Apuntes de probabilidad

Daniel Valgañón Medécigo

7/8/17

Contents

Chapter 1

Clase 1

1.1 ¿Qué es la probabilidad?

Durante todo el desarrollo de esta rama de las matemáticas se han dado definiciones de lo que es la probabilidad que han sido aceptadas; no obstante, nadie sabe a ciencia cierta qué es la probabilidad. Algunos de las definiciones que se dan en los libros son las siguientes:

- "es una rama de las matemticas que lidia con eventos cuya ocurrencia o no ocurrencia son sujetos a la posibilidad de variación."[1]

- "Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación"[2]

1.2 Origenes de la probabilidad

Aunque la probabilidad y el azar siempre han estado presentes en la mente del ser humano, de una forma u otra, la historia de la probabilidad como ciencia comienza hasta el sigo XVII. Siendo Pierre Fermat y Blaise Pascal intentando resolver algunos problemas relacionados con juegos de azar. Hay quienes indican que el estudio de la probabilidad es de antes, pero no fue hasta el siglo XVII que se empezó a elaborar una teoría aceptable.
En 1657 Christian Huygens escribe el primer libro de probabilidad 'De Ratiociniis in Ludo Alae' el cual es un tratado sobre juegos de azar.
A partir del siglo XVIII se dieron más avances del estudio de la probabilidad, principalmente a causa de la popularidad de los juegos de azar. Algunos de los avances más notorios son los siguientes:

- 1713, la distribución binomial y el teorema de Bernoulli.

[1]Geza Schay, Introduction to Probability with Statistical Applications,Birkhuser, 2007,p1
[2]Seymour Lipschutz, Probabilidad, Schaum, 1998, p38

- 1738, el primer caso particular estudiado del teorema central del límite por 'De Moivre'.
- 1809, Gauss inicia el estudio de la teoría de errores.
- 1810, Laplace termina el desarrollo de la teoría de Gauss.
- 1812, Pierre Laplace publica 'Théorie analytique des probabilités' en el que expone un análisis matemático de los juegos de azar.

A mediados del siglo XIX, Gregor Mendel publica su obra 'La matemática de la herencia', la cual fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de probabilidad a las ciencias naturales.
A principios del siglo XX el matemático ruso *Andrei Kolmogorov* define a la probabilidad de forma *axiomática* y estableció las bases para la teoría moderna de probabilidad.

1.3 Tipos de probabilidad

1.3.1 Probabilidad clásica

Se define como el cociente de casos favorables (A) entre casos totales (Ω):

$$P(A) = \frac{A}{\Omega} \tag{1.1}$$

1.3.2 Probabilidad geométrica

Extensión de la probabilidad clásica donde ahora ahora se mide la relación respecto a la propiedad geométrica (Longitud, area, volumen).

1.3.3 Probabilidad frecuentista

La probabilidad de que un evento ocurra es igual a la cantidad de veces que ocurre este evento entre el número de veces que se repitió el experimento.

1.3.4 Probabilidad subjetiva

A diferencia de los otros tipos de probabilidad dónde existe una relación matemática, este tipo de probabilidad está completamente sujeta al juicio de cada persona.

1.3.5 Probabilidad axiomática

No establece la forma explícita de calcular las probabilidades sino que únicamente se proponen las reglas del cálculo de probabilidades a satisfacer. Este tipo de probabilidad consiste en los axiomas postulados por el ruso Andrey Nikolaevich Kolmogorov.

1.3.6 Probabilidad lógica

Según los logicistas, la posiblidad como grado de creencia racional asociado a cada proposición o grupo de proposiciones, es una cosecuencia que se desprende del diferente grado de implicación que pueda establecerse entre grupos, proposiciones o enunciados. La probabilidad está directamente relacionada con el cuerpo de evidencia existente, pudiendo variar con éste. De esta manera los términos *cierto* y *probable* describen diversos grados de creencia racional en una proposición, aunque a posteriori la evidencia hará que las proposiciones sean simplemente verdaderas o falsas.

1.4 Espacios muestrales

El espacio muestral o espacio muestra de un experimento aleatorio es el conjunto que contiene a cada uno de los posibles resultados que un experimento puede arrojar. Generalmente se le denota con la letra griega Ω mientras que a un resultado particular de dicho experimento se le denota por ω.
Existen dos tipos de fenómenos o experimentos:

- Deterministas: Si se repite el experimento bajo las mismas condiciones, produce el mismo resultado.
- Aleatorio: Si se repite el experimento bajo las mismas condiciones, no siempre produce el mismo resultado y tampoco es predecible.

1.4.1 Espacios muestrales finitos

Como bien menciona su nombre, un espacio muestral finito es aquel que tiene un número finito de elementos. Sea S un espacio muestral finito; digamos:

$$S = a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

un espacio finito de probabilidad se obtiene al asignar a cada punto $a_i \epsilon S$ un número real p_i llamado *Probabilidad* de a_i, que satisface las propiedades siguientes:

1. $p_i \geq 0$ y
2. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Si A es un conjunto de eventos, la probabilidad de A es entonces la suma de la probabilidad de cada uno de los eventos.

1.4.2 Espacios muestrales infinitos

Espacios muestrales infinitos discretos

Es un conjunto con una infinidad de elementos númerables (p.e. los números pares).

Sea S un espacio muestral infinito discreto,

$$S = a_1, a_2, \ldots,$$

obtenemos un espacio de probabilidad asignado a cada $a_i \epsilon S$ un número real p_i tal que:

1. $p_i \geq 0$ y
2. $p_1 + p_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

La probabilidad *P(A)* de un evento A es entonces la suma de las probabilidades de sus elementos.

Espacios muestrales infinitos continuos

Es un conjunto con una infinidad de elementos no númerables (p.e. todos los números entre 1 y 2).

1.5 Axiomas de la probabilidad

Sea S un espacio muestral, ε la clase de eventos y sea P una funcin de valores reales definida en ε. Entonces P se llama *funcin de probabilidad*, y *P(A)* es llamada la *probabilidad* del evento A si se cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 1. Para todo evento A ,$0 \leq P(A) \leq 1$.

Axioma 2. $P(S) = 1$.

Axioma 3. Si A y B son eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Axioma 4. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una serie de eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

1.5.1 Teoremas

Partiendo de los Axiomas presentados en la seccin anterior, podemos deducir los siguientes teoremas:

Teorema 1. Si $\emptyset$es el conjunto vaco, entonces $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2. Si A^c es el complemento de un evento A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Teorema 3. S i$A \subset B$, entonces$P(A) \leq P(B)$.

Teorema 4. Si A y B son dos eventos, entonces $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Teorema 5. S iA y B son dos eventos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Corolario . Para los eventos A, B *y* C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

.

1.6 Probabilidad condicional e independecias

Sea E un evento arbitrario de un espacio muestral S con$P(E) > 0$. La probabilidad de que suceda un evento A tras haber ocurrido el evento E es llamado *La probabilidad condicional de A dado E*, matemticamente se escribe $P(A|E)$ y se define como:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \tag{1.2}$$

1.7 Teorema de la multiplicacin para probabilidad condicional

Si se multiplica (1) en cruz y se usa $A \cap E = E \cap A$, se puede obtener que:

Teorema 6 $P(E \cap E) = P(E)P(A|E)$

corolario 2 Para los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

1.8 Procesos estocasticos finitos y diagramas de rbol

Una sucesin finita de experimentos en los cuales cada experimento tienen un nmero finito de resultados con probabilidades dadas es llamado *Proceso estocstico*. Los diagramas de rbol son utilizados para representar visual y convenientemente estas sucesiones. La manera de encontrar la probabilidad de un evento es usando el teorema de la multiplicacin.

1.9 Particiones y teorema de Bayes

El teorema de Bayes parte de la suposicin que dados los eventos mutuamente excluyentes entre ellos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, su unin es igual a S y que B es un evento existente en S. Expresando lo anterior matemticamente:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} (A_i \cap A_k) = 0$$

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)\ capB$$
$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

Como todas las $A_i \cap B$ son mutuamente exclusivas:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Por teorema de la multiplicacin

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \tag{1.3}$$

Y considerando que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \tag{1.4}$$

Al sustituir (2) en (3) se obtiene el Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

1.10 Independencia

Cuando la probabilidad de que un evento B suceda no es afectada al haber sucedido otro evento A se dice que B es un evento independiente. De tal manera que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1.11 Probabilidad de variables continuas

Si x es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que tome un valor determinado generalmente es 0. Es por eso que para darle sentido se acota a un rango de valores entre los que puede encontrarse X. De tal manera que :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. de tal manera que $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$

Chapter 2

Clase 2

2.1 Conjuntos

Un conjunto puede considerarse como una colección de objetos, llamados *miembros* o *elementos*. En general mientras no se especifique lo contrario, se denotan los conjuntos por una letra mayúscula (A,B,C, ...) y un elemento por una letra minúscula (a,b,c,...). Algunos sinónimos para conjunto son *clase, grupo y colección*.

2.1.1 Subconjuntos

Si cada elemento de un conjunto A también pertenece a un conjunto B llamamos a A un *subconjunto* de B. En notación matemática se escribe $A \subset B$ o $B \supset A$.

2.1.2 Conjunto universo y conjunto vacío

Para muchos propósitos se restringen los elementos a un espacio muestral finito, el cual forma un conjunto denominado *Conjunto universo*, siendo éste el que contiene todos los elementos del contexto. Generalmente se representa con la letra U o S.
Por otra parte, el conjunto vacío no contiene ningún elemento, es un subconjunto de cualquier conjunto y se denota por $\emptyset$.

2.1.3 Operaciones con conjuntos

1. Unión($A \cup B$): El conjunto de todos los elementos que se encuentran en el conjunto A o en el conjunto B.

2. Intesección($A \cap B$): El conjunto de los elementos que son parte de A *y* de B.

3. Diferencia ($A - B$): Conjunto formado por todos los elementos en A y que no pertenecen a B.

4. Complemento (A'): El conjunto complemento de A está formado por todos los elementos del *conjunto universo* y que no se encuentran en A.

2.1.4 Principio de la dualidad

Si en una igualdad se remplaza $\cup$ por $\cap$, $\cap$ por $\cup$, U por $\emptyset$ y $\emptyset$ por U; la igualdad se mantiene.

Teoremas relativos a conjuntos

Ley conmutativa de las uniones:

$$A \cup B = B \cup A. \tag{2.1}$$

Ley asociativa de las uniones:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C. \tag{2.2}$$

Ley conmutativa de las intersecciones:

$$A \cap B = B \cap A. \tag{2.3}$$

Ley asociativa de las intersecciones:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C. \tag{2.4}$$

Primera ley distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.5}$$

Segunda ley distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B). \tag{2.6}$$

Primera ley de DeMorgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'. \tag{2.7}$$

Segunda ley de DeMorgan:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{2.8}$$

Algunos otros teoremas:

$$A - B = A \cup B'$$

Si $A \subset B$, entonces $A' \supset B'$ o $B' \subset A'$.

$$A \cup \emptyset = A.$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$A \cup U = U.$$

$$A \cap U = A.$$

Para cualquier conjunto A y B: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$.

2.1.5 Diferencia entre probabilidad y lógica difusa

Aunque las operaciones entre ambas son similares, representan cosas completamente diferentes. Mientras que la probabilidad indican la frecuencia en la que un evento sucede, la matemática difusa indica que tan parecido es un algo a otro algo.
Por ejemplo: Un hombre perdido en algún desierto se ha quedado sin agua y de pronto se encuentra 2 botellas, ambas etiquetadas con ”0.8 potable” con la diferencia que una decía *probabilista* y la otra *difusa*. Si el hombre elige la botella probabilista tiene la probabilidad de tomar algo que no es potable y lo pueda matar, mientras que si toma la botella difusa tomara algo que no es 100 por ciento potable, pero que es bebible.

2.1.6 Conjuntos difusos

La idea básica de los conjuntos difusos es que un elemento forma parte de un conjunto en un determinado grado de pertenencia y se puede definir como una clase en la que hay una progresión gradual desde la pertenencia al conjunto hasta la no pertenencia.
Cada conjunto difuso tiene una función de pertenencia que sirve para indicar el grado de pertenencia en los elementos del conjunto.

2.1.7 Operaciones de conjuntos difusos

Los conjuntos difusos pueden operarse con tres operaciones básicas: Unión, intersección y complemento.

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{2.9}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \tag{2.10}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \tag{2.11}$$

Unión

Para que una unión se considere difusa tiene que cumplir:
Elemento neutro:

$$\perp(a, 0) = a.$$

Conmutividad:

$$\perp(a, b) = \perp(b, a).$$

Monotonicidad, si $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces:

$$\perp(a, b) = \perp(c, d).$$

Asociatividad:

$$\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c)).$$

Algunas T-normas ampliamente utilizadas son:
Máximo: $\perp(a, b) = max(a, b)$
Producto: $\perp(a, b) = (a + b) - (a \times b)$
Suma limitada (o de Lukasiewick): $\perp(a, b) = min(a + b, 1)$

Intersección

Una T-norma satisface: Elemento unidad:

$$T(a, 1) = a.$$

Conmutividad:

$$T(a, b) = T(b, a).$$

Monotonicidad, si $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces:

$$T(a, b) = T(c, d).$$

Asociatividad:

$$T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)).$$

Algunas T-normas ampliamente utilizadas son:
Mínimo: $T(a, b) = min(a, b)$
Producto algebraico: $T(a, b) = ab$
Diferencia limitada (o de Lukasiewick): $T(a, b) = max(0, a + b - 1)$

Complemento

Un complemento de un conjunto difuso satisface:
Condiciones límite o frontera:

$$c(0) = 1 \text{ y } c(1) = 0$$

Monotonicidad:

$$\forall a, b \in [0, 1] \text{ si } a \leq b \text{ entonces } c(a) \geq c(b)$$

c es una función continua
c es involutiva:

$$\forall a, b \in [0, 1] \text{ se tiene } c(c(a)) = a$$

2.1.8 Conjuntos potencia

El conjunto o familia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama *conjunto potencia* y está representado por *P(A)*. Si un conjunto finito A tiene n elementos, entonces el conjunto potencia *P(A)* tendrá 2^n elementos (subconjuntos posibles).

Cardinalidad

El cardinal del conjunto potencia de un conjunto finito A es 2 elevado a la cardinal de A:

$$|P(A)|= 2^{|A|}. \tag{2.12}$$

Esta relación es el origen de la notación 2^A para el conjunto potencia. Una manera de deducirla es mediante los coeficientes binomiales. Si el conjunto A tiene n elementos, el número de subconjuntos con k elementos es igual al número combinatorio $\binom{n}{k}$. Un subconjunto de A puede tener 0 elementos como mínimo y n como máximo.

$$|P(A)|= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n = 2^{|A|}. \tag{2.13}$$

En el caso de un conjunto infinito la identificación entre subconjuntos y funciones es igualmente válida.

Algoritmo para formar conjuntos potencia

Se puede recurrir a verlo de una manera binaria, es decir que para k elemento de un conjunto su valor es 2^k y entonces los posibles subconjuntos son equivalentes a la numeración binaria hasta 2^n teniendo en cuenta que el 0 corresponde al subconjunto vacío.

2.2 Conteo

Calcular la probabilidad de que un evento A suceda implica saber todos los eventos que pueden ocurrir en el espacio muestral. Existen espacios muestrales sumamente largos por lo que es necesario usar métodos que simplifiquen esta tarea.

2.2.1 ¿Qué es contar?

del latín computāre. Numerar o computar la cantidad de cosas considerándolas cosas homogéneas.
Los matemáticos que se encargan de estudiar la ciencia de contar son conocidos como combinatoristas.

2.2.2 Técnicas de conteo

Usar las imagenes de la sección (5.9).

Principio de la suma

Si un evento puede ocurrir de m formas y otro evento de n maneras, y ambos eventos no pueden ocurrir simultaneamente, entonces uno de los eventos puede suceder en $m+n$ maneras. En general, si $E_i = (i = 1, 2, \ldots, k)$ son k evenetos tales que ninguno de ellos puede ocurrir al mismo tiempo, y si E_i puede ocurrir en n_i maneras, entonces uno de los k eventos puede ocurrir en $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ maneras.

Regla de la multiplicación

En algunos problemas podemos contar directamente el número de posibilidades usando este principio. Esta regla lleva a las reglas de conteo para el muestreo con o sin remplazo.
si un evento se puede realizar de n_1 maneras diferentes y luego un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes, un tercero de n_3 maneras diferentes y así sucesivamente, entonces el número de maneras en las que estos eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.
Este principio se puede visualizar con diagramas de árbol.

2.2.3 Permutaciones

La permutacin u ordenaciones estn definidas por:

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r), \tag{2.14} $$

y se entiende como todas las posibles manera de que sucedan un conjunto de eventos teniendo en cuenta que el orden tiene importancia
Por ejemplo: Cual es la permutacin de las letras A,B,C:

$$ (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A) $$

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, y así sucesivamente es:

$$ \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_3!}. \tag{2.15} $$

Variaciones

Para ser más específicos, una permutación es aquella en la que se toman todos los elementos mientras que una variación es aquella en la que se toman algunos de los elementos. Es decir, para una permutación $r = n$ mientras que en una variación $r < n$.

2.2.4 Combinaciones

A diferencia de la permutación, la combinación sólo toma en cuenta los elementos sin tomar en cuenta el orden de estos. Por ejemplo: ABC es la misma combiancin que CAB o que BCA.

La manera de representar esta operacin es la siguiente: $\binom{n}{r}$ o ${}_nC_r$ y equivale a: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ Entonces:

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}. \tag{2.16}$$

Teorema del binomio

El teorema del binomio, también llamado el binomio de Newton expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a+b)^n$ posee una gran importancia ya que aparece con mucha frecuencia en matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento. Del desarrollo de $(a+b)^n$ se puede observar que:

- El desarrollo tiene n+1 términos.
- Las potencias de a empiezan con n y disminuyen en 1 cada termino, hasta llegar a 0.
- Las potencias de b empiezan en 0 y aumentan en uno por termino hasta llegar a n.
- Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n.
- El coeficiente del primer término es uno y el del seguno es n.
- Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.
- El coeficiente de un término cualquiera es:

  $$C_k = \frac{C_{k-1} * pa_{k-1}}{pb_k}, \tag{2.17}$$

  donde C_{k-1} es el coeficiente del término anterior, pa_{k-1} es la potencia de a del término anterior y pb_k es la potencia de b en el término del que se quiere saber el coeficiente.

Generalizando:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \tag{2.18}$$

Principio de la pichonera

Si hay una pichonera con K cajones y K+1 pichones ingresan en 1 cajón, entonces al menos un cajón tendrá 2 pichones. En terminos más elegantes: si hay k conjuntos, y N elementos distribuidos en dichos conjuntos, donde podemos escribir $N = a(k) + b$, siendo 'a' un entero no negativo y 'b' uno de los números (1,2,3,. . . ,k), entonces hay al menos un conjunto que tiene al menos a+1 elementos.

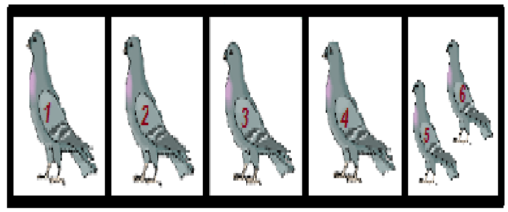


Figure 2.1: Visualización del principio de la pichonera.

2.2.5 Diagramas de árbol

Herramienta utilizada para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de muchas probabilidades se requiere conocer el número de objetos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción de un diagrama de árbol.
En la construcción de un árbol no hay necesidad que cada rama de la misma generación tenga la misma cantidad de ramas emergentes, ni la misma profundidad. Pero que la suma de probabilidades de las ramas de cada nodo debe ser 1 (normalizado).
Para conocer lo que hay en cada nodo de un árbol se necesita hacer un recorrido, este tema se trata en la sec.(6.6).

2.2.6 Stirling

Cuando se quiere sacar el valor de n! de una n de un valor muy grande, esta operación se vuelve complicada, por lo que se utiliza una aproximación con la fórmula de stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{n} \tag{2.19}$$

cuando $n \to \infty$.

2.3 Generalización de cuantos caminos hay de un punto A a un punto B

Para resolver este problema, se realiza una permutación con repeticiones. Pero lo importante es entender el por qué de las cosas.
Lo primero que hay que ver es que esta generalización es válidad para figuras de 2 y 3 dimensiones (cuadrados, rectángulos, cubos y prismas rectangulares). La fórmula es:

$$P_{b+a+p}^{b,a,p} = \frac{(b+a+p)!}{b!\,a!\,p!}, \tag{2.20}$$

donde b son las divisiones de la base, a las de la altura y p las de la profundidad. En caso de ser una figura de 2 dimensiones, p = 0, pero no conflictua la operación, ya que 0! = 1.
Primero hay que entender que se usa una permutación porque el orden de ordenamiento es relevante. Segundo, se tiene que tomar un camino de los disponibles para llegar de A a B, recordando que este valor es la suma de las divisiones en a, b y p, la cantidad es de (a+b+p)! ya que elegido uno, no se puede elegir nuevamente.. Finalmente hay que eliminar los arreglos que se repiten, esto sucede dividiendo entre los productos de las formas de que se puede elegir que camino tomar de a, de b y de p.

Chapter 3

Clase 3

3.1 Falacia del apostador

La falacia del apostador o de Montecarlo consiste en creer que la probabilidad de un suceso cambie dependiendo de los resultados pasados del mismo experimento. Es decir:

- Un suceso aleatorio tendrá más probabilidades de suceder si no ha ocurrido en un lapso de tiempo.

- Un suceso aleatorio tendrá menos probabilidades de suceder si ha ocurrido continuamente en un cierto período de tiempo.

3.2 Tensores

3.2.1 Convenio de suma de Einstein

Se denomina convenio de suma de Einstein, notación de Einstein o notación indexada a la convención utilizada para abreviar la escritura de sumatorios, en el que se suprime el símbolo de sumatorio (Σ). El convenio fue introducido por Albert Einstein en 1916.
Sean 2 índices repetidos, se puede desarrollar como una suma. Por ejemplo el producto punto:

$$\begin{aligned}
\overline{A} \cdot \overline{B} &= |\overline{A}||\overline{B}|cos\theta \\
a_i b_i &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3
\end{aligned}$$

3.2.2 Tensor de Levi-Civita

Es un elemento de rango N sobre un espacio de N grados de libertad totalmente antisimétrico y de modo que, para sus N componentes se cumple:

$$\varepsilon_{123\ldots N} = \varepsilon^{123\ldots N} = 1 \tag{3.1}$$

Y se cumple que:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{Para permutaciones pares} \\ -1, & \text{Para permutaciones impares} \\ 0, & \text{Para índices repetidos} \end{cases} \tag{3.2}$$

Producto Tensorial y Contracción

Para el símbolo de 2 grados de libertad, si se múltiplica por sí mismo se obtiene un tensor de rango 4, el cuál tendra cada uno valores entre 1 y -1:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k.$$

Para el caso de N = 3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk} &= \delta_i^l\delta_j^m\delta_k^n + \delta_i^m\delta_j^n\delta_k^l + \delta_i^n\delta_j^l\delta_k^m - \delta_i^n\delta_j^m\delta_k^l - \delta_i^m\delta_j^l\delta_k^n - \delta_i^l\delta_k^n\delta_k^m \\ &= \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^{jl} \end{aligned} \tag{3.3}$$

De lo anterior se puede destacar:

- El producto tensorial de dos símbolos de rango N procude todas las combinaciones de deltas de kronecker posibles permuando los índices superiores, cambiando de signo según el símbolo.

- A medida que se contrae n veces, las deltas se reagrupan como el producto tensorial de los símbolos de $N - n$ dimensiones.

- El número que multiplica a todas las deltas es el factorial de n.

Para el caso del producto cruz.

$$
\begin{aligned}
(\overline{A}\times\overline{B}) &= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\
&= \widehat{i}(A_2B_3 - A_3B_2) - \widehat{j}(A_1B_3 - A_3B_1) + \widehat{k}(A_1B_2 - A_3B_2) \\
(\overline{A}\times\overline{B})_i &= \varepsilon_{i1k}A_1B_k + \varepsilon_{i2k}A_2B_k + \varepsilon_{i3k}A_3B_k \\
&= \varepsilon_{i11}A_1B_1 + \varepsilon_{i12}A_1B_2 + \varepsilon_{i13}A_1B_3 \\
&+ \varepsilon_{i21}A_2B_1 + \varepsilon_{i22}A_2B_2 + \varepsilon_{i23}A_2B_3 \\
&+ \varepsilon_{i31}A_3B_1 + \varepsilon_{i32}A_3B_2 + \varepsilon_{i33}A_3B_3 \\
= /_{i=1} &= \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 \\
\varepsilon_{123} \to \varepsilon_{132} & \\
&= A_2B_3 - A_3B_2 \\
= /_{i=2} &= \varepsilon_{213}A_1B_3 + \varepsilon_{231}A_3B_1 \\
\varepsilon_{123} \to \varepsilon_{213} \to \varepsilon_{231} & \\
&= -A_1B_3 + A_3B_1 \\
= /_{i=3} &= \varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{321}A_2B_1 \\
\varepsilon_{123} \to \varepsilon_{321} \to \varepsilon_{312} & \\
&= A_1B_2 + A_2B_1
\end{aligned}
$$

Para $x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$:

$$
\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0{}_0 & a^0{}_1 & a^0{}_2 & a^0{}_3 \\ a^1{}_0 & a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_0 & a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_0 & a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}
$$

Donde:

- $x'^0 = Ct'$.
- $x'^1 = X$.
- $x'^2 = Y$.
- $x'^3 = Z$.

Y la matriz $a^{\mu}{}_{\nu}$ es:

$$
\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\beta\gamma}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta\gamma}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

donde:

$$
\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
$$

3.2.3 Electromagnetismo

De las ecuaciones de Maxwell $\partial\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = J^{\nu}$... Las ecuaciones de Maxwell en la forma tridimensional son consistentes con el contenido físico de la relatividad especial. Pero debemos reescribirlas para hacerlas invariantes. La densidad de carga ρ y la densidad de corriente $|J_x, J_y, J_z|$ son unificadas en el concepto de vector cuatridimensional:

$$J^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$$

La ley de la conservación de la carga se vuelve:

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0.$$

El campo eléctrico $|E_x, E_y, E_z|$ y la inducción magnética $|B_x, B_y, B_z|$ son ahora unificadas en un tensor de campo electromagnético (de rango 2, antisimétrico covariante):

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

La densidad de la fuerza de Lorentz es:

$$f_{\mu} = F_{\mu\nu} J^{\nu}.$$

La ley de Faraday de inducción y la ley de Gauss para el magnetismo se combinan en la forma:

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \lambda_{\nu} F_{\lambda\mu} = 0.$$

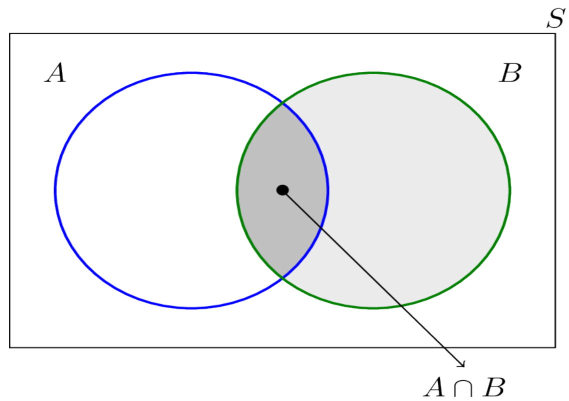
Está ecuacion se puede reducir a sólo cuatro ecuaciones independientes. Usando la antisimetría del campo electromagnético se puede reducir a la identidad o redundar en todas las ecuaciones excpetuando $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 1), (0, 1, 2)$.

3.3 Teorema de la probabilidad total

Si $B_1, B_2, ..., B_n$ son eventos mutuamente exclusivos con probabilidades diferentes de 0 cuya unión es B y A es cualquier evento, entonces:

$$P(A|B) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + ... + P(A|B_n)P(B_n). \tag{3.4}$$

En muchas aplicaciones, es necesario combinar la definición de probabilidad condicional con la del principio de la suma[4]. Tal es el caso de los ejemplos de la sección (7.5).
Este teorema puede utilizarse en situaciones que involucren cualquier cantidad de eventos, se conocen las probabilidades condicionales y se quiere encontrar las probabilidades "incondicionales".



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Figure 3.1: Diagrama de Venn ilustrativo de la probabilidad condicional.

3.4 Probabilidad condicional y Teorema De Bayes

Si A y B son eventos y $P(B) > 0$, entonces la **probabilidad condicional** de A dado B, denotado por $P(A|B)$, se define como[1]:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{3.5}$$

- A es el evento cuya incertidumbre queremos ”actualizar”.
- B es la **evidencia** que se observa (o se quiere tratar como dada).
- $P(A)$ es la probabilidad previa de A.
- $P(A|B)$ es la probabilidad posterior de A.

$P(A|B)$ mide la **probabilidad relativa** de A con respecto al **espacio reducido** B Para un espacio finito equiprobable S:

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|}, P(B) = \frac{|B|}{|S|} \text{ y } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

donde el operador $|B|$ refiere a la cantidad de elementos en B.

1. Es extremadamente importante tener en cuenta que $P(A|B) \neq P(B|A)$.
2. El orden cronológico no dicta que probabilidad condicional podemos observar.

[1] Blitzstein, Definition 2.2.1, p.42

3. Si los eventos son independientes, la probabilidad de un evento no afecta al otro.

4. La probabilidad condicional es usada cuando hay información adicional de la probabilidad de un evento.[2]
Teniendo que $A \cap B = B \cap A$, y de la ec.(3.5) se puede obtener:

$$P(B \cap A) = P(B)P(A|B). \tag{3.6}$$

Para los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:[3]

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots \\ \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Si un suceso A debe resultar en uno de los sucesos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n). \tag{3.8}$$

3.4.1 Teorema de Bayes

Sea:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S$$

Donde cada A_i son mutuamente exclusivas entre ellas, entonces:

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$$

$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

Como todas las $A_i \cap B$ son mutuamente exclusivas:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Del teorema de la multiplicación:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \tag{3.9}$$

Y considerando que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \tag{3.10}$$

Al sustituir (3.9) en (3.10) se obtiene el Teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

[2]Bluman, Probability Demystified
[3]Schaum's Outline of theory and problems of probability

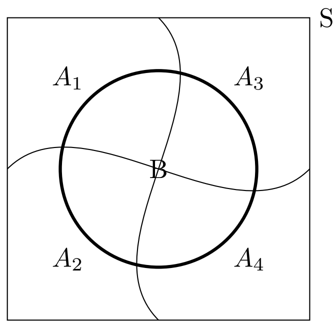


Figure 3.2: Ilustración del teorema de Bayes.

3.5 Eventos dependientes e independientes

3.5.1 Eventos independientes

Dos eventos son independientes si el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primer evento. Si A y B son eventos independientes, la probabilidad de que ambos eventos ocurran es el producto de las probabilidades de los eventos individuales.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

3.5.2 Eventos dependientes

Dos eventos son dependientes si el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento así que la probabilidad es cambiada.La probabilidad de que ambos eventos ocurran es el producto de las probabilidades de los eventos individuales:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

3.5.3 Ejemplo de Evento independiente vs. Independite

Una caja tiene 4 canicas rojas, 3 verdes y 2 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que saquen primero una azul y después una verde si:

1. Hay remplazo.
2. No hay remplazo.

Se tiene que la caja tiene $4 + 3 + 2 = 9$ canicas, por lo que para 1:

$$P(Azul) = \frac{2}{9}.$$

$$P(Verde) = \frac{3}{9}.$$

$$P(\text{Azul y luego verde}) = P(Azul)P(Verde) = \frac{2}{9}\frac{3}{9} = \frac{6}{81}.$$

Esto es porque al regresar la primera canica sacada, la caja sigue teniendo las 9 canicas y la probabilidad de los eventos es independiente. Mientras que en el caso 2 se tiene lo siguiente:

$$P(Azul) = \frac{2}{9}.$$
$$P(Verde|Azul) = \frac{3}{8}.$$
$$P(\text{Azul y luego verde}) = P(Azul)P(Verde|Azul) = \frac{2}{9}\frac{3}{8} = \frac{6}{72}.$$

Como no se regresa la canica, la caja ahora tiene 1 canica menos tras el primer evento. Suponiendo que se salio una canica azul (o en su defecto, no verde), el espacio muestral se reduce pero no así la cantidad de canicas verdes. Por lo que se puede ver claramente que la probabilidad del evento de sacar una canica azul y luego una canica verde es mayor en 2 que en 1.

Chapter 4

Clase 4

4.1 Expectativa

4.1.1 Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central más utilizadas son la media aritmética, la mediana y la moda.[Ten]

Media aritmética

Es la medida de tendencia central más utilizada. Es conocida también como el promedio. Sea n el tamaño de una muestra que contiene a las observaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, la media aritmética, $\bar{x}$, es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4.1}$$

La media es el punto de equilibrio o centro de gravedad de la distribucin de los datos.

Mediana

La mediana es el valor central que se localiza en una serie ordenada de datos. En caso de tener una cantidad *par* de elementos, se tienen 2 valores centrales. La mediana es el centro geométrico de la distribución de los datos.

Moda

Es el valor más frecuente en una serie de datos. En caso de tener dos o más valores con la misma frecuencia máxima, la distribución puede ser multimodal. De igual manera, si no hay un valor que se repita más veces que los otros, no existe la moda.

4.1.2 Diferencia entre las medidas de tendencia central

La media es la más usada de las medidas de tendencias central, sus principales ventajas es que es muy fácil de calcular. Es muy importante en inferencia estadística por las propiedades de su distribución muestral. Su principal desventaja es que debido a que es el punto de equilibrio de la distribución su valor se ve muy afectado por datos extremos, por lo que si la distribución es muy sesgada no es conveniente utilizarla. La principal ventaja de la mediana es que no se ve afectada por valores extremos y por la tanto si la distribución es muy asimétrica o sesgada es una medida que representa mejor a los datos. Su desventaja más importante es que su valor se determina con un solo dato, el dato central de la serie ordenada. La moda por lo general no se usa debido a que no tiene un valor único o puede ser que no exista.

4.1.3 Coeficiente de variación

El coeficiente de variación es una medida de variabilidad es una medida de variabilidad relativa de una serie de datos y se obtiene dividiendo la desviación estándar de los datos entre su media.

$$c.v. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \tag{4.2}$$

Debido a que la desviación estándar y la media tienen las mismas unidades, el coeficiente de variación se expresa por lo general en proporción y se utiliza para comparar la variabilidad de dos o más series de datos.

4.1.4 Varianza y desviación estándar

Frecuentemente la esperanza de una variable aleatoria X se llama la *media* y se denota con la letra μ. Otra cantidad de gran importancia en probabilidad y estadística se llama la *varianza* y se define como:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] \tag{4.3}$$

La varianza es un número no negativo. A la raíz cuadrada positiva de la varianza se le llama *Desviación estandar* y está dada por:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]} \tag{4.4}$$

La desviación estandar se denota por σ en cambio de σ_X, y la varianza por σ^2. Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$, entonces la varianza es:

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2 f(X_j) = \sum (X-\mu)^2 f(X). \tag{4.5}$$

En el caso especial de eq.(4.5) donde las probabilidades son todas iguales:

$$\sigma^2 = \frac{\left[(X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + \cdots + (X_n-\mu)^2\right]}{n}.$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces la varianza es:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx. \tag{4.6}$$

La varianza y la desviación estandar son una medida de la dispersión o variación de los valores de la variable aleatoria alrededor de μ. Si los valores tienden a concentrarse alrededor de la media, la varianza es pequeña; en tanto que si los valores tienden a distribuirse lejos de la media, la varianza es grande.[5]

4.2 Teorema del valor medio o Valor promedio de una función

Para casos de una función continua en la cual tiene un valor infinitesimal de valores, no es posible aplicar la media aritmética como se hace con una cantidad finita de valores. Es por eso que se usa el teorema del valor medio, el cuál dice que *Si una función es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$*, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \tag{4.7}$$

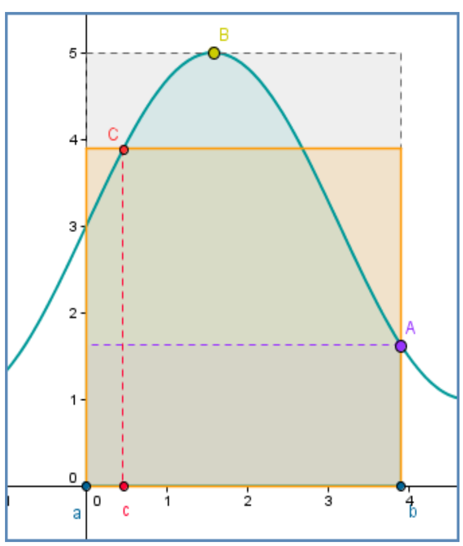


Figure 4.1: Representación gráfica del teorema del valor medio.

4.3 Coeficiente de asimetría o Skewness

Determina el grado de asimetría que posee una distribución. Para el caso de funciones simétricas como la normal o la t-student, este coeficiente es cero, y analíticamente se representa por:

$$S_k = \frac{\sum \left(\frac{x_i - \hat{x}}{\sigma} \right)^3}{n}. \tag{4.8}$$

Donde n representa el tamaño muestral.
Este coeficiente indica si la cola más larga de la distribución se encuentra cargada hacia algún lado. Cuando la cola más larga se encuentra hacia la izquierda de la distribución, el coeficiente de skewness será negativo y viceversa, se dice entonces que la distribución es sesgada a esa dirección.
El coeficiente de Skewness tiene su propia distribución que se deriva asintóticamente, y que permite hacer inferencia con muestras finitas. La distribución es una normal, media 0 y varianza $\frac{6}{n}$.

$$f(S_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{6}{n}}} e^{-0.5\left(\frac{S_k^2}{\frac{6}{n}}\right)}.$$

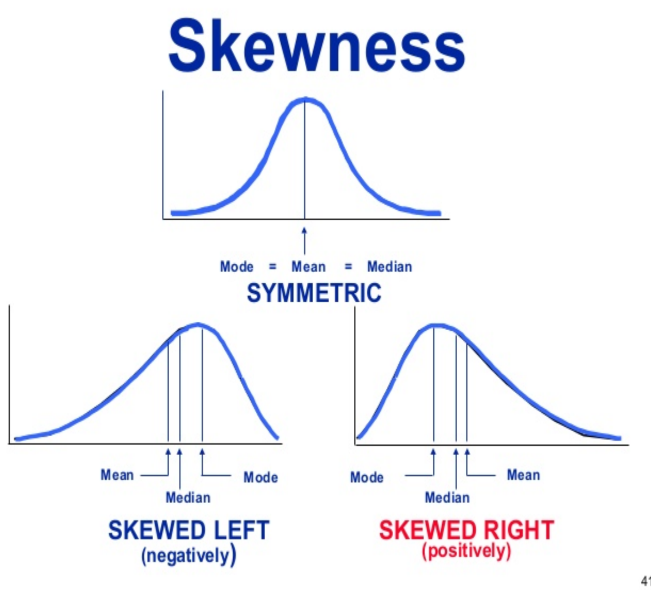


Figure 4.2: Relación de Skewness y medidas de tendencia central

Además existen diversas definiciones matemáticas de skewness según varios autores. Algunas de estas son[Wiki]:

Coeficiente de momento de Skewness de Pearson

El Skewness de una v.a. X es la tercer momento estandarizado γ_1, definido como:

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Donde E es el operador de esperanza y μ_3 es el tercer momento central.

Skewness muestra

Para una muestra de n valores, un estimador natural para método de momentos de la población de skewness es:

$$b_1 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^3}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}^{\,3}}.$$

Primer coeficiente de skewness de Pearson (skewness moda)

Está definido como:

$$\frac{\text{media} - \text{moda}}{\text{desviación estandar}}.$$

Segundo coeficiente de skewness de Pearson (skewness mediana)

Está definido como:

$$\frac{3(\text{media} - \text{mediana})}{\text{desviación estandar}}.$$

Coeficiente de Groeneveld y Meeden

Groeneveld y Meeden sugirieron como una medida alternativa de skewness:

$$B_3 = skew(X) = \frac{(\mu - v)}{E(|X-v|)},$$

donde μ es la media, v es la mediana. Este coeficiente es muy parecido al segundo coeficiente de skewness de Pearson.

Skewness distancia

Un valor de Skewness de 0 no implica que la distribución de probabilidad sea simétrica. Por lo que es necesario una medida de asimetria adicional.

$$dSkew(X) := 1 - \frac{E||X-X'||}{E||X+X'||} \text{ si } Pr(X=0) \neq 1.$$

4.3.1 Corrección de Bessel

En estadística, la corrección de Bessel utiliza a $n-1$ como denominador en el calculo de la varianza muestral y en la desviación estandar muestral, en lugar de usar n. Esto con el proposito de corregir el sesgo estadístico en la estimación de la varianza poblacional y algunos sesgos en la estimación de la desviación estándar poblacional.
Cuando se estima la varianza y la desviación estándar poblacional desconocida a partir de una muestra, la varianza muestral es estimada como $\frac{\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2}{n}$, pero esto es un estimador sesgado de la varianza poblacional. Al usar la corrección de Bessel el estimador insesgado es uniformemente mayor que el sesgado.
Un aspecto sútil de esta corrección implica que, mientras que la varianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional, su raíz cuadrada sigue siendo un estimador sesgado del desvío estándar poblacinal.

4.4 Funciones de distribución

4.4.1 Distribución Bernoulli

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Bernoulli con parametro p si $P(X=1)=p$ y $P(X=0)=1-p$, donde $0<p<1$. Se puede escribir como $X \sim Bern(p)$. $\sim$ se lee como *Está distribuido como*.
Cualquier v.a. cuyos posibles valores son 0 y 1 tienen una distribución $Bern(p)$ con p la probabilidad de la v.a. igual a 1. El número p en $Bern(p)$ se llama *parametro de distribución* y determina que distribución de Bernoulli se usará. Es decir, no existe una sola distribución de Bernoulli, sino una familia indexada por p. De esta manera, la manera correcta de especificar la distribución de X es: "Tiene distribución Bernoulli con parametro p.
Cualquier evento tiene una v.a. Bernoulli que está naturalmente asociada con ésta, igual a 1 si el evento pasa o 0 si no. Esto es llamado la *variable aleatoria indicadora* de un evento.[2]

4.4.2 Distribución Binomial

En un experimento en el que se realizan multiples pruebas y la probabilidad asociada a un evento entre pruebas no cambia entre pruebas (Pruebas de Bernoulli). Sea p la probabilidad de que un sucesa ocurra en una sola prueba de Bernoulli (Probabilidad de éxito). Entonces $q=1-p$ es la probabilidad de que dicho suceso no ocurra (Probabilidad de fracaso). La probabilidad de que el suceso ocurra x veces en n pruebas (es decir que ocurran x éxitos y $n-x$ fracasos) está dada por la función de probabilidad:

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}. \tag{4.9}$$

La función de probabilidad discreta (4.9) con frecuencia se denomina *distribución binomial* puesto que para cada x corresponde a los términos sucesivos en la expansión binomial.[5]

Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{npq}$
Coeficiente de Skewness	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sigma}$
Coeficiente de Curtosis	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{\sigma}$
Función generatriz de momentos	$M(t) = (q + pe^t)^n$
Función característica	$\phi(\omega) = (q + pe^{i\omega})^n$

Table 4.1: Tabla de propiedades de la distribución binomial.

4.4.3 Distribución normal

Una de las distribuciones de probabilidad continua más importante es la distribución normal (distribución Gaussiana), y está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty. \tag{4.10}$$

Donde μ y σ son la media y la desviación típica respectivamente. La función de distribución correspondiente está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv. \tag{4.11}$$

En este caso se dice que la variable aleatoria X está normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2.
Si se hace que Z sea la variable normalizada correspondiente a X:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

entonces la media o valor esperado de Z es 0 y la varianza es 1. De tal manera que:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}.$$

Este resultado se conoce como la distribución de densidad normal tipificada. La función de distribución correspondiente:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Algunas veces el valor de z es llamado valor tipificado. La función $F(z)$ se encuentra relacionada con la función de error, $erf(z)$:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2} du \text{ y } F(z) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Media	μ
Varianza	σ^2
Desviación típica	σ
Coeficiente Skewness	$\alpha_3 = 0$
Coeficiente de curtosis	$\alpha_1 = 3$
Función generatriz de momentos	$M(t) = e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}$
Función característica	$\phi(\omega) = e^{i\omega\mu - (\sigma^2\omega^2/2)}$

Table 4.2: Propiedades de la distribución normal

Si n es muy grande y ni p ni q están muy próximas a 0, la distribución binomial puede aproximarse estrechamente a la distribución normal con variable tipificada:

$$Z = \frac{X - np}{\sigma}.$$

Donde X es la v.a. que da el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli. Entre mayor n mejor la aproximación.

4.4.4 Distribución de Poisson

Sea X una v.a. discreta que puede tomar los valores $0, 1, 2, \ldots$ tal que la función de probabilidad de X esté dada por

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^-\lambda}{x!}, \tag{4.12}$$

donde λ es una cte. positiva dada.

Media	$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \lambda$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
Coeficiente de sesgo	$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Función generatriz de momentos	$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Función característica	$\phi(\omega) = e^{\lambda(e^{i\omega - 1})}$

Table 4.3: Propiedades de la distribución de Poisson

En la distribución binomial, si n es grande mietras que la probabilidad p es cercana a 0, se llama suceso raro. En tales casos la distribución binomial se aproxima mucho a la distribución de Poisson con $\lambda = np$, $q \approx 1$ y $p \approx 0$.
Al existir cierta relación entre las distribuciones binomial y normal, y binomial y Poisson se deduce que existe relación entre la distribución normal y la de Poisson.

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \leq \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

La distribución de Poisson tiende a la distribución normal a medida que $\lambda \to \infty$ ó $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ es normal asintóticamente.

4.4.5 Distribución Multinomial

Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pueden ocurrir con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$ donde $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son las variables aleatorias respectivamente que dan el número de veces que $A_1 + A_2, \ldots, A_k$ ocurre en un total de n pruebas, de modo que $X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$, entonces:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} \tag{4.13}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, es la función de probabilidad conjunta para las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
Esta distribución es una generalización de la distribución binomial y es el término general en la expansión multinomial de $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n$.

4.4.6 Distribución hipergeométrica

En un experimento que tiene distribución binomial, se tiene que el muestreo es con remplazamiento. Si el experimento se modifica para que el muestreo sea sin remplazamiento, entonces:

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{Np+Nq}{n}} \tag{4.14}$$

Donde:

- $Np =$ Casos favorables.
- $Nq =$ Casos no favorables.
- $n =$ Cantidad de pruebas efectuadas.

Su media y varianza son:

$$\mu = np, \sigma^2 = \frac{npq(N-n)}{N-1}$$

Cuando $N \to \infty$,(4.14) se reduce a la distribución binomial. Esto porque para una N grande el muestreo sin remplazamiento es similar al muestreo con remplazamiento.

4.4.7 Distribución uniforme

La distribución uniforme ocurre cuando una variable aleatoria X está distribuida uniformemente en $a \leq x \leq b$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0, \text{ de otra forma} \end{cases}$$

La función de distribución está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x < b \\ 1, x \geq b \end{cases} \tag{4.15}$$

La media y la varianza son:

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b).$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

4.4.8 Distribución de Cauchy

Una variable X tiene la distribución de Cauchy, si la función de densidad de X es:

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, a > 0, -\infty < x < \infty$$

Esta función de densidad es simétrica con respecto a x=0 así que su media puede tomarse como 0. Sin embargo no existen la varianza y otros momentos superiores. Análogamente no existe la función generatriz de momentos. No obstante la función característica existe y está dada por:

$$\phi(\omega) = e^{-a\omega}$$

4.4.9 Distribución Gamma

Una v.a. tiene esta distribución si su $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \quad , (\alpha, \beta) > 0$$

Donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma. La media y la varianza están dadas por:

- $\mu = \alpha\beta$.
- $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

Su función generatriz de momentos y la función característica están dadas respectivamente por:

- $M(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$.
- $\phi(\omega) = (1-\beta i\omega)^{-\alpha}$.

4.4.10 Distribución Beta

Una variable aleatoria X tiene la distribución beta si la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, 0 < x < 1 \\ 0, \text{ de otra forma} \end{cases} \quad , (\alpha, \beta > 0)$$

Donde $B(\alpha, \beta)$ es la función beta.
La media y la varianza son:

- $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
- $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Para $\alpha > 1, \beta > 1$ hay una única moda en el valor:

$$x_{moda} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

4.4.11 Distribución Chi-cuadrado

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_v$ v variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media cero y varianza 1. Considerese la v.a chi-cuadrado: $x^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_v^2$. Entonces podemos demostrar que para $x \geq 0$:

$$P(x^2 \leq x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \int_0^x u^{(v/2)-1} e^{-u/2} du \tag{4.16}$$

y para $P(x^2 \leq x) = 0$ para x¡0. v es el número de grados de libertad. Esta distribución tiene la función de densidad correspondiente dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Se puede ver que chi-cuadrado es un caso especial de la distribución gamma con $\alpha = v/2, \beta = 2$. Por lo tanto:

- $\mu = v$.
- $\sigma^2 = 2v$.
- $M(t) = (1 - 2t)^{-v/2}$.
- $\phi(\omega) = (1 - 2i\omega)^{-v/2}$.

4.5 Población y muestreo

Con frecuencia en la práctica se está interesado en extraer conclusiones válidas respecto a un grupo grande de individuos u objetos. En vez de examinar un grupo entero (*población*), lo cual puede ser difícil o imposible, se puede examinar una parte pequeña de esta población (*muestra*). Esto se hace con el propósito de interferir ciertos hechos respecto de la población con los resultados hallados en la muestra. Este proceso es conocido como *inferencia estadística*. El proceso de obtener muestas se llama *muestreo*[5].

4.5.1 Muestreo con y sin remplazamiento

El muestreo donde cada miembro de una población puede seleccionarse más de una vez se llama *muestreo con remplazamiento*, de caso contrario se trata de un *muestreo sin remplazamiento*. Una población finita muestreada con remplazamiento puede teóricamente considerarse infinita. En general para poblaciones finitas muy grandes, se puede considerar una población infinita.

4.5.2 Muestras aleatorias

La confiabilidad de las conclusiones extraídas concernientes a una población, dependen de si se ha escogido **apropiadamente** de tal manera que represente la población lo suficientemente bien; la selección correcta de una muestra es uno de los problemas más importantes de la inferencia estadística.
Una forma de hacer esto para poblaciones finitas es asegurarse de que cada miembro de la población tenga la misma probabilidad de encontrarse en la muestra (*muestra aleatoria*). Esto se puede efectuar para poblaciones relativamente pequeñas extrayendo lotes o utilizando una tabla de *números aleatorios* construida específicamente para tales propósitos. Debido a que la inferencia de la muestra a la población puede ser equivacada, se debe emplear el lenguaje de probabilidad en cualquier proposición de conclusiones.

4.5.3 Corrección de Bessel

En estadística, la corrección de Bessel utiliza a $n-1$ como denominador en el calculo de la varianza muestral y en la desviación estandar muestral, en lugar de usar n. Esto con el proposito de corregir el sesgo estadístico en la estimación de la varianza poblacional y algunos sesgos en la estimación de la desviación estándar poblacional.
Cuando se estima la varianza y la desviación estándar poblacional desconocida a partir de una muestra, la varianza muestral es estimada como $\frac{\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2}{n}$, pero esto es un estimador sesgado de la varianza poblacional. Al usar la corrección de Bessel el estimador insesgado es uniformemente mayor que el sesgado.
Un aspecto sútil de esta corrección implica que, mientras que la varianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional, su raíz cuadrada sigue siendo un estimador sesgado del desvío estándar poblacinal.

4.5.4 Parametros poblacionales

Se considera que se conoce una población cuando se conoce la distribución de probabilidad $f(x)$ de la variable aleatoria asociada X. Cuando se conoce la población, de manera que se conoce $f(x)$, entonces se conocen también los parámetros poblacionales. En el caso de que no se conozca precisamente $f(x)$ pero se tiene una idea que permita formular alguna hipótesis relativa al comportamiento de $f(x)$.
A partir de muestras aleatorias de la población, se pueden estimar los parámetros poblacionales.

4.6 Intervalos de confianza para medias

La estima de un parámetro poblacional dada por un número se llama estima de punto del parámetro. La estima de un parámetro poblacional dada por dos números entre los cuales se considera que se encuentra dicho parámetro se llama estima de intervalo del parámetro. La precisió o conocimiento del error de una estima se conoce también como su seguridad.
Como ya se ha descrito en este trabajo, σ es la letra con la que se representa a la desviación estándar. Cuando en estadística y procesos de calidad se habla del nivel sigma (6 $/sigma$ por ejemplo), en realidad se habla de *cuantas desviaciones estándar caben entre los límites de especificación del proceso*(leansolutions.co).

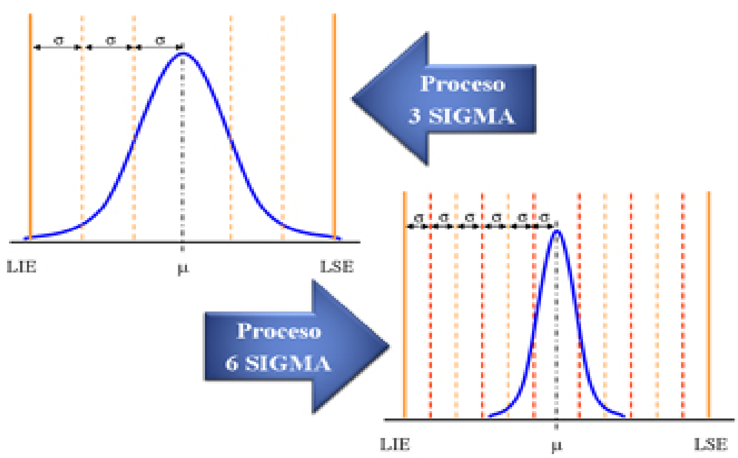


Figure 4.3: Representación del nivel sigma.

Chapter 5

Complementos

5.1 Trabajo de Mendel

En 1856, Johann Gregor Mendel (1822 - 1884) comienza un proyecto de investigación usando ratones los cuales terminaría sustituyendo por abejas, plantas y finalmente por guisantes de jardín. Estos últimos debido a que crecen rápidamente, producen muchas semillas y pueden cruzarse unos con otros de una manera simple y controlada.
Mendel fue capaz de descubrir principios fundamentales de la herencia que aplican a muchas clases diferentes de organismos, aplicables incluso a la genética de seres humanos.
Para hallar estos principios, Mendel estudió la herencia de siete características diferentes, en los que se incluía la altura, color de la flor, color de la semilla y forma de ésta última.
Primero estableció líneas de guisantes con dos formas diferentes de una característica, por ejemplo Altura grande frente altura baja. Después cultivó estas líneas por generaciones hasta que fueron genéticamente puras [1], luego las cruzó y observó ómo se heredaban los rasgos.
Además de registrar el aspecto de las plantas en cada generación, contó el número exacto de plantas que mostraban cada rasgo.
Sorprendentemente encontró patrones muy similares de herencia para las siete características que estudió:

- Una forma de característica, como planta alta, ocultaba a la otra forma, planta baja por ejemplo, en la primera generación después del cruzamiento. A esta característica la llamó *rasgo dominante* y a la ocula *rasgo recesivo.*
- En la segunda generación, después de permitir la autofecundación entre las plantas, la forma oculta del rasgo reapareció en una minoría de plantas. Mostrandose siempre a una razón de 1 de cada 3.

[1] siempre producen descendientes idénticos a los padres

- La herencía de una característica no influencía la herencia de otras características.

En 1865 presenta los resultados de sus experimentos con casi 30,000 plantas ante la Sociedad de Historia Natural. Mendel, entonces, propusó:

- Características como el color, altura y forma eran controladas por pares de factores que vienen en diferentes versiones.
- La forma dominante podía enmascarar la presencia en la forma recesiva.
- Los dos factores apareados se separan durante la producción del gameto, de forma que cada gameto recibió aleatoriamente sólo un factor.
- Los factores que controlaban diferentes características se heredaron independientemente uno de otro.

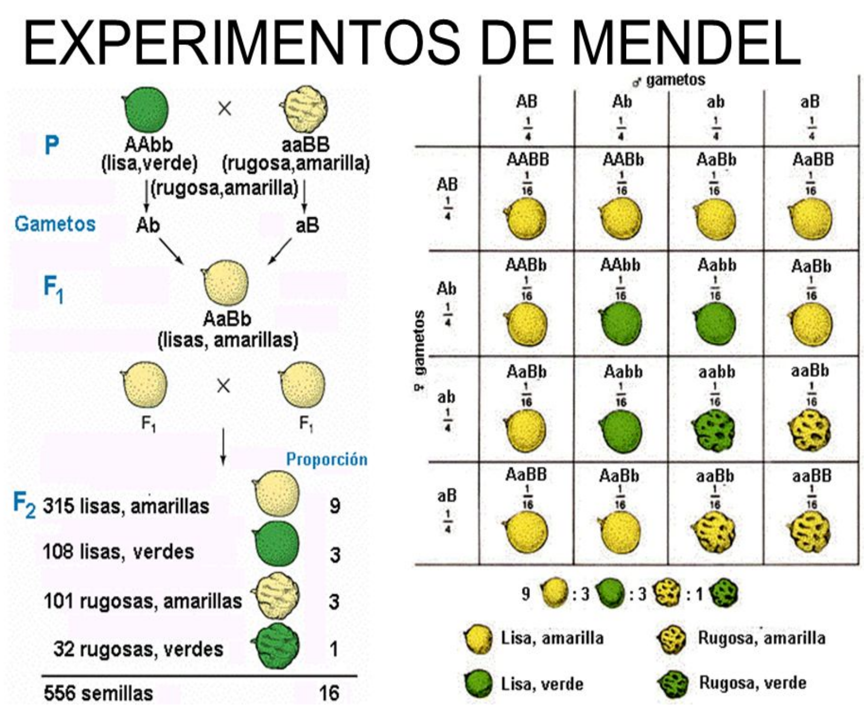


Figure 5.1: Representación de los experimentos de Mendel.

5.2 Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es un fractal descrito en 1915 por Waclaw Sierpinski. Es una estructura que ocurre a diferentes niveles de iteración o magnificación.

Un algoritmo para construirlo es el siguiente:

1. De un triángulo encuentre los puntos medios de sus aristas.
2. Conectar los puntos encontrados. Formando nuevos triángulos.
3. Repetir este proceso, el cual puede ser repetido una infinidad de veces.

El triángulo de Sierpinski genera el mismo patrón que el módulo 2 del triangulo de Pascal. Es decir que los números par corresponden a los "espacios" en blanco del triángulo de Sierpinski. De igual manera si se toma el módulo n del triángulo de pascal se obtienen patrones encontrables en el triángulo de Sierpinski.

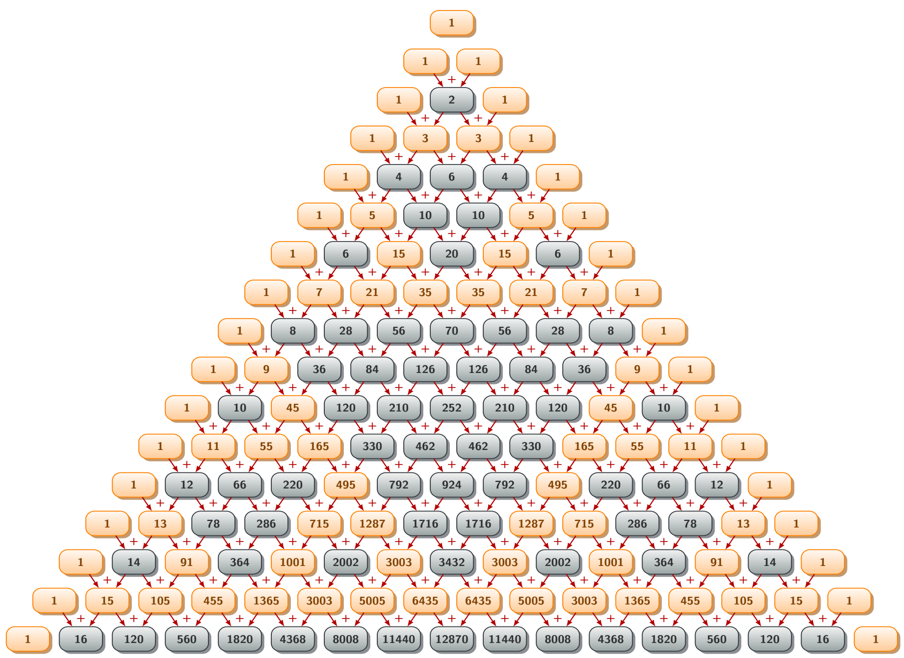


Figure 5.2: Triángulo de Sierpinski para números pares.

5.3 El pixel ante el ojo humano

5.3.1 ¿Qué es un pixel?

Surge del inglés *Picture Element* que se traduce a *Elemento de imagen* y consiste en la unidad homogénea más pequeña, en color, que compone a una imagen. El pixel es el elemento fundamental para la existencia de las imágenes digitales.

Las cuales están formados en un arreglo bidimensional de píxeles.
Los pixeles tienen color y para hablar del color que puede tener un pixel se tiene que tomar en cuenta la *profundidad del color* que no es sino la forma de codificación de los pixeles. Entre estas maneras de representar el color de un pixel se encuentran el *RGB* y el *CYB*, en ambos casos, la combinación de los tres elementos forman el color que tendrá cada pixel.

5.3.2 El ojo humano

Aunque el ojo humano es un órgano de visión muy complejo, hay quienes dicen que la resolución máxima del ojo humano es de *250 Megapíxeles*.
Este valor se obtiene al hacer la analogía de como una cámara digital crea una imagen. Para registrar los píxeles, la cámara hace uso de los componentes fotosensibles (photosites). En el ojo humano estos componentes son los conos y bastones, que son las células fotosensibles de la retina. En total tenemos 250 millones de estas células pero aquí no termina la complejidad de la vista humana, ya que los conos y bastones no están distribuídos uniformemente, además de que las imágenes captadas por el ojo humano se entrelazan, lo que incrementa la resolución.
En la actualidad se buscan métodos modernos para crear cámaras con mayor resolución, tal es el caso de los celulares con doble cámara.
A diferencia de una cámara el ojo humano no obtiene imagenes estando en una posición fija, el ojo humano se puede mover. Esto hace que no se pueda calcular de forma exacta la resolución del ojo. Aunque no se puede calcular exactamente la resolución del ojo humano, se puede calcular un aproximado en base con los datos que se tienen de este.
La retina tiene alrededor de 5 millones de conos receptores, responsables de la visión a color (5 MP), tomando en cuenta que los 100 millones de bastones que detectan el contraste monocromático (105 MP). El movimiento de los ojos, el cual en promedio es de 120 grados horizontal y 60 grados en vertical, añadiendo que según Clarkvision cada píxel es de al rededor 0.3 arcmin, y haciendo algunos cálculos matemáticos, el resultado es de 576 megapíxeles de resolución.

5.3.3 Pantalla de retina

La pantalla de retina obtiene su nombre debido a la gran densidad de pixels que hay por pulgada, 326 para ser exactos. El ojo humano sólo es capaz de llegar a distinguir los píxeles en una densidad de hasta 320 píxeles por pulgada, por lo que el ojo no es capaz de diferenciar entre un píxel y otro.

5.3.4 La imagen de mayor resolución

3 de las imagenes con mayor resolución son las siguientes:

1. Foto de Mont Blanc: Está imagen consiste de 353 *Gigapíxeles*. El fotógrafo Filippo Blengini y un equipo subieron a los 3500 metros de la montaña

y con las herramientas necesarias tomaron 70,000 fotografías de muy alta resolución. La memoria necesaria para almacenar tanta información fue de 46 Terabytes. Finalmente con uso del procesamiento digital y 2 meses de trabajo, se encajo cada fotografía para así lograr la ya mencionada imagen.

2. Costa de la región de Murcia, tomada por Carlos Caravaca y está formada por 401.72 Gigapíxeles (1,335,000 x 300913). Está compuesta por 8967 fotos interpoladas y como dato curioso, se puede reconocer la región de Aledo, situada a casi 75 Km.

3. En la página web de los record Guiness se tiene registro de una imágen de 846.07 Gigapíxeles, consiste de 31,000 imágenes. Fue lograda en la universidad de tecnología creativa internacional el 6 de agosto de 2015.

5.4 The Mαth βook

El acercamiento del autor al lector del libro está muy bien logrado, hace una aproximación a la utilidad de las matemáticas y de como es que podemos encontrar patrones en la naturaleza que se pueden expresar matemáticamente, o que encontramos inspiración matemática al observar la naturaleza. Considero que tiene una visión muy conciente de la posición del ser humano ante el universo. Mantiene una opinión muy humilde de las limitantes que tenemos como especie y de que muchos de los grandes avances que hemos tenido son gracias al uso de herramientas que permitieron superar nuestras limitantes.
Tengo una opinión muy similar a la del autor, hay cosas que descubrimos y sólo para darnos cuenta de que no entendemos otras muchas. Las matemáticas son maravillosas. Tanto que todo lo que sabemos puede expresarse matemáticamente. Lo increíble es que conceptos de matemáticas no son exclusivos al ser humano. Aunque quizá seamos los únicos en realizar a conciencia cálculos matemáticos, otras especies muestran comportamientos que nos dan a pensar en su capacidad para realizar algunos tipos de cálculos. Entender o investigar en el comportamiento, como ya mencioné anteriormente, nos ayuda a desarrollar tecnologías o a tener descubrimientos matemáticos.[3]

5.4.1 El odómetro de las hormigas (150 Millones A.C.)

Hormigas del desierto del Sahara cuentan con podómetros "incluídos" que les permiten calcular distancias exactas y usan la dirección del Sol para orientarse. Experimentos muestran que al agregarles extensiones a sus patas, al intentar regresar al hormiguero se pasaban de largo. Mientras que si se les recortaban, no alcanzaban a llegar. Esto sugiere que el tamaño de sus extremidades es de suma importancia.

Figure 5.3: Hormiga del desierto del Sahara.

5.4.2 Primates que cuentan (30 millones A.C.)

Hay animales como los pericos y ardillas que pueden ser entrenados para contar. Otros animales muestran comportamientos en los que se muestra un cierto tipo de capacidad para contar. Hay quienes han entrenado a primates para distinguir números. Tal es el caso de Tesutsuro Matsuzawa quien entreno a un chimpance para que reconociera números del 1 al 6, o Michael Beran quien entreno a 2 chimpances para que hicieran match de un numero con una serie de puntos. Después de 3 años, estos pudieron hacerlo pero con un mayor margen de error.

Figure 5.4: Chimpancé reconociendo números en un monitor.

5.4.3 Números primos generados por cigarras (1 Millon A.C.)

Algunas cigarras muestran un comportamiento muy peculiar, en la que salen a la superficie para reproducirse en periodos de tiempo de 13 o 17 años. Posiblemente debido a una evolución para evitar ser devorados por sus depredadores con periodos de vida más cortos.

Figure 5.5: Cigarra.

5.4.4 Huesos de Ishango (18000 A.C.)

Huesos de babuino Ishango encontrados en la República democratica del Congo con marcas a lo largo del mismo han causado especulación con respecto al hecho de si quienes los utilizaban los usaban para cosas más allá de un simple conteo. Incluso se bromea con la frase "La menstruación creo las matemáticas" al haber quien hace la hipótesis de que las marcas de los huesos era para ayudar a las mujeres a llevar un control de su ciclo menstrual.

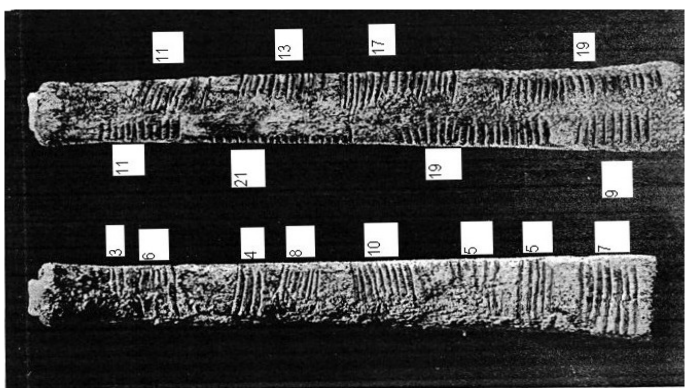


Figure 5.6: Huesos de ishango con conteo de sus marcas.

5.4.5 Stirling's Formula

A veces el conocimiento parece algo no tan lejano, pero saber que la notación de factoriales está desde 1808, me deja pensando en lo relativo del tiempo. He tenido que utilizar factoriales para distintos cursos de probabilidad a lo largo de mi vida y sin duda alguna, el calculo de estos números a veces era un problema debido a su valor, $porejemplo$70! ¿ 10ˆ100. Coincido que la formula de Stirling eq.(2.19) es bastante conveniente e interesante. Tener dos constantes que encontramos en tantos lados ($\pi y e$) para encontrar una aproximación al valor de n! es maravilloso.

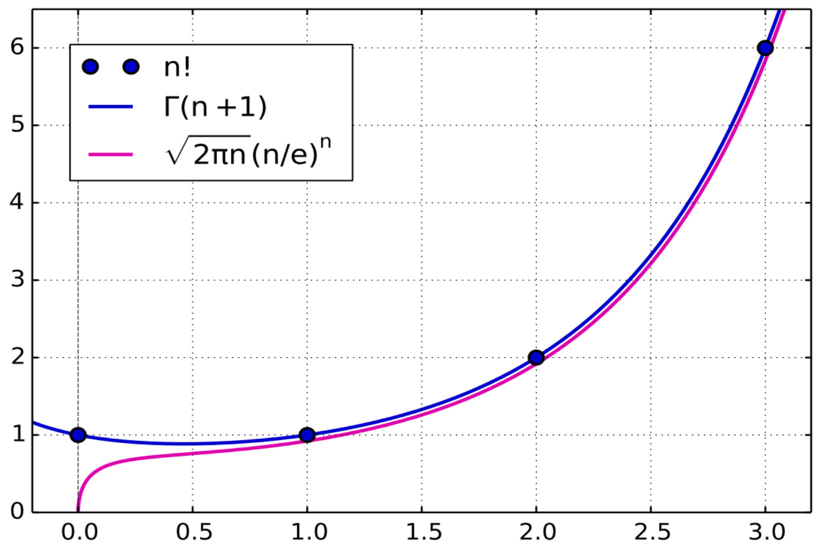


Figure 5.7: Gráfica de la aproximación n! y formula de Stirling.

5.4.6 Bayes' Theorem

En el libro abordan este tema de manera muy rápida y más que explicar el teorema de Bayes como tal, creo que lo maneja más como la explicación de la probabilidad condicional. Que si bien, Bayes es muy apegado a la probabilidad condicional, es importante hacer mención de que las particiones son mutuamente exclusivas, dato que no se menciona en el libro. Al menos no explícitamente.

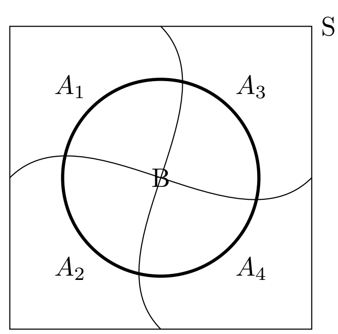


Figure 5.8: Ilustración del teorema de Bayes.

5.4.7 Pigeon Principle

Lo primero que noté fue el nombre original de este principio: *Schubfachprinzip*. Eso sí suena más alemán.
A parte del nombre, lo que más llamó mi atención fue ver que este principio se usa más allá del campo de la probabilidad. Por ejemplo en la compresión de información en computadoras.

5.4.8 Principia Mathematica

Aunque las matemáticas son fundamentales para entender cualquier cosa, sigo sin sentir esa pasión que lleva a un par de personas a escribir tres tomos de casi 2000 paginas sobre matemáticas donde una de las demostraciones (1+1=2) se lleva unos cuantos cientos de páginas para que finalmente concluyan que esa demostración es, en algunas ocasiones, útil. Además que aún quedó cierto escepticismo con algunas de las cosas que Alfred North Whitehead y Bertrand Russel dieron por ciertas.

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51\cdot231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13\cdot12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Figure 5.9: Principia Mathematica $54 \cdot 43$.

5.4.9 Infinite Monkey Theorem

Una situación que me recuerda al problema de los caballeros de Méré, pero no solo me recuerda este problema. No recuerdo si fue en algún libro de Isaac Asimov o en algún programa de TV en el que un autor de libros utilizaba monos para escribir sus libros.

Esto me hace pensar un poco en cosas como *Deep Learning*, si se entrena a una red neuronal para que escriba libros, este teorema es una buena referencia y considero podría ser interesante tener una máquina que escriba libros basados en el interés de cada persona e inclusive en su capacidad de lectura.
Finalmente, en algún lugar vi algo que decía "Busca tu nombre en π, que usaba algo parecido a este teorema: Siendo π un número irracional con una cantidad infinita de decimales, si se les da una interpretación de letra a los decimales, existe la probabilidad de que en algún punto se encuentre tu nombre, y si a esto le sumamos que es infinito, pues entre más números, mayor la probabilidad de encontrar otras cosas interesantes más allá de un nombre.

Figure 5.10: Referencia al teorema en los Simpsons.

5.4.10 Differential Analyzer

No dejará de impresionarme la creatividad y visión de algunos personajes. Uno llega a la escuela y le enseñan ecuaciones diferenciales y tiene herramientas que facilitan todo, pero son pocas las veces o las personas que se detienen a pensar en como es que las desarrollaron, o que más se puede hacer con lo que ya se tiene. En su momento esta máquina ayudo a resolver problemas diversos. Seguro que fue una proeza llegar a ensamblar una máquina de estas e inclusivo sólo el llegar a concebir el cómo lograr su funcionamiento, y ahora los aficionados de "Meccano" (Parecido a Lego) arman sus analizadores diferenciales con cierta sencillez.

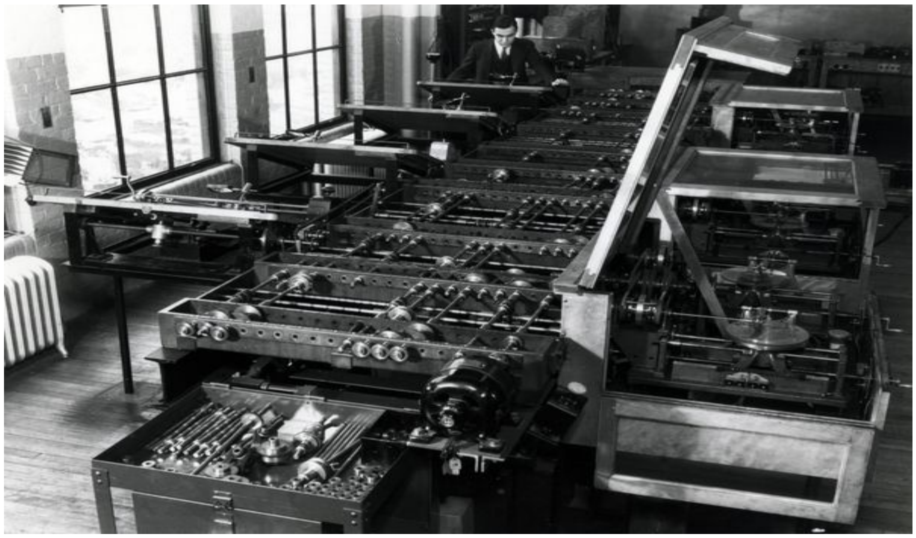


Figure 5.11: Analizador diferencial de Vannevar.

5.4.11 Turing Machine

Esta máquina es uno de los pilares más sólidos en cuanto a teoría de la computación se refiere. No sólo eso. Turing también dió pausa a que se repensara en que es lo que hace "inteligente" a una máquina.
Lás máquinas de turing dan lugar al estudio de algoritmos. Al menos a saber si existe un posible algoritmo para resolver determinado problema.

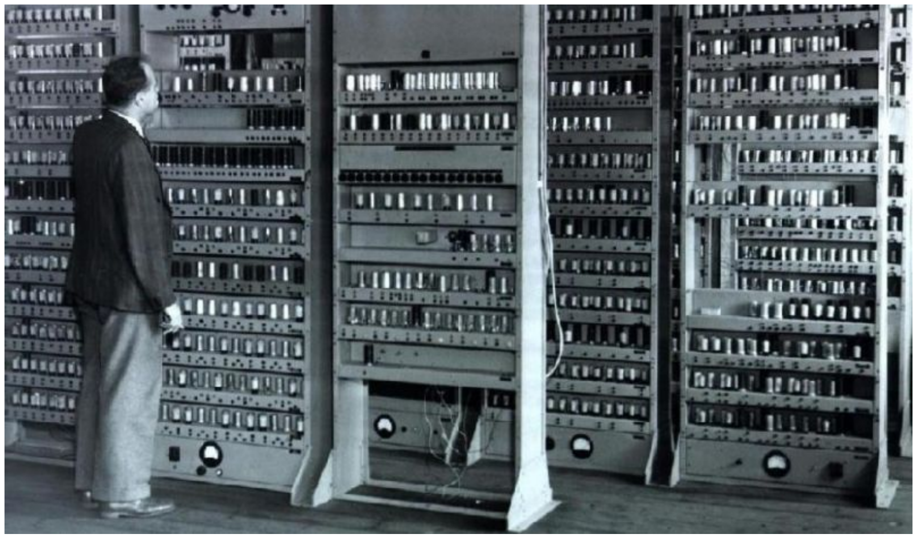


Figure 5.12: Máquina de Turing.

5.4.12 Birthday Paradox

El autor del libro habla de las creencias debido a coincidencias inusuales. Hago mención a esto ya que con los eventos recientes del 19 de septiembre y los pasados temblores, la paranoia de las personas y la misma necesidad del ser humano por buscar patrones, lleva a teorías de que tiembla cada x años o teorías similares.
Hablando sobre esta paradoja, se cubren varios temas relacionados con la probabilidad y una vez más haré mención al parecido que tienen este tipo de problemas con el problema de los caballeros de Mér'e. Además el libro hace una aproximación al valor con una formula del estilo de la formula de Stirling. Lo cuál me parece interesante, ya que es una cantidad grande y buscamos un aproximado, no el valor exacto (que lo más probable es que no sea un entero).
Recuerdo las palabras de un profesor de probabilidad que me impartió clases, "Lo difícil no es usar la formula sino interpretar el problema para saber que formula y como usarla".

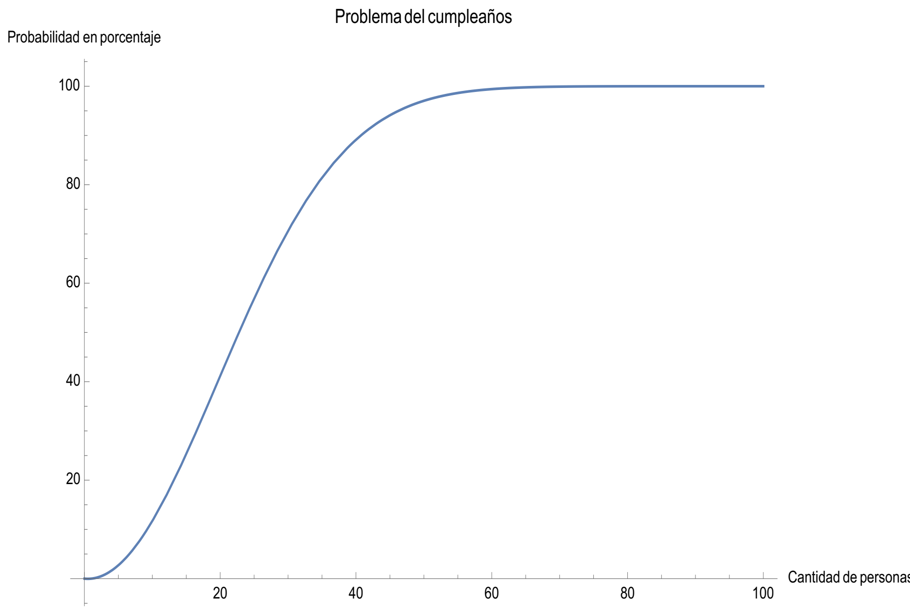


Figure 5.13: Gráfica demostrativa del problema del cumpleaños.

5.4.13 ENIAC

Acrónimo para Computador e Integrador Numérico electrónico. Sin duda alguna es una de las muestras que el humano quiere aproximarse a un mundo donde las máquinas hagan el trabajo "sucio". Y también es una muestra de la evolución de la tecnología en computación. Sucesor de varias máquinas como el analizador diferencial, ENIAC fue utilizado para la creación de la bomba de hidrogeno.
Y no es que un humano no pudiera hacer los calculos, pero el tiempo invertido para realizarlos pudo haber sido mucho mayor, además de haberse podido cometer un error por cuestiones de error humano.

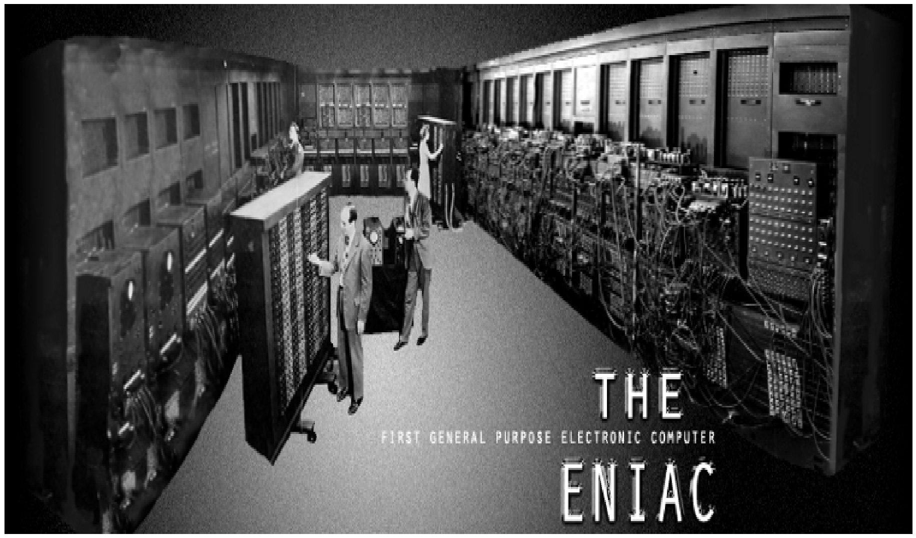


Figure 5.14: ENIAC.

5.4.14 Gilbreath's Conjecture

No es por menospreciar la observación de Gilbreath pero concuerdo con la creencia de algunos matemáticos de que este resultado se da para cualquier secuencia que empieza en 2 y sigue de números impares. La cuestión con los primos es que sólo existe un número primo par es el 2, la diferencia entre un número impar y uno par es un número impar. y de ahí todos los primos son impares. La diferencia de 2 números impares es par. Una vez teniendo esto, la diferencia entre 2 y 3 es 1, por lo que la siguiente fila es un 1 seguido de números pares... Claro que aquí lo importante es que no se ha podido demostrar que esta conjentura sea cierta o falsa, ni se ha podido encontrar una manera matemática para encontrar todos los números primos. Cosa muy relevante debido a la importancia que tienen los números primos en la computación. Cifrado, creación de números aleatorios. Entre otras muchas aplicaciones.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4	
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	4	2		
1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	0	2			
1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2				
1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2					
1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	0						
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2							
1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2								
1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2									
1	0	0	0	0	0	2	2	0	2										
1	0	0	0	0	2	0	2	2											
1	0	0	0	2	2	2	0												
1	0	0	2	0	0	2													
1	0	2	2	0	2														
1	2	0	2	2															
1	2	2	0																
1	0	2																	
1	2																		
1																			

Figure 5.15: Visualización de la conjentura de Gilbreath.

5.5 Los simpsons y las matemáticas

La verdad es que aunque había divisado que los simpsons tienen contenido no sólo chusco sino también contenido intelectual que en ocasiones pasa desapercibido, no me había preguntado quién y por qué el uso de sus guiones. Enterarme de que varios de los escritores que trabajan para esta serie son en realidad grandes "geeks" o "nerds" me sorprendió. Cuando algo sucede parecido a esto (enterarme de algo que no me hubiera imaginado) hace que me pregunte otras cosas o que ponga más atención a los pequeños detalles de las cosas y que sea más crítico con las cosas que observo, escucho y leo.

5.5.1 Bart el genio

Aunque la mitad del capítulo se la pasan hablando de la carrera de los escritores de guiones, el contenido en sí del cápitulo era algo que yo mismo me cuestionaba en alguna ocasión que vi el capítulo y que tenía más nociones del cálculo.
Usar problemas que no coinciden con los grados académicos de los personajes del programa me hacía cuestionar si la educación de México era aún más deficiente de lo que ya pienso que es. Por otra parte, aunque entiendo el desarrollo del

procedimiento de r dr r y el idioma (inglés) no termina de parecerme graciosa la broma.
Aunque el punto no es ese, considero que a veces poder transmitir información de este tipo a una audiencia masiva es una herramienta muy potente. Es probable que poca gente se entere de lo que en realidad se intenta transmitir. Pero la información está ahí presente, en algún tipo de códificación.

5.5.2 El código de chicas

Pienso que la manera en la que critícan tantas cosas al mismo tiempo es hilarante. No sólo hacen referencia a lo "matado" que puede ser el escribir un código para una aplicación (cosa que he vivido en mi experiencia laboral), al feminismo o, quizá mejor dicho, feminazismo, sino que también abordan un tema que creo resulta un tanto consternante: *La inteligencia artificial.* Y es que con las noticias de que detuvieron el proyecto de inteligencia artificial de facebook al ver que habían generado un propio lenguaje para comunicarse entre IA's que erar ininteligible para los trabajadores del proyecto pone a uno a pensar si de verdad Terminator es una posibilidad, o algo que probablemente suceda, si no se tienen los cuidados necesarios, en un futuro no tan lejano.

5.6 ¿Qué es la memoria?

El físico y neurocientífico argentino Rodrigo Quían Quiroga ha hecho exhaustivas investigaciones y expone lo siguiente:
"La memoria humana no funciona como una cámara de video que registra con precisión los acontecimientos que vemos y oímos, de manera que podemos revisarlos e inspecionarlos más tarde. Cada vez que recordamos algo, nuestros cerebros reescriben ese recuerdo para ajustarlo a nuestras expectativas y creencias".
Rodrigo hace mención que el escritor Jorge Luis Borges estaba en lo correcto: olvidar es tímportante como recordar. Para recordar hay que olvidar, ya que olvidar permite abstraer y generar conceptos, si no olvidaramos no podríamos pensar. Las personas que tienen memorias prodigisas generalmente son gente con algún tipo de enfermedad, autismo por ejemplo. Una gran memoria no implica inteligencia y mucho menos hace feliz a alguien.
Actualmente se sabe que la memoria es falible, la retención de las cosas pasadas es siempre imperfecta. La memoria en general es algo que está en un constante cambio y el hecho de recordar algo implica que estamos sobreescribiendo esa memoria. El humano no recuerda precisamente lo que vivió sino más bien hace una reinterpretación de lo que ocurrió.
Por otro lado, no existe sólo un tipo de memoria, los tipos de memoria mencionados son:

- Memoria sensorial: décimas de segundo.

- Memoria de corto plazo o primara: permite mantener información en periodos breves. Genera el flujo de la conciencia, la persepción del presente.

- Memoria de largo plazo o secundaria: La que almacena nuestro pasado. La clave está en convertir algunos recuerdos de memoria de corto plazo a memoria de largo plazo a través de repeticiones y consolidación

- Memoria episódica o de sucesos

- Memoria semántica: la memoria de personas, conceptos y lugares.

Hasta mediados del siglo XX se pensaba que la memoria estaba distribuida a lo largo del cerebro. Hoy en día se sabe que los recuerdos se almacenan en la corteza cerebral y dentro de ella, en el lóbulo temporal. El hipocampo cumple un rol crucial, se encarga de la abstracción y conceptualización permitiendo así generar pensamientos y recuerdos. También se encarga de codificar la información a ser guardada para después transferirla a la corteza cerebral.
El descubrimiento de la función del hipocampo se obtiene en 1953 después de ver que a un paciente a quien se le retiro está parte del cerebro, para controlar sus ataque epilépticos, no fue capaz de formar nuevos recuerdos.
Para ser más precisos, casi no se almacena información en la mente o redes neuronales. De hecho, una memoria de 128 GB tiene más capacidad que nosotros para almacenar información. No obstante, lo poco que almacenamos son conceptos muy concretos que permiten que el cerebro y diferentes patrones de conexiones entre neuronas construyan las imagenes que son nuestros recuerdos, al ser una construcción del cerebro y no una serie de imagenes como las de una cámara, es posible manipular los recuerdos al cambiar algún concepto que se relacione con dicho recuerdo.

5.7 Cerebro, procesamiento paralelo o en serie

El cerebro trabaja generalmente en paralelo, por ejemplo al detectar imagenes: Cada retina tiene millones de conos y bastoncillos que perciben la luz, la procesa y la envían a través del nervio óptico de forma simultanea. Después la corteza visual procesa la información obtenida para detectar puntos, líneas, objetos, caras, etcétera. Todo esto sin afectar otros procesos como la respiración o el equilibrio.
Sin embargo, el cerebro también trabaja en serie cuando es necesario hacerlo, estos tipos de procesos empiezan cuando se percibe algo, se decide algo y finalmente se ejecuta un acción en consecuencia. El pensamiento lógico es estrictamente secuencial, pero esto en el cerebro genera un cuello de botella el cual es más evidente cuando existe una interferencia de tareas (Una tarea impide o dificulta la realización de otra) porque sólo podemos tomar una decisión al tiempo. Y es así que aunque podemos reconocer imagenes en cuestión de fracción de segundo, una operación matemática nos toma mucho más tiempo.

5.8 Los Fotogramas de los videos

La explicación de porque X o Y fotogramas se resume a que hay que superar los efectos físicos. El primer efecto que hay que superar es el fenómeno phi y es lo que permite engañar a los ojos, este efecto sucede a partir de los 12 fps , por lo que en los primeros videos se eligió 16 fps como un valor conveniente. El segundo efecto físico a superar es la persistencia de visión, que evita el parpadeo cuando se cambia de imagen. Este se consigue con 46 imágenes por segundo (calculado por Edison). Al utilizar una doble rejulla que muestre el mismo fotograma dos veces se reduce esa cantidad a la mitad. Se decidió, entonces, dejar 24 fps como el valor más conveniente, ya que además era un valor adecuado para las bandas sonoras de aquellos tiempos.
Para el cine mudo aunque la cantidad de fps estándar era de 16 fps, algunos cambiaban la cantidad de fotogramas (oscilaban entro los 14 y los 26 fps.) para conseguir distintos efectos visuales.// Cuando se inventa el televisor, éste llega con otro invento : El entrelazado, el cual consiste en dividir una imagen de video en líneas pares e impares, logrando así disminuir el ancho de banda. Fue entonces que se decidió poner como estandar 30 fps. o 25 fps. dependiendo de la frecuencia de la toma eléctrica de la zona.
La llegada del televisor a color se redifinieron los 60 campos por segundo como 59.94, con el fin de dejar información del color, una vez más la cantidad de fps es la mitad de la cantidad mencionada anteriormente.
Cuando por fin se presenta el formato digital todo lo que estaba establecido volvió a cambiar. Las cámaras de hoy en día permiten grabar a cualquier número de fps, aunque se siguen usando los valores convencionales.
Sin embargo, los videos o películas a mayor cantidad de cuadros por segundo causa controversia, ya que algunos personajes y paisajes son tan excesivos que parecen irreales.

5.9 Representación de la compuerta Y y la compuerta O

La representación de la compurta and (y) se puede ver como un circuito en serie, mientras que la compuerto or (o) se puede representar como un circuito en paralelo.

Figure 5.16: Representación compuerta AND.

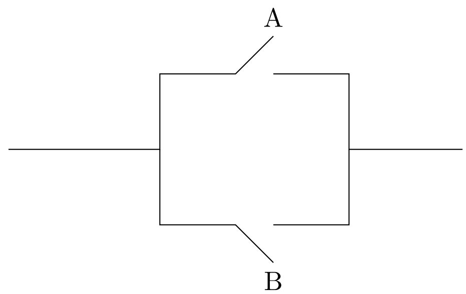


Figure 5.17: Representación de la compuerta OR.

5.10 La memoria del cuerpo

5.10.1 Microsoft: Computarizando el cuerpo humano

Microsoft ganó derechos exclusivos de usar al cuerpo humano como una red de computadora.
El gigante de software para computadora prevé usar las propiedades conductoras de la piel para ser anfitrión de dispositivos electrónicos.
De acuerdo a la patente, esta tecnlogía podría llevar a una nueva clase de dispositivos electrónicos altamente portables. También podría ser que se enlacen diferentes dispositivos o inclusive, usar sensores colocados al rededor del cuerpo y ropa que sensen y reacciones al cambio de las circunstancias en el día a día.
Hacer uso de esta tecnología evitará problemas comunes presentes en otras tecnologías que son usadas para enlazar diversos dispositivos.[2]

5.10.2 DNA como MSD

Un bioingeniero y genecista del Instituto Wyss de Harvard ha almacenado exitosamente 5.5 Petabits de información (700 Terabytes aprox.).[3]
En vez de codificar información binaria en regiones magnéticas de un disco duro, las cadenas de DNA que almacenan 96 bits son sintetizadas con cada una de las basws TGAC, representando un valor binario (T y G = 1, A y C= 0). Para leer esta información, se secuencía como si se tratara de secuenciar el genoma humano y se vuelve a hacer la conversión a binario. Para ayudar con la secuenciación, cada hebra de ADN tiene una dirección de 19 bits al inicio.
Diversos cietíficos han estado investigando la posibilidad de usar el ADN como un potencial medio de almacenamiento por 3 buenas razones:

1. Es increiblemente densa (se puede almacenar un bit por "base", que es de apenas unos pocos átomos de largo).

[2]https://www.theguardian.com/science/2004/jul/06/sciencenews.microsoft
[3]https://www.extremetech.com/extreme/134672-harvard-cracks-dna-storage-crams-700-terabytes-of-data-into-a-single-gram

2. Es volumétrico.
3. Es increiblemente estable (puede ser almacenado por cientos de miles de años).

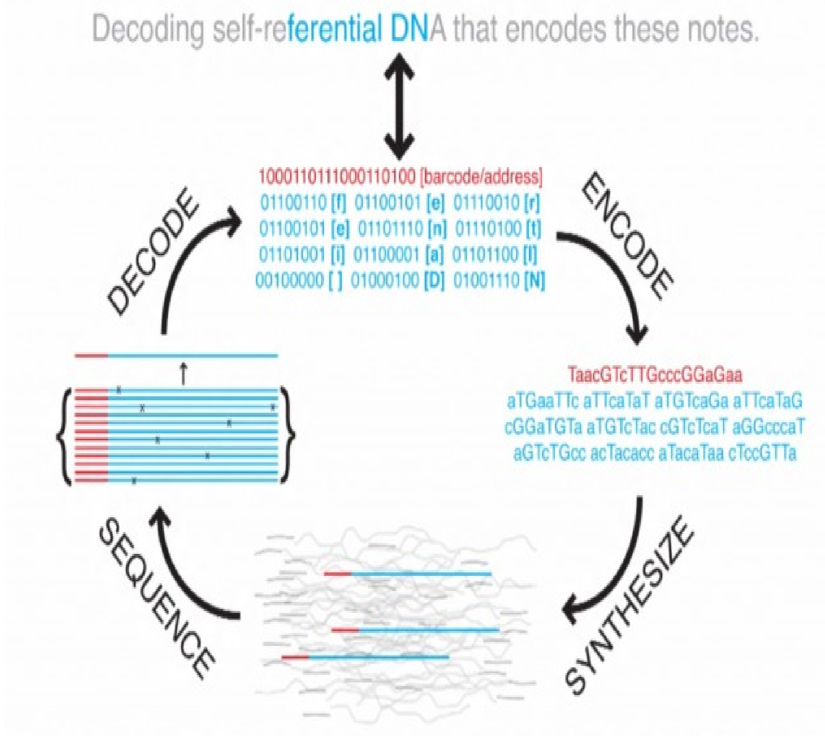


Figure 5.18: Escritura y lectura de información en ADN.

5.11 Sistema de archivos

5.12 Monty Hall

Problema de probabilidades que se presenta en programas de televisión, en dónde se le da a elegir a un concursante entre tres puertas, detrás de una hay un carro y detrás de las otras 2 hay cabras o algo más que, usualmente, no sería considerado un premio. Tras la elección del concursante, el presentador abre una puerta mostrando, siempre, que tras esa puerta hay el ”no premio”. Al mostrar esto, el presentador le ofrece al concursante cambiar de puerta.
La acción con la que se tiene más probabilidad de ganar es cambiando la puerta. Ya que en un inicio se tiene un $\frac{1}{3}$ de probabilidad de elegir el auto y $\frac{2}{3}$ de elegir algo más. Pero como el presentador siempre elige una cabra al abrir la

puerta, en realidad se elimina $\frac{1}{3}$ de elegir una cabra. De manera tal que si el concursante decide mantener la puerta que eligió en un principio, tiene sólo $frac13$ de probabilidad de sacar el auto, mientras que si cambia de elección se invierten las probabilidades de manera que la probabilidad de sacar el auto es de $\frac{2}{3}$. Viendolo desde otoro punto de vista, El presentador sólo puede develar una puerta de las que no eligió el concursante y siempre elige una puerta que contiene una cabra, por lo cual la probabilidad de que detrás de esa puerta esté el carro es de 0%. Por lo que ese $\frac{1}{3}$ de probabilidad es transferido a la puerta que no eligió el concursante.

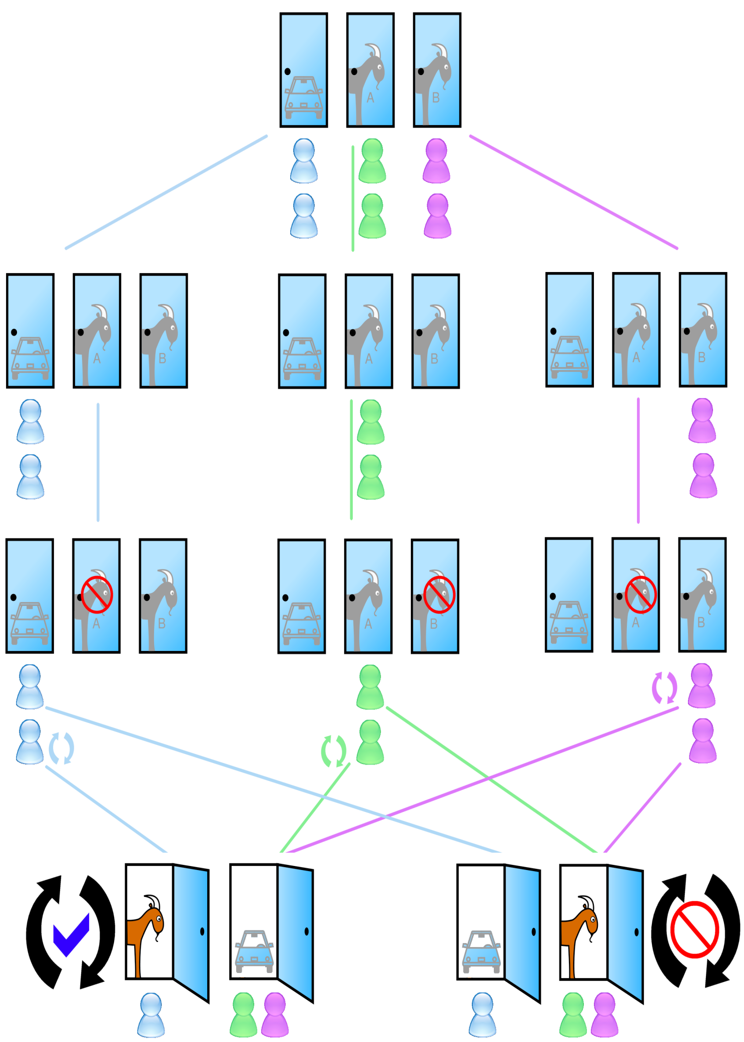


Figure 5.19: Diagrama del problema.

5.13 Semáforo o sistema de transmisión de señales y mensajes por medio de banderas

Antiguo método de comunicación visual a corta distancia, que emplean fundamentalmente las marinas de guerra de diferentes países para comunicarse entre un barco y tierra, entre dos barcos, o entre dos puntos fijos en tierra.
Para transmitir los mensajes se utilizan dos banderas cuadradas, de iguales medidas y con los mismos colores (amarillo y rojo), ubicados diagonalmente. Esas banderas corresponden, a su vez, a la letra "O" del código internacional de Banderas de Señales Marítimas.
Para representar cada letra, la persona encargada de enviar los mensajes se sitúa de frente al receptor y mueve ambas banderas con los brazos describiendo círculos. La manera de colocar las banderas en cada uno de los movimientos que se realizan corresponde a una letra determinada (o número).

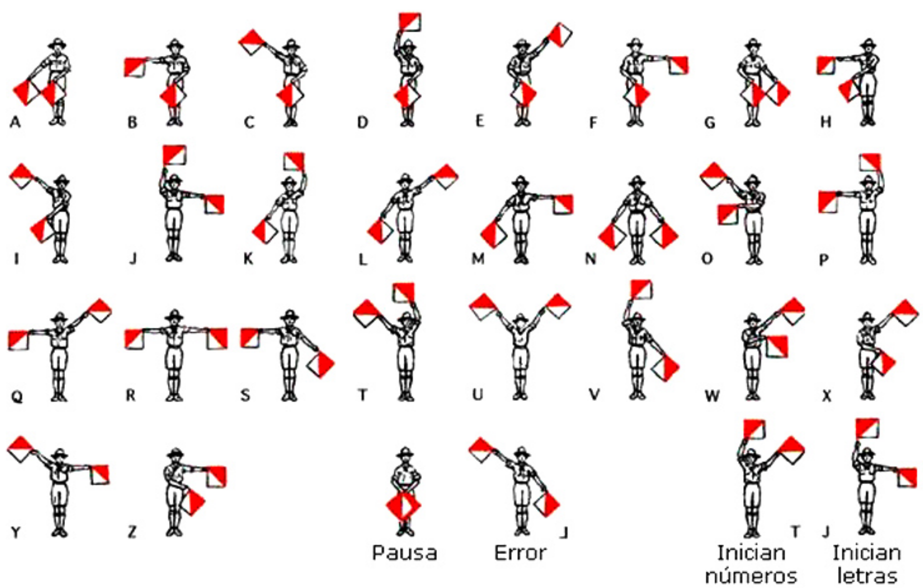


Figure 5.20: Lenguaje de banderas ilustrado.

5.14 Ejes principales

Se refiere a una recta de puntos formada por vectores propios de alguna magnitud física de tipo tensorial. Los dos ejemplos más notorios son las direcciones principales de inercia, usualmente ejes principales de incercia y las direcciones

principales de tensión y deformación de un sólido deformable.
Dada una magnitud física de tipo tensorial T se plantea el problema matemático de buscar los vectores no nulos v que cumplan:

$$Tv = \lambda v,\ v \in \Re^n, T \in L(\Re^n, \Re^n), \lambda \in \Re$$

Dicho problema constituye un problema matemático de vectores propios, donde los autovalores son valores del parámetro λ para los que existe solución y cada una de las rectas generadas por un vector v se llaman dirección principal.

5.14.1 Rotaciones

Una rotación es un movimiento de cambio de orientación de un cuerpo o un sistema de referencia de forma que un eje o un punto permanece fijo. Para lograr esto se pueden hacer transformaciones pasivas o activas.

Transformación Activa

También llamada transformación coartada, es una transformación que cambia la posición física de un punto, o cuerpo rígido que se puede definir incluso en la ausencia de un sistema de coordenadas.

$$\vec{v'} = R\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Transformación Pasiva

Es un cambio en el sistema de coordenadas en el que el objeto se describe (cambio de coordenadas del mapa, o cambio de base).

$$V = v^a e_a = v^{'a} R e_a.$$

Las nuevas coordenadas están dadas por:

$$v^{'a} = (R^{-1})^b_a v^b.$$

Y esto se puede escribir como:

$$V = v^{'a} e^{'}_a = v^b (R^{-1})^a_b R^c_a e_c = v^b \delta^c_b e_c = v^b e_b.$$

Por lo tanto, para que el vector se mantenga sin cambios por la transformación pasiva, las coordenadas del vector deben transformarse de acuerdo con la inversa del operador de transformación activa.

5.14.2 Traslaciones

Movimiento de cada punto a una distancia constante en una dirección dada. Cambia la posición de un objeto.

5.14.3 Nutación

Es un movimiento ligero irregular en el eje de rotación de objetos simétricos que giran sobre su eje. Una nutación pura es el movimiento del eje de rotación que mantiene el primer ángulo de Euler (precesión) constante. Ver fig.(5.21).

5.14.4 Precesión

Es el movimiento asociado con el cambio de dirección en el espacio, que experimenta el eje instantáneo de un cuerpo. Más exactamente, es aquel movimiento del eje de rotación que mantiene su segundo ángulo de Euler constante. Existen dos tipos de precesión: la que es debia a momentos externos, y la precesión sin momentos de fuerza externos. Ver fig(5.21).

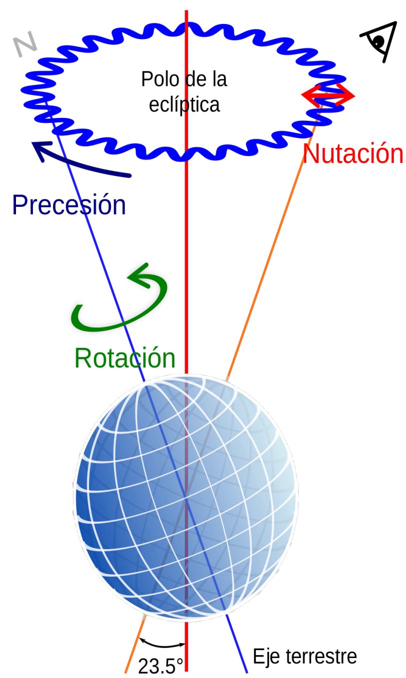


Figure 5.21: Nutación y precesión en el movimiento de un planeta.

Precesión sin momentos externos

Este movimiento ocurre cuando un cuerpo está en movimiento alrededor de un eje que no es el de máximo ni el de mínimo momento de incercia. La precesión puede estar acompañada de otros movimientos propios de los cuerpos en rotación.

Precesión debida a momentos externos

Se llama peonza simétrica en movimiento libre a un sólido rígido de revolución, con dos de sus momentos de inercia principales iguales. En una peonza simétrica se pueden escoger arbitrariamente los ejes 1 y 2, por lo que conviene aprovechar esto para simplificar las expresiones tomando el eje 1 paralelo a la línera nodal de los ángulos de Euler lo cual equivale a que $\Psi = 0$. Lo cual lleva a que las velocidades angulares en el sistema de referencia no inercial estén dadas por:

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\sin(\theta) \\ \dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi} \end{Bmatrix}.$$

La energía cinética de rotación en una peonza simétrica puede expresarse como:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2).$$

5.15 Tercera derivada: Sacudida

Mejor conocida como sobreaceleración, es la tasa de cambio de la aceleración, es decir, la derivada de la aceleración con respecto al tiempo. Dado que la aceleración es una magnitud vectorial, la sobreaceleración también lo es.

$$\vec{j}(t) = \dot{\vec{a}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \dddot{\vec{r}}(t).$$

donde:

- $\vec{a}$ es la aceleración.
- $\vec{v}$ es la velocidad.
- $\vec{r}$ es la posición.
- t es el tiempo.

No hay un término utilizado para describir su magnitud escalar (norma). Sus unidades son los $\frac{m}{s^3}$. La primera derivada de la sobreaceleración es el chasquido. Las ecuaciones de la forma $J(\dddot{x}, \ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$ se llaman ecuaciones de tirón. Se ha demostrado que una ecuación de tirón, que es equivalente a un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, de primer orden, es en cierto sentido el auste mínimo para las soluciones y muestra un comportamiento caótico. Los sistemas que implican derivadas de cuarto o mayor orden, se denominan sistemas híper aceleraciones o híper tirones.

5.16 Máquina enigma

La máquina enigma era una máquina que disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio, que permitía usarla para cifrar y también para descifrar mensajes.

Fue muy utilizada en Europa desde inicios de 1920. Pero su más grande apogeo fue al haber sido adoptada por las fuerzas militares de Alemania desde 1930. Se consideraba que era inviolable, aunque al final su sistema de cifrado fue finalmente descubierto y este hecho es a considerado como la causa de haber podido concluír la segunda guerra mundial.
Esta máquina estaba conformado por partes mecánicas y partes eléctricas. Su mecanismo estaba constituido fundamentalmente por un teclado similar al de las máquinas de escribir cuyas teclas eran interruptores eléctricos, un engranaje mecánico y un panel de luces con las letras del alfabeto.
La parte el'ectrica consistía en un una batería que encendía una lámpara de una serie de ellas, que representaban cada una de las diferentes letras del alfabeto.
La parte principal era una serie de rotores. Cada roto era un disco circular plano con 26 contactos eléctricos en cada cara. Cada contacto de una cara estaba conectado o cableado a un contacto diferente de la cara contraria. Dentro de la máquina había tres ranuras para alojar los rotoes. Cada rotor se encajaba en una de las ranuras de forma que sus contactos de salida se conectaban con los contactos de entrada del rotor siguiente. El último rotor se conectaba a un deflector para poder realizar el proceso pero en sentido contrario y así descifrar los mensajes cifrados.
El funcionamiento de la máquina enigma consistía en que al apretar una tecla, una señal eléctrica recorría a los contactos de los rotores según estuvieran conectados, cómo la conexión entre rotores conectaba diferentes letras, al final, la máquina iluminaba la letra correspondiente al contacto del tercer rotor en el que terminaba la señal. Al final se sustituía el texto original por las letras obtenidas en la máquina eléctrica. Además cada que se introducía una letra en el teclado, los rotores quedaban acomodados de manera diferente, por lo que para letras identicas consecutivas les correspondían letras diferentes en el cifrado.
Evidentemente al ser un aparato mecánico tenía sus limítaciones con los rotores, pero estos se podían cambiar por otros. Al cableado y colocación de rotores era la configuración inicial y era distribuída cada cierto tiempo por el ejercito.
En el sentido más saimple, Enigma tuvo un repertorio de $26 \times 26 \times 26 = 17576$ alfabetos de sustitución para cualquier combinación y orden de rotores dada. Pero la secuencia de los alfabetos era diferente si se permutaban los rotores. Hay más factores que aumentan la cantidad de lenguajes: los rotores a utilizar, ordén del rotor, posición de los anillos, posición inicial y ajustes del tablero de interconexión.

Figure 5.22: Fotografía de una máquina enigma.

5.17 Eigenvectores y eigenvalores

Vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este

escalar λ recibe el nombre de eigenvector. A menudo una transformación queda completamente determindad por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio o subespacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.
Las transformaciones lineales del espacio pueden interpretarse mediante el efecto que producen en los vectores. Los vectores pueden visualizarse como flechas de una cierta longitud apuntando en una dirección y sentido determinados.

- Los vectores propios de las transformaciones lineales son vectores que no son afectados por la transformación (no cambian su dirección).
- El valor propio de un vector propio es el factor de escala por el que ha sido multiplicado.
- un espacio propio es un espacio formado por todos los vectores propios del mismo valor propio, además del vector nulo, que no es un vector propio.
- La multiplicidad geométrica de un valor propio es la dimensión del espacio propio asociado.
- El espectro de una transformación en espacios vectoriales finitos es el conjunto de todos sus valores propios.

Formalmente, se definen los vectores propios y valores propios de la siguente manera: Sea $A : V \to V$ un operador lineal en un cierto $\Bbbk - espacio$ vectorial V y v un vector no nulo en V. Si existe un escalar c tal que:

$$Av = cv, v \neq 0, c \in \Bbbk,$$

entonces se dice que v es un vector propio del operador A, y su valor propio asociado es c.
Algunos casos de interés especial son:

- Rotación: ningún vector propio de valores reales.
- Reflexión: Los vectores propios son perpendiculares y paralelos al eje de simetría, los valores propios son -1 y 1, respectivamente.
- Escalado uniforme: todos los vectores son vectores propios, y el valor propio es el factor de escala.
- Proyección sobre una recta: los vectores propios con el valor propio 1 son paralelos a la línea, vectores propios con el valor propio 0 son perpendiculares a la dirección de la proyección.

5.18 Paridad

Aunque generalmente la física no cambia si reflejamos los procesos en un espejo, hay situaciones en las que existe una diferencia entre el proceso mirado a uno

y otro lado del espejo. Esto depende de una propiedad de las partículas y sus interacciones denominada *quiralidad*.
La quiralidad es una propiedad importante en el universo. Por ejemplo, para algunas teorías esta propiedad permite saber si un modelo puede acomodar la física que nos rodea a nivel de las partículas elementales.

5.18.1 Quiralidad

Se dice que algo es quiral cuando no se puede superponer con su imagen especular. A nivel física, la quiralidad está relacionada con la invariancia de las leyes físicas al hacer reflexiones de las magnitudes físicas, es decir: con la acción de paridad.
En un principio no hay ninguna razón para pensar que la física a un lado y otro lado del espejo se comporten diferente manera. Por ejemplo, para las interacciones fundamentales (Gravedad, Electromagnétismo, Interacción fuerte) no hay distinción entre una situación y otra (hablando de paridad); sin embargo, en la interacción debil sí existe diferencia entre una situación y otra.
En 1956 se tuvo por primera vez evidencia de esto, tras un experimento en el que se medía la desintegración de un núcleo de Cobalto 60 (Este núcleo se transforma en un núcleo de Niquel, emitiendo además electrónes, neutrinos y fotones). El dispositivo experimental empleado en dicho experimento permitia simular la situación en cada lado de la paridad. Los electónes eran emitidos en el sentido contrario del momento angular del núcleo. Y la situación opuesta, electrones saliendo en la misma dirección que la del momento angular, estaba muy suprimida. Esto último viola la interacción de paridad. La interacción débil es entonces considerada como una interacción quiral.

5.18.2 Quiralidad y partículas

Las partículas elementales tienen una propiedad que se denomina quiralidad. Es una característica cuántica de las partículas que nos informa de cómo se transforman sus estados cuánticos cuando se efectuan una determinada transformación relativista (de Poincaré).
Un electrón en realidad está en un sistema que oscila entre dos partículas: el L-electrón y el R-electrón. La interacción débil sólo interacciona con el L-electón.

5.19 Sistemas de Lindenmayer o sistemas L

Concepto concebido por el biólogo y botánico húngaro Astrid Lindenmayer de la universidad de Utrecht en 1968 y desarrollado por sus estudiantes, Ben Hesper y Paulin Hogeweg.
Un sistema L es un lenguaje, una grámatica formal de derivación paralela, un conjunto de reglas y símbolos principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas, aunque también puede modelar la morfología de una gran variedad de organismos.

El concepto central de los sistemas-L es el de re-escritura, una técnica para definir objetos complejos reemplazando sucesivamente "partes" de un objeto inicial simple (el axioma), mediante un conjunto de reglas de reescritura o de producción.

5.19.1 Elementos de un sistema-L

Los sistemas-L son definidos como un conjunto:

$$G = \{V, S, \omega, P\}$$

donde:

- V: El alfabeto. Es un conjunto de símolos que pueden ser reemplazados y se utilizan para componer cadenas.
- S: Conjunto de símbolos que se mantienen fijos.
- ω: El axioma, es la cadena que describe al sistema en su estado inicial, formada por uno o más símbolos de V.
- P: Reglas de producción. Son las transformaciones aplicadas al axioma y a las cadenas generadas.

Una consideración importante es que las reglas de producción se aplican *simultáneamente* a todos los símbolos de la cadena de entrada, sea ésta el axioma o las cadenas resultantes de cada derivación. Para generar imágenes se requiere que los símbolos en el modelo hagan referencia a elementos de un dibujo, interpretando cada constante en el sistema-L como una operación de dibujo y para generar sonidos, que se asocien a una nota musical, por mencionar algunos.

5.19.2 Familias de sistemas-L

Los sistemas-L pueden ser clasificados como:

- Libre de contexto: si cada producción se refiere sólo a un símbolo individual y no a sus vecinos.
- Sensitivo al contexto: cuando la aplicación de una regla depende también de sus vecinos (Sistemas-IL).
- Determinista: si existe exactamente una producción para cada símbolo.
- No determinista: si hay al menos un símbolo al que le corresponde más de una producción.
- Estocástico/Probabilístico: cuando hay varias producciones para un mismo símbolo y cada una de ellas es elegida con una probabilidad determinada (sistema-PL).

- Con corchetes o extensiones: permiten modelar ramificaciones de organismos (tienen memoria de pila).
- Temporal: porque el tiepo cambia su comportamiento.
- Propagativo: si ningún símbolo produce la cadena vacía.
- No propagativo: si algún símbolo produce la cadena vacía.
- Tabular: contiene tablas de producción de modo que cada uno de sus elementos es un conjunto de reglas de producción sobre el alfabeto (Sistema-TL).
- Sensitivos al ambiente cuando la evolución intervienen factores externos al sistema-L.

5.19.3 Uso de los sistemas-L

Los sistemas-L permiten crear patrones fractales de gran complejidad con una gran sencillez.
Sirven como analogía para autómatas celulares.
Los sistemas-L se han usado para describir procesos complejos de desarrollo, incluyendo composiciones musicales, estructuras arquitectónicas, diseño de patrones geométricos, etc.

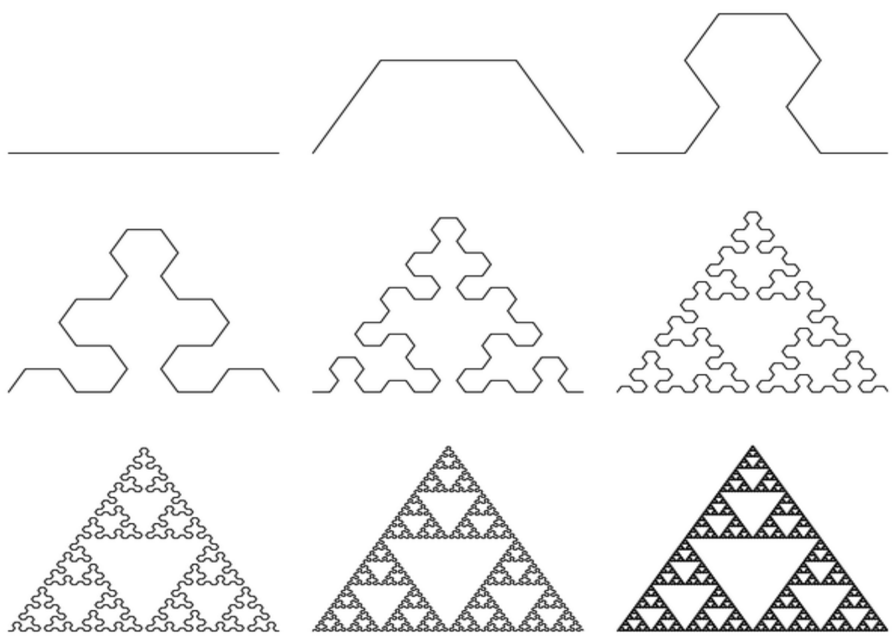


Figure 5.23: Ejemplo de figuras creadas con sistemas-L.

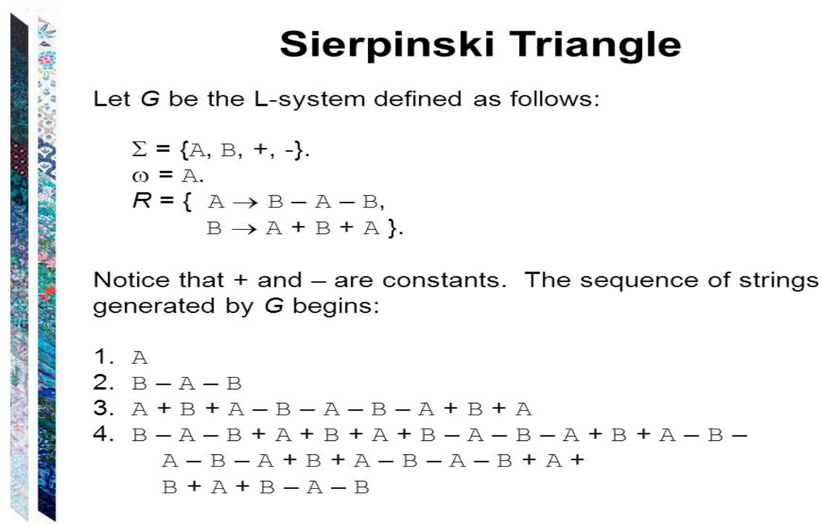


Figure 5.24: Sistema-L para generar el triángulo de Sierpinski.

5.20 Explosión del Challenger

Las consideraciones de los materiales usados en el challenger no contemplaban que la temperatura del día del lanzamiento de este sería diferente a las que se habían utilizado para los cálculos. El lanzamiento estaba planeado para el 23 de enero de 1986; sin embargo tras varios retrasos por diversos motivos, se estableció que el despegue sería el marte 28/01/1986 a las 9:38 a.m. a pesar de los fabricantes e ingenieros a cargo.
El día del lanzamiento hubo un retraso más de 2 horas debido a que se había formado hielo en varias partes de la base del lanzamiento.
Al encender el cohete propulsor, los anillos no pudieron mantener selladas las uniones de campos inferiores debido a que el material del que estaban hechas se endurecen a bajas temperaturas. Los anillos empiezan a quemarse.
Gases extremadamente calientes se escapan mientras que trozos de material provenientes del combustible para cohetes se acumulan y bloquean, de alguna manera, la fuga, evitando una catástrofe en la plataforma del lanzamiento.
15 segundos antes del desastre el Challenger entra en una corriente en chorro muy estrecha que provoca que el transbordador se sacuda con violencia. El bloqueo que se había hecho con la escoria de aluminio. Una llama aparece en el cohete derecho. La llama logra penetrar el tanque externo y el hidrógeno líquido comienza a derramarse.
1 segundo antes del desastre se desprende el acoplamiento entre el cohete y el tanque. Toda la sección inferior se separa. La alta temperatura empuja el compartimiento del hidrógeno líquido hacia la parte superior e impacta con

el contenedor de oxígeno. Una gran combustión ocurre. Se quemarón casi 2 millones de litros de combustible instantaneamente. (Noticia detallada en xataca.com [4])

Figure 5.25: Imagen de la explosión del challenger.

5.21 Punto Fijo

Un punto fijo de una función es un punto cuya imagen producida por la función es el mismo. En otras palabras: Un punto x es fijo para la función f si y sólo si $f(x) = x$. No todas las funciones tienen puntos fijos.
En terminos gráficos, y en el dominio de los reales, que x sea un punto fijo significa que el punto $(x, f(x))$ tiene uno o más puntos en común con la recta $y = x$. Los puntos que vuelven al mismo valor después de un número finito de iteraciones de la función se conocen como puntos periódicos; un punto fijo es un punto periódico igual a 1.
Existen puntos fijos atractivos los cuales cumplen ue para cualquier valor de x en el dominio que sea lo suficientemente cercano a x_0, la sucesión obtenida iterando la función $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ converge a x_0. Se dice que un punto fijo atractivo es un punto fijo estable si también es Lyapunov estable.
Los puntos fijos son utilizados en campos de equilibrio y estabilidad. En compiladores, computaciones de puntos fijos son usados para todo un análisis de programa, que suelen ser usados para la optimización de código.

[4]https://www.xataka.com/espacio/el-accidente-del-challenger-30-anos-de-una-tragedia-que-cambio-la-exploracion-espacial

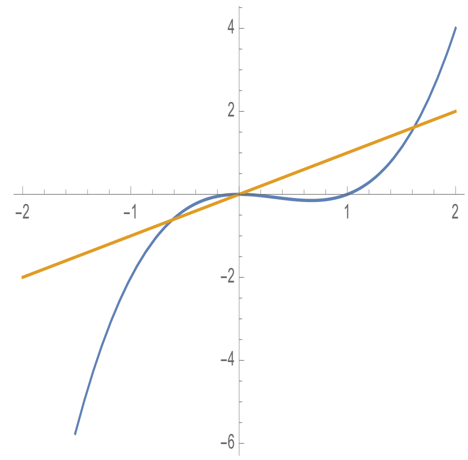


Figure 5.26: Ejemplo de función con puntos fijos, $f(x) = x^3 - x^2$.

5.21.1 Estabilidad de Liapunov

Se dice que un punto de equilibrio X_0 de la ecuación diferencial homogénea $\dot{X} = f(X)$ es estable si todas las soluciones a la ecuación que parten en un entorno de X_0 se mantienen cerca de X_0 para todo tiempo posterior.

5.21.2 Método del punto fijo

Este método es un método iterativo que permite resolver sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales. En particular se puede utilizar para determinar raíces de una función de la forma $f(x) = 0$, siempre y cuando se cumplan los criterios de convergencia. El método consiste en:

1. Se ubica la raíz de $f(x)$ analizando la gráfica.
2. Se despeja de manera : $x = g(x)$.
3. Obtenemos de $x = g(x)$ su derivada $g'(x)$.
4. Se resuelve la desigualdad $-1 \leq g'(x) \leq 1$ se obtienen los rangos de los valores en los cuales esta el punto fijo llamado R.
5. Con R buscamos la raíz en $g(x)$, es decir $g(R) = R$ haciendo iteración de las operaciones.

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, se tienen los ceros $x_{r0} = 3$ y $x_{r1} = -1$. De $f(x) = 0$ se despeja x, obteniendo:

$$x = g(x) = \sqrt{2x + 3}$$

Si se comienza con una aproximación $x_i = 4$ se itera con la iteración de punto fijo, los valores sucesivos de x son:

$$\begin{aligned}
x_i = x_0 &= 4\\
x_1 = g(x_0) &= \sqrt{2(4)+3} = 3.31662\\
x_2 = g(x_1) &= \sqrt{2(3.31662)+3} = 3.10375\\
x_3 = g(x_2) &= \sqrt{2(3.10375)+3} = 3.03439\\
x_4 = g(x_3) &= \sqrt{2(3.03439)+3} = 3.01144\\
x_5 = g(x_4) &= \sqrt{2(3.01144)+3} = 3.00381
\end{aligned}$$

Se puede observar que el resultado de las operaciones es divergente al valor de las raíces.

5.22 Idempotencia

La idempotencia es la propiedad para realizar una acción determinada varias veces y conseguir el mismo resultado que se obtendría si se realiza una sóla vez. Cuando un operador $*$ aplicado a cualquier operando de la forma $s * s$ resulta en s, se dice que es una operación idempotente. En el caso de matrices, se dice que una matriz es idempotente si $A^n = A$.

5.23 Congruencia Zeller

Algoritmo usado para calcular el día de la semana de cualquier fecha del calendarío. Este algoritmo fue ideado por Julius Christian Johannes Zeller. Existen 2 fórmulas. Para el calendario gregoriano se utiliza:

$$h = \left(q + \left[\frac{(m+1)26}{10}\right] + K + \left[\frac{K}{4}\right] + \left[\frac{J}{4}\right] - 2J\right) \bmod 7,$$

Mientras que para el calendario juliano:

$$h = \left(q + \left[\frac{(m+1)26}{10}\right] + K + \left[\frac{K}{4}\right] + 5 - J\right) \bmod 7.$$

Donde:

- h es el dia de la semana y corresponde a 0 para domingo, 1 para lunes,..., 6 para sábado.
- q es el día del mes.
- m es el mes,
- J es la centuria, $\frac{año}{100}$.

- K el año de la centuria (año mod 100).

Hay algunas consideraciones a realizar. Una de éstas es que enero y febrero se cuentan como meses 13 y 14 del a no anterior. Por ejemplo: el 2 de enero de 2013, m=13; a no=2012.
Al realizar una implmenetación en computadoras, la manera más sencilla de obtener un resultado del módulo de un número negativo entre un valor de 0 y 6 es remplazando -2J por 5J y -J con 6J. También hay que tomar en cuenta que el calendario gregoriano se fue utilizando en diversos momentos en diversas localidades, por lo que se tiene que considerar esto para algunos calculos del día de la semana de fechas establecidas antes del cambio de calendarios.
Este algoritmo surge de la obsevación de que el día de la semana progresa de una manera predecible. Cada término de la congruencia se usa para calcular el desplazamiento necesario para obtener el día correcto de la semana. Analizando la congruencia se pueden encontrar los siguientes puntos:

- q representa la progresión del día de la semana según el día del mes.
- K representa la progresión del día dependiendo del año. Suponiendo que cada año tiene 365 días, la misma fecha de cada año será desplazada por un valor de 365 mod $7 = 1$.
- Al haber un día adicional en los años bisiestos, se tiene que añadir la corrección $\frac{K}{4}$ en el que se trunca a su valor entero.
- Por cuestiones de las correcciones establecidas en el calendario gregoriano, para las centurias normales tienen 36524 días, mientras que para las que son divisibles por 400 tienen 36525 días. Para tener esto en cuenta se tiene la expresión $\left[\frac{J}{4}\right] - 2J$, esto es igual a $5 - J$ o $5 + 6J$ para evitar números negativos.

5.24 Criterios de divisibilidad

Para encontrar la divisibilidad de un número existen criterios prácticos que facilitan esta tarea, evitando realizar la división para encontrar si el residuo es 0. Aunque algunas sean más sencillas, todas son prácticas. A continuación una serie de los criterios de divisibilidad:

1) Todo número es divisible por 1.

2) Si es un número par. Es decir, acaba con $0, 2, 4, 6, 8$.

3) Si la suma de sus cifras es múltipo de 3.

   Ej: 135: $1 + 3 + 5 = 9$, 135 mod $3 = 0$.

4) Si sus dos últimas cifras son 00 o algún múltiplo de 4.

   Ej: 1536: 36 es múltiplo de 4, 1536 mod $4 = 0$.

5) Si acaba en 0 o 5.

6) Si cumple que es divisible entre 2 y 3.

7) Separar el número en 2 números, el primero es el mismo número pero sin las unidades; el segundo, son las unidades. Y si la diferencia del primer número menos el doble del segundo es múltiplo de 7, entonces el número es múltiplo de 7.

   Ej: 161: $16 - 2(1) = 14$, $14 \bmod 7 = 0$. $161 \bmod 7 = 0$.

8) Si sus 3 últimas cifras son 000 o algún múltiplo de 8.

9) Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

10) Si termina en 0.

11) Si la suma de las cifras en posición par menos la suma de las cifras en posición non es un múltiplo de 11.

    Ej: 16929: $(1 + 9 + 9) - (6 + 2) = 11$, $11 \bmod 11 = 0$, $16929 \bmod 11 = 0$.

12) Si es divisible entre 3 y entre 4.

13) Parecido al método para múltiplos de 7. Pero ahora múltiplicando el número de las unidades por 9. Si la diferencia es múltiplo de 13, el número es divisible por 13.

    Ej. 1287: $128 - 7 * 9 = 65$ $65 \bmod 13 = 0$, $1287 \bmod 13 = 0$.

14) Si es divisible entre 2 y entre 7.

15) Si es divisible entre 3 y entre 5.

Es posible visualizar si un número es divisible entre otro con la ayuda de grafos. En estos grafos se van recorriendo de 1 en 1 las conexiones entre nodos según la cantidad del digito del número a comprobar si es divisible, una vez terminado de recorrer, hay una conexión con otra arista a otro nodo, se procede con todos los digitos, de orden mayor a menor. Si al final se encuentra en el nodo 0, se dice que el número es divisible. Por ejemplo, el grafo de divisibilidad para 7 es el siguiente:

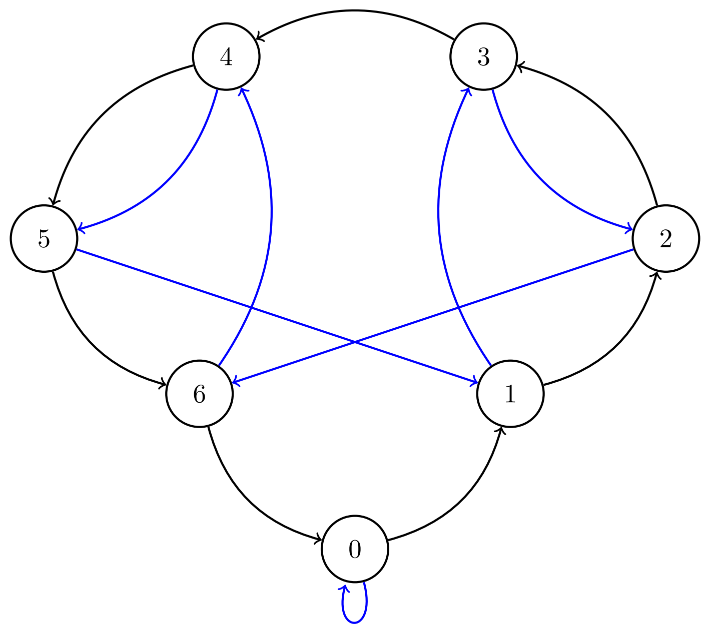


Figure 5.27: Grafo de criterios de divisibilidad de 7.

Chapter 6

Tareas

6.1 Clase 1

Indique 10 casos de eventos deterministas:

1. Lanzar piedras al aire (todas caen).
2. Lunes precede a martes.
3. Un día tiene 24 horas.
4. El tiempo de carga y descarga de un capacitor.
5. La distancia recorrida a una velocidad cte. en un tiempo cte.
6. Ir a algún lugar todos los días.
7. Tener tarea de probabilidad para toda la semana.
8. La velocidad de propagación del sonido.
9. La fuerza de atracción entre dos cuerpos de masa m a una distacia d.
10. El tiempo de ejecución de un programa (en instrucciones).

Indique 10 casos de eventos aleatorios:

1. El significado de ”no” de una mujer.
2. Las caras al lanzar una cantidad de dados.
3. La cantidad de lluvia por año en alguna región.
4. El nivel de delincuencia a una hora en especifico día.
5. Sacar una carta de una baraja.
6. El tiempo de recorrido del transporte público en México.

7. El periodo de una mujer irregular.
8. El tiempo de vida de un dispositivo electrónico.
9. La localización de una partícula al conocer su velocidad.
10. El sabor de una grajea (Referencia a los dulces de Harry Potter).

Mencione 10 ejemplos de espacios muestrales:

1. Lados de una moneda, S = Aguila, Sol.
2. Lados de un dado, S = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. Las 52 cartas de una baraja, donde S = baraja.
4. Los posibles caminos a recorrer de un punto a otro.
5. Los 3 alumnos de la clase de probabilidad.
6. Los X focos producidos el día Y.
7. El grupo de personas que padecen Parkinson.
8. Los jugadores de un equipo de futbol.
9. Las esferas que pueden salir en una tombola.
10. Los números pares menores a 100.

6.2 Clase 2

De ejemplos de 10 permutaciones

1. de los número 1, 2 y 3 =¿ 123, 132, 213, 231, 312, 321.
2. Las maneras en que los alumnos se pueden sentar en un salón de clases.
$$_{No.Bancas}P_{No.Alumnos}$$
3. El orden de comer, postre, plato fuerte y entrada.
4. Las permutaciones que se pueden formar usando las letras de ”cafe”. Se pueden repetir letras:
$$4 * 4 * 4 * 4$$
5. Las maneras de hacer la formación de un equipo de basquetbol.
$$5!$$

6. El sorteo para la marcha militar, el orden de sacar las bolas.

$$(Numerodebolas) = (Bolasblancas) + (Bolasnegras)$$

$$P_{Numerodebolas}^{Bolasblancas,Bolasnegras} = \frac{Bolasblancas!\,Bolasnegras!}{Numerodebolas}$$

7. Sarah tiene 5 blusas, 3 collares y 4 aretes, ¿de cuantas maneras puede vestirse?

$$5 * 3 * 4 = 60$$

8. En una carrera hay 6 corredores, cuantas formas tienen de llegar a la meta:

$$6! = 720$$

9. Cuantos caminos hay para llegar de una esquina de un rectangulo a su contraesquina, con el rectángulo dividido en n*m:

$$P_{n+m}^{n,m} = \frac{n!\,m!}{(n+m)!}$$

10. La manera de acomodar las camisas en el closet.

De ejemplos de 10 combinaciones

1. Las combinaciones tomando 3 elementos de a, b, c, d:

$$_4C_3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

2. Las maneras que se puede hacer un comité de 3 hombres y 2 mujeres, de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres: $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = 350$

3. Un alumno tiene que responder 8 de 10 preguntas, ¿Cuántas maneras tiene de elegir las preguntas?

$$\binom{10}{8} = 45$$

4. Si las primeras 3 son obligatorias, entonces:

$$\binom{7}{5} = 21$$

5. Si tiene que elegir al menos 4 de las primeras 5, entonces:

$$\binom{5}{4}\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\binom{5}{3} = 25 + 10 = 35$$

6. ¿De que maneras se puede elegir uno o más elementos de 6 elegibles?

$$\sum_{i=1}^{6} \binom{6}{i} = 2^6 - 1 = 63$$

7. En un equipo de basquet de 11 integrantes, ¿cuántas alineaciones se pueden formar?

$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = 462$$

8. Encontrar el número de combinaciones al sacar 2 de 4 gelatinas de la alacena.

$$\binom{4}{2} = 6$$

9. Puedo ver con mi novia 3 películas, si tenemos 7 para elegir, ¿Cuantas combinaciones de películas podemos ver?

$$\binom{7}{3} = 35$$

10. Las combinaciones de platillos que se pueden comer en la cafetería.

De 5 ejemplos donde se utilice el principio de la pichonera

1. si hay 366 personas en un evento, al menos 2 cumplirán años el mismo día.

2. Sea A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Muestre que si $B \subset A$ de 7 elementos, entonces hay al menos 2 elementos en B que sumados dan 10.
   Si se considera: $H_1 = \{0, 10\}, H_2 = \{1, 9\}, \ldots, H_6 = \{5\}$ como las pichoneras y los elementos de S como pichones, entonces habrá al menos 2 elementos cuya suma sea 10.

3. Si se eligen 5 puntos aleatorios dentro de un triangulo equilatero de 2 unidades por arista, muestre que al menos 1 par de puntos tiene una separación menor a una unidad:
   Se puede particionar el triangulo en 4 triangulos equilateros de 1 unidad por lado. Teniendo 4 triangulos y 5 puntos el resultado es obvio.

4. En un juego de poker, 3 jugadores toman 5 cartas cada quien. Cuantas cartas del mismo número hay:
   Cada figura tiene 12 cartas, el número de cartas en juego es de 15, por lo que al menos 3 cartas serán del mismo número.

5. Si se toman n+1 números cualesquiera del conjunto {1,2,...,2n}, al menos habrá entre ellos dos elementos x e y tal que x divide a y.

6.2.1 Justificación formula de permutación

Demuestre que

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \tag{6.1}$$

es igual a

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{6.2}$$

si se desarrolla el numerador de la segunda igualdad se tiene:

$$_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\dots(1)}{(n-r)!}$$

donde se puede ver que se tiene la expresión $(n-r)(n-r-1)\dots(1)$ que es igual a $(n-r)!$, entonces:

$$_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

cancelando los $(n-r)!$ se obtiene la primera igualdad. Quedando así demostrado que son iguales.

6.2.2 Problema 1.36 de Schaum's Murray Spiegel

Explicar por qué

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Suponga que tiene el conjunto $A = a, b, c, d, e$ y le piden sacar las combinaciones tomando 2 elementos. En primer lugar se tienen:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Las combinaciones y sus elementos restantes son:

1. (a,b), (c,d,e).
2. (a,c), (b,d,e).
3. (a,d), (b,c,e).
4. (a,e), (b,c,d).
5. (b,c), (a,d,e).
6. (b,d), (a,c,e).
7. (b,e), (a,c,d).
8. (c,d), (a,b,e).

9. (c,e), (a,b,d).
10. (d,e), (a,b,c).

De aquí se puede destacar que por cada subconjunto de 2 elementos formados de $\binom{5}{2}$ se tiene un subconjunto de los 3 elementos no seleccionados. Si lo hacemos en sentido opuesto, es decir $\binom{5}{3}$, se tendrán 10 subconjuntos de 3 elementos, y por cada uno de estos, habrá un subconjunto de los 2 elementos restantes.
Por lo tanto, se puede observar claramente que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Esto también se puede ver en la definición de combinación.

$$\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

si $r = n - r$, entonces se tiene:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!},$$

donde se observa que se cumple la igualdad de $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

6.3 clase 3

6.3.1 3 cosas que usen tensores

El tensor de conductividad y ley de Ohm

En una resistencia ideal, la ley de Ohm relaciona la corriente con el voltaje usando la expresión lineal

$$I = \frac{V}{R}. \tag{6.3}$$

En esta ecuación I es la corriente que circula a través de la resistencia R, y V es el voltaje aplicado. Usando unidades MKS, I es medido en Ámperes, V en Volts y R en Ohms.
La ecuación (6.3) describe el flujo de corriente a través de un elemento discreto. Para aplicar la ley de Ohm a un medio distribuido, como un sólido cristalino, una forma alternativa de esta ecuación debe ser utilizada

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}. \tag{6.4}$$

Aquí $\vec{J}$ es la densidad de corriente, $\vec{E}$ es el campo eléctrico y σ es la conductividad del material. En unidades MKS $\vec{J}$ es medido en Ámperes por unidad de área. $\vec{E}$ en Volts por metro y σ en Ohm-metros a la menos uno.
La ecuación (6.4) describe una simple dependencia física entre la densidad de

corriente y el campo eléctrico ya que la conductividad es expresada como un escalar; sin embargo existen conductores cristalinos que permiten que la corriente se desplace más por una dirección que por otra e inclusive puede que permitan el flujo perpendicular de la corriente al campo eléctrico aplicado. La ecuación (6.4) no puede manejar este tipo de situaciones.
Para este último tipo de situaciones existe una notación usando una notación tensorial.

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}. \tag{6.5}$$

Que también se puede escribir:

$$J_i = \sigma_{ik} E_k. \tag{6.6}$$

El tensor de rotación

Sea A un vector arbitrario. Rotándolo en cierto ángulo θ alrededor del eje especificado por un vector unitario e, y sea B el vector que resulta, se puede obtener B matemáticamente mediante la aplicación de un tensor R_{ij} de segundo orden de la forma:

$$B_i = R_{ij} Aj$$

R_{ij} se denomina *Tensor de rotación.* Y se obtiene en términos de los parámetros de rotación:

- El eje de rotación e.
- El ángulo de rotación θ.

Tensor de desplazamientos

La relación fundamental $a' = a + (a \bullet \nabla)u$ adopta una forma muy conveniente en el lenguaje de matrices. Igualando componente a componente en ambos miembros y desarrollando el operador escalar $a \bullet \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial x}$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

En terminos de matrices podemos ver la eq(6.7) como $a = Da'$ donde a' y a son las matrices columna asociados a los vectores a' y a, y D es la *Matriz de desplazamientos.* El *tensor de desplazamientos* representado por la matriz D es $D_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

6.4 Ecuaciones de la caminata aleatoria

6.4.1 5 y 8 para obtener 12

De la presentación de la clase 5 (caminata del borracho en 1D), se sabe que que:

- $-N \leq m \leq N$. Donde N es la cantidad de pasos y m es la posición en la que acaba el borracho.
- $N = n_1 + n_2$.. La cantidad de pasos totales es la suma de pasos a la derecha n_1 y de pasos a la izquierda n_2.
- Por construcción, $m = n_1 - n_2$.

De tal manera que podemos expresar m en terminos de n_1:

$$m = n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N.$$
$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$
$$P_N(m) = W_N(n_1).$$

Se sabe que para terminos de saber los posibles resultados de posición del borracho después de N pasos se puede usar la permutación con repetición. Ya que la posición en la que termina si camina derecha, derecha, izquierda; es la misma que si camina uno a la izquierda y 2 a la derecha. Por lo tanto, los posibles resultados son:

$$\text{Posibles resultados} = \frac{N!}{n_1!\, n_2!}.$$

Si se quisiera saber la probabilidad de que acabe en cierta posición, se necesita entender que la probabilidad de dar n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda en cualquier orden es:

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} p^{n_1} q^{n_2},$$

de esta última ecuación se puede ver su gran parecido con el teorema del binomio:

$$(p+q)^N = \sum_{n=0} N \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

De aquí en terminos de probabilidad y por normalización. La probabilidad de que en un experimento donde existan dos posibles resultados: $p + q = 1$.
Finalmente podemos usar:

$$m = n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N, \tag{6.8}$$

y sustituirla en:

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} p^{n_1} q^{n_2}, \tag{6.9}$$

Para obtener:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\frac{N+m}{2}!\, \frac{N-m}{2}!} p^{\frac{N+m}{2}} (1-p)^{\frac{N-m}{2}} \tag{6.10}$$

6.4.2 Demostraciones 23-26

23

Demuestre que $\Delta u = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \overline{u - \bar{u}} \\
\bar{u} &= \frac{\sum u}{|u|} \\
\bar{\bar{u}} &= \frac{\bar{u}}{1} \\
\overline{u - \bar{u}} &= \frac{\sum u - |u|\bar{u}}{|u|} \\
&= \frac{\sum u}{|u|} - \bar{u} = \bar{u} - \bar{u} = 0
\end{aligned}$$

6.4.3 24

Demuestre:

$$\overline{(\Delta u)^2} \equiv \sum_{i=0}^{M} P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0.$$

Sabemos que $P(u_i)$ es una forma de agregar peso a u_i y que por lo general es un valor positivo. También se sabe que para toda $u \in \Re, u^2 = (-u)^2 \geq 0$. Por construcción, queda demostrado.

6.4.4 25

Demostrar: $\overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{u^2} - \bar{u}^2$,

$$\begin{aligned}
\overline{(u - \bar{u})^2} &= \frac{\sum (u - \bar{u})^2}{|u|} \\
&= \frac{\sum u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2}{|u|} \\
&= \overline{u^2} - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2 \\
&= \overline{u^2} - \bar{u}^2
\end{aligned}$$

6.4.5 26

Demostrar que $\overline{u^2} \geq \bar{u}^2$.

$$\begin{aligned}
\overline{u}^2 &= \left(\frac{\sum u}{|u|} \right)^2 = \frac{(\sum u)^2}{|u|^2} \\
\overline{u^2} &= \frac{\sum u^2}{|u|}
\end{aligned}$$

Para el caso de que sólo haya un elemento:

$$\frac{\sum u^2}{|u|} = \frac{(\sum u)^2}{|u|^2}$$

De la ecuación:

$$\overline{(u-\bar{u})^2} = \overline{u^2} - \bar{u}^2,$$

Dado que el lado izquierdo de la ecuación siempre es positivo, se concluye que: $\overline{u^2} \geq \bar{u}^2$.

6.4.6 Justificar 29

Justificar: $\sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1) = 1$.
Al sustituir:

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \text{ en}$$

$$\sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1) = 1, \text{ se obtiene:}$$

$$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^{\frac{1}{2}}. \text{ Por teorema del binomio.}$$

Dado que q = 1-p, p+q=1, por lo tanto $(p+q)^{\frac{1}{2}} = 1$.

6.4.7 Explicar 31

Por definición:

$$\overline{n_1} = \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1)n_1 = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1$$

De no ser por el n_1 seguiría siendo teorema del binomio. No obstante, se puede apreciar que ese termino se puede obtener si:

$$n_1 p = p\frac{\partial}{\partial p} p^{n_1}.$$

Ya que al aplicar el operador se obtiene: $p(n_1)p^{n_1-1} = (n_1)p^{n_1}$.
Si substituimos la propuesta anterior en $\overline{n_1}$:

$$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} \left[p\frac{\partial}{\partial p} p^{n_1}\right] q^{N-n_1}.$$

Como la suma está en terminos de n_1, se puede hacer que:

$$p\frac{\partial}{\partial p} \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1},$$

de aquí se sabe que esto es igual a:

$$p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N.$$

Al aplical el operador, se obtiene:

$$pN(p+q)^{N-1}.$$

6.4.8 33

Justificar $\overline{n_2} = Nq$.
De la expresión $pN(p+q)^{N-1}$, sabemos que $p+q=1$ y por lo tanto $\overline{n_1} = Np$. Para obtener 33, sólo hace falta aplicar la misma lógica que se hizo para obtener $\overline{n_1} = Np$. En terminos de n_2:

$$q\frac{\partial}{\partial q}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{N!}{n_2!\,(N-n_2)!}p^{N-n_2}q^{n_2}.$$

De aquí:

$$q\frac{\partial}{\partial q}(p+q)^N.$$

Finalmente aplicando el operador:

$$\overline{n_2} = Nq.$$

6.4.9 38

Encuentre $\overline{(n_1)^2}$.
Por definición:

$$\overline{(n_1)^2} = \sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}p^{n_1}q^{(N-n_1)}(n_1)^2$$

Tomando como verdadera la expresión:

$$(n_1)^2 p^{n_1} = n_1\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)p^{n_1} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 p^{n_1}$$

Entonces se obtiene la expresión:

$$\overline{(n_1)^2} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}p^{n_1}q^{(N-n_1)}$$

De la cual se puede ver que:

$$\overline{(n_1)^2} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 (p+q)^N$$

aplicando el operador 2 veces, se obtiene:

$$\begin{aligned}\overline{(n_1)^2} &= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)(pN(p+q)^{N-1}) \\ &= p(pN(N-1)(p+q)^{N-2} + N(p+q)^{N-1})\end{aligned}$$

Rerdando que $p + q = 1$,

$$\begin{aligned}&= p^2(N^2 - N) + pN \\ &= Np(1 + pN - p) = (Np)^2 - Npq\end{aligned}$$

6.4.10 39 y 40

El cálculo de la raíz cuadrática media (r.m.s.) $\Delta^* n_1 \equiv \left[\overline{(\Delta n_1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ es una medida linear sobre el rango en el cual n_1 está distribuido. Una buena medida de la anchura relativa de la distribución es:

$$\frac{\Delta^* n_1}{\bar{n_1}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Para el caso p = q:

$$\frac{\Delta^* n_1}{\bar{n_1}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

6.5 Programa de permutaciones

6.5.1 Sacar las permutaciones

Para sacar las permutaciones de n elementos, se puede hacer con una función recursiva en la que se van intercambiando los elementos de posición. En este método un aumento en la cantidad de elementos produce un aumento considerable ($n!$) del tiempo de ejecución.
Cómo en muchos de los programas que utilizan funciones recursivas, se empieza con un arreglo de elementos de cierto tamaño y cada invocación se hace con un arreglo de elementos más pequeño.

6.5.2 Permutación par o impar

Teniendo la permutación inicial (todos los elementos ordenados de menor a mayor) y la permutación que se quiere saber si es par o impar, se puede hacer una matriz y al sacar el determinante se obtiene el valor de +1 o -1 que indica si la permutación es par o impar. Ejemplo:

$$\text{Permutación } 0 = abcd$$
$$\text{Permutación n} = badc$$
$$\text{Matriz} = \begin{array}{ccccc} * & a & b & c & d \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$
$$|\text{Matriz}| = 1$$

De aquí se puede ver que la permutación es par. Y se puede verificar por que hubo 2 cambios: a por b y c por d.

6.5.3 Matriz Permutación

Esta mátriz, es la matriz cuadrada con sus $n \times n$ elementos iguales a 0, excepto uno por fila y columna que contiene el valor de 1. De acuerdo a esta definición, existen $n!$ matrices de permutaciones distintas, de las cuales una mitad corresponden a una permutación par y la otra mitad a matrices permutación impar. Ejemplo de matriz de permutación par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de permutación impar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices de permutación conforman un grupo de orden $n!$ respecto al producto.
Algunas propiedades de estas matrices:

- El elemento neutro del grupo es la matriz identidad.
- El elemento inverso de cada elemento es la matriz traspuesta.
- Cada matriz es una matriz ortogonal.
- El producto de matrices de permutación de misma paridad da una matriz par.
- El producto de matrices de paridad distinta da una matriz de permutación impar.
- El grupo de estas matrices es conmutativo.

Figure 6.1: Caricatura sobre las permutaciones.

6.5.4 Coeficiente binomial

Los coeficientes binomiales son números estudiados en combinatoria que corresponden al número de formas en que se puede extraer subconjuntos a partir de un conjunto dado.

Definición combinatoria

Se tiene un conjunto con seis objetos diferentes a,b,c,d,e,f, de los cuales se desea escoger dos (sin importar el orden de elección). Existen 15 formas de efectuar tal elección:

A,B	A,C	A,D	A,E	A,F
	B,C	B,D	B,E	B,F
		C,D	C,E	C,F
			D,E	D,F
				E,F

El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos.

Definición algebraica

Esta forma permite saber cuantos elementos hay por combinación, pero no saber los elementos que cada grupo tiene. La forma para seleccionar elementos en una combinación es eq.(6.1), ya que en cada elección hay un elemento menos del cual elegir. Sin embargo de estas elecciones se pueden permutar entre los elementos y por definición una combinación sólo toma en cuenta los elementos y no el orden de estos. Por lo que hay que dividir entre las $r!$ permutaciones de los elementos.

Definición recursiva

Existe una fórmula recursiva para los coeficientes binomiales.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ Para todos los números eneteros n,k¿0,} \tag{6.11}$$

con los valores iniciales

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ para todos los números enteros n} \geq 0,$$
$$\binom{0}{k} = 0 \text{ para todos los números enteros k ¿ 0.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)1} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,n-k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Definición por inducción matemática

Si se tiene un conjunto de n elementos, donde $n \geq 0$, hay un único subconjunto sin elementos, que es el conjunto vacío, por lo que el número de estos subconjuntos de cero elementos que hay es 1, cualquiera que sea n.

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Si se tiene una lista de los subconjuntos de k elementos y a cada uno de ellos se añaden, por turno, cada uno de los n-k elementos del conjunto inicial que no estaban en dicho suconjunto, la lista de subconjuntos resultante contendrá todos los subconjuntos de k+1 elementos y además cada uno de ellos aparecerá repetido k+1 veces en dicha lista.

$$C(n,k) = \frac{(n-k+1)}{k} C(n,k-1). \tag{6.12}$$

6.5.5 Problema de los 10 dulces a 4 niños

Se quiere dividir 10 objetos en 4 grupos, para hacerlo de forma gráfica se mostrarán los objetos con * y la separación con /. De manera que las disposiciones de los asteristicos corresponden a alguna forma de repartir los objetos.

De esta forma, el número de formas de repartir corresponde al número de disposiciones de 13 símbolos, de los cuales, 10 son asteriscos y 3 son barras. Pero esto precisamente es el número de formas de elegir tres objetos de un conjunto con 13 elementos, (de los 13 elemntos se eligen cuales 3 serán barras) y por tanto el resultado de ordenamintos es $\binom{13}{3} = 286$ formas.

- ///**********
- //*/*********
- //**/********
- //***/*******
- $\vdots$
- ***/***/***/*

Este argumento se puede aplicar en general al repartir k objetos entre n otros objetos. Y corresponde a formar multiconjuntos de tamaño k escogidos de un conjunto de tamaño n, y a su vez esto puede enumerarse con una serie de k objetos y n-1 otros objetos, que puede realizarse de

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \tag{6.13}$$

formas. Es así que se establece el teorema:

- El número de multiconjuntos con k elementos de un conjunto con n elementos satisface

  Es igual al número de combinaciones con repetición k elementos escogidos de un conjunto de n elementos.

  Es igual al número de formas de repartir k objetos en n grupos.

6.6 Recorrido de árboles binarios

Sea T un árbol binario del cuál se quiere conocer la información de sus nodos, se necesita recorrer las ramas del árbol. Esto se puede realizar como un proceso secuencial, recorriendo los nodos individuales en un orden específico. Los nodos entonces se pueden considerar como parte de una estructura lineal. En general hay 2 formas de recorrer un árbol: En *Amplitud* o en *Profundidad*.

6.6.1 Recorrido en amplitud

Es aquel recorrido que recorre el árbol por niveles. Empezando por el nivel superior. Por ejemplo, para el árbol:

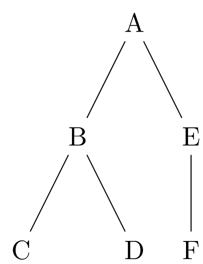


Figure 6.2: Ejemplo de recorrido de árboles.

Su recorrido sería: A, B, E, C, D, F. El mayor inconveniente de este tipo de recorrido es que cada nivel, se tiene que recorrer nuevamente cada rama del árbol.

6.6.2 Recorrido en profundidad

Existen tres formas para este tipo de recorrido, *Pre-order, in-order y post-order*. Cada una tiene una secuencia distinta para recorrer el árbol, pero los 3 recorren el árbol por subárboles. Este tipo de recorrido es de características recursivas.

- Pre-order: La raíz se recorre antes que los recorridos de los subárboles izquierdo y derecho.
- In-order: La raíz se recorre entre los recorridos de los árboles izquierdo y derecho.
- Post-order: La raíz se recorre después de los recorridos por el subárbol izquierdo y el derecho.

In-order

Este recorrido sigue:

1. Recorrer el subárbol izquierdo in-order.
2. Examinar la raíz.
3. Recorrer el subárbol derecho in-order.

Por ejemplo, para la fig.(6.2) su recorrido sería: C, B, D, A, F, E.

Pre-order

Pre-order sigue:

1. Examinar la raíz.
2. Recorrer el subárbol izquierdo en pre-order.
3. Recorrer el subárbol derecho en pre-order.

Para la fig.(6.2) el recorrido es: A,B,C,D,E,F.

Pos-order

En este tipo de recorrido se procede a:

1. Recorrer el subárbol izquierdo en post-order.
2. Recorrer el subárbol derecho en post-order.
3. Examinar la raíz.

Por ejemplo, para la fig.(6.2): C,D,B,F,E,A.

6.7 Balanceo de árboles binarios

Las búsquedas más eficientes se lográn al tener árboles bien balanceados. Esto quiere decir que no hay subárboles que sean mucho más grandes (en algún sentido de la palabra "grande") que otros subárboles. Los árboles por excelencia que cumplen esto son los árboles completos.
Se dice que un árbol balanceado si su nivel de profundidad es O(lg n) y que la altura entre las ramas del árbol no difiera en más de un nivel. La altura por otro lado es el número máximo de nodos de un subárbol hasta una hoja. De esta manera, la diferencia para decir que un árbol esta balanceado se encuentra en el rango

$$-1, 1$$

.
Cuando un árbol no es balanceado y se desea balancearlo se realizan *rotaciones* sobre el árbol, de las cuales hay 4:

- Rotación simple a la derecha (RSD).
- Rotación simple a la izquierda (RSI).
- Rotación doble a la derecha (RDD).
- Rotación doble a la izquierda (RDI).

6.8 Oveja Dolly

Dolly fue el resultado de una combinación nuclear desde una célula donante diferenciada a un óvulo no fecundado y anucleado. La célula de la que venía Dolly era una ya diferenciada o especializada, procedente de la glándula mamaria de una oveja *Finn Dorset* de 6 años. Dolly fue la única oveja clonada satisfactoriamente de 277 experimentos.
Su nacimiento fue el 5 de julio de 1996 aunque no fue anunciado hasta 7 meses después, el 22 de febrero de 1997.
La oveja vivió toda su vida en el Instituto Roslin, dónde fue cruzada con un macho Welsh Mountain. En su primer parto, tuvo una cría: Bonnie. Al año

siguiente , Dolly produce mellizos y finalmente, al año posterior, parte trillizos. A sus 5 años, Dolly desarrolla artritis comenzando a caminar dolorosamente. El 14 de febrero de 2003, Dolly es sacrificada debido a su salud física decadente. Aunque la raza de esta oveja tiene una expectativa de vida de cerca de entre 11 y 12 años, Dolly vivió sólo 6.5 años. Esto debido a que el ADN en el núcleo está envuelto en cromosomas que se vuelven más cortas cada vez que se replican.

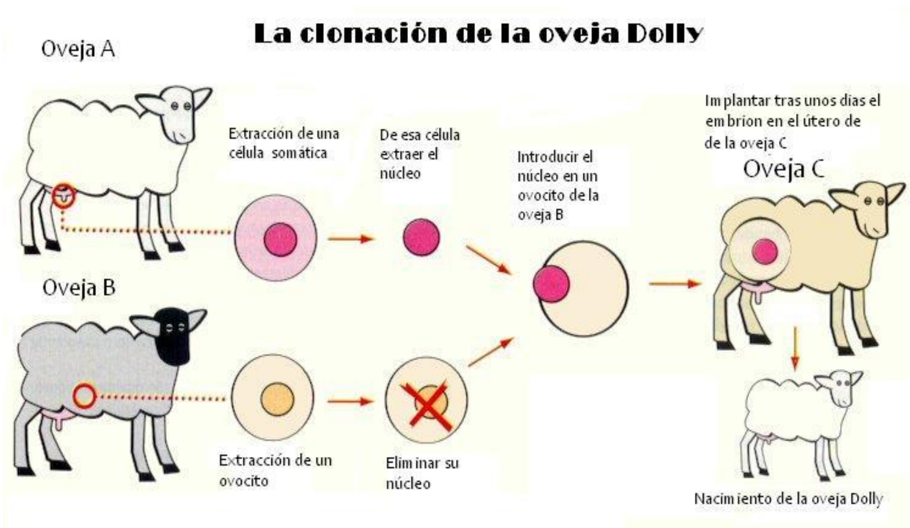


Figure 6.3: Explicación del nacimiento de Dolly.

6.8.1 Telómero

Los telómeros (del griego telos: "final" y meros: "parte") son los extremos de los cromosomas, estas regiones de ADN no codificante son altamente repetitivas y cuya función principal es la estabilidad estructural de los cromosomas en las células eucariotas, la división celular y el tiempo de vida de las estirpes celulares. Además están involucradas en enfermedades tan importantes como el cáncer.
Fuero descubiertos por Hermann Joseph Müller durante la década de los años 30 del siglo XX.
Elizabeth H. Blacburn, Carol W. Greider y Jack W. Szostak hacen la descripción molecular de los telómeros, la demostración de su conservación evolutiva y el descubrimiento de la telomerasa, enzima central de la maquinaria celular para la síntesis del telómero.
Algunas teorías del envejecimiento y de la carcinogénesis se basan en que los telómeros son como los relojes o temporizadores de la célula, ya que marcan el número de divisores celulares, hasta que la célula muere.

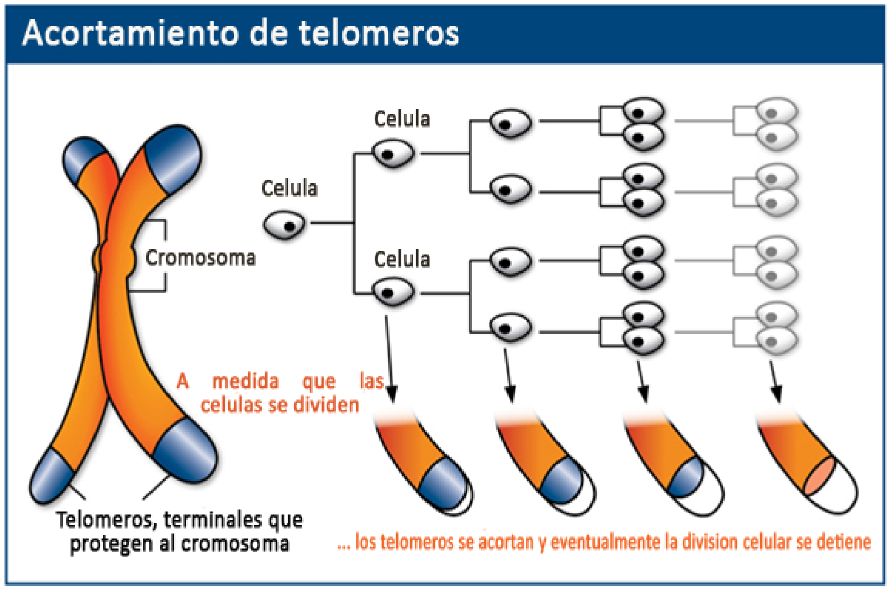


Figure 6.4: Acortamiento de los telómeros.

6.9 Procesadores

6.9.1 Funcionamiento de los procesadores

En general la función de un procesador es seguir un set de instrucciones, almacenadas en una memoria de instrucciones, cuya dirección conoce al llevar un *Programm Counter*. Estás contienen una estructura en la que contienen la instrucción y el procesador tiene la arquitectura para identificar que tipo de instrucción que se va a ejecutar, las direcciones de las que se va a leer o escribir información, o inclusive el valor. Para realizar operaciones cuentan con una unidad lógica aritmética en la que realizan operaciónes como suma y resta. Dependiendo del tipo de procesador, algunos tendrán módulos especializados para operaciones como la multiplicación o el barrido de bits en el registro.
Con la evolución de las tecnologías se han ido agregando cada vez más funcionalidades y módulos a los procesadores, como la memoria cache, que guarda los datos más relevantes para acceder más rápido a dicha información en vez de tener que leerla de una memoria externa. Además de que ha aumentado el tamaño de los buses para transmitir más información en menos tiempo.

6.9.2 ¿Cómo mejorar los procesadores

En los años pasados se han buscado mejorar los procesadores de la siguiente forma:

Escala de los transistores

Esto consiste en reducir el tamaño de los transistores cada generación manteniendo las constantes de los campos eléctricos en todas las partes del transistor. Aunque suene fácil pero cada vez aumenta más la difílcutad de realizarlo.
Cada vez que se escalan los transistores, es en un 30%, haciendo que el area se reduzca en un 50%, duplicando la densidad de transistor por area cuadrada. Esto aumenta en 40% su performance. Para mantener las constantes eléctricas se reduce el voltaje en 30%. Los diseñadores de arquitecturas han explotado la densis de transistores creando arquitecturas complejas para lograr chips más pequeños que trabajen a frecuencias más altas y consuman menos energía.

6.9.3 Técnicas multinúcleo

Microarquitecturas avanzadas han desarollado mejoras en el performance de los procesadores, dentro de estas arquitecturas esta el *pipelining, branch prediction, out-of-order execution y speculation.*
Mejorar la arquitectura tiene un beneficio mayor, ya que cuando se reduce el tamaño de los transistores, las arquitecturas siguen funcionando pero con las mejoras del escalamiento.

6.9.4 Arquitectura de memoria Cache

Mantener diferentes niveles de memoria Cache, que es una memoria de baja latencia, permite a acceder a datos que se utilizan más frecuente que otros, ayuda a que algunos procesos sean más rápidos. Ya que la lectura y escritura sobre este tipo de memorias, que están en el propio procesador, es más rápida que las mismas operaciones a otros tipos de memoria, DRAM por ejemplo.

6.9.5 Los próximos años

Aunque se reduzcan los voltajes a los que trabajan los transistores, hay que tener en cuenta que estos no són interruptores perfectos y que tienen una pequeña fuga de corriente, incrementando exponencialmente con la reducción del voltaje de encendido. Por otro lado, las dimensiones de los transistores han llegado a dimensiones atómicas y escalar las fuentes de voltajes, la energía y el consumo energético es más complicado.
Si se aumentara la cantidad de núcleos y la frecuencia de los procesadores, el consumo energético de estos sería prohibitivo, por lo que se tiene que limitar la frecuencia y el número de núcleos.
Encontrar como solucionar los problemas mencionados en esta sección son parte de lo que se investiga actualmente. Se han buscado también arquitecturas especializadas con circuitos como los FPGAs. También mejores estructuras de memorias, coordinación entre núcleos.

6.9.6 NVIDIA: CUDA

CUDA es una arquitectura de cálculo paralelo patentado por NVIDIA que aprovecha la gran potencia de la GPU para proporcionar un incremento del rendimiento del sistema. Científicos del mundo están encontrando múltiples utilidades con el uso de estas tecnologías, por ejemplo: el procesamiento de vídeo e imágenes, biología y química computacional, simulación de dinámica de fluidos, reconstrucción de imágenes de TC, el análisis sísmico o el trazlado de rayos, entre otras.
Los sistemas informáticos están pasando de realizar todo el procesamiento central en la CPU a realizar coprocesamiento repartido entre CPU y GPU. De este paradigma se desarrolla la arquitectura de cálculo paralelo CUDA.
Actualmente CUDA es recibida con entusiasmo por comundad científica debido a las aplicaciones en las que está tecnología puede ayudar a realizar simulaciones.
Esta tecnología no sólo tiene uso en el ambito científico, también los sistemas operativos de Microsoft y Apple aprovechan el GPU computing ya que utilizan el GPU para procesador gráfico y también como un procesador paralelo de propósito general accesible para cualquier aplicación.
Para poder hacer programas que utilicen la plataforma de cálculo paralelo, se proporcionan extensiones de C y C++ que permiten implementar el paralelismo en el procesamiento de tareas y datos con diferentes niveles de granularidad. El programador puede expresar ese paralelismo mediante diferentes lenguajes de alto nivel.

Chapter 7

Problemas

7.1 Combinatorics

7.1.1 Problema 1.7

Demuestre que un número (decimal) palíndromo de longitud par es divisible entre 11.
Un número palindromo sigue siendo palíndromo si se quitan el primer y último digito de éste. Este hecho es explotado para realizar la prueba inductiva de esta demostración.
Sea N un palíndromo de longitud 2k (obvía que la longitud es par), para k = 1, el teorema se mantiene. Para un valor $k \geq 2$:

$$N = a_{2k-1}10^{2k-1}+a_{2k-2}10^{2k-2}+\cdots+a_{2k-k}10^{2k-k}+a_{2k-k}102k-k-1+\cdots+a_{2k-2}10^{1}+a_{2k-1}10^{0}$$

$$= a_{2k-1}(10^{2k-1}+10^{0}) + (a_{2k-2}10^{2k-2}+\cdots+a_{2k-2}10^{1})$$

$$\equiv a_{2k-1}P+Q$$

donde:

$$P = 100\cdots 001 = 11 * 9090\cdots 9091$$

El segundo miembro de la igualdad es de longitud 2k y el tercero ($9090\cdots 9091$) de longitud 2k-2. De aquí sabemos que P es multiplo de 11 y Q sigue siendo un palíndromo de longitud par, si Q = N' y se repite el proceso hasta que la longitud de Q sea de 2 digitos, podremos ver que N es un número divisible entre 11.
Q = 0 o para algún $1 \leq r \leq k-1$, $Q = 10^r\{$palindromo de longitud 2(k-r)$\} = 10^r\{11R\}$

7.1.2 Problema 1.8

En un palindromo binario el primer y último dígito es 1, de ahí todos los dígitos entre el primero y el último son o 0 o 1. Cuente la cantidad de palindromos

binarios para una longitud n.
Primero hay que ver que para un palindromo de longitud n, la mitad de este número es igual que su segunda mitad (en espejo). Segundo, la cantidad de palindromos para n¡3 es 1. Finalmente queda saber si n es par o impar, teniendo que para una $n \geq 3$ y n siendo par, los dígitos disponibles para permutar son:

$$n_d = \frac{n-2}{2}$$

y para n impar:

$$n_d = \frac{n-1}{2}$$

donde n_d es el número de digitos.
Para concluir solo falta saber cuantos palíndromos hay:

$$2^{n_d}$$

7.1.3 Problema 1.29

Encuentre la probabilidad p_n de que un grupo ensamblado aleatoriamente de n personas incluya al menos 2 personas con el mismo cumpleaños.
En este problema es más sencillo considerar el complemento, es decir restar la probabilidad de que todos los cumpleaños sean diferentes a la normalización (1).

$$p_n = 1 - \frac{P(365,n)}{365^n} = 1 - \frac{(365)(365-1)(365-2)\cdots(365-(n-1))}{365^n}$$
$$= 1 - (1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365})\cdots(1 - \frac{n-1}{365})$$

7.1.4 Problema 1.39

Demuestre que:

a) $\sum_{r=0}^{n} C(n,r) = 2^n$

b) $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(n,r) = 0$

c) $\sum_{r,even}^{n} C(n,r) = \sum_{r,odd}^{n} C(n,r) = 2^{n-1}$

a) Del teorema del binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

Si se hacen las sustituciones x=1 y y=1,

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r.$$

b) Dado que 1 elevado a cualquier potencia es igual a 1,

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r).$$

En cambio si se hacen las sustituciones x=1 y y=-1,

$$(1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} 1^{n-r}(-1)^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(n,r) = 0$$

c) Teniendo en cuenta que de 0 a n, la mitad de los números son pares y la otra mitad son impares:

$$\frac{\sum_r^n C(n,r)}{2} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

7.1.5 Problema 1.40

Demuestre el problema 1.39 utilizando argumentos combinatorios.
a) La expresión se encuentra de la misma forma que se utiliza para conocer el conjunto potencia.
El conjunto potencia es = el conjunto vacío + los conjuntos de 1 elemento + los de 2 elementos + ... + los de n elementos.

$$P(A) = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) = 2^n$$

b) y c) Sólo hace falta establecer que X tiene tantos subconjuntos con un número par de elementos como subconjuntos de número impar de elementos por lo que la suma de la cantidad de subconjuntos pares menos la suma de la cantidad de subconjuntos impares es 0, y cada parte tiene la mitad de subconjuntos del total del conjunto potencia: 2^{n-1}

7.1.6 Problema 1.77

Muestre que en un grupo de personas habrá almenos 2 personas que conozcan el mismo número de personas en el grupo:
Este problema se resuelve utilizando el principio de la pichonera.
Suponiendo que hay n personas en el grupo X, se tienen las personas1,2,. . . , n y que hay k personas que no conocen a nadie del grupo.
Si k¿1, hay almenos 2 personas que no conocen a nadie en el grupo.
Si k=0 (todos conocen por lo menos a alguien), existen n x_i donde x_i es el numero de personas conocido por el individuo i, siendo que $1 \leq x_i \leq n-1$ para toda i, la cantidad de personas que un individuo conoce no pueden ser todos distintos, por lo que hay al menos 2 personas que conocen el mismo número de personas.
En caso de que sólo exista una persona que no conozca a nadie, se descarta esta persona y se da la misma situación de k = 0.

7.1.7 Problema 1.78

Considere que en un torneo de todos contra todos de n jugadores, en donde cada jugador tiene al menos una victoria. Muestre que al menos 2 jugadores tienen el mismo número de victorias:
Siendo que todos tienene al menos 1 victoria y a lo mucho n-1 victorias, se considera que todos los jugadores pueden tener 1, 2, . . . , n-1 victorias. Haciendo la analogía directa con el principio de la pichonera, n-1 es la cantidad de pichoneras y n la cantidad de pichones, por lo que al menos 2 estarán en la misma pichonera... o en este caso tendrán el mismo número de victorias.

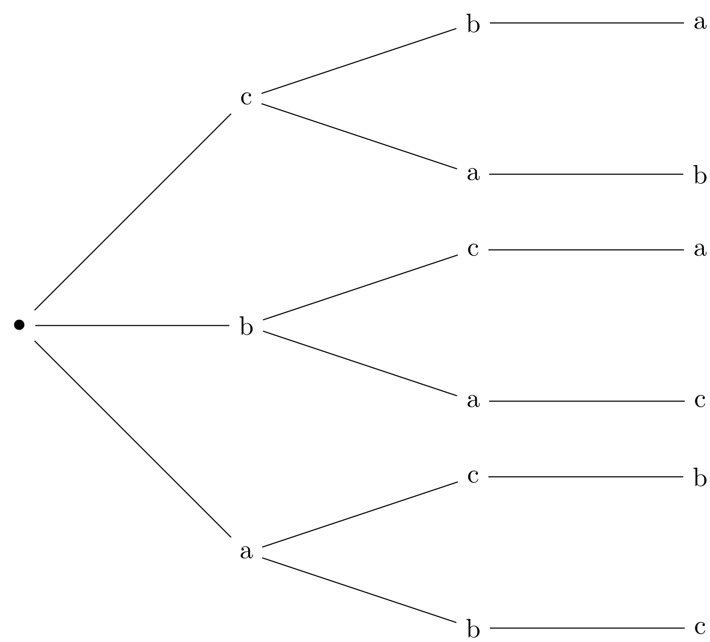
7.1.8 Problema 1.87

Si se tienen 12 computadoras y 8 impresoras laser en una oficina. Encuentre el mínimo numero de conexiones necesarias para garantizar que si 8 o menos computadoras quieren imprimir al mismo tiempo, cada una de ellas pueda usar una impresora diferente.
Enumerando las computadoras de C_1 a C_12 y las impresoras de I_1 a I_8, para que cada computadora tenga al menos una impresora diferente a sus computadoras adyacentes se considera tener 5 conexiones por impresora. De esta manera se tiene que se requieren de mínimo 40 conexiones.

7.2 Probability

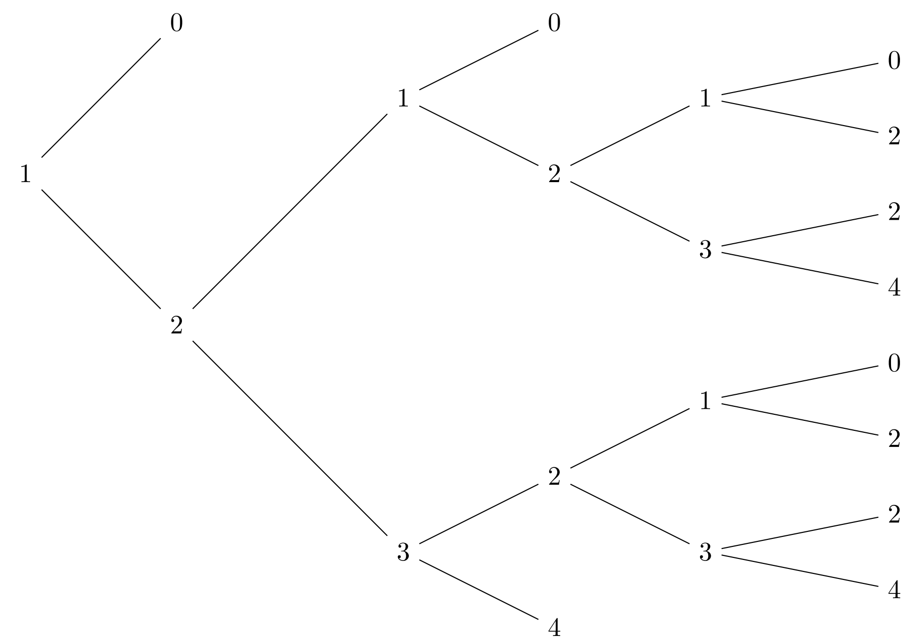
7.2.1 Problema 2.29

Construya el diagrama de árbol para el número de permutaciones de a,b,c:



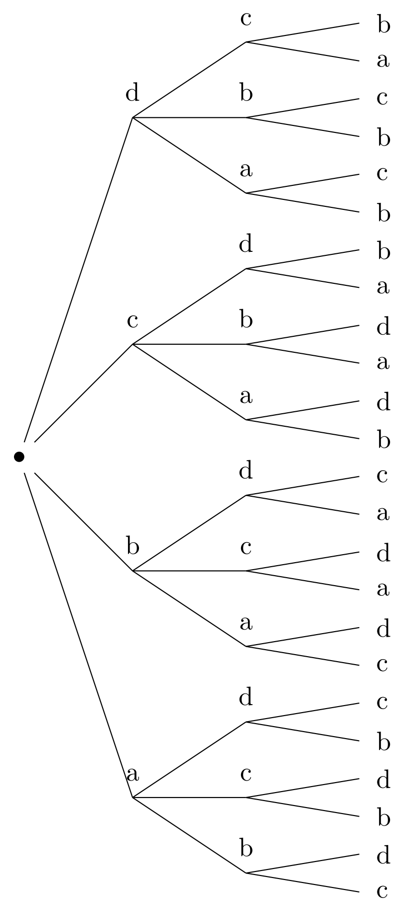
7.2.2 Problema 2.30

Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta a lo mucho 5 veces. Cada que juega el gana o pierde un dolar. El hombre empieza con 1 dolar y dejara de jugar antes del quinto juego, si pierde todo su dinero o si gana 3 dolares. Encuentre el numero de posibles desenlaces que los juegos pueden dar.



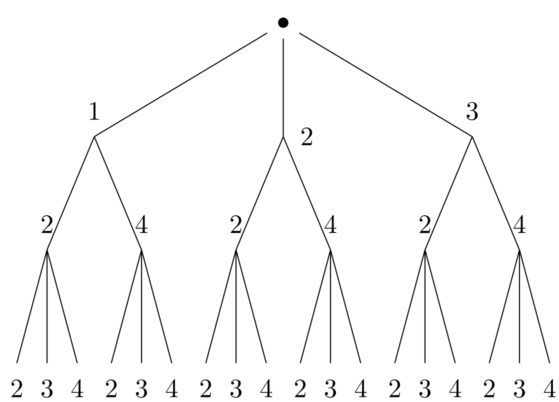
7.2.3 Problema 2.68

Haga el diagrama de árbol para las permutaciones de a,b,c,d



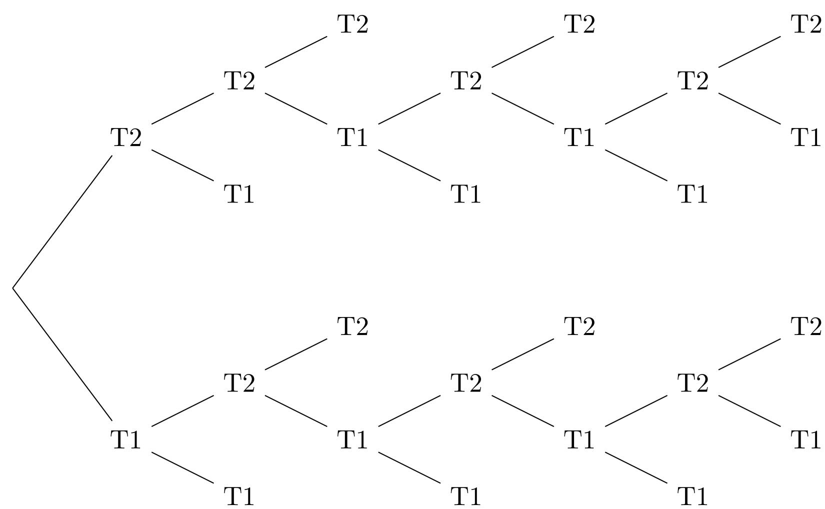
7.2.4 Problema 2.69

Encuentre el conjunto producto de {1,2,3}x{2,4}x{2,3,4}.



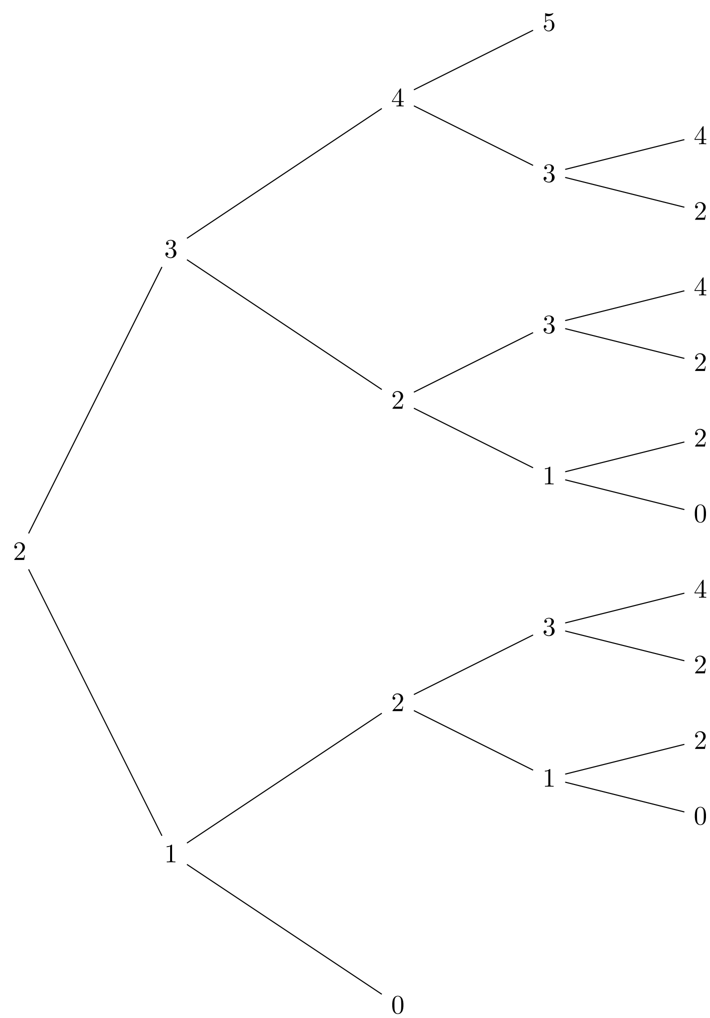
7.2.5 Problema 2.70

El equipo A y el equipo B juegan en un torneo de basquetbol. EL primer equipo en ganar 2 partidas seguidas o un total de 4 partidas gana el torneo. Encuentre el número de formas en que se puede desarrollar el torneo.



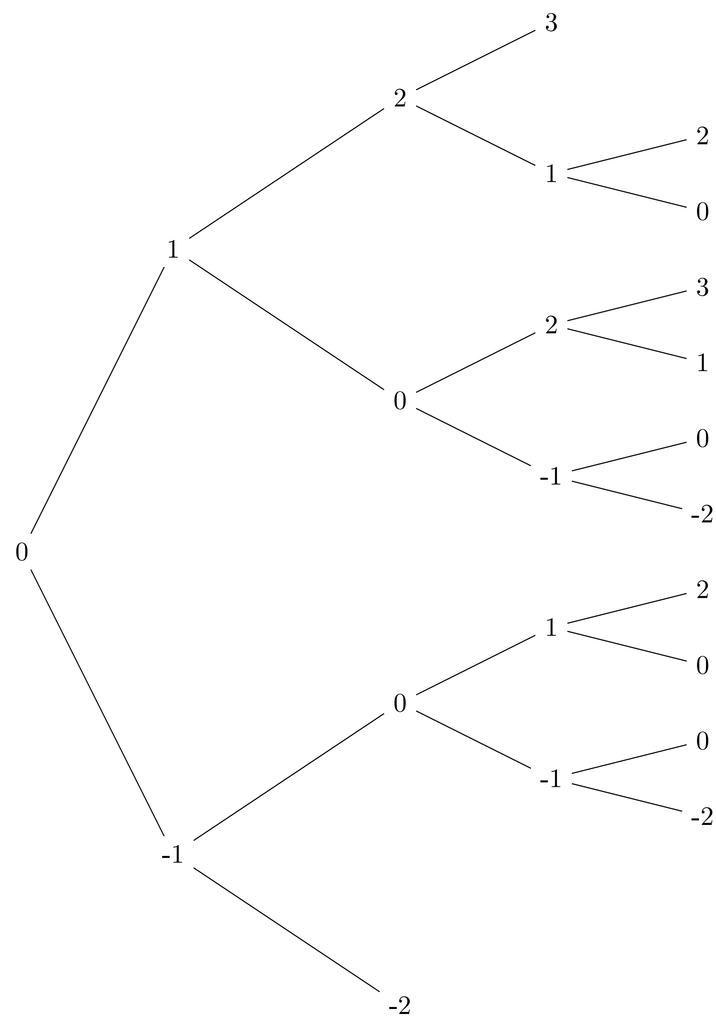
7.2.6 Problema 2.71

Problema 2.30 pero ahora empieza con 2 dolares:

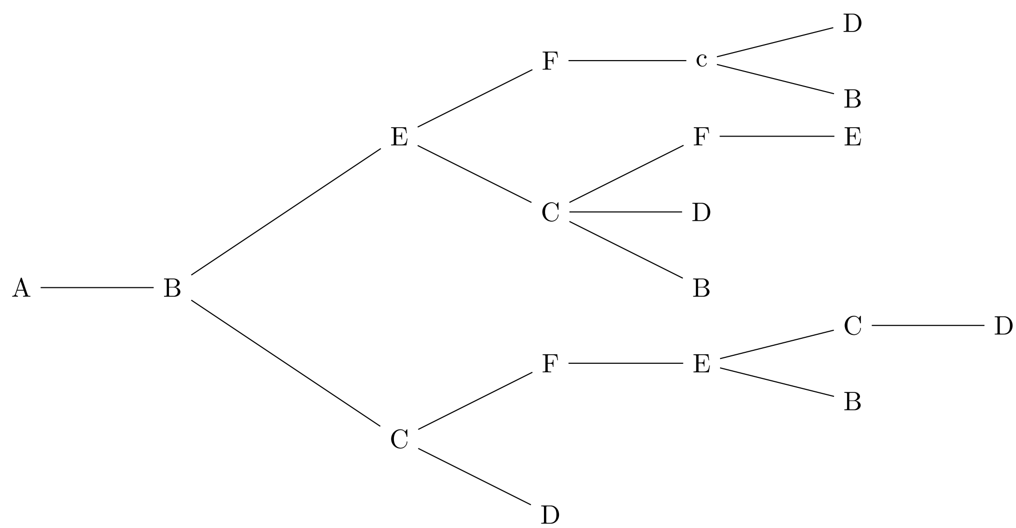


7.2.7 Problema 2.72

Un hombre está en el origen del eje de las x y puede moverse en una unidad hacia la derecha o a la izquierda. Después de 5 pasos se detiene, también se detiene si llega a 3 o a -2. Construya el diagrama de árbol para describir todas las posibilidades.

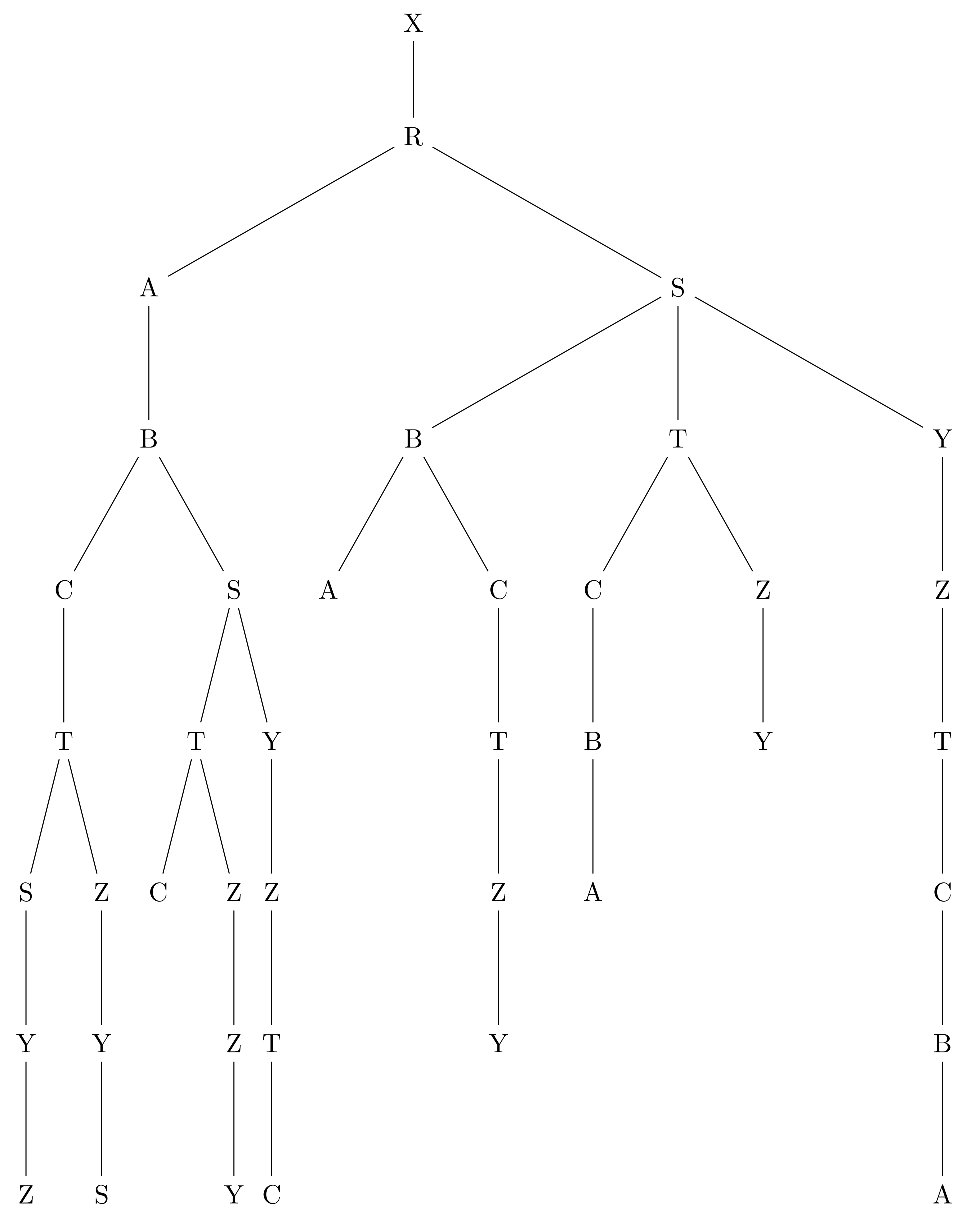


7.2.8 Problema 2.73



7.2.9 Problema 2.74

Considerando el diagrama con 9 puntos A, B, C, R, S, T, X, Y, Z. Un hombre empieza en el punto X y es permitido moverse horizontalmente o verticalmente, 1 paso a la vez. El se detiene cuando ya no puede caminar sin pasar por el mismo camino. Encuentra la cantidad de maneras en las que él puede caminar si el primer paso es de X a R.


X
R
A S
B B T Y
C S A C C Z Z
T T Y T B Y T
S Z C Z Z Z A C
Y Y Z T Y B
Z S Y C A

7.3 Probabilidad condicional

7.3.1 Schaum's, Murray R. Spiegel, Probabilidad y estadística

Ejemplo 1.22

Hallar la probabilidad de que en un sólo lanzamiento de un dado resulte que un número menor que 4, a) no se da ninguna otra información, b) se da que el lanzamiento resultó en un número impar.
a) Sea B el conjunto de eventos en que el valor es menor que 4, $B = 1, 2, 3$. Por lo que:

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

suponiendo probabilidades iguales para los puntos muestrales.
b) Si A es el conjunto de eventos en que se obtuvo un valor impar 1,3,5, el conjunto $A \cap B = 1, 3$. Entonces:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Problema 1.17

Un dado justo se lanza dos veces. Hallar la probabilidad de obtener 4,5 o 6 en el primer lanzamiento y 1,2,3 o 4 en el segundo lanzamiento.
Si se quiere resolver usando probabilidad condicional:

- Al ser dos eventos independientes se tiene que $P(B|A) = P(B)$.
- La probabilidad de que ocurra el primer lanzamiento como esperamos es de $\frac{3}{6}$.
- la probabilidad de que salga alguno de los lados que queremos en el segundo lanzamiento es de $\frac{4}{6}$.

Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B) = (\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}.$$

7.3.2 Schaum's outline of theory and problems of probability

Ejemplo 4.1

Sea un par de dados justos que son lanzados. Si la suma es 6, encuentre la probabilidad que alguno de los dedos sea un 2. En otras palabras:

$$E = \text{ la suma es 6 } = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

y

$$A = \text{ un 2 está presente en almenos uno de los dados.}$$

Encuentre $P(A|E)$.

$$A = (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2)(6,2),$$

$A \cap B = (2,4),(4,2)$.

$$P(A|E) = \frac{|A \cap E|}{|E|} = \frac{2}{5}.$$

Ejemplo 4.2

Una pareja tiene 2 hijos. Encuentre la probabilidad p de que ambos sean varones si a) el segundo es varón, b) Al menos uno de los dos es varón.
El espacio muestral de todos los posibles resultados del sexo de los niños es: $S = (varón, mujer),(varón, varón),(mujer, mujer),(mujer, varón)$ con probabilidad $\frac{1}{4}$ para cada elemento de S. Sea B el conjunto donde el segundo hijo es varón, $B = (varón, varón),(mujer, varón)$ y sea A el conjunto de eventos en el que el primer hijo sea varón: $A = (varón, mujer),(varón, varón)$, que resulta es el evento C en el que ambos son varones. Entonces $A \cap B = C = C \cap B = (varón, varón)$. Finalmente, sea D que al menos uno de los niños sea varón $D = (varón, mujer),(varón, varón),(mujer, varón)$. Entonces $A \cap D = (varón, varón)$.

$$\text{a)} P(C|B) = \frac{|C \cap B|}{|B|} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b)} P(C|D) = \frac{|C \cap D|}{|D|} = \frac{1}{3}.$$

Problema 4.11

En cierto colegio, 25% de los estudiantes reprobaron matemáticas, 15% de los estudiantes reprobaron química y 10% fallaron ambas. Un estudiante es seleccionado aleatoriamente.

i Si reprobó química, ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado matemáticas?

ii Si reprobó matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado química?

iii ¿ Cuál es la probabilidad de que haya reprobado química o matemáticas?

$$\text{i) } P(M|Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{10}{15} = 2/3 \approx 66.666\%.$$

$$\text{ii) } P(Q|M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)} = \frac{10}{25} = 2/5 = 40\%.$$

$$\text{iii) } P(Q \cup M) = P(Q) + P(M) - P(M \cap Q) = 15\% + 25\% - 10\% = 30\%.$$

Problema 4.12

Sean A y B eventos con probabilidad $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, encuentre:

i) $P(A|B)$.

ii) $P(B|A)$.

iii) $P(A \cup B)$.

iv) $P(\bar{A}|\bar{B})$.

v) $P(\bar{B}|\bar{A})$.

$$
\begin{aligned}
\text{i) } P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \\
\text{ii) } P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\
\text{iii) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

Para iv) y v) se calculara primero: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$, por leyes de DeMorgan se sabe que $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5}{12}$.

$$
\begin{aligned}
\text{iv) } P(\bar{A}|\bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} \\
\text{v) } P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Problema 4.13

Sean las probabilidades $P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{5}{8}, P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, encuentre $P(A|B)$ y $P(B|A)$.

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5} \\
P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{2}
\end{aligned}
$$

Problema 4.15

Tres máquinas A, B, C producen $60\%, 30\%$y 10%, respectivamente, el total de productos de una fábrica. Los porcentajes de falla de cada máquina son: 2%, 3% y 4%. Un producto es seleccionado al azar y este es defectuoso, encuentre la probabilidad de que el item haya sido producido por la máquina C.

$$\begin{aligned}
P(C|X) &= \frac{P(C)P(X|C)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)} \\
&= \frac{10 \times 4}{(60 \times 2) + (30 \times 3) + (10 \times 4)} = \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

Problema 4.16

En cierto colegio, 4% de los hombres y 1% de las mujeres son más altos a los 6 pies de altura. Además el 60% de los estudiantes son mujeres. Si un alumno es seleccionado aleatoriamente y es más alto que 6 pies, ¿Cuál es la probabilidad de que este estudiante sea mujer?

$$\begin{aligned}
P(Mujer|Alto) &= \frac{P(Mujer)P(Alto|Mujer)}{P(Hombre)P(Alto|Hombre) + P(Mujer)P(Alto|Mujer)} \\
&= \frac{60 \times 1}{40 \times 4 + 60 \times 1} = \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

7.4 Problemas adicionales

7.4.1 El lobo, la cabra y la col

Un granjero va al mercado y compra un lobo, una cabra y una col. Para volver a su casa tiene que cruzar un río. El granjero dispone de una barca para cruzar a la otra orilla, pero en la barca sólo caben él y una de sus compras. Si el lobo se queda sólo con la cabra, se la come; si la cabra se queda sola con la col, se la come. El reto del granjero es cruzar él mismo y dejar sus compras a la otra orilla del río dejando cada compra intacta. ¿Cómo lo puede hacer?

1. Cruza el río con la oveja y deja al lobo con la col.
2. Regresa solo.
3. Cruza ahora con el lobo, dejando la col.
4. Tras dejar al lobo recoge a la oveja y regresa.
5. Deja a la oveja y cruza ahora con la col.
6. Regresa por la oveja tras dejar la col.
7. Cruza una vez más con la oveja y termina de cruzar todas sus compras sin incidentes mayores.

7.5 Problemas de Teorema de probabilidad total

7.5.1 Géza Example 3.5.1: Picking Balls from Urns

Suponga que se tienen 2 urnas. La primera contiene 2 bolas blancas y 6 bolas negras, y la segunda contiene 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se selecciona una urna al azar y se selecciona una bola de dicha urna aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una bola blanca?
Sean los eventos: U_1 el evento en el que se toma la urna 1 y el evento U_2 el evento en el que se toma la urna 2, B el evento de sacar una bola blanca y N el de sacar una bola negra.

- $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$.
- $P(B|U_1) = \frac{2}{8}$.
- $P(B|U_2) = \frac{2}{4}$.

Utilizando ec(3.6):

$$P(B \cap U_1) = P(B|U_1)P(U_1) = \frac{2}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$
$$P(B \cap U_2) = P(B|U_2)P(U_2) = \frac{2}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

La probabilidad entonces de sacar una bola blanca es:

$$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Cabe destacar que esta probabilidad es diferente a la probabilidad de sacar una bola blanca en el caso de que se junten las bolas de las 2 urnas en una sola urna.

7.5.2 Géza's Example 3.5.2 Dealing Three Cards

De una baraja de 52 cartas, se sacan 3 cartas sin remplazo. ¿Cuál es la probabilidad del evento E en el que se sacan 2 As y un rey en cualquier orden?
Nombremos a los eventos relevantes A para el evento de sacar un As, R para el evento de sacar un Rey o O para cuando se saca otro valor de carta. E es la unión de los tres eventos posibles de sacar 2 As y un Rey AAK, AKA, KAA, por lo que:

$$P(E) = P(AAK) + P(AKA) + P(KAA),$$
$$P(AAK) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{4}{50} = \frac{2}{5525},$$
$$P(AKA) = \frac{4}{52}\frac{4}{51}\frac{3}{50} = P(AAK),$$
$$P(KAA) = \frac{4}{52}\frac{4}{51}\frac{3}{50} = P(AKA).//P(E) = \frac{6}{5525}.$$

7.6 Problemas con y sin repeticiones

7.6.1 Murray 1.16

Una bola se extrae aleatoriamente de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 bolas azules. Determinar la probabilidad de que sea a) roja, b) blanca, c) azul, d) no roja, e) roja o blanca.
a) Denótese por R,B y A los sucesos de extraer una bola roja, blanca y azul, respectivamente. Entonces:

$$P(R) = \frac{\text{maneras de elegir una bola roja}}{\text{maneras de elegir una bola}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15}.$$

b) Similar a a)

$$P(B) = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}. \tag{7.1}$$

c) Similar a a) y a b)

$$P(A) = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15}.$$

d) hay $|B + A|$ maneras de sacar una bola que no sea roja, de tal manera que:

$$P(NR) = P(R') = 1 - P(R) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$$
$$P(NR) = \frac{|B+A|}{|B+A+R|} = \frac{4+5}{6+4+5} = \frac{9}{15}$$

e) $(R \cup B) = |R|+|B|-|R \cap B|$

$$P(R \cup B) = \frac{6+4-0}{6+4+5} = \frac{10}{15}$$

e) Para este problema $P(R \cup B) = P(A')$

$$P(A') = 1 - \frac{5}{15} = \frac{10}{15}.$$

7.6.2 Murray 1.19

Se extraen 2 cartas de un mazo de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las 2 cartas salgan As si:

1. Hay reemplazo?
2. No hay reemplazo?

Sea A_1 el suceso "as en la primera extracción" y A_2 "as en la segunda extracción". Entonces estamos buscando $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$.
Para 1, el primer evento no condiciona el segundo evento, ya que se tienen todas las cartas de nuevo. Por lo tanto:

$$P(\text{Los dos As}) = P(primerounAs)P(segundounAs) = \frac{4}{52}\frac{4}{52}.$$

Mientras que para 2, al no haber reemplazo de las cartas, cambia la cantidad de cartas en el segundo experimento y el resultado del primer experimento condiciona el segundo, de tal manera que:

$$P(\text{Los dos As}) = P(primerounAs)P(segundounAs) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}.$$

7.6.3 Murray 1.20

En una caja se tienen 6 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraigan en el orden roja, blanca y azul si las bolas se reemplazan? y ¿Si no se reemplazan?
Para el primer caso:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1)P(B_2|R_1)P(A_3|R_1 \cap B_2) \\ &= P(R_1)P(B_2)P(A_3) \end{aligned}$$
$$P(RBA) = P(R)P(B)P(A) = \frac{6}{6+4+5}\frac{4}{6+4+5}\frac{5}{6+4+5} = \frac{120}{3375}.$$

Para el segundo caso:

$$P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) = P(R_1)P(B_2|R_1)P(A_3|R_1 \cap B_2)$$
$$P(RBA) = P(R)P(B|R)P(A|(B|R)) = \frac{6}{6+4+5}\frac{4}{5+4+5}\frac{5}{5+3+5} = \frac{120}{2730}.$$

7.6.4 Murray 1.44

Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin reemplazamiento, determinar la probabilidad de que (a) las 3 bolas sean rojas, (b) las 3 bolas sean blancas, (c) 2 sean rojas y 1 blanca, (d) al menos 1 sea blanca, (e) se extraiga una de cada color, (f) las bolas sean extraídas en el orden rojo, blanco, azul. a) una forma:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{8}{8+3+9}\frac{7}{7+3+9}\frac{6}{6+3+9} = \frac{336}{6840}. \end{aligned}$$

a) otra forma:

$$\text{Probabilidad RRR} = \frac{\text{num. de grupos de 3 bolas entre 8 rojas}}{\text{num. de grupos de 3 bolas entre 20}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{56}{1140}.$$

b)

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{3}{9+3+8}\frac{2}{9+2+8}\frac{1}{9+1+8} = \frac{6}{6840} = \frac{1}{1140}. \\ &= \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140}. \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(2R1B) &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) \\
&= \frac{({}_8C_2)({}_3C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{108}{1140} \\
P(RRB) &= \frac{8}{9+3+8}\frac{7}{8+3+8}\frac{3}{7+3+8}, \\
P(RBR) &= P(BRR) = P(RRB), \\
P(2R1B) &= 3(\frac{216}{6840}) = \frac{648}{6840} = \frac{108}{6840}.
\end{aligned}
$$

d)

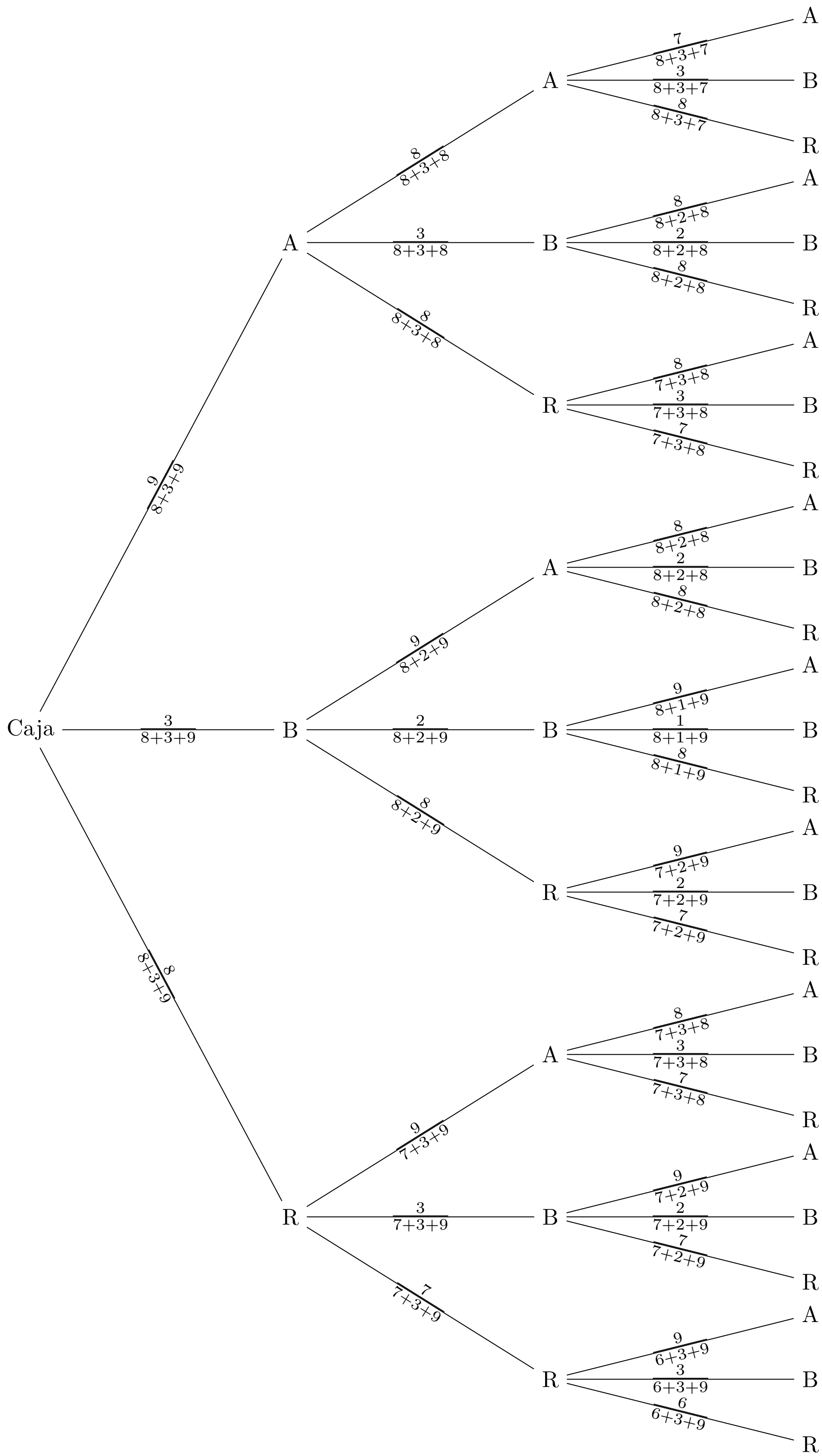
$$
\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3), \\
P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3) &= \frac{17}{17+3}\frac{16}{16+3}\frac{15}{15+3} = \frac{4080}{6840}, \\
&= \frac{{}_17C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{680}{1140}. \\
P(B) &= \frac{2760}{6840} = \frac{460}{1140}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
P(1DcC) &= P(RBA) + P(RAB) + P(BRA) + P(BAR) + P(ARB) + P(ABR). \\
&= \frac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{(8)(3)(9)}{1140} = \frac{216}{1140}. \\
P(RBA) &= P(RAB) = P(BRA) = P(BAR) = P(ARB) = P(ABR). \\
P(1DcC) &= 6P(RBA) = 6\frac{216}{6840} = \frac{1296}{6840} = \frac{216}{1140}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1)P(B_2|R_1)P(A_3|R_1 \cap B_2) \\
P(RBA) &= \frac{8}{8+3+9}\frac{3}{7+3+9}\frac{9}{7+2+9} = \frac{216}{6840}.
\end{aligned}
$$


Caja
A
B
R
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+8}$
$\frac{3}{8+3+8}$
$\frac{9}{8+2+9}$
$\frac{2}{8+2+9}$
$\frac{8}{8+2+9}$
$\frac{9}{7+3+9}$
$\frac{3}{7+3+9}$
$\frac{7}{7+3+9}$
$\frac{7}{8+3+7}$
$\frac{3}{8+3+7}$
$\frac{8}{8+3+7}$
$\frac{8}{8+2+8}$
$\frac{2}{8+2+8}$
$\frac{8}{7+3+8}$
$\frac{3}{7+3+8}$
$\frac{7}{7+3+8}$
$\frac{9}{8+1+9}$
$\frac{1}{8+1+9}$
$\frac{8}{8+1+9}$
$\frac{9}{7+2+9}$
$\frac{2}{7+2+9}$
$\frac{7}{7+2+9}$
$\frac{9}{6+3+9}$
$\frac{3}{6+3+9}$
$\frac{6}{6+3+9}$

7.6.5 Murray 1.44 con reemplazo

a)

$$\begin{aligned}
P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1)P(R2|R1)P(R_3|R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2)P(R_3) \\
&= \frac{{}_8C_1}{{}_20C_1}\frac{{}_8C_1}{{}_{20}C_1}\frac{{}_8C_1}{{}_{20}C_1} \\
P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20} = \frac{512}{8000}.
\end{aligned}$$

b)

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{3}{20}\frac{3}{20}\frac{3}{20} = \frac{27}{8000}.$$

c)

$$\begin{aligned}
P(2R1B) &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) \\
P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) &= P(R)P(R)P(B) = \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{3}{20}, \\
P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) &= P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3), \\
P(2R1B) &= 3(\frac{192}{8000}).
\end{aligned}$$

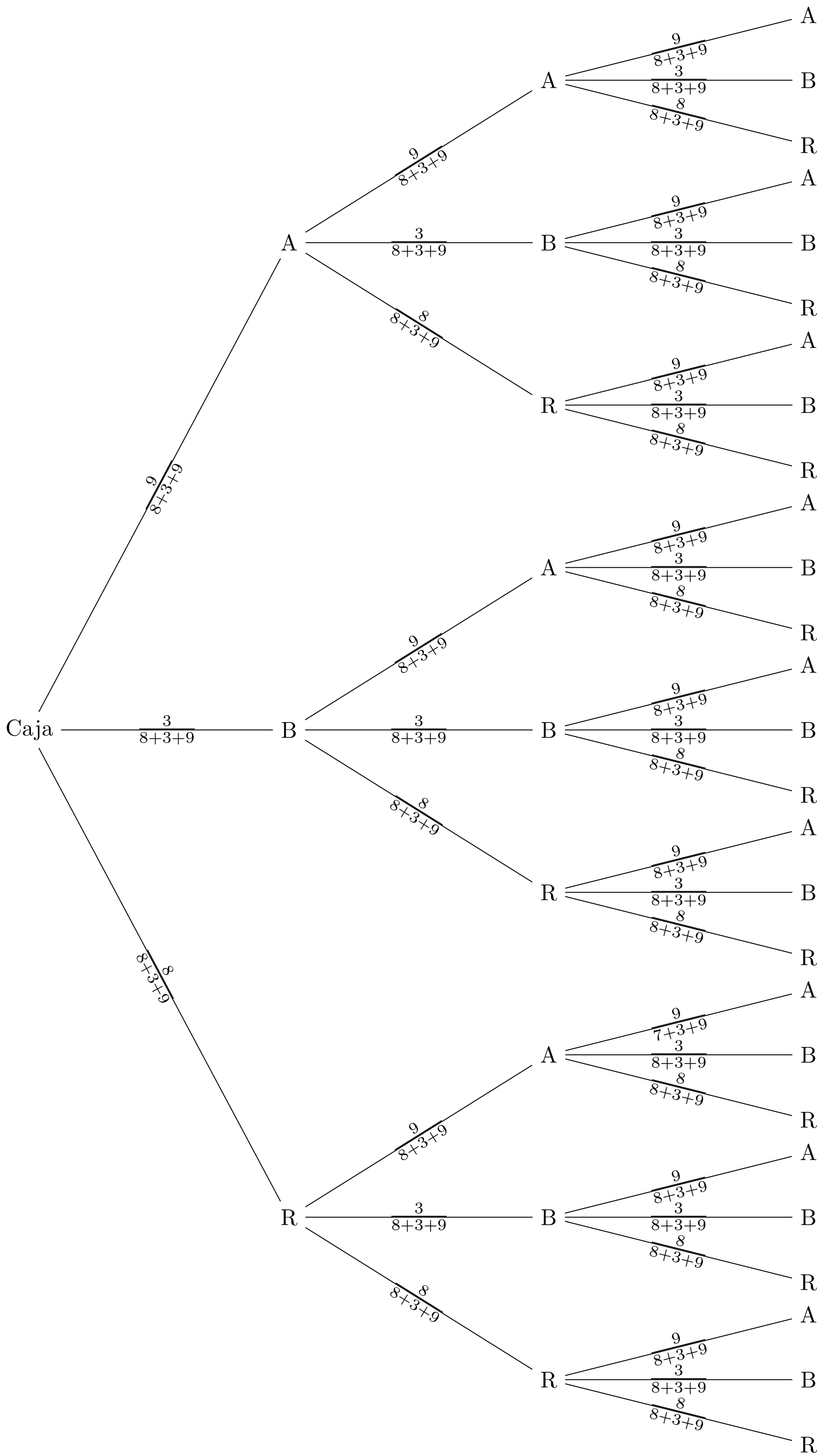
$$\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3), \\
P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3) = P(NB)^3 &= \frac{17}{20}\frac{17}{20}\frac{17}{20} = \frac{4913}{8000}, \\
P(B) &= \frac{3087}{8000}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
P(1DcC) &= P(R_1 \cap B_2 \cap A) + P(R_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap R_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap R_3). \\
P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1 \cap A_2 \cap B_3) = \cdots = P(A_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{8}{20}\frac{3}{20}\frac{9}{20}. \\
P(1DcC) &= 6P(RBA) = 6\frac{216}{8000} = \frac{1296}{8000}
\end{aligned}$$

f)

$$P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) = \frac{8}{20}\frac{3}{20}\frac{9}{20} = \frac{216}{8000}.$$


Caja
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
B
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
R
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
B
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
B
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
R
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
R
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
$\frac{9}{7+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
B
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R
R
$\frac{9}{8+3+9}$
$\frac{3}{8+3+9}$
$\frac{8}{8+3+9}$
A
B
R

7.7 Concicional

Deducción de la formula de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(F \cap D) \\
F &= E \cap C \\
E &= A \cap B \\
P(F \cap D) &= P(F)P(D|F) = P(D)P(F|D) \\
&= P(E \cap C)P(D|E \cap C) = P(D)P(A \cap B \cap C|D) \\
P(E \cap C) &= P(E)P(C|E) = P(C)P(E|C) \\
&= P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(C)P(A \cap B|C) \\
P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\
P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)P(D|A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

De esta manera se puede hacer para la intersección de k eventos.

7.8 Vectores y valores propios

7.8.1 Problema 1

Encuentre los eigenvalores y al menos un eigenvector de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Para sacar los valores propios se procede a sacar el polinomio caracter'istico:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = |A - \lambda I| = | &\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} | = 0 \\
&= (5-\lambda)(-1-\lambda) - (3)(7) = -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 - 21 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda - 26
\end{aligned}$$

Sacando las raices se obtienen los valores propios: $\lambda_1 = 2+\sqrt{30}$ y $\lambda_2 = 2-\sqrt{30}$. Para sacar los vectores propios, se utiliza $(A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0$, donde $\overrightarrow{v}$ es el vector propio. Sea $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3-\sqrt{30} & 7 \\ 3 & -3-\sqrt{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned}
(3-\sqrt{30})x + 7y &= 0 \\
3x - (3-\sqrt{30})y &= 0
\end{aligned}$$

La solución es $x = -\frac{-10+\sqrt{30}}{\sqrt{30}}y$. Si $y = \sqrt{30}$, $x = -10 + \sqrt{30}$. Entonces $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -10+\sqrt{30} \\ \sqrt{30} \end{pmatrix}$.

Para verificar se procede a resolver $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10+\sqrt{30} \\ \sqrt{30} \end{pmatrix} = (2+\sqrt{30}) \begin{pmatrix} -10+\sqrt{30} \\ \sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -50+12\sqrt{30} \\ -30+2\sqrt{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+2\sqrt{30}-10\sqrt{30}+30 \\ 2\sqrt{30}+30 \end{pmatrix}$$

7.8.2 Problema 2

Encuentre los eigenvalores y 2 eigenvectores de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico se calcula con $det(A - \lambda I)$:

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$. Entonces los valores propios de A son 2, 1 y -1.
Sea el vector:

$$t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pueden calcular los eigenvectores a partir de:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sustituyendo el valor de lambda por el de los valores propios previamente encontrados. De manera que para $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y - z = x$$
$$x = y$$
$$-x = z$$

Si $x = 1$, entonces $y = 1$ y $z = -1$. Entonces el vector $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio para el valor propio $\lambda = 1$.
Para $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y - z &= x \\ x + 2y &= y \\ -x + 2z &= z \end{aligned}$$

Si $x = 1$, $y = -1$ y $z = 1$. Por lo que $t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio para el valor propio $\lambda = -1$.
Finalmente para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= x \\ x + -y &= y \\ -x - z &= z \end{aligned}$$

Si $x = 1$, $y = 0.5$ y $z = -0.5$. Entonces $t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eigenvector de la matriz A para el eigenvalor $\lambda = 2$.

7.8.3 Problema 3

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ calcule los valores y 1 eigenvector para cada uno de estos valores. Compruebe que $At = \lambda t$ para alguno de sus valores propios.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = |A - \lambda I| &= \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son: $\lambda_{1,2} = 4, -1$. Para calcular los vectores propios:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 4 \\
t &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
-3x + 2y &= 0 \\
3x - 2y &= 0 \\
y &= \frac{3}{2}x
\end{aligned}$$

Si $x = 2$, $y = 3$, de manera que $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un eigenvector para $\lambda = 4$. Para comprobar se hace:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para el segundo valor propio:

$$\begin{aligned}
\lambda &= -1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
2x + 2y &= 0 \\
3x + 3y &= 0 \\
y &= -x
\end{aligned}$$

Si $x = 1$, $y = -1$. Verificando que sea un vector propio:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7.8.4 Problema 4

Encontrar los valores propios de A y verificar que si se calcula $P(A)$ el resultado es 0.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \\
P(\lambda) = det(A - \lambda I) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.5 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&= \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \\
\lambda_1 &= 2 \\
\lambda_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Para λ_1:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} \\
P(A) &= \begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

7.8.5 Problema 5

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ determinar sus valores y vectores propios.

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= det(A - \lambda I) = 0 \\
det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -6 & -3-\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\
\lambda_1 &= 3 \\
\lambda_2 &= -2
\end{aligned}
$$

Sea el vector $t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \lambda &= 3 \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x - y &= 0 \\ -6x - 6y &= 0 \end{aligned}$$

Si $x = 1$, $y = -1$. $t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \lambda &= -2 \\ \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -6x - y &= 0 \\ 6x + 5y &= 0 \end{aligned}$$

Si $x = 1/6$, $y = 1$, $t = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eigenvector.

7.8.6 Problema 6

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

encuentre sus valores propios y un vector propio para cada eigenvalor.
El polinómio característico es:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2), \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Para encontrar los vectores se propone el vector $t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y se resuelve:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ (A - \lambda I)t &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ 10x - 5y + 5z &= 0 \\ 5x - 4y + 5z &= 0 \\ x &= \frac{1}{5}y \\ z &= \frac{3}{5}y \end{aligned}$$

Si se propone $y = 5$, entonces $x = 1$ y $z = 3$. y el vector propio para $\lambda = 1$ es $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Para $lambda = 2$ se procede de manera similar:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ (A - \lambda I)t &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 10 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -2y + 3z &= 0 \\ 10x - 6y + 5z &= 0 \\ 5x - 4y + 4z &= 0 \\ x &= \frac{4}{15}y \\ z &= \frac{2}{3}y \end{aligned}$$

Si $y = 15$, $x = 4$ y $z = 10$, teniendo el vector $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

7.8.7 Problema 7

Encontrar los vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se encuentra el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Teniendo entonces sus valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Sea el vector $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, se buscan los vectores propios:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 4x - 4y + 4z &= 0 \\ z &= 2y \\ x &= -y \end{aligned}$$

Si $y = 1$, $x = -1$ y $z = 2$, y el vector queda como:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para el siguiente valor propio:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x + 2y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 4x - 4y + 3z &= 0 \\ z &= 4y \\ x &= -2y \end{aligned}$$

Si $y = 1$, $x = -2$ y $z = 4$, teniendo, así, el vector propio $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Finalmente para el último valor propio:

$$\lambda = 3$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + 2y - z = 0$$

$$x - 3y + z = 0$$

$$4x - 4y + 2z = 0$$

$$z = 2y$$

$$x = y$$

Si $y = 1$, $x = 1$ y $z = 2$. El vector propio es: $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7.8.8 Problema 8

Calcule el valor y vector propio de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Cuyas 2 raíces son $\lambda = 1$. Por lo que su vector propio es claramente:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.8.9 Problema 9

Un grafo esta dado por la matriz de adyacencias:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinimio característico de esta mátriz proporciona información del grafo.

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

Del polinomio característico se puede obtener que el grafo G tiene 5 aristas y 2 triangulos. Se pueden calcular sus valores propios.

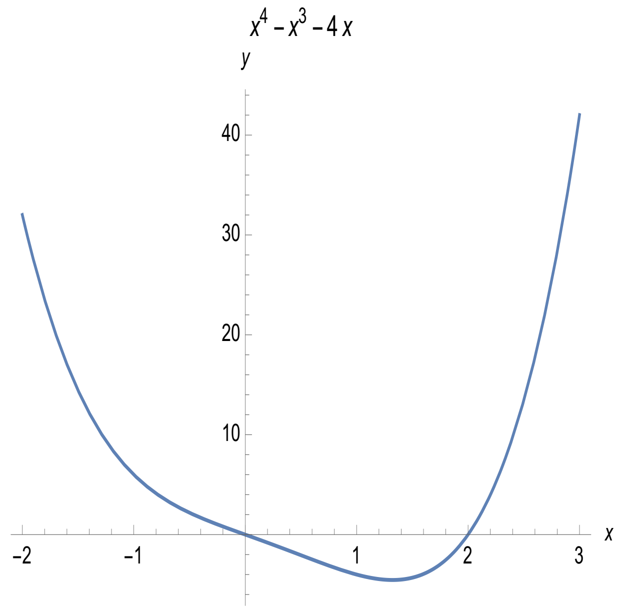


Figure 7.1: Ploteo del polinomio característico.

De la gráfica se pueden ver las raíces de $P(\lambda)$ siendo estas 0 y 2. Pero tiene otras 2 raíces en el dominio de los complejos.

7.8.10 Problema 10

Encuentre los valores propios y vectores propios para la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $A - \lambda I$ es:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 27\lambda^2 + 108$, donde sus raíces son: $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ y $\lambda_4 = 3$.

Sea $t = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector propuesto, se pueden calcular los vectores propios como $At = \lambda t$:

$$
\begin{aligned}
-3w + 2x &= \lambda w \\
-3w + 4x &= \lambda x \\
-5y - 4z &= \lambda y \\
-2y + 2z &= \lambda z
\end{aligned}
$$

El sistema se puede ver como 2 sistemas independientes ya que no hay una relación entre todas las variables, dando como resultado los siguientes eigenvectores:

$$
E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Chapter 8

Propuesta Examen

8.1 Problema 1

8.1.1 Problema

Un ladrón es perseguido por un coche de policía y al llegar a un determinado cruce se encuentra tres posibles calles por las que huir A, B y C, de tal manera que las dos últimas son tan estrechas que por ellas no cabe el coche de policía, si bien el ladrón va tan nervioso que no es consciente de ello.
Si huye por la calle A le atrapan seguro puesto que el final de la misma está cortado por otra patrulla de la policía. Si huye por la calle C se escapa seguro puesto que no está vigilada. Si huye por la calle B se encuentra con que está cortada y que se bifurca en dos callejuelas: la BA, que conduce a la calle A y la BC que lleva a la calle C[1].

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el ladrón sea atrapado?

(b) Sabiendo que escapó, ¿cuál es la probabilidad de que huyera por la calle C entrando por la B y llegando a la C por la callejuela que las une, BC?

[1]Ejercicio 1.17, Problemas de probabilidad, F.J. Martin Pliego

8.1.2 Solución

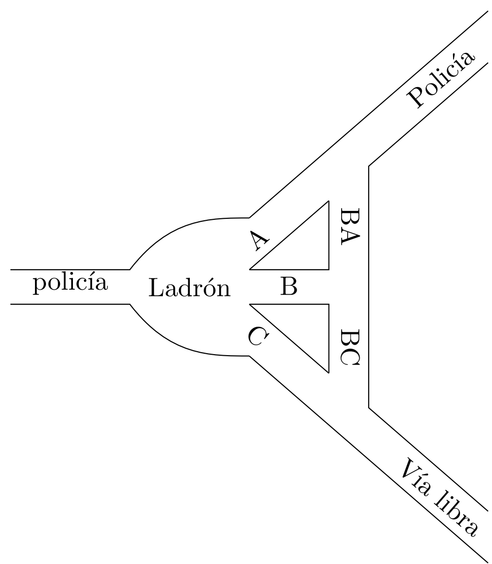


Figure 8.1: Imagen descriptiva del problema.

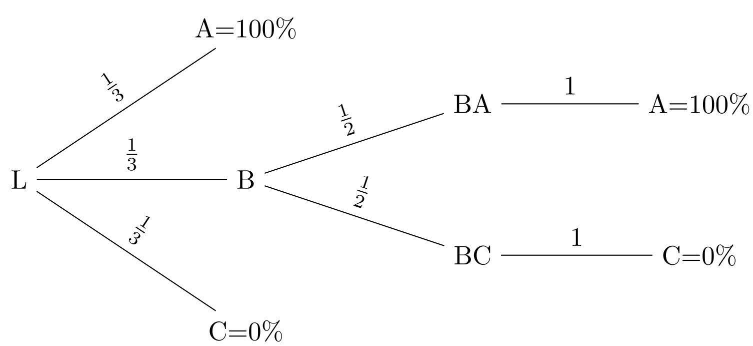


Figure 8.2: Diagrama de árbol del problema.

Primer inciso

$$\begin{aligned}
P(Atraparle) &= P(A)P(Atraparle|A) + P(B)P(Atraparle|B) \\
&+ P(C)P(Atraparle|C). \\
P(Atraparle|B) &= P(BA)P(Atraparle|BA) + P(BC)P(Atraparle|BC) \\
P(Atraparle) &= P(A)P(Atraparle|A) + P(B)[P(BA)P(Atraparle|BA) \\
&+ P(BC)P(Atraparle|BC)] + P(C)P(Atraparle|C) \\
&= \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0)] + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Segundo inciso

$$P(BC|escapó) = \frac{P(escapó|BC)P(BC)}{P(escapó)} = \frac{(1)(\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

8.2 Problema 2

8.2.1 Problema

Tres máquinas A, B, C producen $60\%, 30\%$y 10%, respectivamente, el total de productos de una fábrica. Los porcentajes de falla de cada máquina son: 2%, 3% y 4%. Un producto es seleccionado al azar y este es defectuoso, encuentre la probabilidad de que el item haya sido producido por la máquina C[2].

[2]Schaum's outline of theory and problems of probability, 4.15

8.2.2 Solución

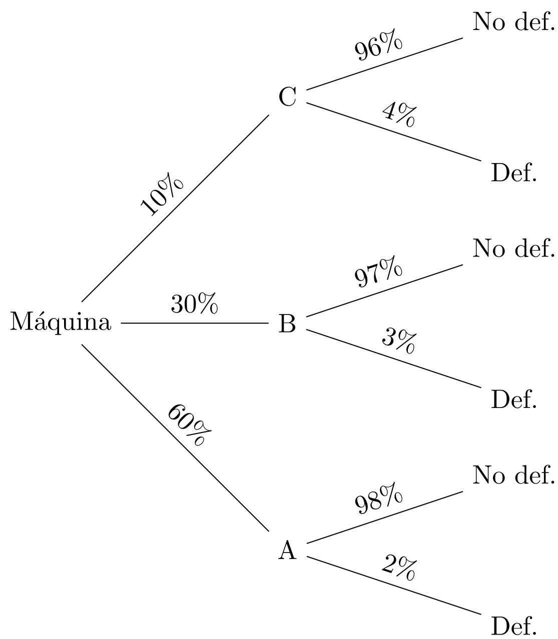


Figure 8.3: Diagrama de árbol del problema.

$$\begin{aligned} P(C|X) &= \frac{P(C)P(X|C)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)} \\ &= \frac{10 \times 4}{(60 \times 2) + (30 \times 3) + (10 \times 4)} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

X= Defectuoso.

8.3 Problema 3

8.3.1 Problema

Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin reemplazamiento, determinar la probabilidad de que (a) las 3 bolas sean rojas, (b) las 3 bolas sean blancas, (c) 2 sean rojas y 1 blanca, (d) al menos 1 sea blanca, (e) se extraiga una de cada color, (f) las bolas sean extraídas en el orden rojo, blanco, azul.

8.3.2 Solución

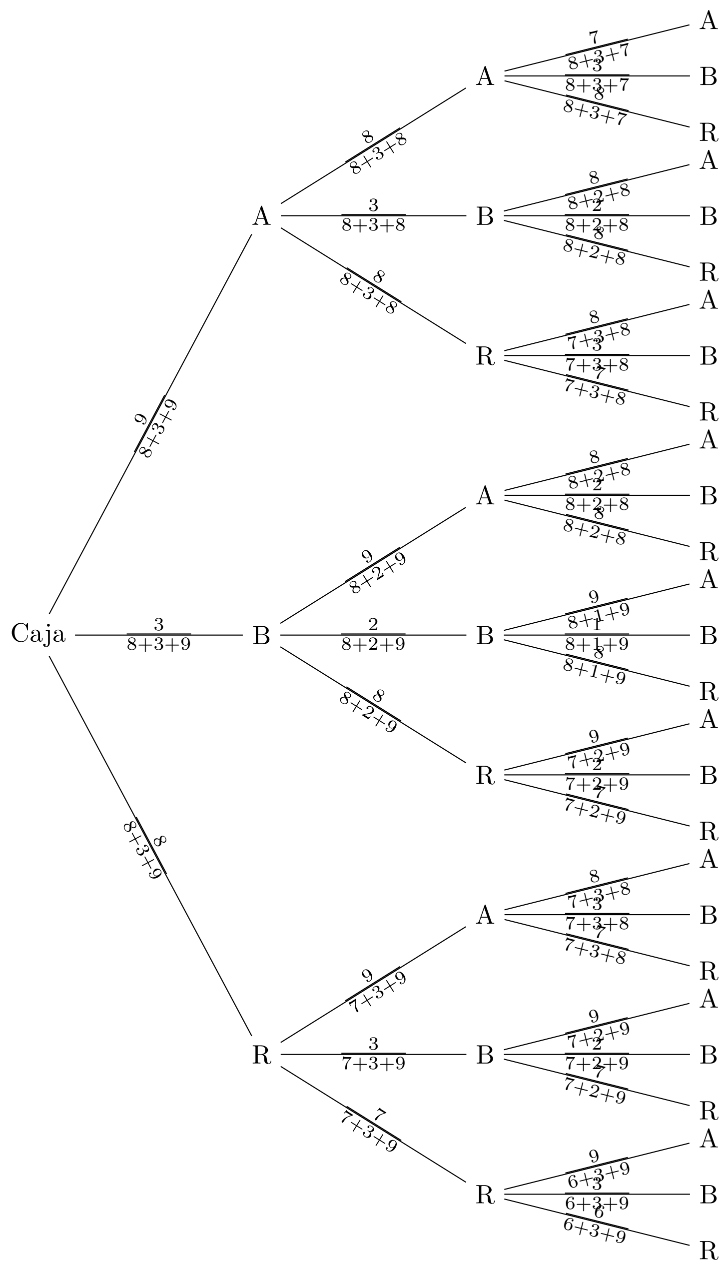


Figure 8.4: Diagrama de árbol del problema.

a)

$$\begin{aligned}
P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1)P(R2|R1)P(R_3|R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2)P(R_3) \\
&= \frac{{}_8C_1}{{}_{20}C_1}\frac{{}_8C_1}{{}_{20}C_1}\frac{{}_8C_1}{{}_{20}C_1} \\
P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20} = \frac{512}{8000}.
\end{aligned}$$

b)

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{3}{20}\frac{3}{20}\frac{3}{20} = \frac{27}{8000}.$$

c)

$$\begin{aligned}
P(2R1B) &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) \\
P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) &= P(R)P(R)P(B) = \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{3}{20}, \\
P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) &= P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3), \\
P(2R1B) &= 3(\frac{192}{8000}).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3), \\
P(NB_1 \cap NB_2 \cap NB_3) &= P(NB)^3 = \frac{17}{20}\frac{17}{20}\frac{17}{20} = \frac{4913}{8000}, \\
P(B) &= \frac{3087}{8000}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
P(1DcC) &= P(R_1 \cap B_2 \cap A) + P(R_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap R_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap R_3). \\
P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1 \cap A_2 \cap B_3) = \cdots = P(A_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{8}{20}\frac{3}{20}\frac{9}{20}. \\
P(1DcC) &= 6P(RBA) = 6\frac{216}{8000} = \frac{1296}{8000}
\end{aligned}$$

f)

$$P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) = \frac{8}{20}\frac{3}{20}\frac{9}{20} = \frac{216}{8000}.$$

8.4 Problema 4

8.4.1 Problema

Una moneda cargada de tal manera que la probabilidad de que caiga sol sea de 60% se lanza 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga algún águila?

8.4.2 solución

La probabilidad de que ninguna águila caiga en 5 lanzamientos es:

$$\begin{aligned} P(NoAguilas) &= \left(\frac{60}{100}\right)^5 \\ P(AlgunAguila) &= 1 - P(NoAguilas) \\ &= 1 - \left(\frac{60}{100}\right)^5 \end{aligned}$$

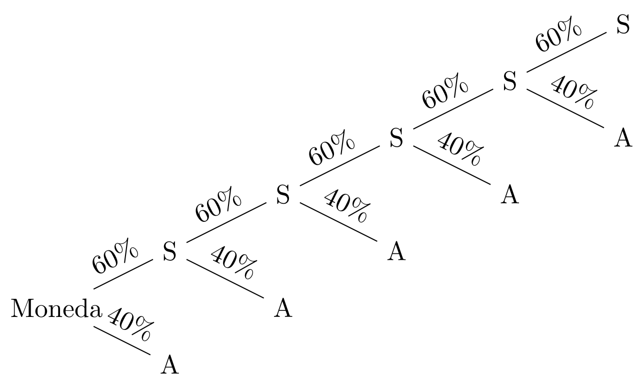


Figure 8.5: Diagrama de árbol simplificado.

8.5 Problema 5

8.5.1 Problema

Una pareja tiene 2 hijos. Calcule la probabilidad de que los 2 hijos sean varones si el segundo hijo es varón. Calcule la probabilidad de que los 2 hijos sean varones si se sabe que: (al menos) uno de los niños es varón[3].

[3] Example 4.2 Schaums Probability 156, p.56

8.5.2 Solución

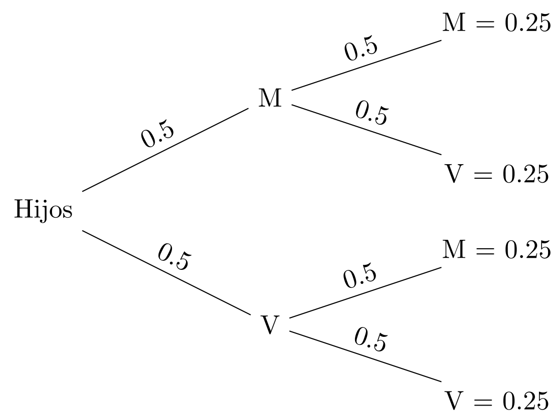


Figure 8.6: Diagrama de árbol, V=varón, M=Mujer.

Primer inciso

- S ={Todos los posibles resultados, (primer hijo, segundo hijo)} = {(v,v),(v,m),(m,v),(m,m)}.
- B ={El segundo hijo es varón} = {(v,v), (m,v)}.
- A ={El primer hijo es varón} {(v,v), (v,m)}.
- $A \cap B$ ={El primer y segundo hijo son varones} = {(v,v)}.
- $P(A|B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{4}$.

Segundo inciso

- S ={Todos los posibles resultados, (primer hijo, segundo hijo)} = {(v,v),(v,m),(m,v),(m,m)}.
- A ={El primer hijo es varón} = {(v,v), (v,m)}.
- B ={El segundo hijo es varón} = {(v,v), (m,v)}.
- C ={Al menos uno es varón} = {(v,v), (v,m),(m,v)}.
- $A \cap B \cap C$ ={Al menos un hijo es varón y el primer y segundo hijo son varones} = {(v,v)}.
- $P((A \cap B)|C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|C|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

8.6 Problema 6

8.6.1 Problema

Un payaso cuenta con 15 globos pero hay 10 niños en la fiesta, ¿de cuantas maneras se pueden repartir los globos?

8.6.2 Solución

Recordando la solución del problema de los niños y los dulces, se puede resolver buscando la selección de 15 elementos de 25 (niños + globos).

$$\begin{aligned} Maneras =_{25} C_{15} &= \frac{25!}{15!\,(25-15)!} = \frac{25!}{15!\,10!} \\ &= \frac{25 \times 24 \times \ldots 16}{10!} = \frac{1.186167629 \times 10^{13}}{3628800} = 3268760 \end{aligned}$$

8.7 Problema 7

8.7.1 Problema

Una moneda se lanza 4 veces.

1. Escriba el espacio muestral de los posibles resultados.
2. Escriba el conjunto para el evento de que salga un solo águila.
3. Escriba el conjunto para el evento de que caigan al menos 3 soles.
4. Escriba la unión, intersección y diferencia de (3) y (2).

8.7.2 solución

Primer punto

$$\begin{aligned} S =& ((S,S,S,S),(S,S,S,A),(S,S,A,S),(S,S,A,A), \\ &(S,A,S,S),(S,A,S,A),(S,A,A,S),(S,A,A,A), \\ &(A,S,S,S),(A,S,S,A),(A,S,A,S),(A,S,A,A), \\ &(A,A,S,S),(A,A,S,A),(A,A,A,S),(A,A,A,A)) \end{aligned}$$

Segundo punto

$$A = ((S,S,S,A),(S,S,A,S),(S,A,S,S),(A,S,S,S))$$

Tercer punto

$$B = A \cup (S,S,S,S)$$

Cuarto punto

$$
\begin{aligned}
B \cup A &= A\\
B \cap A &= B\\
B - A &= (S, S, S, S)\\
A - B &= \emptyset
\end{aligned}
$$

8.8 Problema 8

8.8.1 Problema

En un palindromo binario el primer digito es 1 y cada digito subsecuente puede ser 0 o 1, encuentre la cantidad de palindromos para una longitud n.

8.8.2 solución

En un palindromo solo necesitamos saber la mitad de la cadena, ya que la otra mitad se repite en "espejo". Por lo que tenemos:

$$\text{longitud de media cadena} = \begin{cases} \frac{n}{2}, n\%2 = 0 \\ \frac{n+1}{2}, n\%2 = 1 \end{cases}$$

Cada caracter es 1 o 0. Es decir se tienen 2 opciones, exceptuando la primera que solo puede ser 1. Por lo que:

$$\text{cantidad de palindromos} = (1)2^{(\text{longitud de media cadena - 1})}$$

8.9 Problema 9

8.9.1 Problema

Cuantos números de 3 digitos se pueden formar con los 6 dígitos $(2, 3, 4, 5, 6, 8)$ si:

1. Se permite repetir dígitos.
2. No se permite repetir dígitos.
3. El número debe ser impar y no se permite repetir dígitos.
4. El número debe ser par y no se permite repetir dígitos.
5. El número debe ser múltiplo de 5 y no se permiten repeticiones.
6. El número debe contener el dígito 5 y no se permiten repeticiones.
7. El número debe contenerel dígito 5 y se permiten repeticiones.

8.9.2 Solución

Inciso 1

La cantidad de números = (6)(6)(6) ya que cada dígito puede tomar 6 valores.

Inciso 2

La cantidad de números = (6)(5)(4) ya que una vez utilizado un dígito, no se puede repetir, disminuyendo la cantidad de dígitos disponibles.

Inciso 3

La cantidad de números = (2)(5)(4) ya que el dígito solo puede terminar en 3 o 5 para que el número sea impar, una vez tomado uno de estos dos valores, se procede con la lógica del inciso 2.

Inciso 4

La cantidad de números = (4)(5)(4) = Inciso 2 - Inciso 3. Esto sigue la lógica del Inciso 3 pero con la diferencia de que debe ser par. De esta manera si restamos la cantidad de números impares a los números totales sin repetición se obtienen los números pares sin repeticiones.

Inciso 5

La cantidad de números = (1)(5)(4) debido a que sólo se tiene un 5 en la posición de las unidades para formar un múltiplo de 5.

Inciso 6

La cantidad de números es = (3)(5)(4). Hay 3 posiciones para colocar el 5, de ahí se pueden elegir 5 dígitos y finalmente alguno de los 4 restantes.

Inciso 7

La cantidad de números es= (3)(6)(6). Similar al inciso 6, hay 3 posiciones para colocar el 5, pero a diferencia del inciso anterior, al poder repetirse dígitos, se tiene 6 opciones para cada uno de los siguientes dígitos a elegir.

8.10 Problema 10

8.10.1 Problema

¿Cuántos números se pueden formar si estos pueden contener exclusivamente un 6?

8.10.2 Solución

El primer caso se da cuando se empieza con un 6 de manera que ya se comprometió ese valor. Como no se menciona que no se permitan repeticiones, tomare el problema con repeticiones exceptuando el 6.

$$\text{Cantidad } 1 = 1 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

En el segundo caso, se tiene la limitante de que el primer dígito no puede ser ni 6 ni 0 (ya que se repetirían valores). Después se tienen 4 posiciones en las que se puede poner el 6, y finalmente las 3 posiciones restantes pueden ser cualquier valor diferente del 6.

$$\text{Cantidad } 2 = 8 \times 4 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Finalmente la cantidad total de números que se pueden formar es:

$$\text{Cantidad total} = \text{Cantidad } 1 + \text{Cantidad } 2.$$

8.11 Problema 11

8.11.1 Problema

En cierto laboratorio de una universidad se encuentran 23 estudiantes haciendo una investigación sobre la respuesta de un grupo de ratas a cierto medicamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 estudiantes con la misma fecha de cumpleaños? ¿Cuantás personas se necesitan para que haya un 70% de probabilidad de que al menos 2 personas cumplan años el mismo día?

8.11.2 solución

De la solución al problema del cumpleaños se sabe que la probabilidad de que n personas cumplan años el mismo día es:

$$\begin{aligned} P(n\_Personas) &= 1 - \left(\frac{365}{365} \frac{364}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} \right) \\ &= 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!} \end{aligned}$$

primer solución

De tal manera que la probabilidad para 23 personas es:

$$\begin{aligned} P(23) &= 1 - \frac{365!}{365^{23}(342)!} = 0.492702766 \\ &\approx 1 - e^{-\frac{23^2}{2*365}} = 0.515509538 \end{aligned}$$

segunda solución

Para esta solución usaremos la aproximación con exponencial.

$$\begin{aligned}
P(n) &\approx 1 - e^{-\frac{n^2}{2*365}} \\
0.7 &\approx 1 - e^{-\frac{n^2}{2*365}} \\
0.3 &\approx e^{-\frac{n^2}{2*365}} \\
ln(0.3) &\approx -\frac{n^2}{2*365} \\
-n^2 &\approx (2*365)ln(0.3) \\
n^2 &\approx (730)(1.203972804) \\
n^2 &\approx 878.900147158 \\
n &\approx 29.646250137
\end{aligned}$$

Redondeando, $n = 30$.

8.12 Problema 12

8.12.1 Problema

Pedro presenta un examen de 10 preguntas en las que todas son de verdadero o falso, el necesita 8 respuestas correctas para pasar. Suponga que todas las preguntas las responde aleatoriamente. ?Ѐuál es la probabilidad de que apruebe el examén?

8.12.2 Solución

Cada pregunta se puede tomar como un evento independiente, por lo que:

$$\text{Cantidad de posibles resultados} = 2^{10} = 1024$$

Como la persona puede equivocarse hasta 2 veces:

$$\text{Aprobables} =_{10} C_0 +_{10} C_1 +_{10} C_2 = 1 + 10 + 45 = 56$$

Por lo que:

$$P(Aprobar) = \frac{aprobables}{Total} = \frac{56}{1024}$$

8.13 Problema 13

8.13.1 Problema

Tres personas A, B y C lanzan, sucesivamente, y por este orden, una moneda ideal, ganando el primero que saque cara ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada jugador?

8.13.2 solución

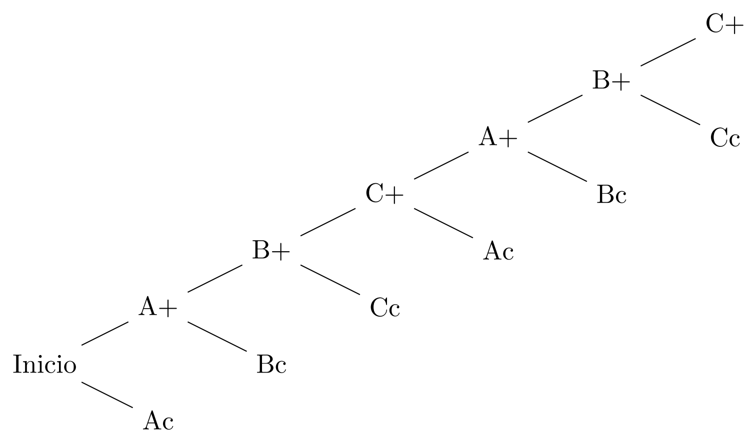


Figure 8.7: Sección del diagrama de árbol, el cuál se puede repetir infinitamente, Xc=Cara para X, X+= Cruz para X.

Cómo se puede ver en el diagrama de árbol, cada tercer tiro después del primero se tiene la probabilidad para A, B o C. Es decir:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(Ac) + P(Ac \cap B + \cap C + \cap Ac) + \cdots = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+3i} \\
P(B) &= P(A + \cap Bc) + P(A + \cap B + \cap C + \cap A + \cap Bc) + \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3i} = \frac{1}{2} P(A) \\
P(C) &= P(A + \cap B + \cap Cc) + P(A + \cap B + \cap C + \cap A + \cap B + \cap Cc) + \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + .. \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3+3i} = \frac{1}{4} P(A)
\end{aligned}$$

8.14 Problema 14

8.14.1 Problema

De una bareja de 52 cartas se sacan 4 cartas una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que:

- Salgan 4 Ases?
- Cuatro cartas sean iguales?
- Cuatro cartas sean del mismo palo?
- Haya al menos una reina?

8.14.2 Solución

La cantidad de combinaciones que pueden darse:

$$_{52}C_4 = 270725$$

Primer inciso

Sólo hay una manera en la que se puede sacar los 4 ases. Por lo tanto:

$$P(4\_Ases) = \frac{1}{270725} = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50}\frac{1}{49}$$

Segundo inciso

Hay 4 palos con 13 cartas cada una. Por lo que:

$$P(4\_Iguales) = 13 \times \frac{1}{270725}$$

Tercer inciso

Hay $_{13}C_4$ formas de tomar 4 cartas de un mismo palo. Y 4 palos. Entonces:

$$P(4 \text{ del mismo palo}) = 4 \times \frac{715}{270725}$$

Quinto inciso

Se tiene que sacar la unión de las maneras de sacar 1 reina, 2 reinas, 3 reinas y 4 reinas.

$$\begin{aligned} \text{Al menos una reina} &=_4 C_1 +_4 C_2 +_4 C_3 +_4 C_4 \\ &= 1 + 6 + 6 + 1 = 14 \\ P(\text{Al menos una reina}) &= \frac{14}{270725} \end{aligned}$$

8.15 Problema 15

8.15.1 Problema

Se tienen 2 bolsas, una con 10 canicas, 7 blancas y 3 negras, y la segunda con 9 canicas, 3 blancas y 6 negras.
Se extrae al azar una canica de la primera bolsa y se mete en la segunda bolsa. De la segunda bolsa se saca una canica. ¿Cuál es la probabilidad de que la canica sea blanca?

8.15.2 Solución

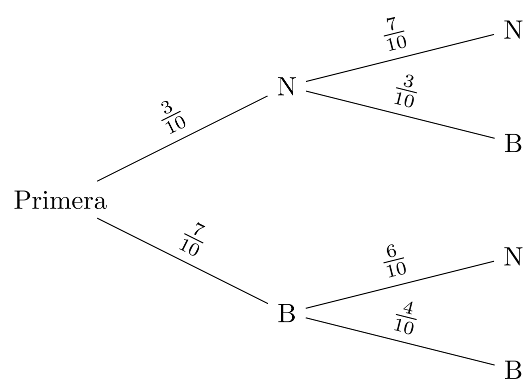


Figure 8.8: Diagrama de árbol del problema.

De esta manera podemos sacar la probabilidad de que salga una canica blanca:

$$P(B) = \frac{7}{10}\frac{4}{10} + \frac{3}{10}\frac{3}{10}$$

8.16 Problema 16

8.16.1 Problema

El equipo T1 y el equipo T2 juegan en un torneo de basquetbol. EL primer equipo en ganar 2 partidas seguidas o un total de 4 partidas gana el torneo. Encuentre el número de formas en que se puede desarrollar el torneo.

8.16.2 solución

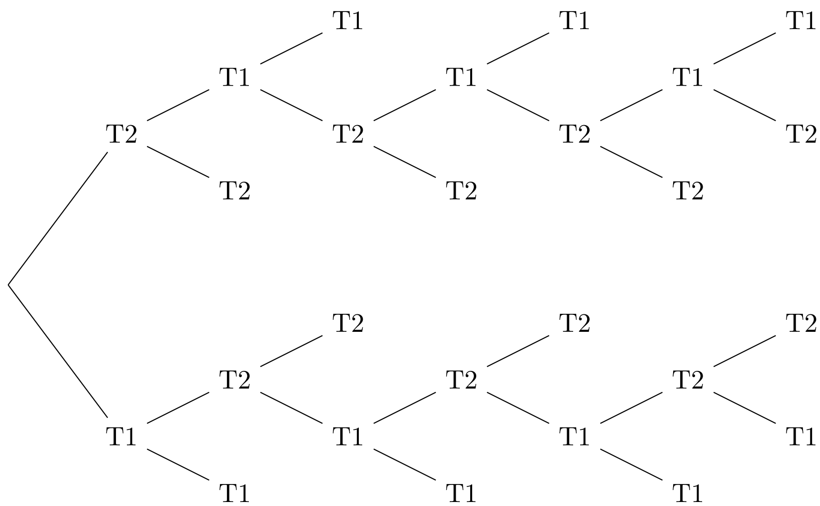


Figure 8.9: Árbol de los posibles resultados.

Para la solución se cuentan la cantidad de *hojas* en el árbol, cómo las 2 ramas son simétricas sólo hace falta contar las *hojas* de una rama. Del diagrama podemos ver que hay 7 *hojas*. Por lo tanto, la cantidad de posibles resultados es de 14.

8.17 Problema 17

8.17.1 Problema

En un salón se encuentran 10 caballeros, 5 de ellos se sentaran alrededor de una mesa redonda, ¿Cuántas maneras hay de que se sienten?

8.17.2 Solución

En primera instancia se tienen que seleccionar los 5 caballeros que se van a sentar:

$$_{10}P_5 = \frac{10!}{(10-5)!}$$

Pero al ser una mesa redonda se tiene que es igual que se sienten los caballeros (1,2,3,4,5) a que se sienten (3,4,5,1,2). Por lo que para cada posible permutación de la selección de caballeros hay 5 repeticiones. Por lo tanto

$$\text{Formas de sentarse} = \frac{_{10}P_5}{5}$$

8.18 Problema 18

8.18.1 Problema

En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes, ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las 9 banderas?

8.18.2 Solución

En este problema se tienen permutaciones con repeticiones de tal manera que:

$$\text{Cantidad de señales} = P_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3!\,2!\,4!} = 1260$$

8.19 Problema 19

8.19.1 Problema

Un hombre está en el origen del eje de las x y puede moverse en una unidad hacia la derecha o a la izquierda. Después de 4 pasos se detiene, también se detiene si llega a 3 o a -2. Construya el diagrama de árbol para describir todas las posibilidades.

8.19.2 Solución

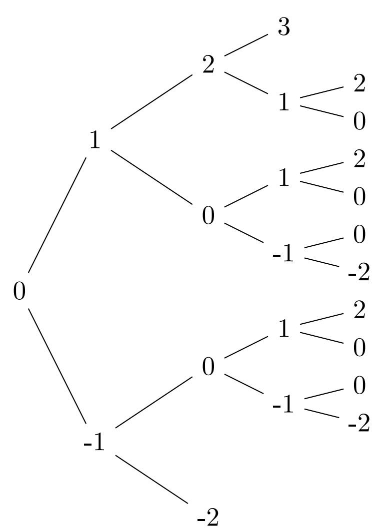


Figure 8.10: Diagrama de árbol

8.20 Problema 20

8.20.1 Problema

Repita el ejercicio anterior pero considere que la probabilidad de que camine un paso a la derecha es el doble a que camine a la izquierda.

8.20.2 solución

Para facilitar el cálculo de la probabilidad, primero se realiza el árbol con los pesos correspondientes.
Para sacar la probabilidad de que termino en 0 siendo que en el tercer paso pasa por -1:

$$\begin{aligned} P(0|\text{Pasa por -1 en el tercer paso}) &= P(1 \cap 0 \cap -1 \cap 0) + P(-1 \cap 0 \cap -1 \cap 0) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{4+4}{81} \end{aligned}$$

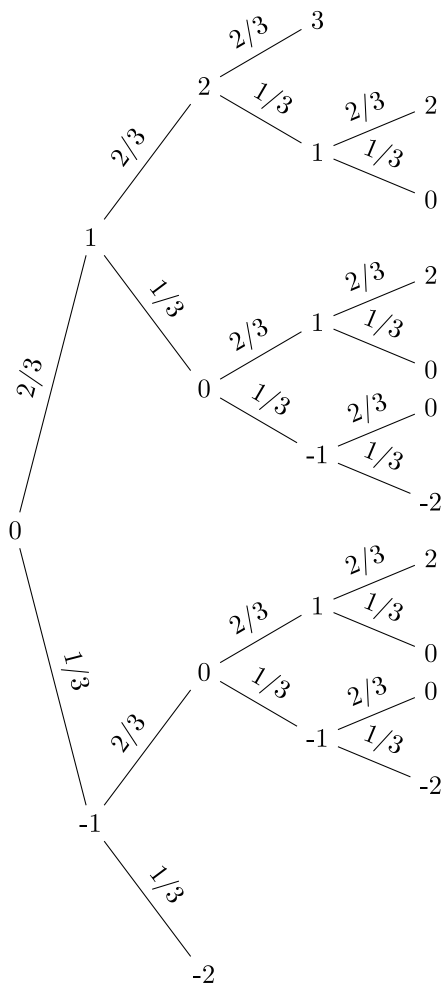


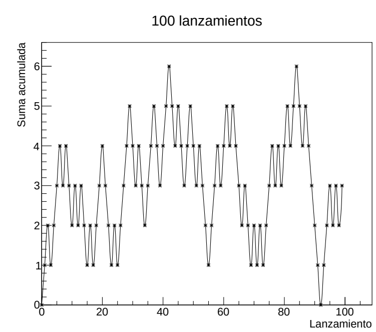
Figure 8.11: Diagrama de árbol

Chapter 9

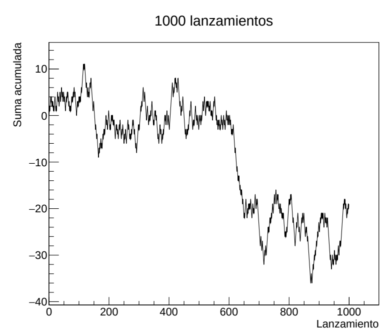
Practicas

9.1 Simulación Volado

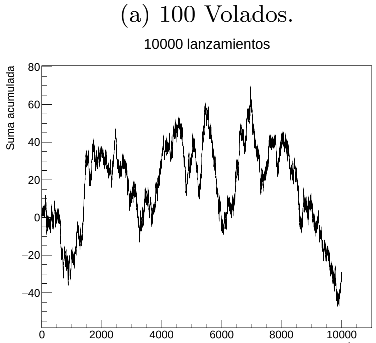
Realice las gráficas correspondientes a una simulación de volado para 100, 1000, 10000 y 100000 experimentos.



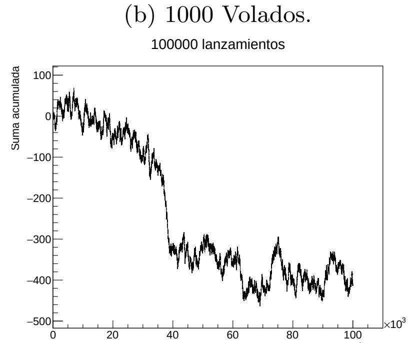
(a) 100 Volados.



(b) 1000 Volados.



(c) 10000 Volados.



(d) 100000 Volados.

Figure 9.1: Gráficas de las simulaciones.

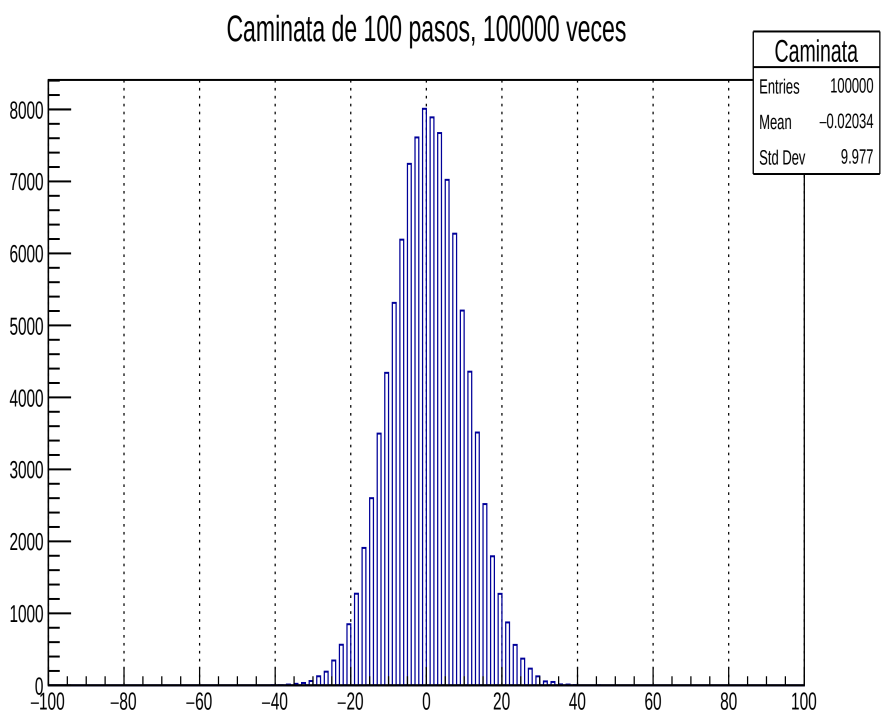
9.2 Lanzamiento Dados

9.2.1 Simulación del lanzamiento de 1 dado

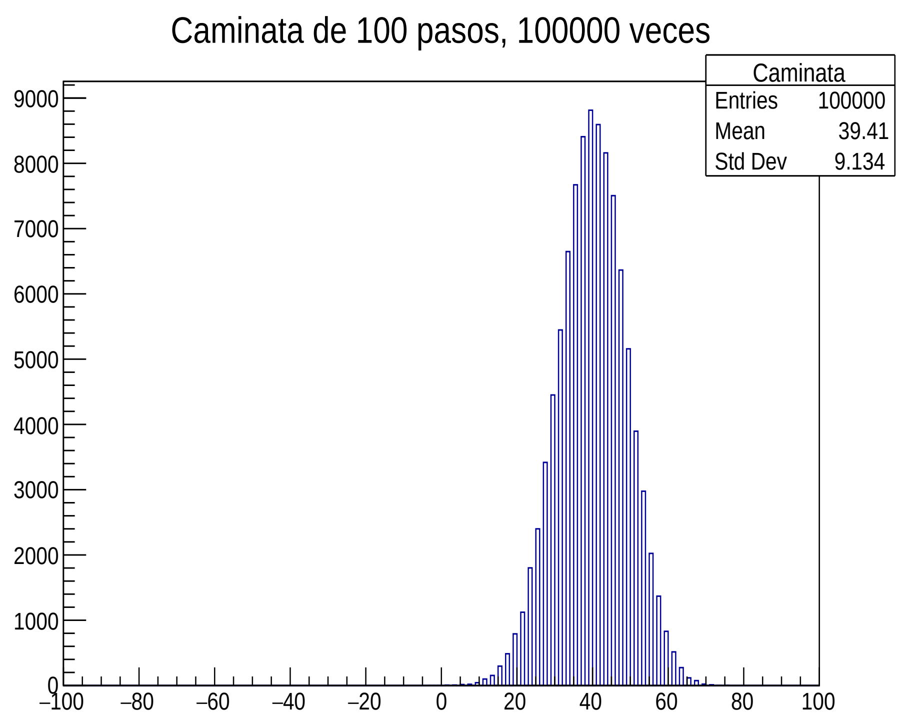
9.2.2 Simulación del lanzamiento de 2 dados

9.3 Caminatas aleatorias

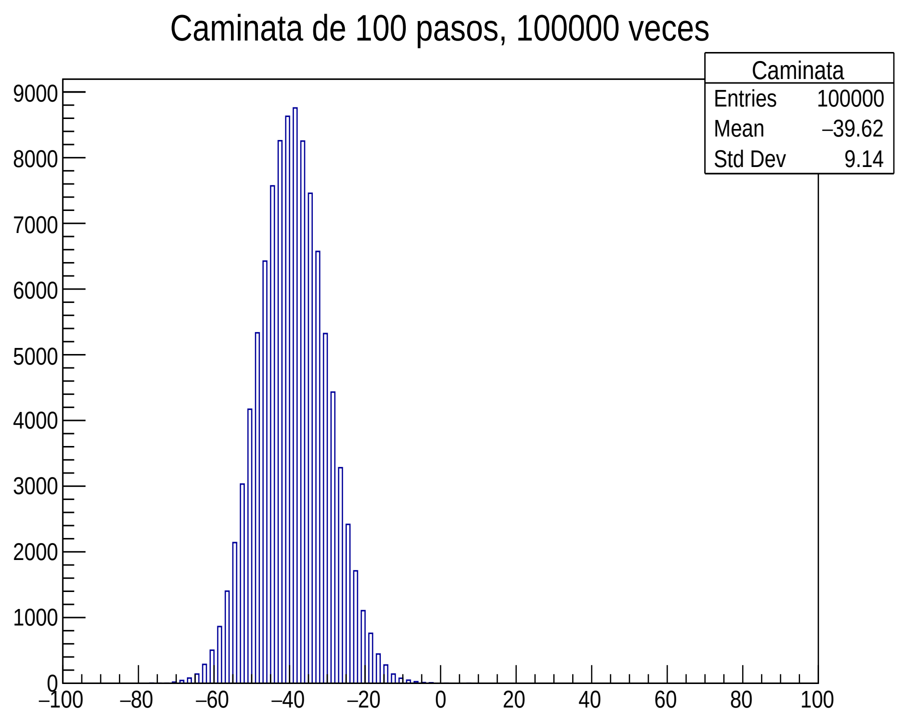
9.3.1 Misma probabilidad



9.3.2 Probabilidad de ir a la izquierda mayor a ir a la derecha



9.3.3 Probabilidad de ir a la derecha mayor a ir a la izquierda



Bibliography

[Ten] Medidas de tendencia central y dispersión.

[2] Blitzstein, J. K. and Hwang, J. (2014). *Introduction to Probability.* CRC Press.

[3] Pickover, C. A. (2009). *The Math Book.* Sterling Publishing Co., Inc.

[4] Schay, G. (2007). *Introduction to Probability with Statistical Applications.* Birkhauser Boston.

[5] Spiegel, M. R. (1977). *Probabilidad y estadística, Teoría y 760 problemas resueltos.* McGraw-Hill.