Centro de Investigación en Computación

Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia

Byron Gonzalez Flores

Instructor:
Dr. Martínez Castro Jesús Alberto

4 de julio de 2018

Índice

1. Probabilidad

¿Que es la probabilidad? La probabilidad es una medida de la certidumbre asociada a un suceso o evento futuro y suele expresarse como un número entre 0 y 1. La probabilidad es un método (análisis) por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.

1.1. Espacio muestra

El espacio muestral o espacio de muestreo(denotado E, S,Ω o U) consiste en el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. A un resultado particular del experimento se le denota por la letra ω

- Registrar el sexo de un bebe (hombre o mujer) . Lanzar una moneda(sol o águila) .
- Lanzar un dado(1, 2, 3, 4, 5, 6) .
- Elegir un día de la semana (lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo) .

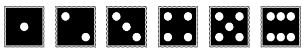


Figura 1: espacio muesta de un dado.

1.2. Experimentos deterministas y aleatorios

1.2.1. Deterministas

Son los hechos o sucesos que ocurren con seguridad. En ellos se conoce de antemano, con certeza, el resultado.

- Obtener un número par al arrojar un par de dados.
- Soplar a una vela encendida.
- El agua empieza a hervir a partir de los 100oC.
- El hielo se funde cuando la temperatura sube de los 0oC.
- Los polos opuestos se atraen.
- Calentar un pedazo de pan.
- Arrojar en un recipiente agua y aceite.
- Arrojar un objeto al espacio.
- Mezclar cloro y sodio.
- Sacar una carta de un mazo que solo tenga cartas de diamantes.

1.2.2. Aleatorios

Son aquellos en donde no se sabe con seguridad lo que va a pasar.

- Estos sucesos dependen del azar.
- Obtener un numero impar al arrojar un par de dados.
- Sacar un dos de diamantes de una baraja inglesa.
- Obtener un águila al aventar una moneda
- Saber los números de la lotería.
- Saber el marcador de un encuentro deportivo.
- Jugar piedra papel o tijeras.
- Obtener un 34 rojo en una ruleta.
- Obtener un par de 4 en un cubilete.
- Saber la próxima carta en la lotería

1.3. Probabilidad Clásica

Es el numero de resultados favorables a la presentación de un evento dividido entre el numero total de resultados posibles. Cada evento del espacio muestral tiene la misma posibilidad de ocurrir.

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{número de resultados favorables al evento}}{\text{número de resultados posibles}}$$

1.4. Probabilidad Geométrica

Describe la posibilidad de que un punto este en una parte de un segmento o en una parte de una región

1.5. Probabilidad Frecuentista

Permite estimar a futuro un comportamiento mediante la experiencia obtenida de algún fenómeno

1.6. Probabilidad Subjetiva

La posibilidad de que suceda un evento, asignado por una persona(opinión experta) con base en cualquier información de que disponga.

1.7. Probabilidad Axiomática

Son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades. La probabilidad de un evento A debe ser un numero mayor a 0. La probabilidad del espacio muestral es igual a 1. La probabilidad de la unión infinita de eventos es igual a la suma de la probabilidad de cada uno de los eventos cuando estos son ajenos dos a dos.

1.8. Principio del palomar

El principio del palomar, también llamado principio de Dirichlet o principio de las cajas, establece que si n palomas se distribuyen en m palomares, y si n >m, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma. Otra forma de decirlo es que m huecos pueden albergar como mucho m objetos si cada uno de los objetos está en un hueco distinto, así que el hecho de añadir otro objeto fuerza a volver a utilizar alguno de los huecos.

1.8.1. Aplicación

El principio del palomar es encontrado a menudo en informática. Por ejemplo, las colisiones son inevitables en una tabla hash porque el número de posibles valores que pueden tomar los elementos de un vector exceden a menudo el número de sus índices. Ningún algoritmo de hashing, sin importar lo bueno que sea, puede evitar estas colisiones. Este principio también prueba que cualquier algoritmo de compresión sin pérdida que hace al menos de un archivo de entrada otro más pequeño hará que otro fichero de entrada sea más grande (de lo contrario, dos archivos distintos podrían ser comprimidos a un mismo archivo más pequeño y al ser restaurado habría conflicto).

1.9. Permutaciones y Combinaciones

1.9.1. Permutaciones

Un arreglo de n objetos dados en orden es llamado permutacion Sea A un conjunto de n objetos distintos. Para $0 \geq r \geq n$, una r-permutación de A es un arreglo de r objetos de A en donde es importante el orden en que se agrupan [2]. Por ejemplo: si A = a,b,c,d, entonces una 3-permutación de A genera 24 arreglos posibles que se muestran en la Eq.(1):

$$\begin{gathered}\{a,b,c\},\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\},\\ \{a,b,d\},\{a,d,b\},\{b,a,d\},\{b,d,a\},\{d,a,b\},\{d,b,a\},\\ \{a,c,d\},\{a,d,c\},\{c,a,d\},\{c,d,a\},\{d,a,c\},\{d,c,a\},\\ \{b,c,d\},\{b,d,c\},\{c,b,d\},\{c,d,b\},\{d,b,c\},\{d,c,b\}.\end{gathered} \tag{1}$$

La permutación permite conocer de cuantas formas diferentes se puede reacomodar un conjunto de objetos y se define por la siguiente Eq. (2)

$$P_{(n,m)} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (2)$$

1.9.2. Ejemplos

a) Supononemos que un programador de televisión, y tiene 5 programas de media hora de donde elegir, pero solo tres espacios de tiempo. ¿Cuántos programas diferentes son posibles?

$$P_{(5,3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

b) Una tienda de helados ofrece una rebaja en helados que combinen 3 sabores distintos. ¿Cuántas combinaciones diferentes se pueden hacer si hay 8 sabores diferentes en el menu?

$$P_{(8,3)} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

¿De cuantas maneras pueden organizarse 8 CD?s en un estante?

$$P_{(8,8)} = \frac{8!}{(8-8)!} = 40320$$

c) Si una liga de softball tiene 10 equipos, ¿cuántas clasificaciones diferentes puede haber al final de la temporada?

$$P_{(10,10)} = \frac{10!}{(10-10)!} = 3628800$$

d) ¿Cuántas diferentes combinaciones pueden hacer utilizando dos letras de la palabra Texas si nunca letra debe de usarse más de una vez.

$$P_{(5,2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

e) Un candado tiene consta de 10 digitos diferentes y una secuencia de 5 digitos debe ser seleccionada para abrirlo. ¿Cuántas combinaciones son posibles?

$$P_{(10,5)} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$$

1.9.3. Paridad de Permutaciones

Las permutaciones pueden descomponerse en una sucesión de intercambios de elementos dos a dos.

- Una permutación par es una permutación que puede ser representada por un número par de transposiciones.
- Una permutación impar es una permutación que puede ser representada por un número impar de transposiciones.

La paridad o signatura de una permutación vale 1 si esta es par y -1 si es impar.

1.9.4. Permutaciones con repeticiones

Si se desea saber el numero de permutaciones iguales se puede emplear el siguiente teorema.
Teorema: El numero de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, $\cdots, n_r$ es igual a

$$\frac{n!}{n_1!, n_2! \cdots n_r!}$$

Para demostrar el teorema supongamos que queremos formar todas las posibles palabras de 5 letras usando las letras de la palabra $DADDY$. Ahora hay $5! = 120$ permutaciones de los objetos D_1, A, D_2, D_3, Y donde se distinguen las tres D.

$$D_2D_1D_3AY, D_3D_1D_2AY, D_1D_3D_2AY, D_2D_3D_1AY, D_3D_2D_1AY$$

Nos podemos dar cuenta que se produce la misma palabra. El 6 proviene del hecho de que hay $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas diferentes de colocar las tres D en las primeras tres posiciones en la permutación. Esto es cierto para cada una de las otras posiciones posibles en las que aparecen las D's.

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

1.9.5. Permutaciones Circulares

Las permutaciones circulares se aplican a conjuntos que se ordenan de forma circular, ya que no tienen ni principio ni final, o sea que no hay primer ni último término, por encontrarse todos los elementos en una línea cerrada.
Utilizaremos este tipo de permutaciones cuando los elementos se han de ordenar circularmente, por ejemplo, los presentes comensales en una mesa.
Para hallar el número de permutaciones circulares que se pueden formar con n objetos diferentes de un conjunto, es necesario considerar fija la posición de un elemento. Los $n-1$ restantes podrán cambiar de lugar de $(n-1)!$ maneras distintas tomando así todas las posiciones sobre la circunferencia relativa ál primer punto.

Sea $n \geq 2$ y $2 \leq r \leq n$. Un ciclo de longitud r o r-ciclo de S_n es una permutación σ tal que del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ hay r elementos diferentes secuenciados, $a_1, a_2, ..., a_r$, para los cuales se cumple que:
$M(\sigma) = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, de tal manera que $\sigma(x) = x$ si $x \neq a_i \forall i$.
$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, ..., \sigma(a_{r-1}) = a_r y \sigma(a_r) = a_1$.

Ejemplo 1. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?

$$6Pc = (6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Ejemplo 2. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$8Pc = (8-1)! = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

1.9.6. Muestras Ordenadas

El obtener un elemento de un conjunto de objetos se le llama muestreo, cuando se eligen un elemento después de otro, dentro del mismo conjunto, una cantidad de r-veces se le llama como muestra ordenada de tamaño r.

1.9.7. Muestreo con remplazo

Si se obtiene un elemento del conjunto y es remplazado, antes de sacar otro elemento, se le dice que es un muestreo con remplazo.

$$n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r$$

Ejemplo: De cuantas maneras se puede escoger 3 cartas en secuencia de una baraja de 52 cartas con remplazamiento.

$$52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^3 = 140608$$

1.9.8. Muestreo sin remplazo

Si se obtiene un elemento del conjunto y no remplazado, antes de sacar otro elemento, se le dice que es un muestreo sin remplazo, lo que significa que no pueden existir repeticiones en esa muestra.

$$P_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo: De cuantas maneras se puede escoger 3 cartas en secuencia de una baraja de 52 cartas sin remplazamiento.

$$52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

1.9.9. Combinaciones

Se llama combinaciones de m elementos tomados de n a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

La combinación de las letras a, b, c, d tomando 3 al mismo tiempo, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $b, c, d\}$o simplemente abc, abd, acd, bcd, se puede observar que abc, acb, bca, bac, cab, cba son iguales al conjunto $\{a, b, c\}$. Donde n es numero de objetos tomados de m, e cual es denotado por $C_{(n,m)}$

$$C_{(n,m)} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \tag{3}$$

Determinamos el numero de cobinaciones de 4 letras a, b, c, d tomando 3. Cada combinacion consiste en 3 letras determinadas por $3! = 6$ permutaciones de cada letra en la combinacion:

Combinaciones	Permutaciones
abc	abc,acb,bac,bca,cab,cba
abd	abd,adb,bad,bda,dab,dba
acd	acd,adc,cad,cda,dac,dca
bcd	bcd,bdc,cbd,cdb, dbc, dcb

El numero de combinaciones multiplicados por 3! es igual al numero de permutaciones.

$$C_{(4,3)} \cdot 3! = P_{(4,3)} \text{ or } C_{(4,3)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!}$$

Como cada combinacion de n objetos tomando r a la vez determina $r!$ permutaciones de los objetos, se puede concluir que

$$P_{(n,r)} = r!C_{(n,r)}$$

Por lo que obtenemos

$$C_{(n,r)} = \frac{P_{(n,r)}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1.9.10. Ejemplos

a) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

$$C_{(11,3)} = \frac{11!}{3!(35-3)!} = 6545$$

b) ¿Cuántas manos de poker de cinco cartas son posibles partiendo de un mazo esrtandard de cincuenta y dos cartas?

$$C_{(52,5)} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960$$

c) Si tres niõs juntaron 40 manzanas de un árbol. ¿De cuántas maneras pueden dividirlas, si todas las manzanas se consideran iguales (es decir, no importa cuáles manzanas le tocan a cada uno)?

$$C_{(40,2)} = \frac{42!}{2!(40-2)!} = 861$$

d) En el dominó 4 jugadores se dividen en partes iguales 28 fichas. ¿De cuántas formas pueden hacerlo? Para esta repartición se asume que los jugadores reciben las siete fichas, uno a la vez.

$$C_{(28,7)}C_{(21,7)}C_{(14,7)}C_{(7,2)} = \frac{28!}{3!21!} * \frac{21!}{7!14!} * \frac{14!}{7!7!} * \frac{7!}{7!} = 4,72xE14$$

e) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

$$C_{(35,3)} = \frac{35!}{3!(35-3)!} = 6545$$

f) Once estudiantes escribieron su nombre en un papel y lo depositaron en una caja. Tres de los nombres seran seleccionados. ¿Cuántas combinaciones puede haber?

$$C_{(11,3)} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165$$

1.9.11. Particiones Ordenadas

Supongamos que una urna A contiene siete canicas numeradas del 1 al 7. Calculamos el número de formas en que podemos tomarlas, primero, 2 canicas desde la urna, luego 3 canicas desde la urna y, por último, 2 canicas desde la urna. En otras palabras, queremos calcular el número de particiones ordenadas.

$$(A_1, A_2, A_3)$$

del conjunto de 7 canicas en las celdas A_1 que contiene 2 canicas, A_2 que contiene 3 canicas y A_3 que contiene 2 canicas. Llamamos a estas particiones ordenadas ya que distinguimos entre cada una de ellas la misma partición de A.

$$(\{1,2\}\{3,4,5\}\{6,7\})\text{y}(\{6,7\}\{3,4,5\}\{1,2\})$$

Como comenzamos con 7 canicas en la urna, hay $\binom{7}{2}$ formas de tomar las 2 primeras canicas, es decir, de determinar la primera A_I de la primer delda , después de esto, quedan 5 canicas en la urna y hay $\binom{5}{3}$ formas de tomar las 3 canicas, es decir, de determinar $A2$, finalmente, quedan 2 canicas en la urna y por eso hay $\binom{2}{2}$ son formas de determinar la última celda As. Por lo tanto, hay

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$$

diferentes particiones ordenadas de A en las celdas A_1 que contienen 2 canicas, A_2 que contiene 3 canicas y A_3 que contiene 2 canicas.

1.9.12. Convenio de Suma

Se denomina convenio de suma de Einstein, notación de Einstein o notación indexada a la convención utilizada para abreviar la escritura de sumatorios, en el que se suprime el símbolo de sumatorio representado con la letra griega sigma - $\sum$.

Dada una expresión lineal en R^n en la que se escriben todos sus términos de forma explícita:

$$\mathbf{u} = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + \cdots + u_nx_n$$

esta puede expresarse convencionalmente como el sumatorio:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

La notación de Einstein obtiene una expresión aún más condensada eliminando el signo de sumatoria y entendiendo que en la expresión resultante un índice indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo.

$$\mathbf{u} = u_i x_i$$

en cálculo de tensores es también común utilizar una de las ocurrencias como un subíndice y la otra como un superíndice. Por ejemplo, en la siguiente expresión en R^4

$$a^\mu b_\mu = a^0b_0 + a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$$

1.9.13. Demostraciones

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+k-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+k-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
&\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\frac{k!}{(k-1)!} + (n-1)!\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}}{k!(k-1)!(n-k)!((n-k)-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!k + (n+k-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\binom{n}{0} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdot + \binom{n}{n} = 2^n \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^(1-k)b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\
(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^(1-k)b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 \binom{2}{2} a^0 b^2 \\
(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^(1-k)b^k = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \\
(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^(1-k)b^k = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 \\
(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^(1-k)b^k = \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 \\
(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^(1-k)b^k = \binom{6}{0} a^6 b^0 + \binom{6}{1} a^5 b^1 + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \\
\binom{6}{6} a^0 b^6 \\
(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^(1-k)b^k = \binom{7}{0} a^7 b^0 + \binom{7}{1} a^6 b^1 + \binom{7}{2} a^5 b^2 + \binom{7}{3} a^4 b^3 + \binom{7}{4} a^3 b^4 + \binom{7}{5} a^2 b^5 + \\
\binom{7}{6} a^1 b^6 + \binom{7}{7} a^0 b^7 \\
(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} a^(1-k)b^k = \binom{8}{0} a^8 b^0 + \binom{8}{1} a^7 b^1 + \binom{8}{2} a^6 b^2 + \binom{8}{3} a^5 b^3 + \binom{8}{4} a^4 b^4 + \binom{8}{5} a^3 b^5 + \\
\binom{8}{6} a^2 b^6 + \binom{8}{7} a^1 b^7 + \binom{8}{8} a^0 b^8 \\
(a+b)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^(1-k)b^k = \binom{9}{0} a^9 b^0 + \binom{9}{1} a^8 b^1 + \binom{9}{2} a^7 b^2 + \binom{9}{3} a^6 b^3 + \binom{9}{4} a^5 b^4 + \binom{9}{5} a^4 b^5 + \\
\binom{9}{6} a^3 b^6 + \binom{9}{7} a^2 b^7 + \binom{9}{8} a^1 b^8 + \binom{9}{9} a^0 b^9 \\
(a+b)^1 0 = \sum_{k=0}^{1} 0 \binom{10}{k} a^(1-k)b^k = \binom{10}{0} a^1 b^0 + \binom{10}{1} a^9 b^0 + \binom{10}{2} a^8 b^1 + \binom{10}{3} a^7 b^2 + \binom{10}{4} a^6 b^3 + \\
\binom{10}{5} a^5 b^4 + \binom{10}{6} a^4 b^5 + \binom{10}{7} a^3 b^6 + \binom{10}{8} a^2 b^7 + \binom{10}{9} a^1 b^8 + \binom{10}{10} a^0 b^9
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^1 = a+b\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
&(a+b)^5 = a^5+5a^4b+0a^3b^2+0a^2b^3+5ab^4+b^5\\
&(a+b)^6 = a^6+6a^5b+5a^4b^2+20a^3b^3+5a^2b^4+6ab^5+b^6\\
&(a+b)^7 = a^7+7a^6b+2a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+2a^2b^5+7ab^6+b^7\\
&(a+b)^8 = a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8\\
&(a+b)^9 = a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+26a^5b^4+26a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9
\end{aligned}
\tag{10}
$$

1.10. Lecturas

1.10.1. Primates Count

Se creé que los animales tienen un sentido de los números debido al entrenamiento de diferentes animales, para reconocer números, en el caso de los chimpancés donde se les enseno por medio de una computadora debían reconocer un numero y oprimir el botón correspondiente al numero de plaťanos que quisiera obtener, esto pone una postura para que sean aceptados los animales como matemáticos.

1.10.2. Cicada-Generated Prime Numbers

Las cigarras tienen ciclos de vida de 13 o 17 anios(número primos) lo cual creen que les permite sobrevivir a los depredadores que tienen ciclos de vida de 2, 3 ,4 y 6, esto nos sugiere que las cigarras pudieron identificar los números primos como medio de supervivencia encontra de sus depredaros que tienen un ciclo de vida par.

1.10.3. Ant Odometer

Sugiere que las hormigas cuentan los pasos para poder regresar a su hormiguero, esto debido a experimentos realizados a hormigas donde les amputaban una pierna y estas no podían regresar mientras que a hormigas que se les había amputado una pierna y posteriormente les pusieron una prótesis estas pudieron regresar.

1.10.4. Quipu

Los quipus fueron utilizados por los incas como un medio para poder guardar un registro de diferentes actividades, a pesar de no tener una sistema de escritura.

1.10.5. Magic Squares

El cuadro mágico consiste en un cuadro donde cada una de las columas y filas al hacer la suma se obtiene el mismo número, este cuadro es originario de China.

1.10.6. Oveja Dolly

La oveja Dolly (5 de julio de 1996-14 de febrero de 2003) fue el primer mamífero clonado a partir de una célula adulta.
Dolly fue en realidad una oveja resultado de una combinación nuclear desde una célula donante diferenciada a un óvulo no fecundado y anucleado (sin núcleo). La célula de la que venía Dolly era una ya diferenciada o especializada, procedente de un tejido concreto, la glándula mamaria, de un animal adulto, lo cual suponía una novedad. Hasta ese momento se creía que sólo se podían obtener clones de una célula embrionaria, es decir, no especializada. Cinco meses después nacía Dolly, que fue el único cordero resultante de 277 fusiones de óvulos anucleados con núcleos de células mamarias.

1.10.7. Telomeros

Son los extremos de los cromosomas. Son regiones de ADN no codificante, altamente repetitivas, cuya funciún principal es la estabilidad estructural de los cromosomas en las cúlulas eucariotas, la divisiún celular y el tiempo de vida de las estirpes celulares.
Los telómeros se componen de cientos o miles de repeticiones de la misma secuencia corta de ADN, que varía entre organismos, pero en seres humanos y otros mamíferos.
Los telómeros necesitan protegerse de los sistemas de reparación del ADN de la célula porque tienen cadenas sobresalientes que parecen ADN daãdo. La cadena sobresaliente en el extremo de la cadena rezagada del cromosoma se debe a la replicación incompleta de los extremos. La parte sobresaliente en el extremo de la cadena líder del cromosoma se genera por enzimas que cortan y eliminan parte del ADN.
En algunas especies (como los seres humanos), las cadenas sobresalientes se unen a repeticiones complementarias en ADN de doble cadena cercano y causan que los extremos del telómero formen bucles protectores. Las proteínas asociadas a los extremos de los telómeros también ayudan a protegerlos y evitan que se activen vías de reparación del ADN.
Las repeticiones que componen un telómero se pierden lentamente después de muchos ciclos de división, y proporcionan un amortiguador que protege las regiones internas del cromosoma que contienen los genes (al menos por un periodo de tiempo). El acortamiento de los telómeros se ha relacionado con el envejecimiento celular y la pérdida progresiva de los telómeros podría explicar por qué las células solo pueden dividirse un cierto número de veces. Para mayor referencia ver [1]
Para mas lecturas relacionadas al tema [3]

2. Tecnicas de conteo

2.1. Principio Aditivo

Un suceso A se puede realizar de m maneras diferentes, y otro suceso B se puede realizar de n maneras diferentes, además, si ocurre uno no puede ocurrir el otro, el total de formas en que puede ocurrir A o B es $m+n$. Es decir, aquí ocurre A o ocurre B.

2.1.1. Ejemplo

Rafael desea ir a las Vegas o a Disneylandia en las próximas vacaciones de verano, para ir a las Vegas él tiene tres medios de transporte para ir de Chihuahua al Paso Texas y dos medios de transporte para ir del Paso a las Vegas, mientras que para ir del paso a Disneylandia él tiene cuatro diferentes medios de transporte, ¿Cuántas maneras diferentes tiene Rafael de ir a las Vegas o a Disneylandia?

$V =$ maneras de ir a las Vegas
$D =$ maneras de ir a Disneylandia
$V = 3 \times 2 = 6$ maneras
$D = 3 \times 4 = 12$ maneras
$V + D = 6 + 12 = 18$ maneras de ir a las Vegas o a Disneylandia

2.2. Principio Multiplicativo

Si un suceso se puede realizar de m formas diferentes y luego se puede realizar otro suceso de n formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir es igual a mxn. Es decir, ambos eventos se realizan, primero uno y luego el otro.

2.2.1. Ejemplo

Una persona desea construir su casa, para lo cual considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?
$N1$= maneras de hacer cimientos = 2
$N2$= maneras de construir paredes = 3
$N3$= maneras de hacer techos = 2
$N4$= maneras de hacer acabados = 1
$N1 \times N2 \times N3 \times N4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ maneras de construir la casa

3. Tensor de Levi-Civita

Forma generalizada del tensor de Levi-Civita. Eq.(11)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{+1 Si ijk provienen de una permutación par de (1,2,3)} \\ \text{-1 Si ijk provienen de una permutación impar de (1,2,3)} \\ \text{0 Si dos índices son iguales} \end{cases} \tag{11}$$

Se ilustrara su uso para el caso del producto cruz entre vectores.

$$(\bar{A} \times \bar{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{12}$$

Utilizaremos el producto vectorial de A y B como método de comprobación.

$$A \times B = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = [a_2b_3 - a_3b_2]\hat{i} + [a_1b_3 - a_3b_1]\hat{j} + [a_1b_2 - a_2b_1]\hat{k} \tag{13}$$

Pensemos en el caso de la componente j, lo que significa $i = 2$ en la Eq.(12)

$$(\bar{A} \times \bar{B})_i = \varepsilon_{2jk} A_j B_k$$

Aplicando convenio de suma sobre j

$$(\bar{A} \times \bar{B})_2 = \varepsilon_{21k} A_1 B_k + \varepsilon_{21k} A_2 B_k + \varepsilon_{22k} A_3 B_k$$

Aplicando ahora sobre k

$$\begin{aligned}(\bar{A} \times \bar{B})_2 = {} & \varepsilon_{211} A_1 B_1 + \varepsilon_{212} A_1 B_2 + \varepsilon_{213} A_1 B_3 \\ & + \varepsilon_{221} A_2 B_1 + \varepsilon_{222} A_2 B_2 + \varepsilon_{223} A_2 B_3 \\ & + \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{232} A_3 B_2 + \varepsilon_{233} A_3 B_3\end{aligned}$$

Considerando la definición del tensor de Levi-Civita eliminamos aquellos términos con índices repetidos

$$(\bar{A} \times \bar{B})_2 = \varepsilon_{213} A_1 B_3 + \varepsilon_{231} A_3 B_1$$

Ahora pensemos en el caso de la componente j donde $i = 1$.

$$(\bar{A} \times \bar{B})_i = \varepsilon_{1jk} A_j B_k$$

Aplicando convenio de suma sobre j

$$(\bar{A} \times \bar{B})_1 = \varepsilon_{11k} A_1 B_k + \varepsilon_{11k} A_2 B_k + \varepsilon_{12k} A_3 B_k$$

Aplicando ahora sobre k

$$\begin{aligned}(\bar{A} \times \bar{B})_1 = {} & \varepsilon_{111} A_1 B_1 + \varepsilon_{112} A_1 B_2 + \varepsilon_{113} A_1 B_3 \\ & + \varepsilon_{121} A_2 B_1 + \varepsilon_{122} A_2 B_2 + \varepsilon_{123} A_2 B_3 \\ & + \varepsilon_{131} A_3 B_1 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 + \varepsilon_{133} A_3 B_3\end{aligned}$$

Donde nos queda como resultado de eliminar las componentes con los mismo valores

$$(\bar{A} \times \bar{B})_1 = \varepsilon_{132} A_2 B_3 + \varepsilon_{123} A_3 B_2$$

Por ultimo pensemos en el caso donde $i = 3$

$$(\bar{A} \times \bar{B})_i = \varepsilon_{3jk} A_j B_k$$

Aplicando convenio de suma sobre j

$$(\bar{A} \times \bar{B})_3 = \varepsilon_{31k} A_1 B_k + \varepsilon_{31k} A_2 B_k + \varepsilon_{32k} A_3 B_k$$

Aplicando ahora sobre k

$$\begin{aligned}(\bar{A} \times \bar{B})_3 = {} & \varepsilon_{311} A_1 B_1 + \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{313} A_1 B_3 \\ & + \varepsilon_{321} A_2 B_1 + \varepsilon_{322} A_2 B_2 + \varepsilon_{323} A_2 B_3 \\ & + \varepsilon_{331} A_3 B_1 + \varepsilon_{332} A_3 B_2 + \varepsilon_{333} A_3 B_3\end{aligned}$$

Finalmente para nuestro ultimo caso me queda

$$(\bar{A} \times \bar{B})_3 = \varepsilon_{321} A_1 B_2 + \varepsilon_{312} A_2 B_1$$

Ahora es momento de asignar un símbolo a los elementos que se obtuvieron, para esto tenemos que observar cual es número de transiciones que se necesitan para llegar a la permutación.

Ejemplo: Tenemos los elementos 123 para llegar a 213 se necesitan cambiar el 1 por 2, por lo que se utilizo solo una transción para llegar a el. Sin en cambio para llegar a 312 se necesitan dos, cambiar el 1 por el 2, 213, y posteriormente 3 por 2, 312, para lo que se utilizaron dos cambios.

Utilizando el tensor de Lei-Civita podemos ver que para un número de transiciones impares se le asigna un signo negativo y para un número par un signo positivo. Finalmente nos quedaría como la siguiente Eq.(14). Esto lo podemos comprobar viendo los signos de las componentes que genera el producto cruz Eq(13).

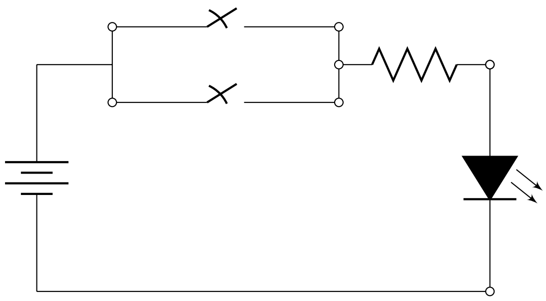
$$= A_3 B_1 - A_1 B_3 \tag{14}$$

Para la comprobación se utiliza el determinante,donde el indice que obtuvimos debe de coresponder con el del determinate.

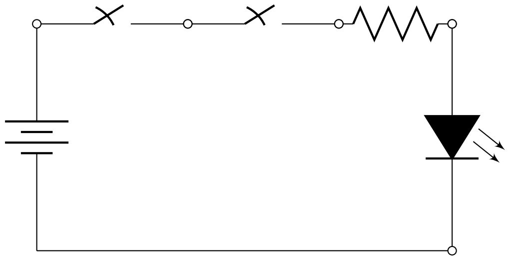
4. Compuertas lógicas

4.0.1. Compuerta Lógica OR

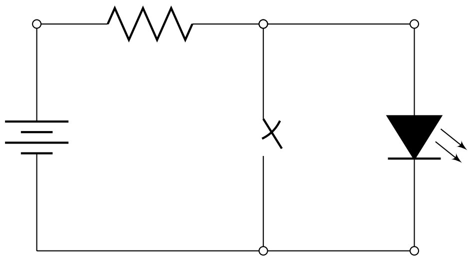
A continuación se ilustran algunas compuertas lógicas, las cuales nos permitirán comprender algunos conceptos sobre el comportamiento de conjuntos.



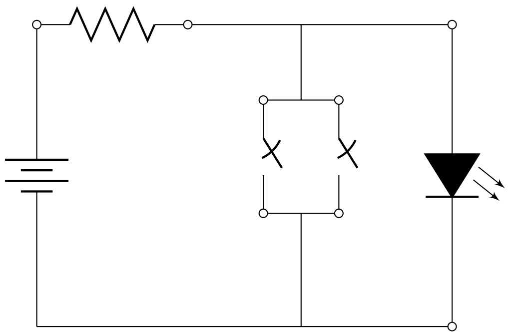
4.0.2. Compuerta Lógica AND



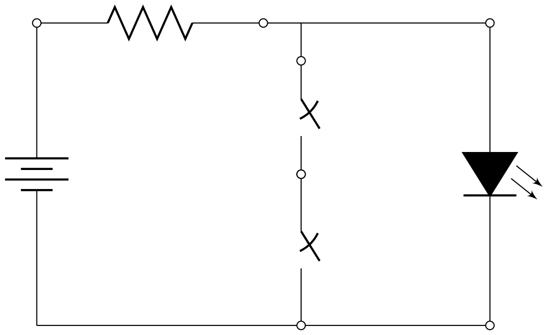
4.0.3. Compuerta Lógica NOT



4.0.4. Compuerta Lógica NOR



4.0.5. Compuerta Lógica NAND



5. Teoría de conjuntos

Cualquier lista bien definida o colección de objetos se llama conjunto; los objetos que componen el conjunto se llaman sus elementos o miembros

$$p \in A \text{ si p es un elemento en el conjunto A}$$

Si cada elemento de A también pertenece a un conjunto B. entonces A se llama un subconjunto de B o se dice que está contenido en B; esto se denota por

$$A \subset B \text{ o } B \subset A$$

Dos conjuntos son iguales si cada uno está contenido en el otro; es decir,

$$A = B \text{ si y solo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

La negacion de $p \in A$, $A \subset B$ y $A = B$ son escritas como $p \notin A, A \not\subset B$ y $A \neq B$ respectivamente.

Se utiliza $\emptyset$ tambien para denotar el conjunto vacío o nulo, es decir, el conjunto que no contiene elementos; este conjunto se considera como un subconjunto de cualquier otro conjunto $\emptyset \subset A$.

Supongamos que A y B sean conjuntos arbitrarios. La unión de A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Aquí o se usa en el sentido de y / o. La intersección de A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A y B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si $A \cup B = \emptyset$ es decir, si A y B no tienen elementos en común, entonces se dice que A y B son disjuntos.

La diferencia de A y B o el complemento relativo de B con respecto a A, denotado por $A \backslash B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B:

$$A \backslash B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

El complemento absoluto o, simplemente, el complemento de A, indicado por A^c , es el conjunto de elementos que no pertenecen a A:

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

A^c es la diferencia del conjunto universo y A.

Suponga que A y B sean dos conjuntos. El conjunto de productos de A y B, indicado por $A \times B$, consta de todos los pares ordenados (a, b)

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, x \in B\}$$

5.0.1. Identidades

A continuación se muestran las identidades de conjuntos

$$\begin{gathered}
\overline{S} = \emptyset \\
\overline{\emptyset} = S \\
\overline{A} = A \\
S \cup A = S \\
S \cap A = A \\
A \cup \overline{A} = S \\
S \cap A = \emptyset
\end{gathered}$$

Ley Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Ley Asociativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Ley Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ley De Morgan's

$$\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$$

5.1. Algebra de conjuntos

Considere las redes de conmutación que se muestran en la Fig(). Deje A_1, A_2 y A_3, denoten los eventos que los interruptores S_1, S_2 y S_3, están cerrados, respectivamente. A_{ab} denota el evento de que hay un camino cerrado entre las terminales a y b. Exprese A_{ab} en términos de A_1, A_2 y A_3 para cada una de las redes mostradas
De la Fig. (a), vemos que hay un camino cerrado entre a y b solo si todos los conmutadores S_1, S_2 y S_3, están cerrados. Así,

$$A_{ab} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

De la Fig. (b), vemos que hay un camino cerrado entre a y b si al menos un interruptor está cerrado. Así

$$A_{ab} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

De la Fig. (c), vemos que hay un camino cerrado entre a y b si s_1, y s_2, o s_3, están cerrados. Así,

$$A_{ab} = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

que indica que hay una ruta cerrada entre a y b si s_1, y s_2, o s_1, y s_3, están cerradas.
De la Fig. (d), vemos que hay un camino cerrado entre a y b si s_1, y s_2, están cerrados o s_3, está cerrado. Así

$$A_{ab} = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$$

5.1.1. Ejercicios

Ejercicio 1 $U = \{1, 2, \cdots, 8, 9\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\} C = \{3, 4, 5, 6\}$

i) $A^c = \{5, 6, 7, 8\}$

ii) $A \cap C = \{3, 4\}$

iii) $(A \cap C)^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

iv) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

v) $B \backslash C = \{2, 8\}$

Ejercicio 2 **Encuentre el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y el $\mathcal{P}(B)$ de $B = \{1, \{2, 3\}, 4\}$**
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2,$
$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, 1, \{2, 3\}, 4, \{1, \{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{\{2, 3\}, 4\}, \{1, \{2, 3\}, 4\}\}$

Ejercicio 3 **El espacio de muestra S de un experimento aleatorio está dado por $S = \{a, b, c, d\}$ con probabilidades $P(a) = 0{,}2, P(b) = 0{,}3, P(c) = 0{,}4 y P(d) = 0{,}1$. Deje A denotar el evento $\{a, b\}$, y B el evento $\{b, c, d\}$. Determine las siguientes probabilidades:**

a) $P(A) = P(a) + P(b) = {,}2 + {,}3 = {,}5$

b) $P(B) = P(b) + P(c) + P(d) = {,}3 + {,}4 + {,}1 = {,}8$

c) $\overline{A} = \{c, d\}; P(\overline{A}) = P(c) + P(d) = {,}4 + {,}1 = {,}5$

d) $A \cup B = \{a, b, c, d\} = S; P(A \cup B) = P(S) = 1$

e) $A \cap B = \{b\}; P(A \cap B) = P(b) = ,3$

Para mas ejercicios consultar [2]

5.2. Leyes de De Morgan

Son un par de reglas de transformación que son ambas reglas de inferencia válidas. Las normas permiten la expresión de las conjunciones y disyunciones puramente en términos de vía negación.

Las reglas se pueden expresar como:

- La negación de la conjunción es la disyunción de las negaciones. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- La negación de la disyunción es la conjunción de las negaciones.$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5.2.1. Definición Axiomática

Sea S un espacio de muestra finito y A sea un evento en S. Entonces, en la definición axiomática, la probabilidad $P(A)$ del evento A es un número real asignado a A que cumple los siguientes tres axiomas:

Axioma 1: $P(A) \leq 0$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

Si el espacio de muestra S no es finito, entonces el axioma 3 se debe modificar de la siguiente manera: Si $A_1, A_2,$ ă $\cdots$ es una secuencia infinita de eventos mutuamente exclusivos en $S(A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j)$ entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

5.2.2. Propiedades elementales de Probabilidad

Al usar los axiomas anteriores, se pueden obtener las siguientes propiedades útiles de probabilidad:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son n eventos arbitrarios en S entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

7. Si $A_1, A_2,$ ă $\cdots, A_n$ es una secuencia infinita de eventos mutuamente exclusivos en $S (A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j)$ entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

donde la suma del segundo término está sobre todos los pares distintos de eventos, la del tercer término está sobre todos los triples diferentes de eventos, y así sucesivamente.

5.3. Probabilidad Condicional

La probabilidad condicional de un evento A dado un evento B, denotado por $P(A \mid B)$ es definida como:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{Número de maneras en que A y B pueden ocurrir}}{\text{Número de maneras en que B puede ocurrir}}$$

o

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

Donde $P(A \cap B)$ es la probabilidad conjunta de A y B. Similarmente,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A) > 0$$

es la probabilidad condicional de un evento B dado un evento A. Tenemos

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A) \tag{15}$$

a menudo es bastante útil para calcular la probabilidad conjunta de eventos. Podemos obtener a partir de la Eq(15) la siguiente regla de Bayes.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

5.3.1. Ejercicios

Ejercicio 1. **Dos plantas de fabricación producen partes similares. La planta 1 produce 1,000 partes, 100 de las cuales son defectuosas. La planta 2 produce 2,000 partes, 150 de las cuales son defectuosas. Una parte se selecciona al azar y se encuentra defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la planta 1?**

Sea B el evento de que la pieza seleccionada es defectuosa, y sea A el evento la pieza seleccionada provenga de la planta 1. A continuación, $A \cap B$ es el evento en el que el artículo seleccionado es defectuoso y proviene de la planta 1. Como una parte se selecciona al azar, asumimos eventos igualmente probables

$$P(A \cap B) = \frac{100}{3000} = \frac{1}{30}$$

Del mismo modo, dado que hay 3000 partes y 250 de ellas son defectuosas, tenemos

$$P(B) = \frac{250}{3000} = \frac{1}{12}$$

la probabilidad de que la parte provenga de la planta 1 es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ejercicio 2. **Un experimento consiste en observar la suma de los dados cuando se lanzan dos dados. Encuentre (a) la probabilidad de que la suma sea 7 y (b) la probabilidad de que la suma sea mayor que 10.**

Deje ζ_{ij} denotar el evento elemental (punto de muestreo) que consiste en el siguiente resultado: $\zeta_{ij} = (i, j)$, donde i representa el número que aparece en un dado y j representa el número que aparece en el otro dado. Dado que los dados son justos, todos los resultados son igualmente probables. Entonces $P(\zeta_{ij}) = \frac{1}{36}$. Deje A denotar el evento de que la suma es 7. Como los eventos ζ_{ij} son mutuamente excluyentes, tenemos

$$\begin{aligned} P(A) &= (\zeta_{16} \cup \zeta_{25} \cup \zeta_{34} \cup \zeta_{43} \cup \zeta_{52} \cup \zeta_{61}) \\ &= P(\zeta_{16}) + P(\zeta_{25}) + P(\zeta_{34}) + P(\zeta_{43}) + P(\zeta_{52}) + P(\zeta_{61}) = 6(\frac{1}{36}) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Deje que B denote el evento de que la suma es mayor que 10. Tenemos

$$\begin{aligned} P(B) &= (\zeta_{56} \cup \zeta_{65} \cup \zeta_{66}) \\ &= 3(\frac{1}{36}) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. **Una gran cantidad de 100 chips semiconductores contiene 20 defectuosos. Se seleccionan dos fichas al azar, sin reemplazo, del lote.**

- ¿Cuál es la probabilidad de que el primero seleccionado sea defectuoso?
  $P(A) = \frac{20}{100} = 0{,}2$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo seleccionado sea defectuoso dado que el primero fue defectuoso?
  $P(A \mid B) = \frac{19}{99} = 0{,}192$
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?
  $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = (\frac{19}{99})(0{,}2) = 0{,}0384$

Ejercicio 4. **Se sabe que el 50 % de la población fuma y que el 10 % fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?**
Evento A ser hipertenso
Evento B ser fumador $P(B) = 0{,}5$
$P(A \cap B) = 0{,}1$
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}50} = 0{,}2$

Ejercicio 5. **Un operario tiene una probabilidad de 0.7 de ser cambiado de seccion, y la probabilidad de ser ascendido y cambiado es de 0.6.**

- La probabilidad de ser ascendido, en el supuesto de que haya sido cambiado de seccion
  Evento A ser ascendido
  Evento B se pueda cambiar
  $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}6}{0{,}7} = 0{,}857$

Ejercicio 6. **En una clase de 25 alumnos, 14 son aficionados al fútbol, 9 al baloncesto y 5 a ambos deportes. Si se elige un alumno al azar**
Evento A sea aficionado al futbol $P(A) = \frac{5}{25}$
Evento B sea aficionado al baloncesto $P(B) = \frac{9}{25}$
Evento C sea aficionado a ambos deportes

- Calcular la probabilidad de que sea aficionado al fútbol, sabiendo que es aficionado al baloncesto.
  $P(A \cap B) = P(C) = \frac{5}{25} = 0{,}2$
  $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}36}$

Ejercicio 7. **Un profesor tiene en su mesa de escritorio dos cajones. En uno contiene 7 bolígrafos azules y 2 rojos. En el otro cajón tiene 3 azules y 5 rojos. Si extrae un bolígrafo azul, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del segundo cajón?**
Evento A elegir el segundo cajon
Evento B sacar un boligrafo azul
$P(B) = \frac{10}{17} = 0{,}58$
$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,58}$

Ejercicio 8. **Una urna contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules; si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que**

- Las 3 bolas sean rojas
  $P(A) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = ,4 \cdot ,36 \cdot ,33 = 0,048$

5.4. Teorema de multiplicación para probabilidad condicional

Haciendo uso de la Eq.(15) y extendiéndolo por inducción para cualquier evento $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_1 \mid A_2 \cap A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ejercicio 1. **Un lote contiene 12 artículos, de los cuales 4 son defectuosos. Tres elementos se dibujan al azar del lote uno después del otro. Encuentre la probabilidad p de que los tres no sean defectuosos.** La probabilidad de que el primer artículo no sea defectuoso es de $\frac{8}{12}$ ya que 8 de los 12 elementos no son defectuosos. Si el primer elemento no es defectuoso, entonces la probabilidad de que el siguiente artículo no sea defectuoso es $\frac{7}{11}$ ya que solo 7 de los 11 ítems restantes no son defectuosos. Si los dos primeros elementos no son defectuosos, entonces la probabilidad de que el último elemento no sea defectuoso es $\frac{6}{10}$, ya que solo 6 de los 10 elementos restantes ahora no son defectuosos. Por el teorema de la multiplicación:

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

Ejercicio 2. **Una cene 12 niños y 4 niñas. Si se seleccionan tres estudiantes al azar de la clase, ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean niáos?**

$$p = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

Ejercicio 3. **A un hombre se le reparten 5 cartas una tras otra de una baraja ordinaria de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean picas?**

$$p = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66640}$$

Ejercicio 4. **Una urna contiene 7 canicas rojas y 3 canicas blancas. Tres canicas se extraen de la urna una tras otra. Encuentra la probabilidad p de que los dos primeros sean rojos y el tercero sea blanco.**

$$p = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

Ejercicio 5. **Los estudiantes en una clase son seleccionados al azar, uno después del otro, para un examen. Encuentre la probabilidad p de que los niños y niñas de la clase alternen si (i) la clase consiste en 4 niños y 3 niñas, (ii) la clase consiste en 3 ni´ nos y 3 niñas.**

I.
$$p = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

II. Existen dos casos mutuamente excluyentes, donde el primero es un niño (p_1) y otro donde primero es una niña (p_2)

$$p_1 = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$
$$p_2 = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$
$$p = p_1 + p_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$$

5.5. Regla de Bayes

Supongamos que $A_1, A_2, ..., A_n$ son eventos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio de muestra S, es decir, uno de los eventos debe ocurrir. Entonces, si A es cualquier evento, tenemos el teorema importante de la regla de Bayes.

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k)P(A \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid A_j)}$$

Esto nos permite encontrar las probabilidades de los diversos eventos $A1, A2, ..., An$ que pueden ocurrir. Por esta razón, el teorema de Bayes a menudo se conoce como un teorema sobre la probabilidad de las causas.

1. Una persona es diagnosticada con una enfermedad poco común. Se sabe que hay una posibilidad de 1 % de contraer la enfermedad. Se denota con la letra D al evento de contraer la enfermedad y al evento T por un resultado positivo en la prueba. Se sabe que la prueba es imperfecta por lo que $P(T \mid D) = 0{,}98$ y $P(T \mid \overline{D}) = 0{,}05$. Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿ Cuál es la probabilidad de que la persona realmente tenga la enfermedad?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cup D) + P(T \cup \overline{D}) \\ &= P(T \mid D) \cdot P(D) + P(T \mid \overline{D}) \cdot P(\overline{D}) \\ &= 0{,}98 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99 = 0{,}0593 \\ P(D \mid T) &= \frac{P(T \mid D) \cdot P(D)}{P(T)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}01}{0{,}0593} = 0{,}16526 \end{aligned}$$

5.6. Probabilidad Total

Los eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son llamados mutuamente excluyentes y exhaustivos si

$$\bigcup_{i=1}^{n} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \; i \neq j$$

Sea B cualquier evento en S, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i) \tag{16}$$

la cual se conoce como la probabilidad total del evento B. Sea $A = A_i$ en Eq(15) entonces utilizamos la Eq(16) obtenemos

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)} \tag{17}$$

Tenga en cuenta que los términos en el lado derecho están todos condicionados a los eventos A_i, mientras que el término de la izquierda está condicionado a B. Eq(17) a veces se denomina teorema de Bayes.

5.7. Procesos estocásticos finitos y diagramas de arboles

Consiste en una secuencia (finita) de experimentos en la que cada experimento tiene un número finito de resultados con probabilidades dadas se denomina proceso estocástico finito. Una forma conveniente de describir tal proceso y calcular la probabilidad de cualquier evento es mediante un diagrama de árbol; el teorema de multiplicaciónes utilizado para calcular la probabilidad de que ocurra el resultado representado por cualquier camino dado del árbol.
Nos dan tres cajas de la siguiente manera:

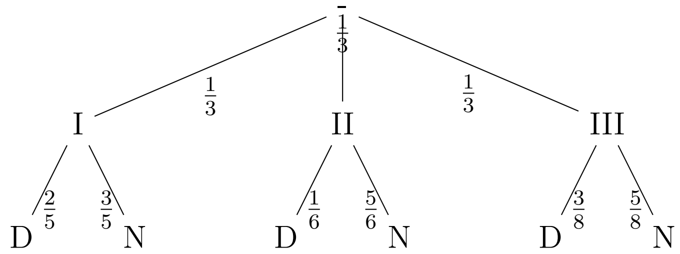
- La caja *i* tiene 10 bombillas de las cuales 4 son defectuosas.
- La caja *ii* tiene 6 bombillas, de las cuales 1 es defectuosa.
- La caja *iii* tiene 8 bombillas, de las cuales 3 son defectuosas.

Seleccionamos una caja al azar y luego elejimos una bombilla al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bombilla sea defectuosa? Aquí realizamos una secuencia de dos experimentos:

I seleccione uno de las tres cajas

II seleccione una bombilla que sea defectuosa (D) o no defectuosa (N).

El siguiente diagrama de árbol describe este proceso y proporciona la probabilidad de cada rama del árbol:

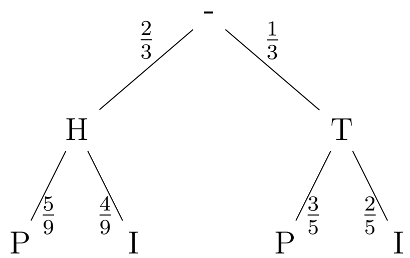


La probabilidad de que ocurra una ruta particular del árbol es, mediante el teorema de la multiplicación, el producto de las probabilidades de cada rama de la ruta, por ejemplo, la probabilidad de seleccionar la caja I y luego una bombilla defectuosa $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$.

Ahora bien, dado que hay tres rutas mutuamente excluyentes que conducen a una bombilla defectuosa, la suma de las probabilidades de estas rutas es la probabilidad requerida:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

Una moneda, ponderada de modo que $P(H) = \frac{2}{3}$ y $P(T) = \frac{1}{3}$, se lanza. Si aparece la cara, se selecciona un número al azar de los números del 1 al 9; si aparece la cruz, se selecciona un número al azar de los números del 1 al 6. Encuentra la probabilidad p de que se seleccione un número par.



Tenga en cuenta que la probabilidad de seleccionar un número par de los números del 1 al 9 es $\frac{4}{9}$ ya que hay 4 números pares de los 9 números, mientras que la probabilidad de seleccionar un número par de los números del 1 al 5 es $\frac{2}{5}$ ya que hay 2 números pares de los 5 números. Dos de los caminos conducen a un número par: HE y TE. Así

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{58}{135}$$

5.8. Independencia

Se dice que un evento B es independiente de un evento A si la probabilidad de que B ocurra no está influenciada por A si ocurre o no ha ocurrido. En otras palabras, si la probabilidad de B es igual a la probabilidad condicional de B dado A : $P(B) = P(B \mid A)$. Ahora sustituyendo $P(B)$ por $P(B \mid A)$ en el teorema de multiplicaciones $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$, obtenemos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Usamos la ecuación anterior como nuestra definición formal de independencia. Los eventos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; de lo contrario, son dependientes.

1. Deje una moneda ser lanzada tres veces; obtenemos el espacio equiprobable

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

Considerando los eventos: $A = \{\text{Primer lanzamiento es cara}\}$, $B = \{\text{Segundo lanzamiento es cara}\}$ $C = \{\text{exactamente dos caras se arrojan en una fila}\}$

Claramente, A y B son eventos independientes; este hecho se verifica a continuación. Por otro lado, la relación entre A y C o B y C no es obvia. Reclamamos que A y C son independientes, pero que B y C son dependientes. Tenemos

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\{HHH, HHT, HTH, HTT\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\
P(B) &= P(\{HHH, HHT, THH, THT\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\
P(C) &= P(\{HHT, THH\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(\{HHH, HHT\}) = \frac{1}{4} \\
P(A \cap C) &= P(\{HHT\}) = \frac{1}{8} \\
P(B \cap C) &= P(\{HHT, THH\}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
P(A)P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} P(A \cap B) \\
P(A)P(C) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} P(A \cap C) \\
P(B)P(C) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C)
\end{aligned}$$

Con frecuencia, postularemos que dos eventos son independientes, o de la naturaleza del experimento quedará claro que dos eventos son independientes.

6. Descripción del programa de permutaciones

6.1. Introducción a la complejidad algorítmica

La eficiencia algorítmica o complejidad algorítmica es usado para describir aquellas propiedades de los algoritmos que están relacionadas con la cantidad de recursos utilizados por el algoritmo. Un algoritmo debe ser analizado para determinar el uso de los recursos que realiza. Sin embargo, varias medidas (e.g. complejidad temporal, complejidad espacial) no pueden ser comparadas directamente, luego, cual de dos algoritmos es considerado más eficiente, depende de cual medida de eficiencia se está considerando como prioridad, e.g. la prioridad podría ser obtener la salida del algoritmo lo más rápido posible, o que minimice el uso de la memoria, o alguna otra medida particular.

En el estudio teórico de un algoritmo, lo normal es estimar su complejidad de forma asintótica, i.e. usar notación O grande para representar la complejidad de un algoritmo como una función que depende del tamaño de la entrada n, esto es generalmente acertado cuando n es lo suficientemente grande, pero para n pequeños podría ser erróneo.

Algunos ejemplos de notación de O grande incluyen:

Notación	Nombre	Ejemplos
$O(1)$	constante	Determinar si un número es par o impar. Usar una tabla de consulta que asocia constante/tamaño. Usar una función hash para obtener un elemento.
$O(logn)$	logarítmico	Buscar un elemento específico en un array utilizando un árbol binario de búsqueda o un árbol de búsqueda balanceado, así como todas las operaciones en un Heap binomial.
$O(n)$	lineal	Buscar un elemento específico en una lista desordenada o en un árbol degenerado (peor caso).
$O(nlogn)$	oglinear o quasilinear	Ejecutar una transformada rápida de Fourier; heapsort, quicksort (caso peor y promedio), o merge sort
$O(n^2)$	cuadrático	Multiplicar dos números de n dígitos por un algoritmo simple. bubble sort (caso peor o implementación sencilla), Shell sort, quicksort (caso peor).
$O(c^n), c > 1$	exponencial	Encontrar la solución exacta al problema del viajante utilizando programación dinámica. Determinar si dos sentencias lógicas son equivalentes utilizando una búsqueda por fuerza bruta

6.2. Funciones importantes del programa

La función de callPermutacuines dependiendo del numero de variables decide si hace la llamada a la función permutacionesPorNumero debido a que, si el numero de variables es igual a 1, numero de elementos con los que se desea realizar permutaciones, solo se imprimen los elementos del conjunto original y si es mayor se realiza la llamada al método antes mencionado.

```
def callPermutaciones(conjuntoOriginal, variables):
    print("Las permutaciones con %d variable(s) son:" %variables)
    if variables == 1:
        for x in xrange(0,len(conjuntoOriginal)):
            print(conjuntoOriginal[x])
    else:
        permutacionesPorNumero(conjuntoOriginal, None, 0, variables)
```

Figura 2: funcion callPermutaciones.

La funcion getElementosDisponibles nos regresa un arreglo en el cual se van descartando los elementos con los que se han trabajado anteriormente, esto debido a que no se requieren elementos repetidos dentro de una permutacion.

```
def getElementosDisponibles(elementoExcluido, elementos):
    aux = []
    if len(elementos) > 1:
        for y in xrange(0,len(elementos)):
            if elementoExcluido != elementos[y]:
                aux.append(elementos[y])
    return aux
```

Figura 3: funcion getElementosDisponibles.

En la función permutacionesPorElementos es donde se realizan la concatenación de los elementos que estarán conformando las permutaciones, se recibe un carácter el cual se concatenara con los elementos que se obtuvieron de la llamada a la función getElementosDisponibles.

```
def permutacionPorElementos(elemento, elementosDisponibles, nivel):
    aux = []
    for x in xrange(0,len(elementosDisponibles)):
        if len(elemento) == nivel:
            print(''.join(elemento)+''.join(elementosDisponibles[x]))

        aux.append(''.join(elemento)+''.join(elementosDisponibles[x]))
    return aux
```

Figura 4: funcion permutacionesPorElementos.

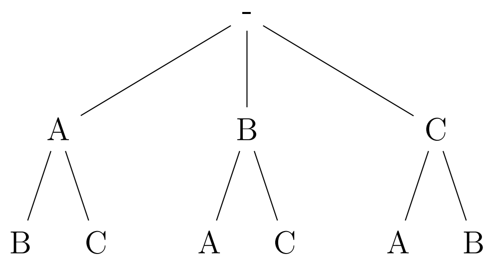
Por ultimo tenemos la función permutacionesPorNumero es una función recursiva que realiza las llamadas a las funciones getElementosDisponibles y permutacionesPorElementos, lo que hace esta función es irse llamando así misma las veces que sea necesaria hasta que todos los elementos del conjunto hayan sido concatenados.

```
def permutacionesPorNumero(conjunto, elementosDisponibles, iteracion, elementos):
    aux = []
    auxPerm = []
    i = iteracion + 1
    if i<elementos:
        for x in xrange(0,len(conjunto)):
            if elementosDisponibles is None:
                aux = getElementosDisponibles(conjunto[x], conjunto)
            else:
                aux = getElementosDisponibles(elementosDisponibles[x], elementosDisponibles)

            permutacionesPorNumero(permutacionPorElementos(conjunto[x], aux, elementos-1), aux, i, elementos)
```

Figura 5: funcion permutacionesPorNumero.

Ejemplo de un árbol para permutaciones para 2 elementos dentro de un conjunto de 3 elementos



Ejemplo de una entrada del programa.

```
***************************************************************************
****** A elegido introducir los elementos del conjunto manualmente ******
***************************************************************************
Introduzca el numero de elementos que tiene el conjunto original: 3
Introducir el numero de variables a elegir: 2
Introduzca el elemento 0 :A
Introduzca el elemento 1 :B
Introduzca el elemento 2 :C
Las permutaciones con 2 variable(s) son:
AB
AC
BA
BC
CA
CB
```

Figura 6: Entrada y salida del programa.

7. Valores y vectores propios

los vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio, eigenespacio o subespacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

Formalmente, se definen los vectores propios y valores propios de la siguiente manera: Sea $A : V \to V$ un operador lineal en un cierto K-espacio vectorial V y v un vector no nulo en V. Si existe un escalar c tal que

$$\mathbf{Av} = c\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \qquad c \in K,$$

entonces decimos que v es un vector propio del operador A, y su valor propio asociado es c. Observe que si v es un vector propio con el valor propio c entonces cualquier múltiplo diferente de cero de v es también un vector propio con el valor propio c. De hecho, todos los vectores propios con el valor propio asociado c junto con 0, forman un subespacio de V, el espacio propio para el valor propio c.

Una vez que se conocen los valores propios λ, los vectores propios se pueden hallar resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Una forma más sencilla de obtener vectores propios sin resolver un sistema de ecuaciones lineales se basa en el teorema de Cayley-Hamilton que establece que cada matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Así, si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A se cumple que

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_n I) = 0$$

por lo que los vectores columna de $(A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_n I)$ son vectores propios de λ_1.

Ejemplo 1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$
$$|A - \lambda I| = | \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} |$$
$$|A - \lambda I| = | \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} |$$
$$|A - \lambda I| = | \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$
$$|A - \lambda I| = | \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} | = (4-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(-6)$$

Desarrollando la multiplicación obtenemos el polinomio característico

$$|A-\lambda I| = (4-\lambda)(-3-\lambda)-(1)(-6) = \lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \quad (18)$$

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ entonces $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$, sustituimos dentro del polinimo caracteristico

Ahora por medio del convenio de suma vamos a obtener A^2

$$\begin{aligned}
&(ab)_{ij} = a_{ik}b_{kj} \\
&a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (4 \cdot 4) + ((1)(-6)) = 10 \\
&a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = (4 \cdot 1) + ((1)(-3)) = 1 \\
&a_{2k}b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = ((-6)(4)) + ((-3)(-6)) = -6 \\
&a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = ((-6)(1)) + ((-3)(-3)) = 3 \\
&A^2 = \begin{bmatrix} a1b1 & a1b2 \\ a2b1 & a2b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el polinomio caracteristico λ por A podemos comprobar el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Vamos a sustituir λ por alguno de los valores que obtuvimos dentro de la Eq(18), en este caso por 3. $|A - \lambda I| = 0$ a lo que nos queda:

$$\begin{aligned}
&(A - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&\left(\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} x + y \\ -6x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&x + y = 0 \Rightarrow -x = y \\
&\text{Si } \lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora hay que sustituir λ por 2

$$\begin{aligned}
&(A - (-2)I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&\left(\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \\
&6x + y = 0 \Rightarrow x\frac{-y}{6} \\
&\text{Si } \lambda_2 = \text{-2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ \frac{-x}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7.1. Teorema de Cayley-Hamilton

En álgebra lineal, el teorema de Cayley-Hamilton asegura que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo cualquiera anula su propio polinomio característico.

En términos matriciales, eso significa que :

si A es una matriz cuadrada de orden n y si

$$p(X) = \det(XI_n - A) = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \ldots + p_1 X + p_0$$

es su polinomio característico (polinomio de indeterminada X), entonces al sustituir formalmente X por la matriz A en el polinomio, el resultado es la matriz nula:

$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \ldots + p_1 A + p_0 I_n = 0_n.$$

8. Fórmula de Stirling

La fórmula de Stirling es una aproximación para factoriales grandes. La aproximación se expresa como $\ln n! \approx n \ln n - n$ para n suficientemente grande, donde ln es el logaritmo natural.

La fórmula de Stirling está dada por:
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ que se reescribe frecuentemente como:
$n! \approx \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n$ más exactamente la fórmula es como sigue:
$n! = \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots}$
donde el último término del producto(la exponencial) tiende a 1 cuando n tiende a infinito.
La lista de los numeradores es: 1, -1, 1, -1, 1, -691, 1, -3617, 43867, -174611, ...
La lista de los denominadores es: 12, 360, 1260, 1680, 1188, 360360, 156, 122400, 244188, 125400, ...
Desarrollando este último término también se puede reescribir la fórmula como:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right).$$

Una acotación de la fórmula es:

$$\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

Por ejemplo:

$$29! = 8841761993739701954543616000000$$

$$e^{\frac{1}{12\ 29+1}} = 1,002869438...$$

$$e^{\frac{1}{12\ 29}} = 1,002877696...$$

$$29! = \sqrt{2\pi 29}\ \left(\frac{29}{e}\right)^{29} 1,002877577...$$

9. Tipos de promedio

El promedio, también llamado la media aritmética, es la suma de un conjunto de valores dividido por el número de valores. El promedio (media aritmética) de los valores 8, 16, 4, 12 y 10 se encuentra al encontrar la suma de SUM = 8 + 16 + 4 + 12 + 10 = 50 y dividiendola por el numero de valores N = 5

$$Promedio = \frac{SUM}{N} = \frac{50}{5} = 10$$

La moda de un conjunto de valores es el valor que ocurre con mayor frecuencia. Si todos los valores ocurren la misma cantidad de veces, no hay moda. Si dos o más valores ocurren con la mayor frecuencia, entonces cada uno de los valores es un moda.

La mediana es el valor medio, o el promedio de los dos valores medios, cuando los valores están ordenados de menor a mayor. La mediana de 1, 3, 4, 7, 10 es 4 ya que es el valor medio en los valores ordenados. La mediana de 1, 3, 4, 7, 10, 20 es el promedio de los dos valores medios 4 y 7, $\frac{4+7}{2} = 5{,}5$

El rango es la forma más fácil de describir cómo se extiende un conjunto de datos. Para calcular el rango, R, reste el valor más pequeño, Min, del valor máximo, Máx. Por lo tanto, R = Max - Min.

La desviación estándar es otra forma de ver cómo se diseminan los valores. Se centra en cuánto difieren los valores de la media. Para calcular la desviación estándar, SD, encuentre la diferencia entre cada puntaje y la media (AVE) y cuadre la diferencia. Luego calcule la suma de todas estas diferencias cuadradas (Suma Sq), divídalas por el número (NUM) de valores, y, finalmente, encuentre la raíz cuadrada de ese cociente.

$$SD = \sqrt{\frac{SumaSq}{NUM}} = \sqrt{\frac{Suma(X - AVE)^2}{NUM}}$$

9.1. Cuartil

Los cuartiles son los tres valores que dividen un conjunto de datos ordenados en cuatro partes porcentualmente iguales. La diferencia entre el tercer cuartil y el primero se conoce como rango intercuartílico. Se representa gráficamente como la anchura de las cajas en los llamados diagramas de cajas.

Dada una serie de valores $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ ordenados en forma creciente, podemos pensar que su cálculo podría efectuarse:

- Primer cuartil (Q_1) como la mediana de la primera mitad de valores.
- Segundo cuartil (Q_2) como la propia mediana de la serie.

- Tercer cuartil (Q_3) como la mediana de la segunda mitad de valores.

9.2. Decil

se refiere a cada uno de los 9 valores que dividen un grupo de datos (clasificados con una relación de orden) en diez partes iguales, y de manera que cada parte representa un décimo de la población. En resumen, los deciles son cada uno de los nueve valores que dividen un conjunto de datos en diez grupos con iguales efectivos. Son los nueve valores que dividen la serie de datos en diez partes.

- El primer decil separe el juego de datos entre el 10 % de los valores inferiores, y el resto de los datos.
- Y el noveno decil separe los datos entre el 90 % de los valores inferiores y el 10 % de los valores superiores.

El término decil también se usa para designar cada uno de los diez grupos de valores (de la población o de una muestra) y también, a los diez intervalos que contienen el mismo número de datos: el decil n-simo, es el intervalo entre el decil-número (n-1) y el decil-número n (desde n=1 hasta n=10).

9.3. Diagrama de caja

Es un gráfico que está basado en cuartiles y mediante el cual se visualiza la distribución de un conjunto de datos.Es un gráfico que suministra información sobre los valores mínimo y máximo, los cuartiles Q_1, Q_2 o mediana y Q_3, y sobre la existencia de valores atípicos y la simetría de la distribución. Primero es necesario encontrar la mediana para luego encontrar los 2 cuartiles restantes.

Valores atípicos
Los valores atípicos son aquellos mucho más grandes o mucho más pequeños que el resto de los datos. Se representan con un punto en cualquier extremo del diagrama.

Para ser considerado un valor atípico, el valor debe ser:

mayor que Q3 por, al menos, 1.5 veces el rango intercuartil (IQR), ó menor que Q1 por, al menos, 1.5 veces el IQR.

Los valores atípicos son aquellos que:

1.5(IQR) >Q3
1.5(IQR) <Q1

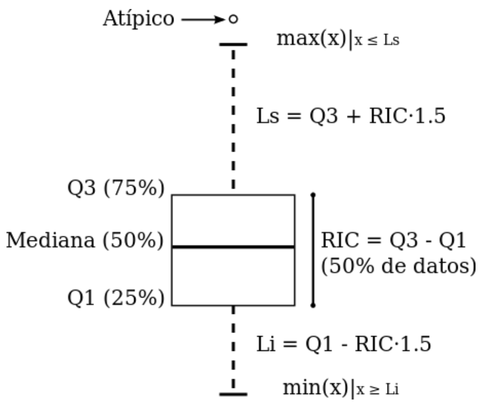


Figura 7: Diagrama de caja.

Ejemplo 1. Comencemos haciendo un diagrama de caja de la puntuación en el examen de geometría: 90, 94, 53, 68, 79, 84, 87, 72, 70, 69, 65, 89, 85, 83, 72

Paso 1. Ordena los datos de menor a mayor 53, 65, 68, 69, 70, 72, 72, 79, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 94

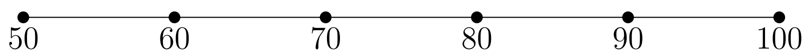
Paso 2. Encuentra la mediana de los datos, tambien llamado cuartil 2 (Q2)

Paso 3. Encuentra la mediana de los datos menores que Q2, este sería el cuartil menor (Q1).

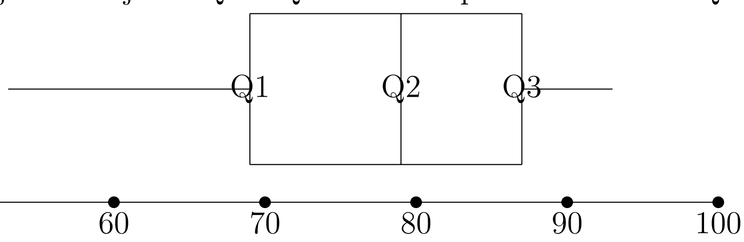
Paso 4. Encuentra la mediana de la data mayor que Q2, este sería el cuartil mayor (Q3).
53, 65, 68, **Q1(69)**, 70, 72, 72 **Q2(79)**, 83, 84, 85, **Q3(87)**, 89, 90, 94

Paso 5. Encuentra los valores extremos. Estos serían los valores más grandes y más pequeños. Valores extremos = 53 y 94.
53, 65, 68, 69, 70, 72, 72, 79, 83, 84, 85, 87, 89, 90, **94**

Paso 6. Crea una recta real que contenga todos los datos.



Paso 7. dibuja una caja de Q1 a Q3 divididas por una recta en Q2.



Ejemplo 2. Estos son los resultados individuales finales de salto de esquí masculino de los Juegos Olímpicos de invierno. 283.6, 269.4, 262.2, 261.1, 246.7, 245.5, 239.2, 233.7, 230.3, 227.9, 226.4, 225.5 224.1, 223.6, 222.3, 221.4, 217.8, 217.2, 216.9, 211.6, 211.4, 208.5, 204.9, 202.7, 202.4, 200.5, 198.5, 182.4, 111

Los cuartiles quedan así: Q1 sería 208.5, Q2 sería 222.3 y Q3 sería 236.45. La puntuación más baja (111) parece ser un valor atípico, ya que es mucho más pequeña que el resto de los datos. Sin embargo, no podemos estar seguros hasta que saquemos las cuentas.

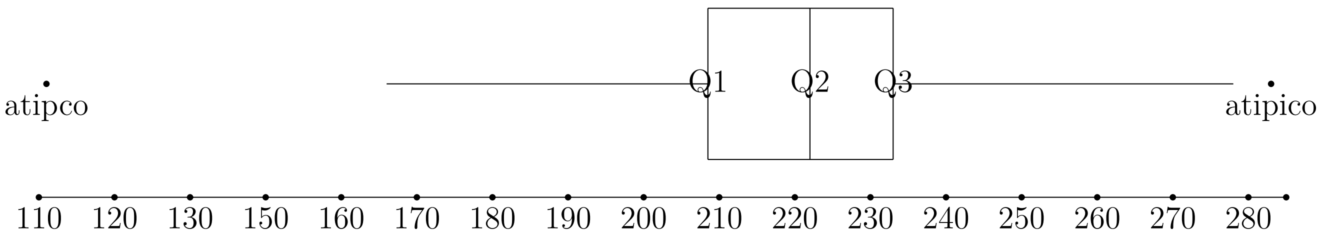
Primero debemos calcular el IQR, que es Q3 - Q1. Luego lo multiplicamos por 1.5 para obtener el número que necesitamos para saber si hay algún valor atípico.

$$\begin{aligned}
&IQR = 236{,}45 - 208{,}50 = 27{,}95 \\
&1{,}5(IQR) = 1{,}5(27{,}95) = 41{,}93 \\
&208{,}5 - 41{,}93 = 166{,}57
\end{aligned}$$

Para que el número en cuestión (111) califique como un valor atípico, debe ser menor a 166.57, que es la diferencia entre Q1 (208.5) y 41.93. Podemos verificar que no haya ningún valor atípico hacia la mitad mayor de los datos.

$$236{,}45 + 41{,}93 = 278{,}38$$

Hay un valor cerca de 278.38, así que éste también es un valor atípico.



10. Asimetría estadística (Skewness) y Curtosis (Kurtosis)

10.1. Asimetría estadística (Skewness)

Las medidas de asimetría son indicadores que permiten establecer el grado de simetría (o asimetría) que presenta una distribución de probabilidad de una variable aleatoria sin tener que hacer su representación gráfica. Como eje de simetría consideramos una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por la media de la distribución. Si una distribución es simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo. Decimos que hay asimetría positiva (o a la derecha) si la cola a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si hay valores más separados de la media a la derecha. Diremos que hay asimetría negativa (o a la izquierda) si la cola a la izquierda de la media es más larga que la de la derecha, es decir, si hay valores más separados de la media a la izquierda.

La medida de asimetría más utilizada parte del uso del tercer momento estándar. La razón de esto es que nos interesa mantener el signo de las desviaciones con respecto a la media, para obtener si son mayores las que ocurren a la derecha de la media que las de la izquierda.

10.2. Coeficiente de Asimetría de Fisher

El coeficiente de asimetría de Fisher, representado por γ_1, se define como:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

donde μ_3 es el tercer momento en torno a la media y σ es la desviación estándar.

- Si $\gamma_1 > 0$, la distribución es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si $\gamma_1 < 0$, la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda.

Si la distribución es simétrica, entonces sabemos que $\gamma_1 = 0$. El recíproco no es cierto: es un error común asegurar que si $\gamma_1 = 0$ entonces la distribución es simétrica (lo cual es falso).

10.3. Coeficiente de Asimetría de Pearson

Sólo se puede utilizar en distribuciones uniformes, unimodales y moderadamente asimétricas. Se basa en distribuciones simétricas la media de la distribución es igual a la moda.

$$A_p = \frac{\mu - moda}{\sigma}$$

donde μ es el momento ordinario de orden 1, que corresponde a la media aritmética de la variable X.
Si la distribución es simétrica, $\mu = moda$ y $A_p = 0$. Si la distribución es asimétrica positiva la media se sitúa por encima de la moda y, por tanto, $A_p > 0$.

10.4. Coeficiente de Asimetría de Bowley-Yule

Está basado en la posición de los cuartiles y la mediana, y utiliza la siguiente expresión:

$$A_{BY} = \frac{Q_{3/4} + Q_{1/4} - 2Me}{Q_{3/4} - Q_{1/4}}$$

En una distribución simétrica el tercer cuartil estará a la misma distancia de la mediana que el primer cuartil. Por tanto $A_{BY} = 0$. Si la distribución es positiva o a la derecha, $A_{BY} > 0$.

10.5. Curtosis (Kurtosis)

La curtosis de una variable estadística/aleatoria es una característica de forma de su distribución de frecuencias/probabilidad.

Según su concepción clásica, una mayor curtosis implica una mayor concentración de valores de la variable muy cerca de la media de la distribución (pico) y muy lejos de la misma (colas), al tiempo que existe una relativamente menor frecuencia de valores intermedios (hombros). Esto explica una forma de la distribución de frecuencias/probabilidad con colas más gruesas, con un centro más apuntado y una menor proporción de valores intermedios entre pico y colas.

Una mayor curtosis no implica una mayor varianza, ni viceversa.

Un coeficiente de apuntamiento o de curtosis es el cuarto momento con respecto a la media estandarizado que se define como:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

donde μ_4 es el 4ž momento centrado o con respecto a la media y σ es la desviación estándar.

En la distribución normal se verifica que $\mu_4 = 3\sigma^4$, donde μ_4 es el momento de orden 4 respecto a la media y σ la desviación típica. Por eso, está más extendida la siguiente definición del coeficiente de curtosis:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

donde se ha sustraído 3 (que es la curtosis de la distribución normal o gaussiana) con objeto de generar un coeficiente que valga 0 para la Normal y tome a ésta como referencia de curtosis.

Tomando, pues, la distribución normal como referencia, una distribución puede ser: leptocúrtica, cuando $\beta_2 > 3$ y $g_2 > 0$: más apuntada y con colas menos gruesas que la normal. platicúrtica, $\beta_2 < 3$ y $g_2 < 0$: menos apuntada y con colas más gruesas que la normal. mesocúrtica, $\beta_2 = 3$ y $g_2 = 0$: cuando tiene una distribución normal.

11. Funciones de Distribucion

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los sucesos y cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria.

11.1. Distribucion de Poisson

distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo. Concretamente, se especializa en la probabilidad de ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, o sucesos raros.
La función de masa o probabilidad de la distribución de Poisson es

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

donde

- k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno (la función nos da la probabilidad de que el evento suceda precisamente k veces).
- λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado. Por ejemplo, si el suceso estudiado tiene lugar en promedio 4 veces por minuto y estamos interesados en la probabilidad de que ocurra k veces dentro de un intervalo de 10 minutos, usaremos un modelo de distribución de Poisson con λ = 10Œ4 = 40.
- e es la base de los logaritmos natural

Resumen	Variable aleatoria Poisson
Función de densidad	$P\{x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ Si x = 0,1,2,3, $\cdots$
Media	$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \lambda$
Función generalizada de momentos	$M_k\{t\} = e^{\lambda + \lambda e^{tx}}$

Ejemplo: Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿ Cuáles son las probabilidades de que reciba, a) cuatro cheques sin fondo en un día dado, b) 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?
a) x = variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera = 0, 1, 2, 3, ..., etc, etc.
l = 6 cheques sin fondo por día

$$P(x=4,\lambda=6)=\frac{(6^4)(e^{-6})}{4!}=\frac{(1296)(0{,}00248)}{24}=0{,}13392 \qquad (19)$$

b) x= variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.
x2 = 12 cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en dos días consecutivos
l = 6

$$P(x=10,\lambda=12)=\frac{(12^10)(e^{-12})}{10!}=\frac{(6{,}1917x10^10)(0{,}000006151)}{3628800}=0{,}13392 \qquad (20)$$

Para mas ejemplos consulte [5]

11.2. Distribucion Binomial

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, solo dos resultados son posibles. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q=1-p$ En la distribución binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos.
Su función de probabilidad es

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad 0\leq p\leq 1$$

donde $x=\{0,1,2,\ldots,n\}$,
siendo $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ las combinaciones de n en $x(n$ elementos tomados de x en x

Resumen	Variable aleatoria Binomial
Función de densidad	$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x}$ f(x) = 0 en otro caso
Media	$\mu=np$
Varianza	$\sigma^2=npq$
Función generalizada de momentos	$M_k\{t\}=(1-p+pe^{tx})n$

La notación simplificada para la función de densidad y la función de distribución acumulada binomial es la densidad $P(X=x)=b(x,n,p)$ y para la distibución $P(X=x)=B(x,n,p)$.

Ejemplo: Calcular las siguientes probabilidades binomiales usando la formula:

$$b(x,n,p)=\frac{n!}{x!(n-x)!p^x(1-p)^{n-x}}$$

a) b(3; 8, 0.6) b(3; 8, 0.6) es la densidad binomial cuando X=3, n=8 y p=0.6

$$P(X = 3) = \frac{8!}{3!(8-3)!}(0{,}6)^3(1-0{,}6)^{8-3} = 0{,}124$$

b) b(5; 8, 0.6) b(5; 8, 0.6) es la densidad binomial cuando X=5, n=8 y p=0.6

$$P(X = 3) = C_5^8(0{,}6)^5(1-0{,}6)^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}6)^5(1-0{,}6)^3 = 0{,}279$$

c) $P(3 \leq X \leq 5)$ cuando n = 8 y p = 0.6
$P(3 \leq X \leq 5)$ es la suma de los valores de la densidad binomial en X=3,4 y 5, por lo tanto

$$\begin{aligned} &P(3 \leq X \leq 5) = b(3; 8, 0{,}6) + b(4; 8, 0{,}6) + b(5; 8, 0{,}6) \\ &= 0{,}124 + 0{,}232 + 0{,}279 \\ &= 0{,}635 \end{aligned}$$

d) $P(1 \leq X)$ cuando n = 12 y p = 0.1
Se debe hacer el calculo de b(x;12,0.1) para x =1,2,3, $\cdots$,12y luego sumarlos

$$\begin{aligned} &P(X \leq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0{,}282 \\ &= 0{,}718 \end{aligned}$$

Para mas ejemplos consulte [5]

11.3. Distribución hipergeométrica

es una distribución discreta relacionada con muestreos aleatorios y sin reemplazo. Suponga que se tiene una población de N elementos de los cuales, d pertenecen a la categoría A y N-d a la B. La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener x ($0 \leq x \leq d$) elementos de la categoría A en una muestra sin reemplazo de n elementos de la población original.
La función de probabilidad de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica puede deducirse a través de razonamientos combinatorios y es igual a

$$P(X = x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

donde N es el tamaño de población, n es el tamaño de la muestra extraída, d es el número de elementos en la población original que pertenecen a la categoría deseada y x es el número de elementos en la muestra que pertenecen a dicha categoría. La notación

$\binom{a}{x}$ hace referencia al coeficiente binomial, es decir, el número de combinaciones posibles al seleccionar x elementos de un total a.
El valor esperado de una variable aleatoria X que sigue la distribución hipergeométrica es

$$E[X] = \frac{nd}{N}$$

y su varianza,

$$Var[X] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{nd}{N}\right)\left(1 - \frac{d}{N}\right)$$

En la fórmula anterior, definiendo

$$p = \frac{d}{N}$$

y

$$q = 1 - p$$

se obtiene

$$Var[X] = npq\frac{N-n}{N-1}$$

La distribución hipergeométrica es aplicable a muestreos sin reemplazo y la binomial a muestreos con reemplazo. En situaciones en las que el número esperado de repeticiones en el muestreo es presumiblemente bajo, puede aproximarse la primera por la segunda. Esto es así cuando N es grande y el tamaño relativo de la muestra extraída, n/N, es pequeño.

Resumen	Variable aleatoria Hipergeometrica
Función de densidad	$f(x) = \frac{C^M_{x(N-M)} C_{n-x}}{C^N_n}$ Si x = max[0,n>N+M] $\cdots$ min[n,M] f(x)=0 en otro caso
Media	$\mu = \frac{nM}{N}$
Varianza	$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(n-M)}{N^2(N-1)}$
Función generalizada de momentos	No tiene expresion analitica simple

Ejemplo: Un comite de tamaño 5 es seleccionado aleatoriamente, de entre 3 quimicos y 5 fisicos. Registrar en una tabla los valores de la funcion de densidad de X = numero de quimicos en el comite.

N= 8, M=3(los quimicos) y n=5, el comite es un subconjunto de las ocho personas disponibles , por lo que la distribucion de X es una hipergeometrica con parametros N=8, M=3, estos son

$$f(x) = \frac{C^3_x C^5_{5-x}}{C^8_5} x = 0, 1, 2, 3$$

Sustituyendo x en la formula se obtiene:

$$P(X=0)=h(0;8,5,3)=C_0^3\frac{C_5^5}{C_5^8}=\frac{(1)(1)}{56}=\frac{1}{56}=0{,}018$$
$$P(X=1)=h(1;8,5,3)=C_1^3\frac{C_4^5}{C_5^8}=\frac{(3)(5)}{56}=\frac{15}{56}=0{,}268$$
$$P(X=2)=h(2;8,5,3)=C_2^3\frac{C_3^5}{C_5^8}=\frac{(3)(10)}{56}=\frac{30}{56}=0{,}536$$
$$P(X=3)=h(3;8,5,3)=C_3^3\frac{C_2^5}{C_5^8}=\frac{(1)(10)}{56}=\frac{10}{56}=0{,}179$$

Para mas ejemplos consulte [5]

12. Histogramas

Se compararon las funciones de Gaus una creada por ROOT y la otra generada mediante la formula que se conoce($\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$) con σ=0.2 y μ=0, esto para hacer una simulación de la función d Gaus que crea root. Podemos ver que las dos funciones tienen valores parecidos.

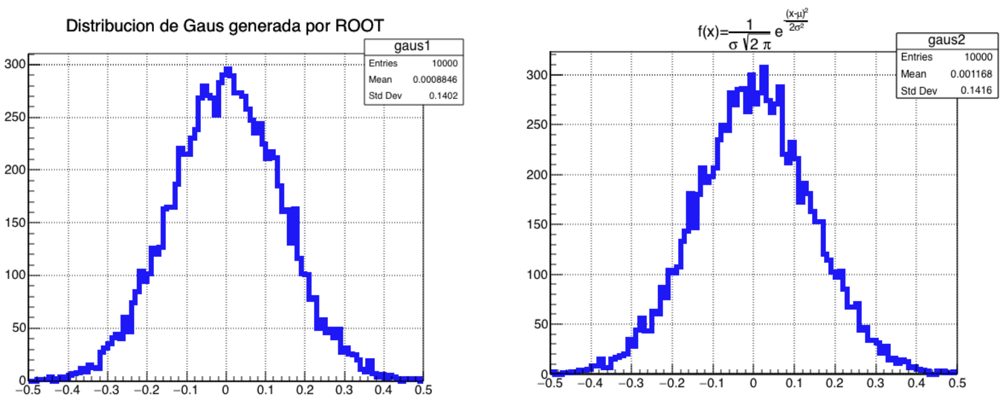


Figura 8: Comparación de la distribución de Gaus

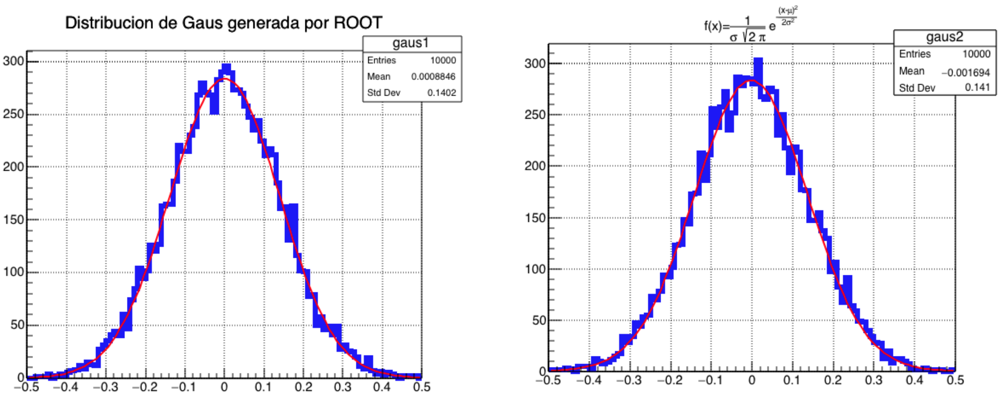


Figura 9: Fit comparación de la distribución de Gaus

Posteriormente al histograma que se genero mediante la formula se le realizo un fit, fit es un proceso matemático para encontrar valores de parámetros sobre una función que mejor describa la distribución de datos.

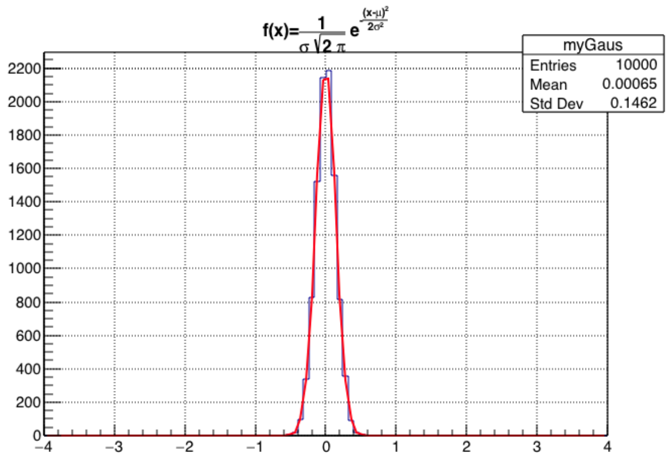


Figura 10: Fit distribución de Gaus generada por formula

Se muestran un ejemplo con varias distribuciones de Gaus donde los valores de σ y μ varian entre distribuciones, todas ellas fueron generadas utilizando la formula con la que se comparaba la generada por ROOT 11.

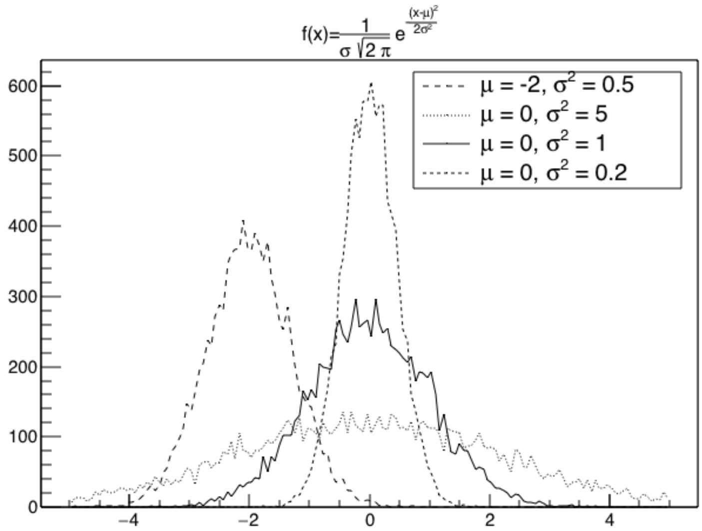


Figura 11: Distribuciones de Gaus

Ahora compararemos la districión de Poisson la generada con ROOT y la que generare por medio de la formula.

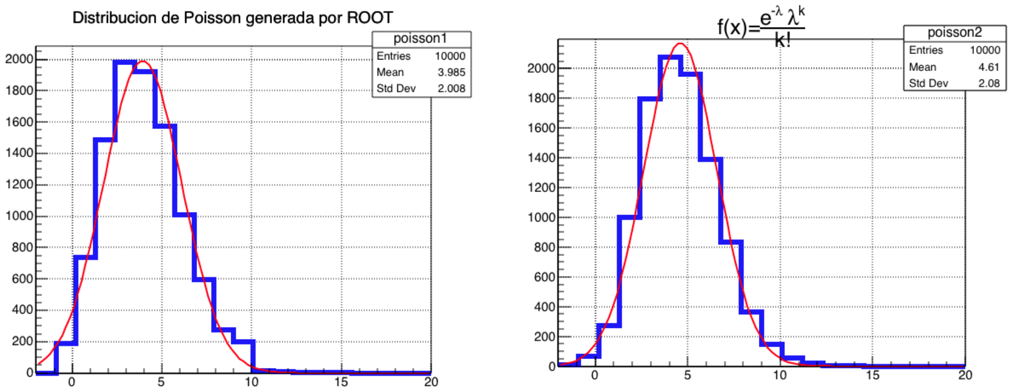


Figura 12: Distribuciones de Poisson

Ahora compararemos la districión Exponencial la generada con ROOT y la que generare por medio de la formula.

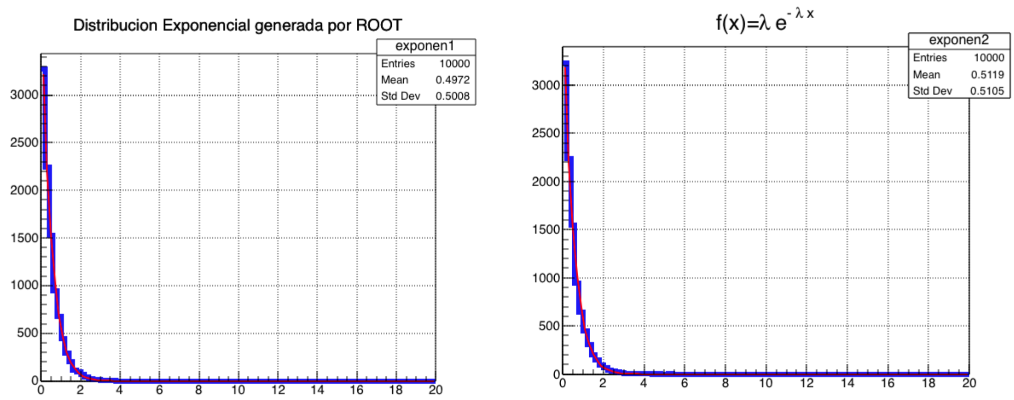


Figura 13: Distribuciones de Exponencial

Ahora compararemos la districión de Binomial la generada con ROOT y la que generare por medio de la formula.

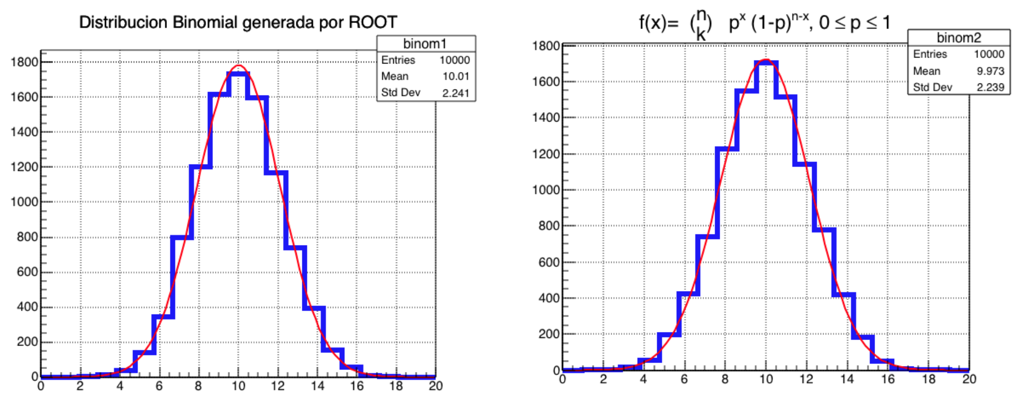


Figura 14: Distribuciones de Binomial

13. Simulación de volados

Se realizo la simulación de volados, mediante un programa de ROOT, las tiradas fueron a partir de 100, 1000 y 10000 lanzamientos.

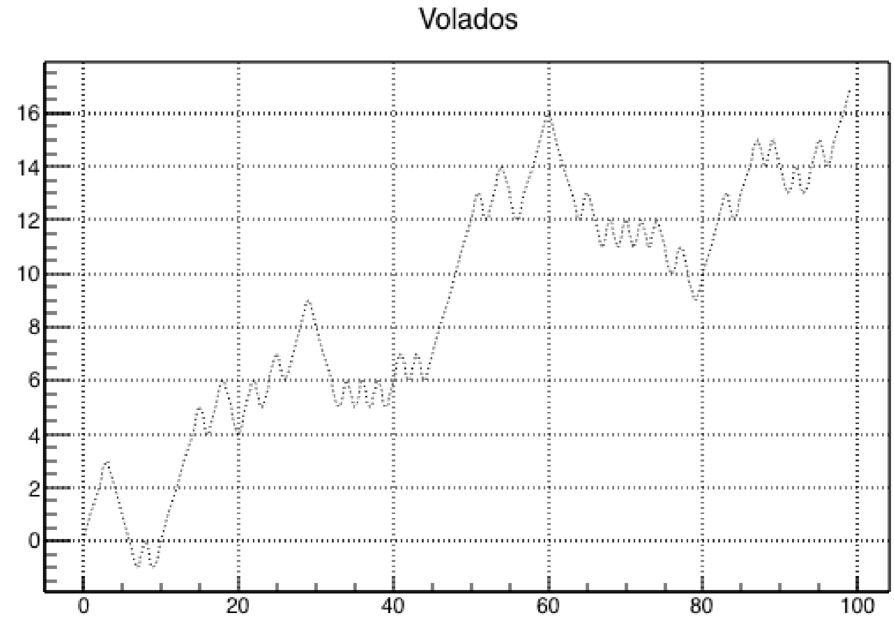


Figura 15: Simulación de 100 volados

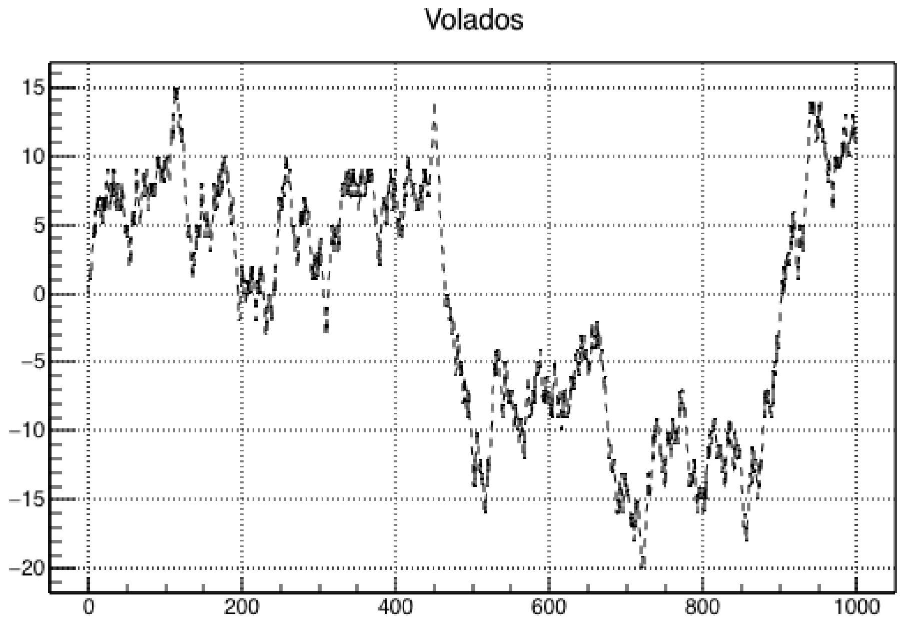


Figura 16: Simulación de 1000 volados

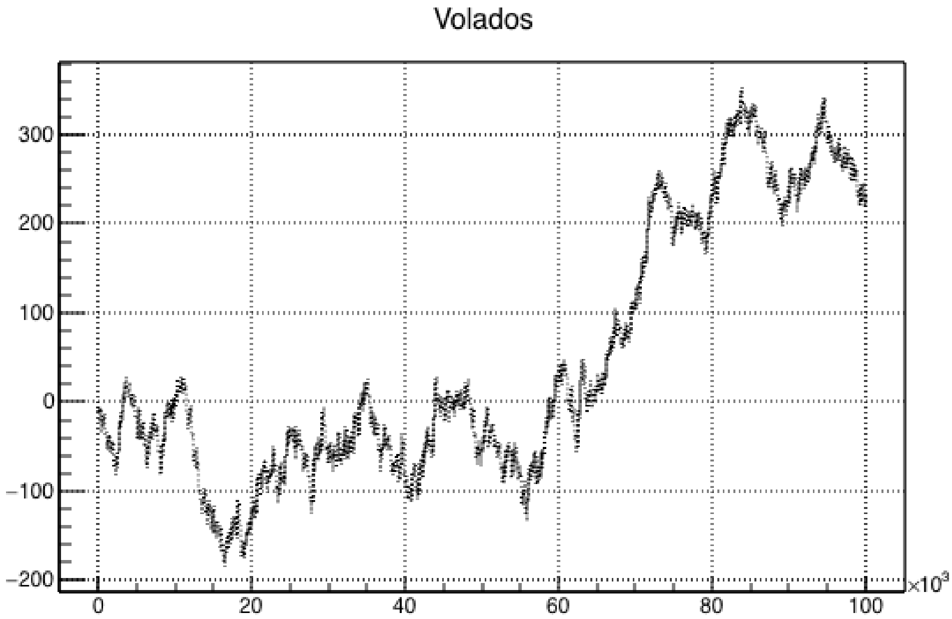


Figura 17: Simulación de 10000 volados

Se esperaría que fueran 50 50 pero como podemos ver la naturaleza no se comporta como esperaríamos, se puede saber que hubo un numero igual de 'sol'y águila'cuando pasan por 0.

14. La Falacia del apostador

La falacia del jugador o falacia de Montecarlo es una falacia lógica por la que se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan a los futuros en lo relativo a actividades aleatorias, como en muchos juegos de azar. Puede comprender las siguientes ideas equivocadas:

- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir porque no ha ocurrido durante cierto período
- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto período
- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir si no ocurrió recientemente
- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir si ocurrió recientemente

Sencillamente, las probabilidades de que algo suceda la próxima vez no están necesariamente relacionadas con lo que ya sucedió, especialmente en muchos juegos de azar. Esto suele resumirse en la frase Los dados (o moneda) no tiene memoria, pues su naturaleza es la misma, independiente del número de tiros y resultados previos.

La falacia del jugador puede ilustrarse considerando el lanzamiento repetido de una moneda. Si ésta está equilibrada, las opciones de que salga cara son exactamente 0,5 (una de cada dos). Las opciones de que salgan dos caras seguidas es 0,5×0,5=0,25 (una de cada cuatro), las de obtener tres caras seguidas son 0,5×0,5×0,5=0,125 (una de cada ocho), y así sucesivamente.

Supongamos que se han sacado cuatro caras seguidas. Un creyente en la falacia del jugador diría: Si en el siguiente lanzamiento saliese cara, habrían salido cinco consecutivas. La probabilidad de que esto suceda es $0,5^5 = 0,03125$, así que por tanto en el siguiente lanzamiento la probabilidad de que salga cara es sólo 1 entre 32.

éste es el paso falaz en el razonamiento. Si la moneda está equilibrada y se excluye la posibilidad de caer de cara, entonces por definición la probabilidad debe ser siempre 0,5 tanto para cara como para cruz. Aunque la probabilidad de lograr una serie de cinco caras consecutivas es de sólo 1 cada 32 (0,03125), lo es antes de que la moneda se tire por primera vez. Después de los primeros cuatro lanzamientos los resultados ya no son desconocidos, y por tanto no cuentan.

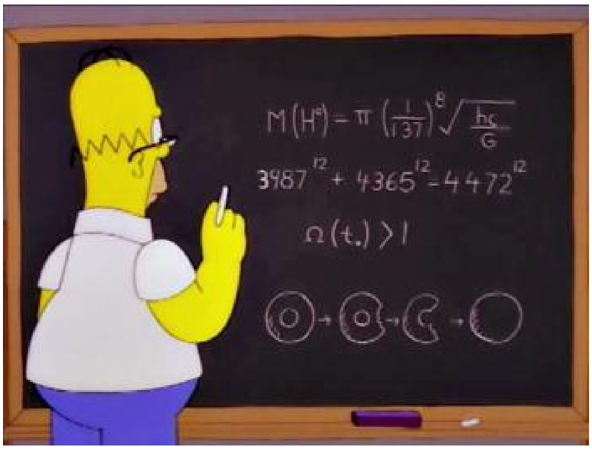
15. El ultimo teorema de Fermat y Los Simpson

En el episodio donde Homero trata de seguir los pasos de Thomas Alva Edison, creando diversos aparatos como una maquilladora automática, utilizando una escopeta, hasta un martillo eléctrico el cual le atribuiría a Edison, nos encontramos con una serie de ecuaciones matemáticas donde la segunda ecuación parece haber dado una solución al ultimo teorema de Fermat, en la cual parece haber encontrado una solución posible al ultimo teorema de Fermat.

El ultimo teorema de Fermat consiste en que si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros positivos x, y y z, tales que se cumpla la igualdad:

$$x^n + y^n = z^n$$

En una escena del capitulo podemos observar que Homero trabajo sobre este teorema, dando una probable respuesta al teorema.



Si realizamos la operación con una simple calculadora podemos obtener los valores siguientes de cada una de las variables que se muestran en la ecuación dibujada por Homero:

$$3987^{12} = 1{,}61345e43$$
$$4365^{12} = 4{,}78422e43$$
$$4472^{12} = 6{,}39767e43$$

Y si posteriormente realizamos la suma podemos comprobar que la igualdad se cumple

$$1{,}61345e43 + 4{,}78422e43 = 6{,}39767e43$$

16. Señal Wow!

La señal Wow! es la denominación por la cual se conoce en círculos astronómicos a una captación de radio que podría tener un origen extraterrestre y haber sido emitido por seres inteligentes.

El 15 de agosto de 1977 a las 23:16, el radiotelescopio Big Ear recibió una señal de radio de origen desconocido durante exactamente 72 segundos proveniente de la zona oriental de la constelación de Sagitario y alcanzando una intensidad 30 veces superior al ruido de fondo.

De acuerdo al protocolo utilizado, esta señal no fue grabada sino que fue registrada por la computadora del observatorio en una sección de papel continuo diseñada para tal efecto. Unos días después, el joven profesor de la Universidad Estatal de Ohio Jerry R. Ehman, que estaba trabajando como voluntario en el proyecto SETI revisando los registros de la computadora, descubrió la señal anómala más intensa que se hubiera detectado hasta entonces por un radiotelescopio. La señal fue conocida como Wow debido a la anotación que Jerry Ehman hizo en el papel continuo, denotando su sorpresa y emoción. La secuencia de dicha señal fue: 6EQUJ5.

Durante muchos años se ha investigado el origen de la señal. Las explicaciones de la señal van desde el mensaje de una civilización extraterrestre inteligente, hasta alguna interferencia cercana al radiotelescopio. Todos los intentos posteriores de obtener una señal de la misma dirección no han encontrado nada inusual. En 2017 se demostró que la señal podía ser ocasionada por el paso de un cometa, y que la señal observada sería el reflejo de la nube de hidrógeno que iba con él. Sin embargo, ésta teoría fue desmentida por varios expertos.

17. Análisis ROC

En la Teoría de detección de señales, una curva ROC (acrónimo de Receiver Operating Characteristic, o Característica Operativa del Receptor) es una representación gráfica de la sensibilidad frente a la especificidad para un sistema clasificador binario según se varía el umbral de discriminación. Otra interpretación de este gráfico es la representación de la razón o ratio de verdaderos positivos (VPR = Razón de Verdaderos Positivos) frente a la razón o ratio de falsos positivos (FPR = Razón de Falsos Positivos) también según se varía el umbral de discriminación (valor a partir del cual decidimos que un caso es un positivo).

El análisis ROC, proporciona herramientas para seleccionar los modelos posiblemente óptimos y descartar modelos subóptimos independientemente de el coste de la distribución de las dos clases sobre las que se decide. La curva ROC es también independiente de la distribución de las clases en la población (en diagnóstico, la prevalencia de una enfermedad en la población). El análisis ROC se relaciona de forma directa y natural con el análisis de coste/beneficio en toma de decisiones diagnósticas.

Consideremos un problema de predicción de clases binario, en la que los resultados se etiquetan positivos (p) o negativos (n). Hay cuatro posibles resultados a partir de un clasificador binario como el propuesto. Si el resultado de una exploración es p y el valor dado es también p, entonces se conoce como un Verdadero Positivo (VP); sin embargo si el valor real es n entonces se conoce como un Falso Positivo (FP). De igual modo, tenemos un Verdadero Negativo (VN) cuando tanto la exploración como el valor dado son n, y un Falso Negativo (FN) cuando el resultado de la predicción es n pero el valor real es p. Un ejemplo aproximado de un problema real es el siguiente: consideremos una prueba diagnóstica que persiga determinar si una persona tiene una cierta enfermedad. Un falso positivo en este caso ocurre cuando la prueba predice que el resultado es positivo, cuando la persona no tiene realmente la enfermedad. Un falso negativo, por el contrario, ocurre cuando el resultado de la prueba es negativo, sugiriendo que no tiene la enfermedad cuando realmente sí la tiene.

		Valor en la realidad		
		p	***n***	**total**
Predicción outcome	***p'***	Verdaderos Positivos	Falsos Positivos	P'
	n'	Falsos Negativos	Verdaderos Negativos	N'
	total	P	N	

Terminología:

- Verdaderos Positivos (VP)

- Verdaderos Negativos (VN)

- Falsos Positivos (FP)

- Falsos Negativos (FN)

- Sensibilidad o Razón de Verdaderos Positivos (VPR)
  $VPR = VP/P = VP/(VP + FN)$

- Ratio o Razón de Falsos Positivos (FPR)
  $FPR = FP/N = FP/(FP + VN)$

- Exactitud (accuracy) (ACC)
  $ACC = (VP + VN)/(P + N)$

- Especificidad (SPC) o Razón de Verdaderos Negativos
  $SPC = VN/N = VN/(FP + VN) = 1 - FPR$

- Valor Predictivo Positivo (PPV)
  $PPV = VP/(VP + FP)$
  $PPV = P * VPR/P * VPR + (1 - P) * (1 - SPC)$

- Valor Predictivo Negativo (NPV)
  $NPV = VN/(VN + FN)$
  $NPV = (1 - P)SPC/(1 - P)SPC + P(1 - VPR)$

- Ratio o Razón de Falsos Descubrimientos (FDR)
  $FDR = FP/(FP + VP)$

18. Análisis de la varianza

En estadística, el análisis de la varianza (ANOVA, ANalysis Of VAriance, según terminología inglesa) es una colección de modelos estadísticos y sus procedimientos asociados, en el cual la varianza está particionada en ciertos componentes debidos a diferentes variables explicativas.

El análisis de la varianza parte de los conceptos de regresión lineal. Un análisis de la varianza permite determinar si diferentes tratamientos muestran diferencias significativas o por el contrario puede suponerse que sus medias poblacionales no difieren. El análisis de la varianza permite superar las limitaciones de hacer contrastes bilaterales por parejas que son un mal método para determinar si un conjunto de variables con n >2 difieren entre sí. El primer concepto fundamental es que todo valor observado puede expresarse mediante la siguiente función:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Donde:

- y_{ij}sería el valor observado (variable dependiente) [valor j-ésimo del tratamiento i-ésimo], y τ_i es el efecto del tratamiento i.
- μ sería una constante que en la recta de regresión equivale a la ordenada en el origen,
- τ_i es una variable que varía de tratamiento a tratamiento.
- ϵ_{ij} es una variable aleatoria que añade a la función cierto error que desvía la puntuación observada de la puntuación pronosticada.

Por tanto, a la función de pronóstico la podemos llamar media del tratamiento i:

$$y_i = \mu + \tau_i$$

19. Análisis de componentes principales

En estadística, el análisis de componentes principales (en español ACP, en inglés, PCA) es una técnica utilizada para describir un set de datos en términos de nuevas variables (componentes) no correlacionadas. Los componentes se ordenan por la cantidad de varianza original que describen, por lo que la técnica es útil para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos.

Técnicamente, el ACP busca la proyección según la cual los datos queden mejor representados en términos de mínimos cuadrados. Esta convierte un conjunto de observaciones de variables posiblemente correlacionadas en un conjunto de valores de variables sin correlación lineal llamadas componentes principales.

El ACP se emplea sobre todo en análisis exploratorio de datos y para construir modelos predictivos. El ACP comporta el cálculo de la descomposición en autovalores de la matriz de covarianza, normalmente tras centrar los datos en la media de cada atributo.

Debe diferenciarse del análisis factorial con el que tiene similaridades formales y en el cual puede ser utilizado como un método de aproximación para la extracción de factores.

20. Cadena de Márkov

Una cadena de Markov es una serie de eventos, en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria, Recuerdan el último evento y esto condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado.

Algo más importante aún, es que permite encontrar el promedio a la larga o las probabilidades de estado estable para cada estado. Con esta información se puede predecir el comportamiento del sistema a través del tiempo. La tarea más difícil es reconocer cuándo puede aplicarse. La caracteristica más importante que hay que buscar en la memoria de un evento a otro.

Ejemplo: Un jugador tiene \$2. Apuesta \$1 cada vez y gana \$1 con probabilidad 1 . Deja de jugar 2 si pierde los \$2 o si gana \$4. ¿Cuál es la probabilidad de que pierda su dinero al final de, a lo sumo, 5 juegos¿Cuál es la probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas?
La distribución de probabilidad inicial es $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}
\end{array}
$$

Buscamos la probabilidad de que el sistema esté en estado a0 después de 5 pasos. Calculamos la distribución de probabilidad del quinto paso $p^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
p^{(1)} &= p^{(0)}P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
p^{(2)} &= p^{(1)}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
p^{(3)} &= p^{(2)}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\\
p^{(4)} &= p^{(3)}P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}\\
p^{(5)} &= p^{(4)}P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{32} & 0 & \frac{9}{32} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La probabilidad $p^(5)$ no tener dinero después de 5 jugadas es de $\frac{3}{8}$ Para calcular la probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas, es necesario obtener la distribución de probabilidad de 7 pasos:

$$\begin{aligned}
p^{(6)} &= p^{(5)}P = \begin{pmatrix} \frac{29}{64} & 0 & \frac{7}{32} & 0 & \frac{13}{64} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\\
p^{(7)} &= p^{(6)}P = \begin{pmatrix} \frac{29}{64} & \frac{7}{64} & 0 & \frac{27}{128} & 0 & \frac{13}{128} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas se obtiene calculando la probabilidad de que el sistema no este en los estados a0 y a6 después de 7 pasos $\frac{7}{64} + 0 + \frac{27}{128} + 0 + \frac{13}{128} = \frac{27}{64}$

Ejemplo: Un hombre decide entre manejar su carro o tomar el metro para ir al trabajo cada dia. Supóngase que nunca toma el metro dos dias seguidos; pero si manejo al trabajo el dia anterior, entonces al dia siguiente es tan posible que maneje como que tome el metro. Para el primer dia de trabajo el hombre lanza un dado y decide manejar para ir al trabajo si y sólo si sale un 6. ¿Cuál es la distribución estacionaria de esta cadena de Markov?

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \text{t} & \text{m} \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{t} \\ \text{m} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p^{(0)} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\\
P^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}\\
P^{(16)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\\
p^{(2)} = p^{(0)}P^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ,3645833 & ,63541667 \end{pmatrix}\\
p^{16} = p^{(0)}P^{(16)} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

21. Clasificación de Inteligencia Artificial

21.1. Debil o Estrecha

Searle llama así a la escuela que aprecia que los procesos cerebrales y los mentales pueden ser simulados computacionalmente.

Construir máquinas capaces de resolver problemas que requieran de inteligencia. Para ello se construyen programas que tengan un comportamiento inteligente sin importar si emula o no a la inteligencia humana.

21.2. Fuerte

Searle llama así a la escuela que afirma que todo lo que caracteriza a la mente es poseer un programa. La escuela argumenta entonces que las computadoras podrán llegar a realmente pensar, exactamente igual que el humano y a tener conciencia.

Construir programas que emulen el comportamiento inteligente de los humanos como el pensamiento, el aprendizaje, la visión, la resolución de problemas, la creatividad, etc. Ya que estos modos de comportamiento se pueden explicar algorítmicamente en términos de estados mentales.

22. Variable Aleatoria

El propósito principal de usar una variable aleatoria es que podamos definir ciertas funciones de probabilidad que hacen que sea conveniente y fácil calcular las probabilidades de varios eventos.

Considere un experimento aleatorio con espacio de muestra S. Una variable aleatoria $X(\zeta)$ es una función real de un solo valor que asigna un número real llamado valor de $X(\zeta)$ para cada punto ζ de S. A menudo, usamos una sola letra X para esta función en lugar de $X(\zeta)$ y usamos r.v. para denotar la variable aleatoria.

Tenga en cuenta que la terminología utilizada aquí es tradicional. Claramente, una variable aleatoria no es una variable en absoluto en el sentido habitual, y es una función. El espacio de muestra S se denomina dominio de r.v. X, y la colección de todos los números [los valores de $X(\zeta)$] se denominan el rango de la r.v. X. Por lo tanto, el rango de X es un cierto subconjunto del conjunto de todos los números reales.

Tenga en cuenta que dos o más puntos de muestra diferentes pueden dar el mismo valor de $X(\zeta)$, pero dos números diferentes en el rango no pueden asignarse al mismo punto de muestra.

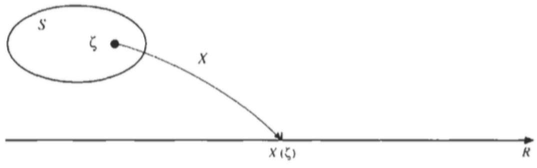


Figura 18: Variable aleatoria como funcion.

En el experimento de arrojar una moneda una vez, podríamos definir el r.v. X como

$$X(H) = 1 \qquad X(T) = 0$$

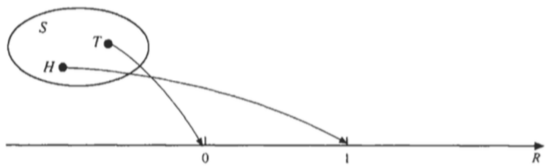


Figura 19: Una variable aleatoria asociada con el lanzamiento de monedas.

Tenga en cuenta que también podríamos definir otra r.v., digamos Y o Z, con

$$Y(H) = 0, Y(T) = 1 \qquad \text{o} \qquad Z(H) = 0, Z(T) = 0$$

Ejemplo: En el experimento de arrojar una moneda equitativa tres veces el espacio de muestra S, consiste en ocho puntos de muestreo extremadamente probables S, = (HHH, ..., TTT). Si X es la variable aleatoria. dando la cantidad de cabezas obtenidas, encuentra a) $P(X = 2)$, b) $P(X < 2)$

a) Sea A $\subset S_1$ ser el evento definido por X=2, entonces tenemos:
A=(X=2)=$\{\zeta : X(\zeta) = 2\} = \{HHT, HTH, THH\}$

Dado que los puntos de muestra son igualmente probables, tenemos
P(X=2)=P(A)=$\frac{3}{8}$

b) Sea B $\subset S_1$ ser el evento definido por $X < 2$, entonces
B=(X=2)=$\{\zeta : X(\zeta) < 2\} = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$
P(X<2)=P(B)=$\frac{1}{2}$

23. Programas Realizados

23.1. Permutación de un conjunto

Programa que genera permutaciones tomando n elementos de un determinado conjunto de elementos que el usuario ingreso o que toma de algun archivo en formato txt

```
import os

def callPermutaciones(conjuntoOriginal, variables):
        print("Las permutaciones con %d variable(s) son:" %variables)
        if variables == 1:
                for x in xrange(0,len(conjuntoOriginal)):
                        print(conjuntoOriginal[x])
        else:
                permutacionesPorNumero(conjuntoOriginal, None, 0, variables

def permutacionesPorNumero(conjunto, elementosDisponibles, iteracion, eleme
        aux = []
        auxPerm = []
        i = iteracion + 1
        if i<elementos:
                for x in xrange(0,len(conjunto)):
                        if elementosDisponibles is None:
                                aux = getElementosDisponibles(conjunto[x],
                        else:
                                aux = getElementosDisponibles(
                                        elementosDisponibles[x], elementosI

                        permutacionesPorNumero(
                                permutacionPorElementos(conjunto[x], aux, e
                                aux, i, elementos)


def permutacionPorElementos(elemento, elementosDisponibles, nivel):
        aux = []
        for x in xrange(0,len(elementosDisponibles)):
                if len(elemento) == nivel:
                        print(''.join(elemento)+''.join(elementosDisponible

                aux.append(''.join(elemento)+''.join(elementosDisponibles[x
        return aux


def getElementosDisponibles(elementoExcluido, elementos):
        aux = []
        if len(elementos) > 1:
                for y in xrange(0,len(elementos)):
                        if elementoExcluido != elementos[y]:
                                aux.append(elementos[y])
        return aux
```

```
conjuntoOriginal = []
permutaciones = []

print("----------------------------------------------------------------------------------------------------------
print("          $$$$$$$$$$
")
print("       d$$$$$$$$$$$$$b        ")
print("       $$$$$$$$$$$$$$$$        PROBABILIDAD, PROCESOS ALEATORIOS E INFER
")
print("      4$$$$$$$$$$$$$$$$$F")
print("      4$$$$$$$$$$$$$$$$$F")
print("      $$$$    $$$$    $$$$        ")
print("       $$F    4$$F    4$$         Este programa regresa las permutaciones q
print("       $$F    4$$F    4$          apartir de un conjunto que usted ingresar
")
print("        $$    $$$$    $P        ")
print("        4$$$$$$^$$$$$P        ")
print("         $$$$F    4$$$$           INTRODUZCA EL NUMERO DE ALGUNA DE LAS SIG
print("          $$$ee$$$$               OPCIONES
")
print("          ._*$$$$F4            ")
print("           $      $               1. INGRESAR LOS ELEMENTOS PARA LA PERMUTA
")
print("           $$$$$$$                 MEDIANTE UNA RUTA DE ARCHIVOS
")
print("            ^$$$$                 2. INGRESAR LOS ELEMENTOS MANUALMENTE
")
print("4$$c                  $$r   ")
print("^$$$b                 e$$$   ")
print("d$$$$$e             z$$$$$b ")
print("4$$$*$$$$$c       $$$$$*$$$r")
print("        ^*$$$be$$$*     ^     ")
print("            $$$$              ")
print("          .d$$P$$$b           ")
print("         d$$P    ^$$$b         ")
print("     .ed$$$        $$$be.      ")
print("_$$$$$$P            *$$$$$$   ")
print("4$$$$$P               $$$$$$ ")
print("*$$$                  ^$$P     ")
print("----------------------------------------------------------------------------------------------------------
opcion = int(raw_input('INTRODUZCA LA OPCIONES:  '))
os.system('clear')
if opcion == 1:
        print(
```

```
        "*****************************************************
    print(
        "*** A elegido introducir elementos del conjunto mediante l
    print(
        "*****************************************************
    try:
        nombreArchivo = raw_input('Introduzca la ruta del archivo:
        archivo = open(nombreArchivo, "r")
    except IOError:
        print("El archivo %s no existe" %nombreArchivo)

    variables = int(raw_input('Introducir el numero de variables a eleg
    conjuntoOriginal = []
    for linea in archivo.readlines():
        if "\n" in linea:
            linea = linea[:linea.index("\n")]
        conjuntoOriginal = linea.split(",") + conjuntoOriginal

    callPermutaciones(conjuntoOriginal, variables)

elif opcion == 2:
    print("*****************************************************
    print("****** A elegido introducir los elementos del conjunto manu
    print("*****************************************************
    try:
        numTotal = int(
            raw_input('Introduzca el numero de elementos que ti
        variables = int(
            raw_input('Introducir el numero de variables a eleg

    except ValueException:
        print("Favor de ingresar un numero. ")

    for i in xrange(0,numTotal):
        elemento = raw_input("Introduzca el elemento %d :" %i)
        conjuntoOriginal.append(elemento)

    permutaciones = conjuntoOriginal
    callPermutaciones(conjuntoOriginal, variables)

else:
    print("La opcion que selecciono no es valida.")
```

23.2. Lanzamiento de monedas

Programa que puede simular n numero de lanzamientos de monedas

```
void volados(){

 TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Volados",200,10,600,400);
   c1->SetGrid();

   TMultiGraph *mg = new TMultiGraph();
   mg->SetTitle("Volados");

        const Int_t n1 = 100;
        const Int_t n2 = 1000;
        const Int_t n3 = 100000;
        Double_t x1[100], x2[1000], x3[100000], y1[100], y2[1000], y3[10000
        Double_t Aux = 0;

        TRandom1 *r1 = new TRandom1();
        y1[0] = 0;
        x1[0] = 0;
        for(Int_t i=1; i<n1; i++){

           Aux = r1->Rndm();
           if(Aux < 0.5){
              y1[i] = y1[i-1] + 1;
           }else{
              y1[i] = y1[i-1] - 1;
           }

           x1[i] = i;
        }

        y2[0] = 0;
        x2[0] = 0;
        Aux = 0;
        for(Int_t i=1; i<n2; i++){

           Aux = r1->Rndm();
           if(Aux < 0.5){
              y2[i] = y2[i-1] + 1;
           }else{
              y2[i] = y2[i-1] - 1;
           }

           x2[i] = i;
        }
```

```
        y3[0] = 0;
        x3[0] = 0;
        Aux = 0;
        for(Int_t i=1; i<n3; i++){

            Aux = r1->Rndm();
            if(Aux < 0.5){
                y3[i] = y3[i-1] + 1;
            }else{
                y3[i] = y3[i-1] - 1;
            }

            x3[i] = i;
        }

    //TGraph *gr1 = new TGraph(n1,x1,y1);
    //gr1->SetLineColor(1);
        //gr1->SetLineStyle(3);

    //TGraph *gr2 = new TGraph(n2,x2,y2);
    //gr2->SetLineColor(1);
    //gr2->SetLineStyle(7);

    TGraph *gr3 = new TGraph(n3,x3,y3);
    gr3->SetLineColor(1);
    gr3->SetLineStyle(3);

    //mg->Add(gr1);
    //mg->Add(gr2);
    mg->Add(gr3);
    mg->Draw("AC");

    return c1;

}
```

23.3. Compración de Histogramas (Distribución de Gaus)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución de Gaus.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
```

```
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"

void newHisto() {
    delete gROOT->FindObject("gaus1");
    delete gROOT->FindObject("gaus2");

    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Gaus",21,111,1245,536);
    //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
    c1->SetFillColor(18);
    TRandom3 * rand = new TRandom3();
    TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.4803074
    TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.9877

    pad1->Draw();
    pad2->Draw();

    pad1->cd();


    Double_t numeros[1000];
    Double_t Aux = 0;

    TH1F * gaus1 = new TH1F("gaus1", "", 100, -.5, .5 );

    TF1 *fa = new TF1("faGaus2","
        (1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt([0])))*(TMath::Exp((-(x-[
    fa->SetParameter(0,0.02);
    fa->SetParameter(1,0);

    TH1F * gaus2 = new TH1F("gaus2", "", 100, -.5, .5 );

    rand = new TRandom3();

    for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
        gaus1->Fill( rand->Gaus(0.0, TMath::Sqrt(0.02)));
    }
```

```
    gaus2->FillRandom("faGaus2", 10000);
    TF1 *g1      = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
    gaus1->Fit("g1");
    gaus2->Fit("g1");

    pad1->SetGridx();
    pad1->SetGridy();
    pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    gaus1->SetLineColor(4);
    gaus1->SetLineWidth(6);
    gaus1->Draw();
    TLatex * texg1 = new TLatex(0.0125,1308,"
       f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{2#sigma^{2
    texg1->SetTextAlign(13);
    texg1->SetTextSize(0.04);
    texg1->SetLineWidth(2);
    c1->Update();

    pad2->cd();

    pad2->SetGridx();
    pad2->SetGridy();
    pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    gaus2->SetLineColor(4);
    gaus2->SetLineWidth(6);

    gaus2->Draw();
    TLatex * texg2 = new TLatex(-0.5116279,1308,"
       f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{2#sigma^{2
    texg2->SetTextAlign(13);
    texg2->SetTextSize(0.04);
    texg2->SetLineWidth(2);
    texg2->Draw();
    c1->Update();

}
```

23.4. Fit Distribución de Gaus

Programa que genera un histograma con fit mediante la formula ya conocida para la distribución de Gaus.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"


void myGausFit() {
   delete gROOT->FindObject("myGaus");
   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Distribucion de Gaus",200,10,700,500);

   TF1 *fa = new TF1("faGaus2","
      (1/(sqrt(2*pi)*sqrt([0])))*(e**(-(x-[1])**2/(2*[0])))",-2,2);
   fa->SetParameter(0,0.02);
   fa->SetParameter(1,0);

   fa->Print();
   Double_t Aux = 0;
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TH1F *myGaus = new TH1F("myGaus", "", 100, -4, 4);


   myGaus->FillRandom("faGaus2", 10000);

   TF1 *g1     = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
   myGaus->Fit("g1");

   TLatex * texg2 = new TLatex(-0.8944544,2551.22,"
      f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{2#sigma^{2
   texg2->SetTextAlign(13);
   texg2->SetTextSize(0.04);
   texg2->SetLineWidth(2);
   texg2->Draw();

   c1->SetGridx();
```

```
    c1->SetGridy();
    c1->Update();

}
```

23.5. Distribuciones de Gaus

Programa que genera 4 distribuciones de Gaus con diferentes parametros de entrada

```
void multi(){
    delete gROOT->FindObject("gaus1");
    delete gROOT->FindObject("gaus2");
    delete gROOT->FindObject("gaus3");
    delete gROOT->FindObject("gaus4");



    auto c0 = new TCanvas("c0","Distribuciones de Gaus",200,10,700,500);
    auto mg = new TMultiGraph();


    TF1 *fa1 = new TF1("faGaus1","(1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt
    fa1->SetParameter(0,0.2);
    fa1->SetParameter(1,0);

    TF1 *fa2 = new TF1("faGaus2","(1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt
    fa2->SetParameter(0,1);
    fa2->SetParameter(1,0);

    TF1 *fa3 = new TF1("faGaus3","(1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt
    fa3->SetParameter(0,5);
    fa3->SetParameter(1,0);

    TF1 *fa4 = new TF1("faGaus4","(1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt
    fa4->SetParameter(0,0.5);
    fa4->SetParameter(1,-2);

    TH1F * gaus1 = new TH1F("gaus1", "", 150,-5,5);
    TH1F * gaus2 = new TH1F("gaus2", "", 150,-5,5);
    TH1F * gaus3 = new TH1F("gaus3", "", 150,-5,5);
    TH1F * gaus4 = new TH1F("gaus4", "", 150,-5,5);

    gaus1->FillRandom("faGaus1", 10000);
    gaus2->FillRandom("faGaus2", 10000);
    gaus3->FillRandom("faGaus3", 10000);
```

```
    gaus4->FillRandom("faGaus4", 10000);

    TGraph * gr1 = new TGraph(gaus1);
    TGraph * gr2 = new TGraph(gaus2);
    TGraph * gr3 = new TGraph(gaus3);
    TGraph *gr4 = new TGraph(gaus4);

    gr1->SetTitle("#mu = 0, #sigma^{2} = 0.2");
    gr2->SetTitle("#mu = 0, #sigma^{2} = 1");
    gr3->SetTitle("#mu = 0, #sigma^{2} = 5");
    gr4->SetTitle("#mu = -2, #sigma^{2} = 0.5");

    gr1->SetLineColor(1);
    gr1->SetLineStyle(2);
    gr2->SetLineColor(1);
    gr3->SetLineColor(1);
    gr3->SetLineStyle(3);
    gr4->SetLineColor(1);
    gr4->SetLineStyle(7);


    mg->Add(gr4);
    mg->Add(gr3);
    mg->Add(gr2);
    mg->Add(gr1);
    //mg->SetTitle("Multi-graph Title; X-axis Title; Y-axis Title");
    mg->SetTitle("f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{
    mg->Draw("A");
    c0->Update();
    gPad->Modified();
    gPad->Update();

    gPad->BuildLegend();
}
```

23.6. Compración de Histogramas (Distribución de Gaus)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución de Gaus.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
```

```
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"

void newHisto() {
   delete gROOT->FindObject("gaus1");
   delete gROOT->FindObject("gaus2");

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Gaus",21,111,1245,536);
   //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
   c1->SetFillColor(18);
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.4803074
   TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.9877

   pad1->Draw();
   pad2->Draw();

   pad1->cd();


   Double_t numeros[1000];
   Double_t Aux = 0;

   TH1F * gaus1 = new TH1F("gaus1", "", 100, -.5, .5 );

   TF1 *fa = new TF1("faGaus2","
      (1/(TMath::Sqrt(2*TMath::Pi())*TMath::Sqrt([0])))*(TMath::Exp((-(x-[
   fa->SetParameter(0,0.02);
   fa->SetParameter(1,0);

   TH1F * gaus2 = new TH1F("gaus2", "", 100, -.5, .5 );

   rand = new TRandom3();

   for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
      gaus1->Fill( rand->Gaus(0.0, TMath::Sqrt(0.02)));
   }
```

```
    gaus2->FillRandom("faGaus2", 10000);
    TF1 *g1      = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
    gaus1->Fit("g1");
    gaus2->Fit("g1");

    pad1->SetGridx();
    pad1->SetGridy();
    pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    gaus1->SetLineColor(4);
    gaus1->SetLineWidth(6);
    gaus1->Draw();
    TLatex * texg1 = new TLatex(0.0125,1308,"
        f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{2#sigma^{2
    texg1->SetTextAlign(13);
    texg1->SetTextSize(0.04);
    texg1->SetLineWidth(2);
    c1->Update();

    pad2->cd();

    pad2->SetGridx();
    pad2->SetGridy();
    pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    gaus2->SetLineColor(4);
    gaus2->SetLineWidth(6);

    gaus2->Draw();
    TLatex * texg2 = new TLatex(-0.5116279,1308,"
        f(x)=#frac{1}{#sigma #sqrt{2 #pi}} e^{-#frac{(x-#mu)^{2}}{2#sigma^{2
    texg2->SetTextAlign(13);
    texg2->SetTextSize(0.04);
    texg2->SetLineWidth(2);
    texg2->Draw();
    c1->Update();

}
```

23.7. Compración de Histogramas (Distribución de Poisson)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución de Poisson.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"



void poissonCompa() {
   delete gROOT->FindObject("poisson1");
   delete gROOT->FindObject("poisson2");

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Poisson",21,111,1245,536);
   //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
   c1->SetFillColor(18);
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.4803074
   TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.9877

   pad1->Draw();
   pad2->Draw();

   pad1->cd();


   TH1F * poisson1 = new TH1F("poisson1", "Distribucion de Poisson generada

   TF1 *fa = new TF1("faPoiss2","(TMath::Exp(-[0])*(TMath::Power([0],x)))/T
   fa->SetParameter(0,4.0);

   TH1F * poisson2 = new TH1F("poisson2", "f(x)=#frac{e^{-#lambda} #lambda^

   rand = new TRandom3();
```

```
    for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
        //-Poisson(mean)
        poisson1->Fill( rand->Poisson(4.0));
    }


    poisson2->FillRandom("faPoiss2", 10000);

    TF1 *g1     = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
    poisson1->Fit("g1");
    poisson2->Fit("g1");

    pad1->SetGridx();
    pad1->SetGridy();
    pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    poisson1->SetLineColor(4);
    poisson1->SetLineWidth(6);
    poisson1->Draw();

    c1->Update();

    pad2->cd();

    pad2->SetGridx();
    pad2->SetGridy();
    pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    poisson2->SetLineColor(4);
    poisson2->SetLineWidth(6);

    poisson2->Draw();

    c1->Update();

}
```

23.8. Compración de Histogramas (Distribución de Binomial)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución de Binomial.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"

void binomialCompa() {
   delete gROOT->FindObject("binom1");
   delete gROOT->FindObject("binom2");

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Binomial",21,111,1245,536);
   //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
   c1->SetFillColor(18);
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.480307
   TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.987

   pad1->Draw();
   pad2->Draw();

   pad1->cd();


   Double_t numeros[1000];
   Double_t Aux = 0;

   TH1F * binom1 = new TH1F("binom1", "Distribucion Binomial generada por R

   TF1 *fa = new TF1("faBinom2","(TMath::Factorial([0])/(TMath::Factorial(x
   fa->SetParameter(0,20);
   fa->SetParameter(1, 0.5);
   //fa->SetParameter(2,0.5);
```

```
    //TH1F * binom2 = new TH1F("binom2", "f(x)=#binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x
    TH1F * binom2 = new TH1F("binom2", "f(x)=  (#splitline{n}{k})
p^{x} (1-p)^{n-x}, 0 #leq p #leq 1", 21, 0.0, 20.0 );

    rand = new TRandom3();

    for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
        //Binomial(ntot,prob)
        binom1->Fill( rand->Binomial(20, 0.5));
    }


    binom2->FillRandom("faBinom2", 10000);

    TF1 *g1     = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
    binom1->Fit("g1");
    binom2->Fit("g1");

    pad1->SetGridx();
    pad1->SetGridy();
    pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    binom1->SetLineColor(4);
    binom1->SetLineWidth(6);
    binom1->Draw();

    c1->Update();

    pad2->cd();

    pad2->SetGridx();
    pad2->SetGridy();
    pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
    pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
    pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

    binom2->SetLineColor(4);
    binom2->SetLineWidth(6);

    binom2->Draw();

    c1->Update();
```

```
}
```

23.9. Compración de Histogramas (Distribución Exponencial)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución Exponencial.

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"

void exponencialCompa() {
   delete gROOT->FindObject("exponen1");
   delete gROOT->FindObject("exponen2");

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Gaus",21,111,1245,536);
   //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
   c1->SetFillColor(18);
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.4803074
   TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.9877

   pad1->Draw();
   pad2->Draw();

   pad1->cd();


   Double_t x[10000], y[10000];
   Double_t Aux = 0;
   const Int_t n = 10000;
   const Double_t cons = 0.5;
   TH1F * exponen1 = new TH1F("exponen1", "Distribucion Exponencial generad
```

```
TF1 *fa = new TF1("faExpo2","([0]*(TMath::Exp(-[0]*x)))",0.0,20.0);
fa->SetParameter(0,2);

TH1F * exponen2 = new TH1F("exponen2", "f(x)=#lambda e^{- #lambda x}", 1

rand = new TRandom3();

for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
    //-Exp(tau)
   exponen1->Fill( rand->Exp(0.5));
}

rand = new TRandom3();

exponen2->FillRandom("faExpo2", 10000);

TF1 *g1     = new TF1("g1","gaus(0)",-4,4);
exponen1->Fit("g1");
exponen2->Fit("g1");

pad1->SetGridx();
pad1->SetGridy();
pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

exponen1->SetLineColor(4);
exponen1->SetLineWidth(6);
exponen1->Draw();

c1->Update();

pad2->cd();

pad2->SetGridx();
pad2->SetGridy();
pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

exponen2->SetLineColor(4);
exponen2->SetLineWidth(6);

exponen2->Draw();
```

```
c1->Update();

}
```

23.10. Compración de Histogramas (Distribución de Landau)

Programa que genera dos histogramas, el primero es generado por ROOT y el segundo es generado utilizando la formula ya conocida para la distribución de Landau .

```
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TNtuple.h"
#include "TProfile.h"
#include "TBenchmark.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPaveText.h"
#include "TFrame.h"
#include "TF1.h"
#include "TROOT.h"
#include "TSystem.h"
#include "TInterpreter.h"
#include "TMath.h"

void landauCompa() {
   delete gROOT->FindObject("landau1");
   delete gROOT->FindObject("landau2");

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Histogramas Gaus",21,111,1245,536);
   //last 4 arguments: top x-coord of window,top y-coord of window, x width
   c1->SetFillColor(18);
   TRandom3 * rand = new TRandom3();
   TPad *pad1 = new TPad("pad1", "This is pad1",0.0125,0.04199475,0.4803074
   TPad *pad2 = new TPad("pad2", "This is pad2",0.5057096,0.05870841,0.9877

   pad1->Draw();
   pad2->Draw();

   pad1->cd();


   Double_t numeros[1000];
   Double_t Aux = 0;

   TH1F * landau1 = new TH1F("landau1", "Distribucion de Landau generada po
```

```
TF1 *fa = new TF1("faLandau2","(1/TMath::Sqrt(2*TMath::Pi()))*TMath::Exp
//TF1 *fa = new TF1("faLandau2","(x-[0])/[1]",-7.0,30.0);
//fa->SetParameter(0,0.0);
//fa->SetParameter(0,1.0);
//fa->SetParameter(0,4.0);
//fa->SetParameter(1,4.0);
//(1/TMath::Sqrt(2*TMath::Pi()))*TMath::Exp(-(x + TMath::Exp(-x))/2)
//(x-[0])/[1]

TH1F * landau2 = new TH1F("landau2", "p(x)#approx #frac{1}{#sqrt{2#pi}}e

rand = new TRandom3();

for( int i = 0 ; i < 10000 ; i++ ){
   //-Landau(mpv,sigma)
   landau1->Fill( rand->Landau(0.0,0.3));
}


landau2->FillRandom("faLandau2", 10000);

pad1->SetGridx();
pad1->SetGridy();
pad1->GetFrame()->SetFillColor(42);
pad1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
pad1->GetFrame()->SetBorderSize(5);

landau1->SetLineColor(4);
landau1->SetLineWidth(6);
landau1->Draw();

c1->Update();

pad2->cd();

pad2->SetGridx();
pad2->SetGridy();
pad2->GetFrame()->SetFillColor(42);
pad2->GetFrame()->SetBorderMode(-1);
pad2->GetFrame()->SetBorderSize(5);

landau2->SetLineColor(4);
landau2->SetLineWidth(6);

landau2->Draw();
```

```
    c1->Update();

}
```

23.11. Dibujos en Tikz

Se muestran los códigos utilizados para generar dibujos utilizando las libreriás tikz

```
Dados

\begin{figure}[h]
\centering
\font\domino=domino
\def\die#1{{\domino#1}}
 \die1 \die2 \die3 \die4 \die5 \die6 \par
\caption{espacio muesta de un dado.}
\end{figure}
```

```
Compuertas Logicas

OR
\begin{circuitikz} \draw
(0,0) to[battery] (0,3)
(0,3) -- (1,3)
(1,3.5) to[closing switch, o-o] (4,3.5)
(1,2.5) -- (1,3.5)
(1,2.5) to[closing switch, o-o] (4,2.5)
(4,2.5) -- (4,3.5)
(4,3) to[R, o-o] (6,3)
 (6,3) to[full led, o-o](6,0)
 (0,0) -- (6,0);
\end{circuitikz}

AND
\begin{circuitikz} \draw
(0,0) to[battery] (0,3)
(0,3) to[closing switch, o-o] (2,3)
(2,3) to[closing switch, o-o] (4,3)
(4,3) to[R, o-o] (5.5,3)
 (5.5,3) to[full led, o-o](5.5,0)
 (0,0) -- (5.5,0);
\end{circuitikz}

NOT
```

```
\begin{circuitikz} \draw
(0,0) to[battery] (0,3)
(0,3) to[R, o-o] (3,3)
(3,3) -- (5,3)
(3,3) to[closing switch, o-o] (3,0)
 (5,3) to[full led, o-o](5,0)
 (0,0) -- (5,0);
\end{circuitikz}
```

NOR

```
\begin{circuitikz} \draw
(0,0) to[battery] (0,4)
(0,4) to[R, o-o] (2,4)
(2,4) -- (5.5,4)
(3.5,3) -- (3.5,4)
(3,3) -- (4,3)
(3,3) to[closing switch, o-o] (3,1.5)
(4,3) to[closing switch, o-o] (4,1.5)
(4,1.5) -- (3,1.5)
(3.5,1.5) -- (3.5,0)
 (5.5,4) to[full led, o-o](5.5,0)
 (0,0) -- (5.5,0);
\end{circuitikz}
```

NAND

```
\begin{circuitikz} \draw
(0,0) to[battery] (0,4)
(0,4) to[R, o-o] (3,4)
(3,4) -- (6,4)
(3.5,3.5) -- (3.5,4)
(3.5,3.5) to[closing switch, o-o] (3.5,2)
(3.5,2) to[closing switch, o-o] (3.5,0)
 (6,4) to[full led, o-o](6,0)
 (0,0) -- (6,0);
\end{circuitikz}
```

```
Arboles

\begin{tikzpicture}
\tikzstyle{level 1}=[sibling distance=35mm]
\tikzstyle{level 2}=[sibling distance=15mm]

 \node{-}
```

```
child{node {I} child { node{D} edge from parent node[below]  {$\frac{2}{5}$
} child{ node{N} edge from parent node[below]  {$\frac{3}{5}$}
}  edge from parent node[below]  {$\frac{1}{3}$} }
child{node {II} child { node{D}  edge from parent node[below]
{$\frac{1}{6}$} } child{ node{N} edge from parent node[below]
{$\frac{5}{6}$} } edge from parent node[above]  {$\frac{1}{3}$}
}
child{node {III} child { node{D} edge from parent node[below]
{$\frac{3}{8}$}  } child{ node{N} edge from parent node[below]
{$\frac{5}{8}$} } edge from parent node[below]  {$\frac{1}{3}$}
};
\end{tikzpicture}

\begin{tikzpicture}
\tikzstyle{level 1}=[sibling distance=80mm]
\tikzstyle{level 2}=[sibling distance=40mm]
\tikzstyle{level 3}=[sibling distance=20mm]
\tikzstyle{level 4}=[sibling distance=10mm]
\tikzstyle{level 5}=[sibling distance=5mm]

 \node{2}
child{node{3} child{node{4} child{ node{5} } child{node{3} child{node{4} cl
;
\end{tikzpicture}

\begin{tikzpicture}
\tikzstyle{level 1}=[sibling distance=45mm]
\tikzstyle{level 2}=[sibling distance=20mm]
\tikzstyle{level 3}=[sibling distance=10mm]
\tikzstyle{level 4}=[sibling distance=5mm]

 \node{A}
child{node {W} child{ node {W}} child{node {L} child{node {W} child{ node {
;
\end{tikzpicture}
```

```
Diagrama de caja

\begin{tikzpicture}
\filldraw
(0,0) circle (2pt) node[align=left,   below] {50} --
(2,0) circle (2pt) node[align=center, below] {60}      --
(4,0) circle (2pt) node[align=center, below] {70}      --
(6,0) circle (2pt) node[align=center, below] {80}      --
```

```
(8,0) circle (2pt) node[align=right, below] {90} --
(10,0) circle (2pt) node[align=right, below] {100}
(0.6,1.5) -- (3.8,1.5)
(3.8,2.5) -- node {Q1} (3.8,0.5)%{Q1}
(3.8,2.5) -- (7.4,2.5)
(5.8,2.5) -- node {Q2} (5.8,0.5)%{Q2}
(3.8,0.5) -- (7.4,0.5)
(7.4,2.5) -- node {Q3} (7.4,0.5)%{Q3}
(7.4,1.5) -- (8.6,1.5)
;
\end{tikzpicture}
\end{enumerate}
```

---

24. Problemario

Ejemplo 10: **Supongamos que hay muchos calcetines rojos, muchos calcetines blancos y muchos calcetines azules en una caja. ¿ Cual es el numero de calcetines que alguien debería agarrar de la caja (sin mirar el contenido) para asegurar obtener el par?**
Si un color se considera como un palomar, entonces $n = 3$. Por lo tanto, si agarras $n + 1 = 4$ palomas (calcetines), al menos 2 de ellos compartirán el color.

Una generalización directa del principio del palomar es la siguiente: si n palomares albergan $kn + 1$ palomas, donde k es un número entero positivo, al menos 1 palomar alberga al menos $k + 1$ palomas

Ejemplo 11: **Si desea** 3 **pares, todos de un color.**
Todavía hay $n = 3$ casilleros, y queremos asegurarnos de que uno (o más) de ellos contenga $k + 1 = 6$(o más) palomas. Así agarramos $kn + 1 = (5)(3) + 1 = 16$ palomas.

Ejemplo 12: **Un cofre contiene** 20 **camisas, de las cuales** 4 **son de color marron,** 7 **son de color blanco y** 9 **son de color azul. Como mínimo, ¿cuántas camisetas se deben quitar (con los ojos vendados) para obtener camisetas del mismo color con un tamaõ de** $4, 5, 6, 7, 8, 9$**?**

Caso 1. $r = 4 = k + 1$. Entonces $k = 3$, y dado que hay 3 colores, $n = 3$. Por lo tanto, al menos $kn + 1 = 10$ camisas deben ser eliminadas.

Caso 2. $r = 5 = k + 1$. Aquí el análisis es más simple si imaginamos que las camisetas se extraen secuencialmente del cofre. En una cadena más larga (que es lo que estamos buscando) los 4 primeros sorteos se desperdician al quitar las $4 < r$ camisetas, y el resto de la secuencia consiste en tantos sorteos de camisas blancas y azules ($n = 2$) como se requieren para asegurar $r = 5$ camisas del mismo color. Pero este número de letra viene dado por el principio de casillero como $kn+1 = 4(2)+1 = 9$. Por lo tanto, se deben eliminar $4+9 = 13$ camisas.

Caso 3. $r = 6 = k + 1$. La situación es como el caso 2; entonces $4 + (kn + 1) = 4[5(2) + 1] = 15$ camisetas deberían de ser removidas.

Caso 4. $r = 7 = k + 1$. Como en el caso 2 y 3, $4 + (kn + 1) = 4 + [6(2) + 1] = 20$ camisas.

Caso 5. $r = 8 = k + 1$. Ahora tanto las camisas de color canela como las blancas son inútiles, por lo que se deben eliminar $4+7+(kn+1) = 4+7+[7(1)+1] = 19$ camisetas.

Caso 6. $r = 9 = k + 14$. Como en el caso 5; $4 + 7 + (kn + 1) = 4 + 7 + [8(1) + 1] = 20$ camisas.

Demuestre que un número palindrómico (decimal) de longitud par es divisible por 11.

La prueba inductiva explota el hecho de que cuando el primer y el último personaje son eliminados de un palíndromo, queda un palíndromo. Por lo tanto, supongamos que N sea un número palindrómico de longitud 2k. Si $k = 1$, obviamente el teorema se cumple. Si $k \geq 2$ tenemos.

$$\begin{aligned}
N &= a_{2k-1}10^{2k-1} + a_{2k-2}10^{2k-2} + \cdots + a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_{2k-2}10^1 + a_{2k-2}10^0 \\
&= a_{2k-1}(10^{2k-1} + 10^0) + (a_{2k-2}10^{2k-2} + \cdots + a_{2k-2}10^1) \\
&\equiv a_{2k-2}P + Q
\end{aligned}$$

aqui P $= \underbrace{100\cdots001}_{\text{tamaño 2k}} = \underbrace{11 \times 9090\cdots9091}_{\text{tamaño 2k-2}}$

Y tampoco Q $= 0$ (divisible por 11) o, por algun $1 \leq r \leq k-1$

$$Q = 10^r\{\text{Palindromo de tamaño 2(k-r)}\} = 10^r\{11R\}$$

Donde el último paso se sigue de la hipótesis de inducción. Por lo tanto, N es divisible por 11, y la prueba está completa.

En un palíndromo binario, el primer dígito es 1 y cada dígito siguiente puede ser 0 o 1. Cuente los palíndromos binarios de longitud m.
Aquí tenemos $[(n + 1)/2] - 1 = [(n - 1)/2]$ posiciones libres, por lo que el número deseado es $2^{[(n-1)/2]}$

1.29 **Encuentre la probabilidad p de que un grupo de n personas reunidas al azar incluya al menos 2 personas con el mismo cumpleaõs.**

Aquí no tratamos con una muestra de personas, sino con una muestra de cumpleaõs.

$$Probabilidad = \frac{\text{numero favorable de muestras}}{\text{numero total de muestras}}$$

En este problema, es más simple considerar el evento complementario: todos los n cumpleaõs son distintivos. Este evento se realiza en $P(365, n)$ muestras; y el número total de muestras es 265. Por lo tanto, $1 - P_n = P(365, n)/365^n$ o

$$P_n = 1 - \frac{P(365, n)}{365^n} = 1 - \frac{(365)(365-1)(365-2)\cdots[365-(n-1)]}{365^n}$$
$$= 1 - (1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365})\cdots(1 - \frac{n-1}{365})$$

1.39 **(a) Establezca $x = y = 1$ en el teorema binomial (b) Establezca $x = -y = 1$ en el teorema binomial (c) Agregue y reste los resultados de (a) y (b)**

$$\text{a)} \sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^n$$
$$\text{b)} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(n, r) = 0$$
$$\text{c)} \sum_{\text{r impar}}^{n} C(n, r) = \sum_{\text{r par}}^{n} C(n, r) = 2^{n-1}$$

1.40 **Recupere el resultado del problema 1.39 por argumentos combinatorios.** (a) Considere un conjunto X con n elementos. Entonces (problema X tiene 2^n subconjuntos, dando el lado derecho de la identidad. Pero también el conjunto X tiene subconjuntos $C(n, r)$ de cardinalidad r, donde r corre de 0 a n. Entonces el número total de subconjuntos es $C(n, 0) + C(n, 1) + ... + C(n, r)$, como en el lado izquierdo de la identidad.

(b) (c) Solo es necesario establecer que X tiene tantos subconjuntos con un número par de elementos como subconjuntos con un número impar. Pero esto es obviamente cuando n es impar, porque cada subconjunto par (impar) se puede emparejar con su complemento impar (par). Supongamos, entonces, que n es par (y positivo). Con θ un elemento designado de X, realice la descomposición $X = X' \cup \theta$. Debido a que X és impar (tiene cardinalidad impar), tiene el mismo número de subconjuntos pares e impares. (Recuerde que el conjunto nulo está incluido entre los subconjuntos pares). Ahora, todos los subconjuntos de X se pueden obtener incluyendo o no θ en un subconjunto de X'. Dado que la inclusión de θcambia la paridad de los subconjuntos, es evidente que X debe tener el doble de subconjuntos pares y el doble de subconjuntos impares que X ', es decir, X debe tener igualmente muchos subconjuntos pares e impares.

1.77 **Demuestre que en cualquier grupo de personas habrá al menos 2 personas que conozcan la misma cantidad de personas en el grupo.** Supongamos que en el grupo $X = \{1, 2, ..., n\}$ hay k personas que no conocen a nadie en el grupo.

a) Si $k > 1$, hay al menos 2 personas que no conocen a nadie en el grupo.

b) Si $k = 0$, deje que x_i sea la cantidad de personas conocidas por i, donde $i = 1, 2, ..., n$. Como $1 \leq x \leq n - 1$ para cada i, los n números x_i no pueden ser todos distintos. Entonces hay al menos 2 integeers i y j tales que $x_i = x_\tau$

c) Si $k = 1$, ignoramos a la persona que no conoce a nadie en el grupo. Estamos entonces de vuelta en la situación (b), con n reemplazado por $n - 1$.

1.78 **Considere un torneo en el que cada uno de n jugadores juega contra cada jugador y cada jugador gana al menos una vez. Demuestre que hay al menos 2 jugadores con el mismo número de victorias.**
El número de victorias para un jugador es al menos 1 y como máximo n-1. Estos n-1 números corresponden a n-1 casilleros para acomodar n jugadores-palomas.

1.87 Hay 12 microcomputadoras y 8 impresoras láser en una oficina. Encuentre la cantidad mínima de conexiones que se realizarán, lo que garantizará que si 8 o menos equipos desean imprimir al mismo tiempo, cada uno de ellos podrá usar una impresora diferente.
Mostraremos que 40 conexiones harán el trabajo, dejando que el lector demuestre que este número es mínimo. Supongamos que las impresoras están marcadas por $P_j(j = 1, 2, \ldots, 8)$ y las computadoras por $C_i(i = 1, 2, \ldots, 12)$. Conecte la primera impresora a las primeras 5 computadoras. Luego conecte la segunda impresora a las 5 impresoras consecutivas comenzando C_2. Luego conecte la tercera impresora a las 5 impresoras consecutivas que comienzan con C_3. A continuar así generando la matriz de conexión Fig(1)

Cuadro 1: Fig 5

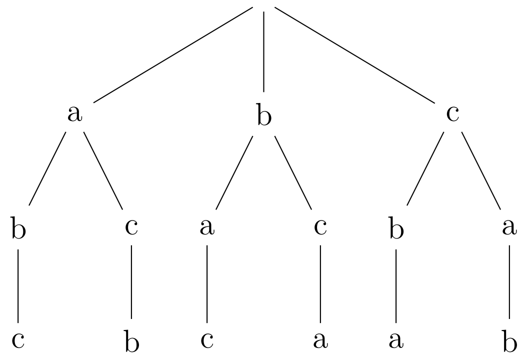
	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
c1	1	0	0	0	0	0	0	0
c2	1	1	0	0	0	0	0	0
c3	1	1	1	0	0	0	0	0
c4	1	1	1	1	0	0	0	0
c5	1	1	1	1	1	0	0	0
c6	0	1	1	1	1	1	0	0
c7	0	0	1	1	1	1	1	0
c8	0	0	0	1	1	1	1	1
c9	0	0	0	0	1	1	1	1
c10	0	0	0	0	0	1	1	1
c11	0	0	0	0	0	0	1	1
c12	0	0	0	0	0	0	0	1

Permita que las 8 computadoras que requieren una impresora sean $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots C_{i_8}$ donde $i_1 < i_2 < \ldots < i_8$ (Obviamente, si se pueden acomodar 8 computadoras, se puede acomodar cualquier número más pequeõ). La observación crucial es que

$$s \leq i_s \leq s + 4 (s = 1, 2, \ldots, 8)$$

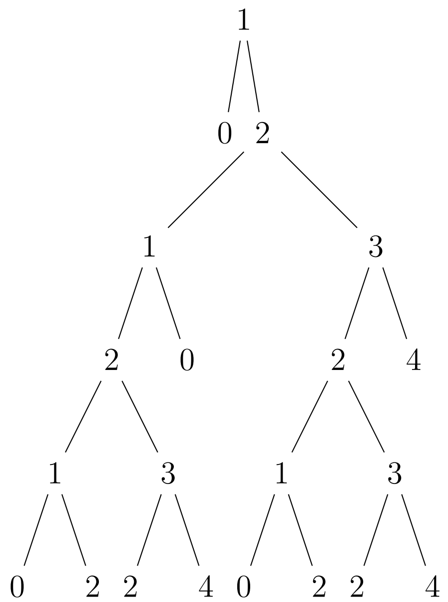
De hecho, si $i_s < s$ hubiera s enteros positivos menores que s; y si $i_s \geq s + 5$, como máximo $12 - (s + 6) + 1 = 7 - s$ valores estarían disponibles para los índices restantes de $8 - s$. Se sigue de (i) y Fig.() que P_1 puede ser reservado por C_{i_1}; P_2 para $C_{i_2}; \ldots; P_8$ por C_{i_8}

Construya el diagrama de árbol para el número de permutaciones de $\{a, b, c\}$

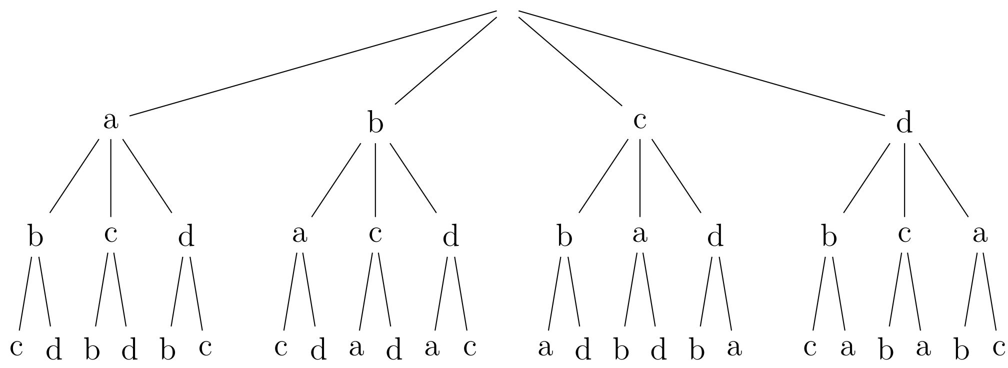


2.30 **Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta al menos cinco veces. En cada jugada gana o pierde un dólar. El hombre comienza con un dólar y dejará de jugar antes de tiempo si pierde todo su dinero o si gana tres dólares, es decir, si tiene cuatro dólares. Encuentra la cantidad de formas en que las apuestas pueden ocurrir.**

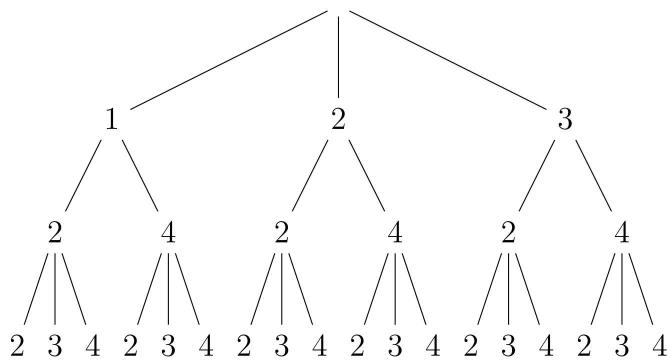
El diagrama de árbol describe la forma en que las apuestas pueden ocurrir. cada número en el diagrama denota la cantidad de dólares que tiene el hombre en ese punto. Observe que las apuestas pueden ocurrir de 11 maneras diferentes. Tenga en cuenta que dejará de apostar antes de que los tiempos de fice estén en solo tres de los casos.



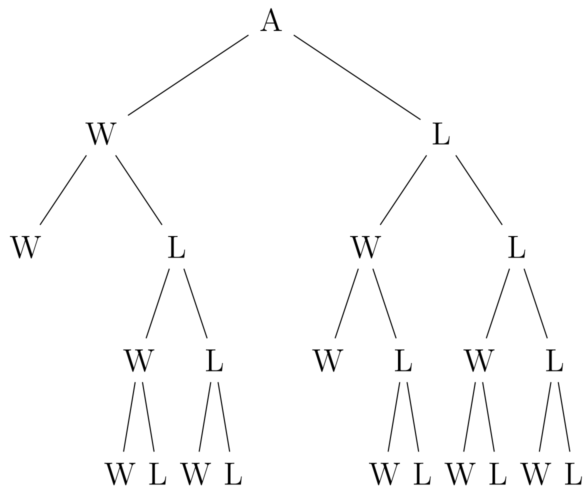
2.68 **Construye el diagrama para el número de permutaciones de** $\{a, b, c, d\}$



2.69 **Encuentre el conjunto de productos** $\{1, 2, 3\} \times \{2, 4\} \times \{2, 3, 4\}$ **construyendo el diagrama de árbol apropiado.**



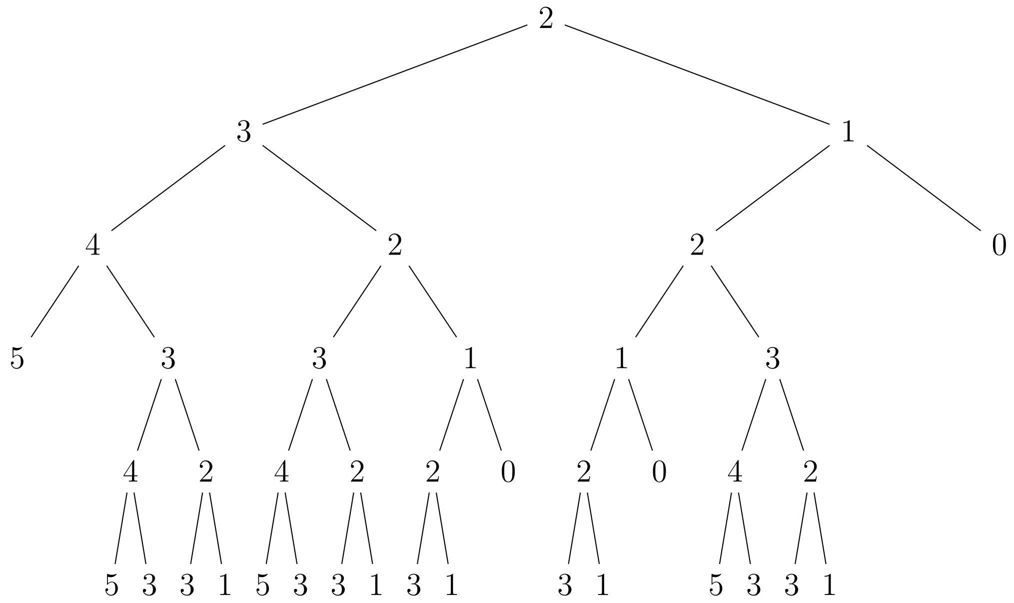
2.70 **Equipos A y B juegan en un torneo de baloncesto. El primer equipo que gana dos juegos seguidos en un total de cuatro gana el torneo. Encuentra la cantidad de formas en que puede ocurrir el torneo.**



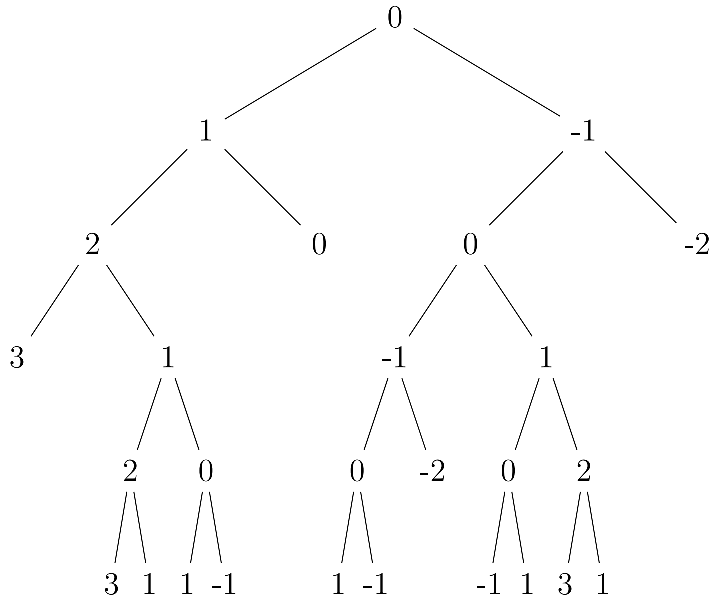
9 maneras

2.71 **Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta cinco veces. él gana o pierde un dólar en cada jugada. El hombre comienza con dos dólares y dejará de jugar antes de los tiempos si pierde todo su dinero o gana tres**

dólares. Encuentre la cantidad de formas en que se puede realizar el palying.



2.72 **Un hombre está en el origen en el eje x toma un paso unitario ya sea hacia la izquierda o hacia la derecha. Se detiene después de 5 pasos o si alcanza 3 o -2. Construye el diagrama de árbol para describir todos los caminos posibles que el hombre puede recorrer.**



25. Propuesta de Examen

1. **Una caja contiene una factura de $1, una factura de $2, una factura de $5, una factura de $10 y una factura de $20. Una persona selecciona una factura al azar. Encuentra cada probabilidad**

    a) La factura seleccionada es de $10

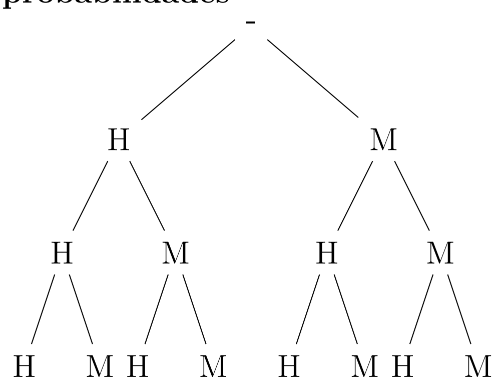
A es el evento que sea seleccionada una factura de \$10
B es el total de facturas
$P(\$10) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{5}$

b) La denominación de la factura seleccionada es mas de \$2
A es el evento donde la factura es mayor a \$2
B es el total de las facturas
$P(\$10) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{5}$ $P(\text{La factura sea mayor a \$2}) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{5}$

c) La factura seleccionada es de una denominación impar
A las factura es denominacion impar
B el total de facturas
$P(\text{La factura es impar}) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{5}$

d) La denominación de la factura es divisible por 5.
A las facturas divisibles entre 5
B el total de facturas
$P(\text{numero es divisible por 5}) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{5}$

2. **Dibuje un diagrama de árbol y encuentre el espacio de muestra para los géneros de los niños en una familia compuesta por 3 niños. Supongamos que los géneros son equiprobables. Encuentre cada una de las probabilidades**



Existen 8 resultados en el espacio muestral:
$\{\{HHH\}, \{HHM\}, \{HMH\}, \{HMM\}, \{MHH\}, \{MHM\}, \{MMH\}, \{MMM\}\}$

a) 3 mujeres
$P(\text{3 sean mujeres}t) = \frac{1}{8}$

b) 2 hombreas y 1 mujeres en cualquier orden
$P(\text{2 hombres y una mujer cualquier orden}) = \frac{3}{8}$

c) Al menos 2 hombres
$P(\text{Al menos 2 hombres}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3. **En cierta facultad el 25 % de los estudiantes falla matematicas, el 15 % falla quimica y el 10 % falla las dos asignaturas. Se selecciona un alumno al azar**

Evento A falla matematicas $P(A) = 0{,}25$
Evento B falla quimica $P(B) = 0{,}15$
Evento C falla ambas $P(C) = 0{,}10$

a) Si falla química, ¿Cuál es la probabilidad de que haya fallado las matemáticas?.
$P(A \cap B) = P(C) = 0{,}10$
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3}$

b) Si falla matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que haya fallado la química?
$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya fallado en matemáticas o química?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}25 - 0{,}10 = 0{,}3 = \frac{3}{10}$

4. **La probabilidad de que un hombre viva mas de 10 años es de $\frac{1}{4}$, y la probabilidad de que su esposa viva más de 10 años es $\frac{1}{3}$.**

Evento A el hombre este vivo en 10 años. $P(A) = \frac{1}{4}$
Evento B su esposa este viva en 10 años.$P(A) = \frac{1}{3}$

a) Encuentra la probabilidad de que ambos sobrevivirán en 10 años.
$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
b) Al menos uno estará vivo en 10 años.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$
c) Ninguno estará vivo en 10 años.
$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$
d) Solo la esposa estará viva en 10 años.
$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

5. **Las probabilidades de que tres hombres alcancen un objetivo son, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. Cada una dispara al objetivo.**

Evento A el primer hombre da en el objetivo. $P(A) = \frac{1}{6}$
Evento B el segundo hombre da en el objetivo. $P(B) = \frac{1}{4}$
Evento C el tercer hombre da en el objetivo. $P(C) = \frac{1}{3}$

a) Encuentre la probabilidad p de que exactamente uno de ellos llegue al objetivo.

$p = P(E) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C)$
$p = P(E) = P(A)P(B^c)P(C^c) + P(A^c)P(B)P(C^c) + P(A^c)P(B^c)P(C)$
$p = P(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72}$

b) Si solo uno alcanza el objetivo, ¿Cuál es la probabilidad de que sea el primer hombre?

$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$

Para mas ejercicios consultar [4]

Referencias

[1] E. Blackburn and E. Eppel. *La solución de los telómeros: Un acercamiento revolucionario para vivir más joven, más sano y más tiempo.* Aguilar. Penguin Random House Grupo Editorial México, 2017.

[2] Seymour. Lipschutz. *Schaum's outline series theory and problems of set theory and related topics.* Schaum's Outline Series,, Singapore,, 1981.

[3] Clifford A. Pickover. *The Math Book.* Sterling, 2012.

[4] M. Spiegel, J. Schiller, and R. Srinivasan. *Schaum's Outline of Probability and Statistics.* Schaum's outline series. McGraw-Hill Education, 2000.

[5] H.Q. Urias and B.R.P. Salvador. *Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Ingeniería y Ciencia Básicas. Grupo Editorial Patria, 2014.