

*Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia*  
*Apuntes*



*Edgar Daniel García Serrano*  
*CIC - IPN*

# Contents

<b>1</b>	<b>Tarea No.1</b>	<b>5</b>
1.1	Experimento determinístico . . . . .	5
1.2	Experimento aleatorio . . . . .	5
1.3	Espacio muestral . . . . .	6
1.4	Probabilidad clásica . . . . .	6
1.5	Probabilidad geométrica . . . . .	7
1.6	Probabilidad frecuentista . . . . .	7
1.7	Probabilidad subjetiva . . . . .	7
1.8	Probabilidad axiomática . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Tarea No.2</b>	<b>8</b>
2.1	Permutaciones . . . . .	8
2.2	Combinaciones . . . . .	9
2.3	Caminos posibles . . . . .	11
2.4	Caminos en un cubo . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Tarea No.3</b>	<b>13</b>
3.1	Permutaciones circulares . . . . .	13
3.2	Números de Catalan . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Tarea No.4</b>	<b>17</b>
4.1	Graficación en ROOT . . . . .	17
4.2	Comparación $\ln(x!)$ con $x\ln(x)-x$ . . . . .	19
4.3	Histograma . . . . .	20
4.4	Fórmula de Stirling . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Tarea No.5</b>	<b>24</b>
5.1	Programación en ROOT: Dado de 3 caras . . . . .	24
5.2	Accidente Challenger . . . . .	25
5.3	¿Cómo se compacta el mp3? . . . . .	26
5.4	Máquina Enigma . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Tarea No.6</b>	<b>29</b>
6.1	Mínimos Cuadrados . . . . .	29
6.2	Densidad de Probabilidad . . . . .	30
6.3	Resolución de una ecuación cuadrática en GCC . . . . .	31
6.4	Programación en ROOT: Distribución de Gauss . . . . .	33
6.5	Programación en ROOT: Distribución Binomial . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Tarea No.7</b>	<b>38</b>
7.1	Demostraciones . . . . .	38
7.2	Análisis de componentes . . . . .	40
7.3	Ejemplos de mínimos cuadrados . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Tarea No.8</b>	<b>45</b>
8.1	Valores y vectores propios . . . . .	45
8.2	Traza de una matriz . . . . .	46
8.3	Matriz traspuesta . . . . .	46
8.4	Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	46

8.5	Eigenvalores y eigenvectores con multiplicidad (Ejemplos)	47
<b>9</b>	<b>Aplicación: Teorema de Cayley-Hamilton</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Tarea No.10</b>	<b>50</b>
10.1	Generación de matrices en R	50
10.2	Función "lm"	51
<b>11</b>	<b>Tarea No.11</b>	<b>52</b>
11.1	Coefficientes de correlación de Pearson	52
<b>12</b>	<b>Tarea No.12</b>	<b>53</b>
12.1	$\ln(x)$ por series de Taylor	53
<b>13</b>	<b>Tarea No.13</b>	<b>54</b>
13.1	Repositorios de los histograma	54
13.1.1	Ejemplos	55
13.2	Box and whisker plots	55
13.2.1	Ejemplo	56
13.3	Cadenas de Markov en Mathematica	57
13.4	Mínimos cuadrados en Mathematica	57
13.4.1	ejemplo	57
<b>14</b>	<b>Tarea No.14</b>	<b>59</b>
14.1	Demostraciones	59
<b>15</b>	<b>Tarea No.15</b>	<b>64</b>
15.1	Congruencia Zeller	64
<b>16</b>	<b>Tarea No.16</b>	<b>66</b>
16.1	Distribución Maxwell-Boltzmann	66
16.2	Ejemplos Maxwell-Boltzmann	67
16.2.1	Ejemplo 1	67
16.3	Distribución Bose-Einstein	67
16.4	Distribución Fermi-Dirac	67
<b>17</b>	<b>Tarea No.17</b>	<b>69</b>
17.1	La ultima oveja de pie	69
17.2	Solución	69
<b>18</b>	<b>Tarea No.18</b>	<b>71</b>
18.1	Serie Geométrica	71

## List of Figures

1	Caminos posibles; cuadro base . . . . .	11
2	Caminos posibles; cuadro 2x2 . . . . .	11
3	Caminos posibles; cuadro 3x3 . . . . .	11
4	Triángulo de Pascal . . . . .	12
5	Caminos posibles; cubo . . . . .	12
6	Permutación circular . . . . .	13
7	Números de Catalán; Cuadrado . . . . .	15
8	Números de Catalán; Pentágono . . . . .	16
9	Gráfica $\ln x!$ . . . . .	17
10	Gráfica $x \ln x - x$ . . . . .	18
11	Gráfica comparativa: fórmula de Stirling . . . . .	19
12	Ejemplo de Histograma . . . . .	21
13	Resultados obtenidos mediante la simulación en ROOT (13a) dado lanzado 10 veces, (13b) dado lanzado 100 veces, (13c) dado lanzado 1000 veces y (13d) dado lanzado 10,000 veces	25
14	Programa ejecutado en terminal . . . . .	32
15	Resultados obtenidos mediante la simulación en ROOT (15a) distribución de Gauss con 10 datos de entrada, (15b) con 100 datos de entrada, (15c) con 500 datos de entrada . . . . .	34
16	Simulación de la distribución binomial . . . . .	35
17	Ejemplo1: Minimos cuadrados, función lineal . . . . .	43
18	Ejemplo 2: Minimos cuadrados, función logarítmica . . . . .	44
19	Función lm, ejemplo 1: mínimos cuadrados . . . . .	51
20	Aproximación de la funcion $\ln(x)$ por serie de Taylor . . . . .	54
21	Histogramas generados por Mathematica. . . . .	55
22	Diagrama Box and Whiskers . . . . .	56
23	Diagrama Box and Whiskers . . . . .	56
24	Diagrama de transiciones . . . . .	57
25	Gráfica de datos a ajustar . . . . .	57
26	Gráfica de datos con la función de ajuste encontrada . . . . .	58
27	Gráfica de datos a ajustar . . . . .	58
28	Función de ajuste encontrada . . . . .	59
29	Problema del lobo y las ovejas . . . . .	69
30	Analogía, el problema del apostador . . . . .	69

# 1 Tarea No.1

## 1.1 Experimento determinístico

Es un fenómeno o acción que conducen a un resultado seguro o determinado, por lo tanto, en este tipo de experimentos podemos predecir el resultado que se obtendrá partiendo de las mismas condiciones iniciales.

Ejemplos:

1. Calentar el agua a los 100 C a nivel del mar, el agua se convierte en vapor.
2. Calentar una barra de metal, ésta se dilata.
3. Al dejar caer un vaso de vidrio desde el primer piso de un edificio, el vaso se rompe.
4. Si un número natural es par, el siguiente será impar.
5. Si metes las manos al fuego, te quemas.
6. Si se avienta un objeto hacia arriba, después de un intervalos de tiempo, el objeto caerá.
7. Saber que día de la semana es mañana.
8. Calcular el área de un círculo de radio 4.
9. Comparar el peso de un objeto en la Tierra y el pero del mismo objeto en la Luna.
10. Obtener la longitud de la línea 3 del metro de la Ciudad de México.

## 1.2 Experimento aleatorio

Es cualquier proceso o acción del cual no se tiene certeza de su resultado final. En este tipo de experimentos aunque se repitan un número ilimitado de veces bajo las mismas condiciones, no puede predecirse con exactitud un resultado en particular, pero es posible conocer por adelantado todos los posibles resultados a que puede dar origen el experimento.

Ejemplos:

1. Lanzar una moneda, al caer el resultado es una de sus dos caras {Heads, Tails}
2. Lanzar un dado, el resultado es alguno de los números en el conjunto {1,2,3,4,5,6}
3. Extraer dos bolas de una urna con dos bolas blancas (B) y dos bolas negras (N), el resultado puede ser entonces {BB, BN, NN}, es decir dos bolas blancas (BB), una bola blanca y una negra (BN) o dos bolas negras (NN).
4. Predecir el sexo de los hijos de las familias con 3 hijos, ordenados del mayor a menor, donde hombre es H y mujer es M, el resultado puede ser {(HHH),(HHM), (HMH), (MHH), (HMM), (MHM),(MMH),(MMM)}
5. Tomar un foco al azar de un lote de focos, el resultado es que puede o no puede estar defectuoso, el conjunto al que pertenece es defectuoso, no defectuoso
6. Tomar una carta de una baraja española y obtener una de las cuatro familias {Oros, Copas, Espadas, Bastos}

7. Escoger un número de la lotería y que este sea el ganador, el resultado es un número de un conjunto con una gran cantidad de números.
8. Arrojar una bola de boliche para derribar los pinos, el resultado es la cantidad de pinos derribados que pueden ser  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
9. El tiempo, con respecto a la lluvia, que hará durante 3 días consecutivos, es decir un día lluvioso se llamará L, y un día no lluvioso será N, por lo tanto el resultado es alguna combinación del conjunto  $\{(LLL),(LLN), (LNL), (NLL), (LNN), (NLN),(NNL),(NNN)\}$
10. Un foco manufacturado en una planta es expuesta a una prueba de vida y el tiempo de duración de un foco es registrado. En este caso no se conoce cuál será el tiempo de duración del foco seleccionado, pero se puede saber previamente que será un valor entre 0 e infinito.

### 1.3 Espacio muestral

Un espacio muestral es un conjunto  $S$  que consiste en todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, también es conocido como. Cada uno de los elementos del espacio muestral se le conoce como puntos muestrales, sucesos elementales o muestras. A todo subconjunto del espacio muestral se le conoce como suceso aleatorio.

Existen dos tipos de espacios muestrales:

- Espacios muestrales discretos: cuando la cantidad de elementos es finito o contable.
- Espacios muestrales continuos: donde la cantidad de resultados obtenidos pueden ser infinitos.

### 1.4 Probabilidad clásica

La probabilidad clásica de un evento es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre y cuando todos los elementos del espacio muestral tengan las mismas posibilidades de ocurrir. Por lo tanto, la probabilidad clásica de un evento  $A \subset S$  se define como:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{NumDeEventosFavorables}}{\text{NumDePosibilidades}}. \quad (1)$$

Existen tres propiedades a destacar:

1.  $P(S) = \frac{|S|}{|S|} = 1$
2.  $P(S) = \frac{|A|}{|S|} \geq 0$
3. Si  $A$  y  $B$  son ajenos, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{|(A \cup B)|}{|S|} = \frac{(|A|) + (|B|)}{|S|} = P(A) + P(B)$$

Más generalmente, si  $A_1, A_2, \dots$  son ajenos dos a dos, entonces:

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \text{ cuando } A_1, A_2, \dots$$

## 1.5 Probabilidad geométrica

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región. Se define la probabilidad geométrica como:

$$P(A) = \frac{\text{Longitud}(A)}{\text{Longitud}(S)} \quad (2)$$

La definición también puede ser escrita en términos de área o volumen.

## 1.6 Probabilidad frecuentista

También conocida como probabilidad empírica, este tipo de probabilidad establece que aunque el comportamiento del experimento es aleatorio, eventualmente llegaremos a una regularidad. Notamos a través de gran cantidad de observaciones acumuladas con los diversos juegos de azar una forma general de regularidad que permitió establecer una teoría. Sea un experimento aleatorio con espacio muestral  $S$  y sea  $A$  un evento. Se realizan  $n$  repeticiones del experimento aleatorio y se define  $n(A)$  como el número de veces que ocurre el evento  $A$  en los  $n$  ensayos del experimento. Por lo tanto, se define la probabilidad frecuentista como:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(A)}{n} \right) \quad (3)$$

La forma de calcular la probabilidad es usar la frecuencia relativa, ya que si se trata de un experimento aleatorio en el cual se repite muchas veces, la frecuencia relativa se acercará mucho a la probabilidad del suceso.

## 1.7 Probabilidad subjetiva

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda ocurrir. Un ejemplo muy común es el pronóstico del tiempo, muchos individuos como nosotros realizamos una predicción personal de como serán las condiciones climáticas para el día, basadas más en nuestra experiencia personal pero que muchas veces sustentamos en experiencia de eventos pasados.

## 1.8 Probabilidad axiomática

Si hacemos un determinado experimento, que tiene un espacio muestral  $S$ , definimos la probabilidad como una función que asocia a cada suceso  $A$  una determinada probabilidad,  $P(A)$ , que cumple las siguientes propiedades:

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(S) = 1$
3.  $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$  cuando  $A_1, A_2, \dots$  son ajenos dos a dos

Los 3 axiomas anteriores se les conoce como 'Axiomas de Kolmogorov'

## 2 Tarea No.2

### 2.1 Permutaciones

Las permutaciones de  $n$  elementos son las distintas formas en que pueden ordenarse dichos  $n$  elementos.

#### Ejemplos

1. Un vendedor quiere visitar 5 ciudades. Si no quiere repetir ciudades, ¿cuántas rutas distintas puede elaborar si puede empezar y acabar en cualquiera de las ciudades?  
El vendedor puede elegir la primera ciudad que visitará de entre las 5. Elegirá la segunda ciudad que visitará de entre las 4 restantes. Para la tercera ciudad tiene 3 opciones. Para la cuarta, 2. Y para la última.

Así que puede elaborar  $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5! = 120$  rutas distintas.

2. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 5, 6 y 7? El conjunto puede ordenarse de diferentes formas, dando lugar a varias permutaciones:  $\{5,6,7\}$ ,  $\{5,7,6\}$ ,  $\{7,5,6\}$ ,  $\{7,6,5\}$ ,  $\{6,5,7\}$ ,  $\{6,7,5\}$  y  $\{5,6,7\}$ . Calculando de otra manera

$$\text{Hay } P_3 = 3! = 6 \text{ números}$$

3. ¿De cuántas maneras distintas se pueden asignar a 10 profesores las 10 unidades de un curso de economía?

$$P_{10} = 10! = 3,628,800 \text{ maneras distintas}$$

4. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 8 libros en un librero con 8 espacios?

$$P_8 = 8! = 40,320 \text{ maneras distintas}$$

5. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas? Si se repiten los elementos y si importa el orden.

$$PR_9^{2,3,4} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$$

6. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?  
Se forman dos grupos: el primero de 2 personas y el segundo de 7 personas, en los dos se cumple que: Si importa el orden y no se repiten los elementos.

$$P_2 P_7 = (2!)(7!) = 10,080$$

7. Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre si, ¿de cuántas formas posibles pueden ordenarse?

$$P_{10}^{5,2,3} = \frac{10!}{(5!)(2!)(3!)} = 2520$$

8. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$PC_8 = P_8 = (8 - 1)! = 7! = 5040$$



9. Doce estudiantes van a ir a Veracruz en tres carros, 3 estudiantes en un carro, 4 estudiantes en el segundo carro, y 5 en el tercer carro. ¿De cuántas formas se pueden acomodar, si cualquiera puede conducir?

$$P_{3,4,5} = \frac{12!}{(3!)(4!)(5!)} = 27,720$$

10. Con las letras de la palabra *libro*, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal? La palabra empieza por i u o seguida de las 4 letras restantes tomadas de 4 en 4. Si importa el orden. no se repiten los elementos.

*libro* tiene 2 vocales, cualquiera de las 2 puede estar al principio y las 4 letras restantes despues a esta. Por lo tanto:

$$P_2 P_4 = 2(4!) = 2(24) = 48$$

## 2.2 Combinaciones

Se llama combinaciones de m elementos tomados de n en n ( $m \geq n$ ) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que: No entran todos los elementos, no importa el orden, no se repiten los elementos.

*Ejemplos:*

1. ¿De cuántas formas una persona puede tomar 3 libros de una lista de 8 libros?

$$\text{No. de formas} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(3!)(8-3)!} = 56$$

2. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar un comité de 5, de entre un grupo de 62 personas.

$$\text{No. de formas} = \binom{62}{5} = \frac{62!}{(5!)(62-5)!} = 6,471,002$$

3. En una carrera compiten 10 corredores y se clasifican los 3 primeros para la fase siguiente. ¿de cuántas maneras diferentes puede producirse la clasificación?

$$\text{No. de formas} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(3!)(10-3)!} = 120 \text{ formas diferentes}$$

4. Un paquete de 10 baterías tiene dos piezas defectuosas, ¿de cuántas maneras se pueden tomar 3 de estas baterías y sacar una de las baterías defectuosas?

$$\text{No. de formas} = \binom{8}{2} \binom{2}{1} = \left( \frac{8!}{(2!)(8-2)!} \right) \left( \frac{2!}{(1!)(2-1)!} \right) = 28(2) = 56$$

5. Entre los 8 candidatos para 2 vacantes de personal, se encuentran 4 hombres y 4 mujeres, ¿de cuántas formas se puede cubrir esta vacante con 2 candidatos cualesquiera de los 8?

$$C = \binom{8}{2} = \frac{8!}{(2!)(8-2)!} = 28$$

6. Entre los 10 deportistas, se encuentran 5 hombres y 5 mujeres, ¿de cuántas formas se puede seleccionar 2 deportistas, donde 1 sea hombre y 1 sea mujer?

$$C = \binom{5}{1} \binom{5}{1} = 5(5) = 25$$

7. ¿Cuántas parejas distintas pueden formarse con cinco individuos?

$$C = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(2!)(5-2)!} = 10$$

8. Si se seleccionan cinco cartas de un grupo de nueve, ¿cuántas combinaciones de cinco cartas habría?

$$C = \binom{9}{5} = \frac{9!}{(5!)(9-5)!} = 126$$

9. José tiene 9 amigos y desea invitarlos a cenar, pero sólo puede invitar a 6 simultáneamente. ¿Cuántos grupos distintos de invitados puede tener?

Queremos saber cuantos grupos distintos podemos formar independientemente del orden en que se elija los invitados.

$$C = \binom{9}{6} = \frac{9!}{(6!)(9-6)!} = 84 \text{ grupos distintos}$$

10. El juego de la Primitiva consiste en acertar 6 números naturales a elegir entre el 1 y el 49. ¿Cuántas posibles combinaciones hay? Si cada combinación nos cuesta 1£ ¿Cuánto nos tendremos que gastar para asegurar que vamos a acertar seguro los 6 números?

Queremos acertar 6 números de 49 posibles, independientemente del orden en que los elijamos.

$$C = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(6!)(49-6)!} = 13,983,816£$$

## 2.3 Caminos posibles

Dado un cuadrado, se desea calcular la cantidad de caminos posibles del vértice A al vértice B. Procedemos a analizar los casos básicos particulares.

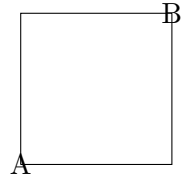


Figure 1: Caminos posibles; cuadro base

En la figura 1 se observa el caso base, es evidente que para llegar de  $A$  a  $B$  se requieren 2 pasos. Ahora se analiza para el caso de una cuadrícula de  $2 \times 2$ .

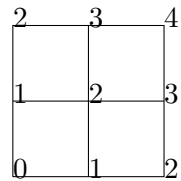


Figure 2: Caminos posibles; cuadro  $2 \times 2$

Continuamos de la misma manera para el caso de un cuadrado de  $3 \times 3$

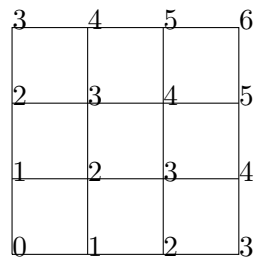


Figure 3: Caminos posibles; cuadro  $3 \times 3$

Se puede observar que los vértices de los cuadros están relacionados a los valores que contiene los elementos del triángulo de Pascal, los cuales son el resultados de una combinación de la línea  $n$  con la columna  $p$ . En la siguiente figura se muestra la relación entre los valores y las combinaciones del triángulo de Pascal.

					1					
					1		1			
				1		2		1		
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Figure 4: Triángulo de Pascal

El valor que obtenemos en el vertice B es la cantidad de caminos posibles para recorrer de A a B. Dado que los movimientos en un retángulo son similares a los movimientos que se siguen en el caso del rectángulo, podemos determinar una figura similar, rotulando cada vertice con los valores del triángulo de Pascal.

El total de caminos posibles de A hasta B, de un rectangulo de longitud  $(4+2)$ , es  $6C_2 = (4+2)$  donde  $K=6$  y  $n=2$ . Así el cálculo para el número total de caminos es:

$$\frac{[k-n]! + n!}{[k-n]!n!}. \quad (4)$$

## 2.4 Caminos en un cubo

Para un espacio de 3 dimensiones, de arreglo  $k \times k \times k$  dimensiones, se obtiene que el total de caminos posibles para ir de un extremo A al B es

$$n = \frac{(3k!)}{(k!)^3}. \quad (5)$$

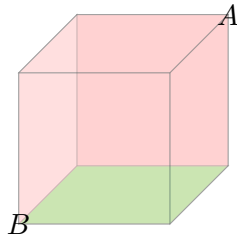


Figure 5: Caminos posibles; cubo

### 3 Tarea No.3

#### 3.1 Permutaciones circulares

Son un caso especial de permutaciones, se utiliza cuando los elementos se han de ordenar en circulo, por ejemplo los comensales de una mesa, de modo que el primer elemento que se situe marcará el principio y el final de la muestra.

##### *Ejemplos*

1. Calcular las permutaciones circulares de 7 elementos

$$P_c^7 = (7 - 1)! = 6! = 720$$

2. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse alrededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?

$$P_c^6 = (6 - 1)! = 5! = 120$$

3. Si siete personas se reúnen para cenar, ¿Cuántas maneras hay de que se sienten a la mesa si dos insisten en sentarse juntas?

Formamos un bloque con los dos que se quieren sentar juntos, considerándolo como un solo elemento y calculamos el número de permutaciones  $P_c^6$ , internamente en el bloque calculamos el número de permutaciones entre los dos que se sientan juntos mediante  ${}_2P_2$ . Aplicamos el principio multiplicativo.

$${}_2P_2(P_c^6) = 2!(6 - 1)! = 240$$

4. El señor García y su esposa tienen 6 invitados a cenar en su casa, ¿De cuántas formas diferentes podrán sentarse a la mesa los 8 comensales (los 2 anfitriones y los 6 invitados)?

habrá  $(8 - 1)! = 7! = 5,040$  formas en que puedan sentarse a cenar.

5. Juan, Pedro, Jesús y Alberto se reúnen a jugar dominó, ¿De cuántas formas pueden sentarse a la mesa de juego?

$$P_c^4 = (4 - 1)! = 3! = 6 \quad \text{formas diferentes en que puedan sentarse a jugar}$$

6. ¿De cuántas maneras diferentes pueden disponerse circularmente las letras de la A a la Z?

$$P_c^{27} = (27 - 1)! = 26! = 4.03129 \times 10^{26}$$

7. ¿De cuántos modos distintos podemos ubicar las cifras del 1 al 7 en la figura siguiente?

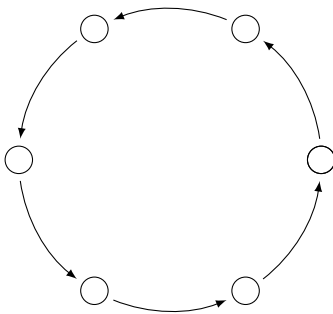


Figure 6: Permutación circular

Podemos solucionar este problema como la conjunción de dos sucesos: En primer lugar ubicamos una cifra en el centro (7 posibilidades) y en segundo lugar las otras 6 cifras, las cuales por ordenarse en una circunferencia podrán permutarse de  $(6-1)!$  maneras, por lo cual:

$$No.maneras = 7x5! = 7x120 = 840$$

8. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

El número de formas en que podemos sentar a los 3 mujeres alrededor de una mesa circular, dejando un lugar en medio es  $2!$ . Obsérvese que el primer renglón de círculos, los seis arreglos diferentes tienen a M1 M2 M3 siempre en la misma posición; y en el segundo renglón, los seis arreglos tienen a M1 M3 M2 siempre en la misma posición; por ello son sólo dos arreglos de las tres mujeres, dejando un lugar en medio. Hay  $3! = 6$  formas de sentar a los tres hombres por cada uno de los dos arreglos de mujeres; quedando así en forma alternada.

9. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$P_c^8 = (8-1)! = 5040$$

10. La directiva de deportes consta de 10 integrantes, en cada reunión se sientan en forma circular, si tres de los integrantes siempre conservan el lugar, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

Formamos un bloque con los tres integrantes que siempre conservan su lugar, considerándolo como un solo elemento y calculamos el número de permutaciones  $P_c^6$ , internamente en el bloque calculamos el número de permutaciones entre los dos que se sientan juntos mediante  $P_c^2$ . Aplicamos el principio multiplicativo.

$${}_3P_3(P_c^7) = 3!(7-1)! = 4320$$

### 3.2 Números de Catalan

Los números de Catalan forman una secuencia de números naturales que aparece en varios problemas de conteo que habitualmente son recursivos. Obtienen su nombre del matemático belga Eugene Charles Catalan (1814–1894).

El  $n$ -ésimo número de Catalan se obtiene, aplicando coeficientes binomiales, a partir de la siguiente fórmula:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{n}{2n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad \text{con } n \geq 0$$

Una expresión alternativa para  $C_n$  es

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad \text{con } n \geq 1$$

Los números de Catalan satisfacen la relación de recurrencia siguiente:

$$C_0 = 1 \quad \text{y} \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \quad \text{con } n \geq 0$$

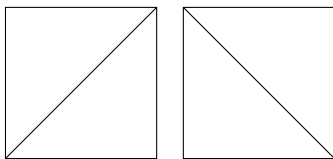
$$C_0 = 1 \quad \text{y} \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \quad \text{con } n \geq 0$$

Existen múltiples problemas de combinatoria cuya solución la dan los números de Catalan. Una aplicación de esta fórmula es la división de polígono en triángulos.

Un polígono convexo es un polígono que cumple que todos sus ángulos interiores miden menos de 180 grados. Según esta definición es evidente que todos los polígonos regulares como el triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular.etc) son convexos.

$C_n$  es el número de formas distintas de cortar un polígono convexo de  $n + 2$  lados en triángulos conectando vértices con líneas rectas sin que ninguna se corte.

Una triangulación de un polígono es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Tomemos el primer polígono regular en lo que a número de lados se refiere, el triángulo equilátero. Está claro que no se puede trazar ninguna diagonal. Esto es, el número de formas en las que podemos dividir un triángulo equilátero en triángulos trazando diagonales de la forma descrita antes es 1.



Cuadrado 1    Cuadrado 2

Figure 7: Números de Catalán; Cuadrado

El siguiente es el pentágono. En este caso cada forma de dividirlo en triángulos así consiste en trazar dos diagonales que no se corten. Estas son las 5 formas.

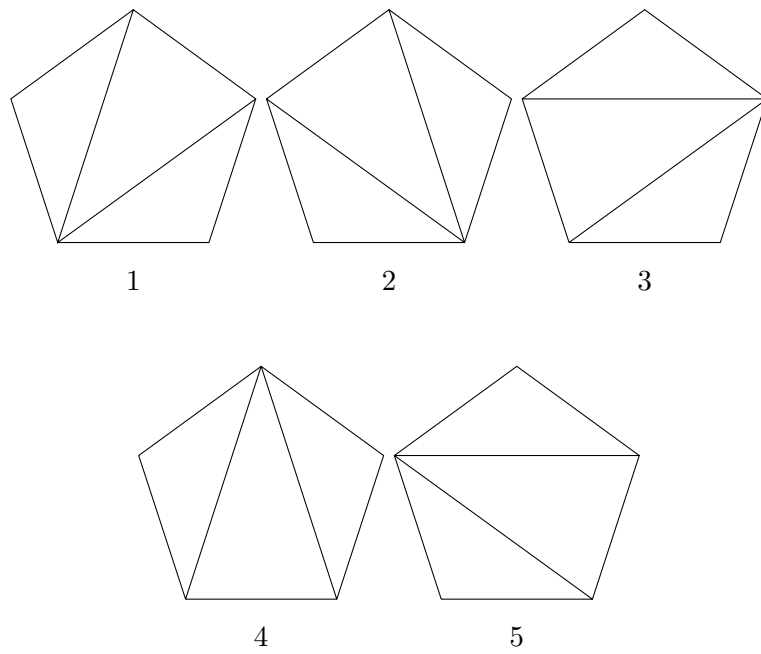


Figure 8: Números de Catalán; Pentágono

Siguiendo con el mismo procedimiento, el hexágono el número de diagonales a trazar es tres por vez. Dando como resultado 14 formas de dividir el hexágono, con un heptágono obtendremos 42 formas, con un octágono 132, y así sucesivamente. Al final se ha obtenido una sucesión de números como la siguiente:

1, 2, 5, 14, 42, 132...



## 4 Tarea No.4

### 4.1 Graficación en ROOT

$\ln(x!)$

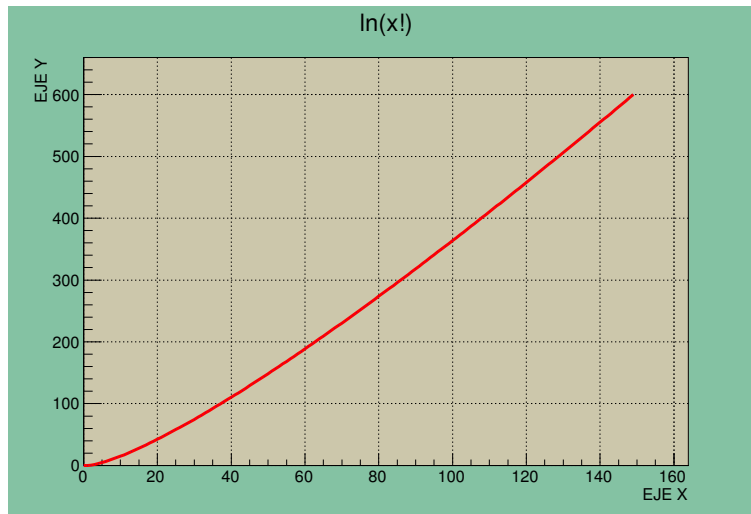


Figure 9: Gráfica  $\ln x!$

```
void grafica1() {  
    //Grafica  $\ln(x!)$   
    //Edgar Daniel Garcia Serrano  
  
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "ln(x!)", 200, 10, 700, 500);  
  
    c1->SetFillColor(30); //Cambia color al fondo  
    c1->SetGrid();  
  
    const Int_t n = 150;  
    Double_t x[n], y[n], m[n];  
    for (Int_t i=1; i<n; i++)  
    {  
        m[i] = i;  
        x[i] = m[i]*x[i-1];  
        x[0]=1;  
        x[1]=1;  
        y[i] = log(x[i]);  
    }  
  
    TGraph *gr = new TGraph(n, m, y);  
    gr->SetLineColor(2);  
    gr->SetLineWidth(3);  
    gr->SetMarkerColor(4);  
    gr->SetMarkerStyle(1);  
}
```

```

gr->SetTitle("ln(x!)");
gr->GetXaxis()->SetTitle("EJE_X");
gr->GetYaxis()->SetTitle("EJE_Y");
gr->Draw();

c1->Update();
c1->GetFrame()->SetFillColor(21);
c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
c1->Modified();
}

```

**xln(x)-x**

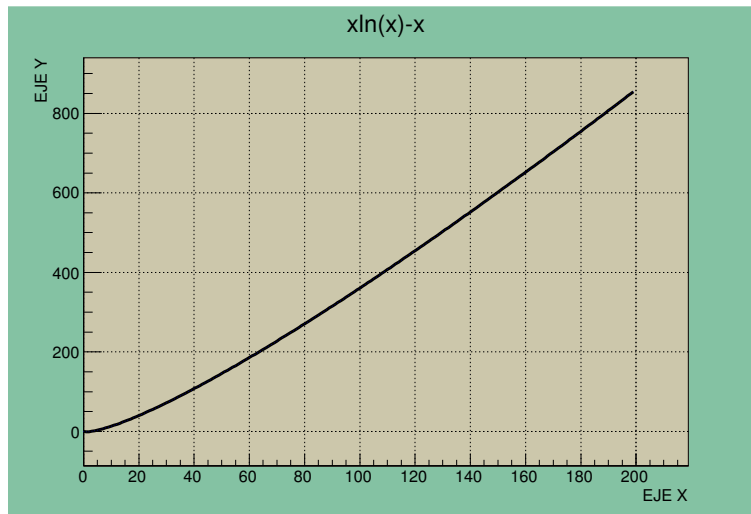


Figure 10: Gráfica xlnx - x

```

void grafica2() {
//Grafica xln(x)-x
//Edgar Daniel Garcia Serrano

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","xln(x)-x",200,10,700,500);

c1->SetFillColor(30); //Cambia color al fondo
c1->SetGrid();

const Int_t n = 200;
Double_t x[n], y[n],m[n];
for (Int_t i=1;i<n;i++)
{
    x[i] = i;
    y[i] = (x[i]*log(x[i]))-x[i];
}

TGraph *gr = new TGraph(n,x,y);

```

```

gr->SetLineColor(1);
gr->SetLineWidth(3);
gr->SetMarkerColor(4);
gr->SetMarkerStyle(1);
gr->SetTitle("xln(x)-x");
gr->GetXaxis()->SetTitle("EJE_X");
gr->GetYaxis()->SetTitle("EJE_Y");
gr->Draw();

c1->Update();
c1->GetFrame()->SetFillColor(21);
c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
c1->Modified();
}

```

## 4.2 Comparación $\ln(x!)$ con $x\ln(x)-x$

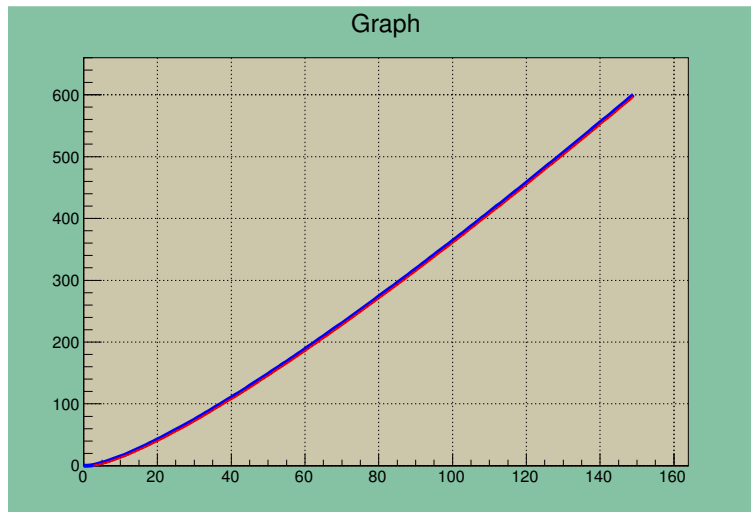


Figure 11: Gráfica comparativa: fórmula de Stirling

```

void grafica3() {
//Grafica ln(x!)
//Edgar Daniel Garcia Serrano

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","ln(x!) _y_ xln(x)-x",200,10,700,500);

c1->SetFillColor(30); //Cambia color al fondo
c1->SetGrid();

const Int_t n = 150;
Double_t x[n], y[n],m[n],x2[n],y2[n];
for (Int_t i=1;i<n;i++)
{

```

```

    m[i] = i;
    x[i] = m[i]*x[i-1];
    x[0]=1;
    x[1]=1;
    y[i] = log(x[i]);          //Primera funcion

    x2[i] = i;
    y2[i] = (x2[i]*log(x2[i]))-x2[i]; //Segunda funcion

}
TGraph *gr1 = new TGraph(n,m,y); //Grafica primera funcion
gr1->SetLineWidth(4);
gr1->SetLineColor(4);
gr1->Draw("AC");

TGraph *gr2 = new TGraph(n,x2,y2); //Grafica segunda funcion
gr2->SetLineWidth(2);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetLineColor(2);
gr2->Draw("CP");

c1->Update();
c1->GetFrame()->SetFillColor(21);
c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
c1->Modified();
}

```

### 4.3 Histograma

Un histograma es una representación gráfica, en forma de barras, de los valores producidos por las variaciones de una determinada característica o variable. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados. En el eje vertical se representan las frecuencias, y en el eje horizontal los valores de las variables.

Su función es exponer gráficamente números, variables y cifras de modo que los resultados se visualicen clara y ordenadamente.

#### *Características*

- Permite resumir grandes cantidades de datos
- Permite el análisis de los datos evidenciando esquemas de comportamiento y pautas de variación que son difíciles de captar en una tabla numérica.
- Permite comunicar información de forma clara y sencilla sobre situaciones complejas.

En general se utilizan para relacionar variables cuantitativas continuas, pero también se lo suele usar para variables cuantitativas discretas, en cuyo caso es común llamarlo diagrama de frecuencias y sus barras están separadas, esto es porque en el eje x ya no se representa un espectro continuo de valores.

### *Ejemplos*

- Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Peso	F
[50,60]	8
[60,70]	10
[70,80]	16
[80,90]	14
[90,100]	10
[100,110]	5
[110,120]	2

El histograma correspondiente es el siguiente:

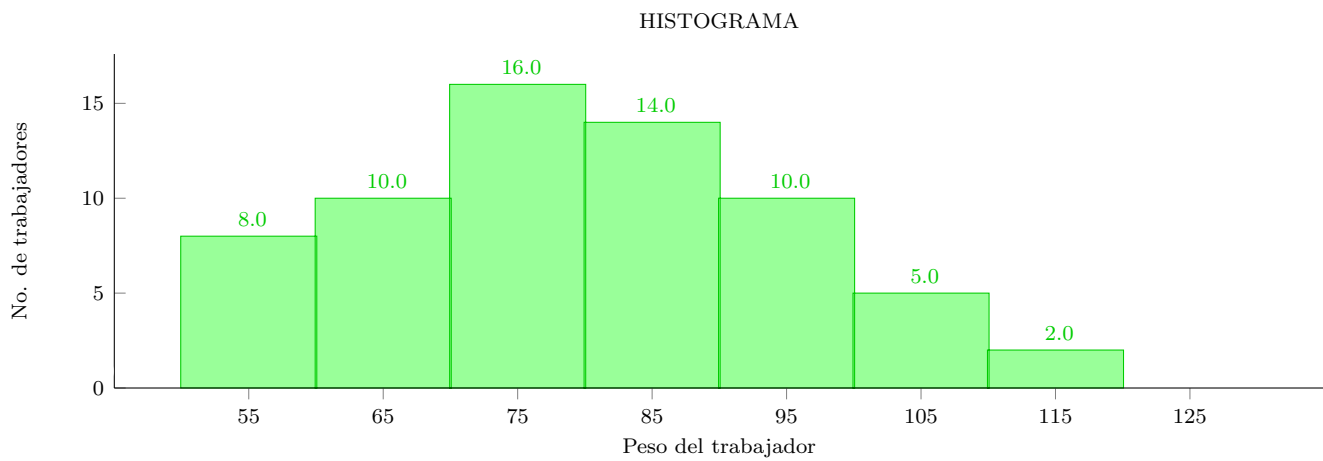


Figure 12: Ejemplo de Histograma

#### 4.4 Fórmula de Stirling

En muchas aplicaciones, particularmente en estadística y teoría de la probabilidad, encontramos necesario tener una aproximación simple a  $n!$  como una función elemental de  $n$ . Tal expresión es dada por el siguiente teorema conocido como fórmula o aprximación de Stirling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(\sqrt{2n\pi})\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \quad (6)$$

Que se escribe frecuentemente como:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (7)$$

Se puede mejorar la fórmula con un desarrollo asintótico proveniente de la función gamma:

$$\Gamma(n+1) = n! \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \quad (8)$$

De la ecuación anterior tomamos el argumento de la integral y aplicamos logaritmo:

$$\log(t^n e^{-t}) = n \log t - t \quad (9)$$

Definimos la variable  $t = (n + \epsilon)$  y sustituimos en la Eq(9).

$$n \log t - t = n \log(n + \epsilon) - (n + \epsilon) \quad (10)$$

Tomamos el termino  $\log(n + \epsilon)$  de la Eq(10) y factorizamos  $n$

$$\log(n + \epsilon) = \log n \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) = \log n + \log\left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \quad (11)$$

Para una  $n$  muy grande, podemos asegurar  $\frac{\epsilon}{n} < 1$  y usando los principios de la serie de Taylor para logaritmo tenemos que:

$$\log\left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\epsilon^k}{n^k} \quad (12)$$

Sustituimos el resultado anterior en la Eq(10) y de esta manera obtenemos:

$$n \log(n + \epsilon) - (n + \epsilon) = n \left( \log n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\epsilon^k}{n^k} \right) - n - \epsilon \quad (13)$$

De la ecuación anterior tomamos el segundo miembro de la igualdad y simplificamos.

$$n \log n - n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\epsilon^k}{n^{k-1}} - \epsilon \quad (14)$$

Se puede observar que cuando  $k = 1$  la función se indetermina, por lo que  $k$  inicia con un valor de 2.

$$n \log n - n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\epsilon^k}{n^{k-1}} - \epsilon \quad (15)$$

Posteriormente se representa el desarrollo de la serie para tener una idea de la función que se va adquiriendo.

$$n \log n - n - \frac{\epsilon^2}{2n} + \frac{\epsilon^3}{3n^2} - \frac{\epsilon^4}{4n^3} \pm \dots \quad (16)$$

La ecuación anterior se obtuvo a partir de  $n \log t - t$ , por lo que sustituyendo en la Eq(9). Obtenemos la siguiente aproximación. Nota: se toma solo la resta del primer término fraccionario.

$$\log(t^n e^{-t}) \approx n \log n - n - \frac{\epsilon^2}{2n} \quad (17)$$

Se simplifica la expresión al aplicar exponencial a ambos lados de la ecuación.

$$t^n e^{-t} \approx \frac{n^n}{e^n} e^{-\frac{\epsilon^2}{2n}} \quad (18)$$

Si se integra a ambos lados de la igualdad, obtenemos la siguiente expresión. Se puede observar que llegamos a la equivalencia de  $n!$  de la Eq(8)

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \approx \int_{-n}^\infty \frac{n^n}{e^n} e^{-\frac{\epsilon^2}{2n}} d\epsilon \quad (19)$$

Por definición de la operación gamma para  $1/2$  tenemos:

$$\sqrt{\frac{\pi}{p}} = \int_{-\infty}^\infty e^{-px^2} dx \quad (20)$$

La eq(19) es del mismo tipo que la eq(20), y tomando en cuenta que para una  $n$  muy grande  $-n = -\infty$ . Resolviendo la integral obtenemos la fórmula de Stirling

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2n\pi} \quad (21)$$

## 5 Tarea No.5

### 5.1 Programación en ROOT: Dado de 3 caras

Se lanza un dado de 3 caras 10, 100, 1000 y 10000 veces, los resultados obtenidos se grafican en un histograma con la frecuencia que cae cada valor que contiene el dado.

La simulación se realizó en ROOT mediante la obtención de valores aleatorios del 1 al 3, graficando la frecuencia con la que se obtiene cada valor. El código implementado se muestra a continuación

```
void RandomExe(){ //Inicia programa
//Autor: Edgar Daniel Garcia Serrano
//Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia
//Programa que muestra la frecuencia para un dado de 3 caras

    //Crear canvas
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Dado_de_3_caras",200,10,700,500);

    //crear un histograma con 3 entradas, de 0 a 3 en X
    TH1F *h1 = new TH1F("h1","Dado_de_3_caras",3,0,3);
    TF1 f1 ("f1","1",0,3); //Funcion lineal constante
    h1->SetMinimum(0); //Establece el valor minimo en el eje

    //i iteraciones para el numero que se lanza el dado
    //El histograma se llena con valores extraidos de f1
    for (Int_t i=0; i<10000; i++)
    {
        h1->Fill(f1.GetRandom(0,3));
        h1->Draw(); //Dibuja el histograma
    }

    h1->SetLineColor(2); //Color de linea para el histograma
    h1->SetLineWidth(3); //Establece el ancho de la linea
    h1->SetTitle("Dado_de_3_caras"); //Titulo de la grafica
    h1->GetXaxis()->SetTitle("Valor"); //Titulo del eje X
    h1->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia"); //Titulo del eje y

    c1->Update(); //Actualiza grafico
    c1->GetFrame()->SetFillColor(0); //Color del grafico
    c1->Modified();
}
```



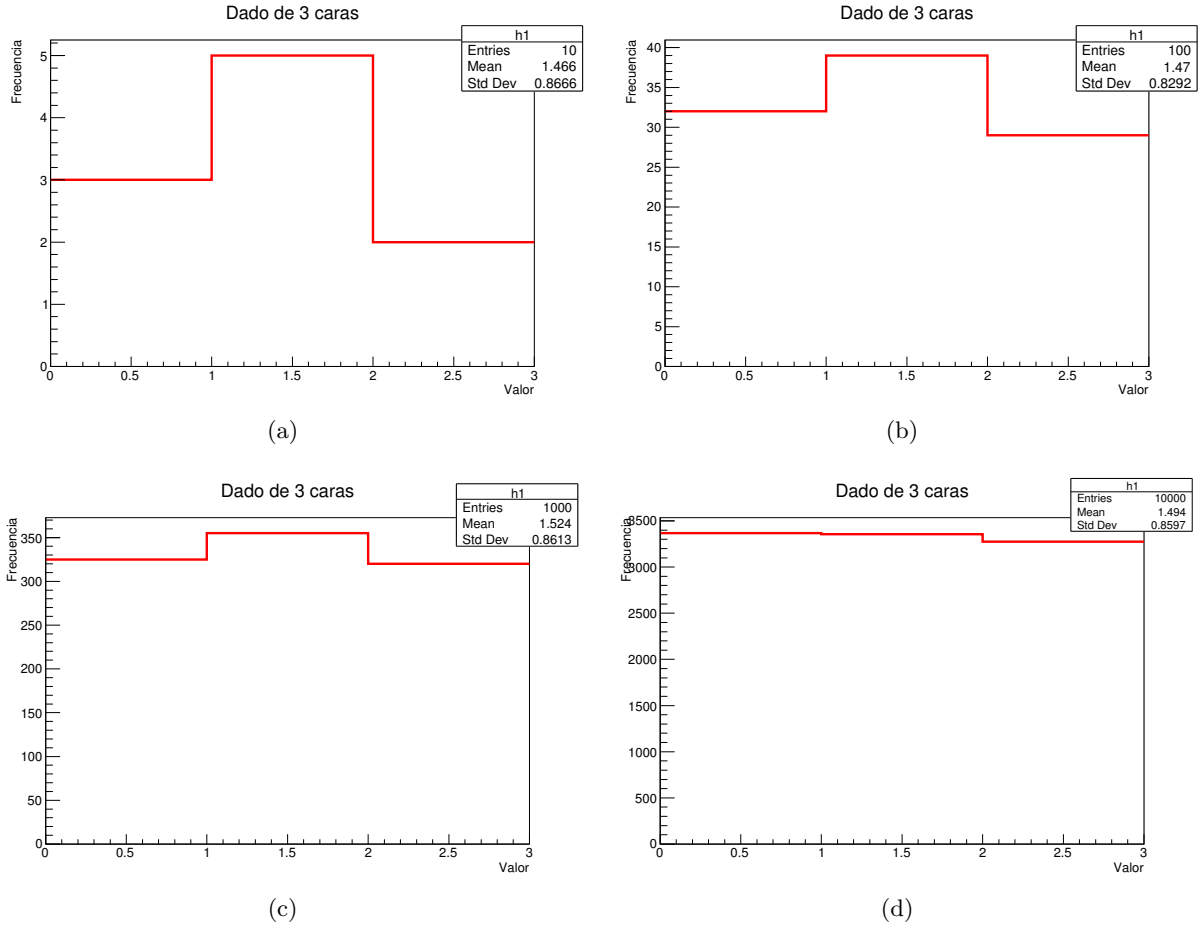


Figure 13: Resultados obtenidos mediante la simulación en ROOT (13a) dado lanzado 10 veces, (13b) dado lanzado 100 veces, (13c) dado lanzado 1000 veces y (13d) dado lanzado 10,000 veces

Como se puede observar, al inicio, cuando se tiene pocos lanzamientos como en (13a) la variación de las frecuencias son mayores, y conforme los lanzamientos aumentan, los resultados comienzan a ser similares en cada valor del dado. En (13d) el histograma es casi recto, indicando que de los 10000 lanzamientos se obtiene casi la misma cantidad de veces un 1, un 2 o un 3.

## 5.2 Accidente Challenger

El accidente del transbordador espacial Challenger se produjo el martes 28 de enero de 1986, cuando el transbordador espacial Challenger (misión STS-51-L) se desintegró 73 segundos después del lanzamiento, provocando la muerte de los siete miembros de la tripulación. La nave se desintegró sobre el océano Atlántico, frente a la costa del centro de Florida (Estados Unidos) a las 11:38 EST (16:38 UTC).

La desintegración del vehículo entero comenzó después de que una junta tórica (goma que impide el intercambio de líquido o gases en las uniones entre piezas desmontables) de su cohete acelerador sólido (SRB) derecho fallara durante el despegue. El fallo de la junta tórica causó la apertura de una brecha, permitiendo que el gas caliente presurizado del interior del motor del cohete sólido saliera al exterior y contactara con la estructura adyacente de conexión con el SRB y el tanque externo de combustible. Esto provocó la separación de la conexión posterior del SRB derecho y el fallo estructural del depósito externo. Las fuerzas aerodinámicas destruyeron rápidamente el orbitador.

### 5.3 ¿Cómo se compacta el mp3?

MPEG-1 Audio Layer III o MPEG-2 Audio Layer III, más comúnmente conocido como MP3 es un formato de compresión de audio digital patentado que usa un algoritmo con pérdida para conseguir un menor tamaño de archivo. Es un formato de audio común usado para música tanto en ordenadores como en reproductores de audio portátil.

Los archivos MPEG-1 corresponden a las velocidades de muestreo de 32, 44.1 y 48 kHz.

Los archivos MPEG-2 corresponden a las velocidades de muestreo de 16, 22.05 y 24 kHz.

MP3 fue desarrollado por el Moving Picture Experts Group (MPEG) para formar parte del estándar MPEG-1 y del posterior y más extendido MPEG-2. Un MP3 creado usando una compresión de 128kbit/s tendrá un tamaño de aproximadamente unas 11 veces menor que su homónimo en CD. Un MP3 también puede comprimirse usando una mayor o menor tasa de bits por segundo, resultando directamente en su mayor o menor calidad de audio final, así como en el tamaño del archivo resultante.

En esta capa existen varias diferencias respecto a los estándares MPEG-1 y MPEG-2, entre las que se encuentra el llamado banco de filtros para que el diseño tenga mayor complejidad. Esta mejora de la resolución frecuencial empeora la resolución temporal introduciendo problemas de pre-eco que son predichos y corregidos. Además, permite calidad de audio en tasas tan bajas como 64 kbps.

#### Banco de Filtros

El banco de filtros utilizado en esta capa es el llamado banco de filtros híbrido polifase/MDCT. Se encarga de realizar el mapeado del dominio del tiempo al de la frecuencia tanto para el codificador como para los filtros de reconstrucción del decodificador. Las muestras de salida del banco están cuantificadas y proporcionan una resolución en frecuencia variable, 6x32 o 18x32 subbandas, ajustándose mucho mejor a las bandas críticas de las diferentes frecuencias. Usando 18 puntos, el número máximo de componentes frecuenciales es:  $32 \times 18 = 576$ . Dando lugar a una resolución frecuencial de:  $24000/576 = 41,67$  Hz (si  $f_s = 48$  kHz.). Si se usan 6 líneas de frecuencia la resolución frecuencial es menor, pero la temporal es mayor, y se aplica en aquellas zonas en las que se espera efectos de pre-eco (transiciones bruscas de silencio a altos niveles energéticos).

La Capa III tiene tres modos de bloque de funcionamiento: dos modos donde las 32 salidas del banco de filtros pueden pasar a través de las ventanas y las transformadas MDCT y un modo de bloque mixto donde las dos bandas de frecuencia más baja usan bloques largos y las 30 bandas superiores usan bloques cortos. Para el caso concreto del MPEG-1 Audio Layer 3 (que concretamente significa la tercera capa de audio para el estándar MPEG-1) especifica cuatro tipos de ventanas: (a) NORMAL, (b) transición de ventana larga a corta (START), (c) 3 ventanas cortas (SHORT)

#### Modelo Psicoacústico

La compresión se basa en la reducción del margen dinámico irrelevante, es decir, en la incapacidad del sistema auditivo para detectar los errores de cuantificación en condiciones de enmascaramiento. Este estándar divide la señal en bandas de frecuencia que se aproximan a las bandas críticas, y luego cuantifica cada subbanda en función del umbral de detección del ruido dentro de esa banda. El modelo psicoacústico es una modificación del empleado en el esquema II, y utiliza un método denominado predicción polinómica. Analiza la señal de audio y calcula la cantidad de ruido que se puede introducir en función de la frecuencia, es decir, calcula la cantidad de enmascaramiento o umbral de enmascaramiento en función de la frecuencia.

El codificador usa esta información para decidir la mejor manera de gastar los bits disponibles. Este estándar provee dos modelos psicoacústicos de diferente complejidad: el modelo I es menos complejo que el modelo psicoacústico II y simplifica mucho los cálculos. Estudios demuestran que la distorsión

generada es imperceptible para el oído experimentado en un ambiente óptimo desde los 192 kbps y en condiciones normales.[cita requerida] Para el oído no experimentado, o común, con 128 kbps o hasta 96 kbps basta para que se oiga "bien" (a menos que se posea un equipo de audio de alta calidad donde se nota excesivamente la falta de graves y se destaca el sonido de "fritura" en los agudos). Las personas que tienen experiencia en la parte auditiva de archivos digitales de audio, especialmente música, desde 192 hasta 256 kbps basta para oír bien, pero la compresión en 320 kbps es la óptima para cualquier escucha.[cita requerida]. La música que circula por Internet, en su mayoría, está codificada entre 128 y 192 kbps, aunque hoy debido al aumento de ancho de banda es cada vez más frecuente compartir archivos en calidad máxima de compresión.

## 5.4 Máquina Enigma

Enigma era el nombre de una máquina que disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio, que permitía usarla tanto para cifrar como para descifrar mensajes. Varios de sus modelos fueron muy utilizados en Europa desde inicios de los años 1920.

La máquina Enigma fue un dispositivo electromecánico, lo que significa que usaba una combinación de partes mecánicas y eléctricas. El mecanismo estaba constituido fundamentalmente por un teclado similar al de las máquinas de escribir cuyas teclas eran interruptores eléctricos, un engranaje mecánico y un panel de luces con las letras del alfabeto.

La parte eléctrica consistía en una batería que encendía una lámpara de una serie de ellas, que representan cada una de las diferentes letras del alfabeto. Se puede observar en la parte inferior de la imagen adjunta el teclado, y las lámparas son los circuitos que aparecen encima de éste.

El corazón de la máquina Enigma era mecánico y constaba de varios rotores conectados entre sí. Cada rotor es un disco circular plano con 26 contactos eléctricos en cada cara, uno por cada letra del alfabeto. Cada contacto de una cara está conectado o cableado a un contacto diferente de la cara contraria. Por ejemplo, en un rotor en particular, el contacto número 1 de una cara puede estar conectado con el contacto número 14 en la otra cara y el contacto número 5 de una cara con el número 22 de la otra. Cada uno de los cinco rotores proporcionados con la máquina Enigma estaba cableado de una forma diferente y los rotores utilizados por el ejército alemán poseían un cableado distinto al de los modelos comerciales.

Dentro de la máquina había, en la mayoría de las versiones, tres ranuras para alojar los rotores. Cada uno de los rotores se encajaba en la ranura correspondiente de forma que sus contactos de salida se conectaban con los contactos de entrada del rotor siguiente. El tercer y último rotor se conectaba, en la mayoría de los casos, a un reflector que conectaba el contacto de salida del tercer rotor con otro contacto del mismo rotor para realizar el mismo proceso pero en sentido contrario y por una ruta diferente. La existencia del reflector diferencia a la máquina Enigma de otras máquinas de cifrado de la época basadas en rotores. Este elemento, que no se incluía en las primeras versiones de la máquina, posibilitaba que la clave utilizada para el cifrado se pudiera emplear en el descifrado del mensaje. Se pueden observar en la parte superior de la imagen los tres rotores con sus correspondientes protuberancias dentadas que permitían girarlos a mano, colocándolos en una posición determinada.

Cuando se pulsaba una tecla en el teclado, por ejemplo la correspondiente a la letra A, la corriente eléctrica procedente de la batería se dirigía hasta el contacto correspondiente a la letra A del primer rotor. La corriente atravesaba el cableado interno del primer rotor y se situaba, por ejemplo, en el contacto correspondiente a la letra J en el lado contrario. Supongamos que este contacto del primer rotor estaba alineado con el contacto correspondiente a la letra X del segundo rotor. La corriente llegaba al segundo rotor y seguía su camino a través del segundo y tercer rotor, el reflector y de nuevo a través de los tres

rotores en el camino de vuelta. Al final del trayecto, la salida del primer rotor se conectaba a la lámpara correspondiente a una letra, distinta de la A, en el panel de luces. El mensaje de cifrado se obtenía por tanto sustituyendo las letras del texto original por las proporcionadas por la máquina.

## 6 Tarea No.6

### 6.1 Mínimos Cuadrados

Una recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos es una línea recta que es la mejor aproximación del conjunto de datos dado. Dicha recta puede ser determinada aproximadamente usando el método visual, al dibujar una línea recta en una gráfica de dispersión para que tanto el número de puntos arriba de la recta y debajo de la recta sean casi iguales (La línea pasa a través de tantos puntos como sea posible).

Una forma más precisa de encontrar la recta que mejor se ajusta es el método de mínimos cuadrados, la cual es una técnica de análisis numérico enmarcada dentro de la optimización matemática, en la que dados un conjunto de pares ordenados: variable independiente, variable dependiente y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un mejor ajuste) de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático.

En su forma más simple, intenta minimizar la suma de cuadrados de las diferencias en las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores de los datos. La técnica de mínimos cuadrados se usa comúnmente en el ajuste de curvas.

#### *Formulación*

Sea  $(x_k, y_k)_{k=1}^n$  un conjunto de puntos en el plano real y sea  $f_j(x)_{j=1}^m$  una base de  $m$  funciones linealmente independiente en un espacio de funciones. Queremos encontrar una función  $f(x)$  que sea combinación lineal de las funciones base, de modo que  $f(x_k) \approx y_k$ , esto es:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x) \quad (22)$$

Por tanto, se trata de hallar los  $m$  coeficientes de  $c_j$  que hagan la función aproximante  $f(x)$  dé la mejor aproximación para los puntos dados  $(x_k, y_k)$ . En primer lugar, el error de la función  $f(x)$  en un solo punto,  $x_k, y_k$ , se define como:

$$e_k = y_k - f(x_k) \quad (23)$$

Dicho error (error total) suele definirse con alguna de las siguientes fórmulas:

Error máximo:

$$E_{\infty}(f) = \max(|e_k|) \quad (24)$$

Error Medio:

$$E_m(f) = \frac{\sum_{k=1}^n |e_k|}{n} \quad (25)$$

Error cuadrático medio:

$$E_{cm}(f) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (e_k)^2}{n}} \quad (26)$$

La aproximación por mínimos cuadrados se basa en la minimización del error cuadrático medio o minimización del radicando de dicho error. Dicho error se define como:

$$E_c(f) = \frac{\sum_{k=1}^n (e_k)^2}{n} \quad (27)$$

Para alcanzar este objetivo, se utiliza el hecho que la función  $f$  debe poder describirse como una combinación lineal de una base de funciones. Los coeficientes de la combinación lineal serán los parámetros que debemos determinar. Por ejemplo, supongamos que  $f$  es una función cuadrática, lo que quiere decir que

es una combinación lineal,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , de las funciones  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = x$  y  $f_3(x) = 1$  y que se pretende determinar los valores de los coeficientes: a,b,c, de modo que se minimicen la suma S de los cuadrados de los residuos [?]:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \quad (28)$$

## 6.2 Densidad de Probabilidad

La función de densidad de probabilidad, función de densidad, o simplemente, densidad de una variable aleatoria continua describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable tomará un determinado valor.

Designando por f a la función de densidad X, distinguiremos el caso discreto, donde los posibles valores de X forman un conjunto discreto(finito o numerable), del continuo, donde el recorrido de la variable aleatoria es un intervalo de la recta real:

- Si X es discreta, su función de densidad se define por:

$$f(x) = p(X = x), \quad (29)$$

Cualquiera que sea el valor de x.

- En el caso de X sea continua, su función de densidad debe permitir expresar F, la función de distribución de probabilidad de X, en la forma integral:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (30)$$

Para cualquier valor de x, donde  $f : R \rightarrow R$  es una función no negativa integrable.

### 6.3 Resolución de una ecuación cuadrática en GCC

GCC es una herramienta para Linux que nos permite compilar y programar en language C, C++ sin la necesidad de emplear comandos o librerías diferentes, lo unico que se necesita es un editor de texto como gedit, nano, etc.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main()
{
    printf("\nProbabilidad , procesos aleatorios e inferencia\n");
    printf(" Autor: Edgar Daniel Garcia Serrano\n");
    printf(" Programa que resuelve una ecuacion cuadratica\n\n");
    printf("FORMA GENERAL DE LA ECUACION CUADRATICA:  $ax^2+bx+c=0$ \n");

    float a=0,b=0,c=0,x1=0,x2=0,r=0 ,n=0, m=0;;
    printf(" Valor de a:\n");
    scanf("%f",&a);
    printf(" Valor de b\n");
    scanf("%f",&b);
    printf(" Valor de c\n");
    scanf("%f",&c);
    //printf("Tu ecuacion es:  $%fx^2+%fx+%f=0$ ",a,b,c);
    //operaciones para x1

    r=(b*b)-(4*a*c);

    if(r<0)
    {
        n=2*a;
        m=(-b)/n;
        r=-r;
        printf(" x1= $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{r}}{2a}$ \n",m,r,n);
        printf(" x2= $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{r}}{2a}$ \n",m,r,n);
    }
    else
    {
        x1=(-b)+sqrt(r)/(2*a);
        printf(" x1= $\frac{-b \pm \sqrt{r}}{2a}$ \n",x1);

        x2= ((-b)-sqrt(r))/(2*a);
        printf(" x2= $\frac{-b \pm \sqrt{r}}{2a}$ \n",x2 );
    }
    return 0;
}
```

Para compilar el programa es necesario abrir la terminal o consola y emplear el comando de la forma: *gcc nombre del archivo -o nombre del ejecutable*. Escribir es puede verse sencillo, pero cuando se requiere compilar varias veces es incómodo estar escribiendo o buscando el código en la consola, lo que puede ser

resuelto creando un archivo *make*

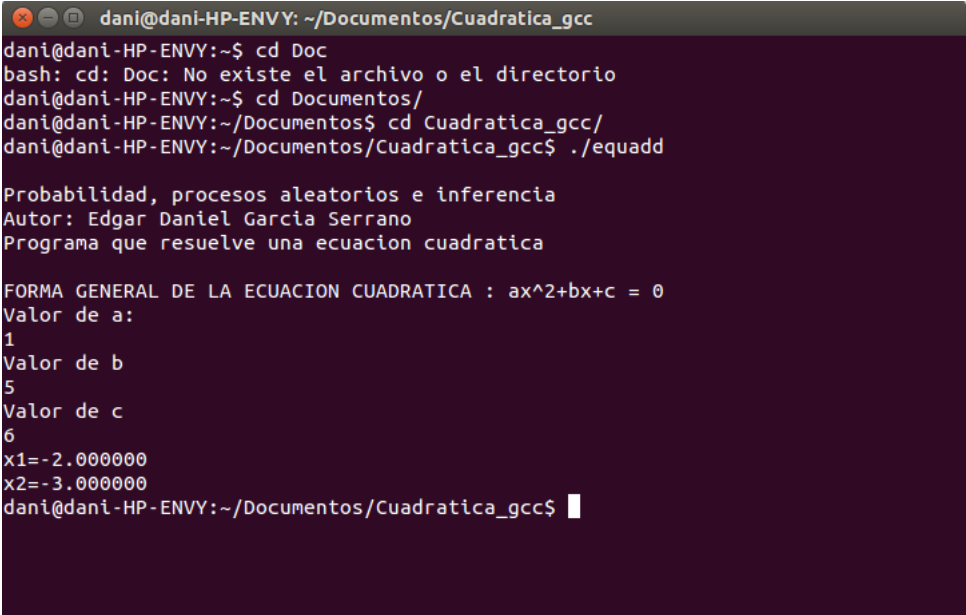
```
all: equad.o
    gcc -o equadd equad.o -lm

equad.o: equad.c
    gcc -c equad.c -lm

clean:
    rm -v *.o equadd

list:
    ls -la
```

Para crear el archivo make, basta con crear un archivo de texto vacío y guardarlo con el nombre de *Makefile* para llamarlo desde la terminal solo es necesario escribir *make* para compilar o *make clean* para remover los archivos que se crean al compilar. Para ejecutar el programa, en la consola hay que escribir sobre el directorio de trabajo `./nombre del archivo.c`



```
dani@dani-HP-ENVY: ~/Documentos/Cuadratica_gcc
dani@dani-HP-ENVY:~$ cd Doc
bash: cd: Doc: No existe el archivo o el directorio
dani@dani-HP-ENVY:~$ cd Documentos/
dani@dani-HP-ENVY:~/Documentos$ cd Cuadratica_gcc/
dani@dani-HP-ENVY:~/Documentos/Cuadratica_gcc$ ./equadd

Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia
Autor: Edgar Daniel Garcia Serrano
Programa que resuelve una ecuacion cuadratica

FORMA GENERAL DE LA ECUACION CUADRATICA : ax^2+bx+c = 0
Valor de a:
1
Valor de b
5
Valor de c
6
x1=-2.000000
x2=-3.000000
dani@dani-HP-ENVY:~/Documentos/Cuadratica_gcc$
```

Figure 14: Programa ejecutado en terminal



## 6.4 Programación en ROOT: Distribución de Gauss

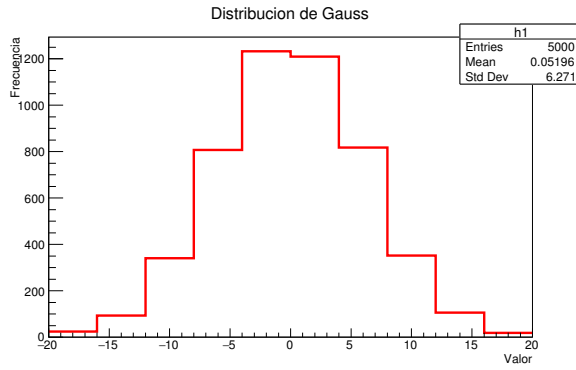
Podemos observar que conforme se aumentan los datos de entrada, la forma característica de la distribución de Gauss puede verse de manera más notoria.

```
void hist_gaus()
{
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Gauss",600,400);//crea canvas
    TH1F* h1=new TH1F("h1","Gauss",500,-20,20);
    TF1* f1 =new TF1("f1","gaus"); // crea una funcion f1 gaussiana
    f1->SetParameter(0, 1); //constante que multiplica la funcion
    f1->SetParameter(1, 0); //Media
    f1->SetParameter(2, 6); //Sigma

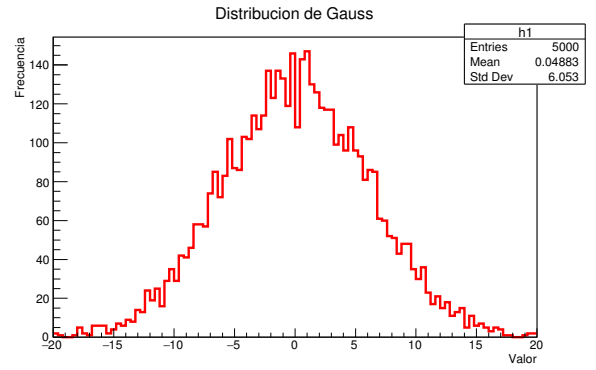
    h1->SetMinimum(0); //minimo valor mostrado
    h1->FillRandom("f1"); //llena el histograma con lo valores de f1
    h1->Draw(); //dibuja el histograma

    h1->SetLineColor(2);
    h1->SetLineWidth(1);
    h1->SetTitle("Distribucion de Gauss");
    h1->GetXaxis()->SetTitle("Valor");
    h1->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia");

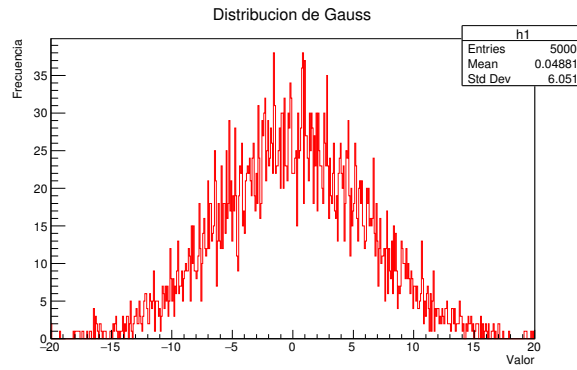
    c1->Update();
    c1->GetFrame()->SetFillColor(0);
    c1->Modified();
}
```



(a)



(b)



(c)

Figure 15: Resultados obtenidos mediante la simulación en ROOT (15a) distribución de Gauss con 10 datos de entrada, (15b) con 100 datos de entrada, (15c) con 500 datos de entrada

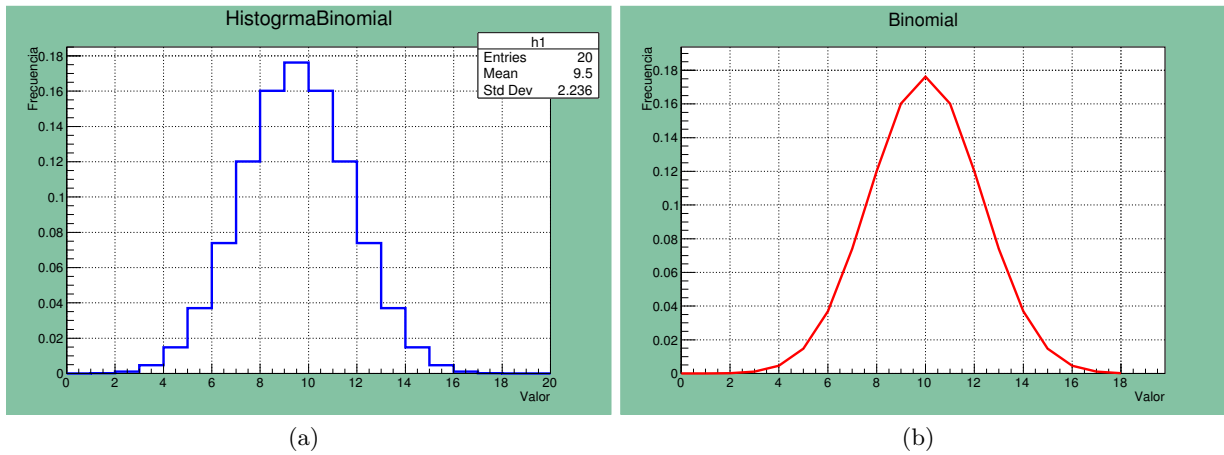


Figure 16: Simulación de la distribución binomial

## 6.5 Programación en ROOT: Distribución Binomial

```

void hist_gaus()
void binomial() {
//Grafica  $\ln(x!)$ 
//Edgar Daniel Garcia Serrano

    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Histograma_Binomial",200,1,700,500);
    TH1F* h1=new TH1F("h1","Binomial",20,0,20);
    h1->SetMinimum(0);           //minimo valor mostrado
    c1->SetFillColor(30);        //Cambia color al fondo
    c1->SetGrid();

    Double_t t,k,l,x;
    const Int_t n = 20;
    Double_t z[n], y[n],m[n];
    Int_t i=0;

    for(Int_t g=1;g<n;g++)
    {
        x=g;
        t=x-1;
        k=20-x;
        l=k-1;
        if(t==0){t=1;
        }
        if(l<1){l=1;
        }
        while(t>0)
        {
            x=x*t;
            t=t-1;
        }
        while(l>1)

```

```

    {
        k=k*1;
        l=l-1;
    }
    i=i+1;
    z[0]=0;
    y[0]=0;
    z[i]=i;
    y[i]=((2432902008000000000)/(x*k))/(1048576);
    //printf("%e\n",y[i]);
}
h1->SetBinContent(1,y[1]);
h1->SetBinContent(2,y[2]);
h1->SetBinContent(3,y[3]);
h1->SetBinContent(4,y[4]);
h1->SetBinContent(5,y[5]);
h1->SetBinContent(6,y[6]);
h1->SetBinContent(7,y[7]);
h1->SetBinContent(8,y[8]);
h1->SetBinContent(9,y[9]);
h1->SetBinContent(10,y[10]);
h1->SetBinContent(11,y[11]);
h1->SetBinContent(12,y[12]);
h1->SetBinContent(13,y[13]);
h1->SetBinContent(14,y[14]);
h1->SetBinContent(15,y[15]);
h1->SetBinContent(16,y[16]);
h1->SetBinContent(17,y[17]);
h1->SetBinContent(18,y[18]);
h1->SetBinContent(19,y[19]);
h1->SetBinContent(20,0);

h1->SetLineColor(4);
h1->SetLineWidth(3);
h1->SetTitle("HistrogrmaBinomial");
h1->GetXaxis()->SetTitle("Valor");
h1->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia");
h1->Draw(); //dibuja el histograma
c1->Update();
c1->GetFrame()->SetFillColor(0);
c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
c1->Modified();

TCanvas *c2 = new TCanvas("c2","Binomial",200,1,700,500);
TGraph *gr = new TGraph(i,z,y);
c2->SetFillColor(30); //Cambia color al fondo
c2->SetGrid();
gr->SetLineColor(2);
gr->SetLineWidth(3);
gr->SetTitle("Binomial");

```

```
gr->GetXaxis()->SetTitle("Valor");  
gr->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia");  
gr->Draw();
```

```
c2->Update();  
c2->GetFrame()->SetFillColor(0);  
c2->GetFrame()->SetBorderSize(12);  
c2->Modified();
```

```
}
```

## 7 Tarea No.7

### 7.1 Demostraciones

- Demostrar  $\overline{\Delta u} = \overline{u - \bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0$

Partiendo de la ecuación

$$\Delta u = u - \bar{u} \quad (31)$$

El promedio de (31) se denota como

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \bar{u}} \quad (32)$$

Sabiendo que el promedio es

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^M P(u_i)(u_i) \quad (33)$$

Aplicando el concepto de la ecuación (33) tenemos

$$\overline{\Delta u} = \sum_{i=0}^M P(u_i)(u_i - \bar{u}_i) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta u} &= \sum_{i=0}^M P(u_i)u_i - \sum_{i=0}^M P(u_i)\bar{u} \\ &= \sum_{i=0}^M P(u_i)u_i - \bar{u} \sum_{i=0}^M P(u_i) \end{aligned} \quad (35)$$

Sabemos que  $\sum_{i=1}^M P(u_i) = 1$ , por lo que sustituyendo en (35)

$$\begin{aligned} \overline{\Delta u} &= \bar{u} - (1)\bar{u} \\ \overline{\Delta u} &= \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad \square \end{aligned} \quad (36)$$

- Demostrar  $\overline{(\Delta u)^2} = \sum_{i=0}^M P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0$

Partiendo de la ecuación (31), y elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado

$$(\Delta u)^2 = (u - \bar{u})^2 \quad (37)$$

$(\Delta u)^2$  es siempre positivo o mayor que 0, entonces

$$(\Delta u)^2 = (u - \bar{u})^2 \geq 0 \quad (38)$$

Asi que, obteniendo el promedio de  $(\Delta u)^2$

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta u)^2} &= \overline{(u - \bar{u})^2} \geq 0 \\ \overline{(\Delta u)^2} &= \sum_{i=1}^M P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0 \quad \square \end{aligned} \quad (39)$$

- Demostrar  $\overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{u^2} - \bar{u}^2$

Partiendo de la ecuación (37), se puede desarrollar le binomio del lado derecho de la ecuación

$$(\Delta u)^2 = (u - \bar{u})^2 = u^2 - 2u\bar{u} + (\bar{u})^2 \quad (40)$$

Obteniendo el promedio de la función se tiene

$$\begin{aligned} \overline{(u - \bar{u})^2} &= \overline{u^2 - 2u\bar{u} + (\bar{u})^2} \\ &= \overline{u^2} - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2 \\ \overline{(u - \bar{u})^2} &= \overline{u^2} - \bar{u}^2 \quad \square \end{aligned} \quad (41)$$

- Demostrar  $\overline{u^2} \geq \bar{u}^2$

Dado que  $\overline{(\Delta u)^2} \geq 0$  y  $\overline{(\Delta u)^2} = \overline{u^2} - \bar{u}^2$  como se mostró anteriormente. Entonces:

$$\overline{u^2} - \bar{u}^2 \geq 0 \quad (42)$$

Resolviendo la desigualdad se demuestra que:

$$\overline{u^2} \geq \bar{u}^2 \quad \square \quad (43)$$

## 7.2 Análisis de componentes

El análisis de componentes principales es un método algebraico y estadístico que trata de sintetizar y dar una estructura a la información contenida en una matriz de datos.

[?]

Dadas  $n$  observaciones de  $p$  variables, se analiza si es posible representar adecuadamente esta información con un número menor de variables construidas como combinaciones lineales de las originales. Para estudiar las relaciones que se presentan entre  $p$  variables correlacionadas se puede transformar el conjunto original de variables en otro conjunto de nuevas variables independientes entre sí, llamado conjunto de componentes principales. *Por ejemplo: con variables con alta dependencia es frecuente que un pequeño número de nuevas variables (menos de 10 por 100 de las originales) expliquen la mayor parte (más del 80 por 100 de la variabilidad original)*

### Cálculo de componentes

Se considera una serie de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  y se trata de calcular, a partir de ellas, un nuevo conjunto de variables  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$  independientes entre sí y cuyas varianzas vayan decreciendo progresivamente. cada variable  $y_j$  (donde  $j= 1, 2, \dots, p$ ) es una combinación lineal de las variables  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  originales, es decir:

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p = a'_j x \quad (44)$$

siendo  $a'_j = a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jp}$  un vector de constantes. Obviamente, si queremos maximizar la varianza, una forma simple puede ser aumentar los coeficientes del vector  $a'_j$ . Por ello, para mantener la ortogonalidad de la transformación se impone que el módulo del vector  $a'_j$  sea 1. Es decir:

$$a'_j a_j = \sum_{k=1}^p a_{kj}^2 = 1 \quad (45)$$

- El primer componente se calcula eligiendo  $a_1$  de modo que  $y_1$  tenga mayor varianza, sujeta a la restricción  $a'_1 a_1 = 1$ .
- El segundo componente principal se calcula obteniendo  $a_2$  de modo que la variable obtenida,  $y_2$ , sea independiente de  $y_1$
- Del mismo modo se eligen las siguientes variables. independientes entre sí, y de manera que las variables aleatorias obtenidas vayan teniendo cada vez menor varianza.

### Proceso de extracción de factores

Se elige  $a_1$  de modo que se maximice la varianza de  $y_1$  que cumpla con la restricción  $a'_1 a_1 = 1$ .

$$Var(y_1) = Var(a'_1 x) = a'_1 \Sigma a_1 \quad (46)$$

Se introduce la restricción mediante los multiplicadores de Lagrange. Se puede observar que la incógnita es  $a_1$ , el cual es un vector desconocido que da la combinación lineal óptima. De éste modo se contruye la función:

$$L(a_1) = a'_1 \Sigma a_1 - \lambda(a'_1 a_1 - 1) \quad (47)$$

Para maximizar la función se deriva con respecto a la variable y se iguala con 0

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2\Sigma a_1 - 2\lambda I a_1 = 0 \implies (\Sigma - \lambda I) a_1 = 0 \quad (48)$$



Lo anterior es un sistema lineal de ecuaciones. Para que el sistema tenga una solución distinta de 0, la matriz  $(\Sigma - \lambda I)$  tiene que ser singular, lo que implica que su determinante debe ser igual a cero. De este modo  $\lambda$  es un autovalor de  $\Sigma$ . La matriz de covarianza  $\Sigma$  es de orden  $p$  y si es definida positiva, tendrá  $p$  autovalores distintos, tales que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$

Desarrollando la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}(\Sigma - \lambda I)a_1 &= 0 \\ \Sigma a_1 - \lambda I a_1 &= 0 \\ \Sigma a_1 &= \lambda I a_1\end{aligned}\tag{49}$$

Se toma entonces el mayor autovalor y su correspondiente autovector para maximizar la varianza de  $y_1$ . El razonamiento anterior se puede extender, de modo que al  $j$ -ésimo componente le correspondería el  $j$ -ésimo autovalor. Entonces todos los componentes  $y$  se pueden expresar como el producto de una matriz formada por los autovectores, multiplicada por el vector  $x$

$$y = Ax\tag{50}$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\tag{51}$$

La matriz de covarianza será

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}\tag{52}$$

### 7.3 Ejemplos de mínimos cuadrados

1. Use el método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación de la recta que mejor se ajusta para los datos.

x	8	2	11	6	5	4	12	9	6	1
y	3	10	3	6	8	12	1	4	9	14

Se calculan las medias de los valores de  $x$  y los valores de  $y$ , la suma de los cuadrados de los valores de  $x$ , y la suma de cada valor de  $x$  multiplicado por su valor correspondiente  $y$ .

$x$	$y$	$xy$	$x^2$
8	3	24	64
2	10	20	4
11	3	33	121
6	6	36	36
5	8	40	25
4	12	48	16
12	1	12	144
9	4	36	81
6	9	54	36
1	14	14	1
$\sum x = 64$	$\sum y = 70$	$\sum xy = 317$	$\sum x^2 = 528$

Se calcula la pendiente.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \\
 &= \frac{317 - \frac{(64)(70)}{10}}{528 - \frac{(64)^2}{10}} \\
 &\approx -1.1
 \end{aligned}$$

Para calcular la intersección de  $y$  primero se calcula la media de  $x$  y  $y$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} = \frac{64}{10} = 6.4 \\
 \bar{y} &= \frac{\sum y}{n} = \frac{70}{10} = 7.0
 \end{aligned}$$

Finalmente se calcula la intersección en  $y$  para formar la ecuación de la recta que más se ajusta a los datos.

$$\begin{aligned}
 b &= \bar{y} - m\bar{x} \\
 &= 7.0 - ((-1.1)(6.4)) \\
 &= 7.0 + 7.04 \approx 14.0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación es  $y = -1.1x + 14$

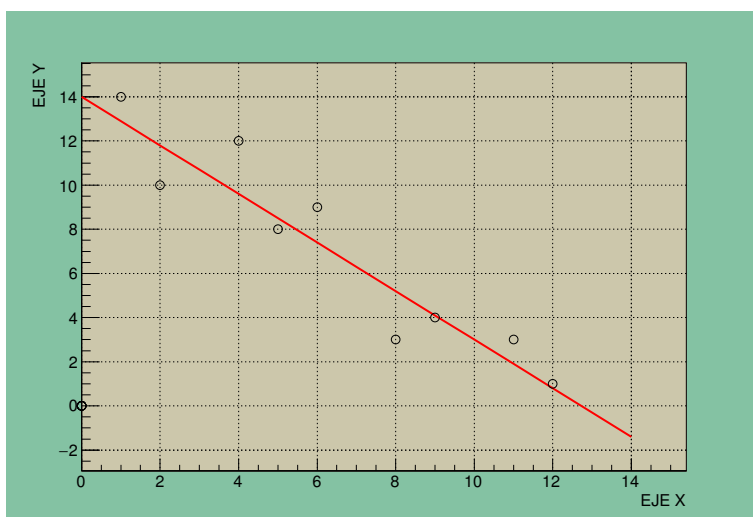


Figure 17: Ejemplo1: Mínimos cuadrados, función lineal

2. Ajustar una función potencial a la siguiente información, correspondiente al periodo de oscilación de un sistema resorte-masa:

m(kg)	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
T(s)	0.34	0.47	0.58	0.66	0.74	0.84	0.90

El digrama de dispersión sugiere una relación de la forma  $T = Km^n$ ; en este caso  $0 < n < 1$ . La ecuación se puede escribir como  $T = am^b$ . Aplicando logaritmo a esta expresión:

$$\log T = \log a + b \log m$$

Las ecuaciones normales toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} A \log T &= n \log a + bS \log m \\ S \log m \log T &= \log a(S \log m) + bS(\log m)^2 \end{aligned}$$

EL siguiente cuadro contiene los valores logaritmicos necesario para resolver las ecuaciones normales.

$m_i$	$T_i$	$\log m$	$\log T$	$\log m(\log T)$	$(\log m)^2$	$\log T_c$
0.2	0.34	-0.69897	-0.46852	0.32748	0.48856	0.335
0.4	0.47	-0.39794	-0.32790	0.13049	0.15836	0.474
0.6	0.58	-0.22185	-0.23457	0.05248	0.04921	0.581
0.8	0.66	-0.09691	-0.18045	0.01749	0.00939	0.671
1.0	0.74	-0.00000	-0.13077	0.0000	0.00000	0.750
1.2	0.84	0.07918	-0.07572	-0.00589	0.00627	0.822
1.4	0.90	0.141613	-0.04575	-0.00669	0.07135	0.887
—	S=	-1.19036	-1.46558	0.51526	0.73314	—

Sustituyendo en las ecuaciones normales, se tiene:

$$\begin{aligned} -146558 &= 7 \log a - 1.19036b \\ 0.51526 &= 1.19036 \log a + 0.73314b \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} b &= 0.50 \\ a &= 0.75 \end{aligned}$$

De acuerdo a estos valores, se puede escribir  $T = 0.75m^{0.50}$

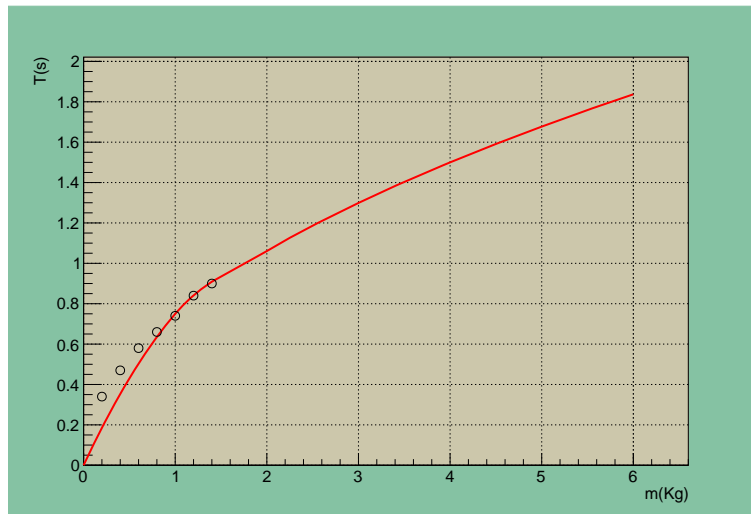


Figure 18: Ejemplo 2: Minimos cuadrados, función logarítmica

## 8 Tarea No.8

### 8.1 Valores y vectores propios

En álgebra lineal, los vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de si mismos, con lo que no cambian su dirección.

*Definición:*

Sea  $A$  una matriz cuadrada de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x$  un vector columna de  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda$  un escalar (real o complejo) que satisfacen:

$$Ax = \lambda x \quad (53)$$

Los escalares  $\lambda$  que cumplen con (53) se llaman **autovalores** o valores propios, y los vectores  $x \neq 0$  que satisfacen la ecuación se llaman **autovectores** o vectores propios.

#### Multiplicidad

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  los valores propios de una matriz  $A$ . El número de veces que un autovalor  $\lambda$  se repite como raíz del polinomio característico se llama **multiplicidad algebraica** y se representa por  $P_a(\lambda)$ .

El número máximo de autovectores linealmente independientes que tiene asociado un autovalor  $\lambda$ , es decir la dimensión de  $N(A - \lambda I)$ , se llama **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$  y se representa por  $V_g(\lambda)$ . Ambos números están relacionados por una desigualdad:

$$V_g(\lambda) \leq P_a(\lambda) \quad (54)$$

En la desigualdad anterior se encuentra la clave de que una matriz sea diagonalizable: si algún autovalor verifica  $V_g(\lambda) < P_a(\lambda)$  entonces la matriz  $A$  no puede ser diagonalizable.

#### Matriz singular

Una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden  $n$ , llamada matriz inversa de  $A$  y representada como  $A^{-1}$ . tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad (55)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

Una matriz no invertible se dice que es **singular o degenerada**. Una matriz es singular si y solo si su determinante es nulo.

## 8.2 Traza de una matriz

Sea una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ , se define la traza de la matriz  $A$  y se denota por  $tr(A)$  al valor obtenido al sumar todos los elementos de la diagonal principal, es decir:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (56)$$

Por ejemplo: obtener la traza de la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$tr(A) = 1 + 1 + 0 = 2$$

### Propiedades

Sean  $A, B$  dos matrices cuadradas de orden  $n$  y sea  $\alpha$  un número real. Entonces:

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$  siempre que  $A$  y  $B$  sean multiplicables aunque  $AB \neq BA$
- Si  $A$  tiene inversa,  $tr(A^{-1}) \neq 1/tr(A)$

## 8.3 Matriz traspuesta

Se llama matriz traspuesta de una matriz  $A$  de dimension  $m \times n$  a la matriz que se obtiene al cambiar en  $A$ , las filas por columnas o columnas por fila. Se representa por  $A^t$  y su dimension es  $n \times m$ .

### Propiedades

$$(A^t)^t = A \quad (57)$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (58)$$

$$(kA)^t = kA^t \quad (59)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (60)$$

## 8.4 Teorema de Cayley-Hamilton

El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada  $A$  satisface su ecuación característica: Si  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  es el polinomio característico de  $A$ , entonces  $p(A)$  es la matriz nula.

Sea el polinomio característico de una matriz  $A$  de orden  $n$ .

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + c_{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 \quad (61)$$

Entonces

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^{n-2} + \cdots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I \quad (62)$$

es la matriz nula. Es decir, cada matriz cuadrada  $A$  satisface su ecuación característica  $p(A) = 0$ .

Un corolario importante del teorema de Cayley-Hamilton afirma que el polinomio mínimo de una matriz dada es un divisor de su polinomio característico, y no solo eso, el polinomio mínimo tiene los mismos factores irreducibles que el polinomio característico.

## 8.5 Eigenvalores y eigenvectores con multiplicidad (Ejemplos)

- **Ejemplo 1** Sea  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  Calcular sus Eigen valores.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$  en la ecuacion siguiente:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\vec{v} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 5 - 2 & -3 \\ 3 & -1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- **Ejemplo 2** Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$  Calcular sus Eigen valores.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= (1 - \lambda)(-4 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 + 9 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 \\ &\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda_1$  en la ecuacion siguiente:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\vec{v} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 + 5 & 2 \\ 3 & -4 + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda_2$  en la ecuacion siguiente:

$$(\lambda I - A)\vec{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ 3 & -4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 3** Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$  Calcular sus Eigen valores.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \left( \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= (1-\lambda)(-7-\lambda) - 16 = (\lambda+3)^2 = \\ &\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$  en la ecuacion siguiente:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) \vec{v} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1+3 & -4 \\ 4 & -7+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 4**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -10 & \lambda+4 & -5 \\ -5 & 4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

EL determinante de la matriz esta dado por el polinomio característico:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$



Cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1 \lambda_3 = 2$$

Si sustituimos  $\lambda_1$  y  $\lambda_3$  en  $(\lambda I - A)$ , entonces los vectores propios son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## 9 Aplicación: Teorema de Cayley-Hamilton

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de  $A$  es  $C_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ . Se calcula  $C_A(A)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2 & -3-1 \\ 6+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_A(A) = A^2 - 4A + 5I = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que para toda matriz  $A \in M_n(F)$

$$C_A(A) = 0_{n,n}$$

## 10 Tarea No.10

### 10.1 Generación de matrices en R

Para crear una matriz en R se utiliza la función

```
matrix(data=NA, nrow=1, ncol=1, byrow= FALSE, dimnames=NULL)
```

donde `matrix()` corresponde al nombre de la función y todo lo que está dentro de los paréntesis son los argumentos de dicha función.

Argumentos

- `data` - Es un vector de datos opcional
- `nrow` - número deseado de filas
- `ncol` - número deseado de columnas
- `byrow` - valor lógico. Si es `valso`(valor por defecto), la matriz se llena por orden columna, de otra manera se llenará primero por filas
- `dimnames` - utilizado para darles nombres a las filas ya las columnas, respectivamente.

*Ejemplo*

```
matrix(c(5,7,13,4,1,7,14,3,11), nrow=3, ncol=3, byrow=FALSE,  
dimnames=list(c("blanco", "negro", "rojo"), c("toyota", "audi", "nissan")))
```

	<i>toyota</i>	<i>audi</i>	<i>nissan</i>
<i>blanco</i>	5	4	14
<i>negro</i>	7	1	3
<i>rojo</i>	13	7	11

Se hubiera obtenido el mismo resultado si sólo se escribe uno de los argumentos `nrow=3` o `ncol=3`, no hace falta escribir los dos.

#### Agregar filas y columnas

Para agregar una fila a una matriz ya existente, se debe utilizar la función `rbind()` y se usará la función `cbind()` para añadir columnas a una matriz. Ejemplo:

```
A <- -c(8, 5, 7) # con esto se crea un vector  
M <- -rbind(M, A) # Agrega A a la matriz como fila
```

## 10.2 Función "lm"

Esta función sirve para el cálculo y representación de la recta de mínimos cuadrados. el primer argumento de este comando es una fórmula  $y \sim x$  en la que se especifica cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente. En el segundo argumento, llamdo *data* especifica cuál es el fichero en el que se encuentran las variables. Ejemplo

```
x <- c(8, 2, 11, 6, 5, 4, 12, 9, 6, 1)
y <- c(3, 10, 3, 6, 8, 12, 1, 4, 9, 14)
plot(x,y,main="Ejemplo 1 de minimos cuadrados")
cor(x,y)
dim <- lm(y ~ x)
lm(formula = y ~ x)
abline(dim)
summary(dim)
```

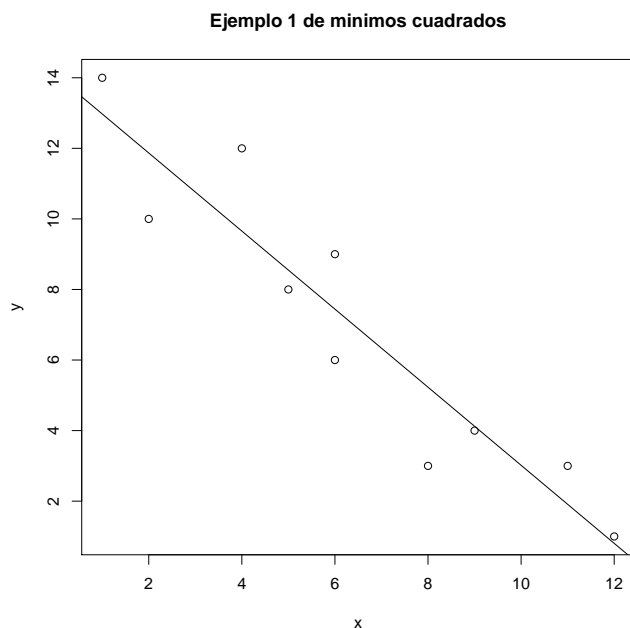


Figure 19: Función lm, ejemplo 1: mínimos cuadrados

## 11 Tarea No.11

### 11.1 Coeficientes de correlación de Pearson

En estadística, el coeficiente de correlación de Pearson es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, la correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables. En el caso de que se esté estudiando dos variables aleatorias  $x$  y  $y$  sobre una población; el coeficiente de correlación de Pearson se simboliza con la letra  $\rho_{x,y}$ , siendo la expresión que nos permite calcularlo:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (63)$$

Donde:

- $\sigma_{xy}$  es la covarianza de (X,Y)
- $\sigma_x$  es la desviación típica de la variable X
- $\sigma_y$  es la desviación típica de la variable Y

*Ejemplo*

Con los datos sobre las temperaturas en dos días diferentes en una ciudad, determinar el tipo de correlación que existe entre ellas mediante el coeficiente de PEARSON.

X	18	17	15	16	14	12	9	15	16	14	16	18	$S_x = 180$
Y	13	15	14	13	9	10	8	13	12	13	10	8	$S_y = 138$

Se calcula la media para X

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{180}{12} = 15$$

Se calcula la media para Y

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{138}{12} = 11.5$$

Obtenemos los siguientes datos:

X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$x^2$	xy	$y^2$
18	13	3	1.5	9	4.5	2.25
17	15	2	3.5	4	7	12.25
15	14	0	2.5	0	0	6.25
16	13	1	1.5	1	1.5	2.25
14	9	-1	-2.5	1	2.5	6.25
12	10	-3	-1.5	9	4.5	2.25
9	8	-6	-3.5	36	21	12.25
15	13	0	1.5	0	0	2.25
16	12	1	0.5	1	0.5	0.25
14	13	-1	1.5	1	-1.5	2.25
16	10	1	-1.5	1	-1.5	2.25
18	8	3	3.5	9	-10.5	12.25
$\Sigma = 180$	$\Sigma = 138$	-	-	$\Sigma = 72$	$\Sigma = 28$	$\Sigma = 63$

Para calcular la correlación:

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{28}{\sqrt{(72)(63)}} = 0.416$$

Lo que quiere decir que existe una correlación moderada entre las variables X y Y

## 12 Tarea No.12

### 12.1 Ln(x) por series de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como  $(x - a)^n$  llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto a suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Si esta serie está centrada sobre el punto cero,  $a = 0$ , se le denomina serie de McLaurin.

La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.

- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones.
- Es posible calcular la optimidad de la aproximación.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad.

La serie de Taylor de una función  $f$  real o compleja  $f(x)$  infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo  $a$  es la siguiente serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots \quad (64)$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como la siguiente suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n, \quad (65)$$

donde:

$n!$  es el factorial de  $n$

$f^{(n)}(a)$  denota la  $n$ -ésima derivada de  $f$  para el valor  $a$  de la variable respecto de la cual se deriva.

Para el calculo de la serie de Taylor de la función  $\ln(x)$  centrada en  $a = 1$  se procede por calcular las derivadas y a evaluar las funciones en  $f(1)$ . A continuacion se observan

$$f(x) = \ln(x) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} = -1^{-2} = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} = 2(1)^{-3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} = -6(1)^{-4} = -6 \dots etc$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots \\ & f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x - 1)^3 + \dots \\ & 0 + \frac{1}{1}(x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{2}{6}(x - 1)^3 + \frac{-6}{24}(x - 1)^4 + \dots \\ & (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

O en su forma de sumatoria queda :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}$$

### Gráfica en R

Para comprobar que la aproximación es correcta se procede a realizar un script en R que realice las graficas las aproximaciones usando hasta 5 terminos.

```
#serie taylor
x<-seq(0,5,.1)
y<-c(log(x))
y1<-c(x-1)
y2<-c((x-1) -((1/2)*(x-1)^2))
y3<- c((x-1) -((1/2)*(x-1)^2) +((1/3)*(x-1)^3) )
y4<- c((x-1) -((1/2)*(x-1)^2) +((1/3)*(x-1)^3) -((1/4)*(x-1)^4))
y5<- c((x-1) -((1/2)*(x-1)^2) +((1/3)*(x-1)^3) -((1/4)*(x-1)^4) +((1/5)*(x-1)^5))
plot(x,y,'l')
lines(x,y1,col='blue')
lines(x,y2,col='cyan')
lines(x,y3,col='tomato')
lines(x,y4,col='brown2')
lines(x,y5,col='blue')
```

El resultado es un gráfica como se muestra a continuación:

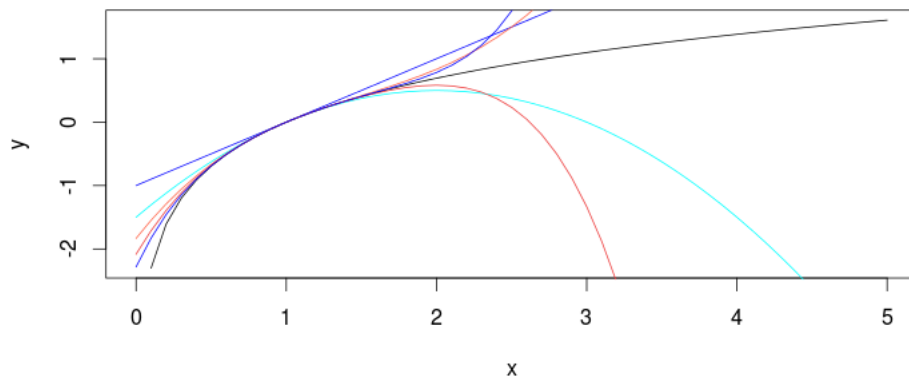


Figure 20: Aproximación de la funcion  $\ln(x)$  por serie de Taylor

Los primeros 2 componentes solo se aproximan al punto donde se centró la serie y que se requieren más terminos para abarcar más de la función a la que queremos aproximar.

## 13 Tarea No.13

### 13.1 Repositorios de los histograma

Los histogramas se usan para resaltar la diferencia entre las clases que se han agrupado los datos. Por tanto, para su construcción se necesita primero agrupar los datos en una tabla la cual se conoce como una

tabla de frecuencia. En el caso de datos numéricos continuos los datos se agrupan en intervalos o bins, como se dice en inglés. La frecuencia de un intervalo es el número de datos que se encuentran en él. Los intervalos deben poseer las siguientes características:

- 1 Todos deben ser del mismo ancho (class width).
- 2 No deben solapar.
- 3 Todos los datos deben caer en uno de las intervalos.
- 4 Deben haber un total de entre 5 y 15 intervalos.

Para preparar la tabla de frecuencia para un histograma, es necesario primero establecer el número de intervalos que se desea tener. Luego, se debe determinar el ancho común de los intervalos (interval width). Para esto, se calcula la diferencia del dato mayor y el dato menor, y se divide entre el número de intervalos deseados. Este resultado se redondea al entero mayor más cercano. Por ejemplo, si se desea tener 10 intervalos y encontramos que el dato mayor es 35 y el menor es 12, El ancho común se determina:

$$ancho_{bin} = \frac{35 - 12}{10} = 2.3 \approx 3$$

### 13.1.1 Ejemplos

En Mathematica se usa el comando "BinCounts" para determinar el ancho de las barras.

```
a = RandomInteger[{1, 6}, 100];
b = Sort[Tally[a] ] [[All, 2]] //
  MatrixForm (* muestra la frecuencia de los datos *)
BinCounts[a, \
{1, 6, 1}] (* para crear el histograma se requiere crear los bins por medio de clases *)
Histogram[a]
a = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], 1000];
BinCounts[a, {-3, 3, .5}]
Histogram[a]
```

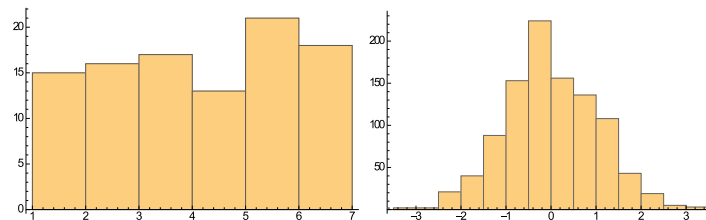


Figure 21: Histogramas generados por Mathematica.

## 13.2 Box and whisker plots

Los diagramas de Caja-Bigotes (boxplots o box and whiskers) son una presentación visual que describe varias características importantes, al mismo tiempo, tales como la dispersión y simetría.

Para su realización se representan los tres cuartiles y los valores mínimo y máximo de los datos, sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

Una gráfica de este tipo consiste en una caja rectangular, donde los lados más largos muestran el recorrido intercuartílico. Este rectángulo está dividido por un segmento vertical que indica donde se posiciona la mediana y por lo tanto su relación con los cuartiles primero y tercero(recordemos que el segundo cuartil

coincide con la mediana).

Esta caja se ubica a escala sobre un segmento que tiene como extremos los valores mínimo y máximo de la variable. Las líneas que sobresalen de la caja se llaman bigotes. Estos bigotes tienen un límite de prolongación, de modo que cualquier dato o caso que no se encuentre dentro de este rango es marcado e identificado individualmente.

### 13.2.1 Ejemplo

Se tienen los siguientes datos. 20, 23, 24, 24, 24, 25, 29, 31, 31, 33, 34, 36, 36, 37, 39, 39, 40, 40, 41, 45

Para calcular el primer cuartil se toma en cuenta que el 25% de los valores de la distribución. Para este caso  $N = 20$   $N/4 = 5$

$$Q_1 = (24 + 25)/2 = 24.5$$

El segundo cuartil, es el valor de la variable que ocupa el lugar central en un conjunto de datos ordenados. Como  $N/2 = 10$ ; la mediana es la media aritmética de dicho valor y el siguiente:

$$Q_2 = (33 + 34)/2 = 33.5$$

El Tercer Cuartil, es el valor que sobrepasa al 75% de los valores de la distribución. En nuestro caso, como  $3N/4 = 15$ , resulta:

$$Q_3 = (39 + 39)/2 = 39$$

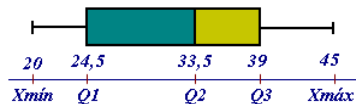


Figure 22: Diagrama Box and Whiskers

El bigote de la izquierda representa al colectivo de edades (  $X_{\min}$ ,  $Q_1$ )

La primera parte de la caja a ( $Q_1$ ,  $Q_2$ )

La segunda parte de la caja a ( $Q_2$ ,  $Q_3$ )

El bigote de la derecha esta dado por ( $Q_3$ ,  $X_{\max}$ )

En Mathematica se usa el comando "BoxWhiskerChart" para crear el diagrama. requiere de una lista de datos. Se puede graficar mas de una lista.

```
a = RandomInteger[{1, 6}, 100];
b = RandomInteger[{1, 10}, 500];
BoxWhiskerChart[{a, b}]
```

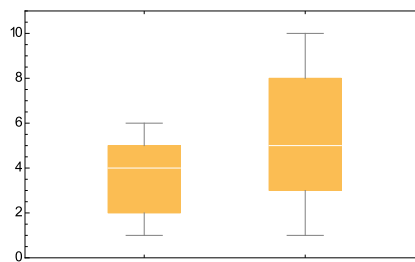


Figure 23: Diagrama Box and Whiskers



### 13.3 Cadenas de Markov en Mathematica

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compran un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Al siguiente?

La matriz de transición :  $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ ;

Lo que permite construir el grafo siguiente:

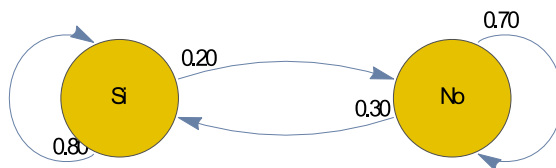


Figure 24: Diagrama de transiciones

Para el primer mes se tiene:

$$a = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix}; b = a.P \{ \{350., 650.\} \}$$

Para el siguiente mes :

$$c = b.P \{ \{475., 525.\} \}$$

### 13.4 Mínimos cuadrados en Mathematica

En Mathematica se utiliza la función Fit para realizar el ajuste. Los parámetros de entrada son los el conjunto de datos, el tipo de ajuste (lineal, polinomial, logarítmico, exponencial) y la variable simbólica para obtener la ecuación.

#### 13.4.1 ejemplo

Ajustar la siguiente grafica: `datos = Table[{x, (x - Random[Real, {-1, 1}])}, {x, 1, 10, 1}]; dp = ListPlot[datos]`  
Se realiza el ajuste lineal.

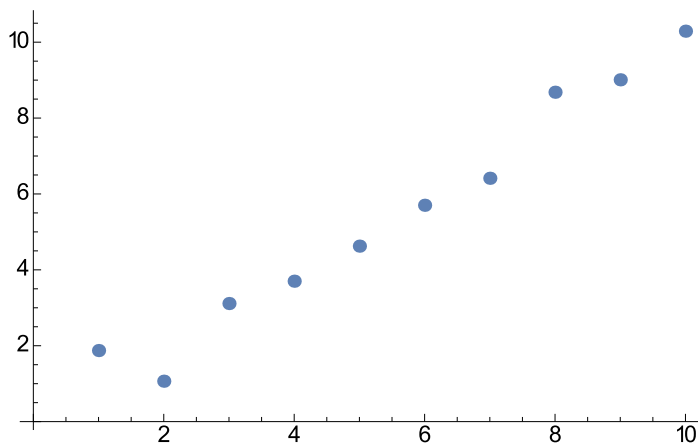


Figure 25: Gráfica de datos a ajustar

$a = \text{Fit}[\text{datos}, \{1, x\}, \{x\}]$   $ap = \text{Plot}[a, \{x, 0, 10\}]; \text{Show}[dp, ap]$  La ecuación resultante es:  
 $-0.166691 + 1.02067x$

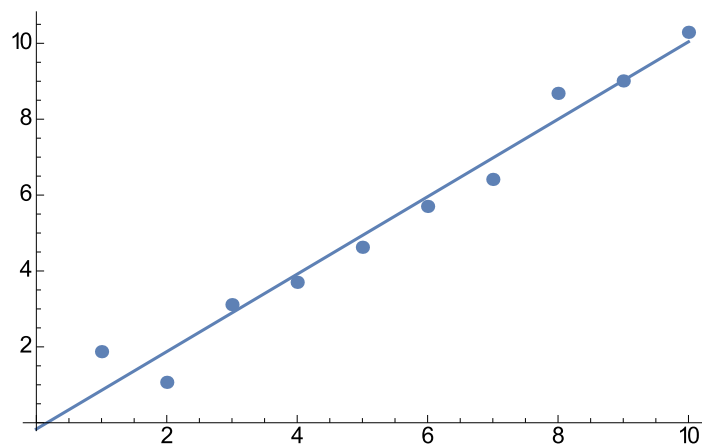


Figure 26: Gráfica de datos con la función de ajuste encontrada

Ajustar la siguiente grafica:

```
datos = Table[{x, (Exp[-x - Random[Real, {-1, 1}]])}, {x, 1, 10, 1}]; dp = ListPlot[datos]
```

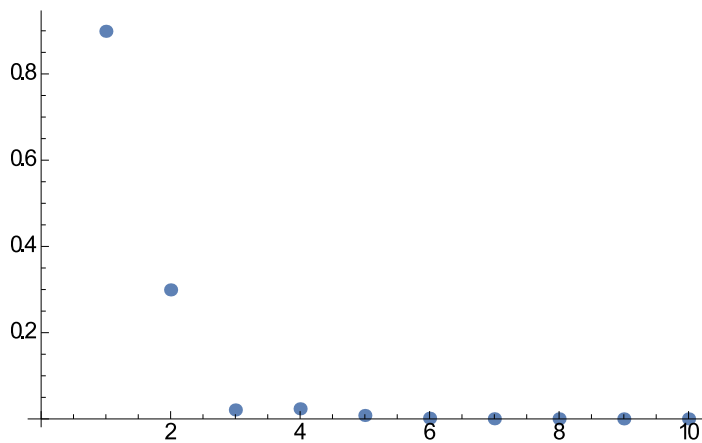


Figure 27: Gráfica de datos a ajustar

Se realiza el ajuste exponencial.

```
a = Fit[datos, {Exp[-x], x}, {x}] ap = Plot[a, {x, 0, 10}]; Show[dp, ap]
```

La ecuación resultante es:  $2.38863e^{-x} - 0.00126835x$

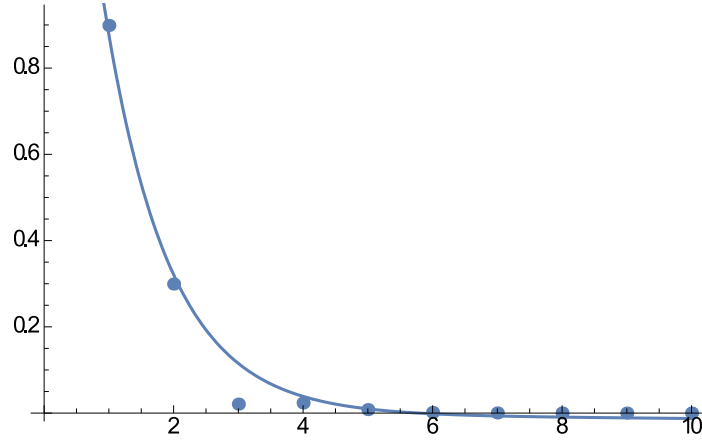


Figure 28: Función de ajuste encontrada

## 14 Tarea No.14

### 14.1 Demostraciones

#### Ecuación 46

De la Serie de Taylor

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (66)$$

Para el caso del  $f(n_1) = \ln W(n_1)$ , cerca de su máximo

$$n_1 \equiv \tilde{n}_1 + \eta \quad (67)$$

$$\eta = n_1 - \tilde{n}_1 \quad (68)$$

Entonces usando la expansión en series de Taylor para  $\ln W(n_1)$  alrededor del punto  $\tilde{n}_1$ :

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + \frac{d \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)}{1!} + \frac{d^2 \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^2} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)^2}{2!} + \frac{d^3 \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^3} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)^3}{3!} + \dots \quad (69)$$

Por último, sustituyendo  $\eta$  y haciendo  $B_k = \frac{d^k \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^k}$  la  $k$ -ésima derivada evaluada en  $\tilde{n}_1$ , donde  $k \geq 1$  se tiene la expresión:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \frac{1}{4}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \dots \quad (70)$$

#### Ecuación 54

$$\ln W(n_1) = \ln N! - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q \quad (71)$$

Dada la ecuación de la distribución binomial  $W(n_1)$ :

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (72)$$

Podemos aplicar logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, y reducir mediante las propiedades de logaritmos,

$$\ln W(n_1) = \ln \left( \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \right) \quad (73)$$

Aplicando la propiedad de la multiplicacion de logaritmos tenemos:

$$\begin{aligned}\ln W(n_1) &= \ln \left( \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \right) + \ln (p^{n_1} q^{N-n_1}) \\ \ln W(n_1) &= \ln \left( \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \right) + \ln (p^{n_1}) + \ln (q^{N-n_1})\end{aligned}$$

Se aplica la propiedad del cociente de logaritmos para el primer sumando de la ecuación anterior, así como la propiedad de los exponentes para los últimos dos términos. Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}\ln W(n_1) &= \ln (N!) - \ln (n_1!(N-n_1)!) + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q \\ \ln W(n_1) &= \ln (N!) - (\ln n_1! + \ln (N-n_1)!) + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q\end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\ln W(n_1) = \ln (N!) - \ln n_1! - \ln (N-n_1)! + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q$$

### Ecuación 55

$$\frac{d \ln n!}{dn} = \ln (n+1)! - \ln n! = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln (n+1)! \quad (74)$$

Se puede observar que cuando  $n$  es un entero de tal forma que  $n \gg 1$ , entonces  $\ln n!$  se puede considerar casi una función continua de  $n$ , de forma que se puede aproximar la derivada de la función como un cambio pequeño de sí misma en cada paso. Si consideramos como  $\ln (n+1)!$  como ese ligero cambio desde  $\ln n!$  y el siguiente paso, entonces:

$$\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln (n+1)! - \ln n!$$

Por leyes de logaritmos:

$$\log_b \left( \frac{x}{y} \right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Entonces:

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} \approx \ln (n+1)! - \ln (n!) = \ln \frac{(n+1)!}{n!}$$

### Ecuación 56

Ya que se considera  $n$  como un entero muy grande de forma que  $n \gg 1$ , entonces. mediante la fórmula de Stirling se tiene:

$$\ln n! \approx n \ln n - n \quad (75)$$

Derivando ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{d(n \ln n - n)}{dn} \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{n}{n} + \ln n - 1 \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \ln n\end{aligned} \quad (76)$$

### Ecuación 57

Dada la ecuación:

$$\ln W(n_1) = \ln (N!) - \ln n_1! - \ln (N-n_1)! + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q$$

Obtenemos la primera derivada con respecto a  $n_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= \frac{d}{dn_1} (\ln(N!) - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q) \\ \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= \frac{d \ln(N!)}{dn_1} - \frac{d \ln n_1!}{dn_1} - \frac{d \ln(N - n_1)!}{dn_1} + \frac{dn_1 \ln p}{dn_1} + \frac{d(N - n_1) \ln q}{dn_1}\end{aligned}$$

Cada termino da como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(N!)}{dn_1} &= 0 \\ \frac{dn_1 \ln p}{dn_1} &= \ln p \\ \frac{d(N - n_1) \ln q}{dn_1} &= -\ln q\end{aligned}$$

Recordamos que  $\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln n!$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d \ln n_1!}{dn_1} &\approx \ln n_1 \\ \frac{d \ln(N - n_1)!}{dn_1} &\approx \ln(N - n_1)\end{aligned}$$

Finalmente la expresión final es:

$$\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} = -\ln n_1 + \ln(N - n_1) + \ln p - \ln q \quad (77)$$

### Ecuación 58

Igualando [57] a 0, se encuentra el valor  $n_1 = \tilde{n}_1$ , donde W es el máximo, entonces, se obtiene:

$$\frac{d \ln W}{dn} = -\ln(n_1) + \ln(N - n_1) + \ln(p) - \ln(q) = 0 \quad (78)$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$[\ln(N - n_1) - \ln(n_1)] + [\ln(p) - \ln(q)] = 0 \quad (79)$$

$$\ln\left(\frac{N-n_1}{n_1}\right) + \ln(pq) = 0 \quad (80)$$

$$\ln\left(\frac{N-n_1}{n_1} \frac{p}{q}\right) = 0 \quad (81)$$

$$n_1 = \tilde{n}_1$$

### Ecuación 59

$$(N - \tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1 q \quad (82)$$

Despejando N y p de lado derecho

$$-\tilde{n}_1 = \tilde{n}_1 \frac{q}{p} - N \quad (83)$$

Invirtiendo los signos

$$\tilde{n}_1 = N - \tilde{n}_1 \frac{q}{p} \quad (84)$$

Multiplicando por p de ambos lados

$$\tilde{n}_1 p = Np - \tilde{n}_1 q \quad (85)$$

Sumando  $\tilde{n}_1 p$  de ambos lados y factorizando

$$\tilde{n}_1(p + q) = Np \quad (86)$$

Para nuestro caso de interés  $(p + q) = 1$

$$\tilde{n}_1 = Np \quad (87)$$

**Ecuación 60**

$$(N - \tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1 q \quad (88)$$

$$Np - \tilde{n}_1 p = \tilde{n}_1 q$$

$$Np = \tilde{n}_1 q + \tilde{n}_1 p$$

$$Np = \tilde{n}_1(q + p)$$

$$Np = \tilde{n}_1 \quad (89)$$

Recordando que:

$$p + q = 1 \quad (90)$$

**Ecuación 61**

$$\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N - n_1} \quad (91)$$

Partiendo la primera derivada

$$\begin{aligned} \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= -\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q \\ \frac{d}{dn_1} \left( \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} \right) &= \frac{d}{dn_1} (-\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q) \\ \frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} &= -\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} + \frac{d \ln(N - n_1)}{dn_1} + \frac{d(\ln p)}{dn_1} - \frac{d(\ln q)}{dn_1} \end{aligned}$$

Resolviendo las derivadas se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} &= -\frac{1}{n_1} \\ \frac{d \ln(N - n_1)}{dn_1} &= \frac{d \ln(N - n_1)}{dn_1} \frac{d(N - n_1)}{dn_1} \\ &= \frac{1}{N - n_1}(-1) = -\frac{1}{N - n_1} \\ \frac{d \ln p}{dn_1} &= 0 \\ \frac{d \ln q}{dn_1} &= 0 \end{aligned}$$

Sumando los terminos obtenidos, comprobamos que:

$$\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N - n_1}$$

**Ecuación 62**

Evaluando la ecuación 61 con lo obtenido en la ecuación 60 se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np} \quad (92)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \frac{1}{N(1-p)} \\ b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \left( \frac{1}{N} \frac{1}{(1-p)} \right) \\ b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \left( \frac{1}{N} \frac{1}{q} \right) \\ b_2 &= -\frac{1}{N} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{q+p}{pq} \end{aligned}$$

Dado que  $p + q = 1$

$$b_2 = -\frac{1}{Npq} \quad (93)$$

## 15 Tarea No.15

### 15.1 Congruencia Zeller

La congruencia de Zeller es un algoritmo ideado por Julius Christian Johannes Zeller para calcular el día de la semana de cualquier fecha del calendario.

Para el calendario gregoriano la congruencia de Zeller es:

$$h = \left( q + \left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{J}{4} \right\rfloor - 2J \right) \mod 7$$

Donde:

h es el día de la semana (0 = sábado, 1 = domingo, 2 = lunes,...),

q es el día del mes, "m" es el mes,

j es la centuria (es realidad [año / 100])

k el año de la centuria (año mod 100)

Para su implementación en Mathematica se utiliza cajas de texto para introducir los el dia (numero), mes(letra) y año(numero) y la función *Dynamic* para que se ejecute ante cualquier cambio en los valores.

**InputField[Dynamic[dia], Number]**

**Dynamic[dia];**

**InputField[Dynamic[mes], String]**

**Dynamic[mes];**

**InputField[Dynamic[anio], Number]**

**Dynamic[anio];**

**Dynamic[m = Switch[mes, "enero", 1, "febrero", 2, "marzo", 3, "abril", 4, "mayo", 5, "junio", 6, "julio", 7, "agosto", 8, "septiembre", 9, "octubre", 10, "noviembre", 11, "diciembre", 12]]**

**Dynamic[dia]**

**Dynamic[a = (14 - m)/12]**

**Dynamic[a = Floor[a]]**

**Dynamic[an = anio - a]**



Dynamic[mm =  $m + (12a) - 2$ ]

$d[\text{an\_}, \text{mm\_}] = (\text{dia} + \text{an} + \text{Floor}[(\text{an}/4)] - \text{Floor}[(\text{an}/100)] + \text{Floor}[(\text{an}/400)] + \text{Floor}[(31\text{mm}/12)]);$

dian = Mod[d[an, mm], 7];

("El dia indicado fue:")

Switch[dian, 0, "Domingo", 1, "Lunes", 2, "Martes", 3, "Miercoles", 4, "Jueves", 5, "Viernes", 6, "Sabado"]

El dia indicado fue:

Jueves

## 16 Tarea No.16

La función de distribución  $f(E)$ , es la probabilidad de que una partícula se encuentre en el estado de energía  $E$ . La función de distribución es una generalización de las ideas de probabilidad discreta, para el caso donde la energía puede ser tratada como una variable continua. En la naturaleza se encuentran tres funciones de distribución claramente diferentes. El término  $A$  en el denominador de cada distribución es un término de normalización, que puede cambiar con la temperatura.

### 16.1 Distribución Maxwell-Boltzmann

La distribución de Maxwell-Boltzmann es la función de distribución clásica, para la distribución de una cantidad de energía entre partículas idénticas pero distinguibles.

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}} \quad (94)$$

Además de la presunción de distinguibilidad, la física estadística clásica postula que:

- No hay ninguna restricción sobre el número de partículas que pueden ocupar un estado dado.
- En el equilibrio térmico, la distribución de partículas entre los estados de energía disponibles, se llevará a cabo con la distribución más probable, la cual es consistente con la energía total disponible y el número total de partículas.
- Cada estado específico del sistema tiene la misma probabilidad.

La distribución de velocidades en las moléculas de un gas ideal está dada por

$$f(v) = 4\pi \left[ \frac{M}{2\pi RT} \right] v^2 e^{-Mv^2/2RT} \quad (95)$$

De esta función se pueden calcular varias velocidades moleculares características, y cosas tales como, qué fracción de las moléculas tienen velocidades superiores a un cierto valor a una temperatura dada. También tiene que ver con muchos tipos de fenómenos.

$$vp = \sqrt{2RT/M} \quad (96)$$

$$\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M} \quad (97)$$

$$v_{rms} = \sqrt{3RT/M} \quad (98)$$

## 16.2 Ejemplos Maxwell-Boltzmann

### 16.2.1 Ejemplo 1

Verificar que la velocidad rms de una molécula de gas ideal es cerca del 9 por ciento más grande que la velocidad promedio.

**Solución**

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v n(v) dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Si hacemos  $a = m/2kT$ . vemos que la ecuación resuelta es :

$$\bar{v} = \left[ 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2kT}{m} \right)^2 \right] = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Comparando  $\bar{v}$  con  $v_{rms}$  se muestra que:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \bar{v} \approx 1.09 \bar{v}$$

## 16.3 Distribución Bose-Einstein

La distribución de Bose-Einstein describe el comportamiento estadístico de las partículas de *espín* entero(bosones). A bajas temperaturas, los bosones se comportan de manera muy diferente a los fermiones, debido a que un número ilimitado de ellos pueden captar el mismo estado de energía, un fenómeno llamado *condensación*

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1} \quad (99)$$

Donde:

- $f(E)$  : La probabilidad de que una partícula tenga energía E
- $A$  : Constante de Normalización, para fotones  $A = 1$  así, la ocupación de estados de muy poca energía se incrementan sin límite
- $k$  : Constante de Boltzmann
- $T$  : Temperatura absoluta

## 16.4 Distribución Fermi-Dirac

La distribución de Fermi-Dirac se aplica a los fermiones, partículas con espín semientero, que obedece el principio de exclusión de Pauli. Cada tipo de función de distribución tiene un término de normalización multiplicando el denominador del exponente, que puede ser dependiente de la temperatura. Para el caso de Fermi-Dirac, ese término se suele escribir:

$$e^{-E_F/kT} \quad (100)$$

Donde  $E_F$  = Energía Fermi

La importancia de la energía de Fermi se ve más claramente estableciendo  $T = 0$ . En el cero absoluto, la probabilidad es igual a 1 para energías menores que la energía de Fermi y cero para energías mayores que

la energía de Fermi. Se puede imaginar todos los niveles hasta la energía de Fermi llenos, pero ninguna partícula tiene una energía mayor. Esto es totalmente coherente con el principio de exclusión de Pauli, donde cada estado cuántico no puede tener más que una sola partícula.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (101)$$

## 17 Tarea No.17

### 17.1 La ultima oveja de pie

Hay 100 puntos igualmente espaciados alrededor de un círculo. En 99 de los puntos, hay ovejas, y en 1 punto, hay un lobo. En cada paso, el lobo se mueve aleatoriamente ya sea en sentido de la manecillas del reloj, o en contra, sólo se mueve un punto a la vez. Si hay una oveja en ese punto, el lobo se la come. Las ovejas no se mueven. ¿Cuál es la probabilidad que la oveja que esta inicialmente al lado opuesto al lobo sea la última que quede?

### 17.2 Solución

Nombremos a la oveja que esta inicialmente al lado opuesto del lobo como "i". Si  $i$  es la última oveja que queda, quiere decir que las vecinas de  $i$  son comidas antes que  $i$ . Sin embargo, para que lo anterior se cumpla, el lobo tuvo que comer a una de la vecinas de  $i$ , y luego ir todo el camino para comer al siguiente vecino de  $i$ .

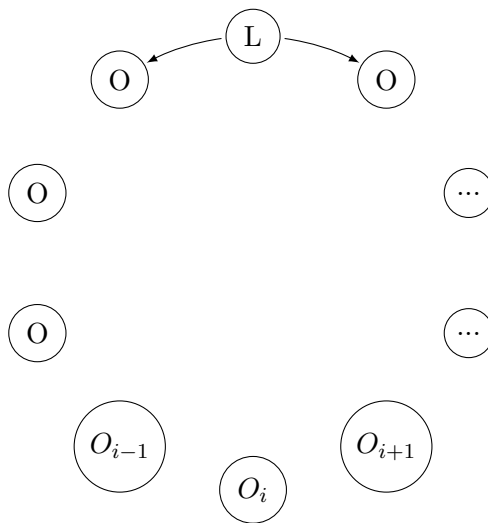


Figure 29: Problema del lobo y las ovejas

Consideramos entonces el momento justo cuando el lobo se ha comido a la primer vecina de  $i$ . La pregunta entonces se vuelve **¿Cuál es la probabilidad que el lobo se coma a la siguiente vecina de  $i$  antes que a  $i$ ?** Esto se convierte entonces en un problema similar a "*La ruina del jugador (Gambler's ruin)*"

Podemos desplegar el círculo formando una línea recta, y tomando como referencia a la oveja  $i$ , la nombramos como "0", el lobo, que está adyacente a  $i$ , será la posición "1" y la segunda vecina de  $i$  será  $n$ . [?]

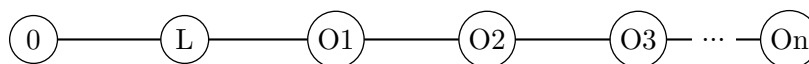


Figure 30: Analogía, el problema del apostador

Probabilidad de avance  $(+1) \rightarrow p$

Probabilidad de retroceso  $(-1) \rightarrow q = 1 - p$

$P_0 = 0 \longrightarrow$  Probabilidad que se coma a  $n$  antes que 0  
 $P_n = 1 \longrightarrow$  Probabilidad que se coma a  $n$  antes que 0

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \quad (102)$$

$P_i$  es la probabilidad que el lobo se coma a  $n$  antes que 0  
Ya que  $p + q = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} (p + q)P_i &= pP_{i+1} + qP_{i-1} \\ pP_i + qP_i &= pP_{i+1} + qP_{i-1} \\ P_{i+1} - P_i &= \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}) \end{aligned} \quad (103)$$

Para el caso  $i = 1$  (Cuando el lobo comienza en 1)

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1$$

Para el caso  $i=2$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

Para el caso general  $i$

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i P_1$$

Sumando todas las ecuaciones(desde 1 hasta  $i$ )

$$P_{i+1} - P_1 = \sum_{k=1}^i (P_{k+1} - P_k) = \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k P_1$$

Despejando  $P_{i+1}$

$$P_{i+1} = P_1 + P_1 \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k = P_1 \sum_{k=0}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad (104)$$

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right) & \text{si } p \neq q \\ P_1(i+1) & \text{si } p = q \end{cases} \quad (105)$$

Suponiendo que  $i = n - 1$

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right) & \text{si } p \neq q \\ P_1(n) & \text{si } p = q \end{cases}$$

Y ya que  $P_n=1$

$$\begin{aligned} P_n &= P_i n \\ 1 &= P_1 n \\ P_1 &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (106)$$

Para un caso general en el que el lobo comienza en la posición  $i$

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right) & \text{si } p \neq q \\ \frac{i}{n} & \text{si } p = q \end{cases} \quad (107)$$

## 18 Tarea No.18

### 18.1 Serie Geométrica

En matemáticas, una serie geométrica es una serie en la cual la razón entre los términos sucesivos de la serie permanece constante. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad (108)$$

es geométrica, pues cada término sucesivo se obtiene al multiplicar el anterior por  $1/2$

#### Razón común

Los términos de una serie geométrica forman una progresión geométrica, es decir que la razón entre los términos sucesivos permanece constante. El comportamiento de los términos depende de la razón común  $r$ .

- $|r| < 1$  los términos decrecen y se acerca a cero en el límite. En tal caso la serie converge.
- $|r| > 1$  Los términos de la serie se incrementan en magnitud. La suma de los términos también aumenta y la serie no tiene suma. La serie diverge.

La suma de una serie geométrica será finita siempre y cuando los términos se aproximen a cero; a medida que se acerca al cero, las cantidades se vuelven insignificadamente pequeñas, permitiendo calcular la suma sin importar el hecho que la serie sea infinita. La suma puede ser obtenida utilizando las propiedades autosimilares de la serie.

#### Fórmula

Para  $r \neq 1$ , la suma de los  $n$  primeros términos de una serie geométrica es:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (109)$$

donde  $a$  es el primer término de la serie y  $r$  es la razón común.

#### Demostración

Sea  $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$

Entonces  $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}$

Entonces  $S_n - rS_n = a(1 - r) = a - ar^{n+1}$ , luego  $s = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

La serie geométrica de término inicial  $a \in \mathbb{R}$  no nulo y razón  $r \in \mathbb{R}$  es convergente si y solamente si  $|r| < 1$ . En tal caso, su suma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r} \quad (110)$$

#### Ejemplos

1. La serie geométrica:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2^n}\right) = 3(1) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots$$

Tiene  $r = \frac{1}{2}$  y  $a = 3$

Como  $0 < |r| < 1$  la serie converge, y su suma es:

$$S_n = \frac{a}{1 - r} = \frac{3}{1 - (1/2)} = \frac{3}{(1/2)} = 6$$

2. La serie geométrica:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots$$

Como  $|r| \geq 1$  la serie diverge, y no tiene suma.

3. La serie geométrica:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right) \left(\frac{1}{10^2}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right) \left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \dots$$

Tiene  $r = \frac{1}{10^2}$  y  $a = \frac{8}{10^2}$

como  $|r| < 1$  la serie converge, y su suma es:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{(8/10^2)}{1-(1/10^2)} = \frac{8}{99}$$

4. Determine la formula para la sumatoria de  $\sum_{i=0}^n \frac{9^i - 7^i}{11^i}$

$$\sum_{i=0}^n \frac{9^i - 7^i}{11^i} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{9}{11}\right)^i - \sum_{i=0}^n \left(\frac{7}{11}\right)^i$$

Aplicando la fomula

$$\frac{1 - \left(\frac{9}{11}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{11}} - \frac{1 - \left(\frac{7}{11}\right)^{n+1}}{1 - \frac{7}{11}} - \frac{11}{2} \left(\frac{9}{11}\right)^{n+1} + \frac{11}{4} \left(\frac{7}{11}\right)^{n+1}$$

5. Determine la formula para la sumatoria de  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} j^{\frac{5}{3}} * \left(1 - \frac{1}{2j^{\frac{1}{3}}}\right)^i$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2j^{\frac{1}{3}}}\right)^i = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{2j^{\frac{1}{3}}}\right)} = 2j^{\frac{1}{3}}$$

Uniendo a a segunda parte

$$\sum_{j=1}^n 2j^{\frac{1}{3}} = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$