores centrales [67].

Con frecuencia es conveniente subdividir el área bajo una curva de densidad empleando ordenadas de manera que el área a la izquierda de la ordenada sea algún porcentaje del área unidad total. Los valores que corresponden a tales áreas se llaman percentiles [67].

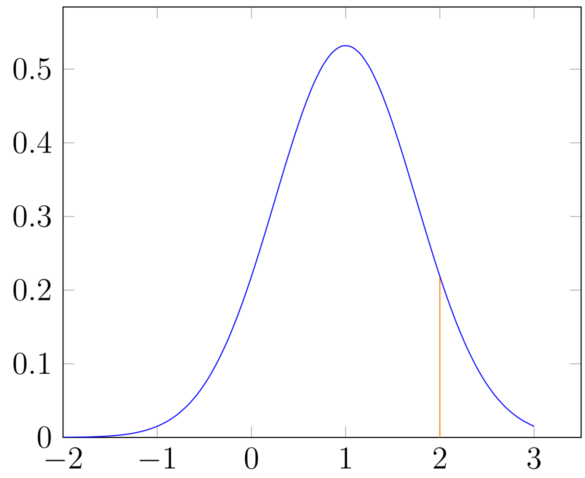
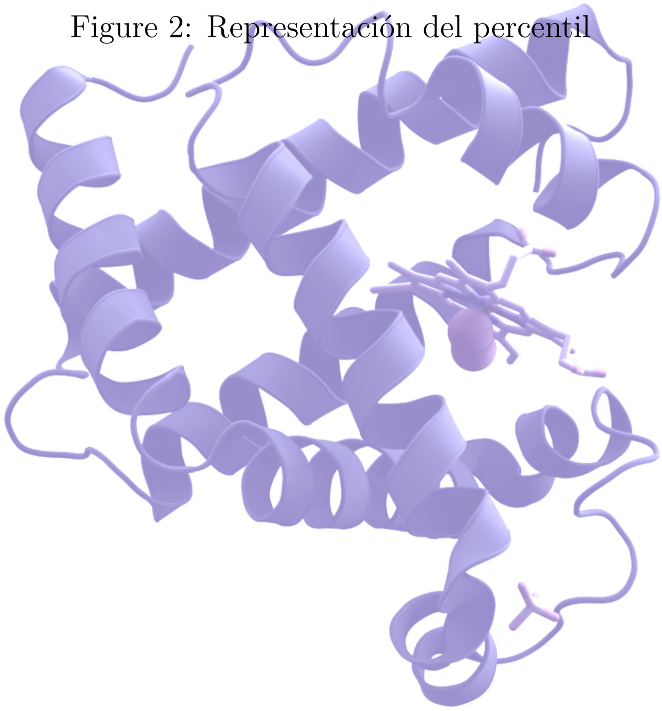


Figure 2: Representación del percentil



Clase 20

Coeficiente de correlación de Perason

El coeficiente de correlación de Pearson es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, la correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables, también se define como un índice que puede utilizarse para medir el grado de relación de dos variables siempre y cuando ambas sean cuantitativas [77].

De manera análoga podemos calcular este coeficiente sobre un estadístico muestral, denotado comor_{xy} a:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\acute{x}\acute{y}}{(n-1)s_x s_y} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} \tag{103}$$

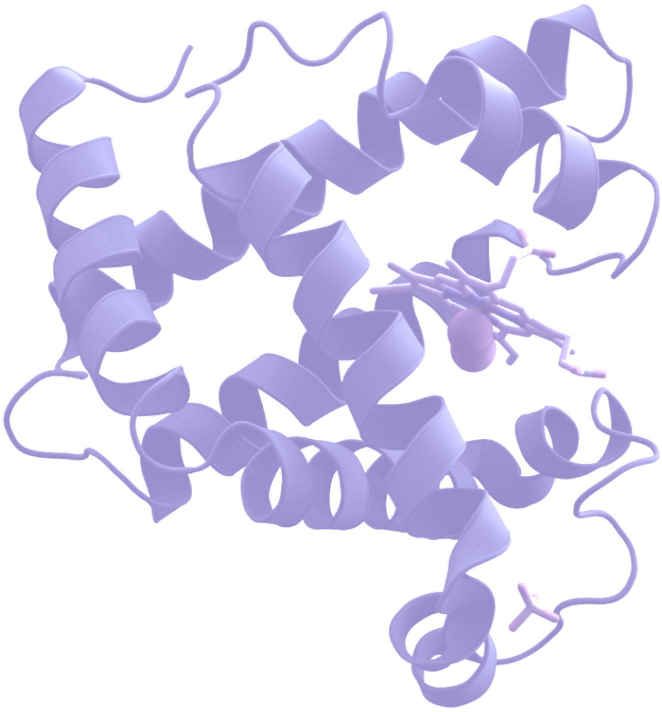
La interpretación del valor del índice de correlación varía en el intervalo

$$-1, 1$$

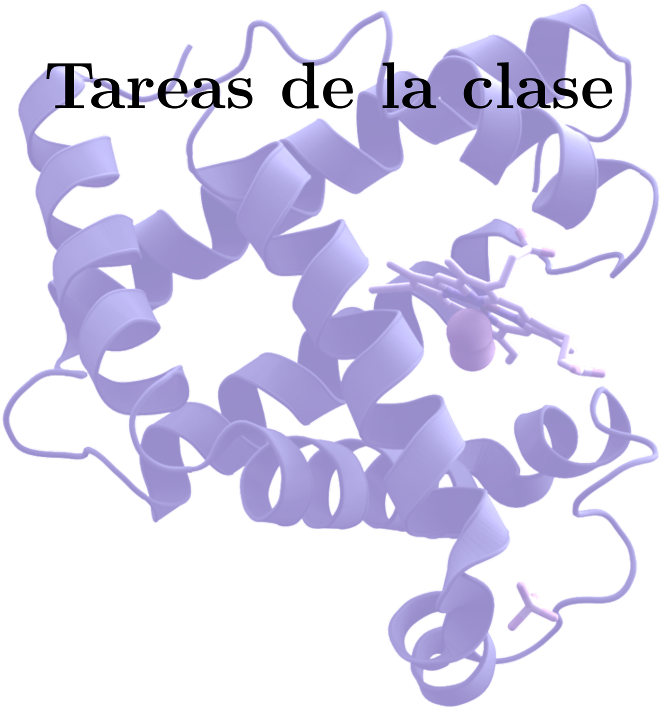
indicando el signo el sentido de la relación:

- Si $r = 1$, existe una correlación positiva perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante.
- Si $0 < r < 1$, existe una correlación positiva.
- Si $r = 0$, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes, ya que pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.

- Si $-1 < r < 0$, existe una correlación negativa.
- Si $r = -1$, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante [77].



Tareas de la clase



Tarea 1

Palabras clave

Suerte
Resultado favorable para un suceso poco probable. Un curso o una serie de tales acontecimientos considerados como algo que ocurre por casualidad; oportunidad; destino; fortuna; a menudo, uno de habitual o fortuna característica [9].

Coincidencia
Una coincidencia expresa una semejanza entre dos partes.Un acontecimiento imprevisible, algo inesperado y que tiene un componente poco probable en un experimento que no se puede determinar la exactitud del resultado [18].

Aleatoriedad o Azar
Es un fenómeno que ocurre cuando existe una serie numérica que no puede obtenerse mediante un algoritmo de manera exacta. Es un sistema indeterminista no se puede determinar de antemano cuál será el suceso siguiente. Existe el azar ontológico que es aquel que forma parte del ser y donde hay procesos que son irreductiblemente aleatorios y espontáeos.El resultado de todo suceso aleatorio no puede determinarse en ningún caso antes de que este se produzca. [11]

Incertidumbre
La incertidumbre refiere la duda o perplejidad que sobre un asunto o cuestión que se tiene. Un estado por lo general dominado por la duda y que se relaciona con el enfrentamiento de un fenómeno aleatorio [9].

Riesgo
En ciertas ramas se denomina riesgo a la probabilidad de ocurrencia de un evento,

típicamente adverso a lo que esperamos o necesitamos de evento determinado, en medicina por ejemplo, se tienen muchos significados atribuidos al riesgo, como el epidemiológico, de morbilidad, de mortalidad, etc [78].

Duda

Estado de quien no está seguro de una cosa o no se decide entre dos o más posibilidades de cierto evento, relacionado mucho con la incertidumbre.Escepticismo metódico que anima a considerar escrupulosamente todos los detalles antes de decidirse a expresar un juicio sobre cualquier asunto [18].

Fortuna

Muy asociada con la suerte, representa un resultado favorable o deseado relativamente, de un fenómeno aleatorio cuya probabilidad de que el evento ocurra es menor a la de que ocurra el evento contrario o adverso a lo esperado [9].

Oportunidad

Se dice que la probabilidad son las matemáticas de la oportunidad, por lo que, la oportunidad puede referirse a la presencia de un fenómeno aleatorio en la cúal se espera ya sea uno u otro resultado [58] .

Tipos de experimentos

Ensayos determinista

Un experimento es determinista cuando, realizado en las mismas condiciones, da los mismos resultados, se puede predecir lo que va a ocurrir.Por ejemplo: Si hoy es Martes, el siguiente día será Miércoles, si un número natural es par, el siguiente será impar. La mayoría de los juegos de estrategia son experimentos deterministas [11].

Experimentos aleatorios

Un experimento o fenómeno es aleatorio cuando no se puede predecir lo que va a ocurrir, incluso cuando se realiza en las mismas condiciones los resultados pueden ser distintos.Por ejemplo: El clima, lanzar un dado, una moneda, el próximo sorteo de lotería de Navidad, etc[11].

Ejemplos de experimentos aleatorios

1. La hora en que un camión pase por cierta comunidad.
2. El juego del Domino.

3. Extracción de una carta en una baraja.
4. El estado de una puerta (abierto o cerrada).
5. El año en que nació la cerveza.
6. El resultado de un partido de fútbol.
7. La posición o lugar que ocupa alguna partícula elemental.
8. Probabilidad de ver un cierto cometa.
9. Saber dónde caerá un rayo.
10. Saber quién ganará la lotería. [56].

Ejemplos de experimentos deterministas

1. Cálculo de la corriente de un conductor.
2. La aseveridad de una que una especie tenga crías de su misma especie.
3. Cálculo de energías de un sistema
4. Probabilidad de tener un número impar que tenga "1" en las unidades.
5. El hecho de morir.
6. Estimar la dirección de un rayo de luz.
7. No superar la velocidad de la luz para la masa.
8. El ciclo del día y la noche.
9. Saber el año en que nacío.
10. La dirección de un objeto que cae al suelo.

Tipos de probabilidad

Probabilidad clásica

En éste tipo de probabilidad suele usarse espacios de muestreo asignados a cada muestra para determinar dicha probabilidad numérica que un evento E ocurra. Dada por la siguiente expresión [58].

$$P(E) = \frac{Número\, de\, resultados\, contenidos\, en\, el\, evento\, E}{Número\, total\, de\, resultados\, en\, los\, espacios\, de\, muestreo} \tag{104}$$

Ejemplo:Se tira una moneda al aire, ¿Cúal es la probabilidad de que la moneda caiga con la cara hacia arriba?
Solución:
Los posibles espacios de muestreo para éste experimento son 2, que caiga ya sea cara c o ya sea cruz x, a menudo se representan con la letra Ω para denotar dicho conjunto.Nos interesa saber la probabilidad del evento de un sólo espacio, que en éste caso sea cara, de entre los posibles espacios posibles, así se tiene [58] :

$$\Omega = \{c, x\} \tag{105}$$

$$P(E) = \frac{\Omega(c)}{\Omega(c) + \Omega(x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \tag{106}$$

Probabilidad empírica
En éste caso la probabilidad usa distribución de frecuencias en lugar de espacios de muestreo ó en función de la repetitibilidad de un evento en un evento en un determinado experimento, generalmente definida como [11].

$$P(E) = \frac{Frecuencia\, del\, evento\, E}{Número\, total\, de\, frecuencias\, los\, eventos\, del\, experimento} \tag{107}$$

Ejemplo:
Una clase de estudiantes está formada por 4 estudiantes de primero, 8 de segundo, 6 de tercero y 7 de cuarto semestre, como se muestra [11]:

Semestre	Frecuencia
Primero	4
Segundo	8
Tercero	6
Cuarto	7
Total	25

Table 1: Tabla de frecuencias de los alumnos en un grupo.

¿Cúal es la probabilidad de seleccionar a un alumno de tercero aleatoriamente del grupo?

Solución:
Ya que en el grupo hay 6 alumnos de tercero de un total de 25, se toman a los alumnos como el número de repeticiones o de frecuencias que aparecen en un evento dado, en éste caso será la probabilidad de que un alumno sea seleccionado al azar y sea de tercer semestre, así que se tiene [11]:

$$P(E) = \frac{frecuencia\, del\, evento\, E}{Suma\, de\, todas\, las\, frecuencias\, del\, experimento} = \tag{108}$$

$$\frac{6}{4+8+6+7} = \frac{6}{25} \tag{109}$$

Tipos de frecuencias

1. Frecuencias absoluta:
   La frecuencia absoluta es el número de veces que aparece un determinado valor en un estudio. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos[58] :

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_n \tag{110}$$

2. Frecuencia relativa:
   La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1 [58]:

$$F_r = \frac{F}{n} \tag{111}$$

3. Frecuencia acumulada:
   La frecuencia acumulada es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

Probabilidad subjetiva
No es una probabilidad basada en estimaciones calculadas con un procedimiento, si no más bien en opiniones subjetivas o información inexacta. Ejemplo: Un conocedor de deportes asegura que hay un 30% de probabilidad que los Steelers de

Pittsburg ganen el Super Bowl la siguiente temporada. [58]

Probabilidad geométrica

Describe la probabilidad de hallar algún elemento geométrico , siendo el más elemental un punto, en algúna región del plano, por ejemplo, la probabilidad de encontrar el área de un cuadrado A dentro de otro cuadrado con área B dónde $B = 4A$ es [11]
:

$$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(B)} = \frac{1}{4} \tag{112}$$

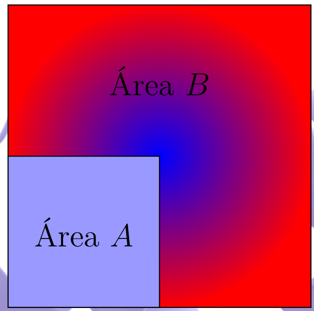


Figure 3: Área de A lila correspondiente de 0.25 proporcional a B del área roja - azul.

Probabilidad axiomática

Referida a 3 axiomas principales donde haya un espacio muestral definido, una clase de eventos y una función de probabilidad de valores reales $P(E)$ del evento E [11]:

1. Primer axioma:
   La probabilidad de un suceso E es un número real mayor o igual que 0.La probabilidad de un suceso es un número positivo o nulo [11].

$$P(E) \geq 0 \tag{113}$$

2. Segundo Axioma:
   La probabilidad del conjunto total Ω de un fenómeno es igual a 1. Ω representa todas las posibles alternativas y se denomina suceso seguro[11].

$$P(\Omega) = 1 \tag{114}$$

3. Tercer axioma:
   Si E_1, E_2,En; son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces se puede calcular la probabilidad de un suceso compuesto de varias alternativas mutuamente excluyentes sumando las probabilidades de sus componentes: [11]

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E2) \tag{115}$$

   Y si no son mutuamente excluyentes:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{116}$$

Principio de la Pichonera o Palomar

Establece que si k y n son números positivos , k es el número de espacios o palomares dónde se colocan las palomas y n el número de palomas que se distribuyen en los palomeros k, si $n > k$. Entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.Por ejemplo, en un grupo de 366 personas, debe haber por lo menos dos con el mismo cumpleaños debido a que solo hay 365 posibles días en los cuales cumplir años, o ya sea un matrimonio que tiene 2 hijos, un varón y una niña, y esperan tener al tercero, el cúal seguro tendrá el sexo de alguno de los 2 hijos actuales [58].

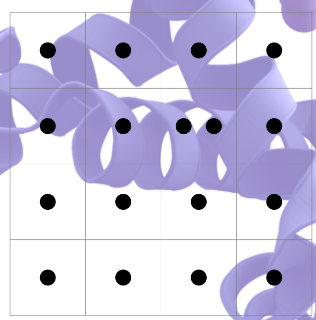


Figure 4: Teoría del palomar, dónde los palomares k=16 y las palomas son n=17.

Tarea 2

Función Gamma

Introducida por primera vez por el matemático Leonhard Euler con el objetivo de generalizar la función factorial a valores no enteros. La función gamma completa,$\Gamma(n)$, es definida como una extensión de la función factorial de argumentos de números complejos y reales [35]:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{117}$$

Euler introdujo una función analítica la cual tiene la propiedad de interpolar el factorial cada vez que el argumento de la función sea un entero, de aquí se dedujo la siguiente ecuación funcional [35]:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{118}$$

Ésta ecuación está definida para $z = 0$ donde $z \in \mathbb{R}$ y para $z > 0$, además , la relación que se crea entonces es que $z!$ es igual a la siguiente expresión [36]:

$$z! = \Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{t}^z \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{119}$$

Fórmula de Stirling

La aproximación de dicha fórmula se logra mediante la función Gamma anterior y su desarrollo, aplicando primero 2 cambios de variable, el primero se hace $t = zn$, y el segundo $n = 1 + s/\sqrt{z}$ correspondiente, obteniendo[36]:

$$\Gamma(z+1) = \mathrm{z}^{z}\sqrt{z}\int_{-\sqrt{z}}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{z}}}\right)^{z}\mathrm{e}^{-z-s\sqrt{z}}\,\mathrm{d}s \tag{120}$$

Que és igual a:

$$\Gamma(z+1) = \mathrm{z}^{z}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{z}\int_{-\sqrt{z}}^{\infty}\mathrm{e}^{zln\left(1+\frac{s}{\sqrt{z}}\right)-s\sqrt{z}}\,\mathrm{d}s \tag{121}$$

Teniendo en cuenta la serie de Taylor del logaritmo natural dada como [36]:

$$ln(1+x) = x - \sum_{i=2}^{k}\frac{\mathrm{x}^{i}}{i} \tag{122}$$

el exponente en el interior de la integral se puede escribir como [36]:

$$f(z) = -sz\sqrt{z}\,ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{z}}\right) = -sz\sqrt{z}\left(\frac{s}{\sqrt{z}} - \sum_{i=2}^{k}\frac{\left(\frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{z}}}\right)^{i}}{i}\right) \tag{123}$$

$$f(z) = -\frac{\mathrm{s}^2}{2} + \frac{\mathrm{s}^3}{3\sqrt{z}} - \frac{\mathrm{s}^4}{4z} + ... \tag{124}$$

Paticularmente ésta serie adquiere simpleza cuando se le aplica a la función de z un límite que tienda al infinito [36]:

$$f(z) = \lim_{z\to\infty} -\frac{\mathrm{s}^2}{2} + \frac{\mathrm{s}^3}{3\sqrt{z}} - \frac{\mathrm{s}^4}{4z} + ... = -\frac{\mathrm{s}^2}{2} \tag{125}$$

Aplicando ésto en la función Gamma de la ecuación (121), se verá significativamente reducida al aplicar el límite en la integración [36]:

$$f(z) = \lim_{z\to\infty}\Gamma(z+1) = \mathrm{z}^{z}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{z}\lim_{z\to\infty}\int_{-\sqrt{z}}^{\infty}\mathrm{e}^{zln\left(1+\frac{s}{\sqrt{z}}\right)-s\sqrt{z}}\,\mathrm{d}s = \mathrm{z}^{z}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\,\pi\,z} \tag{126}$$

La fórmula de Stirling permite obtener una aproximación del factorial de un número "grande". La aproximación es más precisa cuanto mayor sea el número cuyo factorial queremos calcular.Ésta aproximación es bastante buena, a menudo, para aumentar la precisión se sulen añadir una serie de factores expresados a la potencia exponencial,sin embargo la mayoría de sus aplicaciones suele usar sólo la ecuación(126) [48], por ejemplo, si se desea calcular el factorial del número 10 se tiene:

$$10! = f(10) \approx f(z) = \mathrm{z}^{z}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\,\pi\,z} = 10^{10}\mathrm{e}^{-10}\sqrt{2\,\pi\,10} \approx 3,598,700 \approx 3,628,800 \tag{127}$$

El cúal resulta una aproximación del número.

Refutación del último teorema de Fermat en los Simpson

En un episodio de los Simpsons, Homero entra a un mundo 3D (donde cae finalmente a un agujero negro), entre los objetos que aparecen de fondo está escrita la ecuación [19]:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \tag{128}$$

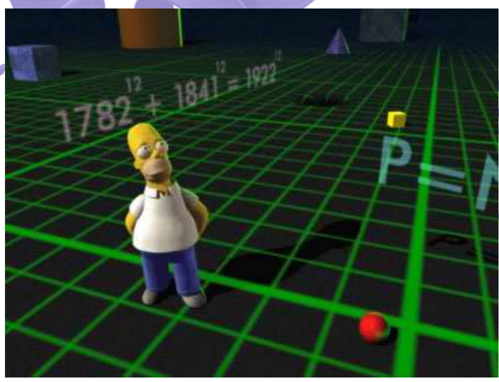


Figure 5: Homero en dicho capítulo.

Ésta ecuación corresponde a una contradicción del último teorema de Fermat, el cúal establece que para un exponente entero $k > 2$, no existen enteros x, y, z tales que[19]:

$$\mathrm{x}^{k} + \mathrm{y}^{k} = \mathrm{z}^{k} \tag{129}$$

Ésta ecuación presenta cierta trampa, ya que, si se escribe ambos lados de esta ecuación (128) en una calculadora científica se obtiene el mismo resultado, lo que se debe a la forma en que éstas se aproximan, ya que cada término posee 40 dígitos y la diferencia aparece en el décimo dígito. Dicha ecuación no podría estar correcta, ya que la suma de un número par con uno impar da impar.Haciendo las operaciones individuales, podemos observar: [19].

$$1782^{12} + 1841^{12} = 25412102586..... \tag{130}$$

Para un cálculo computado directo se tiene:

$$1922^{12} = 25412102593..... \tag{131}$$

Corresponden las primeras 10 cifras, sin embargo, el método de aproximación redonda la cantidad después de dichas cifras, por lo que, no es posible establecer dicha igualdad.

Técnicas de conteo

El principio fundamental en el proceso de contar ofrece un método general para contar el número de posibles arreglos de objetos dentro de un sólo conjunto o entre varios conjuntos. Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar [32].

Principio de la multiplicación
El principio multiplicativo implica que si hay un fenómeno el cúal pueda ser expresado en n pasos,y cada uno de los pasos de la actividad sean llevados a cabo uno tras otro, entonces el total de maneras distintas en que puede suceder el evento es igual al producto de los n pasos ó n maneras totales k [32]:

$$Maneras\,Totales = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 .... \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \tag{132}$$

Principio de la Adición
Un evento el cuál tiene formas alternativas para ser realizado, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de m_1 maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de m_2 maneras o formas y la última de las alternativas puede

ser realizada de m_k maneras o formas ,entonces el total de maneras es la suma de todas las maneras hasta k maneras [32]:

$$Maneras\,Totales = m_1 + m_2 + m_3 .... + m_k = \sum_{i=1}^{k} m_i \tag{133}$$

Ejemplos

- ¿ Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con cinco consonantes y tres vocales de modo que cada palabra comience y termine en consonante [32] ?
  Utilizando la regla de producto se propone de la siguiente manera:

$$\frac{C}{5}\frac{V}{3},\frac{C}{4} \tag{134}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \tag{135}$$

- Una biblioteca tiene 40 libros de historia y 50 de filosofía. Si un estudiante quiere aprender acerca de alguno de estos dos temas, por la regla de la suma puede elegir entre $40 + 50 = 90$ libros.(Nota: el estudiante no quiere estudiar historia y filosofía, sino historia o filosofía [32]).

Permutaciones y Combinaciones

Permutaciones y factorial

Suponiendo que se requiere determinar el número de diferentes maneras en las que se pueden acomodar las letras A,B, y C,se encuentran las siguientes 6 posibilidades: ABC ACB BAC BCA CAB CBA [70].
Si ahora se quiere determinar o mismo pero para las 4 letras A,B,C, y D, o más aún, para las n letras, resulta notorio la dificultad de la tarea por enliztar las posibilidades, así que utilizando el principio de la multiplicación , y considerando que sucesivamente que se coloque una letra en la primera posición para el ejemplo de las 4 letras,entonces luego el siguiente espacio habrá 3 letras, para el tercer espacio 2 y para el último la letra restante, las posibilidades son [70]:

$$(4)(3)(2)(1) = 24 \tag{136}$$

Suponiendo entonces n objetos que se orden de la primera a la n posición y se cuentan las formas en que éstos pueden ser contados, hay n elecciones para la primera posición n-1 para la segunda, n-2 para la tercera hasta el final de las posiciones de los objetos cuando sólo queda una elección, usando el principio de la multiplicación se tiene [70]:

$$n(n-1)(n-2)....(3)(2)(1) \tag{137}$$

Cada orden es llamada Permutación, y el producto se conoce como el número de permutaciones de n objetos, que es igual a la operacón factorial $n!$, la ecuación (136) es igual a $4! = 24$. Se establecido el caso especial del factorial de 0 como: $0! = 1$. En general para números pequeños el factorial puede escribirse cómo [70]:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!.... \tag{138}$$

Entonces, suponiendo que k objetos serás seleccionados de un set de n objetos, dónde $k \leq n$, y los k objetos serán ordenados sucesivamente sin repetición, habrá n elecciones para el primer objeto, n-1 para el segundo, n-2 para el tercero y sucesivamente hasta que haya $n-k+1$ elecciones, aplicando el principio de la multiplicación, el número de formas de seleccionar y ordenar k objetos de un set de n objetos se expresa como [70]:

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} \tag{139}$$

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{140}$$

Expresión que representa el número de permutaciones de entre n objetos , tomados de ellos k objectos, ó el número de formas en las que se selecciona y ordena k objetos de entre n objetos sin repetición [70].

Ejemplo:

¿ Cuántos números enteros positivos diferentes de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6 y 7 si ninguno de dichos dígitos puede aparecer más de una vez en el entero conformado?

De un set de 7 enteros, se escogen 5 dígitos, en concordancia con el principio de multiplicación y de conteo se tiene: $(7)(6)(5)(4)(3) = 2520$ formas que se puede realizar,usando, la notación de la fórmula se escribe como [70]:

$$nPk = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-5)!} \tag{141}$$

$$\frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2!)}{(2!)} = (7)(6)(5)(4)(3) = 2520 \tag{142}$$

Combinaciones

Dadas 5 letras del abecedario A,B,C,D, y E,si se quiere determinar el número de formas en las cuales se pueden seleccionar 3 de esas 5 letras sin tomar en cuenta el orden de las 3 letras, generando una lista de 10 posibildades:ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE.

Hay un cambio significado entre las opciones a elegir en relación entre si importa el orden o nó, las combinaciones suelen arrojar menos número de opciones que las permutaciones al no tomar en cuenta las combinaciones que contiene los mismos elementos en diferente orden, ésta forma de seleccionar y ordenar puede escribirse como [70]:

$$Formas\,en\,las\,que\,se\,puede\,seleccionar\,sin\,orden = \frac{Formas\,de\,seleccionar\,sin\,orden}{Formas\,de\,ordenar} = \tag{143}$$

$$\frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \tag{144}$$

Se supone entonces que k objetos será escogidos de un set de n objetos , dónde $k \leq n$, pero los objetos k no se pondrán o nó se tomará encuentra el orden,el número de formas en que se pueden seleccionar es llamado el número de combinaciones de n objetos tomados de k objetos se representa como [70]:

$$nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{145}$$

Ejemplo

Supongamos que necesitamos seleccionar de un grupo de 9 personas 3 que las represente, ¿ Cuántas combinaciones posibles de personas se pueden dar [70]?

Usando la fórmula de la combinación tenemos:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)} = 84 \tag{146}$$

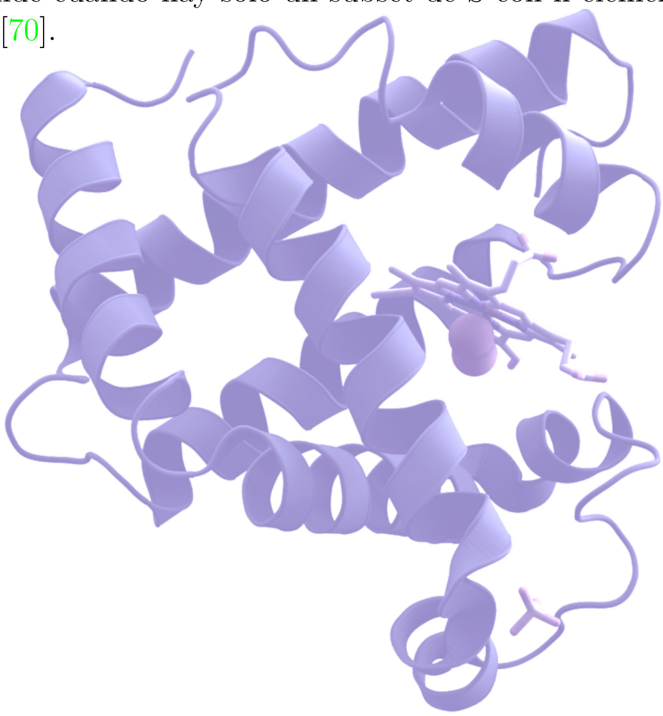
Dado un set S compuesto por n elementos, donde se escogen k de ellos, es entonces un nuevo subset de S de k elementos , por lo que la fórmula se mantiene aún cuando $k = 0$ y $k = n$,cuando k vale 0 se tiene [70]:

$$\frac{n!}{0!n!} = 1 \tag{147}$$

Lo que corresponde cuando hay sólo un subset de S con 0 elementos llamado el conjunto vacío.
Si n objetos se escogen de entre n objetos se tiene [70]:

$$\frac{n!}{n!0!} = 1 \tag{148}$$

Lo que corresponde cuando hay sólo un subset de S con n elementos que es igual al set original S [70].



Tarea 3

Ejemplo problemas del Principio de la Pichonera o principio de Dirichlet

Ejemplo 1
En una fiesta con 100 personas, algunos invitados se dan la mano y otros no, pero puedo estar seguro de que al menos dos han saludado al mismo número de gente. Llevando el razonamiento a la fiesta: los invitados son palomas y sus saludos, palomares. Al ser un gesto recíproco, solo hay 99 saludos posibles para 100 invitados, con lo que dos se estrujarán en el "mismo palomar numérico". En un principio habría 100 saludos posibles (cada invitado puede saludar de 0 personas a 99) por lo que habría 100 palomares, tantos como palomas. Pero ciertamente al ser un gesto recíproco, solo hay 99 saludos puesto que si alguien ha dado 99 apretones de manos, no habrá nadie que no le haya apretado la mano a él por lo que la existencia del palomar "99" haría que no existiese el "0" así que ahora podemos aplicar el principio y deducir que 2 personas han saludado al mismo número de personas [79].
Ejemplo 2
Tomemos 6 números del 1 al 10. Entre los escogidos, seguro que hay 2 que sumen 11, ya que los números a escoger son las palomas y los palomares son los pares de números entre 1 y 10 que suman 11, es decir los 5 pares 1-10, 2-9, 3-8, 4-7, 5-6. Como tenemos 5 pares y tenemos que elegir 6 números, seguro que 2 números pertenecen al mismo par y por lo tanto suman 11 [79].
Ejemplo 3
Hay 2 persona en el mundo que tienen exactamente el mismo número de pelos en la cabeza.Las palomas van a ser la humanidad y los palomares el número de pelos

de la cabeza, un adulto puede tener alrededor de un millón de pelos en la cabeza contando barba, nariz y orejas.Si nos quedamos con el cuero cabelludo, hay entre 100 000 y 150 000. El número de pelos podría variar de 0 a un millón, y en estos palomares tenemos que meter los aproximadamente 6.000 millones de habitantes actuales de la tierra. Aplicando el principio del palomar tendríamos que de hecho deben de haber al menos unas 6,775 personas con exactamente elv mismo número de pelos [79].

Espacio muestral

Espacio Muestral

El espacio muestral se define como el conjunto de todos los resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio.La denotación más habitual del espacio muestral es mediante la letra griega omega Ω. Entre los ejemplos más comunes de espacios muestrales podemos encontrar los resultados de lanzar una moneda al aire (cara y cruz) o de tirar un dado (1, 2, 3, 4, 5 y 6) [14].

Espacios muestrales múltiples

En muchos experimentos puede darse el caso de que coexistan varios espacios muestrales posibles, quedando a disposición la selección de los mismo según favorezca.Un ejemplo de ello sería el experimento de sacar una carta de un mazo de póker estándar de 52 naipes. Así, uno de los espacios muestrales que podrían definirse sería el de los diferentes palos que componen la baraja (picas, tréboles, diamantes y corazones), mientras que otras opciones podrían ser un rango de cartas (entre el dos y el seis, por ejemplo) o las figuras de la baraja (jota, reina y rey) [14].

Espacio muestral y repartición de probabilidades

Algunos acercamientos a la estadística de probabilidades dan por hecho que los diferentes resultados que se pueden obtener de un experimento están siempre definidos de forma que todos tengan la misma probabilidad de suceder.Sin embargo, hay experimentos en que esto es realmente complicado, siendo muy complejo construir un espacio muestral donde todos los resultados tengan la misma probabilidad [14].

La Aguja de Buffon

Este experimento consiste en dejar caer una aguja sobre una hoja rayada y anotar las veces que la aguja cruza alguna de las rayas. Después de lanzar la aguja muchísimas veces se comprobó que su experimento estaba íntimamente relacionado con el número π . Para obtener un número muy parecido a π , hay que dejar caer la aguja muchas veces sobre la hoja, multiplicar esta cantidad por dos y dividir el resultado entre el número de veces que la aguja cruzó alguna de las rayas.La fórmula para obtener una aproximación de π es entonces: $\pi = 2N/N'$, recordando que N es el número de veces que lanzas el palillo (lanzamientos),N' es el número de veces que el palillo cruza alguna de las líneas (cruces) [42].
Cuántas más veces se deja caer el palillo sobre la hoja, más se parecerá el resultado a π. Esto funciona siempre y cuando se lance el palillo de modo realmente aleatorio. Supongamos que disponemos de una superficie rayada con líneas paralelas y una aguja de tal modo que si la aguja tiene una longitud l, la distancia d que separa a todas las paralelas es mayor que l. Si se tira la aguja sobre la superficie puede que esta corte o no a alguna de las líneas. Consideramos como favorable aquel lanzamiento en el que la aguja efectivamente cae sobre alguna de ellas;lo que demostró matemáticamente Buffon es que la probabilidad de que un lanzamiento sea favorable en este sentido es igual a $2l/d\pi$. Es evidente entonces que si hacemos l y d iguales la probabilidad será $2/\pi$ [42].
Por otra parte, si llamamos N al número de lanzamientos y N' al número de casos favorables, el cociente N'/N se aproximará a dicha probabilidad a medida que N aumente. Por lo tanto, si tiramos la aguja un número grande de veces podremos decir que [42]:

$$\frac{2}{\pi} \approx \frac{N'}{N} \Rightarrow \pi \approx \frac{2N}{N'} \tag{149}$$

Tarea 4

Codones del ADN

El ADN está formado por una secuencia larga de unidades más pequeñas unidas entre sí. Hay 4 tipos básicos de unidades: A, T, G y C. Estas letras representan el tipo de base que lleva cada unidad: adenina, timina, guanina y citosina. La secuencia de estas bases codifica las instrucciones. Algunas partes del ADN son centros de control para encender y apagar genes, otras partes no tienen ninguna función aparente. Otras partes son genes que llevan instrucciones para fabricar proteínas, que son largas cadenas de aminoácidos. Estas proteínas ayudan a construir un organismo [43].

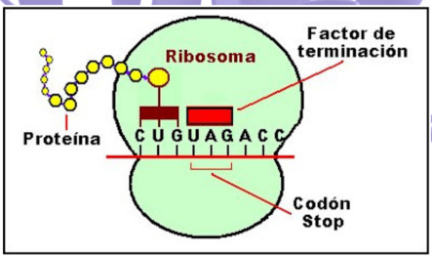
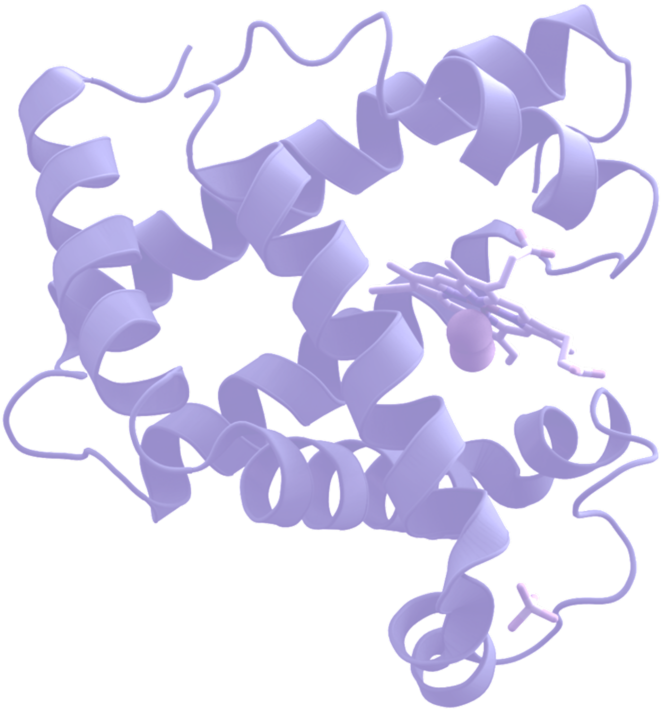


Figure 6: Codón del ADN

El ADN que codifica las porteínas puede dividirse en codones, grupos de tres bases que especifican un aminoácido o señalan el final de la proteína. Los codones se identifican por las bases que los forman, por ejemplo, GCA, forma guanina, citosina y adenina. La maquinaria celular utiliza estas instrucciones para ensamblar una cadena con los aminoácidos correspondientes (un aminoácido por cada tres bases).

El aminoácido que corresponde a GCA se llama alanina, y hay veinte aminoácidos diferentes que el ser humano y casi todas las especies terrestres sintetizan de ésta forma. Los codones de "terminación" indican el final de la proteína recién construida. La proteína terminada es entonces liberada para realizar su trabajo en la célula [43].

Árbol de probabilidades de 4 lanzamientos de moneda consecutiva con la misma probabilidad



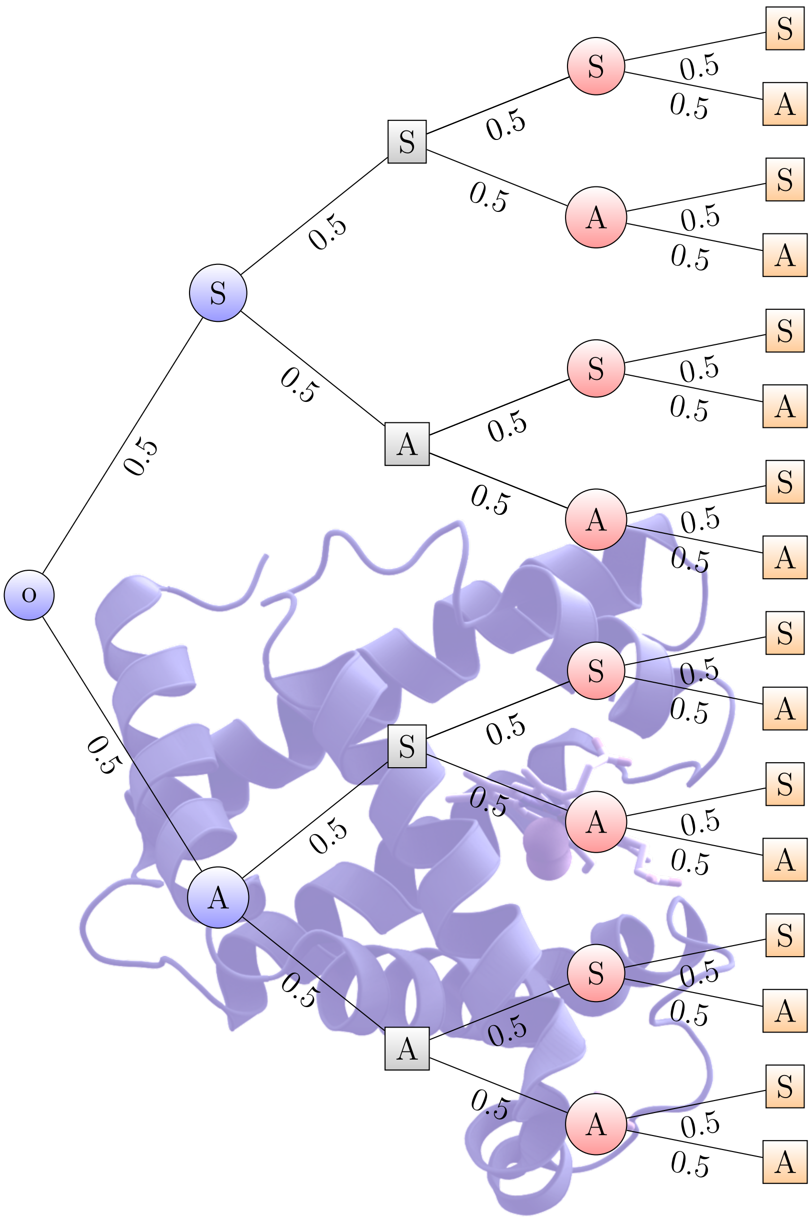


Figure 7: Diagrama de árbol de 4 lanzamientos de monedas cara cruz consecutivos con una probabilidad de 1/16 para cada rama.

Tarea 5

Convenio de suma de Einstein

Partiendo de la ecuación:

$$\mathrm{x}^{|\mu} = \mathrm{a}^{\mu}\upsilon\mathrm{x}^{\upsilon} \tag{150}$$

Se expande de la siguiente manera:

$$\mathrm{x}^{|\mu} = a_0^{\mu}\mathrm{x}^0 + a_1^{\mu}\mathrm{x}^1 + a_2^{\mu}\mathrm{x}^2 + a_3^{\mu}\mathrm{x}^3 \tag{151}$$

$$\mathrm{x}^{\upsilon 0} = a_0^{0}\mathrm{x}^0 + a_1^{0}\mathrm{x}^1 + a_2^{0}\mathrm{x}^2 + a_3^{0}\mathrm{x}^3 \tag{152}$$

$$\mathrm{x}^{\upsilon 1} = a_0^{1}\mathrm{x}^0 + a_1^{1}\mathrm{x}^1 + a_2^{1}\mathrm{x}^2 + a_3^{1}\mathrm{x}^3 \tag{153}$$

$$\mathrm{x}^{\upsilon 2} = a_0^{2}\mathrm{x}^0 + a_1^{2}\mathrm{x}^1 + a_2^{2}\mathrm{x}^2 + a_3^{2}\mathrm{x}^3 \tag{154}$$

$$\mathrm{x}^{\upsilon 3} = a_0^{3}\mathrm{x}^0 + a_1^{3}\mathrm{x}^1 + a_2^{3}\mathrm{x}^2 + a_3^{3}\mathrm{x}^3 \tag{155}$$

En su forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}^{|0} \\ \mathrm{x}^{|1} \\ \mathrm{x}^{|2} \\ \mathrm{x}^{|3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}^0 \\ \mathrm{x}^1 \\ \mathrm{x}^2 \\ \mathrm{x}^3 \end{bmatrix} \tag{156}$$

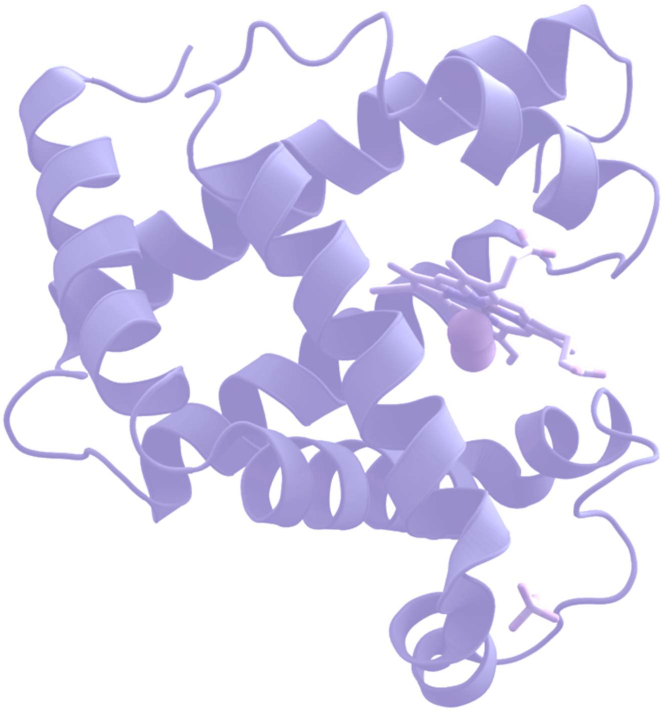
Donde:

$$\mathrm{x}^{|0} = ct, \qquad \mathrm{x}^{||} = x \tag{157}$$

y:

$$\mathrm{x}^{|2} = y, \qquad \mathrm{x}^{|3} = z \tag{158}$$

Triángulo de Pascal



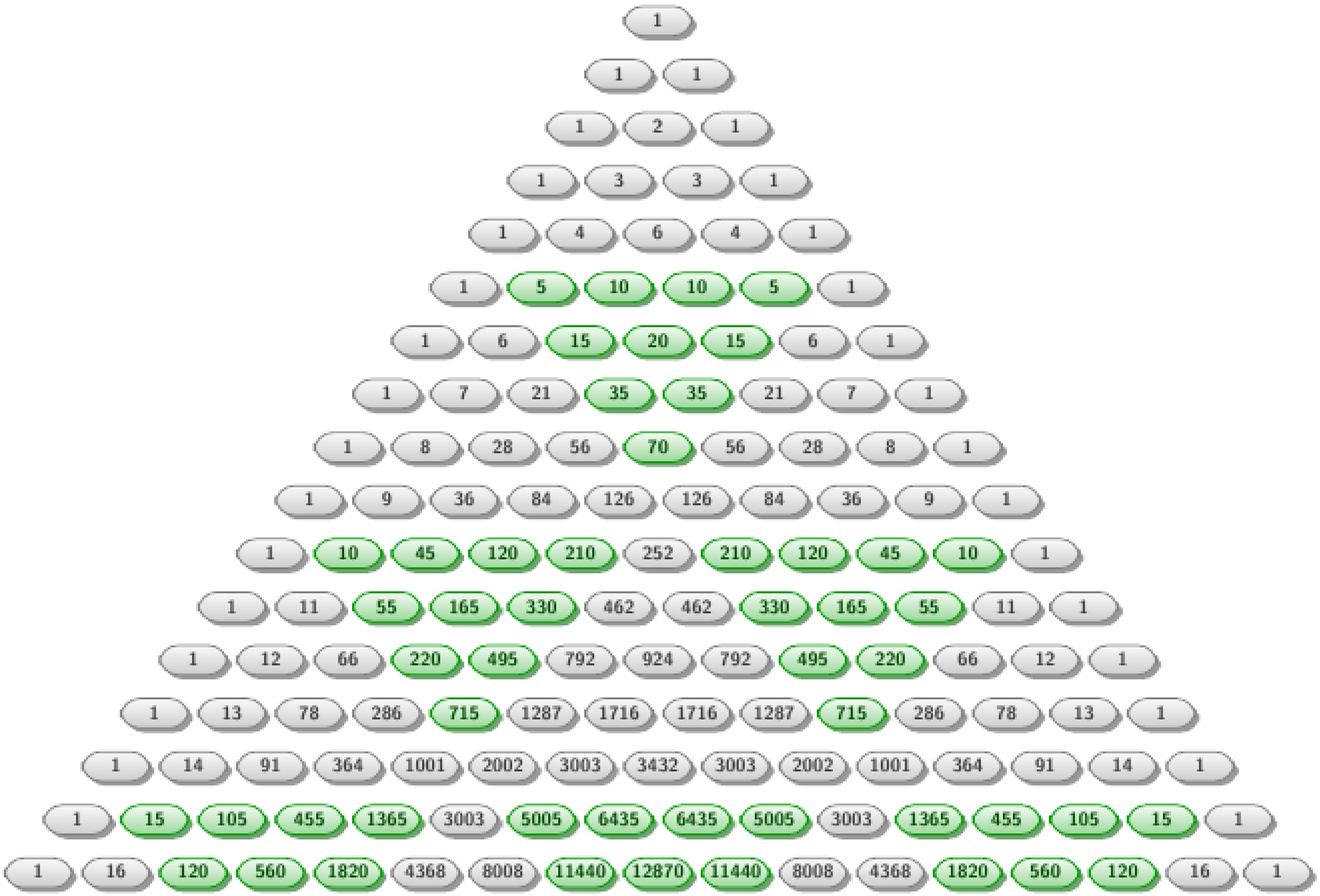


Figure 8: Triángulo de Pascal subdividida en secciones por múltiplos de 5

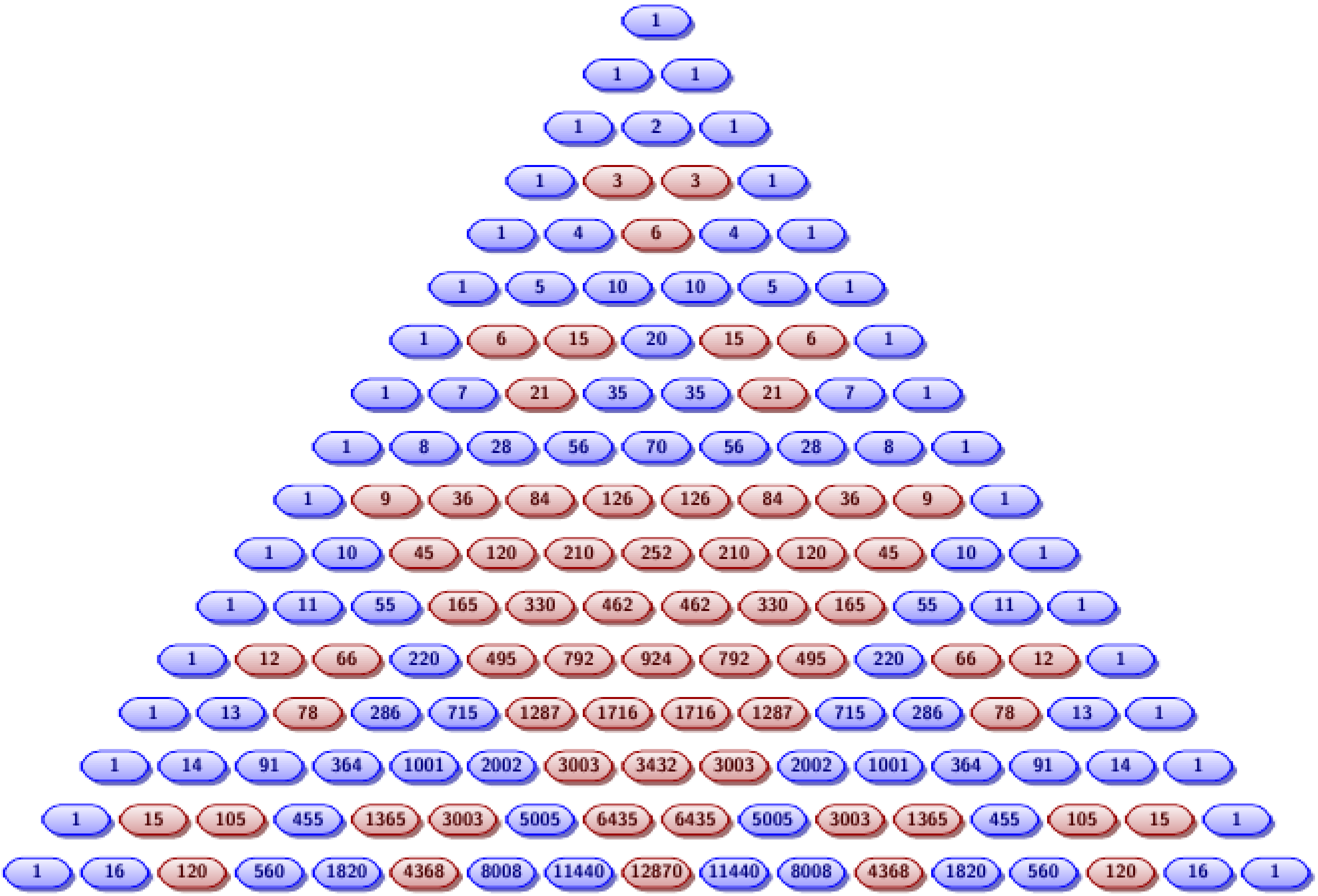


Figure 9: Triángulo de Pascal subdividida en secciones por múltiplos de 3

Figure 10: Triángulo de Pascal subdividida en secciones por múltiplos de 7

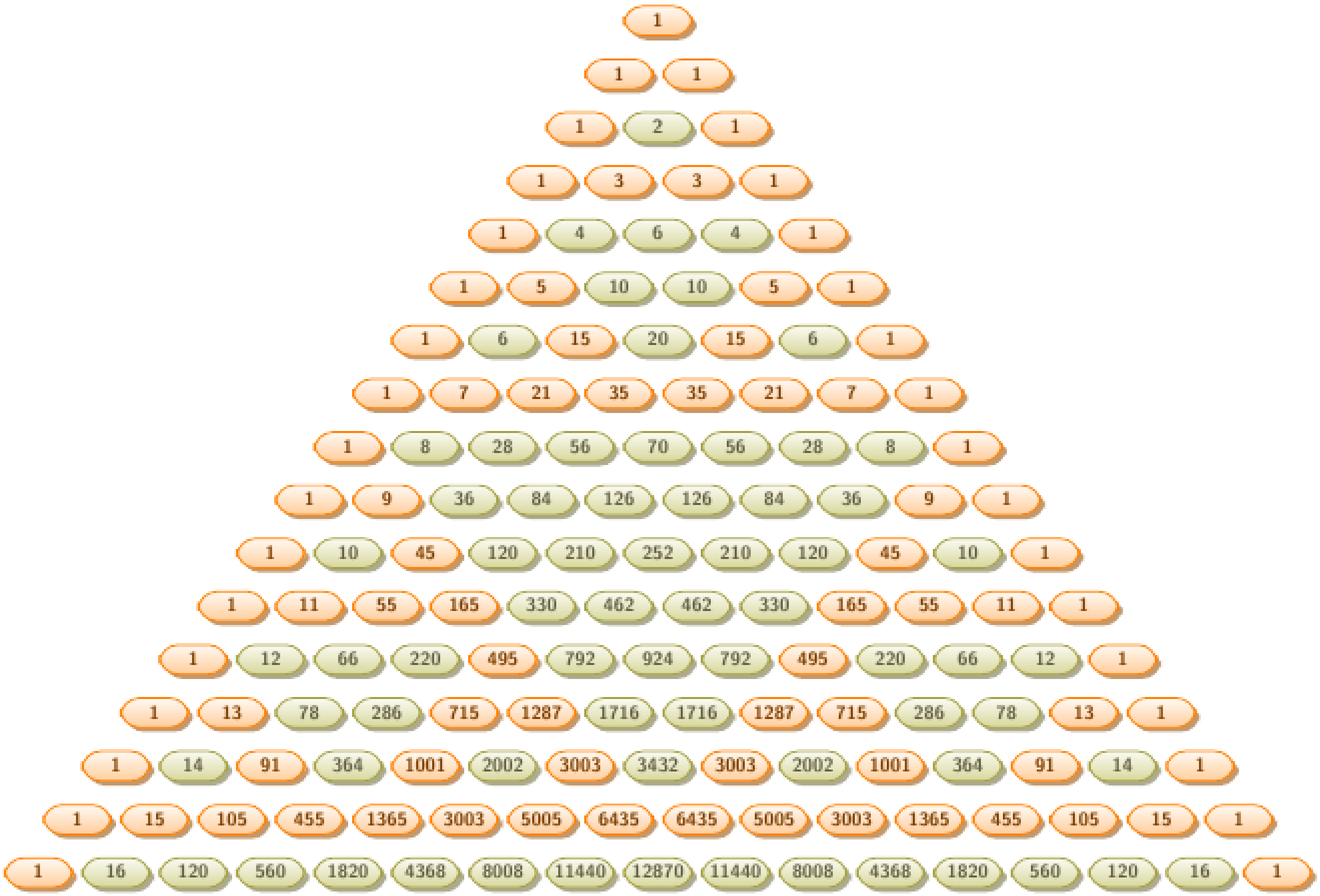


Figure 11: Triángulo de Pascal subdividida en secciones por múltiplos de 2 o por números pares

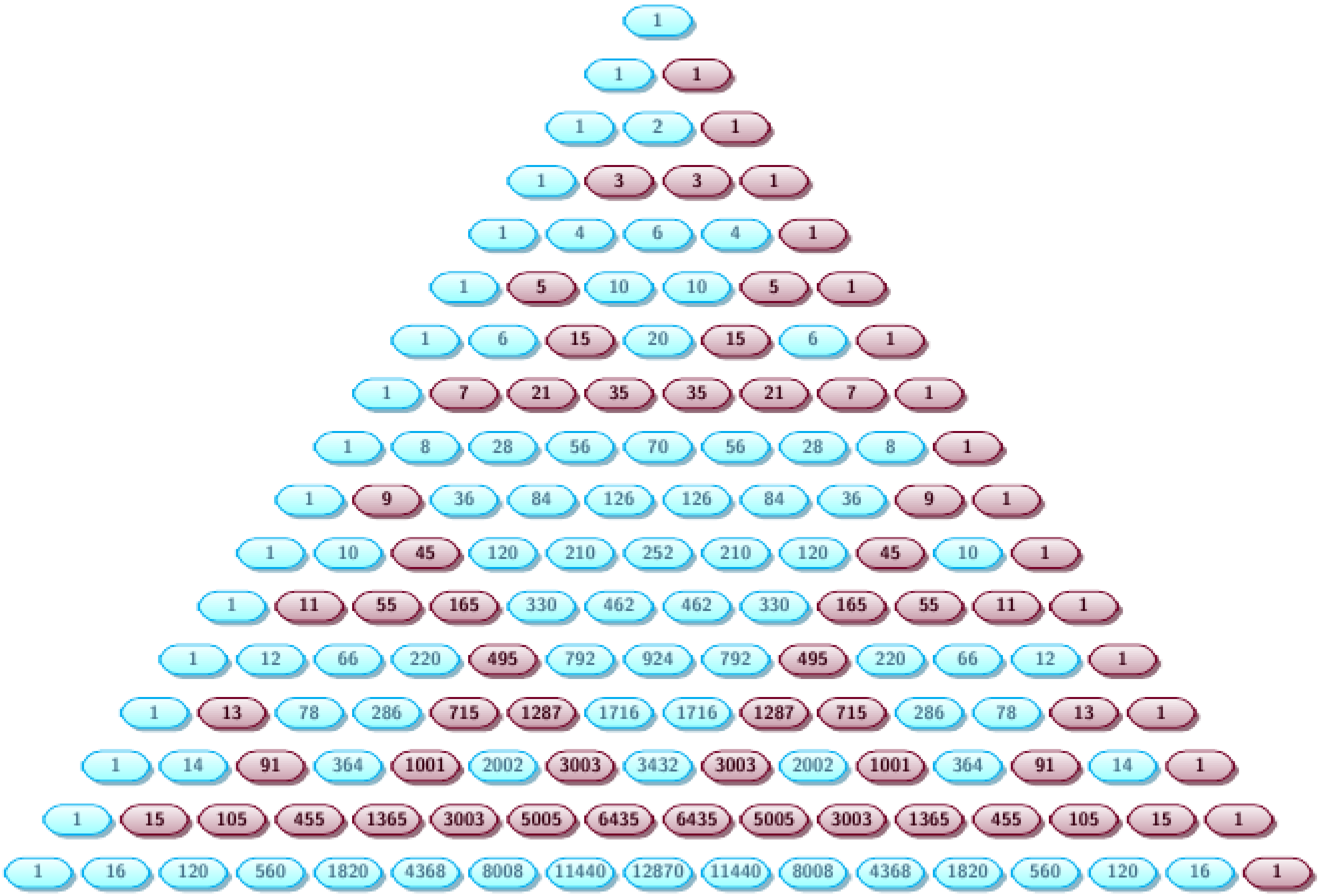


Figure 12: Triángulo de Pascal subdividida en secciones por números inpares

Pirámide de Pascal

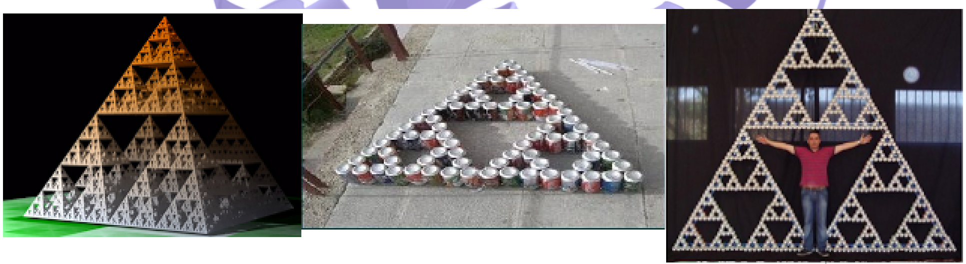
El triángulo de Sierpinski se puede generalizar a una figura en 3D a partir del triángulo de Pascal en 2D,tiene perímetro infinito y contiene área finita nula, el tetraedro de Sierpinski tiene una superficie infinita que contiene un volumen nulo. Esto se debe a que si el tetraedro inicial tiene arista a, para $n > 1$ el volumen total se define como [60]:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\mathrm{a}^{\delta}}{2}\right)^{n} \tag{159}$$

Y la superficie total se define como:

$$2^{n}\sqrt{3}a^{n} \tag{160}$$

[]



Números cardinales Álef

En teoría de conjuntos, álef $\aleph$, es un signo empleado para referirse a ciertos números "transfinitos" que resultan ser n úmeros ordinales iniciales y por tanto números cardinales.

En análisis matemático pueden definirse números transfinitos arbitrariamente grandes. El cardinal Íef 0 "$\aleph_0$" representa la cantidad de elementos de un conjunto infinito como el de los números naturales, de hecho este cardinal es el número transfinito más pequeño. Georg Cantor demostró que existían diferentes tipos de infinitos inconmensurables entre sí, y por tanto no todos los conjuntos infinitos eran equipotentes. De hecho, Cantor demostró que el conjunto de los números reales tenía más elementos que los números enteros; si bien ninguno de los dos conjuntos es finito, ambos diferían en su grado de "infinidad". El número de elementos del la recta real se representó como alef 1 "$\aleph_1$"[64].

Áef 0 $\aleph_0$: El más pequeño de todos los números transfinitos (cardinales), éste cardinal es el número de elementos del conjunto de los números naturales. En análisis matemáticos es de clase de conjuntos numerables ó conjuntos cuyo cardinal es $\aleph_0$.Los elementos de un conjunto numerable pueden "etiquetarse" como 1, 2, 3 ... de tal manera que a cada elemento de dicho conjunto le corresponda un número natural. Dentro de la teoría axiomática de conjuntos , el axioma del infinito postula la existencia de un conjunto infinito que puede equipararse fácilmente con los números naturales cuyo cardinal resulta ser $\aleph_0$[64].

Áef 0 $\aleph_1$: En matemáticas, se define $\aleph_1$ como el menor cardinal mayor que $\aleph_0$, es decir, el menor cardinal mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales. Es decir, $\aleph_1$ es el sucesor de $\aleph_0$: $\aleph_1 = \aleph_0^+$.

Se interpreta usualmente al cardinal$\aleph_1$ como la cantidad de números reales, asumiendo como cierta la hipótesis del continuo. Para justificar esto se parte del teorema de Cantor. Este teorema afirma que el cardinal de $P(\mathbb{N})$ es mayor que $\aleph_0$, dónde $card(P((\mathbb{N}) = card(\mathbb{R}), card(\mathbb{R})$ es el cardinal del conjunto potencia de los números naturales, que es exactamente el mismo que el cardinal de los números reales.Entonces se tiene [64].

$$\aleph_0 = card(\mathbb{R}), \qquad o \qquad \aleph_0 < 2^{\aleph_0} \tag{161}$$

Se ha establecido entonces la siguiente relación:

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \tag{162}$$

Tensor de Levi - Civita

El cálculo tensorial va directamente al corazón de todo lo que tenga que ver con un cambio de coordenadas, cuando el mismo punto P en un mismo plano puede ser localizado en el plano de varias maneras. Se define el símbolo de Levi-Civita o tensor de Levi-Civita, como [27]:

$$[\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \qquad si \qquad (i,j,k)\, es\, \{1,2,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\} \\ -1 \qquad si \qquad (i,j,k)\, es\, \{3,2,1\},\{1,3,2\},\{2,3,1\} \\ 0 \qquad si \qquad i=j, j=k \qquad o \qquad k=i \end{cases} \quad] \tag{163}$$

Usando la notación de Levi-Civita, se pude escribir el producto vectorial de 2 vectores usando el determinante de las matrices axb como:

$$axb = c, \qquad donde \qquad c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j, b_k \tag{164}$$

Usando ésta notación para 2 vectores a, b, cada uno de 3 componentes, se tiene:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \tag{165}$$

$$(axb)_1 = \epsilon_{1,2,3} = a_2 b_3 - a_3 b_2 \tag{166}$$

$$(axb)_2 = \epsilon_{2,1,3} = -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \tag{167}$$

$$(axb)_3 = \epsilon_{3,2,1} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \tag{168}$$

Componentes obtenidos a travéz de determinantes

Cada uno de los tres componentes obtenidos arriba mediante la notación de Levi-Civita, corresponden a cada uno de los cofactores que toman cada letra i, j, k, cuando se calcula el determinante de la matriz:

$$\delta = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \tag{169}$$

Para el cofactor de i de δ se calcula como:

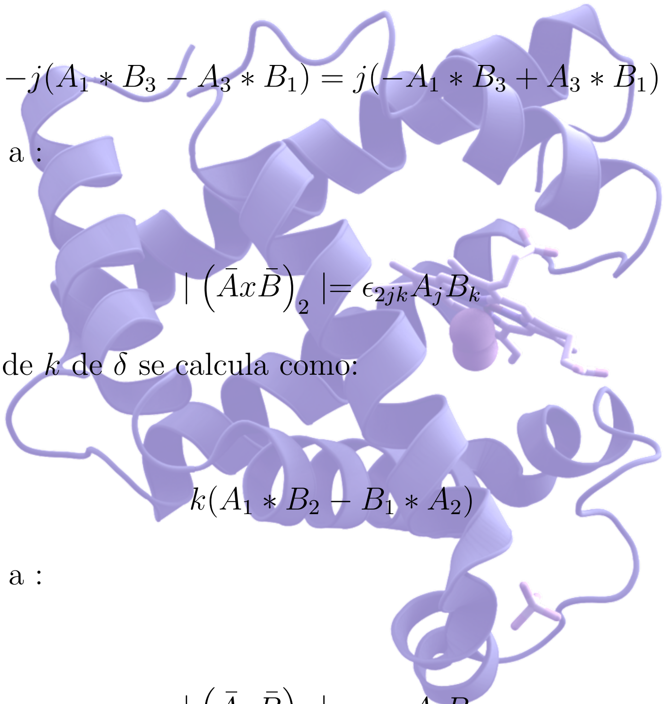
$$i(A_2 * B_3 - A_3 * B_2) \tag{170}$$

Correspondiente a :

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_1 \mid = \epsilon_{1jk} A_j B_k \tag{171}$$

Para el cofactor de j de δ se calcula como:

$$-j(A_1 * B_3 - A_3 * B_1) = j(-A_1 * B_3 + A_3 * B_1) \tag{172}$$



Correspondiente a :

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_2 \mid = \epsilon_{2jk} A_j B_k \tag{173}$$

Para el cofactor de k de δ se calcula como:

$$k(A_1 * B_2 - B_1 * A_2) \tag{174}$$

Correspondiente a :

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_3 \mid = \epsilon_{3jk} A_j B_k \tag{175}$$

Expansión de los productos vectoriales para 3 componentes de 2 vectores A, B

La expresión vectorial general de 3 componentes se escribe como:

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_i \mid = \epsilon_{ijk} A_j B_k \tag{176}$$

Para la expansión del primer componente $i = 1$ se tiene su producto cartesiano:

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_1 \mid = \epsilon_{1jk} A_j B_k \tag{177}$$

Expandiendo para $j = 1, 2, 3$ en $i = 1$ se tiene:

$$\epsilon_{11k} A_1 B_k + \epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k \tag{178}$$

Ahora, expandiendo para $k = 1, 2, 3$ en $j = 1, 2, 3$, en $i = 1$ se tiene:

$$\epsilon_{11k} A_1 B_k + \epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k \tag{179}$$

$$\begin{gathered} \epsilon_{111} A_1 B_1 + \epsilon_{112} A_1 B_2 + \epsilon_{113} A_1 B_3 + \\ \epsilon_{121} A_2 B_1 + \epsilon_{122} A_2 B_2 + \epsilon_{123} A_2 B_3 + \\ \epsilon_{131} A_3 B_1 + \epsilon_{132} A_3 B_2 + \epsilon_{133} A_3 B_3 \end{gathered} \tag{180}$$

Aplicando el tensor de Levi - Civita, eliminas los términos que cumplan la condición en los subíndices $i = j, j = k, o, k = i$, al valer $\epsilon = 0$ y se le asigna el valor de $+1$ a ϵ cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$ ó -1 cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{3, 2, 1\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$, por lo que se tiene:

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_1 \mid = (1) A_2 B_3 - A_3 B_2 \tag{181}$$

Para la expansión del primer componente $i = 2$ se tiene su producto cartesiano:

$$\mid \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_2 \mid = \epsilon_{2jk} A_j B_k \tag{182}$$

Expandiendo para $j = 1, 2, 3$ en $i = 2$ se tiene:

$$\epsilon_{21k} A_1 B_k + \epsilon_{22k} A_2 B_k + \epsilon_{23k} A_3 B_k \tag{183}$$

Ahora, expandiendo para $k = 1, 2, 3$ en $j = 1, 2, 3$, en $i = 2$ se tiene:

$$\epsilon_{21k} A_1 B_k + \epsilon_{22k} A_2 B_k + \epsilon_{23k} A_3 B_k \tag{184}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon_{211} A_1 B_1 + \epsilon_{212} A_1 B_2 + \epsilon_{213} A_1 B_3 + \\ &\epsilon_{221} A_2 B_1 + \epsilon_{222} A_2 B_2 + \epsilon_{223} A_2 B_3 + \\ &\epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{232} A_3 B_2 + \epsilon_{233} A_3 B_3 \end{aligned} \tag{185}$$

Aplicando el tensor de Levi - Civita, eliminas los términos que cumplan la condición en los subíndices $i = j, j = k, o, k = i$, al valer $\epsilon = 0$ y se le asigna el valor de $+1$ a ϵ cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$ ó -1 cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{3, 2, 1\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$,respetando en signo de la permutación se tiene:

$$| \left(\bar{A} x \bar{B} \right)_2 | = (-1) A_1 B_3 + A_3 B_1 \tag{186}$$

Para la expansión del primer componente $i = 3$ se tiene su producto cartesiano:

$$| \left(\bar{A} x \bar{B} \right)_3 | = \epsilon_{3jk} A_j B_k \tag{187}$$

Expandiendo para $j = 1, 2, 3$ en $i = 3$ se tiene:

$$\epsilon_{31k} A_1 B_k + \epsilon_{32k} A_2 B_k + \epsilon_{33k} A_3 B_k \tag{188}$$

Ahora, expandiendo para $k = 1, 2, 3$ en $j = 1, 2, 3$, en $i = 3$ se tiene:

$$\epsilon_{31k} A_1 B_k + \epsilon_{32k} A_2 B_k + \epsilon_{33k} A_3 B_k \tag{189}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon_{311} A_1 B_1 + \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{313} A_1 B_3 + \\ &\epsilon_{321} A_2 B_1 + \epsilon_{322} A_2 B_2 + \epsilon_{323} A_2 B_3 + \\ &\epsilon_{331} A_3 B_1 + \epsilon_{332} A_3 B_2 + \epsilon_{333} A_3 B_3 \end{aligned} \tag{190}$$

Aplicando el tensor de Levi - Civita, eliminas los términos que cumplan la condición en los subíndices $i = j, j = k, o, k = i$, al valer $\epsilon = 0$ y se le asigna el valor de $+1$ a ϵ cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$ ó -1 cuando cumpla $(i, j, k), sea, \{3, 2, 1\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}$, por lo que se tiene:

$$| \left(\bar{A}x\bar{B}\right)_3 |= (1)A_1B_2 - (1)A_2B_1 \tag{191}$$

Problemas de Permutaciones Circulares

1. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?

   Solución: Al tratarse de una mesa redonda, se ocupará la permuación circular para 6 elementos, ya que hablamos de 6 personas distintas.

   $$P_{\varsigma}^{6} = (6-1)! = 5! = 120 \tag{192}$$

   120 modos de sentarse.

2. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa un circulo de 7 alumnos?

   Solución: Al tratarse de una mesa redonda, se ocupará la permuación circular para 7 elementos, de manera que:

   $$P_{\varsigma}^{7} = (7-1)! = 6! = 720 \tag{193}$$

   720 modos de sentarse.

3. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa cuadrada una familia de 12 integrantes ?

   Solución: Al tratarse de una mesa cuadrada con lugares asignados en fila en su perímetro, no hay diferencia con un problema de mesa redonda, se ocupará la permuación circular para 12 elementos, de manera que:

$$P_{\varsigma}^{12} = (12-1)! = 11! = 39916800 \tag{194}$$

39916800 modos de sentarse.

4. ¿De cuántos modos diferentes puede acomodarse 5 botones de control que se deben de colocar en disposición circular de manera que cada dedo de la mano pueda tener el control de un botón dado ?

   Solución: Al tratarse de una disposición de botones de forma circular y sus respectivas permutaciones de éste modo, se ocupará la permuación circular para 5 elementos, de manera que:

   $$P_{\varsigma}^{5} = (5-1)! = 4! = 24 \tag{195}$$

   24 maneras de color los botones en un perímetro circular.

5. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

   Solución: El número de formas en que podemos sentar a las 3 mujeres alrededor de una mesa circular, dejando un lugar en medio es 2!, ya que que el primer renglón de círculos, los seis arreglos diferentes tienen a MMM siempre en la misma posición; y en el segundo renglón, los seis arreglos tienen a MMM siempre en la misma posición; por ello son sólo dos arreglos de las tres mujeres, dejando un lugar en medio. Hay $3! = 6$ formas de sentar a los tres hombres por cada uno de los dos arreglos de mujeres; quedando así en forma alternada:

   $$2! * 3! = 2 * 6 = 12 \tag{196}$$

   Hay 12 maneras de acomodar a las 3 parejas.

Problemas de exámen 1

1. ¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar si debe estar formada de 2 letras seguidas de cinco dígitos? Considere que las letras y los dígitos no pueden repetirse.E l alfabeto usado consta de 25 caracteres y los dígitos son del 0 al 9.

   Solución: Para las letras utilizamos un alfabeto de 26 caracteres y para los dígitos usamos los números del 0 al 9. Por tanto:

   $$P_2^{26} x P_5^{10} = \frac{26!}{(26-2)!} x \frac{10!}{(10-5)!} = 19656000 \tag{197}$$

   Se pueden formar 19656000 claves diferentes con los parámetros establecidos.

2. En una urna hay 9 bolas, 3 blancas, 2 rojas y 4 negras. ¿ De cuántas formas distintas se pueden extraer las bolas de la urna?

   Solución: Al tener tres bolas blancas, a efectos de ordenación se consideran iguales, lo mismo ocurre con las rojas y las negras.Las posibles ordenaciones son:

   $$PR_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} = 1260 \tag{198}$$

3. En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas. ¿ De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

   Solución: No entran todos los elementos. Sólo se seleccionan 4. No importa su orden y se puede elegir más de una botella del mismo tipo. Podemos resolver este problema de esta forma:

   $$CR_4^5 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70 \tag{199}$$

4. Una organización de una escuela tiene 30 miembros. 4 miembros serán escogidos al azar para una entrevista con el periódico de la escuela sobre el grupo. ¿Cuántos grupos de 4 personas son posibles?

   Solución: Al no importar el orden, se ocupa la combinación sin repetición, no existe ninguna razón para que una persona sea considerada distinta de otra, por lo que la solución es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = 27405 \tag{200}$$

Existen 27,405 posibles grupos diferentes de 4 personas a partir de 30 miembros.

5. El juego de la Lotería consiste en acertar 6 números naturales a elegir entre el 1 y el 49 ?' Cuántas posibles combinaciones hay? Si cada combinación nos cuesta 1 peso. ¿Cuánto nos tendremos que gastar para asegurar que vamos a acertar seguro los 6 números?

   Solución: Queremos acertar 6 números de 49 posibles, independientemente del orden en que los elijamos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816 \tag{201}$$

   El costo de acerar sería de \$13,983,816.00

6. ¿Cuántas diferentes combinaciones pueden hacerse utilizando dos letras de la palabra Texas si ninguna letra debe de usarse más de una vez?

   Solución: Considerando que importa el órden de las 5 letras y a la vez se ocupan 2 de ellas, se tiene:

$$P_2^5 = \frac{(n)!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \tag{202}$$

   Se pueden generar 20 combinaciones.

7. Si un niño escoge 4 juguetes de una caja que contiene 12 ¿Cuántos juguetes distintos puede escoger?

   Solución: Al no importar el órden de dicha selcción, se pude establecer una combinación como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495 \tag{203}$$

   El niño puede seccionar 495 formas sus juguetes.

8. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?

   Solución: Al tratarse de una mesa redonda, se ocupará la permuación circular para 6 elementos, ya que hablamos de 6 personas distintas.

$$P_{\varsigma}^{6} = (6-1)! = 5! = 120 \tag{204}$$

   120 modos de sentarse.

9. En una carrera participan 10 corredores, entonces, se desea saber de cuántas formas pueden registrarse los tres primeros lugares.

   Solución: Será 10 el total de corredores y sólo habrá 3 lugares seccionados de ellos donde sí importa el orden, por lo que se tiene:

$$P_{n}^{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \tag{205}$$

   Hay 720 formas en las cuales puede darse como resultado a los diferentes posibles ganadores.

10. En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles?

    Solución: Ya que partimos de que si nos gusta un pastel lo podemos pedir hasta cuatro veces. Estamos en el caso en el que no nos importa el orden en que elijamos los pasteles y podemos repetir, son combinaciones con repetición , y se puede escribir como:

$$CR_{n,m} = \left|\begin{smallmatrix} n+m-1 \\ m \end{smallmatrix}\right| = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \tag{206}$$

$$CR_{6,4} = \left|\begin{smallmatrix} 6+4-1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right| = \frac{(6+4-1)!}{4!(6-1)!} = 126 \tag{207}$$

    Se pueden elegir de 126 formas los pasteles.

Tarea 5

Problemas selectos de técnicas de conteo

1. ¿Cuántas permutaciones existen para las ocho letras a,b,c,d,e,f,g,h?

   Solución: Ya que son 8 letras no repetibles se tiene que:

   $$P_8 = 8! = 40320 \tag{208}$$

2. Determine el número de enteros de seis dígitos (que no comiencen con cero) en los que ningún dígito se pueda repetir.

   Solución: Por regla del producto se tiene:

   $$9 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 136080 \tag{209}$$

3. Determine el número de enteros de seis dígitos (que no comiencen con cero) en los que es válido repetir los dígitos:

   Solución: Por regla del producto , y se puede repetir los datos, se tiene:

   $$9 * 10 * 10 * 10 * 10 * 10 = 900000 \tag{210}$$

4. Se dispone de 3 vías para viajar de una ciudad C1 a una ciudad C2 y de 4 vías para viajar de C2 a C1. ¿De cuántas formas se puede organizar el viaje de ida y vuelta de C1 a C2?

   Solución:
$$(3)(4) = 12 \tag{211}$$

   Se tiene 12 posibilidades.

5. Supongamos que un restaurante ofrece tres tipos de tamaños de pizza y 10 tipos de ingredientes, entonces, se desea saber cuantas pizzas diferentes se puede ofrecer.

   Solución: El número de pizzas que el restaurante puede ofrecer es de:
$$nm(3)(10) = 30 \tag{212}$$

   Por lo que, considerando el tamaño y los ingredientes, se pueden ofrecer 30 diferentes tipos de pizza.

Problemas de Permutaciones con repetición

1. En una urna hay 9 bolas, 3 blancas, 2 rojas y 4 negras. ¿ De cuántas formas distintas se pueden extraer las bolas de la urna?

   Solución: Al tener tres bolas blancas, a efectos de ordenación se consideran iguales, lo mismo ocurre con las rojas y las negras.Las posibles ordenaciones son:
$$PR_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} = 1260 \tag{213}$$

2. Obtenga todas las permutaciones posibles a obtener con las letras de la palabra OSO.

Solución :Es necesario primero suponer que todas las letras de la palabra OSO son diferentes y para diferenciarlas pondremos subíndices a las letras O, por lo que quedaría,O_1SO_2, y las permutaciones a obtener serían:

$$3P3 = 3! = 6 \tag{214}$$

Obteniendo 6 permutaciones de los caracteres, no palabras.

3. Obtenga todas las señales posibles que se pueden diseñar con seis banderines, dos de los cuales son rojos, tres son verdes y uno morado.

   Solución:

$$6P_{2,3,1} = \frac{6!}{2!3!1!} = 60 \tag{215}$$

   Se pueden generar 60 señales diferentes.

4. ¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar con los números 1,1,1,2,3,3,3,3?

   Solución: Se tienen en total 8 números, 3 unos, un uno, y 4 cuatros, por lo que:

$$8P_{3,1,4} = \frac{8!}{3!1!4!} = 280 \tag{216}$$

   Se pueden generar 280 claves de acceso.

5. ¿ De cuántas maneras es posible plantar en una línea divisoria de un terreno dos nogales, cuatro manzanos y tres ciruelos?

   Solución: Se tienen en total 9 árboles, de los cuales 2 son nogales, 4 manzanos y 3 son ciruelos, por lo que se tiene:

$$9P_{2,4,3} = \frac{9!}{2!4!3!} = 1260 \tag{217}$$

   Se tienen 1260 maneras de plantar los árboles.

Problemas de Permutaciones sin repetición

1. ¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar si debe estar formada de 2 letras seguidas de cinco dígitos? Considere que las letras y los dígitos no pueden repetirse.E l alfabeto usado consta de 25 caracteres y los dígitos son del 0 al 9.

   Solución: Para las letras utilizamos un alfabeto de 26 caracteres y para los dígitos usamos los números del 0 al 9. Por tanto:

   $$P_2^{26} x P_5^{10} = \frac{26!}{(26-2)!} x \frac{10!}{(10-5)!} = 19656000 \tag{218}$$

   Se pueden formar 19656000 claves diferentes con los parámetros establecidos.

2. ¿Cuántas diferentes combinaciones pueden hacerse utilizando dos letras de la palabra Texas si ninguna letra debe de usarse más de una vez?

   Solución: Considerando que importa el órden de las 5 letras y a la vez se ocupan 2 de ellas, se tiene:

   $$P_2^5 = \frac{(n)!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \tag{219}$$

   Se pueden generar 20 combinaciones.

3. En una carrera participan 10 corredores, entonces, se desea saber de cuántas formas pueden registrarse los tres primeros lugares.

   Solución: Será 10 el total de corredores y sólo habrá 3 lugares seccionados de ellos donde sí importa el orden, por lo que se tiene:

   $$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \tag{220}$$

   Hay 720 formas en las cuales puede darse como resultado a los diferentes posibles ganadores.

4. ¿Cuántas cantidades de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 si no se permite la repetición?

Solución: Si de las 5 cantidades no se pueden repetir el número de cantidades es:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \tag{221}$$

5. En una carrera de maratón intervienen 3 españoles, 2 ingleses, 1 italiano, 3 alemanes, 2 franceses y 1 belga. Si un pódium consiste en 3 personas situadas en 3 puestos distintos, ¿Cuántos pódiums distintos pueden darse al acabar la carrera?

   Solución: Tenemos un total de $3+2+1+3+2+1 = 12$ corredores. El primer puesto lo puede alcanzar cualquiera de los 12 corredores. El segundo está al alcance de 11 corredores, y el tercero puede ser para cualquiera de los 10 restantes, así que:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320 \tag{222}$$

   Hay 1320 lugares del pódium posibles para los corredores.

Problemas de Combinaciones con repetición

1. En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas. ¿ De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

   Solución: No entran todos los elementos. Sólo se seleccionan 4. No importa su orden y se puede elegir más de una botella del mismo tipo. Podemos resolver este problema de esta forma:

$$CR_4^5 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70 \tag{223}$$

2. En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles?

Solución: Ya que partimos de que si nos gusta un pastel lo podemos pedir hasta cuatro veces. Estamos en el caso en el que no nos importa el orden en que elijamos los pasteles y podemos repetir, son combinaciones con repetición , y se puede escribir como:

$$CR_{n,m} = \left| {n+\ m\ -1 \atop m} \right| = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \tag{224}$$

$$CR_{6,4} = \left| {6+\ 4\ -1 \atop 4} \right| = \frac{(6+4-1)!}{4!(6-1)!} = 126 \tag{225}$$

Se pueden elegir de 126 formas los pasteles.

3. ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

   Solución: Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos que indican la puntuación de esa parte. Estas puntuaciones van de blanca (0 puntos) a 6. Tenemos pares de puntuaciones de 0 a 6. El total de fichas entonces será:

$$CR_{7,2} = \left| {7+\ 2\ -1 \atop 2} \right| = \frac{(7+2-1)!}{2!(5)!} = 28fichas \tag{226}$$

4. Se quiere saber cuantas combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3 hay.

   Solución:

$$CR_{5,3} = \left| {5+\ 3\ -1 \atop 3} \right| = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35 \tag{227}$$

   usando la fórmula se obtiene que son 35.

5. Digamos que tenemos cinco sabores de helado: banana, chocolate, limón , fresa y vainilla. Puedes tomar 3 paladas. ¿Cuántas variaciones hay?

   Solución: Usando la combinación con repetición tenemos:

$$CR_{5,3} = \left| {5+\ 3\ -1 \atop 3} \right| = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35 \tag{228}$$

   Hay 35 sabores.

Problemas de Combinaciones sin repetición

1. Una organización de una escuela tiene 30 miembros. 4 miembros serán escogidos al azar para una entrevista con el periódico de la escuela sobre el grupo. ¿Cuántos grupos de 4 personas son posibles?

   Solución: Al no importar el orden, se ocupa la combinación sin repetición, no existe ninguna razón para que una persona sea considerada distinta de otra, por lo que la solución es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = 27405 \tag{229}$$

   Existen 27,405 posibles grupos diferentes de 4 personas a partir de 30 miembros.

2. El juego de la Lotería consiste en acertar 6 números naturales a elegir entre el 1 y el 49 ?' Cuántas posibles combinaciones hay? Si cada combinación nos cuesta 1 peso. ¿Cuánto nos tendremos que gastar para asegurar que vamos a acertar seguro los 6 números?

   Solución: Queremos acertar 6 números de 49 posibles, independientemente del orden en que los elijamos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816 \tag{230}$$

   El costo de acerar sería de $13,983,816.00

3. Si un niño escoge 4 juguetes de una caja que contiene 12 ¿Cuántos juguetes distintos puede escoger?

   Solución: Al no importar el órden de dicha selcción, se pude establecer una combinación como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495 \tag{231}$$

   El niño puede seccionar 495 formas sus juguetes.

4. Un entrenador de baloncesto dispone de 12 jugadores, ¿Cuántos diferentes equipos de cinco jugadores puede formar?

   Solución:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792 formas. \tag{232}$$

5. Una pizzería ofrece diez ingredientes adicionales para su pizza ¿ De cuántas maneras un cliente puede seleccionar tres ingredientes adicionales para su pizza?

   Solución: Debido a que no hay orden podemos concluir que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 formas. \tag{233}$$

AES Advanced Encryption Standard

AES es un cifrado de bloque simétrico para cifrar textos que se pueden descifrar con la clave de cifrado original. Un algoritmo de cifrado AES , basado en el algoritmo Rijndael , Es una de las seguridades más complejas actualmente disponible (aprobada por el gobierno de los EEUU para la información clasificada con el uso de entre 192 o 256 longitudes de la llave. AES fue adoptado por NIST en 2001 como FIPS-197 , y es el reemplazo para DES que fue retirado en 2005.

Se puede desarrollar implementaciones en JavaScript para el estándar AES original (NIST FIPS-197) . El énfasis está en la transparencia y la fidelidad a la norma en lugar de la eficiencia [10].

DES Data Encryption Standard

Data Encryption Standard (DES) es un algoritmo de cifrado, es decir, un método para cifrar información, escogido como un estándar FIPS en los Estados Unidos en 1976, y cuyo uso se ha propagado ampliamente por todo el mundo. El algoritmo fue controvertido al principio, con algunos elementos de diseño clasificados, una longitud de clave relativamente corta, y las continuas sospechas sobre la existencia de alguna puerta trasera para la National Security Agency (NSA) [74].

Hoy en día, DES se considera inseguro para muchas aplicaciones. Esto se debe principalmente a que el tamaño de clave de 56 bits es corto; las claves de DES se han roto en menos de 24 horas. Existen también resultados analíticos que demuestran debilidades teóricas en su cifrado, aunque son inviables en la práctica. Desde hace algunos años, el algoritmo ha sido sustituido por el nuevo AES (Advanced Encryption Standard) [74].

El cifrado RSA

Los criptosistemas de clave pública (también llamados criptosistemas asimétricos) se caracterizan por utilizar claves distintas para el cifrado y descifrado de la información. Su principal ventaja es que facilitan el proceso de distribución e intercambio de claves entre los participantes de la comunicación segura.

Los algoritmos asimétricos emplean generalmente longitudes de clave mucho mayores que los simétricos, que usan una única clave secreta. Por ejemplo, mientras que para algoritmos simétricos se considera segura una clave de 128 bits, para la mayoría de algoritmos asimétricos (incluido el del RSA), se recomiendan actualmente claves de al menos 1024 bits de longitud. Además, la complejidad de cálculo que comportan los algoritmos de los criptosistemas asimétricos los hace considerablemente más lentos que los algoritmos de cifrado simétricos.

La criptografía basada en criptosistemas de clave pública es relativamente reciente, pues los primeros algoritmos asimétricos aparecen después de 1975 [16].

De entre todos los algoritmos asimétricos, el RSA es el más usado. Una peculiaridad de este algoritmo es que sus dos claves sirven indistintamente tanto para cifrar como para autenticar. Debe su nombre a sus tres inventores: Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, que publicaron por primera vez el método RSA en 1977. Ha estado bajo patente de los Laboratorios RSA hasta el 20 de septiembre de 2000, por lo que su uso comercial estuvo restringido hasta esa fecha.El RSA se basa en la difcultad que presenta la factorización de números grandes. Las claves pública y privada se calculan a partir de un número que se obtiene como producto de dos primos grandes. Un atacante que quiera recuperar un texto claro a partir del criptograma y de la clave pública, tiene que enfrentarse a dicho problema de factorización [16].

Ya conocemos una forma posible de descomponer un número n en sus factores: probar a dividirlo por todos los números enteros positivos comprendidos entre 2 y la raíz de n. Pero cuando hablamos de un número de tamaño 1024 bits, este método es computacionalmente impracticable, incluso ninguno método reciente ha conseguido un algoritmo con un orden de complejidad que permita factorizar en un tiempo razonable números de tamaños como los empleados en RSA actualmente, aun con la potencia computacional disponible hoy en día. El problema de la factorización de enteros se considera que es un problema de clase NP, es decir, un problema para el que existe uno o más algoritmos que lo resuelven, pero ninguno de los algoritmos conocidos se ejecutan en un tiempo polinomial (que pueda ser expresado polinómicamente en función del tamaño de los datos de entrada), y por lo tanto son ineficientes o intratables para datos de entrada muy grandes [16].

Máquina Enigma

Enigma era el nombre de una máquina que disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio, que permitía usarla tanto para cifrar como para descifrar mensajes. Varios de sus modelos fueron muy utilizados en Europa desde inicios de los años 1920.Fue creada por el ingeniero alemán Arthur Scherbius .Su fama se debe a haber sido adoptada por las fuerzas militares de Alemania desde 1930. Su facilidad de manejo y supuesta inviolabilidad fueron las principales razones para su amplio uso. Su sistema de cifrado fue finalmente descubierto y la lectura de la información que contenían los mensajes supuestamente protegidos es considerado, a veces, como la causa de haber podido concluir la Segunda Guerra Mundial al menos dos años antes de lo que hubiera acaecido sin su descifrado. La máquina Enigma fue un dispositivo electromecánico. El mecanismo estaba constituido fundamentalmente por un teclado similar al de las máquinas de escribir cuyas teclas eran interruptores eléctricos, un engranaje mecánico y un panel de luces con las letras del alfabeto [47].

La parte eléctrica consistía en una batería que encendía una lámpara de una serie de ellas, que representan cada una de las diferentes letras del alfabeto. El corazón de la máquina Enigma era mecánico y constaba de varios rotores conectados entre sí. Cada rotor es un disco circular plano con 26 contactos eléctricos en cada cara, uno por cada letra del alfabeto. Cada contacto de una cara está conectado o cableado a un contacto diferente de la cara contraria. Por ejemplo, en un rotor en particular, el contacto número 1 de una cara puede estar conectado con el contacto número 14 en la otra cara y el contacto número 5 de una cara con el número 22 de la otra. Cada uno de los cinco rotores proporcionados con la máquina Enigma estaba cableado de una forma diferente y los rotores utilizados por el ejército alemán poseían un cableado distinto al de los modelos comerciales.

Dentro de la máquina había, en la mayoría de las versiones, tres ranuras para alojar los rotores. Cada uno de los rotores se encajaba en la ranura correspondiente de forma que sus contactos de salida se conectaban con los contactos de entrada del rotor siguiente. El tercer y último rotor se conectaba, en la mayoría de los casos, a un reflector que conectaba el contacto de salida del tercer rotor con otro contacto del mismo rotor para realizar el mismo proceso pero en sentido contrario y por una ruta diferente [47].

Cuando se pulsaba una tecla , por ejemplo la correspondiente a la letra A, la corriente elé ctrica procedente de la batería se dirigía hasta el contacto correspondiente a la letra A del primer rotor. La corriente atravesaba el cableado interno del primer rotor y se situaba, por ejemplo, en el contacto correspondiente a la letra J en el lado contrario. Supongamos que este contacto del primer rotor estaba alineado con el contacto correspondiente a la letra X del segundo rotor. La corriente llegaba al segundo rotor y seguía su camino a través del segundo y tercer rotor, el reflector y de nuevo a través de los tres rotores en el camino de vuelta. Al final del trayecto, la salida del primer rotor se conectaba a la lámpara correspondiente a una letra, distinta de la A, en el panel de luces. El mensaje de cifrado se obtenía por tanto sustituyendo las letras del texto original por las proporcionadas por la máquina.

Debido a que el cableado de cada rotor era diferente, la secuencia exacta de los alfabetos de sustitución variaba en función de qué rotores estaban instalados en las ranuras, su orden de instalación y la posición inicial de cada uno. A estos datos se les conocía con el nombre de configuración inicial, y eran distribuidos, mensualmente al principio y con mayor frecuencia a medida que avanzaba la guerra, en libros a los usuarios de las máquinas. El funcionamiento de las versiones más comunes de la máquina Enigma era simétrico en el sentido de que el proceso de descifrado era análogo al proceso de cifrado. Para obtener el mensaje original sólo había que introducir las letras del mensaje cifrado en la máquina, y ésta devolvíía una a una las letras del mensaje original, siempre y cuando la configuración inicial de la máquina fuera idéntica a la utilizada al cifrar la información [47].

Figure 13: Máquina Enigma.

Su invención y creación

Arthur Scherbius Inventó la máquina Enigma/Frankfurt am Main, 20 de octubre de 1878-Berlín, 13 de mayo de 1929. Una de las personalidades que indirectamente tuvieron una influencia capital en la Segunda Guerra Mundial fue Arthur Scherbius, el padre de la máquina criptográfica Enigma. Ésta, usada inicialmente por la Marina alemana, la Kriegsmarine , fue posteriormente adoptada por todas las fuerzas armadas germanas para el encriptado y codificado de sus comunicaciones secretas, principalmente las instrucciones a los submarinos que, en "manadas de lobos", libraban una lucha capital en alta mar por interrumpir el tráfico marítimo y el sistema de convoyes hacia el Reino Unido.

Considerada imposible de desencriptar, la historia de la ruptura de sus claves, conseguida finalmente en el Reino Unido gracias a la labor desarrollada anteriormente por un equipo de matemáticos y criptólogos polacos, es una de las historias secretas más espectaculares de la Segunda Guerra Mundial.El ingeniero eléctrico, Scherbius dirigió su máquina criptográfica al sector civil y murió sin conocer la dramática influencia que su invento tuvo en el desarrollo de la guerra [22].

Tarea 6

Gráficas en Root

Programa de histogramas sencillo del lanzamiento de moneda:

```
int m=50000;
int h=0;
int c=0;
int comp=0;
 for (int n=0;n<=m;n++){
    int exp = rand() % 2;
    if (exp==1) {
        h++;
        }
    else{
        c++;
        }
   }
comp=h+c;
TH1D *h1 = new TH1D("h1", "Experimento cara cruz con 50,000 muestras", 3
//h1->SetBinContent(1,0);
h1->SetBinContent(1,h);
//h1->SetBinContent(3,0);
h1->SetBinContent(3,c);
//h1->SetBinContent(5,0);
h1->Draw();
```

```
return comp;
}
```

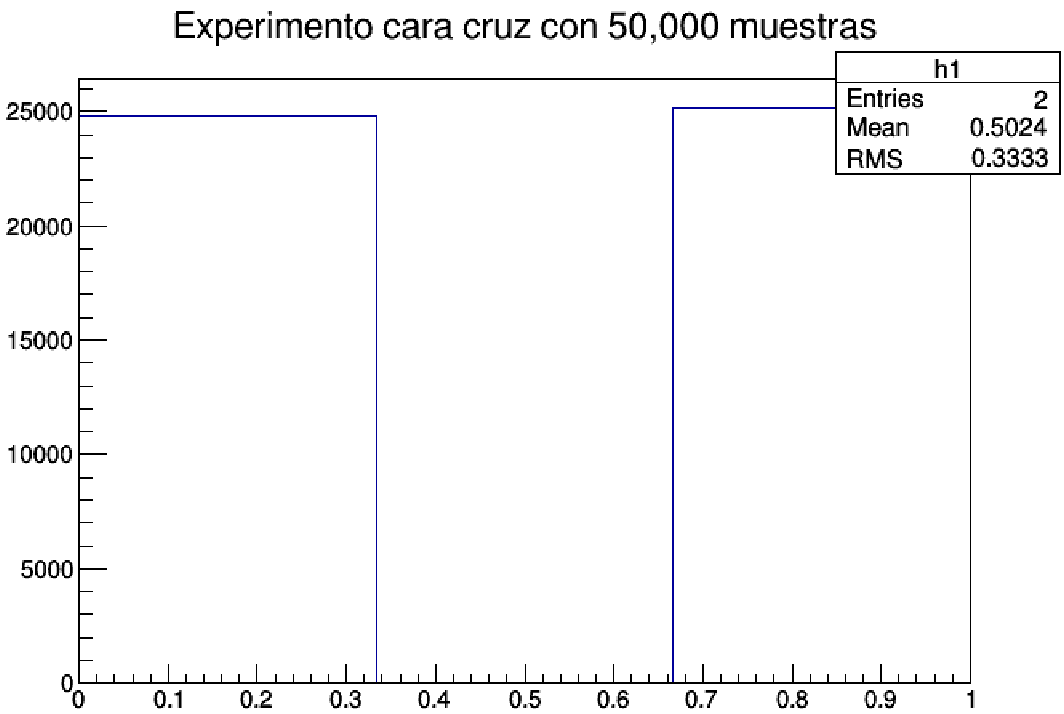


Figure 14: Grafica en root de 50,000 experimentos de lanzamiento de moneda en histograma.

Programa de lanzamiento de moneda en el tiempo en root:

```
  size = 50000;
int v[50000];

int m=50000;
int h=0;
int c=0;
int comp=0;
int contador=0;
TH1D *h1 = new TH1D("h1", "Experimento cara cruz con
 50,000 muestras", size, 0, size);
 for (int n=0;n<size; n++){
     int exp = rand() % 2;
     if (exp==1) {
          contador++;
          }
     else{
          contador=contador-1;
          }
v[n]=contador;
h1->SetBinContent(n,v[n]);
     }
//comp=h+c;


h1->Draw();
return v[1];
}
```

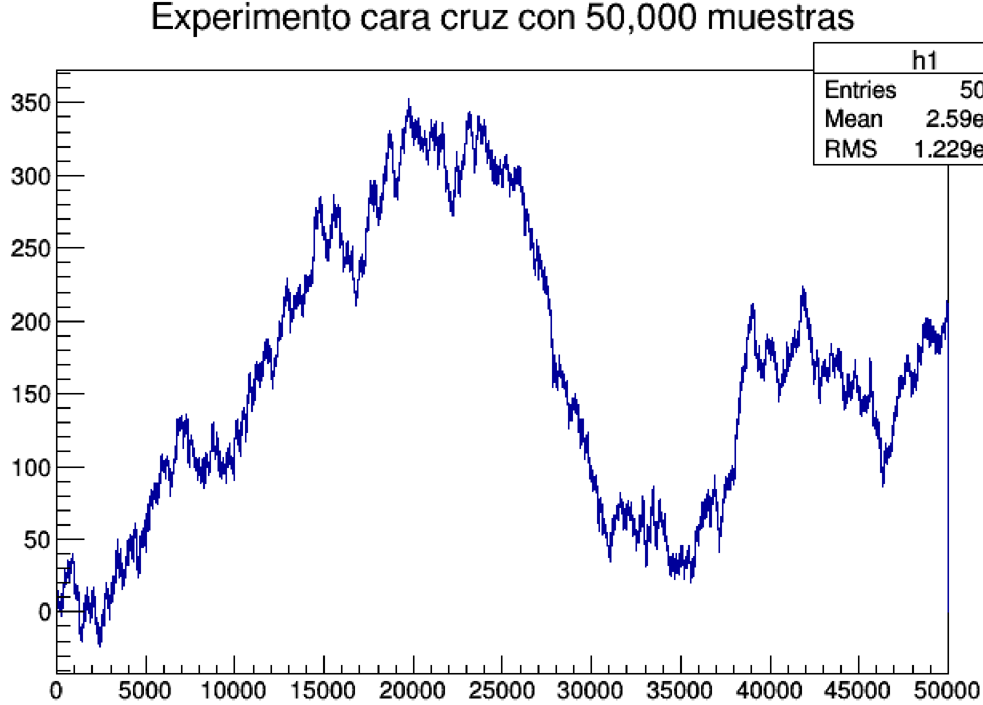


Figure 15: Grafica en root de 50,000 experimentos de lanzamiento de moneda en histograma en modo vector.

Accidente del Trasbordador espacial Challenger

7 astronautas perecieron a bordo del transbordador espacial Challenger de la NASA el 28 de enero de 1986. Treinta años después, el accidente ocurrido a escasos 73 segundos del despegue, a más de 15 kilómetros sobre el Océano Atlántico, sigue siendo el fracaso más recordado de la historia de la exploración espacial. Tras una espectacular explosión, el compartimento donde viajaba la tripulación salió disparado intacto en una bola de fuego y continuó subiendo otros cinco kilómetros antes de caer. La caída duró más de 2 minutos. No hubo paracaídas para frenar el descenso, ningún sistema de escape.

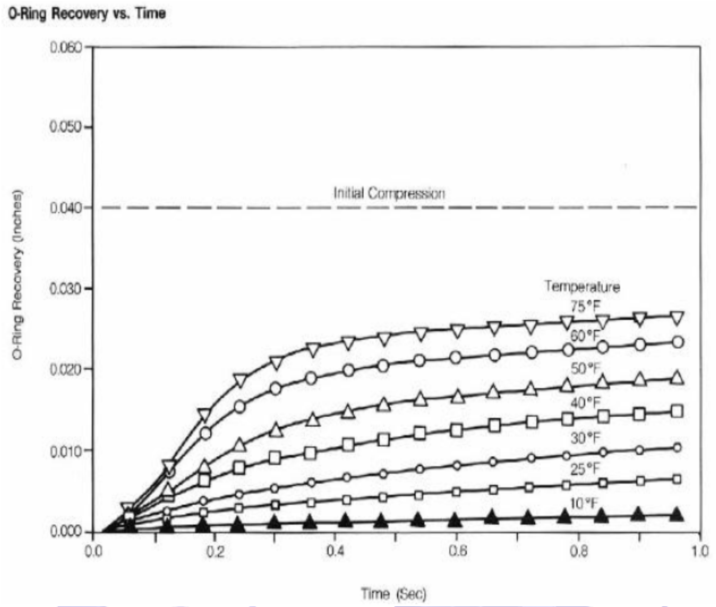


Figure 16: Grafica de temperatura y deformación de los o-rings o juntas [15]

La causas fueron atribuidas a las temperaturas inusualmente bajas la noche previa al lanzamiento , que aparentemente causaron porosidad en los aros de goma que sellaban una junta entre segmentos del cohete impulsor. El accidente produjo la paralización de los vuelos durante 32 meses. El siguiente lanzamiento de un transbordador (STS-26R Discovery) no se produciría hasta el 29 de septiembre de 1988 [75].

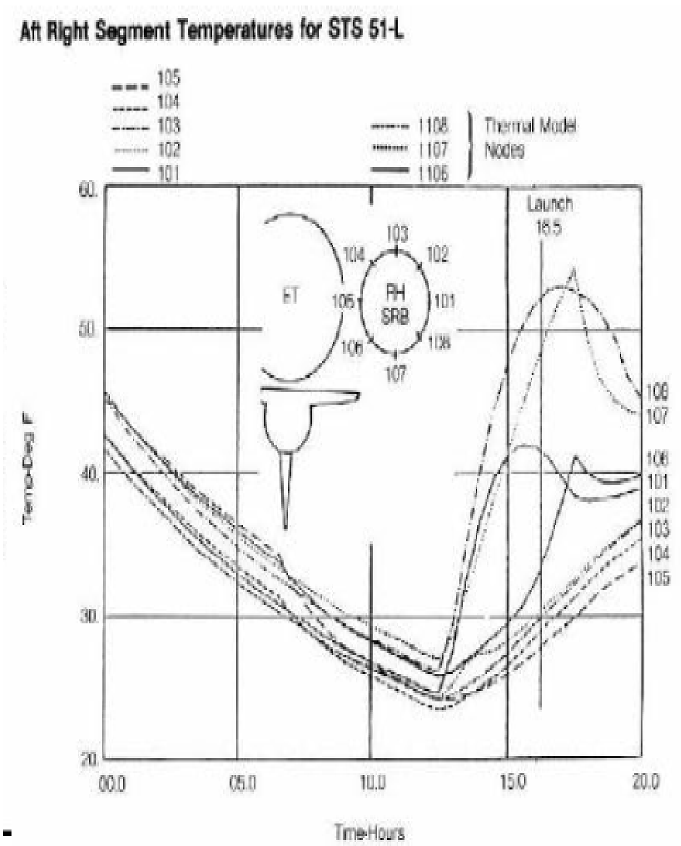


Figure 20. **Aft Right Segment Temperatures for STS 51-L**. Temperature model for 51-L right solid booster aft segment circumferential positions from 16.5 hours prior to launch to 3.5 hours after launch.

Figure 17: Grafica de temperatura 1 [15]

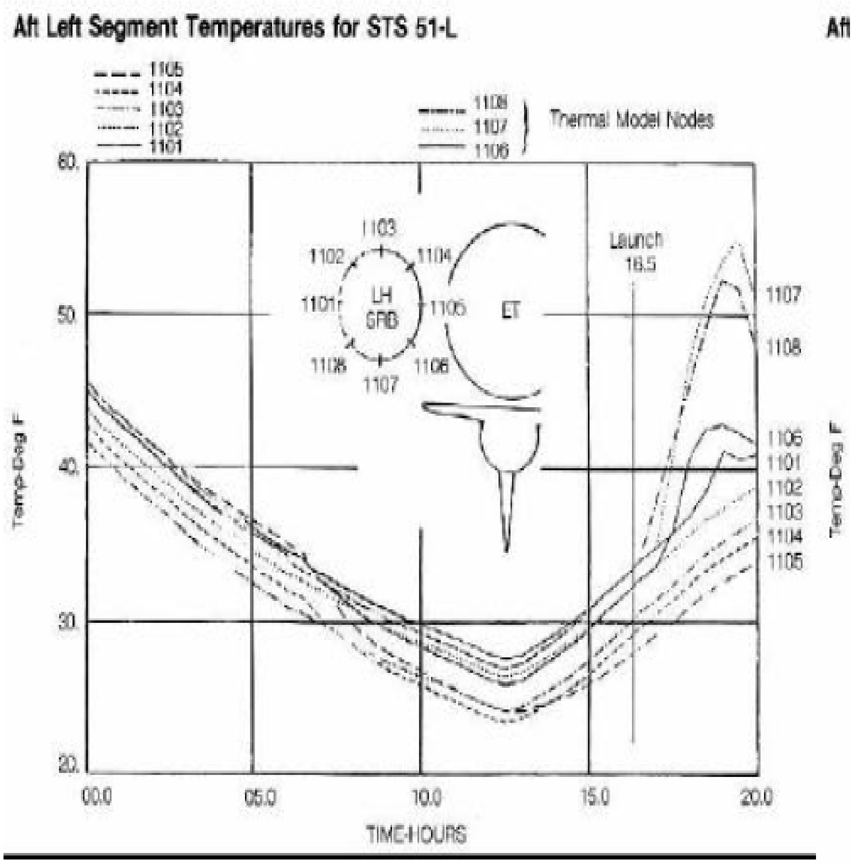


Figure 21. **Aft Left Segment Temperatures for STS 51-L**. Temperature model for 51-L left solid booster aft segment circumferential positions from 16.5 hours prior to launch to 3.5 hours after launch.

Figure 18: Grafica de temperatura 2 [15]

Paridad de las permutaciones

Las permutaciones pueden descomponerse en un producto de transposiciones, es decir, en una sucesión de intercambios de elementos dos a dos.Una permutación par es una permutación que puede ser representada por un número par de transposiciones, mietras que una permutación impar es una permutación que puede ser representada por un número impar de transposiciones. La paridad o signatura de una permutación vale 1 si esta es par y -1 si es impar.

Sea una permutación σ la definición de la signatura se hace contando las inversiones:

Sean $i < j$ dos elementos distintos comprendidos entre 1 y n. Se dice que se tiene una inversión del par $\{i, j\}$ para cuando $\sigma(i) > \sigma(j)$. Se dice que una permutación es par cuando presenta un número par de inversiones. Se dice impar en el caso contrario. La paridad de una permutación par es 1 ; la de una permutación impar es ?1. Sea la permutación [53]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \tag{234}$$

En el ejemplo se deja fijos 1 y 4 y envía el 2 al 3, el 3 al 5 y el 5 al 2. Ningún par que contenga 1 puede ser una inversión puesto que para todo $j > 1, \sigma(j)$ es distinto de $\sigma(1) = 1$, por lo que $\sigma(j) > \sigma(1)$. El único par en inversión que contiene 2 es $\{2, 5\}(\sigma(2) = 3 > 2 = \sigma(5))$. La lista de pares en inversión es $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$. Hay cuatro, así que la permutación es par [53].

Fórmula permutación sin repetición

La fórmula de la permutación nos da el número de maneras en que podemos elegir r objetos o eventos, tomados de un conjunto más grande que los contenga se define como [30]:

$$\frac{(n)!}{(n-k)!} \tag{235}$$

Eésta expresión nace del conteo de las maneras en que pueden suceder cosas específicas, y comparándola con el número total de posibilidades. Si estamos haciendo elecciones de un conjunto de n objetos, entonces en la primera pasada tenemos n elecciones. En la segunda tendremos n-1 elecciones, n-2 en la tercera hasta n-r, dónde r es el total de elementos que elegimos.Para n objetos, el número de maneras en que podemos tomarlos es n!.

Ahora, si vamos a tomar un subconjunto r del total del número de objetos n, entonces ,en el proceso de conteo, en la primera pasada tendremos n elecciones, luego n-1 y asi hacia abajo hasta llegar a n-r+1 en la última pasada, éste último teŕmino al parecer, toma en cuenta que,si en un momento, todos los elementos del conjunto n son seleccionados, es decir, se tiene n=r, entonces el último termino se hará 0,por lo que el resultado de la permutación tambié será 0, sin embargo, se sabe que $nPn = 1$, no 0, y que además en la fórmula gneneral $(n-n)! = 0! = 1$, por lo que se le anãde el 1 para cumplir con esa condición, entonces, el número de formas diferentes que podemos hacer esto es [30]:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)......(n-r+1) \tag{236}$$

Producto cartesiano

Para conjuntos finitos $A_1, A_2, ..., A_k$ se tiene su producto cartesiano definido como:

$$\mid A_1 x A_2 x A_n \mid = \prod_{i=1}^{k} \mid A_i \mid \tag{237}$$

Un conjunto puede considerarse como un conjunto de k ordenadas de la forma:$(a_1, a_2, ..., a_k)$ con la siguiente estructura. Hay n_1 elecciones posibles de a_1. Dado a_1, hay n_2 elecciones posibles de a_2. Dados a_1 y a_2 hay n_3 elecciones posibles de a_3.En general dados $a_1, a_2, ..., a_{j-1}$ hay n_j elecciones posibles de a_j. Entonces el conjunto tiene $n_1, n_2, ..., n_k$ elementos. Para un producto de 3 set dados $AxBxC$, donde

$a\epsilon A, b\epsilon B, c\epsilon C$, se puede escribir (apara el módulo) como:

$$\mid AxBxC \mid = \prod_{i=1}^{k} \{a_i b_i c_i\} \tag{238}$$

Identidades con notación indicial

Tensor Delta de Kronecker

Se define la expresión tensorial Delta de Kronecker cómo:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{239}$$

Cuya expresión matricial se denota como:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{240}$$

Algunas propiedades de éste tensor son:

$$-a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \tag{241}$$

$$-a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \tag{242}$$

Tensor de Ricci

Se define la expresión tensorial de Ricci cómo:

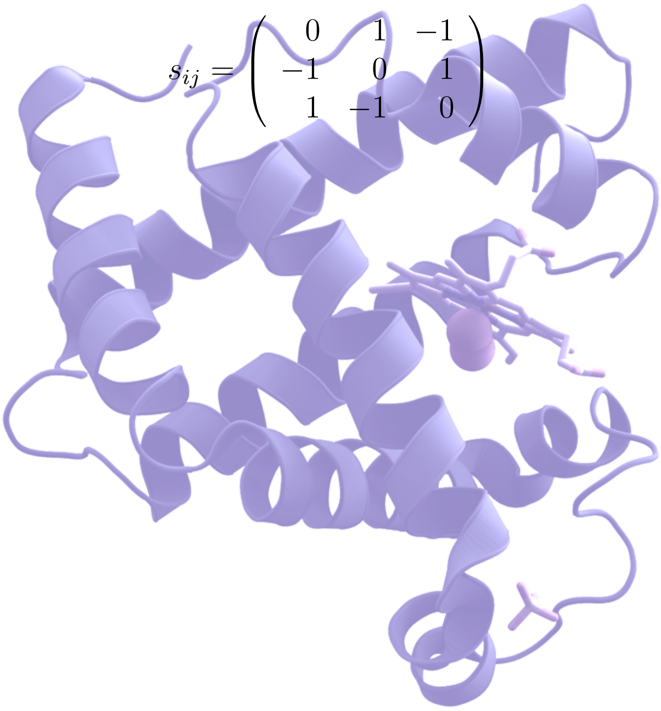
$$s_{ij} = \mid \bar{e}_i x \bar{e}_j \mid \tag{243}$$

Se declara, entonces, una estructura llamada base ortonormal para representar dicho tensor como:

$$sij = \begin{cases} 0 & si \quad i = j \\ +1 & si \quad i \neq j, \quad en \quad permutacion \quad par \\ -1 & si \quad i \neq j, \quad en \quad permutacion \quad impar \end{cases} \tag{244}$$

Cuya expresión matricial se denota como [49]:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{245}$$



Tarea 7

Cardinalidad del conjunto Potencia

Si existe un conjunto finito S representando su cardinalidad como $\mid X \mid= n$, entonces el conjunto potencia $P(X)$ tiene cardinalidad $\mid P(X) \mid= 2^n$ [25].

Prueba

Si se considera $\mid X \mid= 0$ cuando $X = \emptyset$, entonces $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$,entonces $\mid P(\emptyset) \mid= 2^0 = 1$.

Si se inicia desde 1 entonces $X = \{1\}$, es decir , tenemos $P(X) = \{\emptyset, X\}$,donde vemos que:$\mid P(X) \mid= 2^1 = 2$.

Si la aseveración es correcta para $n = k > 0$ y si se designa para X a un conjunto de cardinalidad $k + 1$. Sea $a \epsilon X$ un elemento arbitrario, con lo anterior si $k + 1$ se agrega $\mid X + 1 \mid= k + 1$,entonces si quitamos un elemento a del conjunto arbitrariamente se rescribe como: $\mid X?\{a\} \mid= k$ utilizando las igualdades anteriores se tiene que [25]:

$$\mid P(X - \{a\}) \mid == 2^k \tag{246}$$

Ésto debido a, dado un subconjunto $N \epsilon P(X)$se obtiene un subconjunto de $X?\{a\}$ si ocurre, que ya sea el conjunto N permaneció inalterado en $X?\{a\}$; es decir, a no era un elemento de$N$; ó que N proviene de cierto conjunto $N' = N \cup \{a\}$; es decir,a era un elemento de N.Al hacer variar a los subconjuntos de X de acuerdo con las opciones anteriores obtenemos a todos los subconjuntos de $X?\{a\}$. En consecuencia tenemos $\mid P(X) \mid = 2 \mid P(X?\{a\}) \mid = (2)(2)^k = 2^{k+1}$ [25].

Simulador de algunos movimientos del autótmata Celuar el juego de la vida

```
//#include<conio.h>
#define X 20
 //el numero de filas declarado en una constante
#define Y 20
//el numero de columnas declarado en una constante
int examplevid()
{
//declaracion de variables
int ix, iy, ixd, ixe, iys, iyi, vius;
 //las variables ixd(ix derecha), iys(iy superior).etc..
//sirven para comprobar las casillas
//alrededor de la casilla que se examina
char mundo[X][Y], estado[X][Y], opc;
//una tabla se mostrara, en la otra se aplicar\'an los cambios
//inicializar tabla mundo
for(ix=0; ix<X; ix++)
     {
          for(iy=0; iy<Y; iy++)
          {
               mundo[ix][iy]=' ';
          }
     }
//mostrar un men\'u y escoger el estado inicial de nuestro
juego de la vida
printf("Selecciona el estado inicial preprogramado:
a)\nb)\nc)\nd)\n");
```

```
do  //mientras la opci\'on no sea valida,
seguir\'a␣leyendo␣hasta␣dar␣con␣una␣letra␣valida
{
␣␣␣␣scanf("%c",␣&opc);
}while(opc<'a'␣||␣opc>'d');

//situar␣estado␣inicial
switch(opc)
{
␣␣//␣case␣'a':mundo[5][5]='X';mundo[5][6]='X';mundo[6][5]=
␣␣'X';mundo[6][6]='X';break;
␣␣␣//case␣'b':mundo[5][5]='X';mundo[5][6]='X';mundo[6][5]=
␣␣␣'X';mundo[6][7]='X';mundo[7][6]='X';break;
␣␣␣case␣'a':mundo[5][5]='X';mundo[5][6]='X';mundo[5][7]=
␣␣␣'X';break;
␣␣␣case␣'b':mundo[5][6]='X';mundo[5][7]='X';mundo[5][8]=
␣␣␣'X';mundo[6][5]='X';mundo[6][6]='X';mundo[6][7]='X';break;
␣␣␣case␣'c':mundo[5][5]='X';mundo[5][6]='X';mundo[5][7]=
␣␣␣'X';mundo[6][5]='X';mundo[7][6]='X';break;
␣␣␣case␣'d':mundo[5][6]='X';mundo[5][9]='X';mundo[6][5]=
␣␣␣'X';mundo[7][5]='X';mundo[7][9]='X';mundo[8][5]='X'
␣␣␣;mundo[8][6]='X';mundo[3][2]='X';mundo[3][3]='X';break;
␣␣␣default:␣printf("error,␣ha␣de␣ser␣entre␣'a'␣i␣'f'");
}
//bucle␣infinito,␣dado␣que␣el␣juego␣de␣la␣vida␣no␣tiene␣final
int␣con=0;
␣␣␣␣while(con<500){␣␣␣//for␣para␣mostrar␣la␣tabla␣mundo


␣␣␣␣␣␣//for␣para␣mostrar␣la␣tabla␣mundo
␣␣␣␣␣␣␣␣for(ix=0;␣ix<X;␣ix++)
␣␣␣␣␣␣␣␣{
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣for(iy=0;␣iy<Y;␣iy++)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣{
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣printf("%c",mundo[ix][iy]);
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣}
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣printf("\n");
␣␣␣␣␣␣␣␣}
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣printf("siguiente␣\n");
```

```
␣␣␣␣␣//system("pause");␣␣//pausa␣el␣juego,
␣␣␣␣␣␣hasta␣que␣pulsemos␣una␣tecla,␣no␣mostrar\'a
␣␣␣␣␣␣el␣siguiente␣estado␣de␣la␣tabla
␣␣␣␣␣␣␣␣//recorrido␣total␣para␣comprobar␣si␣ha␣llegado
␣␣␣␣␣␣␣␣␣al␣limite␣de␣la␣tabla
␣␣␣␣␣␣␣␣for(ix=0;␣ix<X;␣ix++)
␣␣␣␣␣␣␣␣{
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣for(iy=0;␣iy<Y;␣iy++)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣{
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣vivos=0;

␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(ix>=X-1)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣ixd=0;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣else
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣ixd=ix+1;

␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(iy>=Y-1)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣iyi=0;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣else
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣iyi=iy+1;

␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(ix<=0)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣ixe=X-1;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣else
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣ixe=ix-1;

␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(iy<=0)
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣iys=Y-1;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣else
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣iys=iy-1;
//comprobaci\'on␣para␣saber␣si␣los␣vecinos
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣est\'an␣vivos␣o␣muertos
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixd][iy]=='X')␣␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixe][iy]=='X')␣␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ix][iys]=='X')␣␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ix][iyi]=='X')␣␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixd][iys]=='X')␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixe][iys]=='X')␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixd][iyi]=='X')␣␣␣vivos++;
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣if(mundo[ixe][iyi]=='X')␣␣␣vivos++;
```

```
 //condicional para determinar si la casilla vive o muere
                if(mundo[ix][iy]=='X')
                {
                    // esta vivo
                    if(vivos<=1 || vivos>3)
                    {
                        estado[ix][iy]=' ';
                    }else{
                        estado[ix][iy]='X';
                    }

                }else
                {
                    // esta muerto
                    if(vivos==3)
                    {
                        estado[ix][iy]='X';
                    }else{

                        estado[ix][iy]=' ';
                    }
                }

            }// final del for iy

        } // final del for ix

        //guardamos la tabla estado en la tabla mundo, para
        que la pr\'oxima vez que entre en el bucle se muestre actualizad
        for(ix=0; ix<X; ix++)
        {
            for(iy=0; iy<Y; iy++)
            {
                mundo[ix][iy]=estado[ix][iy];
            }
        }  //final del for para guardar la tabla
         estado en la tabla mundo
con=con+1;
    } //final del bucle
```

```
}
```

Código del conjunto potencia de un conjunto dado

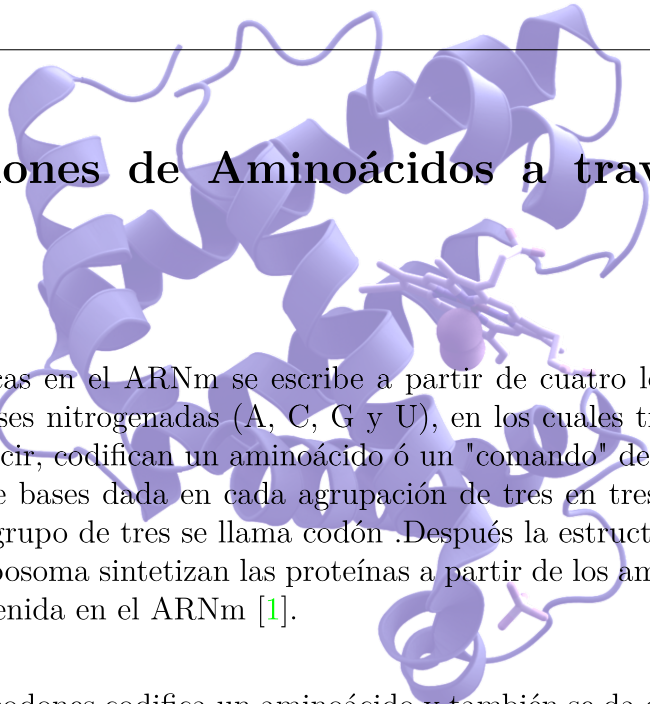
```
int pot(){
    int i,j,limite;
    std::string A[100];
  //  std::cout<<"Ingrese el numero de elementos del conjunto"<<"\n";
cout<<"Ingrese el numero de elementos del conjunto"<<"\n";
    std::cin>>limite;
    for(i=0;i<limite;i++){
       std::cout<<"Ingrese el elemento: "<<i+1<<" ";
       std::cin>>A[i];
    }
    std::cout<<"\n";
    std::cout<<"{ }";
    for(i=0;i<potencia(2,limite);i++){
        for(j=0;j<limite;j++){
          if(i & (1<<j))
          //cout<<"{"<<A[i]<<","<<B[j]<<"}"<<endl;
            std::cout<<A[j];
        }
        std::cout<<"\n";
    }
    //system("pause");
    return 0;

}

int potencia(int b,int e){
    int i;
    int pot=1;
    for(i=1;i<=e;i++){
          pot=pot*b;
    }
    return pot;
```

```
}
```

Código del Producto Cartesiano

```
void car(){
//prod(){
//   std::string A[10];
// std::string B[10];
int i;
int j;
int p;
int c;
cout<<"Ingrese el numero de elementos del primer conjunto"<<"\n";
     scanf("%i",&c);
     std::vector<char> A(c);
     for(i=0;i<(c);i++){
        cout<<"Ingrese el elemento: "<<i+1<<" ";
       scanf("%s",&A[i]);
     }
     cout<<"Ingrese el numero de elementos del segundo
    conjunto"<<"\n";
       scanf("%i",&p);
           std::vector<char> B(p);
         for(j=0;j<(p);j++){
            std::cout<<"Ingrese el elemento: "<<j+1<<" ";
              scanf("%s",&B[j]);
         }

 //int a=sizeof(A)/sizeof(int);
//int b=sizeof(B)/sizeof(int);
int k;
int l;
cout<<"Vector resultante: {";
for( k=0;k<(c);k++){
         for( l=0;l<(p);l++){
           cout<<"(";
           cout<<A[k]<<","<<B[l];
```

```
            cout<<")";
        }
    }
cout<<"}"<<endl;
//for (k=0; i<(a);k++){
//for (l=0;j<(b);l++){
//return
//cout<<(*{x%d , y%d} \n*, A[i],B[j]);

//cout<<"{"<<A[k]<<","<<B[l]<<"}"<<endl;
//}
//}
//}
}
```



Combinaciones de Aminoácidos a través de los Codones

Las bases genéticas en el ARNm se escribe a partir de cuatro letras, que corresponden a las bases nitrogenadas (A, C, G y U), en los cuales tiene propiedades funcionales, es decir, codifican un aminoácido ó un "comando" de inicio ó término de una cadena de bases dada en cada agrupación de tres en tres bases (llamado triplete) . Cada grupo de tres se llama codón .Después la estructura celular compleja llamada Ribosoma sintetizan las proteínas a partir de los aminoácidos con la información contenida en el ARNm [1].

Cada uno de los codones codifica un aminoácido y también se da el caso de que un aminoácido pueda ser codificado por varios codones diferentes. Cada codón porta la información para pasar la secuencia de nucleótidos del ARNm a la secuencia de aminoácidos de la proteína en el proceso de traducción. Hay hay 64 codones diferentes por combinación de los 4 nucleótidos en cada una de las 3 posiciones del triplete , de los cuales se codifican 20 aminoácidos, 3 codones de terminación de la traducción y un codón de inicio de la traducción, el AUG, que codifica la metionina, es el primer codón de una transcripción de ARNm traducido por un ribosoma. Salvo la metionina y el triptófano que están codificados por un único codón, los aminoácidos pueden estar codificados por 2, 3, 4 ó 6 codones diferentes.

Los 3 codones de terminación llamados ocre (UAA), ámbar (UAG) y ópalo (UGA) son los tres tripletes que al no codificar ningún aminoácido ocasionan el cese de la síntesis proteica. Los codones que codifican un mismo aminoácido muchas veces tienen los dos primeros nucleótidos iguales, cambiando sólo el tercero. Las mutaciones son conocidas por el cambio de una o algunas de las bases nitrogenádas de un codón específico en diferentes niveles. Mutaciones en cualquiera de las tres posiciones del codón pueden dar lugar a la aparición de codones de paro, provocando una terminación de la traducción prematura , lo que ocasiona que se traduzca una proteína incompleta [1].

x	U	C	A	G
U	UUU Fenilalanina	UCU Serina	UAU Tirosina	UGU Cisteína
	UUC Fenilalanina	UCC Serina	UAC Tirosina	UGC Cisteína
	UUA Leucina	UCA Serina	UAA Ocre	UGA Ópalo
	UUG Leucina	UCG Serina	UAG Ámbar	UGG Triptófano
C	CUU Leucina	CCU Prolina	CAU Histidina	CGU Arginina
	CUC Leucina	CCC Prolina	CAC Histidina	CGC Arginina
	CUA Leucina	CCA Prolina	CAA Glutamina	CGA Arginina
	CUG Leucina	CCG Prolina	CAG Glutamina	CGG Arginina
A	AUU Isoleucina	ACU Treonina	AAU Asparagina	AGU Serina
	AUC Isoleucina	ACC Treonina	AAC Asparagina	AGC Serina
	AUA Isoleucina	ACA Treonina	AAA Lisina	AGA Arginina
	AUG Metionina	ACG Treonina	AAG Lisina	AGG Arginina
G	GUU Valina	GCU Alanina	GAU Á. Aspártico	GGU Glicina
	GUC Valina	GCC Alanina	GAC Á. Aspártico	GGC Glicina
	GUA Valina	GCA Alanina	GAA Á. Glutámico	GGA Glicina
	GUG Valina	GCG Alanina	GAG Á. Glutámico	GGG Glicina

Figure 19: 64 codones posibles.

Clonación

la clonación es el procedimiento de obtener una población de varios individuos genéticamente homogéneos a partir de uno solo mediante reproducción asexuada. El concepto de clonación puede aplicarse, en la ciencia moderna, tanto a nivel molecular como celular. La clonación del DNA puede definirse como la recombinación in vitro de un fragmento de DNA con un DNA vector con capacidad de replicación autónoma. El fragmento de DNA se replicará junto con el DNA vector en la célula hospedadora y así será posible obtenerlo en un número elevado de copias.Las etapas básicas son [2]:

1. Extracción y fragmentación específica del DNA del organismo que nos interesa.
2. Unión de los fragmentos de DNA: fragmento del DNA que nos interesa más el "vector" de transformación y replicación.
3. Introducción en las células receptoras del DNA recombinante.
4. Selección de colonias aisladas que porten moléculas de DNA recombinante.

Causa de la muerte de la primera oveja clona Dolly

Al realizar estudios del largo de los telómeros en la oveja Dolly, obtenida por clonación en un proceso de transferencia de núcleos, se encontró que éstos eran bastante más cortos que los de una oveja control de la misma edad. Dolly fue clonada a partir de una línea celular mamaria derivada del tejido de una oveja de 6 años y mantenida en cultivo, por lo que probablemente sufrió "erosión" de los telómeros antes de la transferencia de núcleos. Es importante hacer notar que Dolly manifestó prematuramente artritis, una enfermedad caracterśtica del envejecimiento,sin embargo esto no se puede atribuir directamente al proceso de clonación. El acortamiento de telómeros en clonación no es único, ya que se ha observado para otro tipo de ganado, por lo que la transferencia de núcleos durante este proceso, aparentemente no es capaz de restaurar el largo original de los telómeros. Los pacientes aquejados de progeria, el síndrome de envejecimiento prematuro, presentan un acortamiento significativo de los telómeros. También, en los portadores del síndrome de Down, se ha observado un envejecimiento prematuro, calculádose que pierden 133 pares de bases teloméricas por año, comparado con 41 en los controles normales [6]:

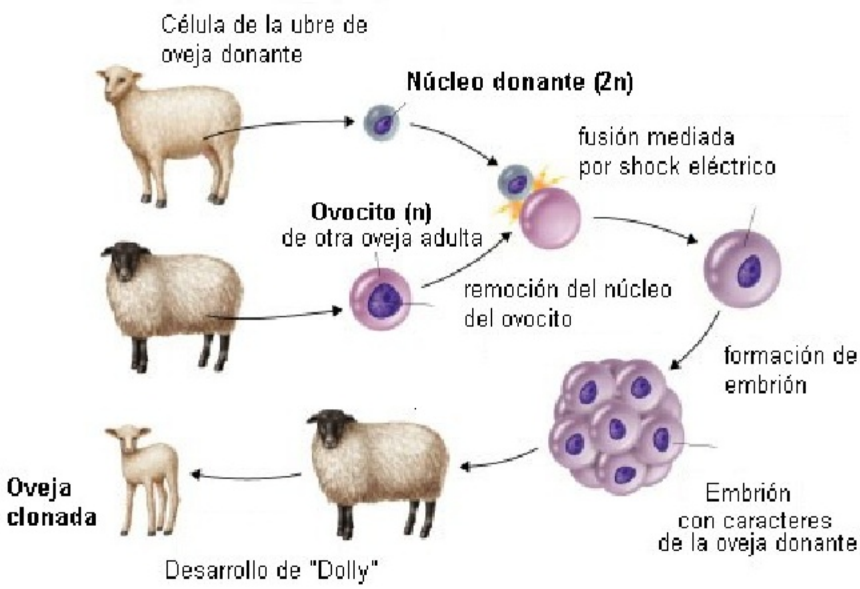


Figure 20: Esquema de clonación de Dolly.

Telómeros

Los telómeros son los extremos de los cromosomas. Son regiones de ADN no codificante, altamente repetitivas, cuya función principal es la estabilidad estructural de los cromosomas en las células eucariotas, la división celular y el tiempo de vida de las estirpes celulares. Además están involucradas en enfermedades tan importantes como el cáncer.

Los organismos procariotas tienen cromosomas circulares que no poseen telómeros. Algunos procariotas poseen cromosomas lineales con secuencias teloméricas, cuya secuencia es diferente a la de eucariotas [28].

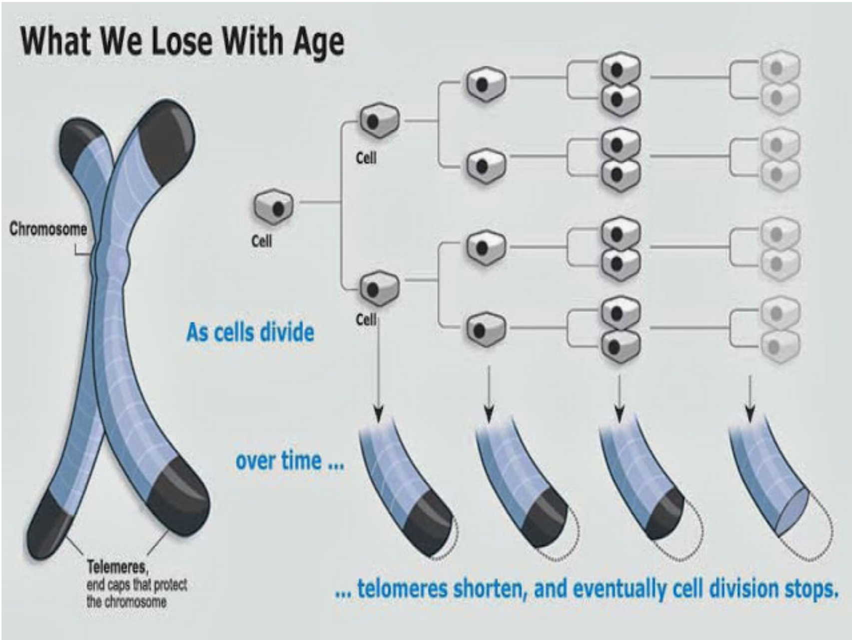


Figure 21: Telómeros.

Programa Permutaciones de nucleótidos

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <string>

void monsters(){
   cout << "Las␣24␣combinacones␣posibles␣para
␣␣los␣nucleotidos␣si␣se␣tomaran␣las␣4:";

char a[4]="ACGU";
int b[4]={0,0,0,0};
char c[4];
char d[4];

for (int x=0;x<4;x++){
      d[x]=a[x];
```

```
}
int i=0;
cout<<"(";

for (int k=0;k<4;k++){
      cout<<a[k];
}

cout<<") "<<endl;
while (i < 4){
     int cont=0;
     if  (b[i] < i) {
          if ((i%2)==0) {
               swap(a[0], a[i]);
               for (int x=0;x<4;x++){
                    c[x]=a[x];
               }

               for (int j=0;j<4;j++){
                    if (d[j] != c[j]){
                        cont++;
                    }
               }
          }
          else{
               swap(a[b[i]], a[i]);
               for (int x=0;x<4;x++){
                    c[x]=a[x];
               }
               for (int j=0;j<4;j++){
                    if (d[j] != c[j]){
                        cont++;
                    }
               }
          }
          cout<<"(";
          for (int p=0;p<4;p++){
               cout<<c[p];
          }
            cout<<")"<<endl;
```

```
                b[i]++;
                i = 0;
        }
        else{
                b[i] = 0;
                i++;
        }
    }
}
```

Ley del Decaimiento y vida Media

Ley de Decaimiento

Los procesos de desintegración nuclear son estadísticos. La desintegración de todos los núcleos o de un fenómeno que siga ésta regla no se suceden a intervalos iguales de tiempo sino que obedecen a leyes estadísticas. En base a ésto podemos determinar la velocidad a la que ocurre un proceso de decaimiento en una muestra, la cual es proporcional al número de núcleos radioactivos o unidades presentes. Si N es la cantidad de núcleos radioactivos presentes en la muestra en algún instante, entonces la razón de cambio de N es [73]:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{247}$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer órden:

$$-dN = N\lambda dt \qquad \rightarrow \qquad \frac{-dN}{N} = \lambda dt \tag{248}$$

Integrando en ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \qquad \rightarrow \qquad ln(N) + c = -\lambda t + d \tag{249}$$

Acomodando las constantes generadas por la integral y elevando ambos lados de la ecuación como exponentes de la base de e tenemos:

$$e^{ln(N)+c} = e^{-\lambda t+d} \tag{250}$$

Usando propiedades de los exponentes de la base e tenemos:

$$e^{ln(N)}e^{c} = e^{-\lambda t}e^{d} \tag{251}$$

Aplicando las leyes de logaritmos y convirtiendo las constantes tenemos:

$$fN = ge^{-\lambda t} \qquad \rightarrow \qquad e^{c} = f; e^{d} = g \tag{252}$$

$$N = he^{-\lambda t} \qquad \rightarrow \qquad f/g = h \tag{253}$$

Finalmente N es una función que depende de t y la constante $f = N_0$:

$$N_{(t)} = N_0 e^{-\lambda t} \tag{254}$$

Ley de vida media

El tiempo medio que sobrevive un núcleo u elemento antes de desintegrarse (media aritmética), se define como:

$$-dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt \tag{255}$$

La vida media se define con la letra τ dividiendo por el número total de núcleos o elementos como:

$$\tau = -\frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} t dN = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt \tag{256}$$

Integrando por partes obtenemos:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t}|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \tag{257}$$

$$\tau = -\frac{\lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda t}|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \tag{258}$$

Algunas fuentes relacionan el periodo $T = \tau ln(2) = 0.693 < \tau$ [50].

Falacia del Apostador

Es un falacia lógica por la que se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan a los futuros en lo relativo a actividades aleatorias, como en muchos juegos de azar. Un juego puede volverse compulsivo y la ilusión de ganar o de los números tiene tanto poder como la información confiable que da un sentido.

Ya en el aõ 100 A.C. Cicero sostenía que las decisiones deben basarse en probabilidades, ya que los eventos no tienen memoria como en la ruleta no tiene memoria, entonces en dicho juego todos los números tienen las mismas posibilidades de salir, sería algo difícil que salga el 0 tres veces seguidas pero tiene las mismas opoetunidades de suceder que las series 1, 2 y 3 o 36, 35 y 34 o el 12, 5 y 17 etc.

También las series tienen el mismo principio de no tener memoria y todo evento fortuito tendrá las mismas posibilidades [37].

Cardinalidad del conjunto potencia mediante coeficiente binomial

Partiendo de :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{259}$$

y:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^{k} \tag{260}$$

Si $x \neq 0$ y se calcula:

$$0^0 = (x + (-x))^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} (-x)^i \tag{261}$$

$$\binom{0}{0} x^{0-0} (-x)^0 = 1x^0 (-x)^0 = 1 \tag{262}$$

Si lo realizamos para $(0+1)^1 = 1$ obtenemos:

$$1 = (0+1)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (0))^{1-i} (1))^i = \binom{1}{0} (0))^{1-0} (1))^0 + \binom{1}{1} (0))^{1-1} (1))^1 \tag{263}$$

$$(1)0^1(1) + (1)0^0(1) = 0 + 0^0 = 1 \tag{264}$$

Demostrando dicha expansión para $0^0 = 1$ en la cardinalidad de un conjunto mediante el teorema del binomio.

Tarea 7

Células HELA

HeLa es la línea celular que proviene de Henrietta Lacks. Su "inmortal", significando deriva de que puede regenerarse indefinidamente si se le dan nutrientes y espacio para crecer. HeLa representa posibilidades esencialmente infinitas. La historia de la línea celular HeLa es larga y algo controvertida . A pesar de su papel central como la primera línea celular humana continua de cáncer, la identidad de la línea celular HeLa ha estado acompañada de incertidumbre. Aunque originalmente se informó en 1952 como un carcinoma epitelial cervical de una mujer afroamericana, análisis posterior de la patología tumoral y fenotipo clínico claramente identificó el tumor primario como un adenocarcinoma. Yas que fue la primera línea de células humanas que se cultiva ampliamente [52].

HeLa ha experimentado una fuerte adaptación a las condiciones de cultivo. Aunque cariotípicamente muy anormal y portador de cromosomas marcadores citológicamente distintos , es fenotípicamente epitelial en apariencia, crece rápidamente (tiempo de duplicación es 24 h), y muestra una falta de inhibición de contacto. Estas características y su ubicuidad en los laboratorios de cultivo celular han conducido a una frecuente contaminación cruzada. Se ha estimado que el 18% de las líneas celulares sometidas a repositorios están contaminadas con otras líneas celulares, siendo la HeLa responsable del 25% de estos eventos de contaminación cruzada.

En muchos casos, la línea originalmente depositada ha sido completamente reemplazada, resultando en la pérdida de recursos de investigación potencialmente únicos en las mismas instalaciones diseñadas para asegurar su mantenimiento [52].

Fase

La mujer de la que derivan las células HeLa se llamaba Henrietta Lacks, y era esposa y madre de cinco cuando falleció en la Universidad John Hopkins a la edad de treinta y un años. Una muestra de uno de sus tumores fue enviada a George y Maragret Gey que habían estado buscando una línea de células humanas que sobrevivirían indefinidamente fuera del cuerpo con fines de investigación.

Las células tumorales que recibieron se multiplicaron sin ningún problema y pronto las células, dobladas HeLa en una forma truncada del nombre de Lacks, fueron enviadas a sus colegas en todo el mundo. Las células se convirtieron más tarde en un estándar de laboratorio e incluso se han cultivado en el espacio [72].

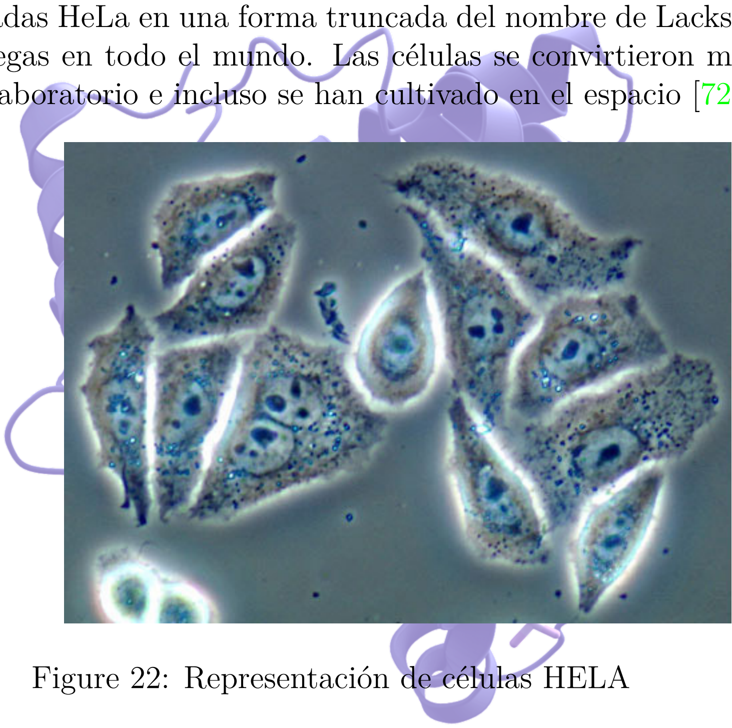


Figure 22: Representación de células HELA

Inmunidad del VIH

Con cualquier virus, incluso el Ebola y el VIH, hay personas que están expuestas, a menudo repetidamente, pero de alguna manera nunca se infectan o desarrollan síntomas de la enfermedad. Aunque los médicos se han preguntado la razón de que ocurra esto, especialmente en el caso del VIH, sólo se ha encontrado una explicación. Científicos de la Universidad de Minnesota estudiando el VIH-1 descubrieron que algunas personas tienen una variación específica de un gen, el APOBEC3H, que produce una proteína antirretroviral que inhibe la replicación del VIH.

Se tiene siete genes APOBEC3 dentro de las variantes de la población humana, de estos siete genes,el propio APOBEC3H tiene siete variaciones, y si se agrupa ampliamente estas en las que hacen proteínas estables y las que hacen proteínas inestables,lo que encontramos son aquellos que son estables que confieren resistencia a algunas formas de VIH [23].

Factor de Infectividad Viral

Los virus no pueden reproducirse o sostenerse por sí mismos, por lo que requieren un anfitrión. En el caso del virus de la inmunodeficiencia humana, sus huéspedes son las células de linfocitos T que se encuentran en el sistema inmunológico. Después de ganar el control de la maquinaria molecular de las células T, el virus se duplica a sí mismo y luego destruye su huésped. Naturalmente, esto daña el sistema inmunológico y por lo tanto las personas infectadas con el VIH se vuelven cada vez más susceptibles a cualquier patógeno que decide invadir sus cuerpos, incluyendo enfermedades como el cáncer. Los linfocitos T poseen su propio mecanismo de defensa en forma de proteínas antirretrovirales producidas por los genes APOBEC3. A su vez, el VIH tiene su propia contra-defensa - una proteína llamada factor de infectividad viral (Vif), que ataca las defensas del linfocitos T en forma de la destrucción de las enzimas APOBEC3 [23].

La hipótesis de que diferentes niveles de susceptibilidad a VIH-1 podría estar relacionado con las variaciones en el gen que produce esta proteína antirretroviral.Probando su teoría, Harris y sus colegas descubrieron por primera vez que una infección por VIH-1 aumentaba las proteínas APOBEC3H. Esto, entonces, tenía que ser una parte importante de la susceptibilidad al VIH. Luego, esencialmente tomaron cepas de VIH,y se descubrió qué aminoácidos son necesarios para contrarrestar el APOBEC3H. Después de crear las sondas necesarias, el equipo de investigación utilizó células de donantes y encontró que diferentes personas con diferentes variaciones genéticas de APOBEC3H produjeron proteínas antirretrovirales más fuertes y más estables. Las variaciones estables, encontraron los investigadores, bloquearon con éxito la capacidad del VIH-1 de replicarse en casos donde la cepa del VIH tenía una versión débil de Vif.

Cuando el virus del VIH-1 posee fuerte Vif, las proteínas protectoras no importa cuan estable , cede a la infección. Se podría imaginar fármacos que impidan que Vif se una a APOBEC. Este enfoque podría suprimir indefinidamente el virus y evitar que se reproduzca. [23].

Criterio de divisibilidad entre 11

Los divisores de 11 son: 1 y 11 pues es número primo. Los primeros múltiplos de 11 son: 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209 etc.

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre sus dígitos que ocupan lugar par e impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo 1
Ver si la cifra 57342 es divisible por 11. Los dígitos colocados en lugar par son: 7 y 4 y los de lugar impar 5, 3 y 2. Aplicando el criterio: lugar par (7 + 4) − lugar impar (5 + 3 + 2) = 11 − 10 = 1 que no es 0 ni múltiplo de 11, luego 57342 no es divisible por 11.

Ejemplo 2
Probar que 101354 es divisible por 11. Mediante el criterio de divisibilidad, los dígitos que ocupan lugar impar (4 + 3 + 0) − los dígitos par (5 + 1 +1) = 7 − 7 = 0, luego 101354 es divisible por 11. [29].

Juego de la vida

El juego de la vida es un autómata celular diseñado por el matemático británico John Horton Conway en 1970. El juego tiene una variedad de patrones reconocidos que provienen de determinadas posiciones iniciales. Es en realidad un juego de cero jugadores, lo que quiere decir que su evolución está determinada por el estado inicial y no necesita ninguna entrada de datos posterior. El "tablero de juego" es una malla formada por cuadrados que se extiende en todas las direcciones. Cada cuadro tiene 8 cuadros vecinos, que son las que están próximas a ella, incluidas las diagonales.

Los cuadros tienen dos estados de apagado o encendido. El estado de la malla evoluciona a lo largo de unidades de tiempo discretas o por turnos. El estado de todos los cuadros se tiene en cuenta para calcular el estado de las mismas al turno siguiente. Todas los cuadros se actualizan simultáneamente. Las transiciones dependen del número de cuadros vecinos encendidos. Un cuadro apagado con exactamente 3 cuadros vecinos prendidos "nace". Un cuadro encendido con 2 ó 3 cuadros vecinos encendidos sigue encendido, en otro caso se apaga o permanece inactivo por "soledad" o "superpoblación", lo que se le conoce como reglas de los vecinos inmediatos en los autómatas celulares [57].

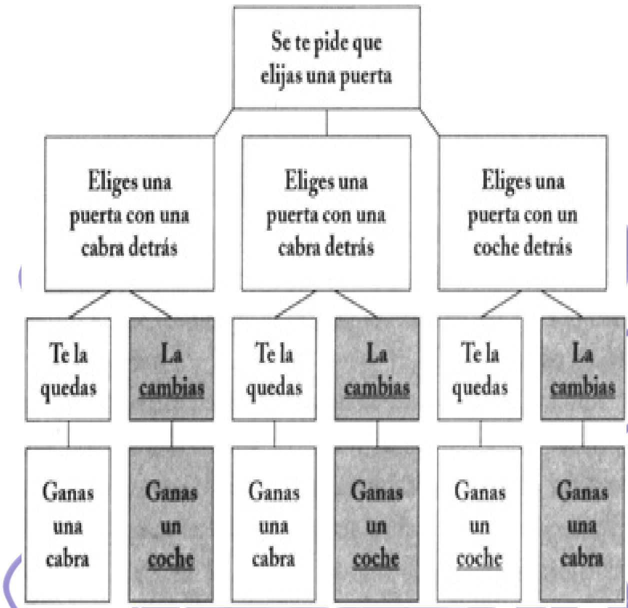
En general éstas reglas son:

1. Entorno de Moore. Se consideran la vecindad del cuadro o célula como los 8 cuadros que lo rodean.

2. Muerte: una célula viva morirá si en su entorno hay menos de dos células vivas o más de tres.
3. Supervivencia: una célula viva permanecerá en ese estado si en su entorno hay dos o tres células vivas.
4. Nacimiento: una célula muerta nacerá si en su entorno hay, exactamente, tres células vivas[26].

El problema de Monty Hall

El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad que está inspirado por un concurso televisivo estadounidense en éste concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una burro. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde esta el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay un burro. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ?'Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta?.Si se quita una puerta sin premio, la puerta que nosotros escogimos tiene un 50% de tener una burro y por tanto da igual cambiar que no hacerlo, as posibilidades se muestran a continuación usando cabras: [5]



Asumimos que hay dos tipos de jugador, los que nunca cambian de puerta y los que cambian siempre. El suceso A es cuando el jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial, B el jugador que selecciona una puerta que contiene una cabra o burro en su selección inicial, y el suceso G es cuando jugador gana el coche. Estamos interesados en calcular$P(G)$ para cada tipo de jugador, para ello basta notar que $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$, ya que $(A \cap B) = \emptyset$ y $(A \cup B) = \omega$, siendo ω el espacio muestral, su construcción en t"erminos de conjuntos y de probabilidad es [5]:

$$
\begin{aligned}
&P(G) = P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = \\
&P(G \cap A) + P(G \cap B) = \\
&P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)
\end{aligned}
$$

Se puede concluir que$P(A) = 1/3$ y $P(B) = 2/3$,pues hay un coche y dos cabras o burros. Para los demás calculamos para el jugador que nunca se cambia, se tiene un $P(G) = 1/3$, pues el jugador se queda con su selección inicial. El jugador que siempre se cambia tiene una $P(G) = 2/3$. Claramente la mejor estrategia es cambiar siempre, pues la probabilidad efectiva de ganar es el doble de la correspondiente al jugador que no cambia nunca [5].

Teoría de grupos

La teoría de grupos estudia las estructuras algebraicas conocidas como grupos. Sus objetivos son, entre otros, la clasificación de los grupos, sus propiedades y sus aplicaciones. Los grupos sirven como pilar a otras estructuras algebraicas más elaboradas .Es potencialmente aplicable en situaciones caracterizadas por la simetría. En el orden de un grupo , conocido también como su cardinalidad, los grupos pueden clasificarse en grupos de orden finito o de orden infinito. Un grupo (G, o) es un conjunto en el que se ha definido una operación binaria interna que satisface los siguientes axiomas [59].

1. Asociatividad: $\forall,\ a, b, c,\ \epsilon,\ G : ao(boc) = (aob)oc.$

2. Elemento neutro: $\exists,\ e,\ \epsilon,\ G : eoa = aoe = a.$

3. Elemento simétrico:, $\forall a,\ \epsilon G,\ \exists,\ a^{-1},\ \epsilon,\ G : aoa^{-1} = a^{-1}oa = e.$

Por lo tanto, un grupo está formado por un conjunto de elementos abstractos o símbolos, y por una ley de composición interna (operación binaria) que los relaciona. Dicha ley de composición interna indica cómo deben ser manipulados los elementos del grupo.

Combinaciones con repetición

En combinatoria, las combinaciones con repetición de un conjunto son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse. Una combinación con repetición es la selección de un multiconjunto cuyos elementos pertenezcan a un conjunto dado [8].

Se puede aplicar en general repartir k objetos entre n objetos, corresponde a formar multiconjuntos de tamaño k escogidos de un conjunto con n , y a su vez esto puede enumerarse con una serie de k asteriscos y n-1 barras, que puede realizarse o representarse en términos de conjuntos binomiales:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \tag{265}$$

Así el teorema nos da el número de multiconjunto con k elementos escogidos de un conjunto con n elementos satisface que es igual al número de combinaciones con repetición de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos y que es igual al número de formas de repartir k objetos en n grupos, dado como [8]:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{266}$$

Programa de Permutaciones par e impar

(Juan Carlos Moreno.Programa Permutaciones PIP.C)

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <string>

void permut(){
int n;
cout << "Cuantos␣elementos␣se␣permutaran?:␣";
```

```
scanf("%i",&n);
std::vector<char> a(n);
    for (int i=0;i<(n);i++){
            cout << "Introduzca un caracter a permutar ";
            scanf("%s",&a[i]);
     }


std::vector<char> d(n);
d=a;
int i=0;
std::vector<int> b(n);
std::vector<char> c(n);
cout<<"(";
for (int k=0;k<n;k++){
        cout<<a[k];
}
cout<<")    Par"<<endl;
     while (i < n){
          int cont=0;
          if (b[i] < i) {
               if ((i%2)==0) {
                    swap(a[0], a[i]);
                    c=a;
                    for (int j=0;j<n;j++){
                         if (d[j] != c[j]){
                              cont++;
                         }
                    }
               }
               else{
                    swap(a[b[i]], a[i]);
                    c=a;
                    for (int j=0;j<n;j++){
                         if (d[j] != c[j]){
                              cont++;
                         }
                    }
               }
               cout<<"(";
```

```
                for (int k=0;k<n;k++){
                    cout<<c[k];
                }
                cout<<")    ";
                if (cont%2==0){
                    cout<<"Impar"<<endl;
                }
                else{
                    cout<<"Par"<<endl;
                }
                b[i]++;
                i = 0;
            }
            else{
                b[i] = 0;
                i++;
            }
        }
}
```

Problemas Combinatoria de Shaum's

Ejemplo 10

Suponer que hay muchos calcetines rojos, muchos blancos y muchos azules en una caja.¿ Cúal es el menor número de calcetines que uno debería tomar de la caja sin ver su contenido para estar seguro de tomar una pareja ? [7].

Solución: Si cada color se considera una pichonera, entonces n=3, así que si uno toma n+1=3+1=4 pichones, o calcetines, al menos 2 de ellos serán del mismo color.

Ejemplo 11

El ejemplo anterior, pero si se desea 3 pares pares del mismo color.

Solución: Usando la fórmula de la pichonera, aún se tiene n=3 pichoneras, pero queremos asegurar que uno o más de ellos contengan k+1=6, así que k=6-1=5 o más pichones, por lo que tomamos k(n)+1=(5)(3)+1=16 pichones, o bien, 16 calcetines.

Ejemplo 12

Un cofre contiene 20 camisas, 4 son bronce,7 blancas, y 9 azules. ¿ Al menos cúantas camisas se deben remover para obtener ya sea r=4,5,6,7,8 y 9 camisas del mismo color?

Solución:
Caso 1, r=4:4=k+1, entonces k=3, hay 3 colores, o n=3, así que al menos kn+1=x=3(3)+1=10 camisas que deben ser removidas.

Caso 2, r=5:r=k+1=5, así que k=5-1=4, con 3 colores n=3, así que al menos kn+1=x=4(3)+1=13 camisas que deben ser removidas.

Caso 3, r=6:r=k+1=6, así que k=6-1=5, con 3 colores n=3, pero se retira n-1 debido a que ya se espera que se removieran de la anterior, así se transforma a a 4 de los que ya se removió, de forma en que se asegura 4 sean removidas, de manera que 4+(kn+1)=4+ (5(2)+1)=15 camisas que deben ser removidas.

Caso 4, r=7:r=k+1=7, así que k=7-1=6, con 3 colores n=3, pero se retira n-1 debido a que ya se espera que se removieran de la anterior, así se transforma a a 4 de los que ya se removió, de forma en que se asegura 4 sean removidas, de manera que 4+(kn+1)=4+ (6(2)+1)=17 camisas que deben ser removidas.

Caso 5, r=8:r=k+1=8, así que k=8-1=7, con 3 colores n=3, pero se retira n-1 debido a que ya se espera que se removieran de la anterior, así se transforma a a 4 de los que ya se removió, de forma en que se asegura 4 sean removidas, de manera que 4+(kn+1)=4+ (7(2)+1)=19 camisas que deben ser removidas.

Caso 6, r=9:r=k+1=9, así que k=9-1=8, con 3 colores n=3, pero se retira n-1 debido a que ya se espera que se removieran de la anterior, así se transforma a a 4 de los que ya se removió, de forma en que se asegura 4 sean removidas, de manera que 4+(kn+1)=4+ (8(2)+1)=21 camisas que deben ser removidas.

Problema 1.7

Provar que un palíndromo de número decimal par es divisible entre 11.

Solución: El criterio de divisibilidad de 11, para un palíndromo, el primero y el último dígito se mantienen, si un número palíndromal N de longitud 2k, si k=1, si k$\geq$ 2, tenemos al final:

$$N = a_{2k-1}P + Q \tag{267}$$

Donde se expresa longitud 2k y luego 2k-2:

$$P = 100......001 = 11x9090....9091 \tag{268}$$

Ya sea $Q = 0$, divisible entre 11, o para algún $1 \leq r \leq k-1$.Si $Q = 10'\{$palíndromo de longitud 2(k-r) $\} = 10'\{11R\}$. Así es que N es divisible entre 11.

Problema 1.8

En un palíndromo binario, el primer dígito es 1 y cada dígito subsecuente podría ser 0 ó 1. Contar los palíndromos binarios de longitud n.

Solución: Se tiene $[(n+1)/2] - 1 = [(n-1)/2]$, calculando, el factor 2 a la n, se tiene: $2^{(n-1)/2}$.

Problema 1.29

Encontrar la probabilidad p_n de que un arreglo aleatorio de n personas incluyendo al menos 2 personas con el mismo cumpleaños.

Solución: Tratando con muestras de cumpleaños, del 1 al 365. Aquí es más simple considerar la probabilidad complementaria, todos los cumpleaños son distintos,

$P(365,n)$ y el número total de muestras es 365^n así que la probabilidad complementaria es $1-p_n = P(365,n)/365^n$:

$$p_n = 1 - \frac{P(365,n)}{365^n} = 1 - \frac{(365)(365-1)(365-2)...(365-(n-1)}{365^n} = \tag{269}$$

$$p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)..\left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \tag{270}$$

Por lo que se necesitan $p_n > 1/2$, cuando $n > 25$.

Problema 1.39

Probar:

$$a)\sum_{i=0}^{n} C(n,r) = 2^n \tag{271}$$

Solución: Si usamos el teorema del binomio con r=0:, x=y=1:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ...\binom{n}{n}x^0 y^n = \tag{272}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2.....\binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n = \tag{273}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2.....\binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n = \tag{274}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ...\binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n = \tag{275}$$

$$(x+y)^n = \frac{n!}{0!(n)!}1^n1^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!}1^{n-1}1^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}1^{n-2}1^2 + \ldots.. \tag{276}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}1^11^{n-1} + \frac{n!}{n!(n-n)!}1^0y^n = \tag{277}$$

$$(1+1)^n = 1^n + (n)1^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}1^{n-2} + \ldots(n)1^{n-1} + 1^n = 2^n \tag{278}$$

$$b) \sum_{r=0}^{n}(-1)^r C(n,r) = 0 \tag{279}$$

Solución: Si usamos el teorema del binomio con x=-y=1:

$$(x+y)^n = (-1)^0\binom{n}{0}x^ny^0+(-1)^1\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+(-1)^2\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots..(-1)^n\binom{n}{n}x^0y^n = \tag{280}$$

$$(1-1)^n = \binom{n}{0}1^n+(-1)\binom{n}{1}1^{n-1}(-1)+\binom{n}{2}(1)^{n-2}+\ldots..(-1)^n\binom{n}{n}(-1)^n = \tag{281}$$

Problema 1.77

Mostrar que en cualquier grupo de personas habrá al menos 2 personas que conocen al mismo número de personas en el grupo.

Solución: Supongamos a el grupo denotado por el set $X = \{1, 2, 3, ...n\}$, en el hay k personas quien no conoce a nadie en el grupo.Si $k > 1$, hay al menos 2 personas que no conocen a nadie en el grupo. Si $k = 0$ si x_i es el número de personas conocidas a i , donde $i = 2, 2, 3...n$. Ya que $1 \leq x_i \leq n-1$ para cada valor de i, n números x_i no pueden distinguirse, así que hay al menos 2 enteros i y j tales que $x_i = x_j$. Si $k = 1$, se ignora a la persona que no conoce a nadie en el grupo, donde n se remplaza por $n-1$.

Problema 1.78

Considerar un torneo en el cual cada uno de los n jugadores juega en contra de cada uno de os otros jugadores y cada jugador gana al menos una vez. Mostrar que hay al menos 2 jugadores que tiene el mismo número de victorias.

Solución: El mínmo de victorias por jugador como se menciona es al menos 1, por lo tanto, si el jugador llega a ganarles a todos, a lo mucho puede ganar $n-1$ veces excluyéndose a sí mismo. Si los juegos ganados corresponden a las pichoneras para acomodar n jugadores o pichones, entonces suponemos el número de victorias como las pichoneras cuyo valor máximo es $n-1$, si todos ganan una vez, al menos cada uno tendrá 1 especio en la pichonera, o número de victorias =1, por lo que si cada jugador ocupa 1 victoria como mínimo por pichonera, hay n jugadores, 1 más que las pichoneras, por lo que necesariamente habrá una casilla o número de victorias con mínmo 2 jugadores o pichones, al ser siempre n mayor a n-1 y asegurando una victoria o pichonera por cada jugador ocupado.

Problema 1.87

Hay 12 microcomputadoras y 8 impresoras láser en una oficina, encontrar el mínimo número de conexiones a hacer para asegurar que si 8 o menos computadoras quieren imprimir al mismo tiempo, cada una de ellas podrá usar una impresora diferente.

Solución: Suponer a las impresoras como $P_j = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ y las computadoras como $C_i = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$, se conectarán las primeras 5 impresoras a la primera computadora, repetir el patrón hasta generar una tabla como:

x	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
C1	1	0	0	0	0	0	0	0
C2	1	1	0	0	0	0	0	0
C3	1	1	1	0	0	0	0	0
C4	1	1	1	1	0	0	0	0
C5	1	1	1	1	1	0	0	0
C6	0	1	1	1	1	1	0	0
C7	0	0	1	1	1	1	1	0
C8	0	0	0	1	1	1	1	1
C9	0	0	0	0	1	1	1	1
C10	0	0	0	0	0	1	1	1
C11	0	0	0	0	0	0	1	1
C12	0	0	0	0	0	0	0	1

Si 8 computadoras solicitan una impresora al mismo tiempo, se tiene la observación de que $s \leq i_s \leq s+4$, , si $i_s < s$ habrá s enteros más pequeños que s, y si $i_s \geq s+5$, al menos $12-(s+6)+1=7-s$ valores estarán disponibles a los 8 - s restantes.

Problema 2.29

Un subset A de un n substes de X, ?' Cuántas permutaciones inducen re-arreglos de A?

Solución: Si $A_i(i=1,2,3,4...r)$, denotar el subset de permutaciones de X el cúal deja el iésimo elemento de A fijo. Entonces $n(X)=n!, s_j=C(r,j)(n-j)!, j=1,2,3...r)$.

Problema 2.30

Mostrar que $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$ donde $n \geq 3$, si $D_2=1$ y $D_1=0$.

Solución: Considerar el desarreglo de $X = \; 1,2,3..n$ cuando r ocupa la primera posición , entonces, ya sea que 1 no ocupe o no. Hay D_{n-1} desarreglos con respecto $X- \; r$,la posición r es la posición 1 y D_{n-1} del último tipo, elemento r puede ser escogido de $n-1$ formas:

Para $n=3$:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = D_3 = (3-1)(D_{3-1} + D_{3-2}) = \tag{282}$$

$$D_3 = (2)(D_2 + D_1) = (2)(1+0) = 2 \tag{283}$$

Para $n = 4$:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = D_4 = (4-1)(D_{4-1} + D_{4-2}) = \tag{284}$$

$$D_4 = (3)(D_3 + D_2) = (3)(2+1) = 9 \tag{285}$$

Problema 2.68

Usar la generación de la función $E(x)$ para probar:

$e_j = C(m,j)3^{m-j}$. Para toda j.

Solución: Se tiene la función:

$$E(x) = \sum_{j=0}^{m} C(m,j)x^j 3^{m-j} = (x+3)^m \tag{286}$$

$$E(x) = \frac{m!}{0!(m)!}x^0 3^m + \frac{m!}{1!(m-1)!}x^1 3^{m-1} + \frac{m!}{2!(m-2)!}x^2 3^{m-2} + ... \tag{287}$$

$$\frac{m!}{(m-1)!(m-(m-1))!}x^{m-1}3^{m-(m-1)} + \frac{m!}{m!(m-m)!}x^m 3^{m-m} \tag{288}$$

$$E(x) = 3^m + \frac{m!}{m!/m}x3^{m-1} + \frac{m!}{2(m-2)!}x^2 3^{m-2} + ... \tag{289}$$

$$\frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1}3 + x^m \tag{290}$$

$$E(x) = 3^m + mx3^{m-1} + \frac{m!}{2(m-2)!}x^2 3^{m-2} + ...mx^{m-1}3 + x^m = (x+3)^m \quad (291)$$

Entonces $1/2[E(1) - E(-1)]$ es:

$E(1) = (1+3)^m = 4^m; E(-1) = (-1+3)^m = 2^m$

$1/2[E(1) - E(-1)] = 1/2(4^m - 2^m)$

Problema 2.69

De 100 estudiantes del problema 2.20, '? Cuántos toman (a) exactamente 1 curso, (b)exactamente 2 cursos, (c) exactamente 3 cursos, (d) al menos un curso, (e) al menos 2 cursos , (f) al menos 3 cursos:

Solución: Con s_k calculado en el anterior problema, según l teorema 2.7 y 2.8 da:

(a) $e_1 = 60 - C(2,1)(39) + C(3,2)(10) - C(4,3)(2) = 4$
(b) $e_2 = 39 - C(3,1)(10) + C(4,2)(2) = 21$
(c) $e_3 = 10 - C(4,1)(2) = 2$
(d) $f_1 = 60 - C(1,1)(39) + C(2,2)(10) - C(3,3)(2) = 29$
(e) $f_2 = 39 - C(2,1)(10) + C(3,2)(2) = 25$
(f) $f_3 = 10 - C(3,1)(2) = 4$

Problema 2.70

Una función w de un set X del set de los números reales es llamado función de peso en X.Si X es finito y A es un subset, el peso de A , denotado como $w(A)$, es la suma para todo $w(x)$ para $x \ \epsilon$ A. Si $\prod$ es un set de m propiedades (como en el problema 2.65), si $A_j(j = 0, 1, 2, 3...., m)$ es el set de todos los elementos en X que tiene exactamente j propiedades y si j es $B_j(j = 1, 2, 3, ..., m)$ el set de todos los elementos en X teniendo al menos j propiedades. Para cada j, se escribe $E_j = w(A_j)$ y $F_j = w(B_j)$. Si Q es un subset de $\prod$, w(Q)es definido como la sumatoria de los pesos de todos los elementos en X el cual tiene cada propiedad en Q. Finalmente , en analogía con el problema s_k 2.65 se define:

$$S_k = \begin{cases} w(X) & k = 0 \\ \\ \sum_{Q\subset\prod}^{k} w(Q) & k = 1, 2, 3..., m \\ n(Q) = k & \end{cases}$$

Probar que el teorema 2.8 y 2.9 permanecen válidos si e_j, f_j y s_j son remplazadas respectivamente por E_j, F_j y S_j.

Solución: en la prueba del problema 2.65 (a), se reemplaza la cuenta de x (1 o 0), por el peso de x (w(x) o 0), de tal forma que :

$$e_j = s_j - C(j+1,1)s_{j+1} + C(j+2,2)s_{j+2}.... + (-1)^{m-j}C(m, m-j)s_m \quad (292)$$

La prueba del ejercicio 2.65 (b) permanece sin cambios, para un peso particular w(x)=1, tenemos $S_j = s_j$, etc.

Problema 2.71

Si $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ es un set con pesos 2,3,4,5,6 y 7 respectivamente, y $\prod = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ es el set de propiedades. Dado (i) a,b,c,e y f tiene la propiedad α ;(ii) b,c,d y f tiene la propiedad β; (iii) a,d, e y f tienen la propiedad γ ; (iv) b,c,d y e tienen la propiedad δ.Calcular todos los E_j, F_j y S_j.

Solución: En la notación del problema 2.70, A_0, A_1, y A_4 están vacios; $A_2 = \{a\}$; $A_3 = \{b, c, d, e, f\}$. Así que :

$E_0 = 0, E_1 = 0, E_2 = 2, E_3 = 25, E_4 = 0$

Además: $B_1 = B_2 = X, B_3 = A_3$ y B_4 está vacío, entonces:

$F_1 = F_2 = 27, F_3 = 25, F_4 = 0$

Debido a (i) del problema 2.70, $S_0 = w(X) = 2+3+4+5+6+7 = 27$.

$w(\{\alpha\}) = w(a)+w(b)+w(c)+w(e)+w(f) = 22$
$W(\{\beta\}) = w(b)+w(c)+w(d)+w(f) = 19$
$w(\{\gamma\}) = w(a)+w(d)+w(e)+w(f) = 20$
$w(\{\delta\}) = w(b)+w(c)+w(d)+w(e) = 18$
$S_1 = 22+19+20+18 = 79$
$w(\{\alpha,\beta\}) = w(b)+w(c)+w(f) = 14$
$w(\{\alpha,\gamma\}) = w(a)+w(e)+w(f) = 15$
$w(\{\alpha,\delta\}) = w(b)+w(c)+w(e) = 13$
$w(\{\beta,\gamma\}) = w(d)+w(f) = 12$
$w(\{\beta,\delta\}) = w(b)+w(c)+w(d) = 12$
$w(\{\gamma,\delta\}) = w(d)+w(e) = 11$
$S_2 = 14+15+13+12+12+11 = 77$
$w(\{\alpha,\beta,\gamma\}) = w(f) = 7$
$w(\{\alpha,\beta,\delta\}) = w(b)+w(c) = 7$
$w(\{\beta,\gamma,\delta\}) = w(d) = 5$
$w(\{\alpha,\gamma,\delta\})$
$S_3 = 7+7+5+6 = 25$
Finalmente, $S_4 = E_4 = 0$

Problema 2.72

Verificar el teorema 2.8 y 2.9 generalizado para los datos del problema 2.71.

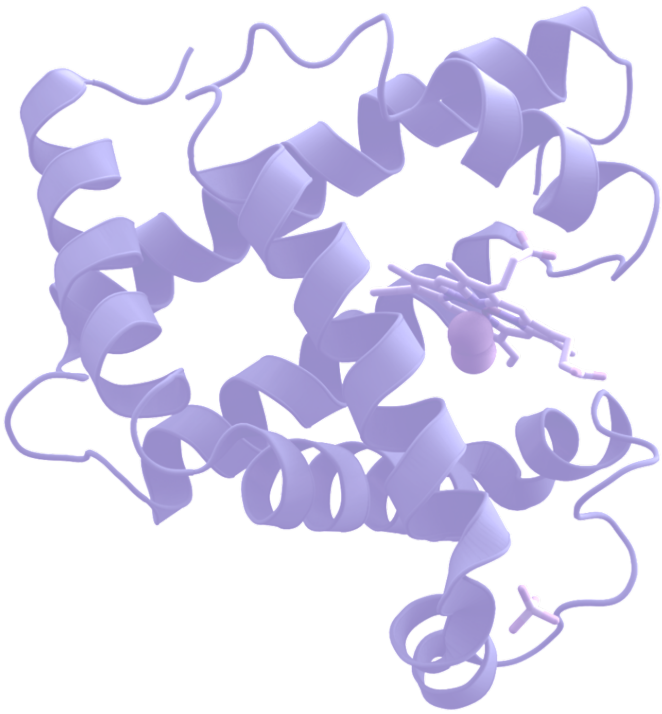
Solución: Verificando el teorema 2.7 para $j = 0, 1, ..., 4$: tenemos:

$S_0 - C(1,1)S_1 + C(2,2)S_2 - C(3,3)S_3 + C(4,4)S_4 = 27-79+77-25+0 = 0 = E_0$
$S_1 - C(2,1)S_2 + C(3,2)S_3 - C(4,3)S_4 = 79 - 154 + 75 - 0 = 0 = E_1$
$S_2 - C(3,1)S_3 + C(4,2)S_4 = 77 - 75 + 0 = 2 = E_2$
$S_3 - C(4,1)S_4 = 25 - 0 = 25 = E_3$
$S_4 = 0 = E_4$

Comprobando el teorema 2.9 para $j = 1, ..., 4$:

$S_1 - C(1,1)S_2 + C(2,2)S_3 - C(3,3)S_4 = 79 - 77 + 25 - 0 = 27 = F_1$
$S_2 - C(2,1)S_3 + C(3,2)S_4 = 77 - 50 + 0 = 27 = F_2$

$S_3 - C(3,1)S_4 = 25 - 0 = 25 = F_3$
$S_4 = 0 = F_4$



Tarea 8

Congruencia de Zeller

La Congruencia de Zeller es un algoritmo que se atribuye al matemático alemán Julius Christian Johannes Zeller que vivió en el siglo XIX. Este algoritmo nos permite determinar el día de la semana que le corresponde a una fecha determinada del calendario Gregoriano, la fórmula general es:

$$D_{sem.} = \Bigg(d_{men.} + \left[\frac{(mes+1)26}{10}\right] + (A\tilde{n}o \; mod \; 100) + \left[\frac{(A\tilde{n}o \; mod \; 100) + (A\tilde{n}o/100)}{4}\right] + \tag{293}$$

$$5((A\tilde{n}o)/100)\Bigg) \; mod \; 7 \tag{294}$$

Donde se toma en consideración que $D_{semanal}$ va desde 0 hasta 6,representando los días de la semana, el mes desde 1 hasta 14, representando a enero y febrero que se cuentan como meses 13 y 14 del año anterior, $d_{mensual}$ el día del mes en función de la cantidad de días que tenga. La función mod es el residuo que queda de la división de 2 números y además, teniendo el año como valor numérico [41].

Estas fórmulas se basan en la observación de que el día de la semana progresa de una manera predecible basada en cada subparte de esa fecha. Cada término de la fórmula se usa para calcular el desplazamiento necesario para obtener el día correcto de la semana.Para el calendario gregoriano $d_{mensual}$ representa la progresión del día de la semana basada en el día del mes, dado que cada día sucesivo resulta en un desplazamiento adicional de 1 en el día de la semana. $(Año\ mod\ 100)$ representa la progresión del día de la semana basada en el año. Suponiendo que cada año tiene 365 días, la misma fecha de cada aõ sucesivo será desplazada por un valor de $365 \bmod 7 = 1$, notando el residuo 1.

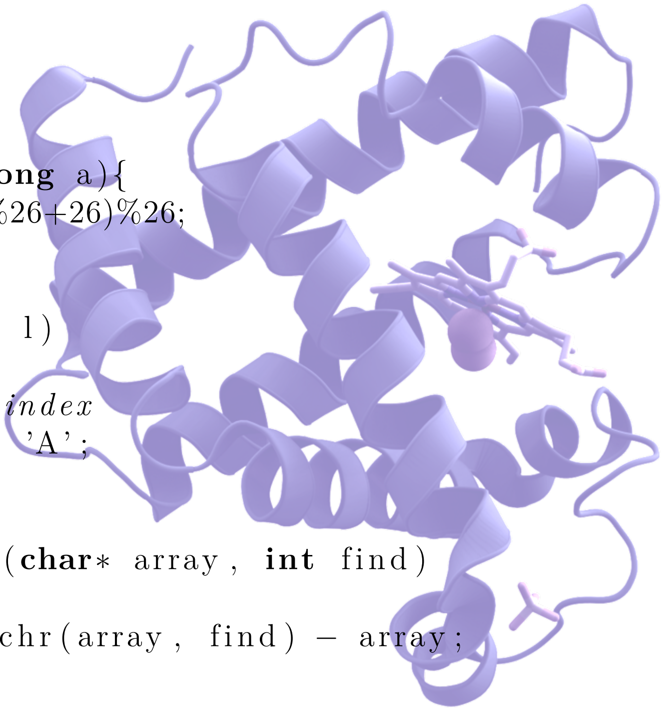
Como hay 366 días en cada aõ bisiesto, esto se debe tener en cuenta añadiendo un día adicional al valor de desplazamiento del día de la semana mediante $(Año\ mod\ 100)/4$, es muy importante resaltar que éste término se calcula como un resultado entero ,cualquier resto que pueda haber es descartado. Se puede calcular la progresión del día de la semana para cada centuria o siglo observando que hay 36524 días en una centuria normal, y 36525 en cada centuria divisible por 400. Dado que $36525 \bmod 7 = 6$ y $36524 \bmod 7 = 5$, el término $((Año/100)/4) + 5((Año)/100)$ refleja esto usando división entera y descartando cualquier resto fraccional evitando los números negativos. El término $((mes + 1)(26))/10$ representa la observación de Zeller al iniciar cada año el primero de marzo, el día de la semana de cada mes sucesivo progresaba multiplicando el mes por un valor constante y descartando el resto fraccional.

La función global,x mod 7, normaliza el resultado para que se encuentre en el intervalo de 0 a 6, lo que da el índice del día de la semana correcto para la fecha analizada. La razón por la que la fórmula difiere para el calendario juliano es que este calendario no tiene una regla aparte para las centurias bisiestos y está desplazado con respecto al calendario gregoriano un número fijo de días. Dado que el calendario gregoriano fue adoptado en diferentes momentos en diferentes partes del mundo, la ubicación de un evento es significativa a la hora de determinar el día de la semana correcto de una fecha que tuvo lugar durante este periodo de transición [41].

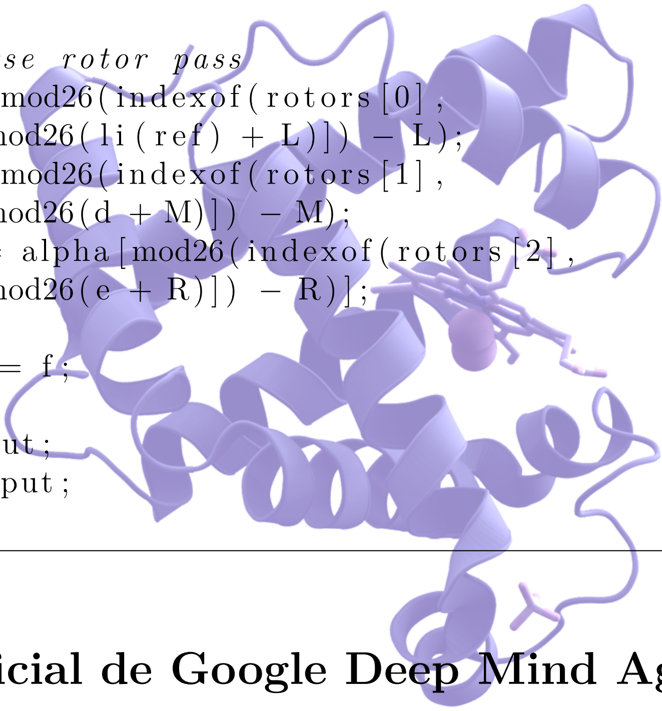
Simulador Máquina Enigma

```
#include <cstring>
using namespace std;
char alpha[] = "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ";
char rotors[3][27] =
```

```
{
   "EKMFLGDQVZNTOWYHXUSPAIBRCJ",
   "AJDKSIRUXBLHWTMCQGZNPYFVOE",
   "BDFHJLCPRTXVZNYEIWGAKMUSQO"
};
char reflector[] = "YRUHQSLDPXNGOKMIEBFZCWVJAT";
char key[] = "ABC";

int enigma ()
{
   for ( int i = 0; i < 10; i++) {
      crypt ("PZUFWDSASJGQGNRMAEODZJXQQKHSYGVUSGSU");
   }

   return 0;
}

long mod26(long a){
   return (a%26+26)%26;
}

int li (char l)
{
   // Letter index
   return l - 'A';
}

int indexof (char* array, int find)
{
   return strchr(array, find) - array;
}

string crypt (const char *ct) {
   // Sets initial permutation
   int L = li(key[0]);
   int M = li(key[1]);
   int R = li(key[2]);

   string output;
```



```
  for ( int x = 0; x < strlen(ct) ; x++ ) {
    int ct_letter = li(ct[x]);

    // Step right rotor on every iteration
    R = mod26(R + 1);

    // Pass through rotors
    char a = rotors[2][mod26(R + ct_letter)];
    char b = rotors[1][mod26(M + li(a) - R)];
    char c = rotors[0][mod26(L + li(b) - M)];

    // Pass through reflector
    char ref = reflector[mod26(li(c) - L)];

    // Inverse rotor pass
    int d = mod26(indexof(rotors[0],
     alpha[mod26(li(ref) + L)]) - L);
    int e = mod26(indexof(rotors[1],
     alpha[mod26(d + M)]) - M);
    char f = alpha[mod26(indexof(rotors[2],
     alpha[mod26(e + R)]) - R)];

    output += f;
  }
cout << output;
  return output;
}
```



Ente artificial de Google Deep Mind Agresivo

La empresa de vanguardia de Google , DeepMInd, contínuamente desarrolla módulos de entes artificiales que han alcanzado nuevos enfoques. Los logros del programa DeepMind hasta ahora incluyen aprender de su memoria, imitar voces humanas, escribir música y derrotar al mejor jugador de Go del mundo.El equipo de DeepMind realizó una serie de pruebas para investigar cómo respondería la IA ante ciertos dilemas sociales. En particular, querían averiguar si es más probable que la AI coopere o compita. Una de las pruebas involucró 40 millones de casos de jugar al juego de computadora Gathering, durante el cual DeepMind mostró hasta dónde está dispuesto a ir para conseguir lo que quiere [54].

El juego fue elegido porque encapsula aspectos del clásico "Dilema del Prisionero" de la teoría de juegos.A las IA de DeepMind se les hizo competir por recolección de manzanas virtuales. Una vez que la cantidad de manzanas disponibles se redujo, los IA empezaron a mostrar tácticas "altamente agresivas" golpear o robar las manzanas del oponente.Lo que parece haber sucedido es que los sistemas de AI comenzaron a desarrollar algunas formas de comportamiento humano. Este modelo muestra que algunos aspectos del comportamiento humano emergen como un producto del ambiente y del aprendizaje. Las políticas menos agresivas emergen del aprendizaje en entornos relativamente abundantes con menos posibilidades de acción costosa. La motivación de la codicia refleja la tentación de sacar a un rival y recoger todas las manzanas por sí mismo [54].

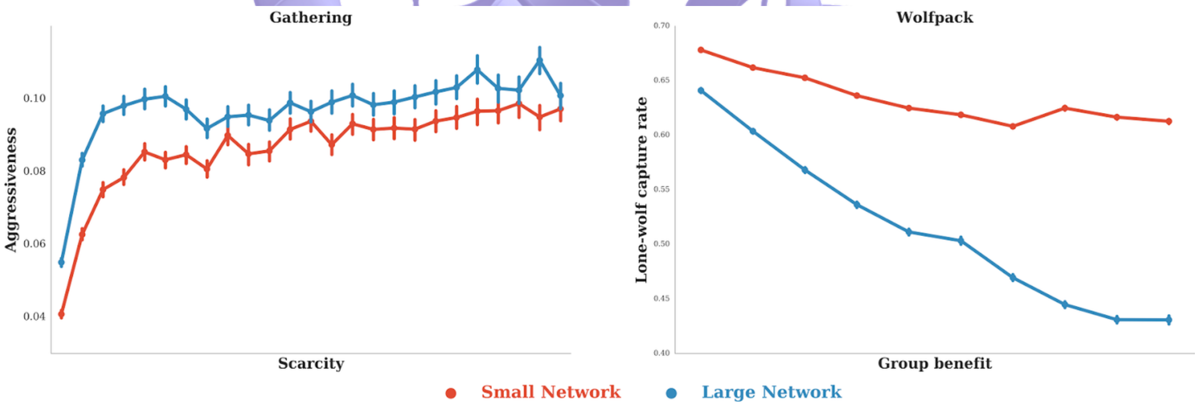


Figure 23: Agresión vs Cooperación entre IA's.

Problema de recorridos posibles dentro de una malla rectangular

En primera instancia , los caminos que existen para recorrer un simple cuadrado, son sólo 2 de extremo a extremo A a B, mostrado como:

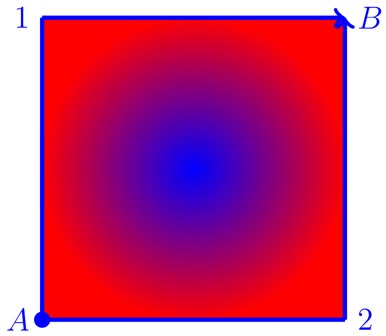


Figure 24:

Para una cuadrícula de $2x2$ cuadros, se recorrerá entonces siempre $2x2$ se recorrerán $2x2 = 4$ vértices, el número de caminos se pueden obtener aplicando la combinación de elementos , donde n son el total de vértices recorridos hasta el destino, y k son los vértices que se recorren en cada eje. Para el caso de $2x2$, se tienen$n = 4$ y $k = 2$:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \tag{295}$$

Teniendo en total 6 caminos posibles, representando éstos 6 caminos diferentes tenemos, para un mínmo de 4 pasos:

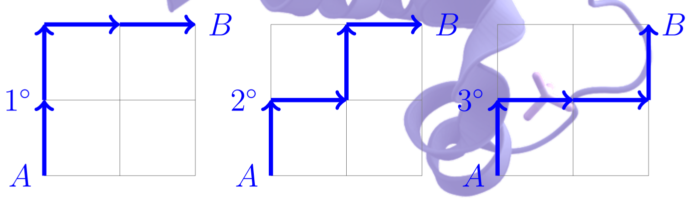


Figure 25:

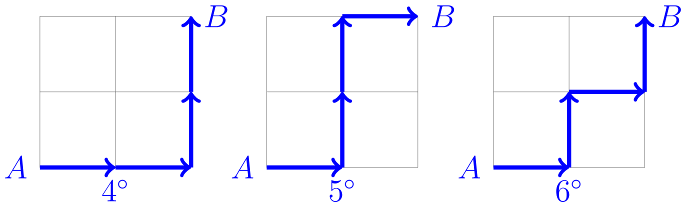


Figure 26:

Caminos mínimos posibles para un rectángulo

Si se tiene un retángulo nxm, y se quiere saber el número de caminos mínimos posibles como en el caso de la malla cuadrada, ésta vez se ocupa la permutación con repetición, en donde c será el total de vértices a recorrer del paso mínimo , r son los recorridos de los vértices de un eje (x), y s son los recorridos de los vértices de un eje(y), de la forma:

$$PR_{r,s}^{c} = \frac{c!}{r!s!} \tag{296}$$

Para un caso particular, supongamos n=4 y m=2, o bien, la siguiente malla rectangular:

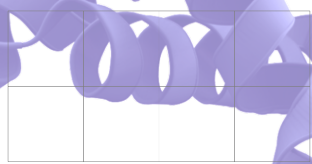


Figure 27:

Aplicando el criterio de la permutación tenemos:

$$PR_{r,s}^{c} = \frac{c!}{r!s!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{48} = 15 \tag{297}$$

Los cuales se representan como [40]:

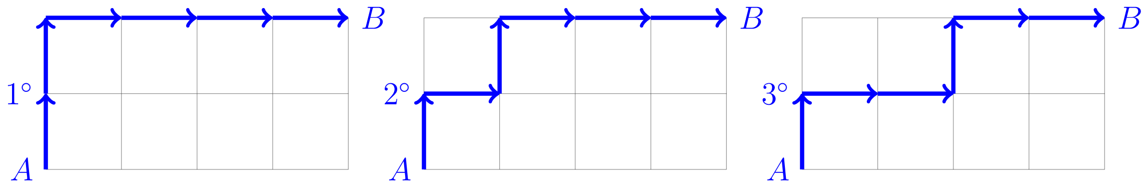


Figure 28:

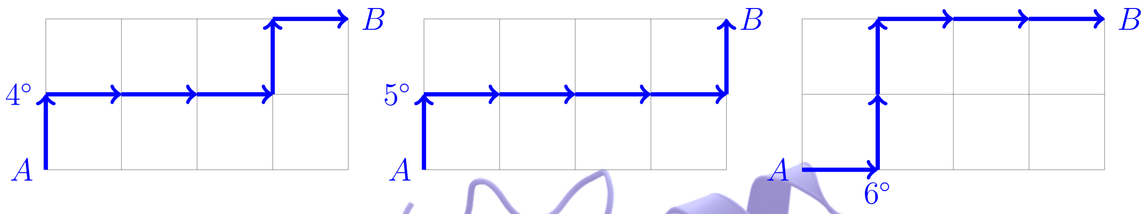


Figure 29:

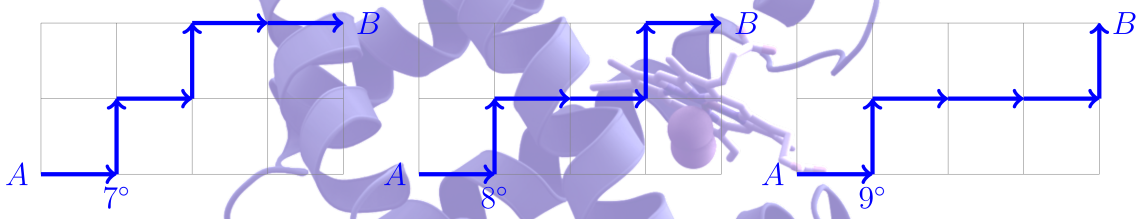


Figure 30:

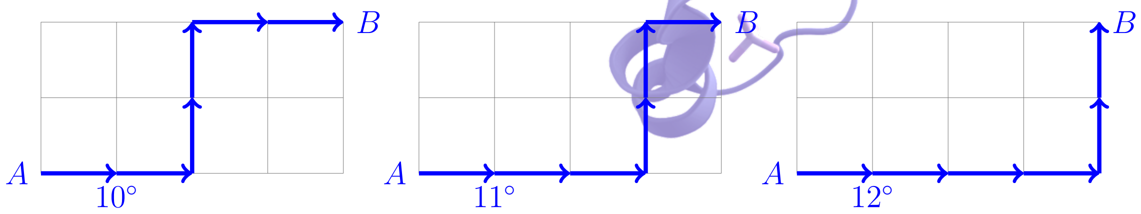


Figure 31:

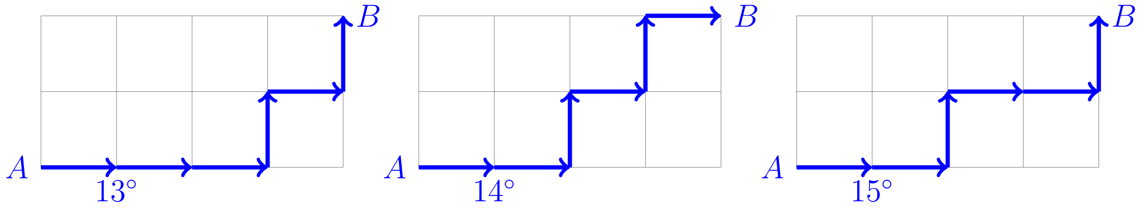


Figure 32: Caminos posibles

Problema de repartir 4 caramelos a 5 niños

Éste problema,tiene la característica de ser construída a partir de un multiconjunto de combinación con repetición, donde a cada niño se le asignará una letra, A,B,C,D, y E. Por el principio de la biyección, el número de formas en que se puede repartir los caramelos es igual al número de series de 5 letras (sin tomar en cuenta el orden) A, B, C, D, E. Pero cada una de ellas corresponde a un multiconjunto con 4 elementos, por lo que el número total de formas de repartir los caramelos es $\left(\binom{5}{4}\right)$.Ya que queremos dividir 4 objetos (caramelos) sin etiqueta entre 5 grupos (niños), para ello colocamos 4 objetos en línea e insertamos 4 separadores para dividirlos en 5 secciones. Si representamos los caramelos con asteriscos y los separadores con barras, ejemplos serían [51]:

$AAAA \rightarrow ****////$
$ABCD \rightarrow */*/*/*/$
$AABB \rightarrow **/**///$
$ABCE \rightarrow */*/*//*$

De esta forma, el número de formas de repartir corresponde al número de disposiciones de 8 símbolos, de los cuales: 4 son asteriscos y 4 barras. Pero esto es precisamente el número de formas de elegir 4 objetos de un conjunto con 8 y por tanto el resultado (el número de ordenamientos) es [51] :

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{5}{4}\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = 840\ formas. \tag{298}$$

Chaparro Amaro Oscar Roberto

El sentido de la vida y 42

En la saga de ciencia-ficción The Hitchhiker's Guide to the Galaxy de Douglas Adams, según la historia, el sentido de la vida, el universo y todo lo demás es buscado por un superordenador llamado Deep Thought. El sentido dado por Deep Thought conduce a los protagonistas a una aventura para averiguar la pregunta que da lugar a la respuesta, un grupo de exploradores de una raza de seres pandimensionales e hiperinteligentes construyen a Pensamiento Profundo, la segunda mejor computadora de todos los tiempos, para obtener la respuesta al sentido de la vida, el universo y todo lo demás. Después de siete millones y medio de años meditando la pregunta, Pensamiento Profundo declara que la respuesta es cuarenta y dos, razonando que la pregunta fue mal planteada y debe ser formulada correctamente para entender la respuesta.

Cuando se le pregunta si puede decirla respuesta definitiva a la supercomputadora, ella responde que no; sin embargo, puede ayudar a diseñar una computadora aún más poderosa, la Tierra, que puede formular la pregunta. Los programadores se embarcan entonces en un programa de diez millones de años para descubrir la respuesta a la pregunta. Esta nueva computadora incorpora seres vivos en la "matriz computacional". El proceso es obstaculizado tras ocho millones de años por la llegada inesperada de los Golgafrinchanes y luego arruinado por completo, cinco minutos antes de que se completara, cuando la Tierra es destruida por los vogones para construir una ruta directa hiperespacial. Al final de la serie Arthur Dent, habiendo escapado de la destrucción de la Tierra, contiene potencialmente parte de la matriz computacional en su cerebro. Intenta descubrir la pregunta definitiva extrayéndola de sus ondas cerebrales, Arthur saca letras al azar de una bolsa pero sólo consigue la oración ?' Cuál es el resultado de multiplicar seis por nueve?. 42 .El programa de la "computadora Tierra" tendría que haber funcionado correctamente, pero el arribo inesperado de los Golgafrinchanes a la Tierra prehistórica causó errores de entrada en el sistema, calculando una respuesta errónea [20].

Hay una teoría que dice que si alguna vez se descubre exactamente qué es el Universo y por qué está aquí, á instantáneamente y será remplazado por algo incluso más extraño e inexplicable, pudiendo pasar múltiples veces.En La vida, el universo y todo lo demás, Prak, un hombre que conoce toda la verdad, confirma que 42 es la respuesta definitiva, y que es imposible que se conozca la respuesta definitiva y la pregunta definitiva en el mismo universo [20].

Compuertas lógicas y su equivalencia en operaciones de conjuntos

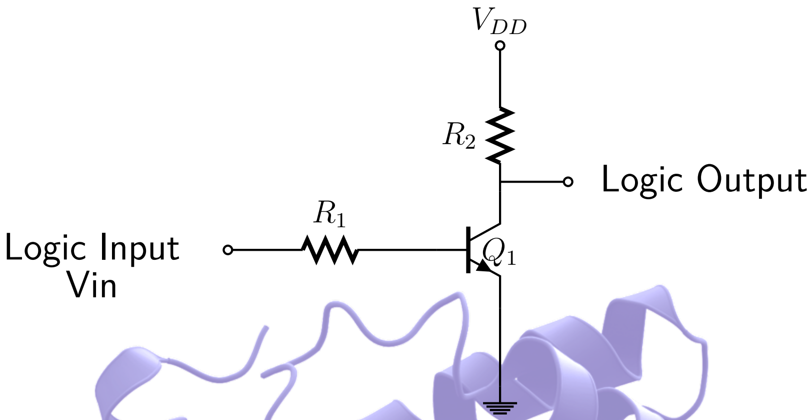


Figure 33: Compuerta NOT diagrama eléctrico en transistores.

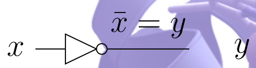


Figure 34: Compuerta NOT equivalente a A^C

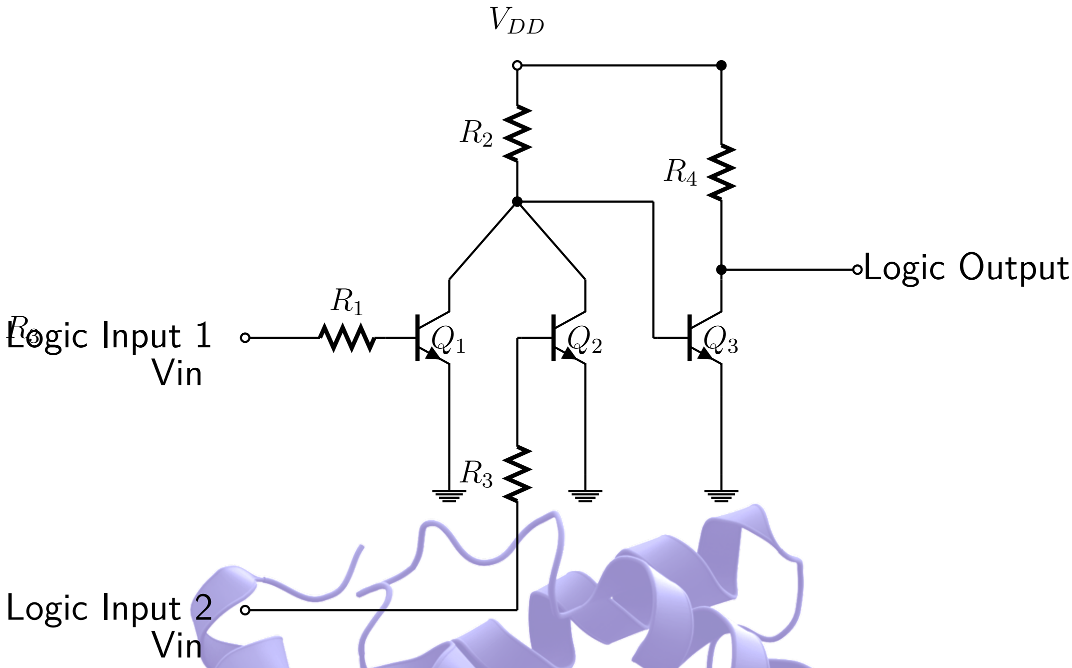


Figure 35: Compuerta OR diagrama eléctrico en transistores.

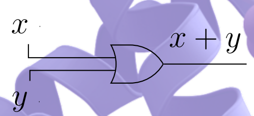


Figure 36: Compuerta OR equivalente a $A \cup B$

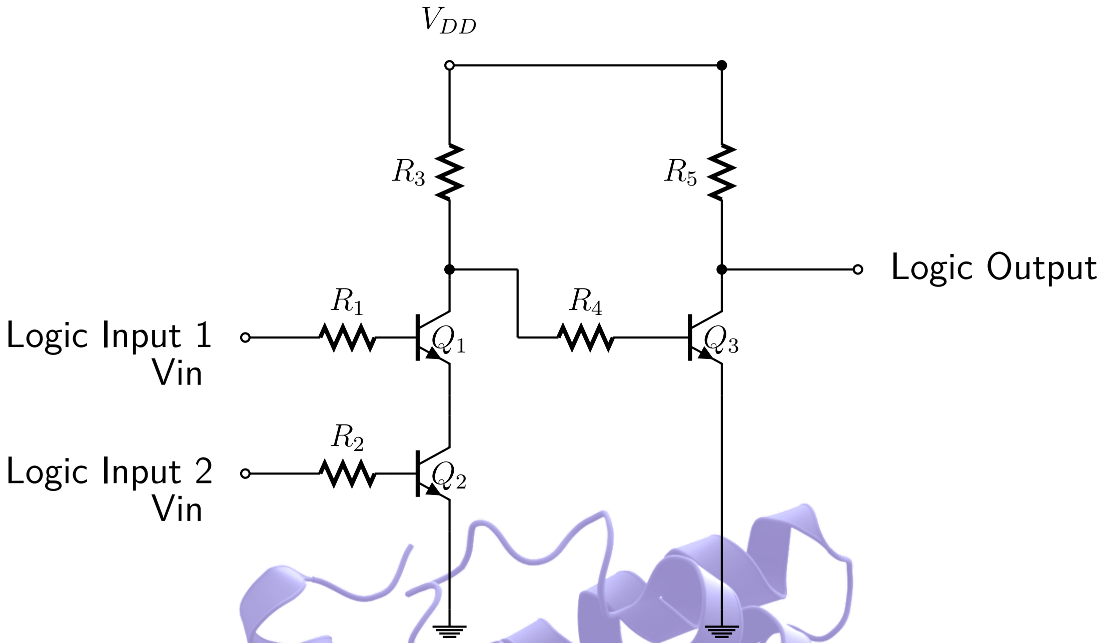


Figure 37: Compuerta AND diagrama eléctrico en transistores.

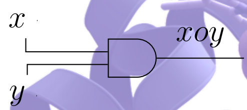


Figure 38: Compuerta AND equivalente a $A \cap B$

Tarea 9

Experimento de Mendel

Se considera a Mendel el padre dela genética, ya que cruzó dos plantas de guisantes ,una que producía semillas amarillas y otra que producía semillas verdes; estas plantas forman la llamada generación parental (P). El resultado de este cruze fueron todo guisantes amarillos, repitió los cruces con otras plantas de guisante distintos en otras características y el resultado era el mismo, se producía una característica de los dos en la siguiente generación . La característica que aparecía le llamo carácter dominante y al que no, carácter recesivo.

Mendel cruzó las plantas de la generación parental y obtuvo la llamada segunda generación filial (F2), compuesta por plantas que producían semillas amarillas y por plantas que producían semillas verdes en una proporción 3:1 (3 amarillas y 1 verde). Repitió el experimento con otros caracteres diferenciados y obtuvo siempre la misma proporción. Después quiso comprobar si las dos primeras leyes creadas a partir de los anteriores experimentos eran validas al cruzar plantas con dos o mas caracteres diferentes mezclando guisantes verdes y lisos con guisantes amarillos y rugosos, observó que la primera ley se cumplía; en la F1 aparecían los caracteres dominantes (amarillos y lisos) y no los recesivos (verdes y rugosos).Obtuvo la segunda generación filial apareando a la primera generación filial y obtuvo semillas de todos los estilos posibles, plantas que producían semillas amarillas y lisas, amarillas y rugosas, verdes y lisas y verdes y rugosas; y se obtenían en una proporción 9:3:3:1 (9 amarillos y lisos, 3 amarillos y rugosos, 3 verdes y lisos y uno verde y rugoso) [3].

A partir de estos experimentos se han desarrollo varias teorías que se han demostrado a lo largo del tiempo :

1. Primera teoría: Cuando se cruzan dos individuos de raza pura, los híbridos resultantes son todos iguales. El cruce de dos individuos homocigotos, uno dominante (AA) y el otro recesivo (aa), origina sólo individuos heterocigotos (Aa).

2. Segunda teoría o principio de la segregación: Ciertos individuos son capaces de transmitir un carácter aunque en ellos no se manifieste. El cruce de dos individuos de la F1 (Aa) dará origen a una segunda generación filial en la cual reaparece el fenotipo "a", a pesar de que todos los individuos de la F1 eran de fenotipo "A". Esto hace parecer que el carácter "a" no había desaparecido, sino que sólo había sido "opacado 2 por el carácter "A" pero que, al reproducirse un individuo, cada carácter se segrega por separado.

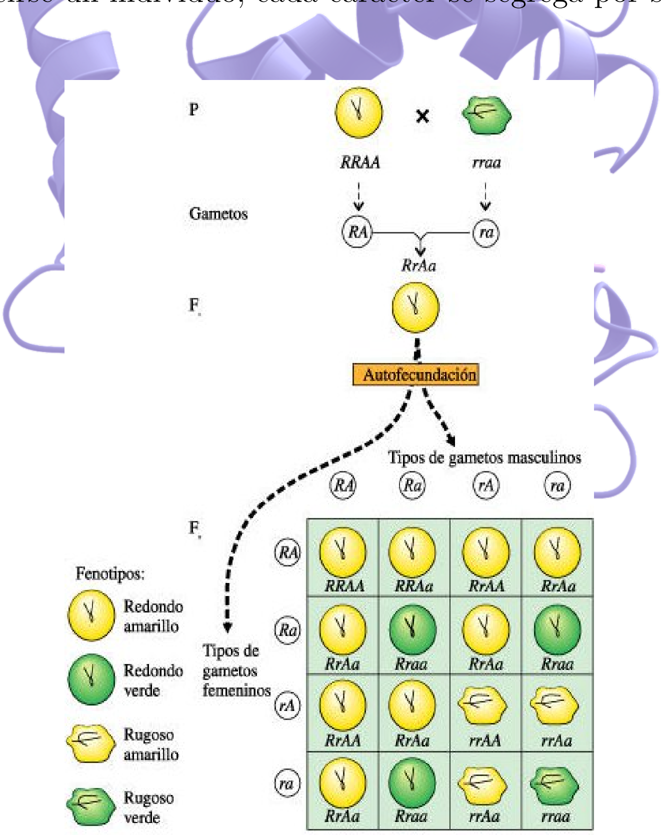
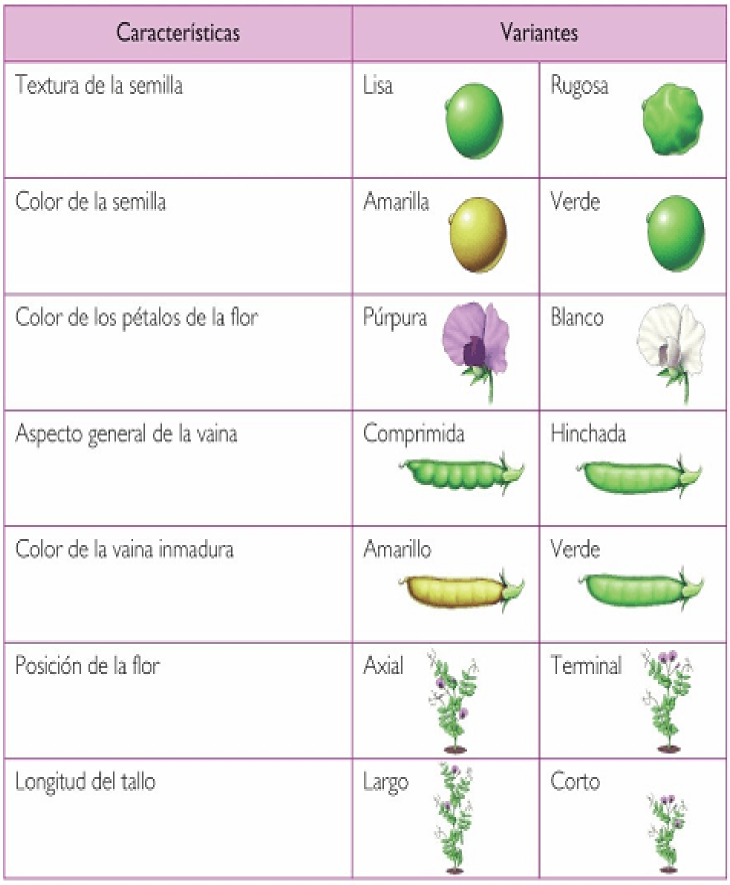


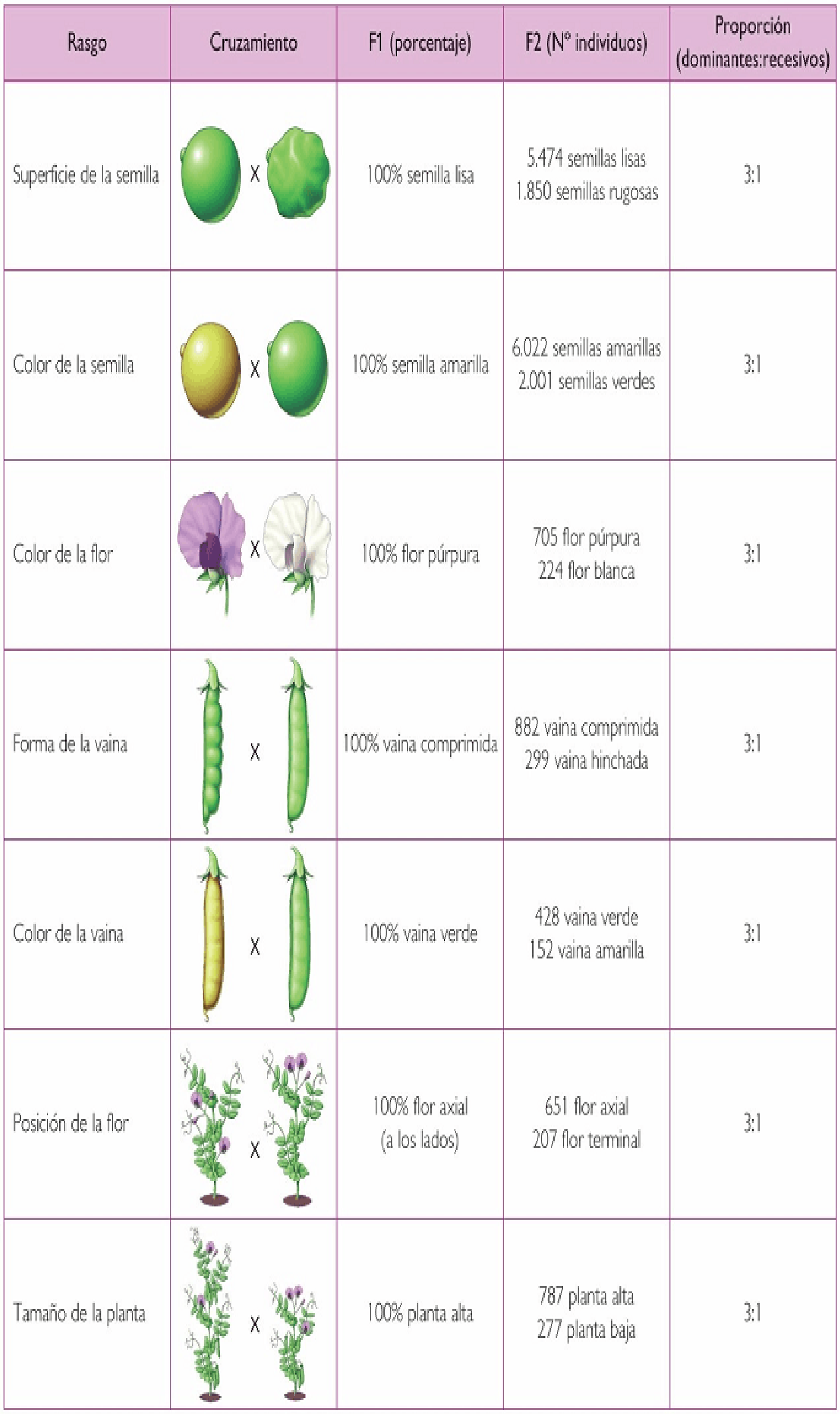
Figure 39: Distribución Bernolli

3. Tercera teoría o principio de la combinación independiente:Al principio se trabajó este cruce en guisantes, en los cuales las características que se observaban (color de la semilla y rugosidad de su superficie) se encontraban en cromosomas separados. De esta manera, se observó que los caracteres se transmitían independientemente unos de otros) [3].
.



Características	Variantes	
Textura de la semilla	Lisa	Rugosa
Color de la semilla	Amarilla	Verde
Color de los pétalos de la flor	Púrpura	Blanco
Aspecto general de la vaina	Comprimida	Hinchada
Color de la vaina inmadura	Amarillo	Verde
Posición de la flor	Axial	Terminal
Longitud del tallo	Largo	Corto

Figure 40: tabla 1



Rasgo	Cruzamiento	F1 (porcentaje)	F2 (Nº individuos)	Proporción (dominantes:recesivos)
Superficie de la semilla	X	100% semilla lisa	5.474 semillas lisas 1.850 semillas rugosas	3:1
Color de la semilla	X	100% semilla amarilla	6.022 semillas amarillas 2.001 semillas verdes	3:1
Color de la flor	X	100% flor púrpura	705 flor púrpura 224 flor blanca	3:1
Forma de la vaina	X	100% vaina comprimida	882 vaina comprimida 299 vaina hinchada	3:1
Color de la vaina	X	100% vaina verde	428 vaina verde 152 vaina amarilla	3:1
Posición de la flor	X	100% flor axial (a los lados)	651 flor axial 207 flor terminal	3:1
Tamaño de la planta	X	100% planta alta	787 planta alta 277 planta baja	3:1

Figure 41: tabla 2

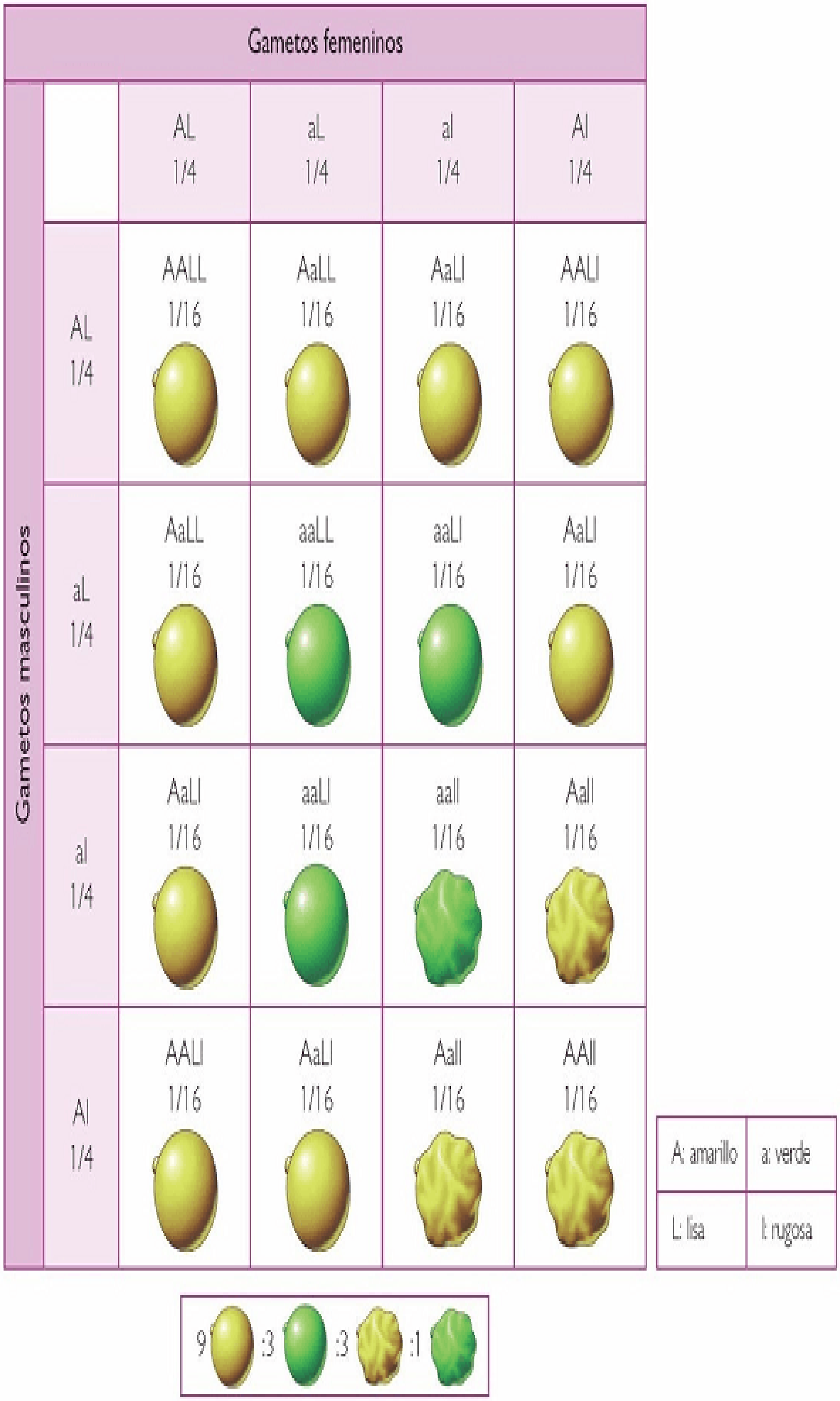
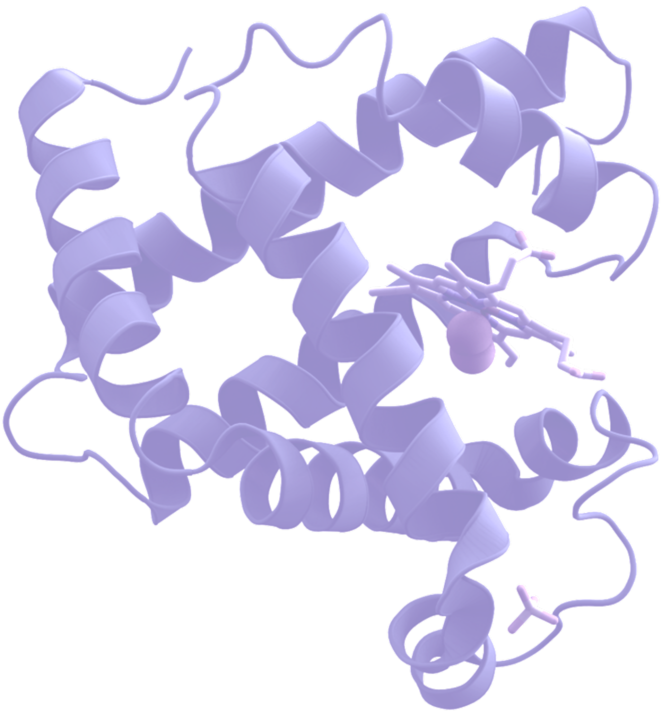


Figure 42: Tabla de combinaciones realizada por Mendel

Programa Congurencia Zeller

```
void zell(){

int dia;
int mes;
int an;
int a;
int b;
int h;
cout<<"Ingrese el numero de dia de su nacimiento"<<"\n";
    scanf("%i",&dia);
    cout<<"Ingrese el numero del mes de su nacimiento"<<"\n";
        scanf("%i",&mes);
        cout<<"Ingrese el a\~no de su nacimiento"<<"\n";
            scanf("%i",&an);
if(mes<=2){
  mes=mes +12;
  an=an-1;
}
else{
  mes=mes-2;
}
a= an %100;
b=an/100;
h= ((700+ ((26*mes-2)/10) + dia + a+(a/4)+ ((b/4) + 5*b)) %7);
//return(h);
switch (h){
  case 0:
    cout<<"Domingo \n"; break;
    case 1:
      cout<<"Lunes \n"; break;
      case 2:
        cout<<"Martes \n"; break;
        case 3:
          cout<<"Miercoles \n"; break;
          case 4:
            cout<<"Jueves \n"; break;
            case 5:
```

```
                    cout<<"Viernes \n"; break;
                    case 6:
                      cout<<"Sabado \n"; break;
}

}
```



Tarea 10

Ejercicios Teorema de Bayes

1. Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

   a) La primera semilla sea roja?
   b) La segunda semilla sea blanca dado que la primera fue roja?

   Solución: a). La probabilidad de que la primera semilla sea roja es 10/15 , puesto que hay 10 semillas de flores rojas de un total de 15. $P(R_1 = 10/15$.

   b). La probabilidad de que la segunda semilla sea blanca se ve influenciada por lo que salío primero, es decir ,esta probabilidad está sujeta a una condición, la de que la primera semilla sea roja. Ésta probabilidad es $P(B_2 \mid R_1) = 5/14$, puesto que todavía hay 5 semillas blancas en un total de 14 restantes, como está organizado en el siguiente diagrama:

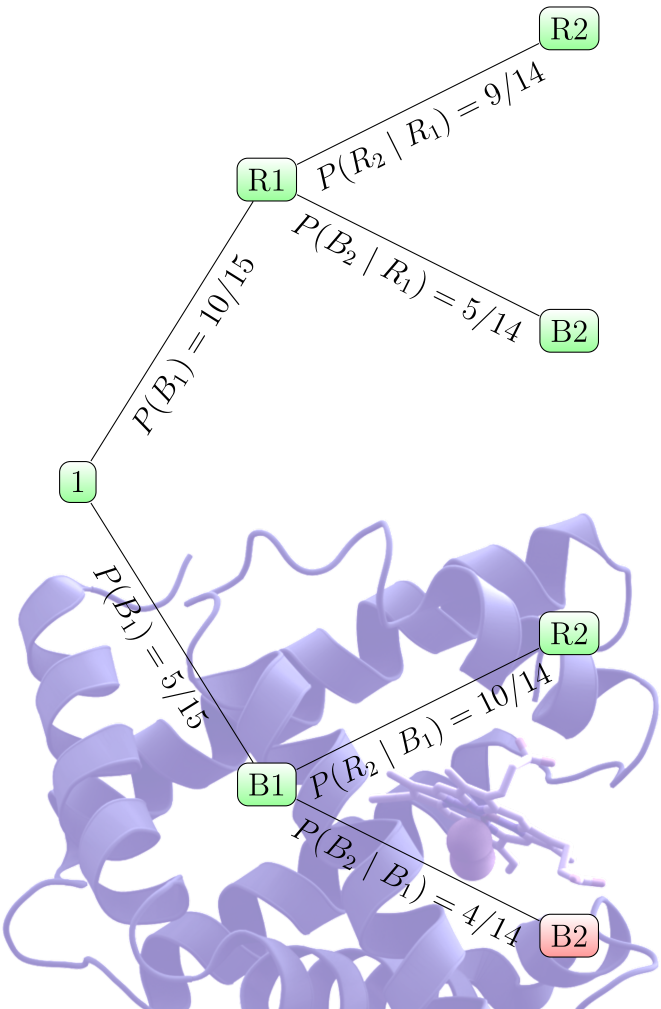


Figure 43: Diagram de árbol

2. Una persona lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 águilas dado que salió por lo menos un águila?

   Solución: El espacio muestra del experimento de lanzar una moneda 3 veces es : $\Omega = \{$ aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss $\}$, El evento A de que por lo menos haya una águila en los tres lanzamientos es: A = { aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa } , por conteo se sabe que hay 7/8 de probabilidad de que haya al menos una águila en el set de posibilidades, ó $P(A) = 7/8$. El evento B de que obtenga 3 águilas es B = {aaa} , por lo tanto,sólo existe 1/8 de probabilidad, pero se sabe que el evento A está contenido en la probabilidad de B, ya que la probabilidad de B ya implica que ocurrió A en éste contexto (A y B), por lo que podemos deducir que la probabilidad de los 2 eventos o de su intersección está dada como: $P(A \cap B) = 1/8$ por lo que la probabilidad de que ocurra el evento B dado A es:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{7}{8} \tag{299}$$

Es importante destacar que el resultado es la probabilidad de una ocurrencia en las siete que son posibles en A; es decir, calcular la probabilidad condicional de B dado A es como calcular la probabilidad de B con relación al conjunto A, como si éste fuera un nuevo espacio muestra $\Omega* =$ A.

3. Una familia tiene tres hijos. Calcular las siguientes probabilidades:

   a).El primer hijo sea niña (A) b). Exactamente dos sean niña (B) c). Se cumplan ambas condiciones d). Exactamente dos sean niñas, si el primero es niña

   Solución: Construyendo el diagrama de árbol tenemos:

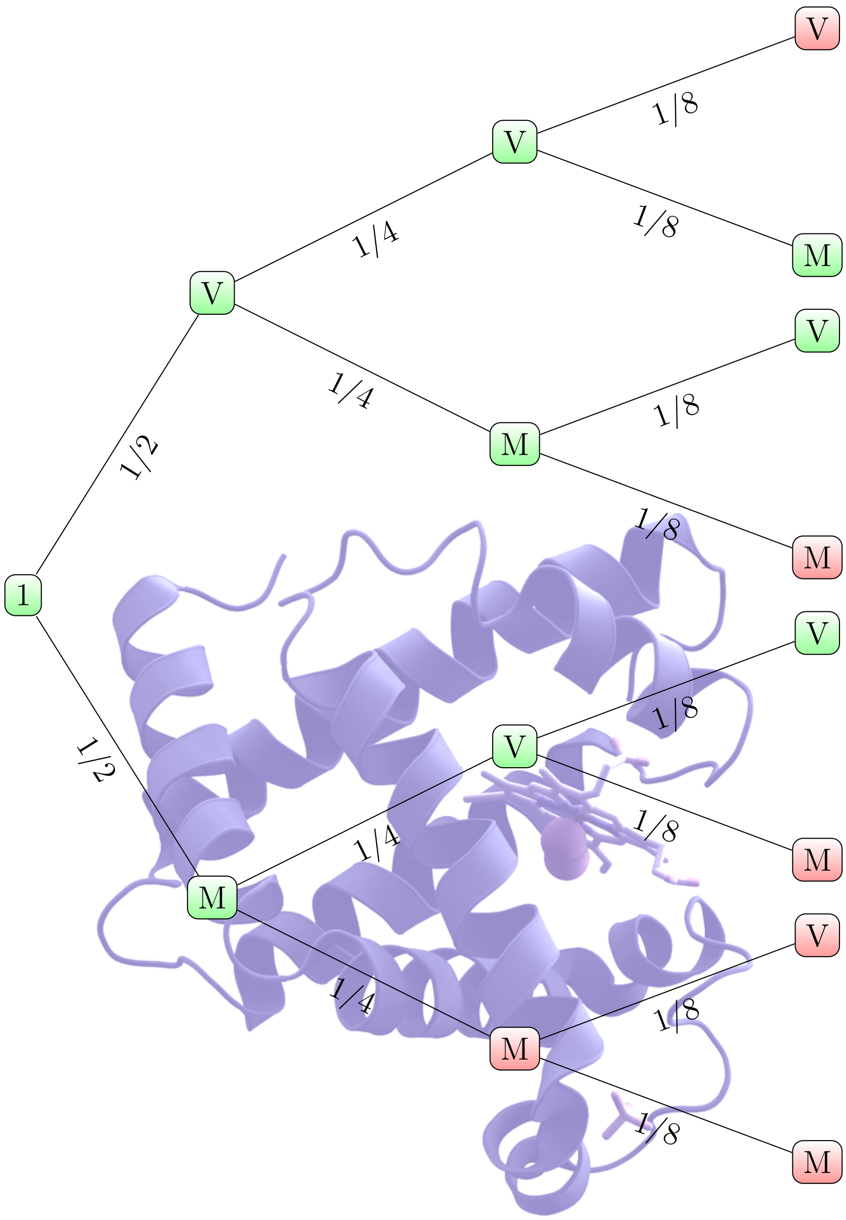


Figure 44: Hijos posibles donde V corresponde a varones y M a mujeres.

Se puede deducir del árbol que la probabilidad que sea niña es de 4/8 o $P(a) = 1/2$, y que exactamente 2 sean niñas, contando en cuantos casos se presenta es de 3 casos ó $P(b) = 3/8$, para el tercer inciso , se observa que sólo hay 2 casos en los que se cumple ésta condición, o que la primera sea hija y luego se tenga exactamente una hija. ésto último puede verse como la itersección de los 2 eventos anteriores, o bien, la probabilidad de que estos 2 ocurran al mismo tiempo, denotado como : $P(a \cap b) = 2/8$, con esto se puede denotar el último inciso, el cual se representa por la probabilidad condicional:

$$P(b \mid a) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)} = \frac{2/8}{1/2} = \frac{1}{2} \tag{300}$$

4. En un grupo de amigos el 80% están casados. Entre los casados, el 75% tiene trabajo. Finalmente, un 5% no están casados y tampoco tiene trabajo. Si uno tiene trabajo, ¿Qué probabilidad hay de que esté casado?

   Solución: Se sabe que sean los sucesos: C = estar casado $P(C) = 0.8$; S = soltero $P(S) = 1 - P(C) = 0.2$; T = tener trabajo $P(T) = 0.75$; P = estar desempleado, por las condiciones dadas en el contexto,la probabilidad que se tengan ambas condiciones, que se tenga trabajo y se esté casado, se puede expresar como la intersección de estos 2 eventos como: $P(T \cap C) = 0.75 * 0.8$, y dado que se asume que ya se tiene trabajo, se expresa como:

$$P(T \mid C) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)} = \frac{0.75 * 0.8}{0.75} = 0.8 \tag{301}$$

5. Del problema anterior, se pregunta el porcentaje de estar casados entre los que no tienen trabajo.

   Solución: Con el mismo procedimiento, se toma como $P(C \cap T)$, dado que se asume que ya están casados, la probabilidad que no tengan empleo es:

$$P(T \mid C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0.75 * 0.8}{0.8} = 0.75 \tag{302}$$

6. Se va a repartir dos naipes de una baraja española. ¿Cúal es la probabilidad de que ambos sean oros?

   Solución: En muchas aplicaciones, es útil reescribir la fórmula para la probabilidad condicionada como:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)(P(B)) \tag{303}$$

   Sea A el suceso de que la segunda carta es oro y B el suceso de que el primer naipe es de oros, P(B)=10/40 porque en principio hay 40 naipes y 10 oros, tomando de ejemplo los anteriores ejemplos, observamos que en éste caso $P(A \mid B) = 9/39$, ya que dado un evento anterior, en éste caso de que se haya sacado un oro afecta a la de B, que es sacar otro oro, debido a que ya se sacó un oro, por lo que la baraja ahora contiene 9 oros y 39 cartas,denotado como:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)(P(B)) = \frac{9}{39}\left(\frac{10}{40}\right) = \frac{3}{52} \tag{304}$$

Se observa que la probabilidad de que ocurra A y B son la muliplicación de los 2 eventos sucesivos, por ello suele haber contextos en los que coincida la probabilidad de un suceso dado otro con un elemento de la itersección.

7. En la evaluación de un programa de capacitación de ventas, una empresa descubrió que de los 50 vendedores que recibieron un bono el año anterior, 20 habían acudido a un programa especial de capacitación en ventas. La empresa tiene 200 vendedores. Sea B el suceso de que un vendedor recibiera un bono y S el suceso de que acudieron al programa especial. Hallar la probabilidad de B, la probabilidad dado que se acudiera al programa especial se recibiera bono y la probabilidad de que B y se acudiera a la capacitación ocurriese:

   Solución: Sea la probabilidad de recibir un bono dado los datos actuales de la empresa de que 50 de 200 lo recibieron, entonces : $P(B) = 50/200$. Además se sabe que el vento S, que representa que un vendedor haya asistido al curso de capacitación, influye en que se consigión el bono de forma de que de los 50 que participaron en S, 20 de ellos obtuvieron el bono, se puede representar ésto como: $P(B \mid S) = 20/50$, entonces acomodando la intersección de estos 2 eventos se tiene:

$$P(B \cap S) = P(B \mid S)(P(B)) = \frac{20}{50}\left(\frac{50}{200}\right) = \frac{1}{10} \tag{305}$$

8. En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios (suceso B) es el 0.10 (probabilidad a priori). Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad (suceso A) es el 0.25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas de obesidad y coronarios (suceso intersección de A y B) es del 0.05. Calcular la probabilidad de que una persona

sufra problemas coronarios si está obesa.

Solución: Sea la probabilidad del evento A , $P(A) = 0.25$,la de que ambos sucesos A y B sucedan se representa como su intersección: $P(A \cap B) = 0.05$, así que la probabilidad del evento B dado A, o la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios dado que yá es obesa es:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2 \ o \ 20\%\tilde{o} \ uno \ de \ cada \ 5. \tag{306}$$

9. En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además se sabe que aprueban el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 15% de los que no asisten. Calcular la probabilidad de que se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado y resulta que ha asistido a clase.

   Solución: Dado los datos, se construye el siguiente diagrama de árbol:

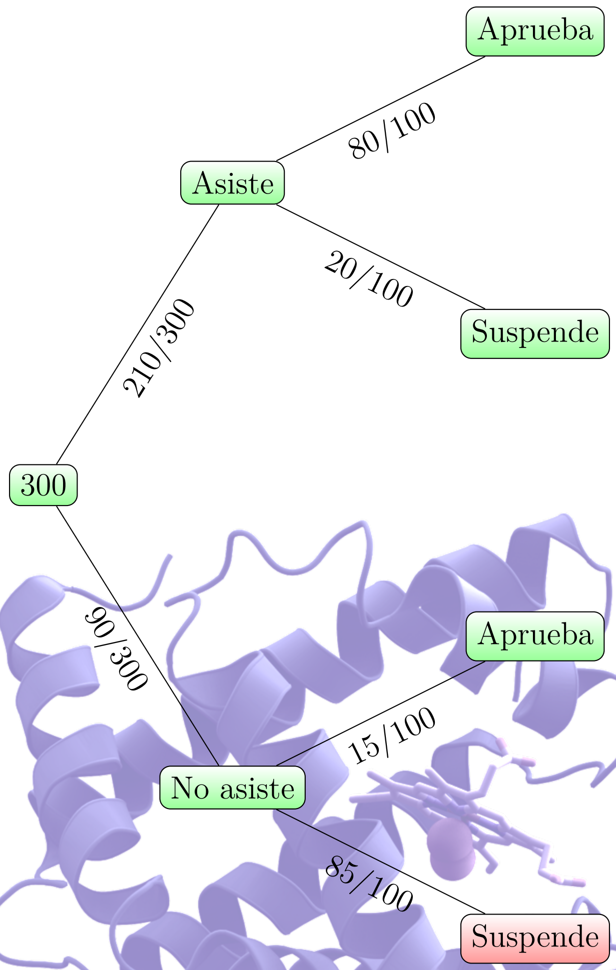


Figure 45: Diagram de árbol

Con el diagrama de árbol podemos observar que la probabilidad de que los estudiantes tomen el curso son de P(A)=210/300=7/10,la probabilidad de que aprueben el curso dado que asistan es de P(B)=80/100, la probabilidad de que apruebe y asista al curso, se denota como : $P(A \cap B) = 210/300(80/100) = 16800/30000 = 0.56$ por lo que la probabilidad de que aprueben dado que asistan es:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.56}{8/10} = 0.7 \tag{307}$$

10. Una urna A contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra urna B contiene 1 blanca y 2 negras.Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en

la B. Después se extrae de la urna B una bola al azar.

a) Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
b) En el supuesto de que la bola extraída de la urna B ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna A también ha sido blanca.

Solución: Si la bola extraída en la urna A ha sido blanca se formaría la urna B1, con 2 bolas blancas y dos bolas negras; si la bola extraída en A fuese negra, se forma la urna B2, con una bola blanca y 3 negras. La probabilidad de que se obtenga una bola blanca de la primera urna es P(A)=5/9; por complemento la probabilidad de que se obtenga una bola negra es P(N)=4/9;entonces, la probabilidad de que entonces dada la urna B1, se extraiga una bola blanca es P(B1)=1/2, por el otro lado, si se forma la urna B2, y se extraiga una bola blanca de ahíla probabilidad de obtener una bola blanca es P(B2)=1/4, si sumas estos 2 escenarios podemos escribir la probabilidad de obtener una bola blanca P(B):

$$P(B) = P(A) * P(B1) + P(N) * P(B2) = \frac{5}{9}\frac{1}{2} + \frac{4}{9}\frac{1}{4} = \frac{7}{18} \tag{308}$$

Por lo que la probabilidad de que se escoja una bola blanca dado que se extrajo una bola blanca es:

$$P(B1 \mid B) = \frac{P(A) * P(B1)}{P(B)} = \frac{(5/9)(2/4)}{14/36} = 5/7 \tag{309}$$

11. Se lanzan dos dados: ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7?, Si la suma de puntos ha sido 7, ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres?

    Solución: Sean los sucesos A que la suma de los puntos sea 7 y B que alguno de los dados ha salido un tres, los casos posibles al lanzar dos dados son 36 y los casos favorables al suceso A son los seis siguientes: (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2) y (6,1). Por tanto, P(A)=6/36=1/6 . Ahora, sea el caso de que dado se presente el evento A, haya al menos un tres en los dado sumando 7 (B), de todo el espacio muestral, solo 2 de 36 eventos posibles pueden cumplir dichas condiciones (ambas), y se pueden escribir como $P(A \cap B) = 2/36$, por lo que la probabilidad de obtener un numero 3 la suma de los puntos dado que se obtuvo un 7 es entonces:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2/36}{1/6} = \frac{1}{3} \tag{310}$$

Notar que en este caso, el suceso B dado A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observamos que esta situación ocurre en las parejas (3,4) y (4,3). Por tanto,$P(B \mid A) = 2/6 = 1/3$.

12. En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios (suceso B) es el 10%,(probabilidad a priori), además la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad (suceso A) es del 25% y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas de obesidad y coronarios (suceso intersección de A y B) es del 5%. Calcular la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios si está obesa (probabilidad condicionada P(B/A)).

    Solución: Dado que ya se sabe la probabilidad de la intersección de los eventos, o que los 2 eventos ocurran, y que se asume que la persona ya está obesa, podemos plantear la solución mediante la probabilidad condicional dada como:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2 \tag{311}$$

    Por lo que hay un riesgo de que dada la persona tenga obesidad, haya un 20% probable de sufrir enfermedades coronarias.

13. Si haya una probabilidad del 10% de que la luna estará en la séptima casa y Júpiter se alineará con Marte, y una probabilidad del 25% de que Júpiter se alineará con Marte, entonces ¿Cuál es la probabilidad de que la luna esté en la séptima casa, dado que Júpiter se alinee con Marte?

    Solución: Si tomamos el evento L como que la luna está en la séptima casa y J como si Júpiter se alinea con Marte, tenemos que la probabilidad ambos, tanto Júpiter se alinee con Marte y de la luna esté en la séptima luna se es expresa como la intersección de estos 2 eventos,se denotado como: $(J \cap L) = 0.1$, entonces si existe una probabilidad de un 25 % del evento J, y sucede , entonces la probabilidad de que la luna esté en la séptima casa, dado que Júpiter se alinee con Marte es:

$$P(L \mid J) = \frac{P(L \cap J)}{P(L)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40 \tag{312}$$

14. En un campamento de verano hay inscritos 90 jóvenes, de los cuales 70 hablan inglés con fluidez; 25, francés, y 15, ambos idiomas. Escogido un joven al azar, halla la probabilidad de que:
a) Hable los dos idiomas.
b) Hable francés, sabiendo que habla inglés.

Solución: Sean A = habla inglés y B = habla francés, podemos observar que la probabilidad de que ocurra el evento A es P(A)=70/90, el evento B ES P(B)=25/90, la probabilidad de que ambos sucesos sucedan, es entonces la intersección: $(A \cap B) = 15/90$, resultado del inciso a. Mientras que para el inciso b, se ocupa la probabilidad condicional, ya que debido a que ya sucedió el evento A, que suceda B, expresado como:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15/90}{70/90} = 15/70 \tag{313}$$

Por lo que la probabilidad de que un jóven hable francés si ya habla inglés es de aproximadamente 21%.

15. Se lanza un dado tantas veces como sea necesario hasta que aparezca un tres. Si suponemos que el tres no aparece en la primera lanzada , ¿Cuál es la probabilidad que se necesiten más de 4 lanzadas?

Solución: Definimos los eventos: A es el evento que la primera lanzada no es tres y B es el evento en el que en las primeras cuatro lanzadas no sale tres. $P(B \mid A)$ es la probabilidad de que se necesiten más de cuatro lanzadas para que aparezca tres si en la primera no sale tres. Puesto que$(B \cap A) = B$ debido a que el evento B está contenido en A y no son "nada" excluyentes,Puesto que si tres sale por primera vez en la tercera lanzada entonces la primera lanzada no es tres, entonces $P(B \cap A) = P(B) = (5*5*5*5)/(6*6*6*6)$, entonces P(A)=5/6, ya que en la primera lanzada solo hay 1/6 de oportunidad que salga un 3, por complemento es 5/6, entonces, podemos escribir la probabilidad condicional como:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(5*5*5*5)/(6*6*6*6)}{5/6} = \frac{5*5*5}{6*6*6} = \frac{125}{216} \approx 0.57 \tag{314}$$

Entonces la probabilidad de que se necesiten más de 4 lanzadas para que aparezca un 3 es de aproximadamente 57%.

16. En cierta habitación de hospital la probabilidad de que un paciente sea ingresado con problemas de presión arterial es de de 0.7; la probabilidad de que ingrese con problemas renales es 0.5 y la de que ingrese con ambos problemas es de 0.3 ;hallar: la probabilidad de que un paciente que ha sido ingresado con problemas de presión arterial, padezca también de problemas renales y la probabilidad de que un paciente que ha sido ingresado con problemas renales, presente problemas de presión arterial.

    Solución: Sean el suceso P, paciente que ingresa con problemas de presión arterial y el suceso R paciente que ingresa con problemas renales. La probabilidad de que un paciente con problemas de presión arterial también tenga problemas renales ,se usará la intersección de los 2 eventos como:$P(P \cap R) = 0.3$ y dado que el paciente ya presenta problemas de presión arterial , cuya probabilidad del evento es $P(P) = 0.7$ será:

$$P(R \mid P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)} = \frac{0.3}{0.7} \approx 0.43, o\ 43\%. \tag{315}$$

    La probabilidad de que un paciente que ha sido ingresado con problemas renales, presente problemas de presión arterial, presenta la situación contraria, pero se mantiene que :$P(P \cap R) = 0.3$ y dado que el paciente ya presenta problemas renales, cuya probabilidad del evento es $P(R) = 0.5$ será:

$$P(R \mid P) = \frac{P(R \cap P)}{P(R)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6, o\ 60\%. \tag{316}$$

17. Una mujer es portadora de la enfermedad de Duchenne ¿Cuál es la probabilidad de que su póóximo hijo tenga la enfermedad?. La mujer tiene el hijo y es varón ¿Qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad?

    Solución: Según las leyes de Mendel, todos los posibles genotipos de un hijo de una madre portadora (xX) y un padre normal (XY) son xX, xY, XX, XY y tienen la misma probabilidad. El espacio muestral es W = { xX, xY, XX, XY } . Definimos como el suceso A a tener un hijo enfermo corresponde al genotipo xY, por tanto, según la definición clásica de probabilidad P(A) = 1/4. Si se define el suceso B como el hecho de tener un hijo varón = {xY, XY } , la probabilidad entonces se representa como: $P(A \mid B)$, donde P(B)=0.5, observando el espacio muestral, así mismo la probabilidad de que los 2 sucesos ocurran es dado como $P(A \cap B) = 1/4$, y entonces, la probabilidad de que siendo el hijo varón, tenga la patología descrita se puede obtener con la probabilidad condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \tag{317}$$

    Hay una probabilidad del 50 % de tener la enfermedad si el hijo nace varón.

18. Dados lo sucesos A y B tales que $P(A) > 0$ y $P(B \mid A) > 0$, mostrar que :

$$P(B \mid A) > 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)} \tag{318}$$

    Solución: Sea la definición de probabilidad condicional:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{319}$$

    Y sea la operación de unión de la cardinalidad de los conjuntos definida como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{320}$$

Representando las probabilidades de A y B como sus complementos tenemos:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 1-P(\bar{A})+1-P(\bar{B})-P(A\cap B) \quad (321)$$

$$P(A\cap B) = [1 - P(\bar{A}) - P(B)] + [P\overline{(A\cup B)}] \quad (322)$$

Si consideramos $P\overline{(A\cup B)} > 0$, tenemos: $P(A\cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$, se tiene:

$$1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}), \; P(A\cap B) \geq P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \quad (323)$$

Si sustituimos esta última igualdad en la ecuación general de probabilidad condicional para dos eventos tenemos:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \geq \frac{P(A) - P(\bar{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)} \quad (324)$$

19. De una baraja estándar de 52 cartas, entonces sea A el suceso de sacar un As en la primera extracción y B sacar un As en la segunda extracción. Calcular la probabilidad de sacar dos Ases en dos extracciones sin devolver la carta extraída.

    Solución: A y B son sucesos dependientes porque la ocurrencia de A afecta la probabilidad de ocurrencia de B. La probabilidad de que la primera carta sea un As es:$P(A) = 4/52$, la probabilidad de que la segunda carta sea un As, dado que á se seleccionó un As en la primera extración es $P(B \mid A) = 3/51$. Reemplazando los anteriores valores en la regla general de la multiplicación de probabilidades para eventos dependientes se obtiene:

$$P(B\cap A) = P(A) * P(B \mid A) = \frac{4}{52}\left(\frac{3}{51}\right) = \frac{1}{221} \quad (325)$$

20. Una urna contiene trece esferas iguales numeradas del uno al trece, de las cuales cinco son rojas y ocho blancas. Se toman al azar dos esferas de la urna una tras otra sin reemplazo; si la primer esfera extraída es blanca, calcular la probabilidad de que la segunda también lo sea.

    Solución: Si asignamos el evento A como la primer esfera extraída es blanca, y el evento B como la segunda esfera extraída es blanca,se calcúla la probabilidad del evento B dado A, entonces, la pobabilidad de A es $P(A) = 8/13$, entonces, la probabilidad de que suceda tant el evento A como el evento B ,toma entonces la forma de las multiplicaciones de los eventos A y B, de manera que se pueden expresar como una intersección de eventos como: $P(A \cap B) = (8/13) * (7/12) = 56/156 = 14/39$, de que en dos obtenciones seguidas se tenga ambas esferas blancas, entonces, dado que ya sucedió el evento A, o que se sacó yá una esfera blanca, la probabilidad de sacar otra esfera blanca es en realidad la probabilidad del evento B dado A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{14/39}{8/13} = 7/12 = 58.33\% \; deprobabilidad. \tag{326}$$

Caminos mínimos que puede recorrerse en un cubo

Dada la figura geométrica del cubo, se necesita saber la cantidad de recorridos posibles que se pueden realizar des una arista del mismo hacia la otra arista opuesta. Si se observan los caminos en el cubo, se puede deducir que el camíno mínimo se realiza en 3 pasos, o bien, en 3 recorridos de enlaces que unen las aristas, en cada paso, si suponemos un cubo que se compone a su vez de 6 caras, las cuales están dividas entre 4 secciones, como se plantea en la siguiente figura[13]:

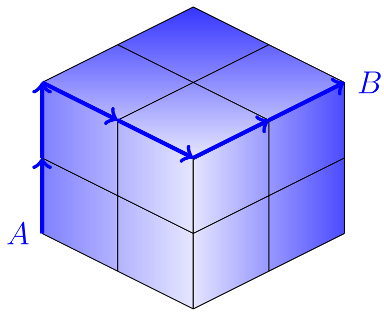


Figure 46: Cubo de caras subdividido en 4 secciones.

Se observa que si se quiere llegar del punto A al punto B, el camino mínimo está compuesto por 6 pasos, es decir, para el caso particular del cubo azul, se avanza cada subdivisión de la malla, siguiendo el procedimiento de los cuadrados, notamos que por cada dimensión, se recorren 2 espacios, al recorrer 3 dimensiones, se recorrerán 6 en total, justo como se estimó, así que los caminos mínmos de un cubo siguen la estructura de permutación con repetición dada como:

$$PR^{c}_{r,s,t} = \frac{c!}{r!s!t!} \tag{327}$$

Para el caso particular de recorrer 3 dimensiones, en cada uno 2 espacios, se tiene:

$$PR^{c}_{r,s,t} = \frac{c!}{r!s!t!} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90\ caminosm\tilde{\imath}nimos. \tag{328}$$

Falacia del perseguidor

La falacia del fiscal es una falacia de razonamiento estadístico, utilizada por la fiscalía para defender la culpabilidad de un acusado durante un juicio penal. Algunas variantes de la falacia puede ser utilizado por los abogados defensores de la defensa de la inocencia de su cliente.

La falacia implica asumir que la probabilidad previa de una coincidencia aleatoria es igual a la probabilidad de que el acusado sea culpable. Por ejemplo, si se sabe que un perpetrador tiene el mismo tipo de sangre que un acusado y el 10% de la población comparte ese tipo de sangre, se argumenta sobre esa base que la probabilidad de que el acusado sea culpable es del 90% .

Los términos "falacia del fiscal" y "falacia del abogado defensor" fueron originados por William C. Thompson y Edward Schumann en 1987. La falacia puede surgir de múltiples pruebas , como cuando se comparan pruebas con una gran base de datos. El tamaño de la base de datos aumenta la probabilidad de encontrar un partido por pura casualidad; Es decir, la evidencia de ADN es más sólida cuando se encuentra una coincidencia después de una sola comparación directa porque la existencia de coincidencias con una base de datos grande donde la muestra de prueba es de mala calidad puede ser menos improbable por pura casualidad.

Como ejemplo, si tenemos un ganador de la lotería es acusado de hacer trampa , sobre la base de la improbabilidad de ganar. En el juicio, el fiscal calcula la probabilidad de ganar la lotería sin hacer trampa y argumenta que esta es fortuita. La falla lógica es que el fiscal no ha tenido en cuenta el gran número de personas que juegan en la lotería. Mientras que la probabilidad de que una persona gane es bastante baja, la probabilidad de que cualquier persona gane la lotería, dado el número de personas que la juegan, es muy alta [21].

Ejemplos de algoritmos y su complejidad

En la ciencia de la computación los algoritmos son la solución de un problema, haciendo uso de las computadoras; requiere por una parte un algoritmo o método de resolución y por otra un programa o codificación del algoritmo . Ambos componentes tienen importancia; pero la del algoritmo es absolutamente indispensable; sabemos que un algoritmo es una secuencia de pasos para resolver un problema, sus características son [65]:

Independiente: Del LP y de la máquina.

Definido: De pasos claros y concretos.

Finito: En el número de pasos que usará.

Preciso: Cada paso arroja un cálculo correcto.

Recibe datos: Debe poseer datos de entrada.

Complejidad Algorítmica

Un algoritmo será más eficiente comparado con otro, siempre que consuma menos recursos, como el tiempo y espacio de memoria necesarios para ejecutarlo. La eficiencia de un algoritmo puede ser cuantificada con las siguientes medidas de complejidad:

- Complejidad Temporal o Tiempo de ejecución: Tiempo de cómputo necesario para ejecutar algún programa.
- Complejidad Espacial: Memoria que utiliza un programa para su ejecución, la eficiencia en memoria de un algoritmo indica la cantidad de espacio requerido para ejecutar el algoritmo; es decir, el espacio en memoria que ocupan todas las variables propias al algoritmo. Para calcular la memoria estática de un algoritmo se suma la memoria que ocupan las variables declaradas en el algoritmo. Para el caso de la memoria dinámica, el cálculo no es tan simple ya que, este depende de cada ejecución del algoritmo.
- Tiempo de Ejecución: El tiempo de Ejecución de un programa se mide en función de N, lo que designaremos como T(N).Esta función se puede calcular físicamente ejecutando el programa acompañados de un reloj, o calcularse directamente sobre el código, contando las instrucciones a ser ejecutadas y multiplicando por el tiempo requerido por cada instrucción [65].

Tiempos Polinomiales de ejecución

Se dice que $O(f(n))$ define un "orden de complejidad". Escogeremos como representante de este orden a la función $f(n)$ más sencilla del mismo. Así tendremos [39]:

1. $O(1)$: Orden constante.
   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser sumar números constantes, y la

istrucción if ordinaria.

2. $O(n)$: Orden lineal:
   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser de ordenamiento , tales como el m etodo burbíja, el Shell y el bUck Sort.

3. $O(nlog(n))$:
   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser ordenamiento de elementos, algunos algoritmos de dividir y vencer.

4. $O(n^2)$: Orden cuadrático:
   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser de tipo matriciales, vectoriales, como el caso de Stable Matching, o encontrar los puntos más cercanos en un plano.

5. $O(n^a)$: Orden Polinomial:
   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser algunos aplicados a Grafos, los que presentan más de una función de recursividad y en general los que exploran arreglos de 3 dimensiones.

6. $O(a^n)$: Orden Exponencial:

   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser la factorización de números , y algunos algoritmos de procesamiento de matrices. Cae en la clasificación de los intratables.

7. $O(n!)$: Orden factorial:

   Ejemplos de estos algorítmos suelen ser que para un problema complejo prueban todas las combinaciones posibles, algunos algoritmos de grafos, al igual que el anterior, pertenecen a los intratables [39].

Tarea 11

Ejercicios de Probabilidad Total

1. En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

   a. Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.

   b. Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

   Solución: Se definen los sucesos como : Suceso N: seleccionar una niña, Suceso V: seleccionar un niño., y Suceso M: infante menor de 24 meses.Estos serán los sucesos condicionados.En el caso a, se pide respecto a la población es de los infantes, y la característica en común es que sean menores de 24 meses , por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$$P(M) = P(N) * P(M \mid N) + P(V) * P(M \mid V) = 0.6(0.2) + 0.4(0.35) = 0.26 \; o \; 26\% \tag{329}$$

   Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña una infante menor de 24 meses será:

$$P(N \mid M) = \frac{P(N) * P(M \mid N)}{P(M)} = \frac{P(N) * P(M \mid N)}{P(N) * P(M \mid N) + P(V) * P(M \mid V)} \tag{330}$$

$$P(N \mid M) = \frac{0.6(0.2}{0.6(0.2) + 0.4(0.35)} = \frac{0.12}{0.26} = 0.46 \ o \ 46\% \tag{331}$$

2. Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

   a. Determine la probabilidad de que sea de género masculino.

   b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

   Solución: Se definen los sucesos: suceso F: pacientes que se realizan cirugías faciales, suceso M: pacientes que se realizan implantes mamarios, suceso O: pacientes que se realizan otras cirugías correctivas y el suceso H: pacientes de género masculino. La probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes. Dicho valor será:

$$P(H) = P(F) * P(H \mid F) + P(M) * P(H \mid M) + P(O) * P(H \mid O) = \tag{332}$$

$$0.2 * (0.25) + 0.35 * (0.15) + 0.45 * (0.4) \approx 0.28 \ o \ 28\% \tag{333}$$

   Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de bayes, luego, el valor de la probabilidad será:

$$P(M \mid H) = \frac{P(M) * P(H \mid M)}{P(H)} = \tag{334}$$

$$\frac{P(M) * P(H \mid M)}{P(F) * P(H \mid F) + P(M) * P(H \mid M) + P(O) * P(H \mid O)} = \tag{335}$$

$$\frac{0.35 * (0.15)}{0.2 * (0.25) + 0.35 * (0.15) + 0.45 * (0.4)} = \frac{0.0525}{0.2825} =\approx 0.19 \; o \; 19\% \tag{336}$$

3. Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar estudios de ultrasonido. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de un estudio y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

   Solución: Se definen los sucesos: suceso P: seleccionar el primer aparato, suceso S: seleccionar el segundo aparato, suceso T: seleccionar el tercer aparato y el suceso E: seleccionar un resultado con error. Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P \mid E) = \frac{P(P) * P(E \mid P)}{P(P) * P(E \mid P) + P(S) * P(E \mid S) + P(T) * P(E \mid T)} = \tag{337}$$

$$P(P \mid E) = \frac{0.25 * 0.01}{0.25 * 0.01 + 0.35 * 0.02 + 0.4 * 0.0.03} = \frac{0.0025}{0.0215} = 0.116 \approx 0.12 \; o \; 12\% \tag{338}$$

4. En una bolsa hay papeletas de tres colores, con las siguientes probabilidades de ser elegidas: Amarilla: probabilidad del 50%, verde: probabilidad del

30% y roja: probabilidad del 20%. Se ha observado que según el color de la papeleta elegida, se podrá participar en diferentes sorteos con diferentes probabilidades de obtener un premio: Amarilla: participas en un sorteo con una probabilidad de ganar del 40%, verde: participas en otro sorteo con una probabilidad de ganar del 60% y roja: participas en un tercer sorteo con una probabilidad de ganar del 80%. Con esta información, ¿ Qué probabilidad tienes de ganar el sorteo en el que participes ?

Solución:Las tres papeletas forman probabilidades que suman 100%, de ésta forma se sabe que en la probabilidad total la fórmula que usamos se puede expresar como:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n}(A_i) * P(B \mid A_i) \tag{339}$$

Entonces para éste caso:

$$P(B) = (0.50 * 0.40) + (0.30 * 0.60) + (0.20 * 0.80) = 0.54 \ o \ 54\% \tag{340}$$

Por tanto, la probabilidad de que ganes el sorteo es del 54%.

5. En una compañia se cambiará al jefe de un área y se proponen diversos candidatos:

a) Carlos, con una probabilidad del 60%

b) Juan, con una probabilidad del 30%

c) Luis, con una probabilidad del 10%

En función de quien sea el próximo jefe, la probabilidad de que se suban los sueldos es la siguiente:

a) Si sale Carlos: la probabilidad de que te suban el sueldo es del 5%.

b) Si sale Juan: la probabilidad de que te suban el sueldo es del 20%.

c) Si sale Luis: la probabilidad de que te suban el sueldo es del 60%.

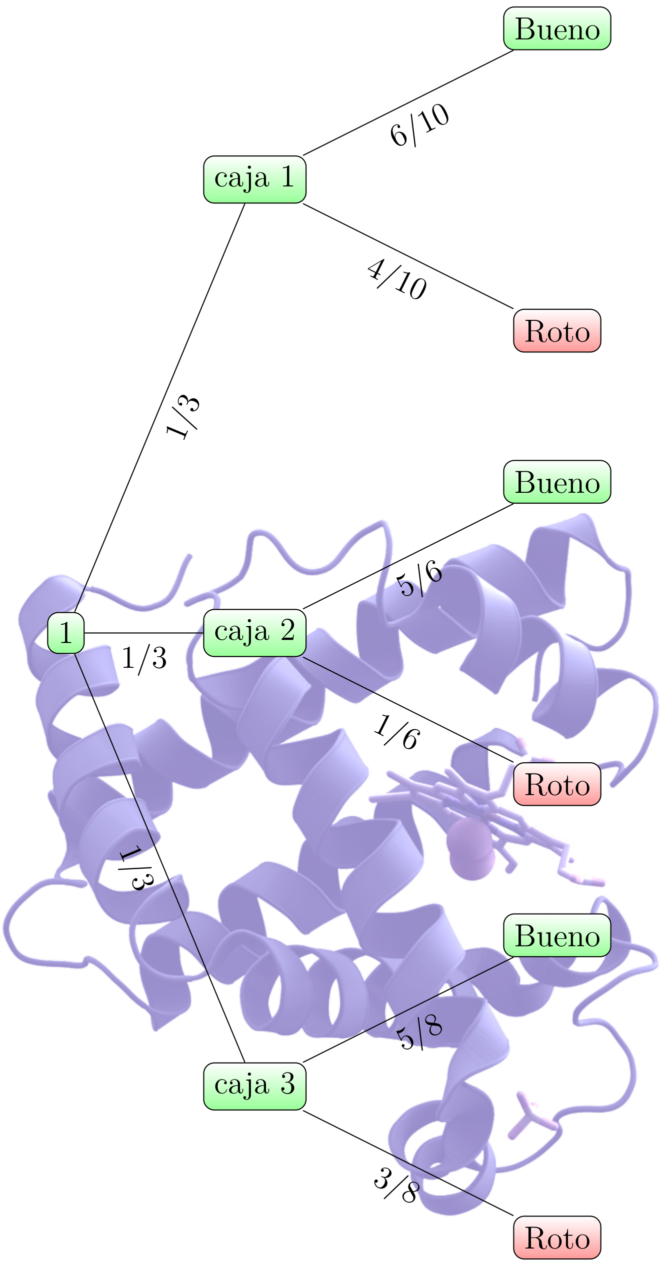
¿ Cúal es la probabilidad de que se suba el sueldo?

Solución: Los tres candidatos forman un sistema completo. Aplicamos la fórmula:

$$P(B) = (0.60 * 0.05) + (0.30 * 0.20) + (0.10 * 0.60) = 0.15 \ o \ 15\% \qquad (341)$$

6. Se dispone de tres cajas con celulares. La primera contiene 10 celulares, de los cuales hay cuatro rotos; en la segunda hay seis celulares, estando uno de ellos roto, y en la tercera caja hay tres celulares rotos de un total de ocho. ¿ Cuál es la probabilidad de que al tomar un celular al azar de una de las cajas, esté roto?

   Solución: Definimos los sucesos A_1 = elegir la caja 1, A_2 = elegir la caja 2, A_3 = elegir la caja 3.Construyendo el diagrama de árbol tenemos:



Entonces $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$ y los sucesos cumplen las hipótesis del teorema. Definimos el suceso B= celular roto, y aplicando el teorema obtenemos:

$$P(B) = P(B \mid A_1) * P(A_1) + P(B \mid A_2) * P(A_2) + P(B \mid A_3) * P(A_3) = \quad (342)$$

$$P(B) = (0.4) * (1/3) + (1/6) * (1/3) + (3/8) * (1/3) = \frac{113}{360} = 0.3139 \; o \; 31.39\% \tag{343}$$

7. En una titulación el alumnado puede optar por cursar las asignaturas optativas A y B. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia la asignatura A y el resto la B. El 30% de los que estudian la asignatura A son chicos y de los que estudian la asignatura B son chicos el 40%. Elegido un estudiante al azar, ¿ Cúal es la probabilidad de que sea chica?

   Solución: Definimos los sucesos A=estudiar asignatura A y B=estudiar asignatura B.Entonces$P(A) = 0.9$ y $P(B) = 0.1$. Claramente los sucesos A y B son complementarios $(A \cap B = \emptyset)$ y $(A \cup B) = \Omega$. $P(C) =$ será entonces la probabilidad de seleccionar una chica , por lo tanto, aplicamos el teorema de la probabilidad total , obtenemos:

$$P(C) = P(C \mid A) * P(A) + P(C \mid B) * P(B) = 0.7 * 0.9 + 0.6 * 0.1 = 0.69 \; o \; 69\% \tag{344}$$

8. Una tienda de videojuegos ha hecho un estudio de su mercado obteniendo que el 40 por ciento de las ventas han sido de videojuegos de acción, un 25 por ciento de videojuegos de simulación y el resto de videojuegos de aventura. Se ha estimado además, que entre las personas que han comprado videojuegos de acción, el 25 por ciento eran mujeres, mientras que en el caso de los videojuegos de simulación, el 65 por ciento de las compras han correspondido a mujeres. En el caso de los videojuegos de aventuras el porcentaje de compras hechas por hombres ha triplicado al de mujeres. La empresa decide elegir un cliente al azar para una campaña de publicidad. Calcula la probabilidad de que sea una mujer.

   Solución: Definimos los sucesos A= ventas por videojuegos de acción, B= ventas por videojuegos de de simulación, C= ventas por juegos de aventura. D= Seleccionar una mujer, por lo que, podemos construir el problema como probabilidad total, en donde $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.35$, entonces las probabilidades de escoger a una chica de entre los tipos de videojuegos que se venden dado su tipo se pueden expresar como: $P(D \mid A) = 0.25$, $P(D \mid B) = 0.65$,para el caso de los juegos de aventuras se tiene

$1 = x + 3x = 4x \ \rightarrow x = 0.25$, entonces $P(D \mid C) = 0.25$, por lo cual, dicha probabilidad se puede expresar como:

$$P(D) = P(D \mid A) * P(A) + P(D \mid B) * P(B) + P(D \mid C) * P(C) \tag{345}$$

$$P(D) = 0.25 * 0.4 + 0.65 * 0.25 + 0.25 * 0.35 = 0.35 \ o \ 35\% \tag{346}$$

9. Una fábrica produce 2 tipos de reguladores: del tipo A y del tipo B. El 75% de la producción es del tipo A y el 25% del tipo B. Se sabe que el 95% de los reguladores del tipo A funcionan bien y el 98% de los del tipo B también funcionan bien. Si se selecciona un regulador al azar de la producción de la fábrica ¿ Cúal es la probabilidad de que funcione bien?

   Solución: Definamos el evento F como el regulador funcione bien. Los datos que tenemos son: $P(A) = 0.75$,$P(F \mid A) = 0.95$, $P(B) = 0.25$, $P(F \mid B) = 0.98$.Aplicando el teorema de probabilidad total tenemos que:

$$P(F) = P(A) * P(F \mid A) + P(B) * P(F \mid B) =$$

$$(0.75)(0.95) + (0.25)(0.98) = 0.9575 \ o \ 95.75\%$$

10. Una pequeña empresa desarrolladora de videojuegos opera con tres grandes regiones de un país: X, Y, Z. El 50% de las operaciones las realiza en la región X, el 40% en la región Y, mientras que s ólo un 10% de las operaciones las realiza en la región Z. Se ha estimado, por la larga experiencia, que el tanto por ciento de clientes de la región X que efectúan siempre el pago de los pedidos es del 99%, mientras que en la región Y es del 98% y en la región Z del 92%. Si se elige un cliente al azar, calcula la probabilidad de que sea moroso (que pague):

    Solución: Definimos los sucesos X= Operaciones en la región X, Y= Operaciones en la región Y, Z= Operaciones en la región Z. El suceso A como que el cliente sea moroso, (que pague), por lo que, podemos construir el problema como probabilidad total, en donde $P(X) = 0.5$, $P(Y) = 0.4$, $P(Z) = 0.1$, entonces las probabilidades de escoger un cliente moroso al azar entre las regiones se pueden expresar como: $P(A \mid X) = 0.99$, $P(A \mid Y) = 0.98$ y $P(A \mid Z) = 0.92$, por lo cual, dicha probabilidad se puede expresar como:

$$P(A) = P(A \mid X) * P(X) + P(A \mid Y) * P(Y) + P(A \mid Z) * P(Z) \tag{347}$$

$$P(A) = 0.99 * 0.5 + 0.98 * 0.4 + 0.1 * 0.92 = 0.979 \; o \; 97.9\% \tag{348}$$

Ejercicios de Probabilidadde Partición Total de Bayes

1. Una fábrica de tornillos tiene dos máquinas, la M1, que es más antigua, y hace el 75% de todos los tornillos, y la M2, más nueva pero más pequeña, que hace el25% de los tornillos. La M1 hace un 4% de tornillos defectuosos, mientras que la M2 tan sólo hace un 2% de tornillos defectuosos. Si escogemos un tornillo al azar, ¿ Qué probabilidad hay de que salga defectuoso, y que pueda venir de la máquina M1?

   Solución: Podemos resolver el problema utilizando el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.La probabilidad de seleccionar un tornillo de la máquina M1 es : $P(M1) = 0.75$, si sabemos que un tornillo es defectuoso $P(D)$, la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina M1 es: $P(D \mid M1)$, la cual es una tipo de probabilidad total condicional, para calcular $P(D)$, se usa la probabilidad total:

$$P(D) = P(D \mid M1)*P(M1)+P(D \mid M2)*P(M2) = 0.75*0.04+0.25*0.02 = 0.035 \tag{349}$$

   Por lo que al final se puede escribir el problema como Bayes para saber si vino de la máquina M1 de la forma:

$$P(M1 \mid D) = \frac{P(M1) * P(D \mid M1)}{P(D)} \tag{350}$$

$$P(M1 \mid D) = \frac{0.75 * 0.04}{0.035} = 0.857 \; o \; 85.7\% \tag{351}$$

2. Tenemos tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, y tan sólo una fundida, y en la tercera hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. Si cogemos una bombilla fundida, ¿ Cuál es la probabilidad de que sea de la caja 1?

   Solución: C1,C2 y C3 representan los eventos de tomar las cajas 1,2 y 3 con probabilidad de 1/3 respectivamente. También el evento F se considera encontrar una bombilla fundida, por lo que el complemento de F se tomará como el suceso de tomar una bombilla operativa. Nos interesa primero encontrar $P(F)$, por la probabilidad total se puede encontrar como:

$$P(F) = P(F \mid C1) * P(C1) + P(F \mid C2) * P(C2) + P(F \mid C3) * P(C3) \tag{352}$$

$$P(F) = 0.4 * 1/3 + (1/6) * (1/3) + (1/3) * (3/8) = 113/360 \tag{353}$$

   Por el teorema de Bayes, la probabilidad de tomar una bombilla al azar que resulte estar fundida y que venga de la caja 1 se expresa como:

$$P(C1 \mid F) = \frac{P(C1) * P(F \mid C1)}{P(F)} \tag{354}$$

$$P(C1 \mid F) = \frac{0.4 * 1/3}{113/360} = 0.425 \; o \; 42.5\% \tag{355}$$

3. En un congreso se reúnen 250 médicos de Europa, de los cuales 115 son alemanes,65 franceses y 70 ingleses. De estos médicos, el 75% de los alemanes, el 60% de los franceses y el 65% de los ingleses están a favor de utilizar una nueva vacuna para la gripe. Si escogemos un médico al azar, y está a favor de aplicar la vacuna, ¿ Cuál es la probabilidad de que sea francés?

Solución: Consideremos los siguientes sucesos:A = médico alemán, F=médico francés ,I= médico inglés, así como V=estar a favor de la vacuna, (y por lo tanto,el complemento de V será = estar en contra de la vacuna).Nos estamos preguntando por la probabilidad de que dado que un médico seleccionado al azar está a favor de la nueva vacuna, sea francés. Para la probabilidad total de que se esté a favor de la vacuna independientemente de la nacionalidad se tiene:

$$P(V) = P(V \mid A) * P(A) + P(V \mid F) * P(F) + P(V \mid I) * P(CI) \tag{356}$$

$$P(V) = (115/250) * 0.75 + (65/250) * 0.6 + 0.28 * (0.65) = 0.683 \tag{357}$$

Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(F \mid V) = \frac{P(F) * P(V \mid F)}{P(V)} \tag{358}$$

$$P(F \mid V) = \frac{0.26 * 0.6}{0.683} = 0.228 \; o \; 22.8\% \tag{359}$$

4. La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0.3% y para no hipertensos del 0.1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿ Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

   Solución:Se seleccionan los sucesos como : A1 = ser hipertenso, A2 = no serlo, estos sucesos constituyen una partición. El suceso B = padecer infarto , se sabe que $P(B \mid A1) = 0.003$; $P(B \mid A2) = 0.001$; $P(A1) = 0.25$, además $P(A2) = 1 - P(A1) = 1 - 0.25 = 0.75$, entonces:

$$P(B) = P(B \mid A1) * P(A1) + P(B \mid A2) * P(A2) \tag{360}$$

$$P(B) = 0.003 * (0.25) + 0.001 * (0.75) = 0.0015 \; o \; 0.15\% \tag{361}$$

5. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas, el resto otra cosa. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿ Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

   Solución: Sean los eventos I= Ser ingeniero, E=Ser economista y A= Ser otra cosa, dado las probabilidades de ser directivo P(D); dado cada puesto son: $P(D \mid I) = 0.75, P(D \mid E) = 0.5$ y $P(D \mid A) = 0.2$, se puede escribir la probabilidad de ser ingeniero dado que ya es directivo usando la probabilidad total y la probabilidad de bayes como:

$$P(I \mid D) = \frac{P(D \mid I) * P(I)}{P(D \mid I) * P(I) + P(D \mid A) * P(A) + P(D \mid E) * P(E)} \tag{362}$$

$$P(I \mid D) = \frac{0.2 * 0.75}{0.2 * 0.75 + 0.2 * 0.5 + 0.6 * 0.2} = 0.405 \ o \ 40.5\% \tag{363}$$

6. La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02. En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿ Cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

   Solución: Sean los sucesos:I = Producirse incidente y A = Sonar la alarma, se construye el siguiente diagrama de árbol:

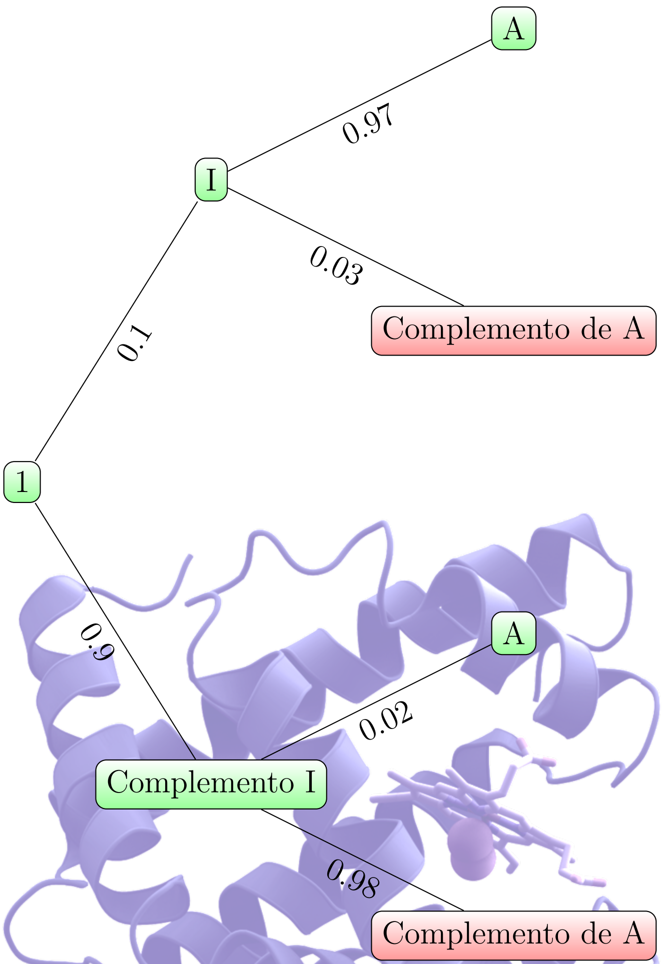


Figure 47: Diagram de árbol

Del cual podemos encontrar que:

$$P(I \mid A) = \frac{P(A \mid 1-I) * P(1-I)}{P(A \mid 1-I) * P(1-I) + P(I) * P(A \mid I} \tag{364}$$

$$P(I \mid A) = \frac{0.9 * 0.02}{0.9 * 0.02 + 0.1 * 0.97} = 0.157 \; o \; 15.7\% \tag{365}$$

7. Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿ Cuál es la probabilidad de

haber sido extraída de la urna A?

Solución: Llamemos R al suceso de sacar bola roja y N al suceso de sacar bola negra de una urna.La probabilidad de cualquiera de las urnas es 1/3, las tres son equi-probables.El ejercicio en concreto pide $P(A \mid R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A \mid R) = \frac{P(A) * P(R \mid A)}{P(A) * P(R \mid A) + P(B) * P(R \mid B) + P(C) * P(R \mid C)} \quad (366)$$

$$P(A \mid R) = \frac{(1/3) * (3/8)}{(1/3) * (3/8) + (1/3) * (2/3) + (1/3) * (2/5)} = 45/173 = 0.26\, o\, 26\% \quad (367)$$

8. Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

   Solución; Sea D el suceso la pieza es defectuosa y sea N el suceso la pieza no es defectuosa. Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, P(D), por la propiedad de la probabilidad total,$P(D) = P(A) * P(D \mid A) + P(B) * P(D \mid B) + P(C) * P(D \mid C) = 0.45 * 0.03 + 0.30 * 0.04 + 0.25 * 0.05 = 0.038$. Debemos calcular $P(B \mid D)$. Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(B \mid D) = \frac{P(B) * P(D \mid B)}{P(D)} \quad (368)$$

$$P(B \mid D) = \frac{0.30 * 0.04}{0.038} = 0.316\ o\ 31.6\% \quad (369)$$

   Ahora calculamos$P(A \mid D)$ y $P(C \mid D)$, comparándolas con el valor de $P(B \mid D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) * P(D \mid A)}{P(D)} \tag{370}$$

$$P(A \mid D) = \frac{0.03 * 0.45}{0.038} = 0.355 \text{ } o \text{ } 35.5\% \tag{371}$$

$$P(C \mid D) = \frac{P(C) * P(D \mid C)}{P(D)} \tag{372}$$

$$P(C \mid D) = \frac{0.25 * 0.05}{0.038} = 0.329 \text{ } o \text{ } 32.9\% \tag{373}$$

De donde deducimos que la máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es A.

9. El canal meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:

a) Que llueva: probabilidad del 50%.
b) Que nieve: probabilidad del 30%.
c) Que haya niebla: probabilidad del 20%.

Según estos posibles estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:

a) Si llueve: probabilidad de accidente del 20%.
b) Si nieva: probabilidad de accidente del 10%.
c) Si hay niebla: probabilidad de accidente del 5%.

Obtener la probabilidad de que estuviera lloviendo.

Solución: Resulta que efectivamente ocurre un accidente y como no est ábamos en la ciudad no sabemos que tiempo hizo (llovío, nevó o hubo niebla). El teorema de Bayes nos permite calcular estas probabilidades: Las probabilidades que manejamos antes de conocer que ha ocurrido un accidente se denominan probabilidades a priori (lluvia con el 50%, nieve con el 30%

y niebla con el 20%). Una vez que incorporamos la información de que ha ocurrido un accidente, las probabilidades del suceso A cambian: son probabilidades condicionadas $P(A \mid B)$, que se denominan probabilidades a posteriori.Vamos a aplicar la fórmula:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) * P(B \mid A_i)}{\sum P(A_i * P(B \mid A_i)} \tag{374}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{0.5 * 0.2}{0.5 * 0.2 + 0.3 * 0.1 + 0.2 * 0.05} = 0.714 \ o \ 71.4\% \tag{375}$$

La probabilidad de que efectivamente estuviera lloviendo el día del accidente (probabilidad a posteriori) es del 71.4%.

10. Una compañía de desarrollo urbano esta considerando la posibilidad de construir un centro comercial en un sector de Lima. Un elemento vital en esta consideración es un proyecto de una autopista que unes este sector con el centro de la ciudad. Si el municipio aprueba esta autopista, hay una posibilidad de 0.90 de que la compañía construya el centro comercial en tanto que si la autopista no es aprobada la probabilidad es de 0.20. Basándose en la información disponible, el presidente de la firma estima que hay una probabilidad de 0.60 que la autopista sea aprobada.

    a) ¿ Cuál es la probabilidad que la compañía construya el centro comercial?
    b) Dado que el centro comercial fue construido. ¿ Cuál es la probabilidad de que la autopista haya sido aprobada?

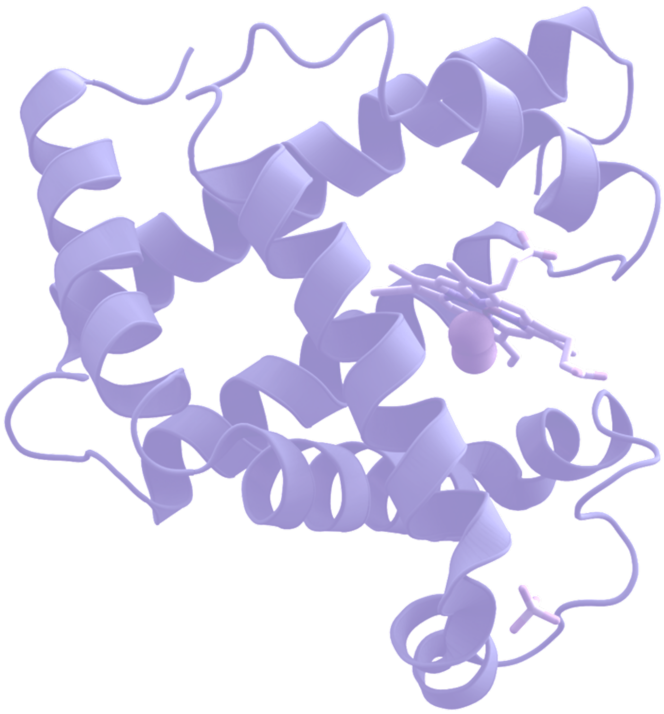
    Solución: Sean los eventos:A= la autopista es aprobada y B= el centro comercial es construido, la probabilidad total para obtener $P(B)$ se expresa como:

$$a) \ P(B) = P(A) * P(B \mid A) + (1 - P(A)) * (1 - P(B \mid A)) \tag{376}$$

$$a) \ P(B) = 0.6 * 0.9 + 0.4 * 0.2 = 0.62 \ o \ 62\% \tag{377}$$

$$b) \ P(A \mid B) = \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)} \tag{378}$$

$$b)\ P(A \mid B) = \frac{0.6 * 0.9}{0.62} = 0.87\ o\ 87\% \qquad (379)$$



Tarea 12

Media cuadrática

La media cuadrática, valor cuadrático medio o RMS (root mean square) es una medida estadística de la magnitud de una cantidad variable. Puede calcularse para una serie de valores discretos o para una función matemática de variable continua. El nombre deriva del hecho de que es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores. La desviación estándar es una media cuadrática [34].

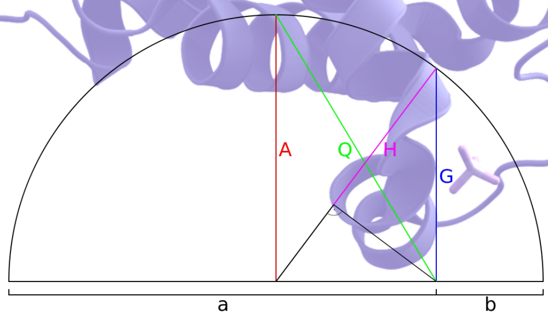


Figure 48: Construcción geométrica para hallar las medias aritmética (A), cuadrática (Q), geométrica (G) y armónica (H) de dos números a y b.

La media cuadrática para una colección de N valores { x1, x2, ... , xN } de una variable discreta x,viene dada por la relación:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}{N}} \tag{380}$$

Para una función de variable continua $f(t)$ definida sobre el intervalo $T_1 \leq t \leq T_2$ viene dada por la expresión:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} (f(t))^2 dt} \tag{381}$$

Introducción a los GPU'S

La unidad de procesamiento de gráficos o GPU es un coprocesador con un tipo de procesamiento de gráficos. De este modo, la GPU puede aligerar la carga de información que debe ser procesada por la unidad central, y esta última puede hacer su trabajo de manera más eficiente. La diferencia principal entre un CPU y un GPU es la arquitectura de cada uno de estos dos componentes. Aunque están diseñados para funcionar de modo muy similar, las GPU están construidas de modo que sean mucho más eficiente para el cálculo de información gráfica (en términos de arquitectura del Hardware). Esto último las hace estar mucho mas optimizadas que un procesador convencional para el tipo de labor en que se basan, sin embargo, no son tan buenas a la hora de llevar a cabo otras tareas.

Tipos de GPU

Actualmente existen tres grandes tipos de unidades de procesamiento gráfico. Más que por la arquitectura, estos difieren entre ellos por el modo en que son implementadas las GPU [71]:

1. Tarjetas dedicadas: Este tipo de unidades gráficas son las que proporcionan mayor potencia. Tienen una serie de especificaciones y están diseñadas para cumplir con sus tareas específicas, por lo que son mucho más eficientes. Generalmente se suele entender que una tarjeta dedicada es aquella que se

integra a la tarjeta madre mediante un puerto aparte. Esto último no siempre es necesario, y lo que realmente define a una tarjeta gráfica dedicada es que tiene RAM independiente que solo podrá ser utilizada por el GPU, y mientras cumpla con este requisito puede estar integrada a la placa base o incluso al CPU.

2. Integrados gráficos: A diferencia de las unidades dedicadas, las integradas utilizan la memoria del sistema para realizar sus funciones. Son este tipo de soluciones las más comunes en los ordenadores modernos, estando hasta en el 90% de los equipos de cómputo, incluyendo smartphones, tablets y la mayoría de PCs. Con frecuencia el núcleo central de estas unidades solía estar en la tarjeta madre, pero ahora se les ve en sus procesadores, y les han denominado AMD Accelerated Processing Unit e Intel HD Graphics respectivamente.

3. Híbridos: Diseñadas para mantener precios relativamente bajos y al mismo tiempo asegurarse niveles de potencia adecuados, las unidades gráficas híbridas también comparten la memoria del sistema, pero para disminuir el tiempo de latencia de esta última, integran una cantidad limitada de memoria propia que se encarga de realizar las labores inmediatas. Suele ser éste el tipo de gráficos que encontraremos en ordenadores portátiles que portan tarjetas dedicadas.

A diferencia de los procesadores centrales, diseãdos con pocos núcleos pero altas frecuencias de reloj, las GPU suelen tener grandes cantidades de núcleos de procesamiento a frecuencias de reloj relativamente bajas. En la actualidad, la mayoría de los núcleos de procesamiento están dirigidos a dos funciones: procesamiento de vŕtices y de píxeles.

El procesamiento de vértices es relativamente sencillo para las unidades de procesamiento gráfico modernas, siendo de los que menos recursos consumen.Se trata de obtener la información de los vértices, previamente calculada por el CPU, y procesar su ordenamiento espacial, rotación, y qué segmento del vértice será gráficamente visible, para así continuar con el pixeleado. A continuación se procede a procesar los pixeles, o en los gráficos observables como tal. Éste es el proceso más complejo y que requiera más carga de procesamiento, pues se aplicaran todas las capas y efectos necesarios para crear texturas complejas y obtener gráficos poderosos [71].

Problemas Schaum's capítulo 2 y 3

2.0 Sea del ejemplo de variable aleatoria, en donde se lanzan dos dados no truqueados , si asignamos una variable aleatoria X tal que X denote todos los posibles valores que pueden tomar la suma de los dados, se nos pide calcular: (a) Obtener la distribución de la probabilidad para X.

Solución:

Sea la variable aleatoria X, que denote la suma de los 2 dados al ser lanzados, sabemos que los posibles valores que puede tomar el experimento se encuentran denotados por valores finitos, por lo que se puede asumir que tiene comportamiento discreto, entonces X tomará valores de :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

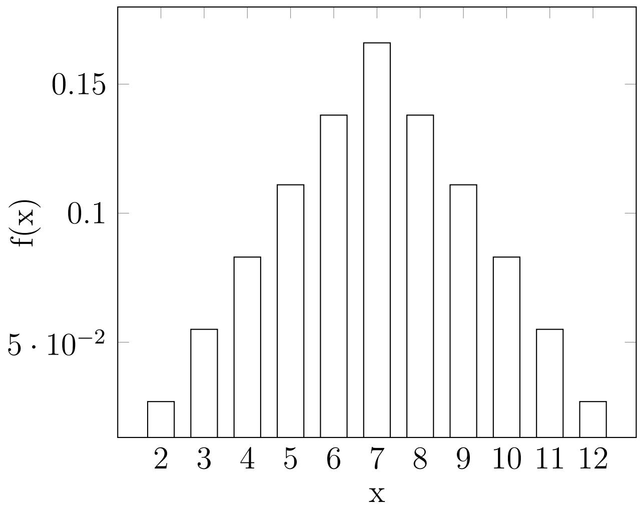
Table 2: Posibles valores de la variable aleatoria X

Entonces, los posibles valores que toma X, notando que : $2 \leq x \leq 12$, entonces se le asigna para cada par del conjunto x_i una probabilidad que cumpla $p_i = P(X = x_i)$,donde las 36 posibilidades de configuración que tengan los dados son igualmente probables, sin embargo, hay que notar que dado un valor de la variable aleatoria X, la probabilidad de que dicha variable tome un valor viene dado por la frecuencia que tiene una determinada combinación de puntos que sumen el valor, así para tener un valor de 2, sólo la combinación 1+1 lo logra, que es sólo 1/36 de todas la combinaciones. En cambio, la probabilidad de obtener 4 en la suma se logra sumando 2+2, 1+3 y 3+1, con 3 combinaciones para un valor de X, se interpreta que es más probable que X tome valor de 4 que de 2, de ésta manera para cada valor de X:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
f(x)	0.027	0.055	0.083	0.111	0.138	0.166	0.138	0.111	0.083	0.055	0.027

Table 3: Posibles valores de la variable aleatoria X

(b).Construir la gráfica de la distribución:



2.1 Consideramos un experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire tres veces y anotamos el resultado. Se define la variable aleatoria X como el número de caras aparecidas en los tres lanzamientos. (a) Obtener la distribución de la probabilidad para X.

Solución:

Sea el número de caras las posibilidades que puede tomar la variable aleatoria X en 3 lanzamientos de una moneda no truqueada seguidos, podemos concluir que sus posibles valores son:

x	0	1	2	3

Table 4: Posibles valores de la variable aleatoria X

Entonces, ahora, observamos el diagrama de árbol de sus posibilidades:

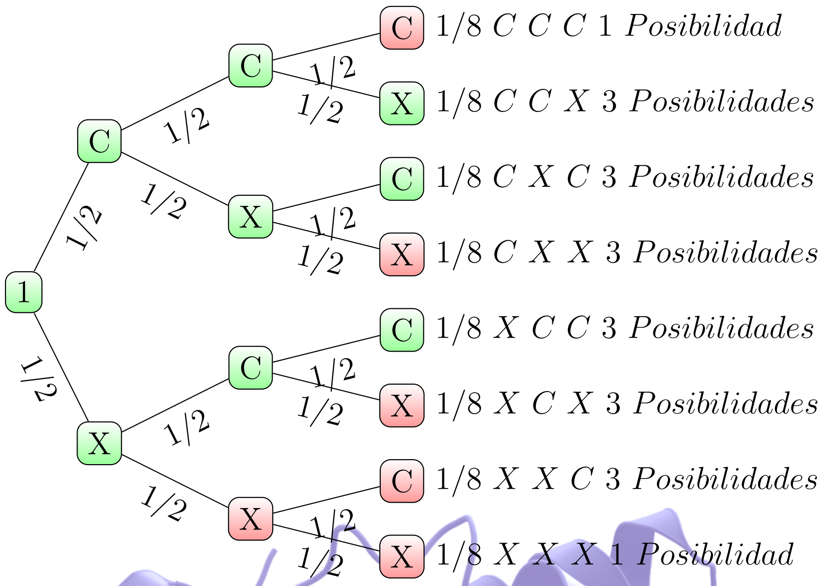


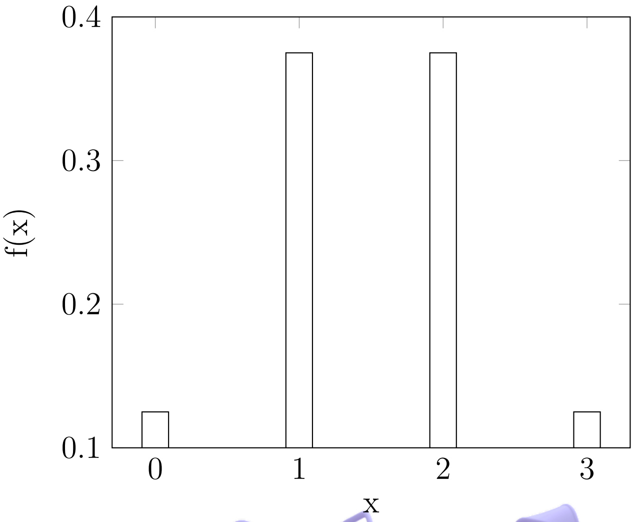
Figure 49: Diagrama de árbol

En cambio, la probabilidad de obtener 4 en la suma se logra sumando 2+2, 1+3 y 3+1, con 3 combinaciones para un valor de X, se interpreta que es más probable que X tome valor de 4 que de 2, de ésta manera para cada valor de X:

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8
f(x)	0.125	0.375	0.375	0.125

Table 5: Posibles valores de la variable aleatoria X

(b).Construir la gráfica de la distribución:



2.2 (a) Hallar la función de distribución $F(x)$ para la variable aleatoria X usada en el problema del lanzamiento de los 2 dados.

Solución:
Para cada valor de que puede tomar la variable X comprendida por desde $-\infty < x < \infty$, queda claro que los extremos comprenden las posibilidad de 0 y 1 respectivamente, y las que si puede tomar poseen una probabilidad asociada, por lo que se podría ver dicha función como:

$$F(x) = H(x) + G(x) \tag{382}$$

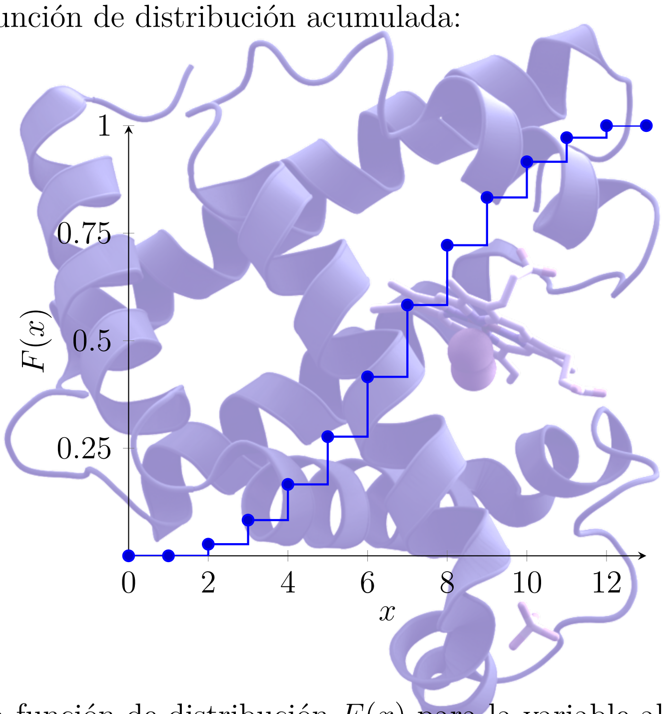
Donde $H(x)$ comprende las probabilidades que puede tomar la variable aleatoria X en sus primeros posibles valores acumulados:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ 1/36 = 0.027 & 2 \leq x < 3 \\ 3/36 = 0.083 & 3 \leq x < 4 \\ 6/36 = 0.166 & 4 \leq x < 5 \\ 10/36 = 0.277 & 5 \leq x < 6 \\ 15/36 = 0.416 & 6 \leq x < 7 \end{cases} \tag{383}$$

Y $G(x)$ comprende las probabilidades que puede tomar la variable aleatoria X en sus últimos valores acumulados:

$$G(x) = \begin{cases} 21/36 = 0.583 & 7 \leq x < 8 \\ 26/36 = 0.722 & 8 \leq x < 9 \\ 30/36 = 0.833 & 9 \leq x < 10 \\ 33/36 = 0.916 & 10 \leq x < 11 \\ 35/36 = 0.972 & 11 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x < \infty \end{cases} \tag{384}$$

(b) Graficar la función de distribución acumulada:



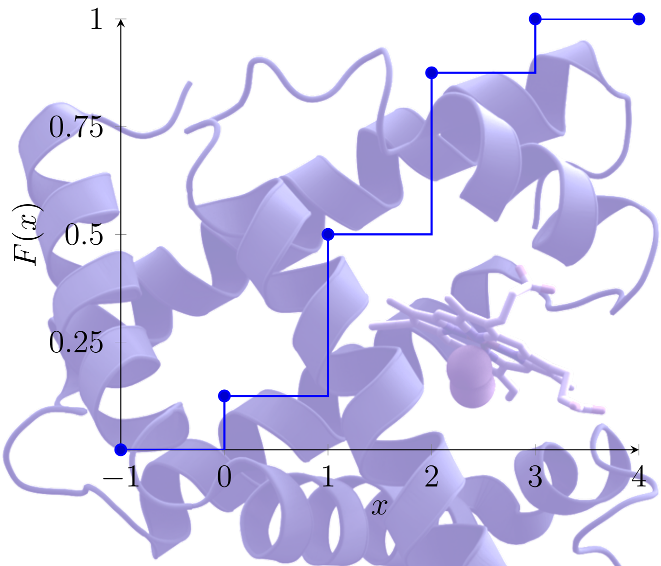
2.3 (a) Hallar la función de distribución $F(x)$ para la variable aleatoria X usada para representar el lanzamiento de 3 monedas seguidas no truqueadas cuyo resultado sea cuantas caras se obtiene:

Solución:
Para cada valor de que puede tomar la variable X comprendida desde $-\infty < x < \infty$, sólo existen 4 posibles valores con probabilidad ; que no haya ninguna cara 0, que haya 1 cara, que haya 2, o que salgan las 3 caras en los 3 lanzamientos, así

que la función acumulada puede representarse como:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 1/8 = 0.125 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 = 0.625 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 = 0.875 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases} \tag{385}$$

(b) Graficar la función de distribución acumulada:



2.4 Un profesor del IPN nunca termina su clase antes del término de la hora asignada, mas nunca se pasa de 2 minutos de ésta. Sea X el tiempo que transcurre entre el término de la hora y el término efectivo de la clase. Un alumno se dio cuenta que la relación de dicho tiempo puede escribirse como una función de distribución de probabilidad para X dada como:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{De otra manera} \end{cases} \tag{386}$$

(a). Hallar el valor de la constante k.

Solución:
Ya que debemos satisfacer la propiedad: $f(x) \geq 0$, la constante k debe de comprender valores positivos, y además debe cumplir con la propiedad : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ para considerarla como función de densidad, tenemos entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} kx^2dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = k\int_{0}^{2} x^2dx \tag{387}$$

Por regla de integración, sabemos que $\int x^n dx = x^{(n+1)}/(n+1) + c$, entonces:

$$k\int_{0}^{2} x^2dx = k\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = k\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right) = \frac{8k}{3} \tag{388}$$

Como sabemos para ser una función de densidad, tenemos que considerar que debe cumplir: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ así entonces:

$$\frac{8k}{3} = 1 \rightarrow k = \frac{3}{8} \geq 0 \tag{389}$$

(b)Obtener la probabilidad de que la clase termine a menos de un minuto después del término de la hora.

Solución:
Al ser una función continua, podemos estimar la probabilidad de que X se encuentre entre 1 y 0, no hay que olvidar que en éste ejemplo, la variable aleatoria representa tiempo y la función dada representa un intervalo de éste:

$$P(X \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{3x^2}{8}dx = \frac{1}{8}\left(x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}((1)^3 - (0)^3) \tag{390}$$

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{8} \tag{391}$$

(c)Obtener la probabilidad de que la clase continúe entre 60 y 90 segundos después del término de la hora.

Solución:
En éste caso se solicita saber la probabilidad de que X se encuentre entre 1 y 1.5

minutos después de acabar la clase:

$$P(1 \le X \le 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{3x^2}{8} dx = \frac{1}{8} \left(x^3\right) \Big|_{1}^{1.5} = \frac{1}{8}((1.5)^3 - (1)^3) \tag{392}$$

$$P(1 \le X \le 1.5) = \frac{3.375 - 1}{8} = 0.296 \tag{393}$$

(d)Obtener la probabilidad de que la clase continúe por lo menos 90 segundos después del término de la hora.

Solución:
En éste caso se solicita saber la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo superior a 1.5 minutos y menos 2, recordar que la cota superior de tiempo se delimitó por la función de distribución:

$$P(1.5 \le X \le 2) = \int_{1.5}^{2} \frac{3x^2}{8} dx = \frac{1}{8} \left(x^3\right) \Big|_{1.5}^{2} = \frac{1}{8}((2)^3 - (1.5)^3) \tag{394}$$

$$P(1.5 \le X \le 2) = \frac{8 - 3.375}{8} = 0.578 \tag{395}$$

2.5 Obtener la función de distribución acumulada para :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & De\ otra\ manera \end{cases} \tag{396}$$

Solución:

Siguiendo el procedimiento análogo como en el caso discreto, se evaluará la probabilidad acumulada de un valor dado con respecto a los valores anteriores, de donde sabemos que:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) ds \tag{397}$$

Si $x < 0$, entonces:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{x} 0ds = 0 \tag{398}$$

Si $0 \leq x \leq 2$, entonces:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{0}^{x} \frac{3}{8}s^2 ds = \frac{3}{8}\left(\frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^x \tag{399}$$

$$F(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{x^3}{8} \tag{400}$$

Si $x > 2$, entonces:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{0}^{2} \frac{3}{8}s^2 ds + \int_{2}^{x} f(s)ds \tag{401}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{3}{8}\left(\frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^2 + 0 = \frac{3}{8}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{3(8)}{(3)8} = 1 \tag{402}$$

Por lo tanto, la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/8 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{403}$$

La función acumulativa comienza con un valor dado 0 e incrementa hasta 1, tambíen se puede observar que las propiedades se cumplen.

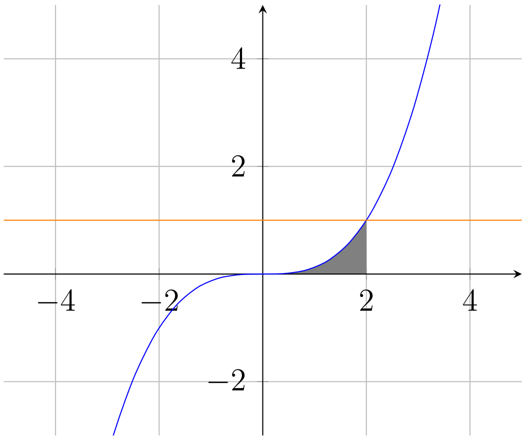


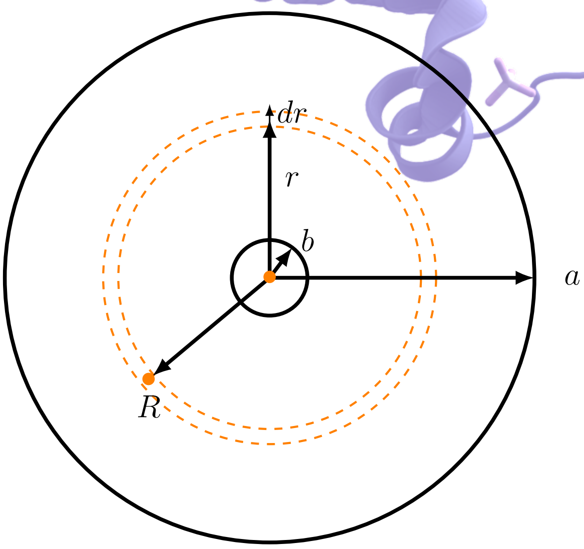
Figure 50: representación de $x^3/8$ y su área bajo la curva

.

2.6 Una persona jugando a los dardos encuentra que la probabilidad de que el dardo caiga entre r y $r + dr$ es:

$$P(r \leq R \leq r + dr) = c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr \tag{404}$$

Aquí, R es la distancia del impacto desde el centro del objetivo, c es una constante y a es el radio del objetivo. Hallar la probabilidad de pegar en el blanco, que se supone tiene radio b. Suponer que siempre se hace impacto en el objetivo:



La función de densidad está dada por:

$$f(r) = c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \tag{405}$$

Si consideramos que siempre se hace impacto en el objetivo, se tiene que :

$$c\int_0^a \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr = 1 \tag{406}$$

Desarrollando la Integral se calculará la constante c:

$$c\left[\int_0^a dr - \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr\right] = 1 \tag{407}$$

$$1 = c\left[(r)\Big|_0^a - \frac{1}{a^2}\int_0^a r^2 dr\right] = c\left[(a-0) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^a\right] \tag{408}$$

$$1 = c\left[a - \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\right] = c\left[a - \frac{a}{3}\right] = c\left(\frac{2a}{3}\right) \to c = \frac{3}{2a} > 0 \tag{409}$$

Entonces la probabilidad de pegar en el blanco es:

$$\int_0^b f(r)dr = \int_0^b c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr = \frac{3}{2a}\left[\int_0^b dr - \int_0^b \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr\right] = \tag{410}$$

$$\frac{3}{2a}\left[(r)\Big|_0^b - \frac{1}{a^2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^b\right] = \frac{3}{2a}\left(b - \frac{b^3}{3a^2}\right) = \frac{3b}{2a} - \frac{3b^3}{6a^3} \tag{411}$$

$$P(0 \leq R \leq b) = \frac{9a^2b - 3b^3}{6a^3} = \frac{3b\left(3a^2 - b^2\right)}{6a^3} = \frac{b\left(3a^2 - b^2\right)}{2a^3} \tag{412}$$

3.1 Existe un juego usando un dado en el cúal un jugador puede obtener una cantidad de dinero de acuerdo a ciertos puntos que obtenga al lanzarlo, así se obtendrá 20 pesos si se saca 2 puntos en el dado, 40 pesos si se obtiene 4 y pierde 30 pesos si obtiene 6,en tanto que no pierde ni gana con otro resultado. Hallar la suma esperada de dinero acumulado en el juego.

Solución:
Sea la variable aleatoria X, podemos asignarle como valores que pueda tomar para el experimento la cantidad de dinero ganado en cada posible resultado del dado , la cúal por la naturaleza del ejercicio nos indica que tendremos como valor finito de la variable X seis posiciones con cada una con su respectivo valor de dinero ganado o perdido, o bien, no alterado.

N	1	2	3	4	5	6
x_i	\$ 0	\$ 20	\$0	\$40	\$0	-\$30
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Table 6: Valores de la distribución de la variable aleatoria X

Entonces, podemos observar que cada tirada tiene una probabilidad igual de 1/6 de ocurrir, además, la suma esperada de dinero puede ser expresada como el valor esperado de la variable aleatoria de que asigna la cantidad de dinero que se pierde o se gana en cada tirada, entonces podemos expresarlo en términos de la función de distribución:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 20\left(\frac{1}{6}\right) + 0\left(\frac{1}{6}\right) + 40\left(\frac{1}{6}\right) + 0\left(\frac{1}{6}\right) - 30\left(\frac{1}{6}\right) \quad (413)$$

$$E(X) = \frac{20+40-30}{6} = \frac{30}{6} = 5 \quad (414)$$

El valor esperado del juego se sitúa en ganar 5 pesos.

Como se observa, cuando tenemos que todas las probabilidades de la distribución de la variable aleatoria son iguales, la expresión del valor esperado se convierte a:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} \quad (415)$$

Llamada entonces media aritmética para valores discretos.

3.2 Si tuviéramos una función de densidad de una variable aleatoria X que describa un fenómeno aleatorio continua, como por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{De otra manera} \end{cases} \quad (416)$$

El valor esperado de X sería:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)dx \tag{417}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx \tag{418}$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} \tag{419}$$

3.3 Obtener la varianza y desviación típica del juego del dado.
Solución:
Recordando que se obtuvo un valor esperado $E(X) = \mu_X = 5$, y recordado que tenemos que calcular primero para cada valor de la variable aleatoria X , $x_i - \mu_X$, y por consiguiente $(x_i - \mu_X)^2$:

N	1	2	3	4	5	6
x_i	\$ 0	\$ 20	\$0	\$40	\$0	-\$30
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x_i - \mu_X$	-5	15	-5	35	-5	-35
$(x_i - \mu_X)^2$	25	225	25	1225	25	1225

Table 7: Valores de la distribución de la variable aleatoria X

Entonces, la varianza podrá ser expresada como:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = \tag{420}$$

$$\sigma_X^2 = 25\left(\frac{1}{6}\right) + 225\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 1225\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 1225\left(\frac{1}{6}\right) = \tag{421}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)(75 + 225 + 2450) = \frac{2750}{6} \approx 458.3333 \tag{422}$$

Consecuentemente la desviación típica se calcula como:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{458.333} \approx 21.4 \tag{423}$$

3.4 Si calculamos la varianza y la desviación típica del anterior ejemplo de la variable continua X donde $\mu_X = E(X) = 4/3$, tendremos:

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \frac{x}{2}dx = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right)\frac{x}{2}dx \tag{424}$$

$$\sigma_X^2 = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2}\right) dx - \int_0^2 \left(\frac{8x^2}{6}\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{16x}{18}\right) dx = \tag{425}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \frac{8}{9}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2^4}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{2^3}{3}\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{2^2}{2}\right) \tag{426}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{2^3}{4} - \frac{4(8)}{9} + \frac{8(4)}{18} = 2 - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \tag{427}$$

Entonces la desviación típica es:

$$\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{428}$$

3.5 Una agencia de seguros presta servicios a numerosos clientes que han adquirido tanto una póliza de propietario de casa como una póliza de automóvil en la agencia. Por cada tipo de póliza, se debe especificar una cantidad deducible, así para la del automóvil, las opciones son \$100 y \$250, mientras que para la póliza de propietario de casa, las opciones son \$0, \$100 y \$200.

Suponga que se selecciona al azar un individuo con ambos tipos de póliza. Sea la variable aleatoria X la posible cantidad deducible sobre la póliza de auto y la variable aleatoria Y la cantidad deducible sobre la póliza de propietario de casa, cuya probabilidad viene dada por la siguiente tabla:

$P(x_i, y_j)$	0	100	200
100	0.2	0.1	0.2
250	0.05	0.15	0.3

Table 8: Tabla de probabilidad de las variables aleatorias X y Y.

Obtener la probabilidad de $P(Y \geq 100)$.
Solución:

Los posibles pares (X, Y) son: (100, 0), (100, 100), (100, 200), (250, 0), (250, 100) y (250, 200); la función masa de probabilidad conjunta especifíca la probabilidad asociada con cada uno de estos pares, con cualquier otro par tiene probabilidad cero. En la tabla de probabilidad conjunta da la función masa de probabilidad podemos observar fácilmente que $P(x_1, y_2) = P(100, 100) = P(X = 100, Y = 100) = 0.1$. Que se traduce en tener \$ 100 de deducible sobre ambas pólizas, entonces la probabilidad de $P(Y \geq 100)$ se calcula sumando las probabilidades de todos los pares (x, y) para los cuales $y \geq 100$:

$$P(Y \leq 100) = P(100, 100) + P(250, 100) + P(100, 200) + P(250, 200) \qquad (429)$$

$$P(Y \leq 100) = 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.30 = 0.75 \qquad (430)$$

3.6 Un banco dispone tanto de una ventanilla para automovilistas como de una ventanilla normal. En un día seleccionado al azar, sea X una variable aleatoria la proporción de tiempo que la ventanilla para automovilistas está en uso (por lo menos un cliente está siendo atendido o está esperando ser atendido) y la variable aleatoria Y la proporción del tiempo que la ventanilla normal está en uso. Entonces el conjunto de valores posibles de X, Y) es el rectángulo D $= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y) está dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\,(x + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{De otra manera} \end{cases} \qquad (431)$$

Calcular la probabilidad de que ninguna ventanilla esté ocupada más de un cuarto del tiempo.

Solución:

La forma de comprobar que la función de densidad de probabilidad conjunta dada es válida para poder obtener información de ella es primero evaluando los limites de la función en la función de distribución conjunta de manera que $f(x, y) \geq 0$ y que:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy \tag{432}$$

$$1 = \frac{6}{5}\int_0^1\int_0^1 xdxdy + \frac{6}{5}\int_0^1\int_0^1 y^2dxdy = \frac{6}{5}\int_0^1 xdx + \frac{6}{5}\int_0^1 \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx \tag{433}$$

$$1 = \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{1}{3}dx = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{15} = \frac{6}{10} + \frac{6}{15} = \frac{12+18}{30} = 1 \tag{434}$$

Comprobada la función, entonces la probabilidad de que ninguna ventanilla esté ocupada más de un cuarto del tiempo (se asume cuarto de tiempo $1/4$ del tiempo total de la función):

$$P(0 \le X \le 1/4, 0 \le Y \le 1/4) = \int_0^{1/4}\int_0^{1/4} \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy = \tag{435}$$

$$\frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} xdxdy + \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} y^2dxdy = \tag{436}$$

$$\frac{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1/4} + \frac{6}{20}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1/4} = \frac{6}{20}\left(\frac{1/16}{2}\right) + \frac{6}{20}\left(\frac{1/64}{3}\right) \tag{437}$$

$$\frac{3/8}{40} + \frac{3/32}{60} = \frac{3}{320} + \frac{1}{640} = \frac{7}{640} \approx 0.01 \tag{438}$$

3.7 Se han tomado cinco muestras de glucógeno, de una cantidad fija cada una. Se les ha aplicado una cantidad X de glucogenasa (en milimoles por litro) se tomará ésta cantidad como la variable aleatoria discreta X, entonces se anota en cada caso la velocidad de reacción , las cuales ser án los valores de la variable aleatoria discreta Y ,medida en micro- moles por minuto, obteniéndose así la siguiente tabla:

a) Calcular la covarianza de las variables aleatorias X y Y.
b) Calcular el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X y Y.

x_i	1	2	3	0.2	0.5
y_j	18	35	60	8	10

Table 9: Tabla de valores de las variables aleatorias X, y Y.

Solución:

Primero se calcularán las desviaciones típicas individuales tanto para la variable X como a la variable Y, cada valor de las variables aleatorias tiene la misma probabilidad de salir, por lo que para todas se encuentra 0.2 de probabilidad de la función de distribución, por lo que la media de la variable X se puede ver como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n} = \frac{1+2+3+0.2+0.5}{5} = 1.34 \tag{439}$$

En segundo lugar, calculando la varianza de la variable X podemos observar que al tener todos los valores de X las mismas probabilidades, podemos reescribir la expresión de la varianza como:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = \frac{1}{i} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 = \tag{440}$$

$$\frac{1}{5}\left((1-1.34)^2 + (2-1.34)^2 + (3-1.34)^2 + (0.2-1.43)^2 + (0.5-1.34)^2\right) = \tag{441}$$

$$\frac{1}{5}(0.1156 + 0.4356 + 2.7556 + 1.2996 + 0.7056) = \frac{5.312}{5} = 1.0624 \tag{442}$$

Por lo tanto, la desviación típica se expresa como: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1.0624} \approx 1.031$.

Se procede igual para la variable aleatoria Y:

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j f(y_j) = \frac{y_1 + y_2 + ...y_n}{n} = \frac{18+35+60+8+10}{5} = 26.2 \tag{443}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^{n}(y_j\mu_Y)^2 f(y_j) = \frac{1}{j}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_Y)^2 = \tag{444}$$

$$\frac{1}{5}\left((18-26.2)^2+(35-26.2)^2+(60-26.2)^2+(8-26.2)^2+(10-26.2)^2\right) = \tag{445}$$

$$\frac{1}{5}\left(67.24+77.44+1142.44+331.24+262.44\right) = \frac{1880.8}{5} = 376.16 \tag{446}$$

Por lo tanto, la desviación típica se expresa como: $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{376.16} \approx 19.395.$

Después calculamos la covarianza entre las variables X e Y, así pues al tener todos los valores la misma probabilidad y la misma longitud $i = j$ podemos reducir la expresión a:

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)f(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{N=1}^{N}(x_N-\mu_X)(y_N-\mu_Y) = \tag{447}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{5}((1-1.34)(18-26.2)+(2-1.34)(35-26.2)+(3-1.34)(60-26.2)+ \tag{448}$$

$$(0.2-1.34)(8-26.2)+(0.5-1.34)(10-26.2)) = \tag{449}$$

$$\frac{1}{5}((-0.34)(-8.2)+(0.66)(8.8)+(1.66)(33.8) \tag{450}$$

$$+(-1.14)(-18.2)+(-0.84)(-16.2)) \tag{451}$$

$$\frac{1}{5}(2.788+5.808+56.108+20.748+13.608) \tag{452}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{99.06}{5} = 19.912 \tag{453}$$

Con estos valores, podemos calcular el coeficiente de correlación:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{19.812}{(1.031)(19.395)} \approx 0.99 \tag{454}$$

Cabe afirmar que con ésta información se puede asumir que la velocidad de reacción aumenta con la concentración de glucogenasa y que este aumento es de tipo lineal.

Proyección de inversión en TIC's

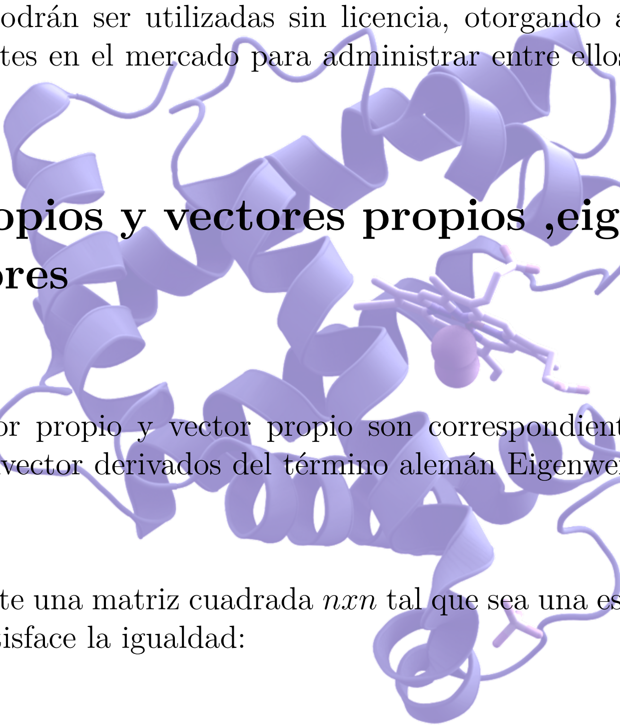
Los cambios que afronta el sector de las tecnología de la información y la comunicación (TIC) son frecuentes,desde el desplazamiento de los ingresos y el nacimiento de diferentes modelos de actividad ecoómica. Cada vez hay más particulares como empresas que tienen un abanico cada vez mayor de servicios y aplicaciones que dan respuesta a sus necesidades de información, comunicación y ocio. El aumento en términos de tráfico de datos, ocasionado por los cambios en el comportamiento de consumidores y empresas, sigue obligando a los operadores tradicionales de telecomunicaciones a revisar, adaptar y diversificar sus técinas en TIC'S.

La rápida adopción de servicio como el Internet (IP), telefonía inteligente y de proveedores de aplicaciones que permiten realizar llamadas gratuitas está perturbando la actividad de los operadores de telecomunicaciones tradicionales, así como el flujo continuo de video y las descargas.Las telecomunicaciones, además, ya no son privilegio exclusivo de los seres humanos. La Internet de las cosas se está haciendo rápidamente realidad y, en un futuro cercano, está previsto que las comunicaciones de máquina a máquina (M2M) aumentarán de manera importante, lo que añadirá más presión a las redes.El el tráfico procedente de dispositivos inalámbricos será superior al de dispositivos alámbricos. Y el futuro crecimiento del tráfico seguirá creciendo.

La banda ancha móvil ha revolucionado y crecido de manera importante.A raíz del surgimiento de tecnologías de telefonía móvil celular de la próxima generación y de la adopción generalizada de dispositivos móviles de banda ancha cada vez más sofisticados, el acceso a la sociedad digital está adquiriendo un más universal.

Los teléfonos inteligentes y las tabletas se están convirtiendo rápidamente en los principales dispositivos de acceso móvil. Los teléfonos inteligentes constituyen una buena ocasión de implantar Internet en zonas que siguen careciendo de infraestructura de banda ancha alámbrica.

El mercado de la computación en la nube que representará un aumento considerable. Los enormes volúmenes de datos almacenados en la nube representan actualmente dos tercios del tráfico mundial de centros de datos.Se ha hecho mucho por la liberalización de los mercados de las telecomunicaciones. No obstante, la competencia encarnizada entre las distintas tecnologías de banda ancha móvil está obligando a los operadores móviles a diversificar su oferta de servicios e innovar en términos de paquetes y precios. Algunos reguladores han atribuido bandas de frecuencias que podrán ser utilizadas sin licencia, otorgando así más libertad a los actores presentes en el mercado para administrar entre ellos la utilización del espectro.



Valores propios y vectores propios ,eigenvalores y eygenvectores

Los términos valor propio y vector propio son correspondientes a los términos eigenvalor y eigenvector derivados del término alemán Eigenwert cuyo significado es "valor propio".

Se dice que si existe una matriz cuadrada nxn tal que sea una escalar λ es un valor propio de A si satisface la igualdad:

$$| \lambda I - A |= det(\lambda I - A) = 0 \tag{455}$$

Si A es una matriz de orden nxn entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. λ es un valor propio de A.
2. El sistema $(\lambda I - A)X = 0$ no tiene soluciones triviales.

3. existe un vector en $\mathbb{R}^n$ diferente de 0 tal que: $Ax = \lambda x$.
4. Si λ es un valor propio de A, entonces el espacio solución del sistema de ecuaciones $(\lambda I - A)x = 0$ se denomina el espacio de A correspondiente a λ , y los vectores diferentes de 0 en el espacio propio de A correspondiente a λ.

Entonces, sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vector propio de A correspondiente a λ sí y sólo si x es una solución no trivial de $(\lambda I - A)x = 0$,es decir, el vector propio son las soluciones del vector x de la forma [12] :

$$\begin{bmatrix} \lambda - A_{1,1} & 0 - A_{1,2} \\ 0 - A_{2,1} & \lambda - A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{456}$$

Ejemplo 1:

Encontrar los valores propios y el vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sabemos que los valores propios satisfacen : $det(\lambda I - A) = 0$, entonces, primero se multiplica la matriz identidad por la escalar λ y a esa matriz se le resta la matriz A:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{457}$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \tag{458}$$

Se calcula el determinante y luego los valores propios de λ:

$$0 = det(\lambda I - A) = ((\lambda - 3)\lambda - (-2)(1)) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \to \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \tag{459}$$

Entonces, para encontrar el vector propio recordamos que :

$$\begin{bmatrix} \lambda - A_{1,1} & 0 - A_{1,2} \\ 0 - A_{2,1} & \lambda - A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{460}$$

Donde cada valor de λ posee un vector propio, así para $\lambda = 1$, resolvemos la igualdad :

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{461}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 3)x_1 - 2x_2 \\ x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = -x_2 \tag{462}$$

Lo que implica que x_2 es una variable libre que tiene la proporción -1 con respecto a x_1, por lo que el vector propio para $\lambda = 1$ puede expresarse como:

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{463}$$

Donde t es una constante que al multiplicar el vector propio mantiene la proporción de éstos valores, entonces para $\lambda = 2$ sus vectores propios se calculan de la misma forma:

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 3)x_1 - 2x_2 \\ x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = -2x_2 \tag{464}$$

Lo que implica que x_2 es una variable libre que tiene la proporción -2 con respecto a x_1, por lo que el vector propio para $\lambda = 2$ puede expresarse como:

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{465}$$

Donde t es una constante que al multiplicar el vector propio mantiene la proporción de éstos valores.

Ejemplo 2:

Encontrar los valores propios y el vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

La ecuación característica de A es: $0 = det(\lambda I - A)$:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \tag{466}$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \tag{467}$$

Se calcula el determinante y luego los valores propios de λ:

$$0 = det(\lambda I - A) = ((\lambda - 2)(\lambda + 5) - (-1)(12)) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \tag{468}$$

Entonces, para encontrar el vector propio primero para $\lambda = -1$ se resuelve la igualdad:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{469}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 2)x_1 + 12x_2 \\ -x_1 + x_2(\lambda + 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 12x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 4x_2 \tag{470}$$

Lo que implica que x_2 es una variable libre que tiene la proporción 4 con respecto a x_1, por lo que el vector propio para $\lambda = -1$ puede expresarse como:

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{471}$$

Donde t es una constante que al multiplicar el vector propio mantiene la proporción de éstos valores, entonces para $\lambda = 2$ sus vectores propios se calculan de la misma forma [24]:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{472}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda-2)x_1+12x_2 \\ -x_1+x_2(\lambda+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_2 \\ -x_1+7x_2 \end{pmatrix} \to x_1 = x_2 = 0 \tag{473}$$

Lo que implica que x_2 y x_1 tiene proporción 0, por lo que el vector propio para $\lambda = 2$ puede expresarse como vector nulo:

$$\vec{x} = t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{474}$$

Sensibilidad ,especificidad y Curva ROC

El resultado de una prueba estadística tiene varios valores. Los valores de rendimiento más importantes que se deben interpretar en los diagnósticos son:

- La sensibilidad es el número de resultados de pruebas positivos:

$$Sensibilidad = \frac{TP}{TP+TF} * 100 \tag{475}$$

  Donde TP indica el número de resultados positivos verdaderos, y FN en número de resultados falsos negativos.

- La especificidad es el número de resultados negativos en personas que no tienen la enfermedad (el negativo verdadero da lugar a controles) y se define como:

$$Especificidad\frac{TN}{TN+FP} * 100 \tag{476}$$

  Donde TN indica el número de resultados negativos verdaderos, y FP en número de resultados falsos positivos.El grupo de control puede ser una población de personas sanas. Sin embargo, para evaluar la especificidad de una prueba de forma realista, la población de control debe estar compuesta por ejemplares que tengan la característica negativa.Por ejemplo, la especificidad de una prueba para la celiaquía se debe evaluar en una población de pacientes con otras enfermedades gastrointestinales, como enfermedades intestinales inflamatorias, infecciones gastrointestinales, etc [62].

Análisis ROC

En general, se prefiere una prueba sensible cuando los inconvenientes de obtener falsos positivos (FP) son menores que los de los falsos negativos (FN). Por ejemplo, si se vacuna un grupo de enfermos y se sabe que la vacuna es letal en los que tienen determinado error metabólico. Es claro que nos interesara que no se haya ningún enfermo sin diagnosticar (que no haya FN en éste caso), aunque no pasa nada si a algún sano le etiquetamos de tener el error metabólico (un FP). Entonces será preferible no vacunar a un sano por pensar que tiene la metabolopatía (aunque no la tenga) que equivocarse aplicando la vacuna a alguien con la condición por pensar que no la tenía. En otro ejemplo en medio de una epidemia se necesita una prueba muy sensible para poder aislar al mayor número posible de enfermos. El problema aquí es el de los sanos positivos (FP) que se selecciones como infectados.Se podriá realizar a todos los positivos de la primera prueba, una segunda de confirmación que sea muy específica para evitar error, que es lo que normalmente se hace para evitar éstos problemas [38].

Se prefiere una prueba específica cuando es mejor tener FN que FP, como cuando queremos estar seguros de que un enfermo realmente lo está. Otro ejemplo es el de las enfermedades cuyo diagnóstico son prácticamente incurables o no tienen tratamiento. Aquí se prefiere la especificidad para no causar falsos enfermos. Por el contrario, si la enfermedad es muy grave pero tiene tratamiento, probablemente se prefiere una prueba sensible.

Cuando se habla de resultados cuantitativos como en el caso de que midamos la glucemia en ayunas. Debemos decidir hasta qué valor de glucemia consideramos normal y por encima de cuál nos parecerá caso patológico, en éste caso la sensibilidad y la especificidad dependerán del punto de corte que elijamos.

La curva de características operativas para el receptor, conocida como curva ROC (receiver operating characteristic), representa en las ordenadas (eje y) la Sensibilidad y en el eje x ó abscisas el complementario de la Especificidad (1-E) , donde se traza una curva en la que cada punto de corte representa la probabilidad de que la prueba clasifique correctamente a una pareja falso- negativo (sano-enfermo) tomada al azar. La diagonal del gráfico representa la curva. La curva suele tener un segmento de gran pendiente donde aumenta rápidamente la Sensibilidad sin que varíe la Especificidad ,si nos desplazamos hacia arriba podemos aumentar la sensibilidad sin que aumenten los FP, pero llega el punto que llegamos a la parte plana. Si se sigue el desplazamiento hacia la derecha se llega a un punto a partir del cual la Sensibilidad ya no aumentará más, pero comenzarán a aumentar los FP. Si nos interesa una prueba sensible se quedará en la primera parte de la curva. Si se busca especificidad se tendrá que desplazar más hacia la derecha. Y, por último, si no se busca más una que otra (FP que FN), el mejor punto de corte será el más próximo al ángulo superior izquierdo [38].

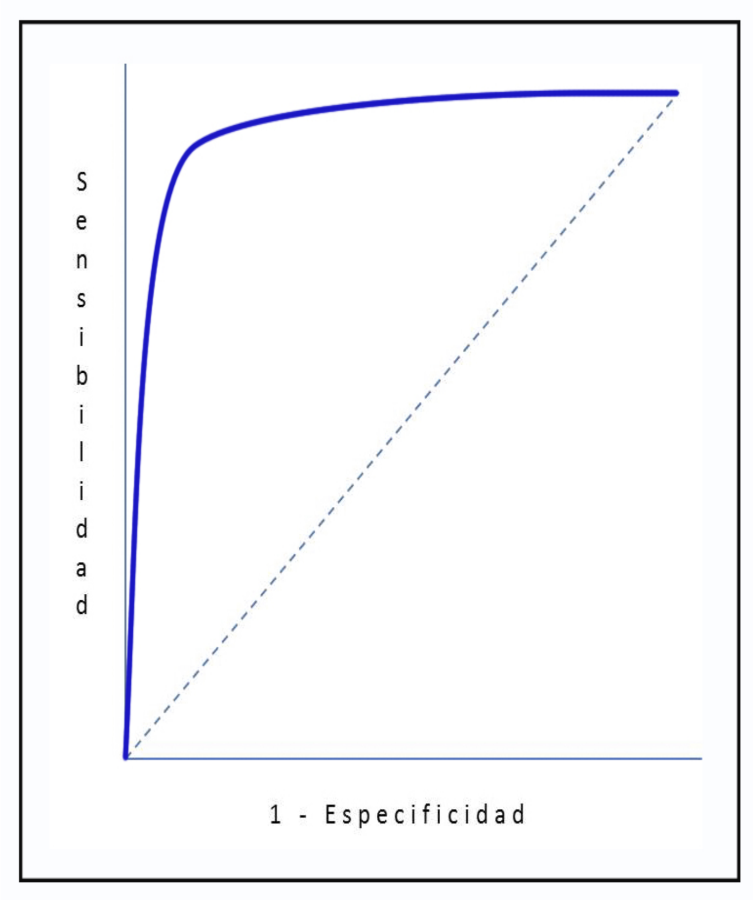
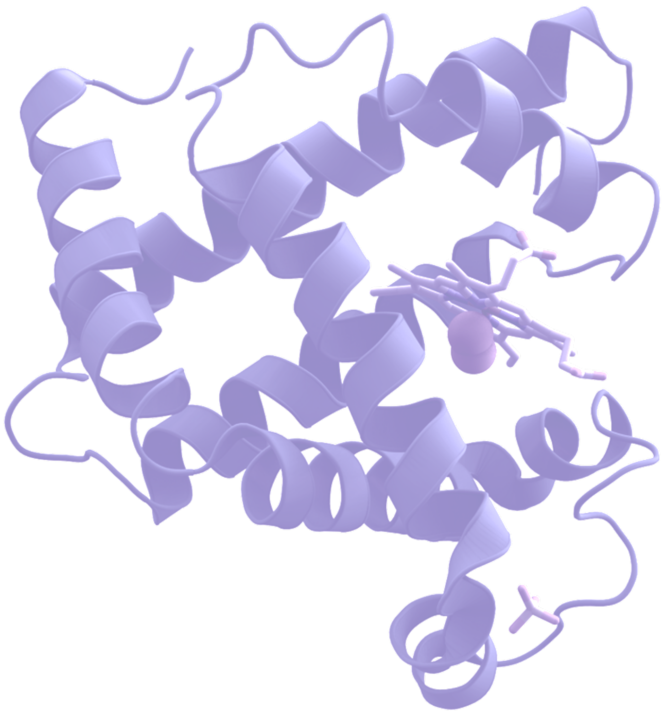


Figure 51: Curva típica ROC

Un parámetro de interés es el área bajo la curva , que representa la probabilidad de que la prueba diagnóstica clasifique correctamente a la muestra al que se le practique. Una prueba ideal con Sensibilidad y Especificidad del 100% tiene un área bajo la curva de 1: siempre acierta. En clínica, una prueba cuya curva ROC tenga un área bajo la curva > 0.9 se considera muy exacta, entre 0.7-0.9 de exactitud moderada y entre 0.5-0.7 de exactitud baja. El área bajo la diagonal es de 0.5, punto por debajo del cual la prueba carece de valor diagnóstico. Su utilidad no se limita a la valoración de la practicidad de las pruebas diagnósticas con resultado cuantitativo. Las curvas ROC sirven también para determinar la bondad del ajuste de un modelo de regresión logística para predecir resultados dicotóicos (que aumentan o disminuyen proporcionalmente de menor a mayor o viceversa de manera que los valores no se repiten) [38].



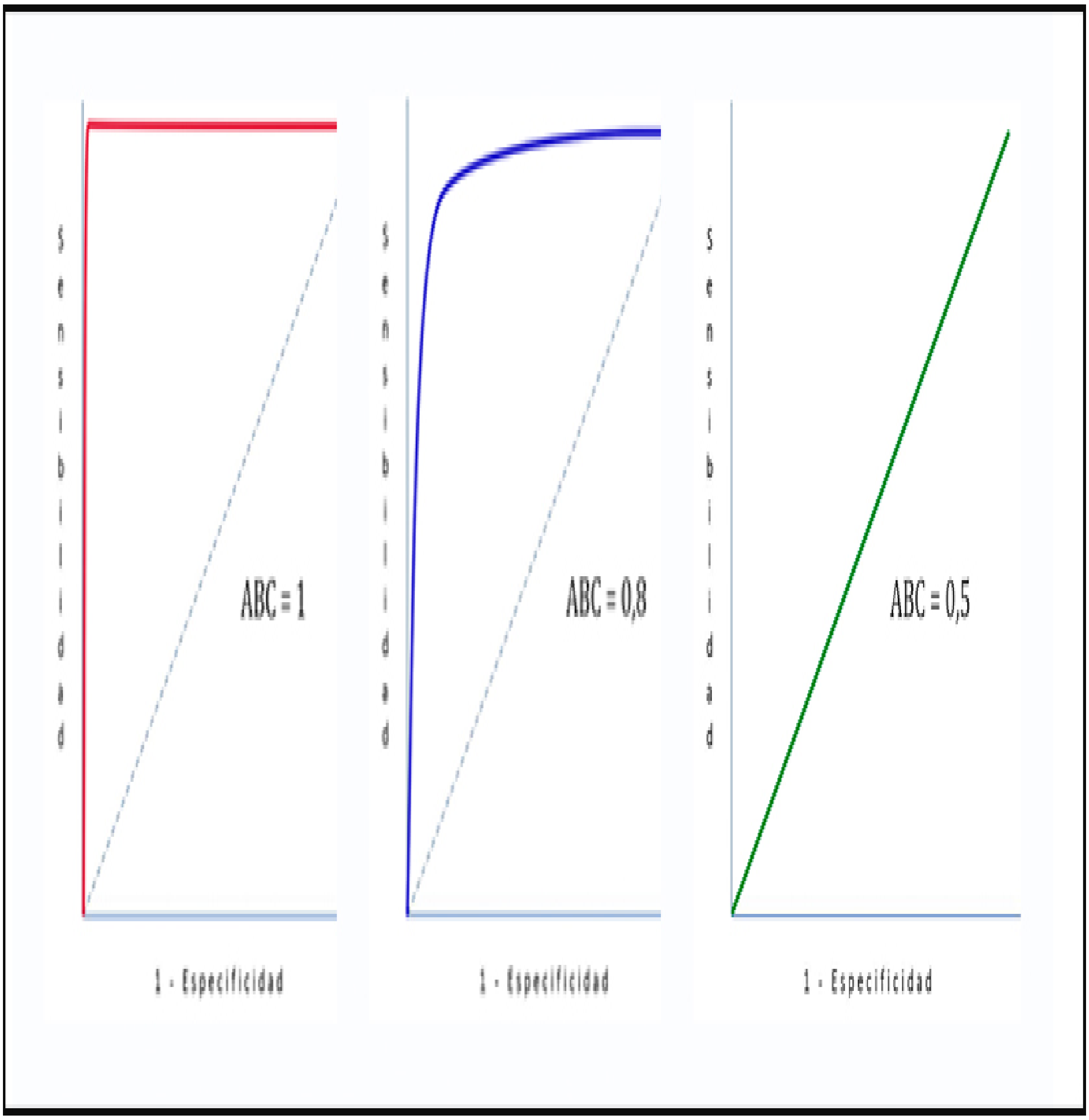


Figure 52: Diferentes áreas bajo la curva de curvas ROC

Media , varianza muestral y corrección de Bessel

Los estimadores del valor medio μ y la varianza σ^2 de una variable aleatoria o población X son la media muestral y la varianza muestral.Dada una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de tamaño n de una población X , se define el estimador media muestral como la siguiente variable aleatoria [17]:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + - - - - X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \tag{477}$$

cuyo valor medio y varianza son:

$$E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{E(X_i)}{n} = \mu \tag{478}$$

Se trata entonces de un estimador centrado del valor medio μ de una variable aleatoria X , cuya varianza decrece a medida que aumenta n , el tamaño muestral, es decir, a medida de que se disponga de "mayor información" de la población. La varianza muestral una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de tamaño n de una población X se define como:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} \tag{479}$$

Cuyo valor medio y varianza son:

$$E\left(S^2\right) = \sigma^2 \rightarrow Var\left(S^2\right) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right) \tag{480}$$

Donde $\mu_4 = E((X-\mu)^4)$,S^2 es un estimador centrado de σ^2,cuya varianza se reduce al aumentar el tamaño muestral. La gran mayoría de estadísticos o estimadores que aparecen en inferencia estadística pueden expresarse en función de medias y varianzas muestrales, que afectan a una o varias poblaciones univariantes o multivariantes [17].

Corrección de Bessel

Esta técnica estadística consiste en el uso de $(n-1)$ en lugar de n en la fórmula de la varianza muestral y la desviación típica muestral, siendo n el número de observaciones de una muestra. Corrige el sesgo estadístico en la estimación de la varianza poblacional, y algunos de los sesgos en la estimación de la desviación estándar poblacional. Cuando se estima la varianza y la desviación estándar poblacional desconocida a partir de una muestra, la varianza muestral es estimada como la media del cuadrado de la desviación estándar muestral. Se usa un factor multiplicador$(1/n^{-}1)$ que es un estimador sesgado de la varianza poblacional. Bessel multiplica por $n/(n-1)$(equivalentemente, usando$1/(n-1)$ en lugar de $1/n$ en la f órmula del estimador) , lo que provoca que el estimador insesgado es uniformemente mayor que el sesgado. A veces el factor $n/(n-1)$ es llamado Corrección de Bessel [55].

Un aspecto de esta corrección implica que, mientras que la varianza muestral (usando la corrección de Bessel) es un estimador insesgado de la varianza poblacional, su raíz cuadrada ó el desvío estándar muestral sigue siendo un estimador sesgado del desvío estándar poblacional. No hay una fórmula general para evitar el sesgo del estimador del desvío estándar poblacional, aunque hay varios factores correctores para distribuciones particulares, como la normal. Una aproximación del factor corrector exacto en la distribución normal se da usando el $n-1.5$ en la fórmula. El sesgo decae cuadráticamente (en lugar de linealmente, como en la forma no corregida por Bessel).Puede entenderse la Corrección de Bessel intuitivamente, como los grados de libertad del vector de residuos:

$$(x_1-\bar{x}, ..., x_n-\bar{x}) \tag{481}$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral. Mientras que hay n muestras independientes, hay solamente $n-1$ residuos independientes, que suman 0.

POr otro lado S_n^2 es el estimador sesgado de la varianza (sin la corrección de Bessel). S^2 es el estimador insesgado de la varianza poblacional (con la corrección de Bessel). Las desviaciones estándar se obtienen aplicando la raíz a sus varianzas respectivas. Ya que las desviaciones estándar producen sesgo.S_n es la desviación estándar muestral no corregida (sin la corrección de Bessel) y S es la desviación estándar muestral corregida (con el estimador de Bessel), que tiene menos sesgo [55].

Tarea 13

Normalización de un Histograma

Si se puede representar un histograma con una función continua equivalente para la cuál se tiene la constante k , en eéste ejemplo la función $f(x) = ke^{-x}$; la función de densidad de probabilidad está definida en $[0, 1]$, se necesita escoger un valor de k para que sean ciertos requisitos de ser positiva y el área total de 1 . Pues $e^{-x} > 0$ para todo x, que se define entonces como [76]:

$$\int_0^1 ke^{-x}dx = -k\left(e^{-x}\right)\Big|_0^1 = k\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{k(e-1)}{e} \tag{482}$$

Evidentemente ésta expresión debe ser igual a 1, por lo que entonces el valor de k se calcula como:

$$1 = \frac{k(e-1)}{e} \to k = \frac{e}{e-1} \approx 1.582 \tag{483}$$

Y la función puede tomar el valor de:

$$f(x) = \left(\frac{e}{e-1}\right)e^{-x} \tag{484}$$

Donde $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad sobre $[0,1]$ .A ésto se le conoce como normalizar la función de distribución de probabilidad , que se puede interpretar como normalizar un histograma [76].

Funciones de distribución

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los sucesos y cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria. Se puede entender que una distribución de probabilidades sería una frecuencia teórica. La distribución de probabilidad está completamente especificada por la función de distribución, cuyo valor en cada x real es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que x. Entonces una distribución de variable discreta a aquella cuya función de probabilidad sólo toma valores positivos en un conjunto de valores de X finito o infinito numerable. A dicha función se le llama función de masa de probabilidad. En este caso la distribución de probabilidad es la suma de la función de masa, por lo que tenemos entonces que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=-\infty}^{x} f(k) \tag{485}$$

Esta expresión representa la suma de todas las probabilidades desde $-\infty$ hasta el valor$x$.

Algunos distribuciones de variable discreta más comunes tienen las ciertas características:

Distribución Normal

el nombre de Normal proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y bilologos, que todas las variables naturales de interés seguían este modelo.Su función de densidad viene dada por la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{486}$$

Depende de 2 parámetros μ y σ . Una variable X sigue el modelo Normal si $X \sim N(\mu, \sigma)$. La función de densidad del modelo Normal tiene forma de campana, la que habitualmente se denomina campana de Gauss. De hecho, a este modelo, también se le conoce con el nombre de distribución gaussiana.

Algunas de sus propiedades del modelo Normal destacadas son:

1. Su esperanza o media aritmética es μ.
2. Su varianza es σ^2 y, por tanto, su desviación típica es σ.
3. Es simétrica respecto a su media μ,
4. Media, moda y mediana coinciden con μ.
5. Cualquier transformación y combinación lineal de una o más variables con distribución Normal seguirán también el modelo Normal. Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ y definimos $Y = aX + b$ con $a \neq 0$, entonces$Y \sim N(a\mu + b, (a, \sigma))$. Es decir, la esperanza de Y será $a\mu + b$ y su desviación típica (a, σ).

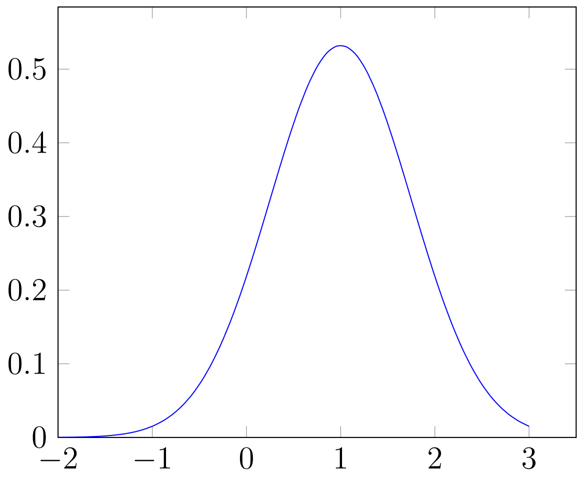


Figure 53: Distribución Normal

Distribución Bernolli

La distribución de Bernoulli (o distribución dicotómica) es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de (p) y valor 0 para la probabilidad de fracaso ($q = 1 - p$). Si X es una variable aleatoria que mide el "número de éxitos", y se realiza un único experimento con 2 posibles resultados (éxito o fracaso), se dice que la variable aleatoria X se distribuye como una Bernoulli de parámetro p: $X \sim f(p)$. Su función de probabilidad viene definida por:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \rightarrow con \qquad x = \{0, 1\} \tag{487}$$

También expresada como:

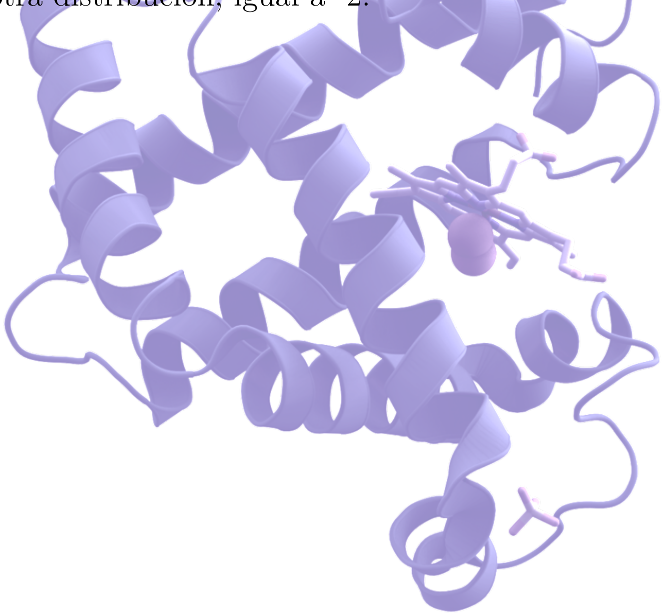
$$f(x;p) = \begin{cases} p & si\ x = 1, \\ q & si\ x = 0, \\ 0 & otro\ caso \end{cases} \tag{488}$$

Un experimento al cual se aplica la distribución de Bernoulli se conoce como Ensayo de Bernoulli o simplemente ensayo, y la serie de esos experimentos como ensayos repetidos.

Sus principales propiedades del modelo de Bernolli son:

1. Su esperanza o media aritmética es $E[X] = p = u$.
2. Su varianza se expresa como: $var(X) = p(1-p) = pq$.
3. Función Generatriz de Momentos: $(q + pe^t)$.
4. La moda está definida como 0 si $q > p$, hay más fracasos que éxitos ; 1 si $p > q$, hay más éxitos que fracasos; 0 y 1 si $q = p$, igual fracasos a éxitos.
5. Sesgo o simetría: $\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{qp}}$.
6. Curtosis : $\gamma_2 = \frac{6p^2-6p+1}{p(1-p}$.

   La Curtosis tiende a infinito para valores de$p$ cercanos a 0 ó a 1, pero para $p = \frac{1}{2}$ la distribución de Bernoulli tiene un valor de curtosis menor que el de cualquier otra distribución, igual a -2.



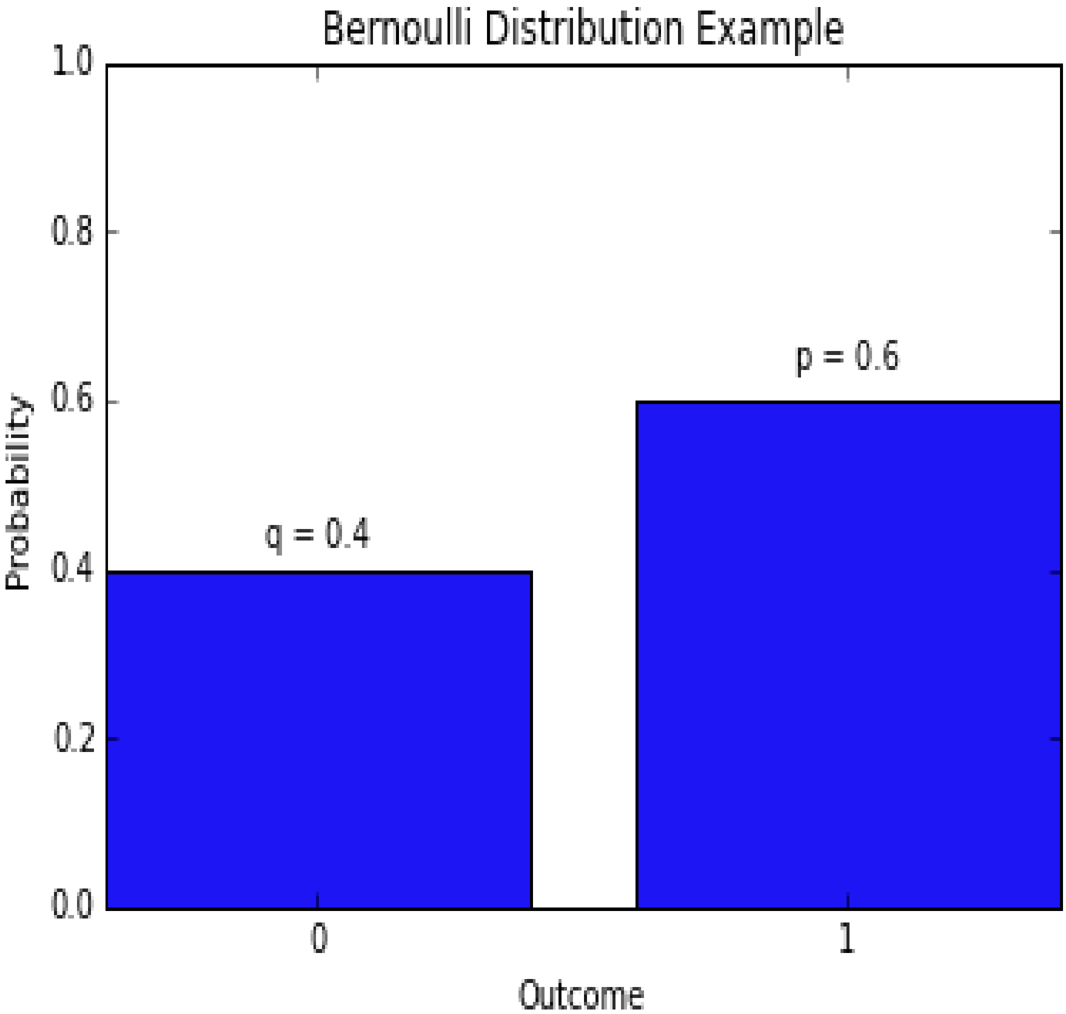


Figure 54: Distribución Bernolli

Distribución Uniforme

La distribución o modelo uniforme puede considerarse como proveniente de un proceso de extracción aleatoria .El planteamiento radica en el hecho de que la probabilidad se distribuye uniformemente a lo largo de un intervalo . Así, dada una variable aleatoria continua X , definida en el intervalo $[a, b]$ de los números reales, X tiene una distribución uniforme en ése intervalo cuando su función de densidad de probabilidad para X sea [55]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ x < a\ o\ x > b \end{cases} \tag{489}$$

Todos los eventos en el intervalo tienen la misma probabilidad de que ocurra, la probabilidad de cualquier suceso depende únicamente de la amplitud del intervalo , y no de su posición en la recta real $[a, b]$. Lo que viene ha demostrar el reparto uniforme de la probabilidad a lo largo de todo el campo de actuación de la variable .

Sus principales propiedades del modelo Uniforme son [55]:

1. La media aritmética tiene la expresión:

$$\mu = E \mid X \mid = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2b - 2a} = \frac{a+b}{2} \tag{490}$$

2. La varianza tendrá la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E \mid x^2 \mid - \mu^2 \tag{491}$$

De donde:

$$\alpha_2 = E \mid x^2 \mid = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3b - 3a} \tag{492}$$

Por lo que :

$$\sigma^2 = E \mid x^2 \mid - \mu^2 = \frac{b^3 - a^3}{3b - 3a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{493}$$

3. La desviación típica entonces es:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \tag{494}$$

Su representación gráfica será :

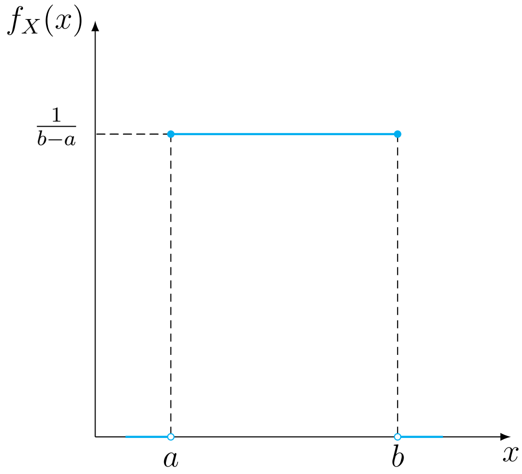


Figure 55: Distribución Uniforme

Distribución Binomial

Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A, que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, $\bar{A}$, si se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A, y por lo tanto la de su complementario:$P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p = q$, se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria binomial X el número de veces que ocurre el suceso A (éxitos) en n realizaciones independientes del experimento $X \sim B(n;p)$, su función de probabilidad esá dada como:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} \tag{495}$$

Donde se comprueba:

$$\sum_{r=0}^{n} P(X = r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = 1 \tag{496}$$

Sus principales propiedades del modelo Binomial más importantes son:

1. Su media aritmética se define como:

$$\mu = E \mid X \mid = \sum_{r=0}^{n} rP(X = r) = np \tag{497}$$

2. Entonces su varianza es:

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} (r - \mu)^2 \, P(X = r) = npq \tag{498}$$

Su representación gŕafica se dento como:

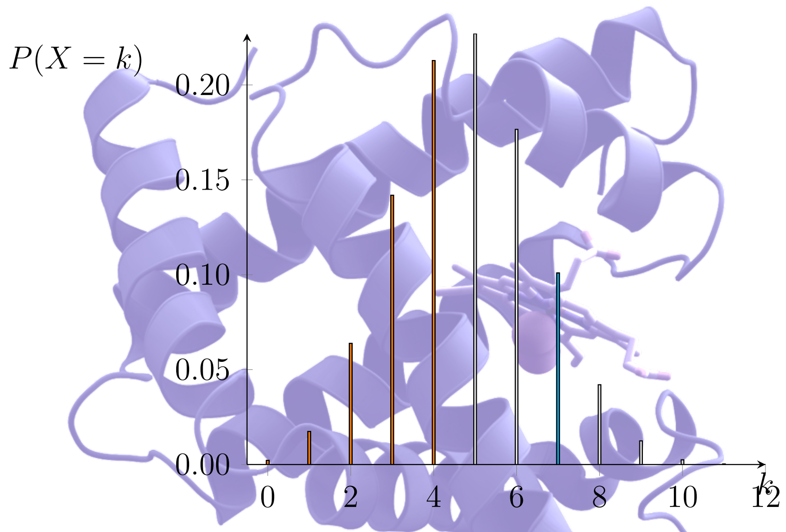


Figure 56: Distribución Binomial

Distribución de Poisson

Se trata de un modelo discreto, pero en el que el conjunto de valores con probabilidad no nula numerable. Se dice que una variable aleatoria X sigue la distribución de Poisson si su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = P(X = K) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} & si \;\; k = 0, 1, 2... \\ 0 & caso \; contrario \end{cases} \tag{499}$$

El parámetro λ debe ser positivo. Esta distribución suele utilizarse para conteos del tipo numérico de elementos por unidad de tiempo, de espacio, o algún intervalo.

Sus principales características del modelo de Poisson son:

1. Su esperanza o media aritmética es: $E(X) = \lambda$.

2. Su Varianza también es : $V(X) = \lambda$.

3. La suma de dos variables aleatorias independientes con distribución de Poisson resulta en una nueva variable aleatoria, también con distribución de Poisson, de parámetro igual a la suma de parámetros:

$$X_1 \sim P(\lambda = \lambda_1, \;\; X_2 \sim P(\lambda = \lambda_2 \tag{500}$$

   Si $Z = X_1 + X_2$ entonces:

$$Z \sim P(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2) \tag{501}$$

   Su representación gáfica es :

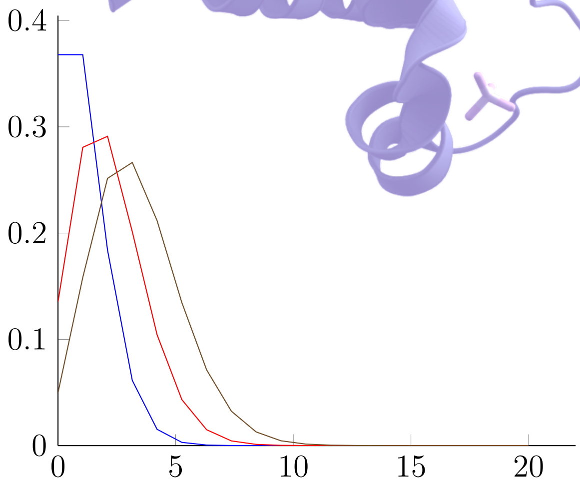


Figure 57: Distribución de Poisson

Distribución Geométrica o de Pascal

La distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la consecución del éxito al resultado deseado y tiene interesantes aplicaciones en los muestreos realizados de esta manera . También implica la existencia de una dicotomía de posibles resultados y la independencia de las pruebas entre sí. Se tiene la variable X es el número de pruebas necesarias para la consecución del primer éxito.La función de probabilidad $P(x)$ hará corresponder a cada valor de X la probabilidad de obtener el primer éxito precisamente en la X-sima prueba. $P(X)$ será la probabilidad del suceso obtener $X-1$ resultados "no A" y un éxito o resultado A en la prueba número X teniendo en cuenta que todas las pruebas son independientes y que conocemos sus probabilidades, la función es entonces :

$$P(X) = q^{n-1}p \tag{502}$$

De la cúal la función de Distribución se expresa como:

$$F(X) = \sum_{X-1}^{X} q^{X-1}p \approx p\frac{1-q^X}{1-q} = 1 - q^X \tag{503}$$

Las características importantes de ésta distribución son:

1. Su varianza se expresa como: $\mu = 1/p$.

2. La varianza se describe como: $\sigma^2 = q/p^2$.

3. La moda es el valor de la variable que tiene asociada mayor probabilidad el valor de su función es el mayor. La media de la distribución geométrica es siempre 1.

Su representación gráfica será:

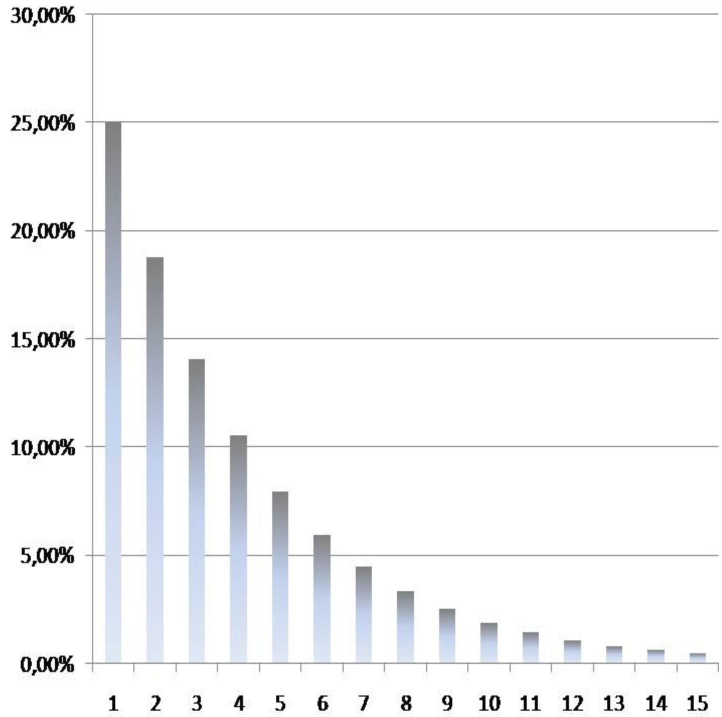


Figure 58: Distribución de Pascal ó Geométrica

Distribución Chi-Cuadrada

La distribución muestral de s^2. O sea que si se extraen todas las muestras posibles de una población normal y a cada muestra se le calcula su varianza, se obtendrá la distribución muestral de varianzas.Para estimar la varianza poblacional o la desviación estándar, se necesita conocer los valores correspondientes de a ji cuadrada X^2. Si se elige una muestra de tamaño n de una población normal con varianza σ^2 , el cálculo de X^2 es[55] :

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \tag{504}$$

La cúal tiene una distribución muestral que es una distribución ji-cuadrada con $= n - 1$ grados de libertad donde n es el tamaño de la muestra, s^2 la varianza muestral y σ^2 la varianza de la población de donde se extrajo la muestra. El cálculo ji-cuadrada también se puede dar con la siguiente expresión:

$$X^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} \tag{505}$$

Su función de densidad está dada por:

$$f(x;k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x \leq 0 \end{cases} \tag{506}$$

Donde Γ es la distribución Gamma definida como: $\Gamma(n) = (n-1)!$.

La características principales de ésta distribución son [55]:

1. Los valores de X^2 son mayores o iguales que 0.
2. La forma de una distribución X^2 depende del $gl = n-1$. En consecuencia, hay un número infinito de distribuciones X^2.
3. El Área bajo una curva chi-cuadrada y sobre el eje horizontal es 1.
4. Las distribuciones X^2 no son simétricas. Están sesgadas a la derecha.
5. Cuando $n > 2$, la media de una distribución X^2 es $n-1$ y la varianza es$2(n-1)$.
6. El valor modal de una distribución X^2 se da en el valor $n-3$).

Su representación gráfica es:

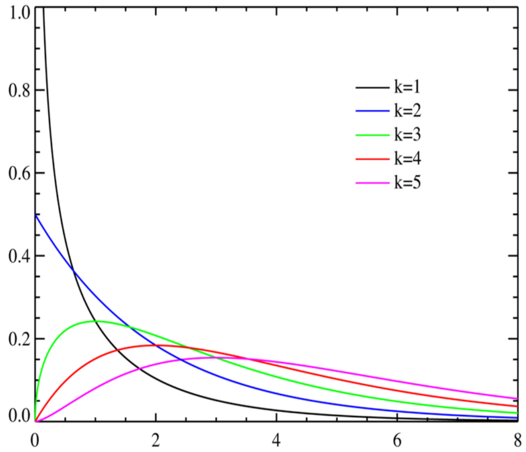


Figure 59: Distribución Chi - cuadrada

Distribución T-Student

Es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeña. Aparece de manera natural al realizar la prueba t de Student para la determinación de las diferencias entre dos medias muestrales y para la construcción del intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de 2 poblaciones cuando se desconoce la desviación típica de una población y ésta debe ser estimada a partir de los datos de una muestra.

Si se toma una muestra de una población normal con media μ y varianza σ^2. Si $\bar{X}$ es el promedio de las n observaciones que contiene la muestra aleatoria, entonces la distribución [55] :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{507}$$

Es una distribución estándar, si se reemplaza σ por s se obitene la distribución T-Student. La distribución de la variable aleatoria T está dada por [55]:

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + t^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2} \tag{508}$$

Donde donde ν es igual a $n-1$ .El parámetroν representa el número de grados de libertad. La distribución depende deν , pero no de μ o σ.

La características principales del modelo T-Student:

1. Cada curva t tiene forma de campana con centro en 0.

2. Cada curva t, está más dispersa que la curva normal estándar z.

3. A medida que ν aumenta, la dispersión de la curva t correspondiente disminuye. A medida que $\mu \rightarrow \inf$, la secuencia de curvas t se aproxima a la curva normal estándar, por lo que la curva z recibe a veces el nombre de curva t $gl = \inf$ [55].

Su representación Gráfica es:

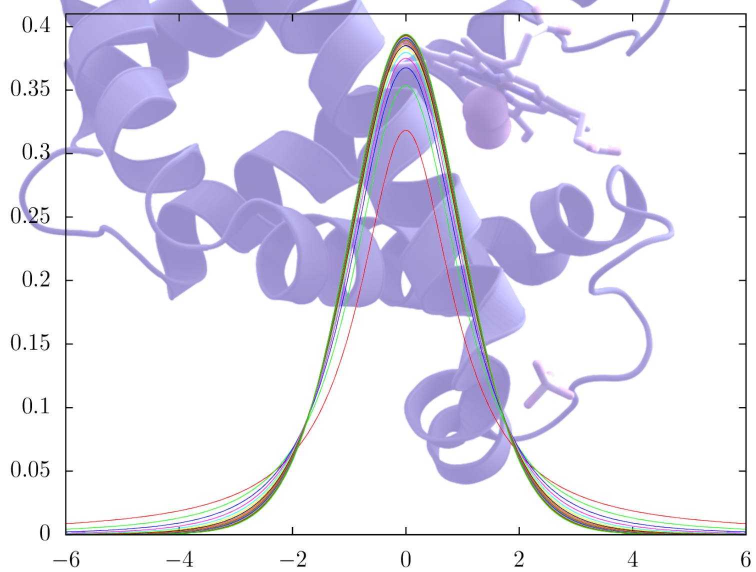


Figure 60: Distribución T de Student

Distribución exponencial

La distribución exponencial se puede considerar como un modelo adecuado para la distribución de probabilidad del tiempo de espera entre dos hechos que sigan un proceso de Poisson. De hecho la distribución exponencial puede derivarse de un proceso experimental de Poisson con las mismas características que las de la distribución de Poisson, pero tomando como variable aleatoria , en este caso, el tiempo que tarda en producirse un hecho. La variable aleatoria será continua. Al ser un modelo adecuado para estas situaciones tiene una gran utilidad en distribuciones del tiempo de espera entre sucesos de un proceso de Poisson y en distribuciones del tiempo que transcurre hasta que se produce un fallo, si se cumple la condición que la probabilidad de producirse un fallo en un instante no depende del tiempo transcurrido .Aplicaciones en fiabilidad y teoría de la supervivencia.

Dada una variable aleatoria X que tome valores reales no negativos diremos que tiene una distribución exponencial si y sólo si su función de densidad tiene la expresión:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \tag{509}$$

En consecuencia , la función de distribución será:

$$F(X) = \int_0^X \alpha e^{-\alpha x} dx = \left(-e^{-\alpha X}\right)\Big|_0^X = 1 - \exp^{-\alpha X} \tag{510}$$

En la principal aplicación de esta distribución , que es la Teoría de la Fiabilidad, resulta más interesante que la función de distribución la llamada Función de Supervivencia o Función de Fiabilidad. La función de Supervivencia se define cómo la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores superiores al valor dado X:

$$S(X) = P(x > X) = 1 - F(X) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha X}\right) = e^{-\alpha X} \tag{511}$$

Si el significado de la variable aleatoria es el tiempo que transcurre hasta que se produce el fallo, la función de distribución será la probabilidad de que el fallo ocurra antes o en el instante X : y , en consecuencia la función de supervivencia será la probabilidad de que el fallo ocurra después de transcurrido el tiempo X ; por lo tanto, será la probabilidad de que el elemento, la pieza o el ser considerado sobreviva al tiempo X.

Las características principales del modelo exponencial son:

1. La media aritmética está dada por:

$$\mu = E \mid X \mid = \frac{1}{\alpha} \tag{512}$$

2. La expresión de la varianza será:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \tag{513}$$

La mediana del modelo exponencial será aquel valor de la variable $X = Me$ que verifica que$F(Me) = \frac{1}{2}$, de manera que :

$$F(Me) = 1 - e^{-\alpha Me} = 1/2 \to e^{\alpha Me} = 2 \to Me = \frac{ln(2)}{\alpha} \tag{514}$$

La distribución exponencial no tiene memoria, Posee información de que el elemento que consideramos ha sobrevivido un tiempo S (hasta el momento) no modifica la probabilidad de que sobreviva t unidades de tiempo más. La probabilidad de que el elemento falle en una hora (o en un día, o en segundo) no depende del tiempo que lleve funcionando. No existen envejecimiento ni mayor probabilidad de fallos al principio del funcionamiento.

Su representación Gráfica es:

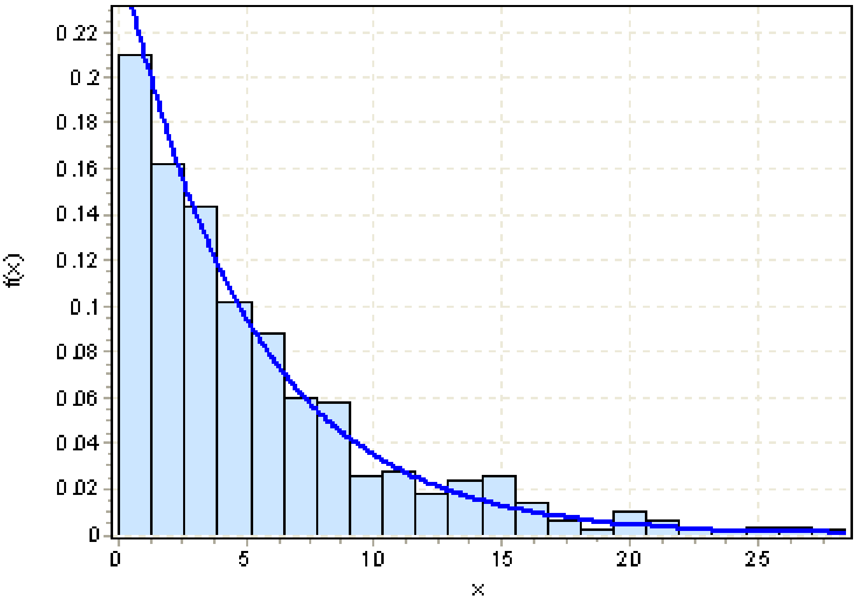


Figure 61: Distribución exponencial

Distribución Gamma

Este modelo es una generalización del modelo Exponencial ya que, en ocasiones, se utiliza para modelar variables que describen el tiempo hasta que se produce p veces un determinado suceso.

Su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^p \Gamma(p)} e^{-x/\alpha} x^{p-1} & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x \leq 0 \end{cases} \tag{515}$$

Éste modelo depende de dos parámetros positivos:$\alpha y p$. La función $\Gamma(p)$ es la denominada función Gamma de Euler que representa la siguiente integral:

$$\Gamma(p)] = \int_0^{\inf} x^{p-1} e^{-x} dx \tag{516}$$

Que verifica$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, con lo que, si p es un número entero positivo, $\Gamma(p+1) = p!$.

Sus principales propiedades del modelo Gamma más importantes son:

1. Su media aritmética se define como: $p\alpha$.

2. Su varianza se define como: $p\alpha^2$.

3. La distribución Gamma $(\alpha, p = 1)$ es una distribución Exponencial de parámetro α. Es decir, el modelo Exponencial es un caso particular de la Gamma con $p = 1$.

4. Dadas dos variables aleatorias con distribución Gamma y parámetro α común: $X \sim G(\alpha, p_1)$ y $Y \sim G(\alpha, p_2)$, se cumplirá que la suma también sigue una distribución Gamma : $X + Y \sim G(\alpha, p_1 + p_2)$.

5. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que, si tenemos k variables aleatorias con distribución Exponencial de parámetro α (común) e independientes, la suma de todas ellas seguirá una distribución Gamma $G(\alpha, k)$.

Su representación Gráfica es:

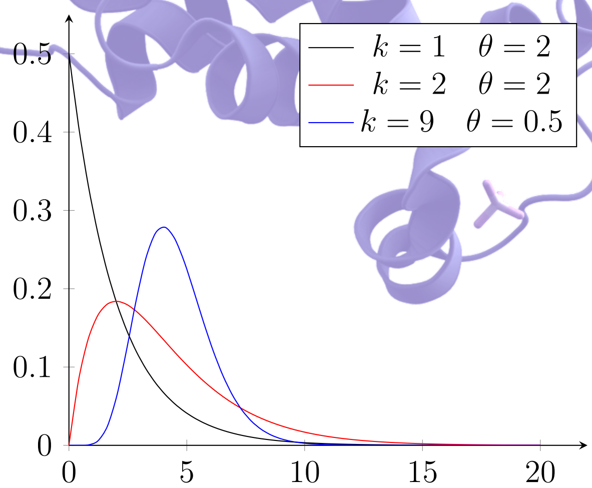


Figure 62: Distribución Gamma

Tarea 14

Exámen propuesto

1. Hallar el valor aproximado de 75!:

   Solución:
   Utilizando la fórmula de Stirling podemos calcular el factorial de un número grande mediante la aproximación:

$$n! \approx \left(\sqrt{2\pi n}\right) n^n e^{-n} \tag{517}$$

   Por lo que el valor aproximado de 75! es:

$$75! \approx \left(\sqrt{2\pi(75)}\right) 75^{75} e^{-75} \tag{518}$$

   Aplicando logaritmo base 10 a ambos lados de la ecuación tenemos que:

$$log(75!) \approx log\left(\left(\sqrt{2\pi(75)}\right) 75^{75} e^{-75}\right) \tag{519}$$

$$log(75!) \approx log\left(\sqrt{150\pi}\right) + log\left(75^{75}\right) + log\left(e^{-75}\right) \tag{520}$$

$$log(75!) \approx log\left(\sqrt{150\pi}\right) + log\left(75^{75}\right) + log\left(e^{-75}\right) \tag{521}$$

$$log(75!) \approx \frac{log(150\pi)}{2} + 75log(75) - 75log(e) \tag{522}$$

$$log(75!) \approx 1.3366 + 140.6296 - 32.572 \approx 109.3942 \tag{523}$$

De donde:

$$75! \approx 10^{109.3942} \approx 10^{0.3942} * 10^{109} \approx 2.4785 * 10^{109} \tag{524}$$

2. Aplicando el binomio de Newton desarrollar $(x+y)^6$:
Solución:
Sabemos que el teorema del binomio de Newton nos dice la relación siguiente:

$$(x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{6-k}y^k = \sum_{k=0}^{6}\frac{6!}{k!(6-k)!}x^{6-k}y^k \tag{525}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}(x+y)^6 = \binom{6}{0}x^{6-0}y^0 + \binom{6}{1}x^{6-1}y^1 + \binom{6}{2}x^{6-2}y^2 + \binom{6}{3}x^{6-3}y^3 + \binom{6}{4}x^{6-4}y^4 + \\ \binom{6}{5}x^{6-5}y^5 + \binom{6}{6}x^{6-6}y^6\end{aligned} \tag{526}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^6 = \frac{6!}{0!(6-0)!}x^6(1) + \frac{6!}{1!(6-1)!}x^5y + \frac{6!}{2!(6-2)!}x^4y^2 + \frac{6!}{3!(6-3)!}x^3y^3 + \\ \frac{6!}{4!(6-4)!}x^{6-4}y^4 + \frac{6!}{5!(6-5)!}xy^5 + \frac{6!}{6!(6-6)!}(1)y^6\end{aligned} \tag{527}$$

$$(x+y)^6 = \frac{720}{720}x^6 + \frac{720}{5!}x^5y + \frac{720}{2(4!)}x^4y^2 + \frac{720}{6(3!)}x^3y^3 +$$

$$\frac{720}{24(2)}x^2y^4 + \frac{720}{120}xy^5 + \frac{720}{720*0!}y^6 \tag{528}$$

$$(x+y)^6 = x^6 + \frac{720}{120}x^5y + \frac{720}{48}x^4y^2 + \frac{720}{36}x^3y^3 +$$

$$\frac{720}{48}x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \tag{529}$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \tag{530}$$

3. Demostrar la propiedad del multiconjunto o combinatoria con reptición usando el binomio natural:

   Solución:

   La fórmula general usada para calcular combinaciones con repetición , se deriva del caso particular de coeficientes binomiales para todos los números enteros$n, k > 0$ de la siguiente manera:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \tag{531}$$

   Aplicando la fórmula se demuestra que equivale a el binomio natural de n, k:

$$\frac{[(k+(n-1)]!}{(n-1)!\,[k+(n-1)-(n-1)]!} = \tag{532}$$

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k+n-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k} \tag{533}$$

4. Si existiese un círculo con n puntos igualmente espaciados alrededor de dicho círculo y etiquetamos los puntos de 0 a $n-1$ moviéndose alrededor del círculo en sentido antihorario. Si en los puntos 1 a $n-1$ hay ovejas en cada punto, y un lobo se ha colocado en el punto 0, y éste elige moverse al azar en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario , éste comerá a las ovejas que residen en el punto adyacente en esa dirección ,es decir, el lobo es igualmente probable que coma las ovejas en los puntos 1 y $n-1$ (en el estado inicial). El lobo continúa de la misma manera: en cada paso, elige moverse al punto adyacente ya sea en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario a las agujas del reloj, siendo cada elección igualmente probable (0.5). ¿ Qué oveja es más probable que se coma en último lugar?

Solución:

Resulta que todas las ovejas son igualmente susceptibles de ser la última oveja sin ser comida. Si se considera lo que debe suceder para que las oveja i sea comida en último lugar, eso es, que ambas ovejas vecinas de i deben ser comidos antes que i. En particular, el lobo debe comer uno de los vecinos de i, a continuación, dirigirse hacia el otro lado alrededor del círculo y consumir todas las ovejas hasta que de nuevo y por mucha suerte para i , se la vuelva a encontrar por el otro lado . Si vemos a la oveja $n-1$, donde el lobo está inicialmente en 0 (que entonces es vecino de $n-1$) en el círculo. Entonces la probabilidad de que el lobo se coma a la oveja de la posición $n-2$ antes de comer a la de $n-1$ Denotada por p, y suponiendo que por simetría todas las ovejas son igualmente propensas a ser consumidas al final, porque algunas ovejas tiene que ser comidas en el camino, y la única manera de una oveja pueda ser comida al final es si las dos vecinas de ella fueron comidas antes de ella.

Para calcular p, se considera una línea de puntos donde están las ovejas en lugar de un círculo. Se etiquetan los puntos $-1, 0, 1, ..., n-2$ en la línea. El lobo comienza en el punto 0. Los puntos -1 y $n-2$corresponden a ovejas $n-1$ y $n-2$respectivamente en el círculo. El lobo ahora se mueve aleatoriamente un paso a la derecha o la izquierda y continúa comiendo ovejas.El evento de que la oveja $n-1$ es comida al último en el círculo es el evento de que el lobo se como a la oveja $n-2$ antes de -1 en la línea (esta situación se refiere a menudo como la ruina del jugador). Asumimos que el lobo deja de moverse tan pronto como llega a -1 o $n-2$. Sea X_t la posición del lobo en el instante t. Entonces el valor esperado de X_t es:

$$E \mid X_t \mid = 0 \; \forall \; t \tag{534}$$

Desde que el lobo comienza en 0, ciertamente tenemos $E \mid X_0 \mid = 0$, para $t \geq 1$ se consideran 2 casos , primero si $0 \leq X_t \leq n-3$ entonces $X_{t+1} = X_t \pm 1$ con ambas posibilidades igualmente probables. Si $X_t = -1$ o $n-2$, entonces $X_{t+1} = X_t$. En ambos casos tenemos $E \mid X_{t+1} \mid = E \mid X_t \mid$. Como $E \mid X_t \mid$ no depende de t, tenemos:

$$\lim_{t \to \infty} E \mid X_t \mid = 0 \tag{535}$$

Ya que el el lobo casi seguramente irá a -1 o $n-2$, tenemos:

$$(-1)(1-p) + (n-2)p = \lim_{t \to \infty} E \mid X_t \mid = 0 \tag{536}$$

Despejando p de la relación tenemos:

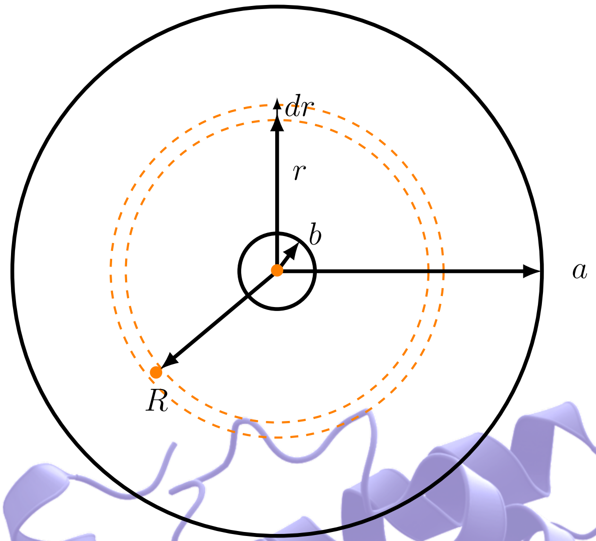
$$-1 + p + pn - 2p = 0 \rightarrow p(n-1) = 1 \rightarrow p = \frac{1}{n-1} \tag{537}$$

Lo mismo ocurre con cada oveja en el círculo. En particular, para cada oveja es igualmente probable ser comida en último lugar por el lobo. Sin embargo, se puede demostrar que las ovejas opuestas al lobo (es decir, las ovejas alrededor de la posición $n/2$ tienen la vida esperada más larga.

5. Una persona jugando a los dardos encuentra que la probabilidad de que el dardo caiga entre r y $r + dr$ es:

$$P(r \leq R \leq r + dr) = c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr \tag{538}$$

Aquí, R es la distancia del impacto desde el centro del objetivo, c es una constante y a es el radio del objetivo. Hallar la probabilidad de pegar en el blanco, que se supone tiene radio b. Suponer que siempre se hace impacto en el objetivo:



Solución:

La función de densidad está dada por:

$$f(r) = c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \tag{539}$$

Si consideramos que siempre se hace impacto en el objetivo, se tiene que :

$$c\int_0^a \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr = 1 \tag{540}$$

Desarrollando la Integral se calculará la constante c:

$$c\left[\int_0^a dr - \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr\right] = 1 \tag{541}$$

$$1 = c\left[(r)\Big|_0^a - \frac{1}{a^2}\int_0^a r^2 dr\right] = c\left[(a-0) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^a\right] \tag{542}$$

$$1 = c\left[a - \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\right] = c\left[a - \frac{a}{3}\right] = c\left(\frac{2a}{3}\right) \rightarrow c = \frac{3}{2a} > 0 \tag{543}$$

Entonces la probabilidad de pegar en el blanco es:

$$\int_0^b f(r)dr = \int_0^b c\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr = \frac{3}{2a}\left[\int_0^b dr - \int_0^b \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr\right] = \tag{544}$$

$$\frac{3}{2a}\left[(r)\Big|_0^b - \frac{1}{a^2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^b\right] = \frac{3}{2a}\left(b - \frac{b^3}{3a^2}\right) = \frac{3b}{2a} - \frac{3b^3}{6a^3} \tag{545}$$

$$P(0 \leq R \leq b) = \frac{9a^2b - 3b^3}{6a^3} = \frac{3b\,(3a^2 - b^2)}{6a^3} = \frac{b\,(3a^2 - b^2)}{2a^3} \tag{546}$$

6. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

Solución:

El número de formas en que podemos sentar a las 3 mujeres alrededor de una mesa circular, dejando un lugar en medio es 2!, ya que que el primer renglón de círculos, los seis arreglos diferentes tienen a MMM siempre en la misma posición; y en el segundo renglón, los seis arreglos tienen a MMM siempre en la misma posición; por ello son sólo dos arreglos de las tres mujeres, dejando un lugar en medio. Hay 3! = 6 formas de sentar a los tres hombres por cada uno de los dos arreglos de mujeres; quedando así en forma alternada:

$$2! * 3! = 2 * 6 = 12 \tag{547}$$

Hay 12 maneras de acomodar a las 3 parejas.

7. Con 7 consonantes y 5 vocales diferentes, ¿Cuántas palabras pueden formarse, que consten de 4 consonantes y 3 vocales ? No es necesario que las palabras tengan significado.

Solución:

Las 4 consonantes pueden elegirse de ${}_7C_4$ formas, las 3 vocales de ${}_5C_3$ forman las 7 letras resultantes (4 consonantes, 3 vocales) pueden ordenarse entre sí de ${}_7P_7 = 7!$ formas, entonces el número de palabras que se pueden formar son:

$$({}_7C_4)({}_5C_3)7! = 35 * 10 * 5040 = 1764000 \tag{548}$$

8. ¿ De cuántas maneras es posible plantar en una línea divisoria de un terreno dos nogales, cuatro manzanos y tres ciruelos si se pueden reemplazar las semillas?

   Solución:

   Se tienen en total 9 árboles, de los cuales 2 son nogales, 4 manzanos y 3 son ciruelos, por lo que se tiene:

$$9P_{2,4,3} = \frac{9!}{2!4!3!} = 1260 \tag{549}$$

   Se tienen 1260 maneras de plantar los árboles.

9. Considerar un torneo en el cual cada uno de los n jugadores juega en contra de cada uno de os otros jugadores y cada jugador gana al menos una vez. Mostrar que hay al menos 2 jugadores que tiene el mismo número de victorias.

   Solución:

   El mínmo de victorias por jugador como se menciona es al menos 1, por lo tanto, si el jugador llega a ganarles a todos, a lo mucho puede ganar $n-1$ veces excluyéndose a sí mismo. Si los juegos ganados corresponden a las pichoneras para acomodar n jugadores o pichones, entonces suponemos el número de victorias como las pichoneras cuyo valor máximo es $n-1$, si todos ganan una vez, al menos cada uno tendrá 1 especio en la pichonera, o número de victorias =1, por lo que si cada jugador ocupa 1 victoria como mínimo por pichonera, hay n jugadores, 1 más que las pichoneras, por lo que necesariamente habrá una casilla o número de victorias con mínmo 2 jugadores o pichones, al ser siempre n mayor a n-1 y asegurando una victoria o pichonera por cada jugador ocupado.

10. ¿ De que manera se pueden repartir 4 caramelos a 5 niños?

Solución:

Éste problema,tiene la característica de ser construída a partir de un multiconjunto de combinación con repetición, donde a cada niño se le asignará una letra, A,B,C,D, y E. Por el principio de la biyección, el número de formas en que se puede repartir los caramelos es igual al número de series de 5 letras (sin tomar en cuenta el orden) A, B, C, D, E. Pero cada una de ellas corresponde a un multiconjunto con 4 elementos, por lo que el número total de formas de repartir los caramelos es $\left(\binom{5}{4}\right)$.Ya que queremos dividir 4 objetos (caramelos) sin etiqueta entre 5 grupos (niños), para ello colocamos 4 objetos en línea e insertamos 4 separadores para dividirlos en 5 secciones. Si representamos los caramelos con asteriscos y los separadores con barras, ejemplos serían:

$AAAA \rightarrow ****////$
$ABCD \rightarrow */*/*/*/$
$AABB \rightarrow **/**///$
$ABCE \rightarrow */*/*//*$

De esta forma, el número de formas de repartir corresponde al número de disposiciones de 8 símbolos, de los cuales: 4 son asteriscos y 4 barras. Pero esto es precisamente el número de formas de elegir 4 objetos de un conjunto con 8 y por tanto el resultado (el número de ordenamientos) es :

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{5}{4}\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = 840\, formas. \tag{550}$$

11. En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además se sabe que aprueban el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 15% de los

que no asisten. Calcular la probabilidad de que se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado y resulta que ha asistido a clase.

Solución:

Dado los datos, se construye el siguiente diagrama de árbol:

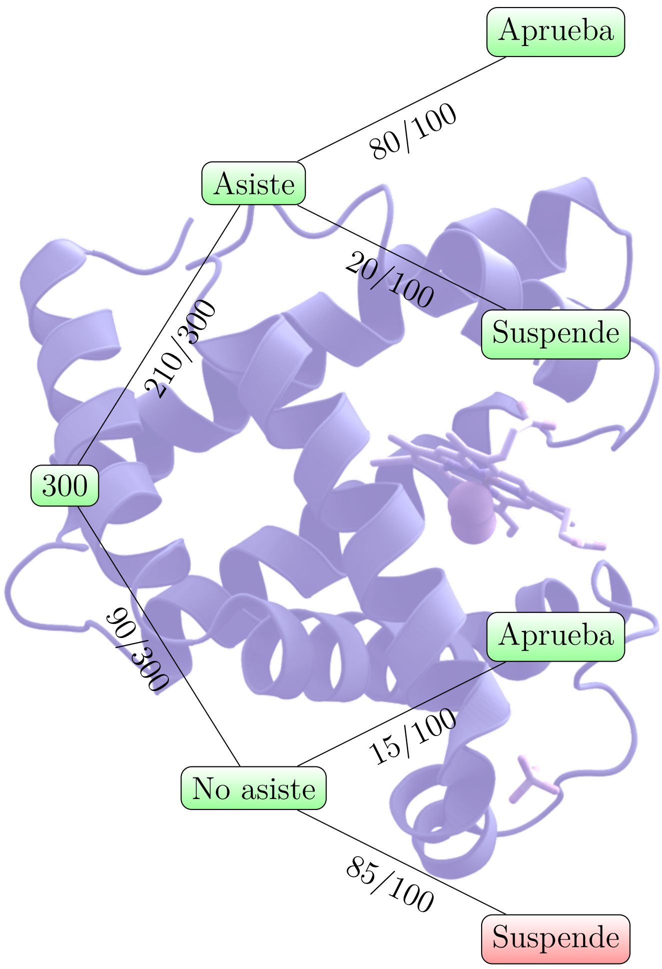


Figure 63: Diagram de árbol

Con el diagrama de árbol podemos observar que la probabilidad de que los estudiantes tomen el curso son de $P(A) = 210/300 = 0.7$ la probabilidad de que aprueben el curso dado que asistan es de $P(B) = (168+14)/300 = 0.6$, la probabilidad de que apruebe y asista al curso, se denota como : $P(A \cap B) =$

210/300(80/100) = 16800/30000 = 0.56 por lo que la probabilidad de que aprueben dado que asistan es:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.56}{0.6} = 0.93 \tag{551}$$

12. Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar estudios de ultrasonido. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de un estudio y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

    Solución:

    Se definen los sucesos: suceso P: seleccionar el primer aparato, suceso S: seleccionar el segundo aparato, suceso T: seleccionar el tercer aparato y el suceso E: seleccionar un resultado con error. Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P \mid E) = \frac{P(P) * P(E \mid P)}{P(P) * P(E \mid P) + P(S) * P(E \mid S) + P(T) * P(E \mid T)} = \tag{552}$$

$$P(P \mid E) = \frac{0.25 * 0.01}{0.25 * 0.01 + 0.35 * 0.02 + 0.4 * 0.0.03} = \frac{0.0025}{0.0215} = 0.116 \approx 0.12\ o\ 12\% \tag{553}$$

13. Se han tomado cinco muestras de una sustancia orgánica, de una cantidad fija cada una. Se les ha aplicado una cantidad X de una enzima (en una cierta unidad mol/ml) se tomará ésta cantidad como la variable aleatoria discreta X, entonces se anota en cada caso la velocidad de reacción , las cuales ser án los valores de la variable aleatoria discreta Y ,medida en micro-

moles por minuto , obteniéndose así la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	0.2	0.5
y_j	18	35	60	8	10

Table 10: Tabla de valores de las variables aleatorias X, y Y.

a) Calcular la covarianza de las variables aleatorias X y Y.
b) Calcular el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X y Y.

Solución:

Primero se calcularán las desviaciones típicas individuales tanto para la variable X como a la variable Y, cada valor de las variables aleatorias tiene la misma probabilidad de salir, por lo que para todas se encuentra 0.2 de probabilidad de la función de distribución, por lo que la media de la variable X se puede ver como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n} = \frac{1+2+3+0.2+0.5}{5} = 1.34 \tag{554}$$

En segundo lugar, calculando la varianza de la variable X podemos observar que al tener todos los valores de X las mismas probabilidades, podemos reescribir la expresión de la varianza como:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = \frac{1}{i} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 = \tag{555}$$

$$\frac{1}{5}\left((1-1.34)^2 + (2-1.34)^2 + (3-1.34)^2 + (0.2-1.43)^2 + (0.5-1.34)^2\right) = \tag{556}$$

$$\frac{1}{5}(0.1156 + 0.4356 + 2.7556 + 1.2996 + 0.7056) = \frac{5.312}{5} = 1.0624 \tag{557}$$

Por lo tanto, la desviación típica se expresa como: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1.0624} \approx 1.031$.

Se procede igual para la variable aleatoria Y:

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j f(y_j) = \frac{y_1 + y_2 + ... y_n}{n} = \frac{18 + 35 + 60 + 8 + 10}{5} = 26.2 \tag{558}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j \mu_Y)^2 f(y_j) = \frac{1}{j} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu_Y)^2 = \tag{559}$$

$$\frac{1}{5}\left((18-26.2)^2 + (35-26.2)^2 + (60-26.2)^2 + (8-26.2)^2 + (10-26.2)^2\right) = \tag{560}$$

$$\frac{1}{5}(67.24 + 77.44 + 1142.44 + 331.24 + 262.44) = \frac{1880.8}{5} = 376.16 \tag{561}$$

Por lo tanto, la desviación típica se expresa como: $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{376.16} \approx 19.395$.

Después calculamos la covarianza entre las variables X e Y, así pues al tener todos los valores la misma probabilidad y la misma longitud $i = j$ podemos reducir la expresión a:

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{N=1}^{N} (x_N - \mu_X)(y_N - \mu_Y) = \tag{562}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{5}((1-1.34)(18-26.2) + (2-1.34)(35-26.2) + (3-1.34)(60-26.2) + \tag{563}$$

$$(0.2 - 1.34)(8 - 26.2) + (0.5 - 1.34)(10 - 26.2)) = \tag{564}$$

$$\frac{1}{5}((-0.34)(-8.2) + (0.66)(8.8) + (1.66)(33.8) \tag{565}$$

$$+(-1.14)(-18.2) + (-0.84)(-16.2)) \tag{566}$$

$$\frac{1}{5}(2.788 + 5.808 + 56.108 + 20.748 + 13.608) \tag{567}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{99.06}{5} = 19.912 \tag{568}$$

Con estos valores, podemos calcular el coeficiente de correlación:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{19.812}{(1.031)(19.395)} \approx 0.99 \tag{569}$$

Cabe afirmar que con ésta información se puede asumir que la velocidad de reacción aumenta con la concentración dela enzima y que este aumento es de tipo proporcional lineal.

14. Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿ Cuáles son las probabilidades de que reciba, a) cuatro cheques sin fondo en un día dado, b) 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?

Solución:

En éste tipo de problemas, la elección conveniente es usar la distribución de Poisson . Para el inciso a) tenemos que $x =$ es variable aleatoria que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera , y puede tomar los valores de $= 0, 1, 2, 3, ...n, 6$, si la media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto es la media aritmética del problema, entonces el promedio de cheques sin fondo recibidos por día se denota como $\lambda = 6$, entonces:

$$p(x, \lambda) = \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} = p(4, 6) = 6^4 \frac{e^{-6}}{4!} \approx 0.134 \approx 13.4\% \tag{570}$$

Para el inciso b) la variable aleatoria que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos es $x = 0, 1, 2, 3, ..n, 10$,el promedio del evento ahora se transforma en $\lambda = 2 * 6 = 12$ debido por que 12 cheques sin fondo en promedio llegan al banco en dos días consecutivos, λ siempre debe de estar en función de x o tratarse de lo mismo que x, entonces tenemos dicha probabilidad calculada como

$$p(x, \lambda) = \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} = p(10, 12) = 12^{10} \frac{e^{-12}}{10!} \approx 0.105 \approx 10.5\% \tag{571}$$

15. En una Unidad de Cuidados Intensivos en un determinado hospital, cada paciente es clasificado de acuerdo a un estado crítico, serio o estable. Estas clasificaciones son actualizadas cada mañana por un médico internista, de acuerdo a la evaluación experimentada por el paciente. Las probabilidades con las cuales cada paciente se mueve de un estado a otro se resumen en la tabla que sigue:

X	Crítico	Serio	Estable
Crítico	0.6	0.3	0.1
Serio	0.4	0.4	0.2
Estable	0.1	0.4	0.5

Table 11: Tabla de transiciones

¿ Cuál es la probabilidad que un paciente en estado crítico en un día Jueves esté estable el día Sábado? .Considerar el paso de cada día como una transición .

Solución:

Sea X_n la variable aleatoria que indica el estado que se encuentra un paciente cualquiera en el hospital en el día n. Los valores posibles para dicha variable son C, S y E, representando los estados crítico, serio y estable, respectivamente. Un grafo que representa dicho proceso estocástico ,dada la tabla anterior es:

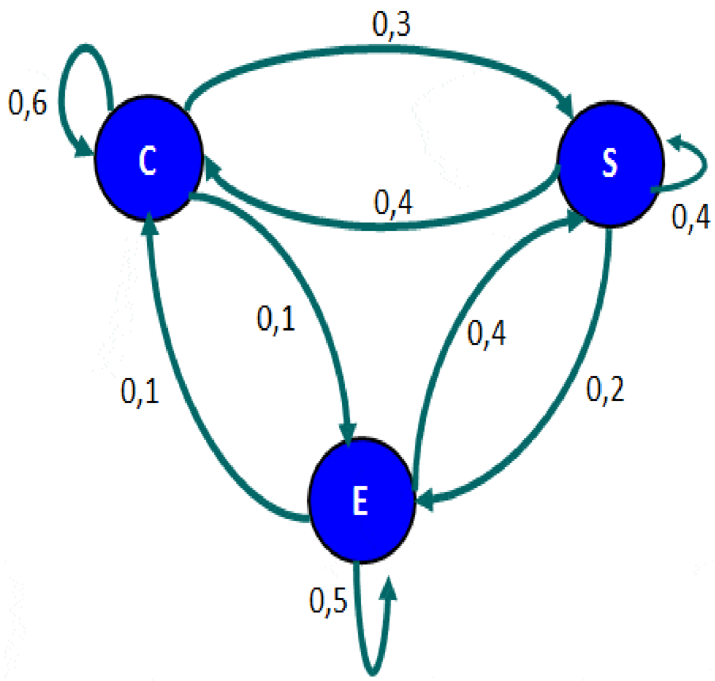


Figure 64: Grafo de transiciones de Markov

La probabilidad de que un paciente esté en estado crítico el día Jueves y que el día Sábado esté estable, esta dado por: P^2_{CE}, es decir, la probabilidad de pasar del estado crítico al estado estable al cabo de 2 etapas (días o transiciones), dada como:

$$P^2_{CE} = 0.3 * 0.2 + 0.1 * 0.5 + 0.6 * 0.1 = 0.17 \ \tilde{o}\ 17\% \tag{572}$$

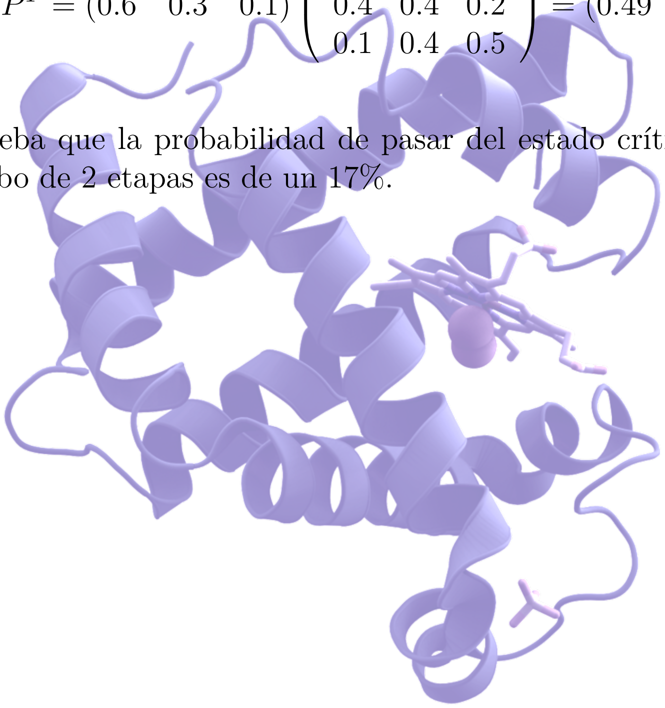
De forma equivalente se pueden utilizar la notación de matrices de probabilidad $p^n = p^0 P^T$ para resolver el problema, donde p^0 denota el vector de la posción inicial, P^T la matriz de transción y p^n el vector de probabilidad en la posición o paso n :

$$p^n = p^0 P^T = p^1 = p^0 P^T = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.6 \quad 0.3 \quad 0.1) \tag{573}$$

Segundo paso:

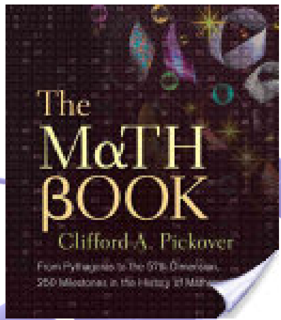
$$p^2 = p^0 P^T = (0.6 \quad 0.3 \quad 0.1) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.49 \quad 0.34 \quad 0.17) \tag{574}$$

Se comprueba que la probabilidad de pasar del estado crítico al estado estable al cabo de 2 etapas es de un 17%.



Reseñas de Libros

Libro:The Math Book by Clifford A. Pickove [46]



Introducción y Abstract

La Introducción hacia el libro es bastante clara, en el sentido de que deja constar el muy particular interés del autor respecto de las matemáticas, ya que nos habla acerca de la importancia y el impacto que han tenido a lo largo de la historia. Algo muy curioso que menciona con varios ejemplos es que en ciertas épocas de la historia en diferentes latitudes de la Tierra, los humanos han desarrollado ideas muy similares respecto a un problema o idelogía social muy parecidas coincidentes en el mismo tiempo, pero en lugares totalmente desconocidos el uno con el otro, la reflexión entonces es que el lenguaje de las matemáticas es universal, y nos alcanza en el conocimiento humano independientemente en que lugar nos encontremos. Las matemáticas y en particular la teoría de números es muy compleja, resaltando la participación de los números enteros como promotor de un mundo completo y complejo para diversas explicaciones del universo y demás fenómenos que podemos observar, en éste punto se hace patente la complejidad de las teorías de las matemáticas, al grado de que hasta los grandes expertos en la materia tiene problemas para entender , descifrar y crear métodos de pruebas adecuados para éstas

teorías y la importancia que ha adquirido disciplinas como la computación como herramientas para éstas pruebas. Las complicadas teorías matemáticas adquieren una gran importancia cuando dichos modelos pueden predecir fenómenos determinados, algo que cabe destacar es que se resalta la gran implicación de ésta disciplina con la física, mostrando varios ejemplos en los modelos más populares de la historia. De entre éstos postulados, el realizado en 2007 por Max Tegmark acerca de que nuestra realidad física es en realidad una estructura matemática me parece interesante, más sin embargo creo que todavía nos falta mucha perfección en ésta área para que nuestros modelos matemáticos puedan ser postulados como las "estructuras del universo". Claramente en el libro se discute una breve historia de las matemáticas ,así como aclara el autor, es muy resumido y no alcanza a cubrir evidentemente todo, omitiendo varios grandes pensadores en éste vasto universo matemático, sin embargo, se centra en poner los principales hechos proposiciones y talentos más destacados en el área y en especial de su interés y utilidad.
El autor nos narra la forma en la que se desarrolla la lectura, así como la forma en que se investigaron los datos relevantes, las discusiones de los hechos que marcaron los landmarks de la matemática.

La hormiga con Odómetro

En ésta sección se hablar acerca de un tipo de hormiga que según algunos científicos, es capaz de regresar a su nido gracias a la habilidad de poder estimar sus zancadas o su trayecto en función de su posción relativa y del terreno, demostrado mediante experimentos en los que se les modificaba la zancada acortando o aumentando la variable y su efecto en la orientación espacial de la hormiga; a pesar de que particularmente creo que puede haber muchos otros factores que influyen en la orientación espacial de una hormiga, si creo el cerebro (o cerebros) de las hormigas son capaces de reconocer ciertos patrones y de "mesurar" ciertas variables físicas sensables por sus sentidos que les dan una forma de estimar distancias o incluso zancadas individuales hacia un objetivo.

Los primates que cuentan

Es toda un debate la concepción de la palabra contar y sus implicaciones en el reino animal, sobre todo en mamíferos , se dice que algunos como las ratas, son capaces de reconocer patrones y asociar ciertas características que, sólo de no ser posible que sean representados por símbolos, es un proceso cognitivo que lleva al conteo.Incluso se reporta que se ha enseñado a chimpancés a reconocer los números del 1 al 6 y a usar herramientas como una computadora y retener dicha información en su memoria.

La cigarra que genera números primos
Todavía no encuentro como un tipo de insecto así puede haber desarrollado un mecanismo de defensa basado en la perfección de patrones matemáticos que les permiten aumentar sus posibilidades de sobrevivir, ésto apoya a que tales procesos complejos no son creados de la noche a la mañana , debió de haber comenzado quizaás con un patrón de surgimiento dado, y fue modificándose a través de varios millares de años , así como explica, creada entre interacciones cazador - presa durante todo ese tiempo hasta crear el patrón magífico que involucra números primos.

Nudos
Aquí se estudia la implicación que ha tenido los llamados nudos , asemejando bucles, en la propia naturaleza como patrones con características especiales y los creados por los propios humanos desde siglos y siglos antes de cristo. Es clara la implación de los nudos o "bucles" en estructuras naturales de gran importancia como en el ADN, su importancia religiosa y su utilidad para humanidad a sido milenaria.Hoy en día complejas teorías matemáticas y físicas acerca del universo están basadas en éste tipo de estructuras, un ejemplo es el libro de "La eterna trenza dorada ".

Reseña de 2 capítulos

Logaritmos

Los logaritmos, formulados y difundidos por el matemático Jonh Napier, son representaciones matemáticas muy útiles que a raíz de su descubrimiento a llevado a sin fin de aplicaciones en ingeniería, ciencias médicas, sociales , etc. Permitió hacer cálculos más complejos tales como calcular números elevados a exponentes muy grandes en la forma :$\mathrm{B}^a + \mathrm{B}^b = \mathrm{B}^c$.

En el campo de la química fue particularmente importante, ya que el modelo que describe el ph, el cual es una medida de acidéz o alcalinidad de una disolución. El pH indica la concentración de iones hidrógeno $[H]+$ presentes en determinadas disoluciones.La sigla significa: potencial hidrógeno o potencial de hidrogeniones. Este término fue acuñado por el bioquímico danés S. P. L. Sorensen (1868-1939), quien lo definió en 1909 como el opuesto del logaritmo en base 10 o el logaritmo negativo, de la actividad de los iones hidrógeno. Esto es [33]:

$$pH = -log_{10}[a_{H+}] \tag{575}$$

Por otro lado, en ingeniería fue posible modelar variables físicas de interés como el ruido , tanto sonoro como en sistemas electrónicos, el cual sea ha adoptado la unidad del Decibelio ó Decibel, con símbolo dB,que expresa cuantas veces más o cuantas veces menos, pero no la cantidad exacta. Es una expresión que no es lineal, sino logarítmica. Es una unidad de medida relativa. En audiofrecuencias un cambio de 1 decibel (dB) es apenas notado. Si se tiene dos valores de potencia diferentes: P1 y P2 , y se desea saber cuál es el cambio de una con respecto a la otra, se utiliza la siguiente fórmula [61]:

$$dB = 10log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \tag{576}$$

Espiral logarítmica

Tiene una forma muy peculiar,éste comportamiento puede ser modelado por relaciones matemáticas especificas. Esta relaciones es ampliamente encontrada en patrones naturales, así como en fenómenos totalmente ajenos al humano como las Galaxias, estructuras de algunos insectos, está definia como:

$$r = ke^{a\theta} \tag{577}$$

La cual fue modelado con el ángulo θ entre una línea tangente a la curva y una líneal radial dada a (r, θ). Éste modelo aparece frecuentemente en materia que se forma simétrica y rotacionalmente. Cuenta con la particularidad de presentar espacios proporcionales entre los objetos o estructuras que lo contienen. Muchos modelos matemáticos aplicados a objetos biológicos y naturales también convergen en éste tipo de forma, siendo uno de los grandes y atractivos "fenómenos matemáticos y naturales".

Figure 65: Concha de espiral de un molusco.

Reseña de 2 capítulos

Descubrimiento de la fórmula en serie de Pi π

El descubrimiento de las series matemáticas infinitas fue aparecer una de las grandes incógnitas de los matemáticos en los años tempranos de las de ilustraciones matemáticas, en conjunto, el número π desde ya hace tiempo que se tenía una gran curiosidad por él y por los números irracionales. Lo curioso, como relata el autor, es la coincidencia de la universalidad del descubrimiento de que varios tipos de series numéricas convergen en el número irracional π, por diferencia relativamente cercana en lugares distintos, y series muy parecidas, cada una con sus complejidad e implementación específica, la primera se dice fue descubierta por Leibnitz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}.... \tag{578}$$

Y la segunda por un mateático llamado Gregory, el cúal llegó al mismo resultado mediante la implementación de la serie del arctan() cuando $x = 1$

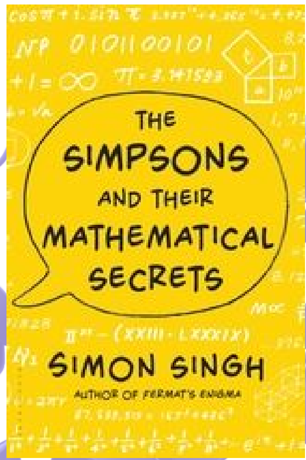
$$arctan(x) = x - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{x}{7} .... \rightarrow x = 1 \tag{579}$$

Todas éstas propiedades permitierón conocer más acerca de la naturaleza de las convergencias y su relación con un valor determinado en funcíon de dichos elementos y de su "precisión" a el valor convergente,adquiriendo un valor muy importante en ciencias y procedimientos de grandes cálculos como los implicados en computación.

Autómata celular

Los autómatas celulares son surgen de la teoría de autómatas, los cuales pueden moldear fenónemos sencillos y complejos, normalmente, la base de del autómata suelen ser mallas xy que tiene 2 estados, "prendido" o "apagado", lo curiosos del autómata es la dependencia de estos estados debido a los estados de sus vecinos. La utilizad de estos son la capacidad de generar patrones sumamente complejos que pueden predecir fenómenos naturales con suma precisión, sobre todo aquellos que se creían aleatorios. Como en las tareas pasadas, se investigó que el más famoso autómata celuar es un juego de 2 estados y 2 dimensiones denominado juego de la vida, parecieran patrones especiales que no tiene final, y además se ha descubierto patrones de autoconstrucción. Se pueden aplicar dichos diseños para construir autómatas muy complejos que han sido ampliamente usados en los campos de la computación y la inteligencia computacional.

Libro: The Simpsons and Their Mathematical Secrets by Simon Singh [66]

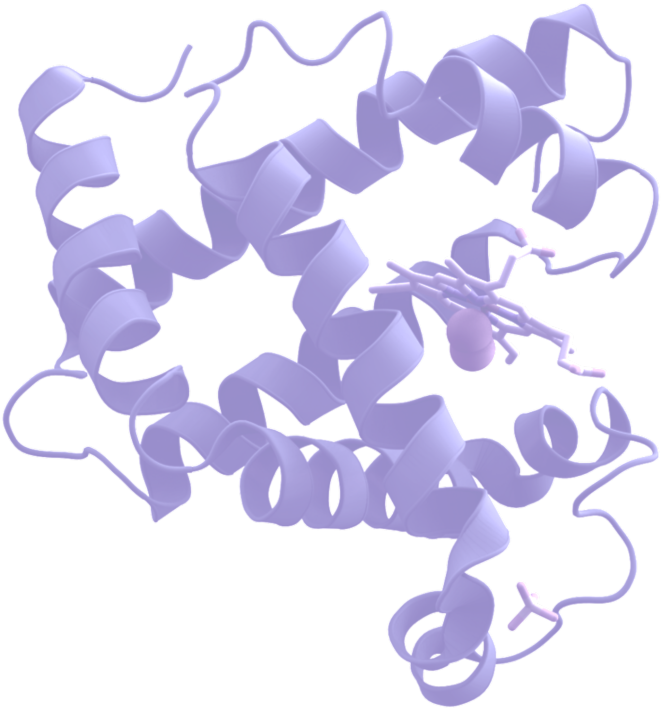


Introducción

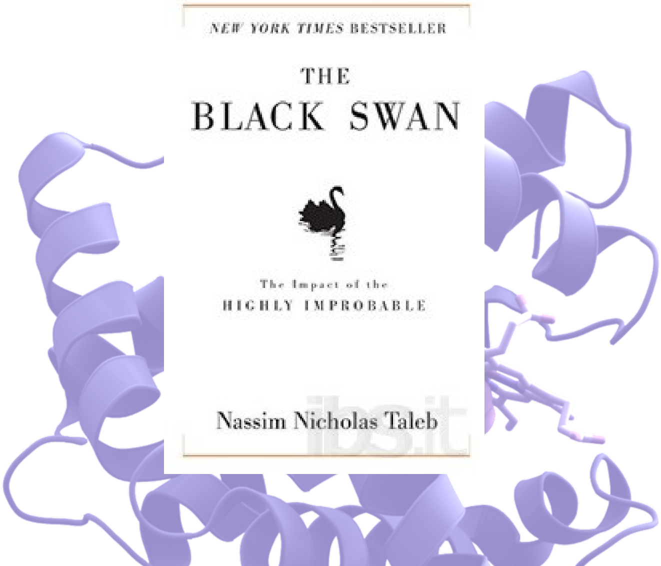
La introducción del libro nos presenta como fue concebida la idea de la serie de televisión de Los Simsons, que, a mi muy sorpresiva lectura, detalla que los escritores y ejecutivos sobresalientes del estudio de la serie,son en realidad gente muy preparada académicamente en el ámbito de la física y las matemáticas, además de escritores de comedia, la cuál han usado como poderosa herramienta para comunicar y expresar sus inquietudes con los números hacia una audiencia general de manera muy amigable.

Bart el Genio

En éste capítulo se narra el inicio de los Simpson, y una breve reseña de las impresionantes carreras de los matemáticos e intelectuales que conformaron los primeros guionistas de la serie y los motivos que los llevaron hasta ése punto.
Se narra tambieén un ejemplo del contenido matemático contenido de los capítulos comenzando con uno de los primeros, como el de Bart es un genio, el cuál se hace alusión a chistes con contenido de cálculo diferencial , se representa también en forma extraña la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$. Algo que también resulta bastante rescatable es la pequeña introducción de los números primos y su demostración de que ellos son infinitos.



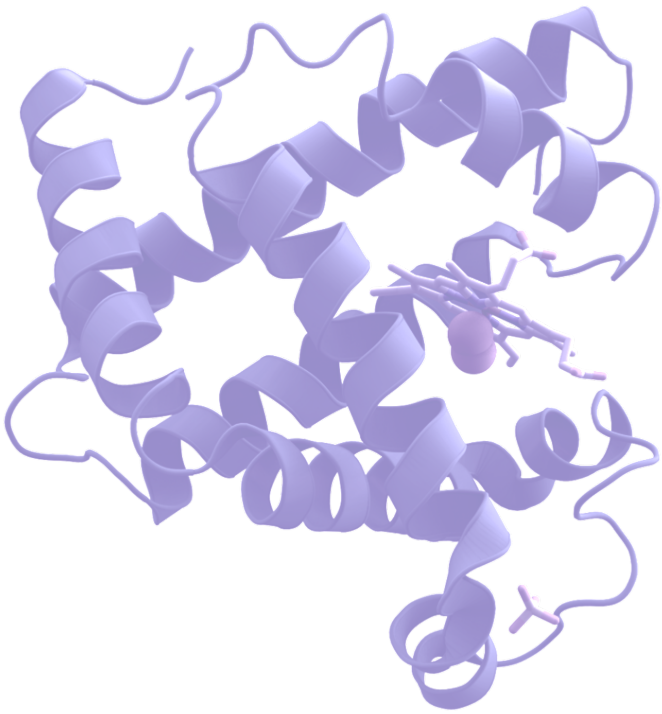
Libro:Black swan by Nashim Taleb [69]



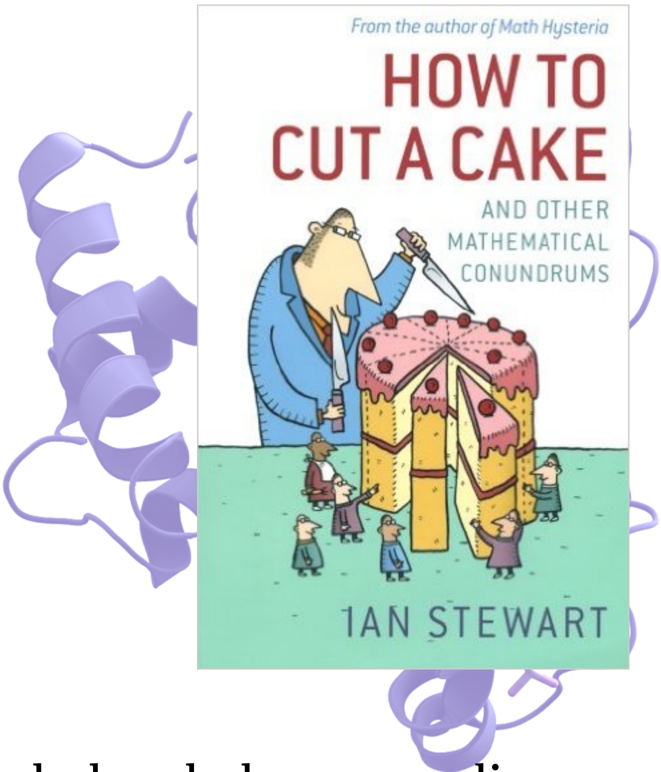
Introducción y Abstract

Éste libro pretende transmitirnos la idea de la vulnerabilidad de nuestros conocimientos y estructuras actuales cuando se enfrentan a hechos en los que nuestros saberes o bien no encajan, o bien no se tienen suficientes conocimientos para afrontar alguna situación.
En el abstract el autor invita a dejar de pensar en nuestra caja de "conocimientos seguros", y dispone que partiendo del hecho que no podemos inferir realmente algo con nuestras actuales herramientas, empezar a buscar los dichosos cisnes negros en nuestra área de conocimiento , los cuales son aquellos, datos, paradigmas, contraposiciones, que pueden tener un peso significativo para contradecir lo ya establecido, y que en algún futuro puedan predecir aquellos fenómenos que en la actualidad los consideramos como aleatorios o impredecibles.
Si bien es cierto que es muy útil y en ocasiones muy necesario apegarnos a aquellas

leyes o conceptos conocidos para, o bien construir cimientos más sólidos de lo que ya sabemos, o bien, para tener una mejor percepción y capacidad de discernir entre potenciales cisnes negros o aquellos datos que no podrían aportar algo significativo. Es clave que para triunfar en éstos tiempos, tener la capacidad para construir nuestro conocimiento en buenos cimientos y además ser capaces de encontrar y explotar los cisnes negros que podría haber escondidos entre tantos datos.
Otra reflexión que me dejó ésta breve introducción fue acerca de aquellas personas, héroes de alguna manera, que han hecho muchas cosas, y han evitado u ocasionado sin fin de acciones que han construido nuestra forma de vida actual, y que no se tiene ni un registro de aquellos, por mínima o mayúscula que fue su intervención, y que evitaron muchos cisnes negros desfavorables.



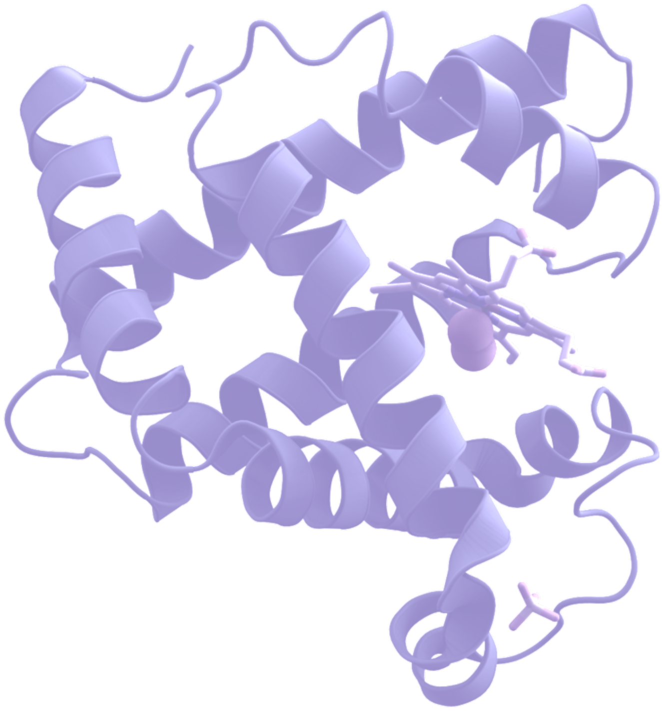
Libro:Cómo cortar un Pastel by Ian Stewart [68]



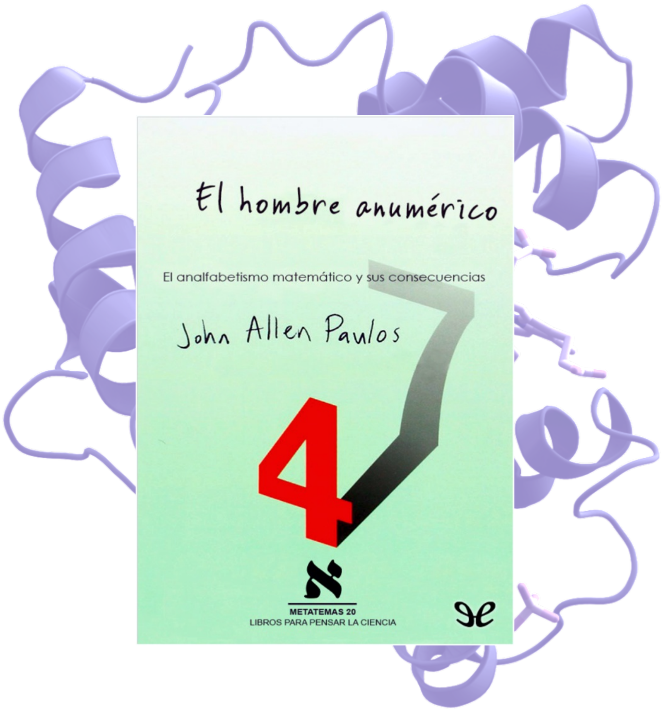
2. Abolida la ley de los promedios

Ésta sección de éste libro revela mucho de acerca de la verdadera naturaleza que esconde los fenómenos aleatorios, el experimento de la moneada aparentemente sencillo, no resulta tan trivial, ya que normalmente, un evento de éste tipo es señalado como un "50% y 50%", sin embargo , como el autor lo demuestra, existe una gran diferencia entre eventos sucesivos, la probabilidad del ensayo, y la probabilidad de frecuencias que se repite un resultado en un experimento determinado.

Un dato que deja muy clara la postura es el hecho de encontrar que, mientras pasa el tiempo, un experimento a mayor número de ensayos, deja de ser 1/2 a 1/2, o 1/6 en el caso del lanzamiento de un dado, aún más, parece no presentarse el clásico y esperado comportamiento que tienda a equilibrar los resultados sin importar el número de ensayos. Por el contrario, mientras más ensayos se hacen, en éste caso el de la moneda, más parece que se aleja de la tendencia de equilibrar los resultados mitad probable a cada posible resultado, parece ahora no haber tendencia, más sin embargo aparecen cadenas que nos dicen que un resultado es más probable que otro, rompiendo reglas de probabilidad estática, algo que dejó claro el autor es la diferencia entre una tendencia y su relación con ensayos sucesivos, que, para éste tipo de experimentos , se demuestra claramente que un evento no se ve afectado por los efecto de los ensayos anteriores, ésto es una aseveración fuerte con muchas implicaciones.



Libro:El hombre Anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias [45]



2. Probabilidad y coincidencia

Éste capítulo es muy interesante, ya que revela de manera intuitiva y en cierto punto didáctico, fenómenos aleatorios en los cuales la percepción o bien, un primer vistazo del problema arroja un resultado que es muy diferente al tipo y clase de problema, mediante el análisis probabilístico del autor. El patrón que más enconrtré en el engaño de éste tipo de problemas fue sin duda la ilusión de que en una serie de fenómenos, los experimentos consecutivos tienen una probabilidad por evento y no depende del experimento anterior.

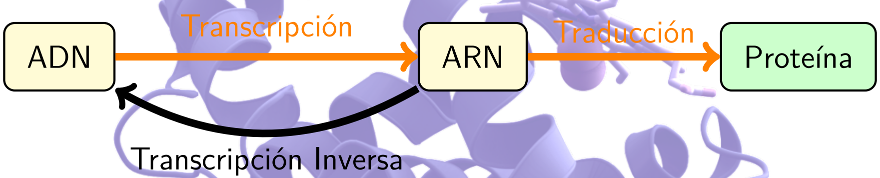
Varios de esos tipos son muy importantes a la hora de la toma de decisiones, hay muchas maneras de confundir las probabilidades de ciertos eventos, lo que es muy cierto es que en ciertos momentos solemos darle más importancia a los eventos aislados y fuera de la media de un fenómeno con respecto a los verdaderos valores esperados, o lo contrario, le damos mucha importancia a valores estándar de ciertos fenómenos que no aportan realmente información útil. Algo que también me llamó la atención fue por ejemplo, el saber distinguir entre entre cuando de un fenómeno aleatorio, se busca un patrón concreto, o un patrón en general, siendo la probabilidad de ésto último mucho más alto que lo primero.

También la relación entre conjuntos suele ser mucho más estrecha y más útil el uso de teoremas como el de la pichonera y las relaciones con personas famosas. También se encontró el ejemplo visto en clase de las cartas predictibles, en cuyo caso, en una decisión binaria, a mayor número de experimentos es mayor el número de aciertos , como el experimento de la moneda. LO que también me dejó pensando mucho fue el hecho de , dado un fenómeno cuya probabilidad sea casi nula de que ocurra, una vez que se presenta, no siempre significa un evento trascendental y que , en función del contexto, puede significar mucho o nada.

Artículos usados en el curso

A novel gene identification algorithm with Bayesian classification

Dogma central de la biología



Las proteínas controlan el proceso de replicación del ADN uniéndose a una secuencia específica en el ADN.
Entender la palabra genoma como el total de los genes o material genético que posee un organismo.

Diferencias básicas de Cromosomas y genomas

Estructura Genoma Procariota

1. Organización compacta.
2. Información adicional en plásmidos (extracromosomal).
3. DNA "no codificante" en pequeños segmentos dispersos en el genoma ($< 11\%$).
4. Cromosoma Circular más corto que en el Eucariote. 5. No se encuentra en un núcleo definido.

Chaparro Amaro Oscar Roberto

Estructura Genoma Eucariota

1.- Genoma compuesto por moléculas de ADN lineal (cromosomas).
2.- Organización menos compacta.
3.- DNA repetitivo (disperso y en tandem).

Una secuencia de ADN se puede dividir en dos tipos de regiones: Génica e intergénica. La primera se encuentra en lo que se le llama ORF marco abierto de lectura o marco de lectura abierta (ORF, del inglés open reading frame) .
Un gran pilar en la bioinformática es la detección de los ORF de la secuencia de ADN de una especie dada en todo el ADN secuencial y diferenciar las regiones que tiene la capacidad de codificar proteínas de las que no, que es equivalente a decir que se busca encontrar las genes potenciales de una especie.

Los algoritmos más populares que encuentran ORF en una genoma dado son:

Glimmer ®.

Glimemer detecta ORF a la secuencia de ARN comprendida entre un codón de inicio (AUG) de la traducción y un codón de terminación, descontando las secuencias que corresponden a los intrones, en caso de haberlas. Para ello se utiliza métodos probabilísticos , el principal es el uso de las cadenas o modelos de Markov.

GeneMark ®.

Muy parecido a el software Glimmer, con el uso de Modelo de Markov Interpolado. Su característica más importantes son:

1.- Ambos métodos encuentran los ORF de una secuencia a partir de ir descubriendo la cadena y predecir si en la siguiente secuencia habrá el ORF a partir de las anteriores .

2.- Se encuentran las secuencias específicas en el ADN y ARN, específicamente los codones "especiales" tales como,TAC en el ADN y AUG en el ARN, que codifica para metionina, y además sirve como sitio de iniciación de la traducción. Existen tres codones de terminación, que reciben distintos nombres. UAG, el primero descubierto, se conoce como codón ámbar; UGA, como codón ópalo; y UAA, como codón ocre.

Normalmente, éstos software's generan algunos tipos de archivos de salida tales como ".predict", y el archivo ".detail".Éste último incluye mucha información sobre todos los ORF descubiertos por el programa o por algún secuenciador, mientras que el archivo ".predict" sólo incluye la información de predicción de encontrar en secuencias futuras con los ORF.

El archivo puede contener predicciones de uno o varios genomas o segmentos genómicos. El archivo puede dividirse en seis partes:

Propiedad de Periodicidad de base 3

Ésta propiedad en el campo de la genómica es muy importante en las secuencias de ADN . La existencia de esta propiedad permite el análisis de Fourier en señales derivadas de segmentos de secuencias de ADN. Debido a su poder predictivo, se ha utilizado como un indicador preliminar en la predicción de genes. Esta característica no se detecta fuera de las regiones de codificación.

Análisis espectral de secuencias de ADN

Una vez que la secuencia de ADN se ha convertido en una secuencia numérica, el análisis espectral se puede realizar en esa secuencia.

Metodología

La DFT está definido por la ecuación de análisis y produce una se ñal compleja de longitud N que produce un vector $X[n]$ que representa el espectro de la señal. El índice k de la respuesta en frecuencia corresponde a ω de $2\pi n/N$.Para la propiedad de periodicidad de base 3 la frecuencia será $k = N/3$, ya que corresponde a un período de repetitibilidad 3.

La transformada discreta de Fourier para un bloque de N-nucleobases de la secuencia binaria se denota como: $X_A[n]$ para la nucleobase Adenina denotada como la secuencia binaria $x_A[n]$,donde la secuencia binaria denota el estado de la nucleobase como presente o ausente en la secuencia estudiada. En términos de la salida k se denota como:

$$X_A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_A[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}, \qquad 0 \leq k \leq N-1 \tag{580}$$

Para las demás bases se denota de igual manera que la Adenina. Las DFT $X_T(k), X_C(k)$ y $X_G(k)$ Cuando se toma el N múltiplo de 3 y se define $S(k)$ como:

$$S(k) = \mid X_A(k) \mid^2 + \mid X_T(k) \mid^2 + \mid X_C(k) \mid^2 + \mid X_G(k) \mid^2 \tag{581}$$

Si se graficara el espectro de $S(k)$ se espera que entonces, muestre un pico cuando el valor de muestreo en frecuencia sea: $k = N/3$ que corresponde a la frecuencia: central $2\pi/3$.

Dada una secuencia larga de nucleobases,para $S(k) = S(N/3)$ puede calcularse como si fuesen "pequeñas ventanas" de los datos y luego deslizarla por toda la secuencia.El cálculo de la DFT con una ventana deslizante es equivalente a aplicar un filtro paso de banda la señal para datos $\neq N/3$.

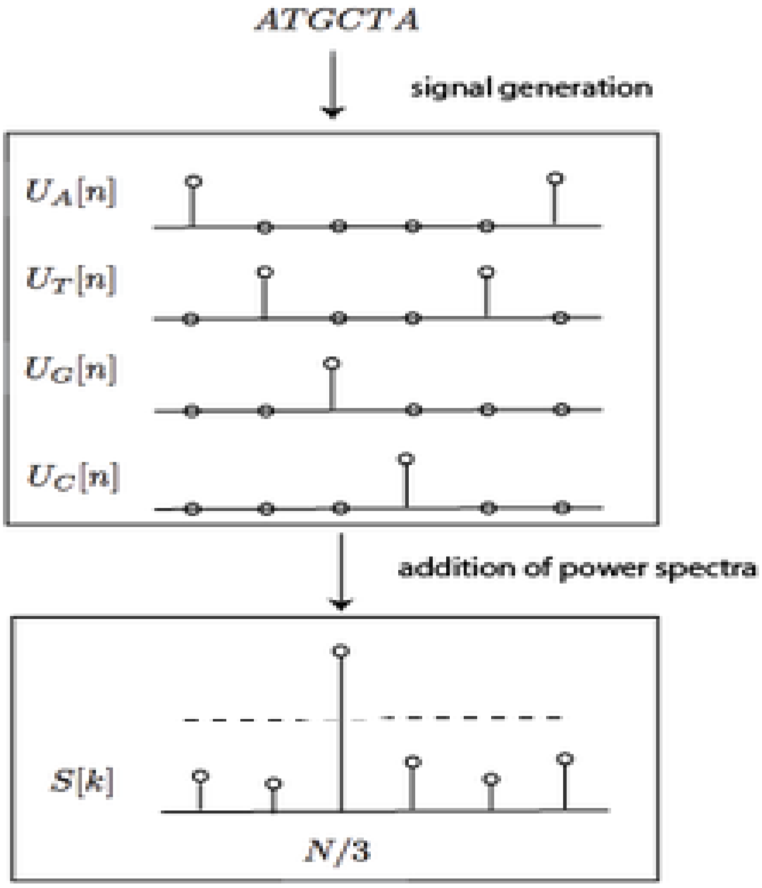


Figure 66: Muestreo de la FT.

Además, dos clasificadores bayesianos fueron diseñados para evaluar el rendimiento del algoritmo propuesto de forma que se compara con los métodos mencionados anteriormente para genomas procariotes.

El algoritmo usado puede describirse con los siguientes pasos:

1.- Convertir la secuencia del genoma de entrada g (de longitud L_x nucleobases) a una representación numérica como vector : $x[n]$ utilizando un mapeo polifásico asignando los valores complejos de las nucleobases de manera que: $(A = 1, C = +j, G = -1, T = -j)$.

Las purinas (A y G) se mantienen en el eje real cuando las pirimidinas (T y C) se mantienen en el eje imaginario (Propiedades químicas del anillo).

2.- Generar todas las posibles secuencias hipotéticas r_i que exhiben una patrón claro del periódo base 3 .Cada secuencia se genera como una repetición de tres nucleobases diferentes de las cuatro posibles:{A,C,G,T }.

Éste enfoque resulta en 24 secuencias posibles $(r_1, r_2, ..., r_{24})$ donde cada secuencia es de una longitud predefinida de $(3L_r)$ nucleobases, dondeL_r es el número de repeticiones utilizado para cada secuencia.Por ejemplo, la secuencia$r_1 = ACGACGACG$ corresponde a $(L_r = 3)$ repeticiones de la cadena genómica AGC y por lo tanto de longitud $(3L_r = 9)$ nucleobases.El código genético tiene en total $4^3 = 64$ posibles codones distintos que se pueden formar con la combinación de 3 de 4 bases nitrogenadas.La aplicación de esta estructura periódica en los 64 codones posibles del código genético resultarían en sólo 24 distintas secuencias de periodo 3.

3.-Convertir las secuencias hipotéticas (r_i) a sus representaciones numéricas correspondientes denotados como $s_i[n]$.

4 .- Correlacionar la señal, $x[n]$, con cada uno de las 24 hipotéticas secuencias $s_i[n]$. La correlación de 2 señales en éste caso nos dice la similitud entre ellas, por lo que ayuda a detectar las porciones de la secuencia genómica de entrada que tienen un patrón de periódo base 3 similar a cualquiera de las 24 secuencias.

Las 24 salidas de correlación correspondientes, denotadas como$y_i[n]$, se obtiene mediante la convolución del vector de entrada de la cadena $x[n]$ y las secuencias $s_i[n]$:

$$y_i[n] = \sum_{m=0}^{3L_r - 1} x[m] s_i[m - n] \tag{582}$$

5.- Pasar las secuencias, $y_i[n]$ en un Módulo de relación máxima combinado (MRC en inglés maximal ratio combining). Técnicas para combinar señales de múltiples ramas como el MRC utiliza la combinación de cada rama que se multiplica por un factor de peso que es proporcional a la amplitud de la señal.

Por lo que las ramas con señal fuerte se amplifican, mientras que las señales débiles se atenúan. En éste caso se utiliza cada una de las 24 ramas del vector $y_i[n]$ y se multiplica por un factor de peso (α_i), que es proporcional a la amplitud de la señal en cada rama.

Por lo tanto,la salida del MRC se denotará como $z[n]$.

6.- Pasar la secuencia resultante, $z[n]$, por un filtro pasa banda para períodos de base 3 de longitud N .La banda de paso debe estar centrada en $\omega_0 = 2\pi/3$. El vector resultante será denotado como: $f[n]$.

Los picos de la secuencia $f[n]$ Corresponden a una alta relación entre $z[n]$ y $w[n]$, mientras que las depresiones corresponden a una baja correlación. Una alta correlación en este contexto se relaciona con la presencia de la periodicidad base 3, correspondiente a lo que se espera encontrar en los ORF.La detección de picos y depresiones se logra mediante el deslizamiento de una ventana de longitud L_p para los picos y L_t para las depresiones a lo largo de toda la secuencia $f[n]$.

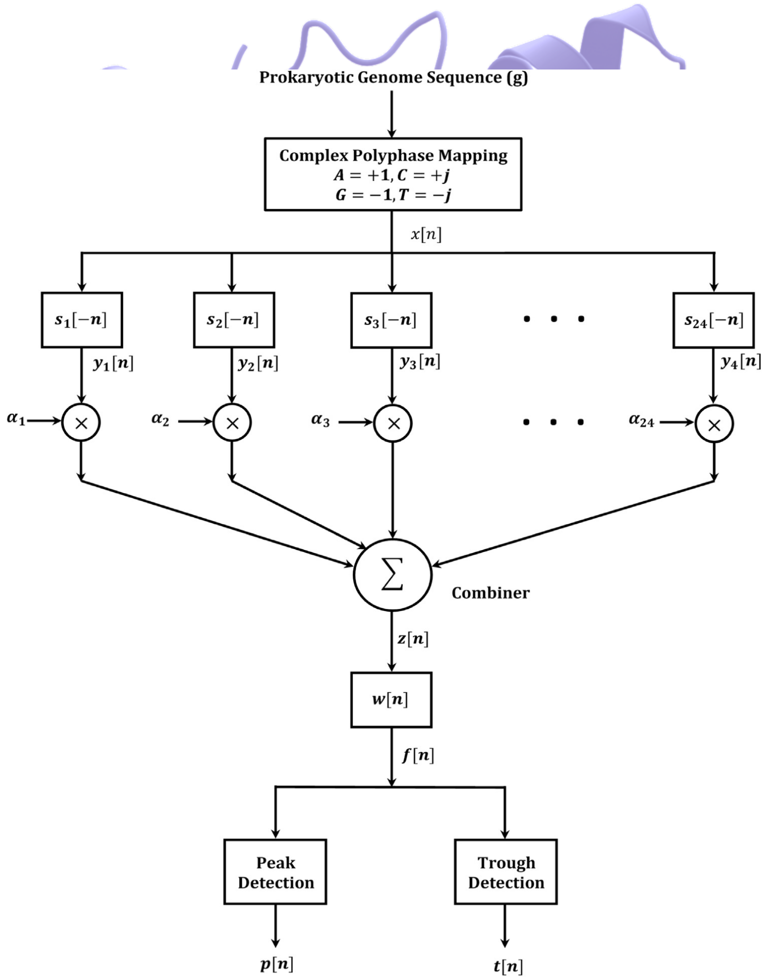


Figure 67: Diagrama del algoritmo empleado

Clasificador Bayesiano

Con el fin de evaluar el Algoritmo de detección propuesto, se emplea un sistema de clasificación Bayesiano. Este sistema puede clasificar los ORF de una secuencia de genoma dada como regiones codificantes o no codificantes basándose en si poseen la propiedad de periodicidad base 3 o nó.

Los elementos de los clasificador Bayesiano basados en el la propiedad de periodicidad base 3 son:

- Variable de clasificación s_i.
- La probabilidad condicional de un valor de la variable de clasificación dada una clasificación particular grupo $P(s_i \mid w_j)$.
- La probabilidad de ocurrencia de cada grupo de clasificación $P(w_j)$.

Aplicando el clasificador bayesiano, los grupos de clasificación pueden ser discriminados por la función:

$$P(w_j \mid s_i) = \frac{P(s_i \mid w_j)P(w_j)}{P(s_i)} \tag{583}$$

Donde i designa la variable de clasificación considerada (en este caso son 1,2 correspondientes a los 2 clasificadores diseñados en el trabajo), mientras que j toma los valores binarios de estado de la secuencia (Codificante, No codificante).

La probabilidad de un valor dado de la variable de clasificación $s_i, P(s_i)$, puede ser calculado utilizando el teorema de probabilidad total representado para el caso como:

$$P(s_i) = \sum_{j=i}^{M} P(s_i \mid w_j)P(w_j) \tag{584}$$

La constante M representa el número de grupos de clasificación considerado donde $M = 2$. El clasificador 1 tiene la variable de clasificación s_1 que denota el valor máximo de "picos" que arroja el algoritmo propuesto para cada entrada particular

ORF $p[n]$. Por lo tanto, s_1 se define como:

$$s_1 = max[p[n]] \tag{585}$$

Mientras que el clasificador 2 tiene la variable de clasificación, s_2, como el máximo valor de pico$p[n]$ "normalizado" a la longitud de los ORF de nucleo-bases localizados, por lo tanto, s_2 se define como:

$$s_2 = max\left[\frac{p[n]}{L_{ORF}}\right] \tag{586}$$

Donde L_{ORF} es la longitud de cada ORF particular en número de nucleo- bases.Éste proceso se utiliza para calcular las variables de clasificación, s_1 y s_2 para cada ORF en los conjuntos de cadenas de ADN usadas en el experimento. Las funciones de densidad de probabilidad correspondientes (PDFs) de las variables de clasificación, s_1 y s_2, son calculadas si la probabilidad de un valor específico de s_i dada la clasificación del grupo w_j para tener las diferentes gráficas que representan eso valores dados por : $P(s_i \mid w_j)$.éstos valores fueron calculados sobre el genoma de una cepa de *Escherichia coli*.

$P(w_1)$ and $P(w_2)$, se obtuvieron de 2 maneras para el estudio , la primera se obtuvo de bases de datos anteriores según la longitud de la cadena según el genoma estudiado. El segundo enfoque no se asumió ningún conocimiento previo. Cada clasificación se consideró como igualmente probable, sin usar previas base de datos. Éste método depende del uso de la longitud de la ventana de detección de picos (L_p) , lo que varía de genoma en genoma, por lo que una desventaja del método es que la disminución de la ventana L_p también producirá más falsos picos que no son puntos de maximización reales que corresponden a regiones codificantes reales.Evidentemente otros factores muy importantes en la selección de un ORF es si comienza con un codón conocido de iniciación válido (ATG, GTG o TTG), que además terminen con un codón de terminación válido (TAG, TAA o TGA) y que tenga al menos 99 Nucleo-bases mínimo de distancia (para garantizar la formación correcta de genes).

El desempeño de los 2 clasificadores bayesianos se evalúa mediante el uso de la Tasa Verdadera Positiva (TPR, también denominada sensibilidad); y la tasa de Falso Positivo (FPR), la tasa de falsos negativos (FNR) y la tasa de verdaderos negativos (TNR, también conocida como especificidad).

La sensibilidad ,también llamada tasa verdadera positiva, el recuerdo o la probabilidad de detección, mide la proporción de positivos que se identifican correctamente como tales , por ejemplo, el porcentaje de personas enfermas que se identifican correctamente en función de los signos y la sintomatología.

La especificidad , también llamada tasa negativa verdadera, mide la proporción de negativos que se identifican correctamente por ejemplo, el porcentaje de personas sanas que se identifican correctamente en función de la ausencia de los signos y la sintomatología.

Las cuatro tasas de rendimiento se definen como:

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} x100\% \tag{587}$$

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN} x100\% \tag{588}$$

$$FNR = \frac{FN}{TP + FN} x100\% \tag{589}$$

$$TNR = \frac{TN}{FP + TN} x100\% \tag{590}$$

Ni la sensibilidad ni la especificidad por sí solas constituyen una buena medida del error. Alternativamente, en la bioinformática , sobre todo en estructuras genéticas, la medida preferida de precisión global de un genoma dado ha sido tradicionalmente el coeficiente de correlación (CC) definido como:

$$CC = \frac{(TP * TN) - (FN * FP)}{\sqrt{(TP + FN) * (TN + FP) * (TP + FP) * (TN + FN)}} \tag{591}$$

Para concluir

- Mapear las secuencias de ADN a señales digitales, las técnicas estándar de procesamiento digital de señales como la Transformada de Fourier,filtros digitales tipo IIR por correlación, modelos de Markov a toda la secuencia de ADN de estudio.

- El algoritmo propuesto no implica ninguna información previa sobre las regiones de codificación.
- El algoritmo propuesto emplea un mapeo de varias fases con números complejos para proporcionar una representación numérica.
- Las secuencias genómicas generan una señal cuyos picos significan ORF y cuyas depresiones significan ubicaciones de regiones no codificantes.
- Diseño de clasificadores Bayesianos para la evaluación del algoritmo propuesto.

- Los picos del vector $f[n]$ significan regiones codificantes tanto en sentido directo como inverso de la secuencia genómica, mientras que las depresiones significan regiones no codificantes.

- De los dos clasificadores Bayesianos, el clasificador 1 arroja mayor sensibilidad (o TPR) y FNR, similares a las técnicas GLIMMER y Gen-EMark en TPR y FNR.
- Este sistema puede clasificar (ORF) de una secuencia de genoma dada como regiones codificantes o no codificantes basándose en si poseen la propiedad de periodicidad base 3 o nó.
- La prueba se realizó en el genoma de *Escherichia coli* extraído de una base de datos externo.

Bibliografía

[1] 314, L. M. H. L. El código genético standard. http://web.archive.org.

[2] Ambesi-lmpiombato, P. F. S. La clonación. *Dept. de Patología y Medicina Experimental y Clínica de la Universidad de Udine. Italia* (2001).

[3] Anonimo. Experimentos de mendel, 1993.

[4] Anónimo. Variable aleatoria y función de distribución, 2007.

[5] Anónimo. Estadística para todos, 2008. Web:estadisticaparatodos.es.

[6] Baer, C. M., and Zehnder, M. B. Bases moleculares y celulares del envejecimiento. *Archivo Histórico: ARS Médica* (2010).

[7] Balakrishnan, V. *Schaum's Outline of Combinatorics*. Schaum's Series. McGraw-Hill Education, 1995.

[8] Benjamin, A. Proofs that really count. *Mathematical Association of America. ISBN 0883853337* (2003).

[9] Bennett, D. J. Randomness. *Harvard University* (1998).

[10] Biham, E., and Shamir, A. Differential cryptanalysis of the data encryption standard. www.movable-type.co.uk/scripts/aes, 1993. Springer Verlag, 1993. ISBN 0-387-97930-1, ISBN 3-540-97930-1.

[11] Bluman, A. G. *Probability Demystified*. McGraw Hill, 2005, ch. 2, pp. 71 – 81.

[12] Calle, M. C. Valores propios y vectores propios, eigenvalores y eigenvectores, 2001. http://www.monografias.com/trabajos99/valores-propios-y-vectores-propios-eigenvalores-y-eigenvectores/valores-propios-y-vectores-propios-eigenvalores-y-eigenvectores.shtml#ixzz4gol1Uqhk.

[13] César, J. Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia., 2016.

[14] Ciencia, D. A. Espacio muestral. http://www.definicionabc.com/ciencia/espacio-muestral.php. Accessed: 2017-02-08.

[15] Commission, P. Report to the president on the space shuttle challenger accident. Tech. rep., NASA, June 1986.

[16] de clave pública., C. El cifrado rsa. www.dma.fi.upm.es.

[17] de Matemática Aplicada (Biomatemática). Facultad de Biología. UCM, D. Estimación de parámetros. media y varianza muestral, 1998. http://e-stadistica.bio.ucm.es/mod_intervalos/intervalos4.html.

[18] Definition, A. http://www.definicionabc.com/general/iphp, Julio 2015.

[19] Díaz, J. Los simpsons y el último teorema de fermat. https://conexioncausal.wordpress.com/2007/05/27/los-simpsons-y-el-ultimo-teorema-de-fermat/ Accessed: 2017-02-05.

[20] Douglas Adams, e. p. G. P. The original hitchhiker radio scripts, 1985. London. 1985. ISBN 0-330-29288-9.

[21] E.L., T., and L., S. E. nterpretation of statistical evidence in criminal trials: The prosecutor's fallacy and the defense attorney's fallacy". law and human behavior. *167. doi:10.1007/BF01044641. JSTOR 1393631* (1987).

[22] Enigma, M. Día 05/11/2014 - 05.55h. http://www.abc.es/segunda-guerra-mundial/personajes/20141023/abci-arthur-scherbius-guerra-201410230454.html.

[23] EW, R., JF, H., EM, L., and et al. Natural polymorphisms in human apobec3h and hiv-1 vif combine to affect viral infectivity and g-to-a mutation levels in primary t lymphocytes. *PLOS Genetics* (2014).

[24] FCM. Vectores y valores propios, 1998. http://fcm.ens.uabc.mx/~matematicas/algebralineal/VI%20Valores%20y%20Vectores%20Propios/01%20propios.htm.

[25] Geiss, D. C., and Barrios, F. Principio de inducción y algunas de sus equivalencias. *Público* (1992).

[26] Grima, C. Conocer el juego de la vida de conwa, Octubre 2014. www.tecnoxplora.com.

[27] Guio, P. Levi-civita symbol and cross product vector and tensor. www.ucl.com. Id: levi-civita.tex,v 1.3 2011/10/03 14:37:33 patrick Exp.

[28] H., B. E. Structure and function of telomeres. *Nature 350:569-72.* (1991).

[29] Herrero, M. Criterio de divisibilidad por 11, Septiembre 2011. www.ecoribera.org.

[30] Hypermath. M olmo r nave. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Math/permut.html.

[31] Kumar, B. A. *Binomial theorem in ancient India*, vol. Indian J. History Sci 1. I, 1966.

[32] Langarica, E., and Eduardo, P. Estadística y probabilidad: Técnicas de conteo. http://probabilidad-esta.blogspot.mx/2011/12/tecnicas-de-conteo.html. Accessed: 2017-02-05.

[33] l'académie d'Orléans Tours. ph. https://es.wikipedia.org/wiki/PH. Accessed: 2017-02-15.

[34] M., M. Tópicos de estadística descriptiva y probabilidad. *Discrete Maths* (November 1989).

[35] Marzan, H. L. La función gamma. variable compleja. Instituto tecnológico de Santo Domingo, Enero 2011.

[36] Michiel, H. Stirling formula. Encyclopaedia of Mathematics , Springer, ISBN 978-1556080104, 2001. Accessed: 2017-02-04.

[37] Millán, E. P. Lo que es la falacia del apostador. http://www.psychologistinbuenosaires.com.

[38] Molina, M. El dilema del vigilante. *Mediaclic* (Noviembre 2012). http://www.cienciasinseso.com/tag/curva-roc/.

[39] nas, J. A. M. Análisis de algoritmos: Complejidad, November 1997.

[40] neda, J. A. A. C. Tareas y apuntes de probabilidad, procesos aleatorios e inferencia, 2016.

[41] NERD, P. C: Ejemplos: Congruencia de zeller, Mayo 2012. programacionnerd.blogspot.mx.

[42] of Evolutionary Biology, S. S. Revisión del a d n. http://evolution.berkeley.edu. Accessed: 2017-02-14.

[43] of Evolutionary Biology, S. S. Revisión del a d n. http://evolution.berkeley.edu. Accessed: 2017-02-14.

[44] Oxford-Complutense, D. Matemáticas de christopher clapham 84-89784-566, 1990.

[45] Paulos, J., and Llosa, J. *El hombre anumérico: el analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Tusquets, 2000.

[46] Pickover, C. *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*. Sterling Milestones Series. Sterling, 2009.

[47] Posted in Cryptography, G. Cryptography, modern cryptography. http://www.murky.org/blg/category/cryptography/.

[48] Público. La fórmula de stirling. http://gaussianos.com/la-formula-de-stirling/. Accessed: 2017-02-04.

[49] Público. Formulario 1: Tensores. *Comportamiento mecánico de los Materiales* (2000).

[50] Público. Leyes de la desintegración. *Licenciatura en Física* (2013).

[51] Quinn, and T., B. A. Proofs that really count: The art of combinatorial proof. *Mathematical Association of America. ISBN 0883853337* (2003).

[52] Rahbari, R., Sheahan, T., Modes, V., Collier, P., Macfarlane, C., , and Badge1, R. M. A novel l1 retrotransposon marker for hela cell line identification. *PMC US National Library of Medicine National Institutes of Health* (April 2009).

[53] Ralph:, G. Matemáticas discreta y combinatoria. *0-201-65376-1* (2001), 44.

[54] Ratner, P., and nas, J. A. M. Google's ai learns betrayal and aggressive actions pay off, 2017. bigthink.com.

[55] Reichmann, W. *Use and abuse of statistics*. Methuen. Pelican. Appendix 8, 1961.

[56] Reina, M. A. R. Un experimento determinista y de otro aleatorio. *E - Knowmetrics* (2016).

[57] Rendel, P. Juego de la vida, 2004. commons.wikimedia.or.

[58] Rosenkratz, W. A. *Introduction to Probability and Statistics for Science, Engineering and Finance*. McGraw Hill, 2005, ch. 1, pp. 8–43.

[59] S., A. P. Introducción a la teoría de los grupos. *Editorial Universitaria de Buenos Aires* (1967), 132–152.

[60] Sáiz, E. E. A. Relación con el triángulo de pascal. www.personales.unican.es/alvareze/estalmat/Fractales2010/. Accessed: 2017-02-19.

[61] Schuler, C. A. Electrónica, principios y aplicaciones. https://es.wikipedia.org/wiki/Decibelio. Accessed: 2017-02-15.

[62] Scietific, T. Cómo se interpreta el resultado de una prueba. *Thermo Fisher Scientific Inc* (2012). http://www.phadia.com.mx/es/3/2/Evaluacion-de-resultados-de-tests/#SensSpec.

[63] Seymour, L. Teoría de conjuntos y temas afines. *McGraw-Hill. ISBN 968-422-926-7.* (1991).

[64] Sierpinski, W. Cardinal and ordinal numbers. *Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne* (1958).

[65] Sierra, F. J. C. Curso de programación en c++, 1996.

[66] Singh, S. *The Simpsons and Their Mathematical Secrets*. Bloomsbury USA, 2013.

[67] Spiegel, M., and Suárez, J. *Probabilidad y estadística.* Compendios SCHAUM. Madrid, 1988.

[68] Stewart, I. *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos.* Crítica, 2007.

[69] Taleb, N. *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable.* Incerto. Random House Publishing Group, 2007.

[70] Test, G. G. R. G. Math review. www.ets.org, 2012. Khan Academy.

[71] Torres, J. Hardware para novatos :que es y cómo funciona la gpu o tarjeta gráfica, Diciembre 2013. https://hipertextual.com/archivo/2013/12/hardware-gpu-grafica/.

[72] U., N. M. Hela cell culture. www.microscopyu.com.

[73] UNER. Medicina nuclear. decaimiento radiactivo. *Facultad de Ingeniería - UNER - Argentina* (2010).

[74] Veness, C. Scripts de tipo móvil, 2005-2017. ku.oc.epyt-elbavom@cne-stpircs.

[75] vol 2 año 2003, M. I. Accidente del transbordador challenger. http://www.muyinteresante.es/tag/biografias.

[76] Waner, S. *Cálculo aplicado capitulo en-línea: cálculo aplicado a probabilidad y estadística .Sección 2. Funciones de densidad de probabilidad y la distribución uniforme.* Methuen. Pelican. Appendix 8, 2008. `https://www.zweigmedia.com/MundoReal/cprob/cprob2.html`.

[77] Weisstein, E. W. Correlation coefficient. *En Weisstein MathWorld Wolfram Research.* (2009).

[78] y Cajal, H. U. R. Riesgo relativo. *Comunidad médica Madrid* (2003).

[79] Zurditorium, C. A. Principos de palomar, unos cuántos ejemplos prácticos. http://www.zurditorium.com/principio-del-palomar-unos-cuantos-ejemplos-practicos. Accessed: 2017-02-08.