Tareas y Apuntes de Probabilidad, Procesos Aleatorios e Inferencia

"They've led our breakthroughs in gaming theory."

José Alfredo Aguirre Castañeda

June 23, 2016

Contents

1

Tarea 1

1.1 Tipos de probabilidad

1.1.1 Probabilidad clásica

Históricamente se definió a la probabilidad de un evento como la cantidad de formas en que podría ocurrir dicho evento, entre el total de posibles resultados. Esta interpretación se define en la ecuación X donde A es un evento que puede ocurrir en un experimento un espacio muestral omega [1].

1.1.2 Probabilidad geométrica

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región. La probabilidad de que X esté en el segmento PR de una linea PQ es

$$P(PR) = \frac{\text{longitud de PR}}{\text{longitud de PQ}} \tag{1.1}$$

1.1.3 Probabilidad frecuentista

Se considera un experimento el cual es repetido n numero de veces bajo circunstancias idénticas. La probabilidad de que un evento A ocurra se denota por la ecuación X.

1.1.4 Probabilidad subjetiva

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo.

En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda ocurrir.

1.1.5 Probabilidad axiomática

Sea S un espacio muestral, sea ε la clase de eventos y sea P una función de valores reales definida en ε. Entonces P se llama función de probabilidad, y $P(A)$ es llamada la probabilidad del evento A si se cumplen los siguientes axiomas [3]:

1) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(S) = 1$.

3) Si A y B son eventos mutuamente exclusivos, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1.2 Espacios muestrales

El conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento dado se llama espacio muestral. Un resultado particular, esto es, un elemento de S, se llama un punto muestral o muestra. Un evento A es un conjunto de resultados o, en otras palabras, un subconjunto del espacio muestral S. El conjunto vacío $\emptyset$ y S por sí mismos son eventos; el $\emptyset$ algunas veces se denomina el evento imposible (o imposibilidad), y S es el evento cierto o seguro [3].

1.3 Experimentos deterministas

En este tipo de experimentos se puede predecir el resultado antes de que se realicen.

1) Si arrojamos una piedra hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero despues bajará.

2) Alimentar un motor eléctrico para mover una banda.

3) Al calentar agua, esta ebullirá a los 100 C

4) La tercera ley de Newton establece lo siguiente: siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, este ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección pero en sentido opuesto sobre el primero.

5) Predecir la cantidad de dinero en una cuenta de banco cuando se conoce el deposito inicial y la taza de interés.

1.4 Experimentos aleatorios

En este tipo de experimentos no se puede predecir lo que va a ocurrir, incluso cuando se realiza el experimento bajo las mismas condiciones.

1) Adivinar el color de una bola extraída de una caja donde hay bolas de diferentes colores.
2) Predecir el clima.
3) Lanzamiento de una moneda
4) El número ganador de un sorteo de loteria.
5) Predecir el en que casilla caera la pelota al girar la ruleta.

1.5 Principio de la pichonera

Si se colocan tres palomas en dos compartimientos, entonces se puede estar seguro que uno de esos compartimientos por lo menos alojara a dos palomas. Una deficinión más general de esta simple observación, conocida como el principio del palomar, se da a continuación:

Este principio establece que si k y n son números positivos , si al menos kn +1 objetos se distribuyen entre n cajas, entonces una de esas cajas debe de contener k+1 objetos. En particular si al menos n+1 objetos seran colocados en n cajas, entonces una de esas cajas debe de contener dos objetos [2].Por ejemplo, en un grupo de 367 personas, debe haber por lo menos dos con el mismo cumpleaños debido a que solo hay 366 posibles dias en los cuales cumplir años.

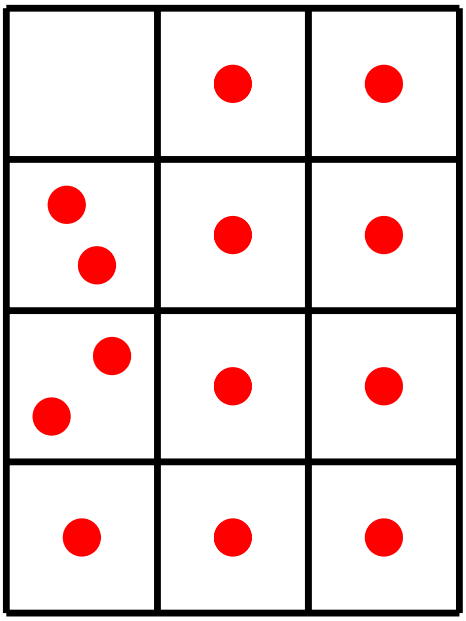


Figure 1.1: Palomar

1.5.1 Aplicaciones

El principio del palomar se utiliza en la ciencia de la computación en el tema de hash tables debido a que las colisiones son inevitables ya que sin importar lo inteligente que sea un algoritmo, el número de posibles entradas supera al número de indices de un arreglo. Igualmente tiene aplicación en los algoritmos de compresión sin perdidas, ya que, si bien reducen el tamaño de algunas entradas, tambien hacen que otras entradas crezcan.

2

Tarea 2

2.1 Permutaciones y combinaciones

2.1.1 Permutaciones

Sea A un conjunto de n objetos distintos. Para $0 \leq r \leq n$, una r-permutación de A es un arreglo de r objetos de A en donde es importante el orden en que se agrupan [2]. Por ejemplo: si A = a,b,c,d, entonces una 3-permutación de A genera 24 combinaciones posibles que se muestran en la Eq.(2.1):

$$\begin{aligned} &\{a,b,c\},\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\},\\ &\{a,b,d\},\{a,d,b\},\{b,a,d\},\{b,d,a\},\{d,a,b\},\{d,b,a\},\\ &\{a,c,d\},\{a,d,c\},\{c,a,d\},\{c,d,a\},\{d,a,c\},\{d,c,a\},\\ &\{b,c,d\},\{b,d,c\},\{c,b,d\},\{c,d,b\},\{d,b,c\},\{d,c,b\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La permutación permite conocer de cuantas formas diferentes se puede reacomodar un conjunto de objetos y se define por la siguiente Eq. (2.7)

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.2}$$

Ejemplos de Permutaciones

1) Una tienda de helados ofrece una rebaja en helados que combinen 3 sabores distintos. ¿Cuántas combinaciones diferentes se pueden hacer si hay 8 sabores diferentes en el menu.

$$P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336 \tag{2.3}$$

2) ¿De cuantas maneras pueden organizarse 8 CD's en un estante?

$$P_8^8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = 40320 \tag{2.4}$$

3) Si una liga de softball tiene 10 equipos, ¿cuántas clasificaciones diferentes puede haber al final de la temporada?

$$P_{10}^{10} = \frac{10!}{(10-10)!} = \frac{10!}{0!} = 3628800 \tag{2.5}$$

4) ¿Cuántas diferentes combinaciones pueden hacer utilizando dos letras de la palabra Texas si nunca letra debe de usarse más de una vez.

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20 \tag{2.6}$$

5) Un candado tiene consta de 10 digitos diferentes y una secuencia de 5 digitos debe ser seleccionada para abrirlo. ¿Cuántas combinaciones son posibles?

$$P_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 30240 \tag{2.7}$$

2.1.2 Combinaciones

Sea A un conjunto de n objetos distintos. Una combinación de A es simplemente un subconjunto de A. De manera mas precisa, para $0 \leq r \leq n$, una r-combinación de A es un subconjunto de r elementos de A [2]. Por ejemplo; si A = a,b,c,d, entonces una 3-combinación de A consiste de los siguientes subconjuntos que se muestran en la Eq.(2.9):

$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}. \tag{2.8}$$

A diferencia de la permutación, una combinación es un conjunto de objetos donde no es importante el orden y se define por la siguiente Eq.(2.9)

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2.9}$$

Ejemplos de Combinaciones

1) ¿Cuántas manos de poker de cinco cartas son posibles partiendo de un mazo estandard de cincuenta y dos cartas?

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960 \tag{2.10}$$

2) Si tres niños juntaron 40 manzanas de un árbol. ¿De cuántas maneras pueden dividirlas, si todas las manzanas se consideran iguales (es decir, no importa cuáles manzanas le tocan a cada uno)?

$$C(40,2) = \frac{42!}{2!(40-2)!} = 861 \tag{2.11}$$

3) En el dominó 4 jugadores se dividen en partes iguales 28 fichas. ¿De cuántas formas pueden hacerlo? Para esta repartición se asume que los jugadores reciben las siete fichas, uno a la vez.

$$C_7^{28}C_7^{21}C_7^{14}C_2^{7} = \frac{28!}{7!21!} * \frac{21!}{7!14!} * \frac{14!}{7!7!} * \frac{7!}{7!} = 4,72xE14 \tag{2.12}$$

4) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

$$C_3^{35} = \frac{35!}{3!(35-3)!} = 6545 \tag{2.13}$$

5) Once estudiantes escribieron su nombre en un papel y lo depositaron en una caja. Tres de los nombres seran seleccionados. ¿Cuántas combinaciones puede haber?

$$C_3^{11} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165 \tag{2.14}$$

2.2 Demostraciones

(1) A partir de la formula de permutación se obtiene la Eq.(2.15):

$$\binom{n}{k} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.15}$$

(2) Para esta demostración algebraica es necesario recordad que

$$x(x-1)! = x! \quad \text{y} \quad \frac{x!}{(x-1)!} = x$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = \frac{(n-1)!\frac{r!}{(r-1)!} + (n-1)!\frac{(n-r)!}{(n-1-r)!}}{r!(r-1)!(n-r)!((n-r)-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!r + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!(r+n-r)}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2.1 Generalizar el problema de los caminos posibles para el caso de un rectángulo

Este problema plantea la siguiente cuestión; ¿Cuántos caminos posibles existen para ir de un punto A a un punto B, como se muestra en la Fig.2.2, de manera que el recorrido tenga longitud mínima (es decir que solamente se puede avanzar hacia la derecha y hacia arriba)?

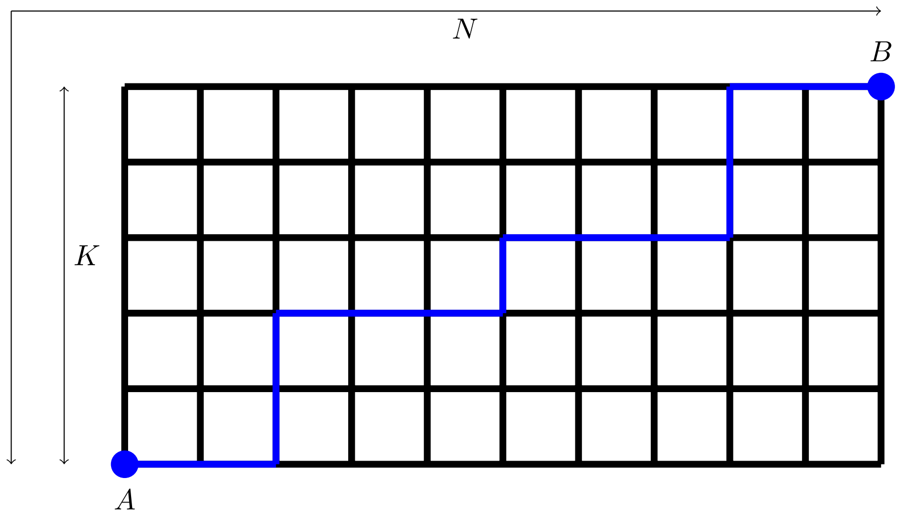


Figure 2.1: Cuadrícula rectangular

Primero, se realiza un conteo de caminos para un caso simple:

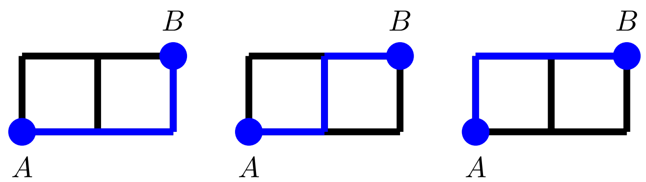


Figure 2.2: Caminos posibles

Se obtiene gráficamente que para un rectángulo de dimensiones $N = 2 + 1$ y $K = 1$ que existen 3 caminos posibles para desplazarse desde el punto A al punto B. A partir de este resultado se deduce que la formula para calcular el número posible de caminos de longitud minima dentro de un rectángulo es: $\binom{N}{K} = \binom{3}{1} = 3$

2.3 Pirámide de Pascal

El conjunto de los coficientes binomiales $\binom{n}{r}$ se pueden ordenar de manera triangular, donde n aumenta de arriba hacia abajo y r aumenta de izquierda a derecha, como se muestra en la Fig.2.3. Este diagrama, uno de los patrones de numeros más influyentes en la historia de las matemáticas, es llamado el triángulo de Pascal, en honor al renombrado matemático frances Blaise Pascal (1623-1662) quien lo descubrio e hizo importantes contribuciones para su entendimiento en 1653. El diagrama tambien es llamado triángulo de Yang Hui's en China debido a que fue descubierto muchos años antes por un matemático chino en 1261 [2].

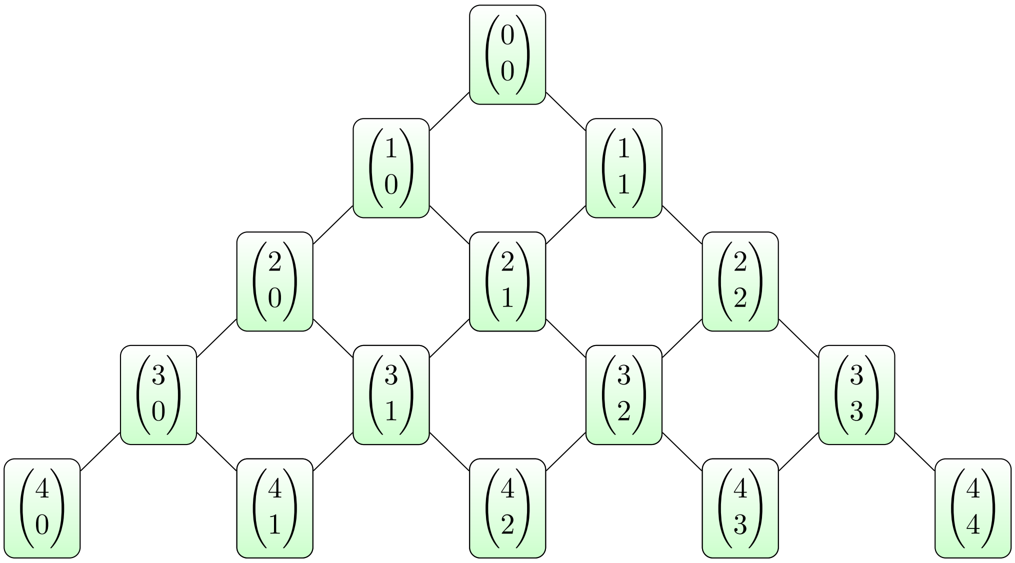


Figure 2.3: Pirámide de Pascal.

En base a la Fig.2.3 se pueden hacer las siguientes observaciones:

1) El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$, que se encuentra en el renglon n y la posición r, representa el menor número de rutas posibles desde el vertice representado por la cima $\binom{0}{0}$ hasta el vertice en $\binom{n}{r}$.

2) Puesto que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, cada nueva linea de la pirámide es simetrica con respecto a la línea imaginaria vertical generada por el vertice $\binom{0}{0}$.

3) La identidad $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ simplemente nos dice que cada coeficiente binomial en el interior de la pirámide es igual a la suma de los dos coeficientes a la izquierda y derecha, en el renglón anterior.

2.4 Reseña sobre articulos

2.4.1 Primates Count

Comunmente se piensa los animales no piensan pero inclusive demuestran la capacidad de realizar operaciones matemáticas lo cual me lleva a pensar que lo más cercano a un idioma universal serian las matemáticas.

2.4.2 Cicada Generated Prime Numbers

Para la supervivencia de la especie, las cicadas adaptaron su ciclo de reproducción a los números primos. Puede deberse a que existe algo matemático implicito en los seres vivos o simplemente las cicadas que se reproducian en años primos tuvieron mayor éxito evolutivo que las demás.

2.4.3 Ant Odometer

Resulta increible lo potente que llega a ser la computadora que tienen las hormigas ya que les permite regresar al hormiguero sin importar la distancia que hallan caminado. Al comparar su desempeño con el de robots rodantes que de igual forma utilizan odometría para calcular su desplazamiento, uno no puede dejar de preguntarse como es que las hormigas logran superar el problema del derrape o lograr medir su desplazamiento sobre el plano XY aun cuando el terreno cambia de nivel.

2.4.4 Quipu

Uno pensaria que las matemáticas no serian posibles sin la escritura pero tal parece ser que la base del universo mismo no requiere de la complejidad de la escritura para explicarse.

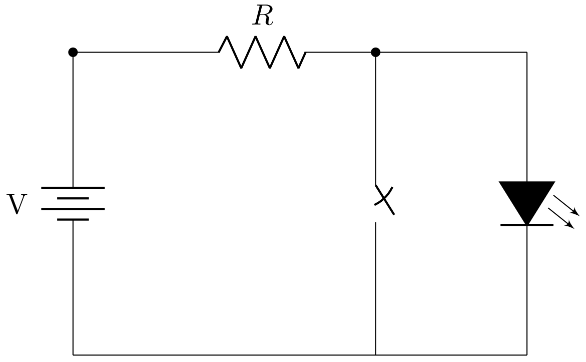
3

Tarea 3

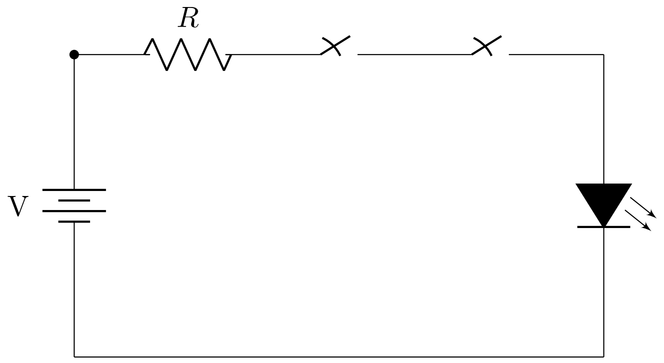
3.1 Circuitos lógicos

A continuación se presentan circuitos lógicos diseñados con resitencias y switches

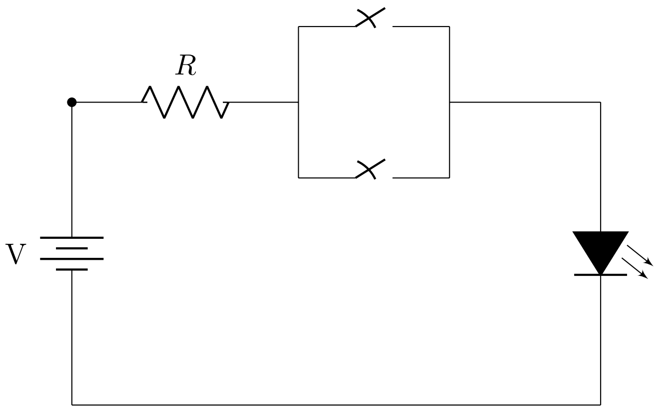
3.1.1 Compuerta lógica NOT



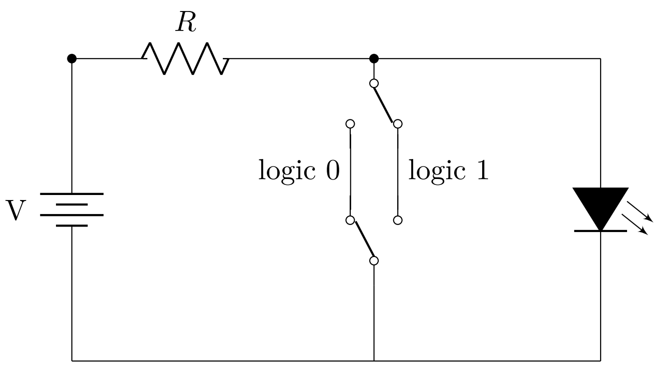
3.1.2 Compuerta lógica AND



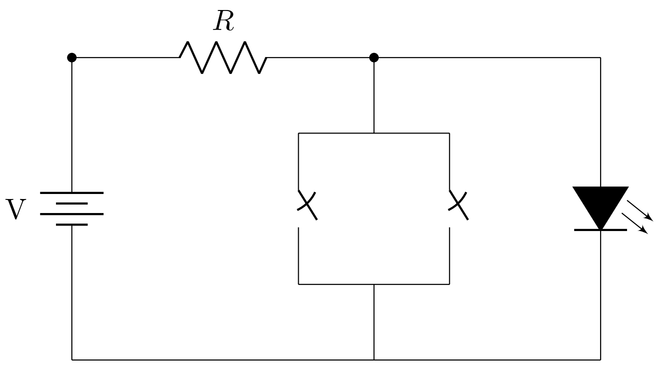
3.1.3 Compuerta lógica OR



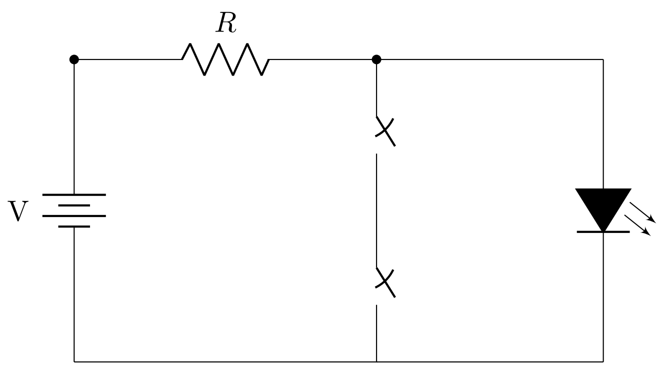
3.1.4 Compuerta lógica XOR



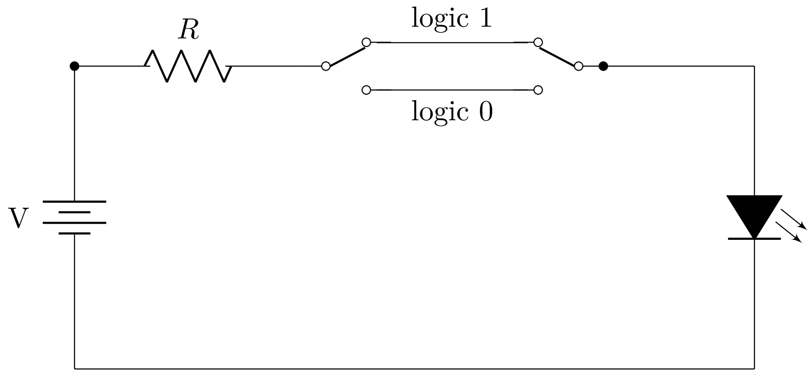
3.1.5 Compuerta lógica NOR



3.1.6 Compuerta lógica NAND



3.1.7 Compuerta lógica XNOR



3.2 Oveja Dolly

La primera oveja clonada tuvo una vida corta y envejecio prematuramente, al igual que otros animales clonados. La causa de esto es que fue clonada a partir de una céluca que ya se había dividido varias veces cuando formaba parte de los tejidos de la madre, y el número de veces que una célula puede dividirse esta inscrito en los cromosomas. Ello a su vez depende del largo de los telómeros.

Todos los tejidos tiene que continuar renovándose a lo largo de la vida. Para ello las células están en constante división, lo que produce células nuevas que reemplazan a las viejas que van muriendo. Es en este proceso donde parecen jugar un papel importante los telómeros. Estos pequeños trozos de ADN que se encuentran en los extremos de los cromosomas y que no codifican proteínas. Lo que sucede es qu en el mecanismo de replicación del ADN, que inicia la división celuluar, los cromosomas no pueden copiarse hasta el final, de modo que una parte de telomero que está en los extremos, es desechable y se pierde con cada división celular. Es así como con cada división celular se va perdiendo parte del telómero, has que llega un momento que ya no hay telómeros y por lo tanto la célula ya no puedde seguir dividiéndose. Es decir, los telómeros limitan el número de divisiones que una célula puede tener por lo que el órgano va perdiendo la posibilidad de renoverse a sí mismo. Ello está íntimamente relacionado con el proceso de envejecimiento celular, que de este modo estaría determinado genéticamente.

4

Tarea 4

4.1 Teoría de conjuntos

4.1.1 Demostraciones

Primera ley De Morgan $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Para cualquier teorema X=Y, se debe demostrar que $\bar{X} \cap Y = 0$ y $\bar{X} \cup Y = 1$, luego se utiliza la ley del complemento, $\bar{A} \cap A = 0$ y $\bar{A} \cup A = 1$, $\bar{X} = \bar{Y}$ y por la singularidad del complemento se obtiene $X = Y$.

En este caso particular se debe demostrar que $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = 0$ y que $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) &= 0 \\
(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) &= ((A \cap B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap B) \cap \bar{B}) \\
&= ((A \cap \bar{A}) \cap \bar{B}) \cup (A \cap (B \cap \bar{B})) \\
&= (0 \cap B) \cup (A \cap 0) \\
&= 0 \cup 0 \\
(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) &= 1 \\
(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) &= (A \cup \bar{A} \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{A} \cup \bar{B}) \\
&= (1 \cup \bar{B}) \cap (1 \cup \bar{A}) \\
&= 1 \cap 1 \\
(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) &= 1
\end{aligned}$$

Ya que $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = 0$ y $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$, se demuestra la primera ley De Morgan debido a que el complemento de $\bar{A} \cup \bar{B}$ es $A \cap B$ lo cual significa que $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ y por lo tanto $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Segunda ley De Morgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Para cualquier teorema X=Y, se debe demostrar que $\bar{X} \cap Y = 0$ y $\bar{X} \cup Y = 1$, luego se utiliza la ley del complemento, $\bar{A} \cap A = 0$ y $\bar{A} \cup A = 1$, $\bar{X} = \bar{Y}$ y por la singularidad del complemento se obtiene $X = Y$.

En este caso particular se debe demostrar que $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$ y que $(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) &= 0 \\
(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) &= ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap A) \cup ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap B) \\
&= ((\bar{A} \cap A) \cap \bar{B}) \cup ((B \cap \bar{B}) \cap A) \\
&= (0 \cap B) \cup (A \cap 0) \\
&= 0 \cup 0 \\
(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 \\
(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= (A \cup B \cup \bar{A}) \cap (A \cup B \cup \bar{B}) \\
&= (1 \cup B) \cap (1 \cup A) \\
&= 1 \cap 1 \\
(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1
\end{aligned}
$$

Ya que $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$ y $(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$, se demuestra la segunda ley De Morgan debido a que el complemento de $\bar{A} \cap \bar{B}$ es $A \cup B$ lo cual significa que $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ y por lo tanto $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\mathbf{A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})}$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \tag{4.1}$$

Aplicando la primera ley distributiva $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = X \cap (Y \cup Z)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap (B \cup \bar{B}) \\
A &= A \cap (1) \\
A &= A
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

$\mathbf{A - B = A \cap \bar{B}}$

- Dado un x $\in (A - B)$ por definición $x \in A$ y $x \notin B$.
- Por definición de complemento de conjuntos $x \notin B$ implica que $x \in \bar{B}$.
- Por lo tanto si $x \in A$ y $x \in \bar{B}$ y por definición de intersección $x \in (A \cap \bar{B})$.
- $A - B = A \cap \bar{B}$

$\mathbf{A \subseteq B}$ **y** $\mathbf{B \subseteq A}$ **entonces** $\mathbf{A = B}$

- Para cada x que existe en A, esta pertenece a B.
- $\forall(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Para cada y existe en B, esta pertenece a A.
- $\forall(y \in B \rightarrow y \in A)$
- Por lo tanto A=B.

$\mathbf{A \subset B}$ **entonces** $\mathbf{\bar{B} \subset \bar{A}}$

- Para cada x que existe en A, esta pertenece a B.
- $\forall(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Pero no todos los elementos de $\forall x \in B$ pertenecen a A.
- Por lo tanto $\bar{A}$ es igual a todos los elementos del Universo excepto los elementos de A (Esto incluye elementos de B que no pertenecen a A).
- En cambio $\bar{B}$ contiene solamente todos los elementos del Universo que no pertenecen a B.
- Por lo tanto $\bar{B} \subset \bar{A}$

4.1.2 Unión

$$A \cup B = A \cup B - A \cap B \tag{4.3}$$

Unión de tres términos

$$\begin{aligned}
A \cup B \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
A \cup (B \cup C) &= A \cup (B \cup C) - A \cap (B \cup C) \\
A \cup (B \cup C) &= A \cup (B \cup C - B \cap C) - A \cap (B \cup C - B \cap C) \\
A \cup B \cup C &= A \cup B \cup C - B \cap C - A \cap (B \cup C - B \cap C)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Unión de cuatro términos

$$
\begin{aligned}
A \cup B \cup C \cup D &= A \cup (B \cup (C \cup D)) \\
A \cup (B \cup (C \cup D)) &= A \cup (B \cup (C \cup D)) - A \cap (B \cup (C \cup D)) \\
A \cup (B \cup (C \cup D)) &= A \cup (B \cup (C \cup D) - B \cap (C \cup D)) - A \cap (B \cup (C \cup D) - B \cap (C \cup D)) \\
A \cup (B \cup (C \cup D)) &= A \cup B \cup C \cup D - C \cap D - B \cap (C \cup D - C \cap D) - A \cap (B \cup C \cup D \\
&\quad - B(C \cup D - C \cap D))
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

4.2 Paradojas sobre teoría de conjuntos

4.2.1 Diferencia entre paradoja y antimonia

En términos generales, una paradoja es es una figura retórica que consiste en la utilización de expresiones que envuelven una contradicción. Esto quiere decir que, más allá de las condiciones contradictorias, los factores presentados resultan válidos, reales o verosímiles.

Es importante establecer que existen muchos tipos de paradojas. Así, en concreto, se determinan dos grandes grupos para poder llevar a cabo la clasificación de las mismas. De esta manera, por un lado están las paradojas en función de su veracidad y por otro las que se ordenan en base al área de conocimiento en el que se utilizan o desarrollan.

Las antinomias son un tipo de paradoja que alcanzan un resultado que se autocontradice, aplicando correctamente modos aceptados de razonamiento. Muestran fallos en un modo de razón, axioma o definición previamente aceptados. Por ejemplo, la Paradoja de Grelling-Nelson señala problemas genuinos en nuestro modo de entender las ideas de verdad y descripción. Otro ejemplo de antinomia es el caso de los conjuntos que no pertenecen a si mismos.

4.2.2 Antimonia de Bertrand

Sea R el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a si mismos. Entonces R no es un miembro de si mismo ni tampoco no es miembro de si mismo. Esto se expresa de manera simbolica en la siguiente ecuación:

$$R = x : x \notin x \text{ entonces } R \in R \text{ si y solo si } R \notin R \tag{4.6}$$

Esta proposición puso en duda los principios básicos de la teoría de conjuntos al punto que cuando Russell Berthrand les escribió una carta a G. Frege (quien se encontraba por terminar su libro sobre la aritmetica de Cantor). Esto invalido el trabajo de Freg por que se vio obligado a agregar una nota al final de su trabajo que decia: “Un cientifico no puede encontrarse con algo menos deseado que el ver que las fundaciones de su trabajo se desmoronen justo cuando se esta por terminar el trabajo.”

4.2.3 Paradoja del barbero

Es un acertijo derivado de la antinomia de Bertrand que sirve para ilustrar el concepto y demostrar que un escenario posible resulta logicamente imposible.
La paradoja considera una ciudad donde un barbero le corta el pelo a todos y solo aquellos hombres que no se cortan el pelo ellos mismos. La pregunta es ¿Quién le corta el pelo al barbero?

- La paradoja surge porque si el barbero no se corta el pelo a si mismo, segun la regla, deberia de hacerlo.
- De igual forma si el barbero se corta el pelo a si mismo, la regla establece que el no es quien se corta el pelo.

5

Tarea 5

5.1 Ejercicio del libro de Pliego

Se lanzan dos dados. Se define como A al suceso << la suma de los dos números que salen múltiplos de tres >> y como B al suceso << sale al menos un seis >>. Obtengase la probabilidad de los suceso:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cup B)}$.

- Total de combinaciones posibles $N = 6 * 6 = 36$.
- A{(1,2),(2,1),(3,3),(3,3),(4,2),(2,4),(5,1),(1,5),(6,3),(3,6),(6,6),(6,6)}
- B{(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(6,3),(3,6),(6,4),(4,6),(6,5),(5,6),(6,6)}
- La probabilidad de que la suma de los números de los dos dados sea múltiplo de tres es $A = P(suma\ 3) + P(suma\ 6) + P(suma\ 9) + P(suma\ 12)$
- $A = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$
- La probabilidad de que salga al menos un seis $P(B) = 11/36$
- $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{36} + \frac{11}{36} - \frac{3}{36} = \frac{20}{36}$
- $P\overline{(A \cup B)} = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36}$
- Dado $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ se puede obtener la siguente expresión.
- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} - \frac{3}{36} = \frac{8}{36}$

5.2 Paradoja del falso positivo

Esta paradoja explica que cuando en una población existe poca incidencia de una condición y la tasa de incidencia es inferior a la tasa de los falsos positivos, entonces los resultados falsos positivos seran más probables que resultados con positivos verdadeeros. Esto indica que la probabilidad de un resultado positivo en un experimento no sólo se determina por la precisión de la prueba, sino también por las características de la población muestreada.
Por ejemplo: en una sociedad donde existe una enfermedad que muy pocas personas padecen, existiran más personas que son diagnosticadas con la enfermedad de manera incorrecta que aquellos que tienen la enfermedad y son diagnosticados adecuadamente. Se puede demostrar esto viendo un caso donde el 2% de una población de 1000 habitantes estan infectados por el virus del VIH. La prueba tiene una probabilidad de falso positivo de 5%. Por lo que:

- Verdaderos positivos $= 1000 * \frac{2}{100} = 20$
- Falsos positivos $1000 * \frac{100-2}{100} * .005 = 49$
- Las otras 931 pruebas son correctas al no detectar al VIH.
- Lo que en una población con mayor número de infectados representaria una confiabilidad de 95%, en este caso la probabilidad de verdaderamente estar infectado es de solo 29% $(\frac{20}{20+49})$

Número de personas	Infectados	No infectados	Total
Resultado positivo	20	49	69
Resultado negativo	0	931	931
Total	20	980	1000

Este fenómeno se debe a que, al tratar de encontrar un evento muy raro, es necesario que la precisión de las pruebas sean de la misma magnitud. Por ejemplo, para encontrar un pixel en una pantalla de computadora, se puede utilizar un lápiz y seria relativamente preciso. Pero no se puede utilizar un lápiz para apuntar a un átomo en la pantalla.

5.3 Falacia del apostador

La falacia del apostador o falacia de Montecarlo, es la creencia erronea de que si algo ocurre mayormente frecuente de lo normal, entonces ocurrira menos frecuente en el futuro. Esta falacia comprende las siguientes ideas equivocadas:

- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir porque no ha ocurrido durante cierto período.

- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto período

- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir si no ocurrió recientemente.

- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir si ocurrió recientemente.

Esto suele resumirse en la frase: "Los dados (o moneda) no tienen memoria", pues su naturaleza es la misma, independiente del número de tiros y resultados previos.

5.3.1 Lanzamiento de moneda

La falacia del apostador se puede ilustrar considerando el experimento de lanzar una moneda repetidas veces. En el caso de una moneda equilibrada, el resultado de cada lanzamiento es estadisticamente independiente de los demás y la probabilidad de obtener aguila en el primer lanzamiento es de 50%, la de obtener dos aguilas seguidas es de 25% y asi sucesivamente. En general la probabilidad de obtener el mismo resultado en n lanzamientos se describe por la siguiente ecuación

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{1}{2^n} \tag{5.1}$$

A partir de esta ecuación se deduce que la probabilidad de que se obtenga aguila cinco veces seguidas al lanzar una moneda es de solamente $\frac{1}{32}$, pero si la moneda ya cayo cuatro veces en aguila. Entonces la probabilidad de que la quinta moneda sea aguila es de 50% porque la incertidumbre existe antes de que se lanze la moned pero una vez que se conoce el resultado de los primeros cuatro lanzamientos, dejan de ser desconocidos y su probabilidad se considera de 1 en la ecuación.

5.4 Histograma en Root

Escribir un programa para a partir de N números aleatorios, generar el histograma de un dado de tres caras.

Se realizaron tres experimentos;con $N = 100$, $N = 1000$ y $N = 10000$ que se muestran en las siguientes figuras:

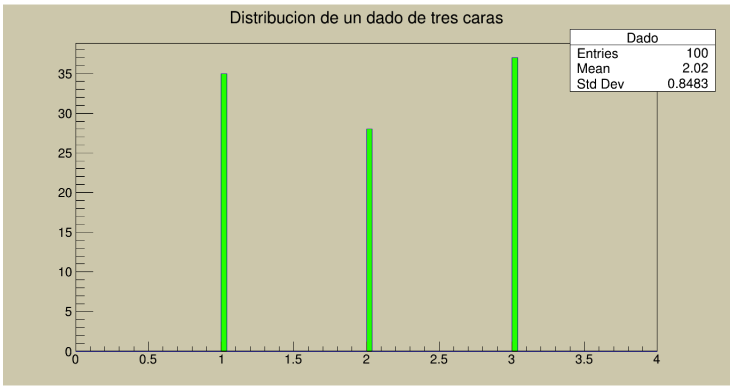


Figure 5.1: Histograma para N=100.

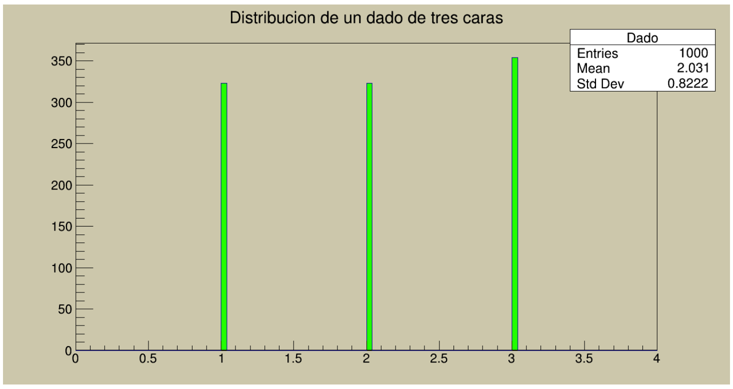


Figure 5.2: Histograma para N=1000.

Figure 5.3: Histograma para N=10000.

6

Tarea 6

6.1 Teorema del limite central

El teorema central del límite, uno de los fundamentales en estadística, estudia el comportamiento de la suma de variables aleatorias, cuando crece el número de sumandos, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales. Este teorema, del cual existen diferentes versiones que se han ido desarrollando a lo largo de la historia, tiene una gran aplicación en inferencia estadística, pues muchos parámetros de diferentes distribuciones de probabilidad, como la media, pueden expresarse en función de una suma de variables. Permite también aproximar muchas distribuciones de uso frecuente: binomial, Poisson, etc., cuando sus parámetros crecen y el cálculo se hace difícil . Por otro lado, la suma de variables aleatorias aparece en forma natural en muchas aplicaciones de la ingeniería: determinación de masa forestal, carga soportada por una estructura, tiempo de espera de servicios, etc.
Considere determinar la distribución muestral de la media $\overline{X}$. Suponga una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada de una población con distrubución normal, que tiene una media μ y una varianza σ^2. Considere ahora cada observación en esta muestra, digamos X_1, X_2,...,X_n es una variable aleatoria distribuida normal e independientemente, con una media μ y una varianza σ^2. Entonces, debido a que las funciones lineales de variables aleatorias distribuidas independientes, son también normalmente distrubidas, se concluye que la media de la muestras es:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \tag{6.1}$$

tiene una distribución norma con una media:

$$\mu_{\overline{x}} = \frac{\mu + \mu + ... + \mu}{n} = \mu \tag{6.2}$$

y una varianza:

$$\sigma^2_{\overline{x}} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6.3}$$

Si se obtuvo la muestra de una espacio muestral con una distribución de probabilidad desconocida, la distribución muestral de la media de la muestra, sera aun aproximadamente normal, con una media μ y una varianza $\frac{\sigma^2}{n}$ si el tamaño de la muestra n es grande. Esto nos lleva a enunciar el teorema del limite central, el cual es:
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son una muestra aleatoria de tamaño n seleccionada de una población (ya sea finita o infinita) con una media μ, una varianza finita σ^2 y si $\overline{X}$ es la media de la muestra, la forma limite de la distribución es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{6.4}$$

6.2 Histograma normalizado

Se utilizó una distribución gaussiana con una media igual a 0 y una desviación estandar igual a 1. La distribución fue normalizada dividiendo el número de ocurrencias de cada evento entre el total de muestras.

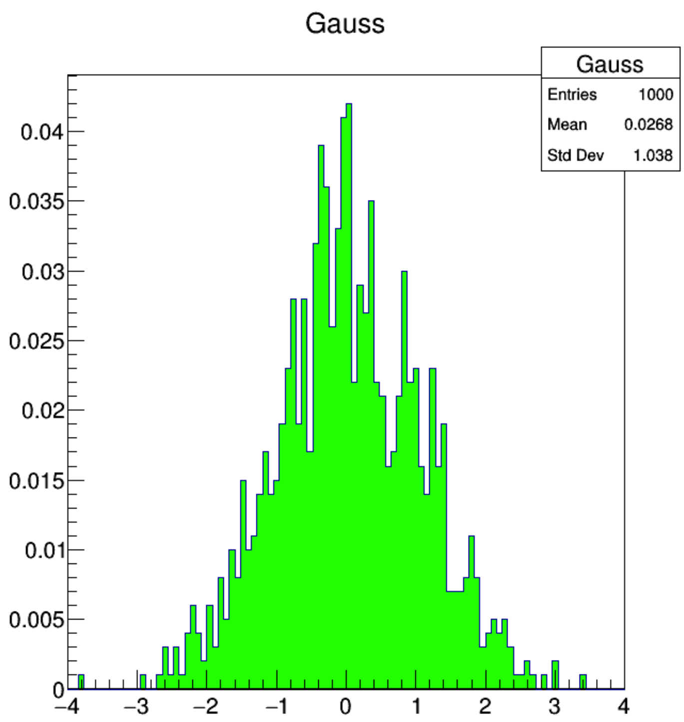


Figure 6.1: Distribución gaussiana normalizada

6.3 Paradoja de Borel-Kolmogorov

Bertrand introdujo varios problemas de probabilidad geométrica que continuan con iniciar debate. Uno de los más misteriosos es el llamado paradoja de Borel-Kolmogorov. Este problema plantea que se selecciona un punto aleatorio ω en la superficie de una esfera perfecta. Suponiendo que ω se encuentra en un arco C que representa la mitad del ecuador de la esfera. Considerando un sub-arco D que ocupa $\frac{1}{4}$ de C. ¿Cuál es la probabilidad de que ω se encuentra en D, dado que se encuentra en C? En otras palabras, ¿Cuál es la probilidad condicional $P(\omega$ falls on D $|\omega$ falls on C)? De manera mas compacta P(D|C).

Debido a que ω fue seleccionada aleatoriamente en algun punto del arco C, la probabilidad condicional de que ω se encuentre en algun sub-arco de C, es proporcional a la longitud del subarco. Por lo tanto:

$$P(D|C) = \frac{lengthofD}{lengthofC} = \frac{1}{4} \tag{6.5}$$

La solución no parece representar ningun problema, pero un segundo argumento, igualmente intuitivo, parece favorecer una conclusión diferente.

Se selecciona una coordenada C tal que es un meridiano de la esfera, cuyo punto final se encuentra en el equivalente al Polo Norte. Este punto final es compartido por los arcos C y D. En el sistema de coordenadas, D se extiende desde el Polo Norte hasta la latitud 45°. Por lo tanto la probabilidad condicional es P(latitud $\geq$ 45°| C). Por simetria alrededor del eje polar, se deberia de obtener la misma probabilidad condicional sin importar el meridiano C que se elija. Debido a que se selecciono ω aleatoriamente, la probabilidad de que ω se encuentre en una región es proporcional al área de la superficie de la región. Por lo tanto:

$$P(latitude \geq 45°) = \frac{\text{Área de la superficie polar delimitada por 45°}}{\text{Área de la superficie de la esfera}} < \frac{1}{4} \tag{6.6}$$

La paradoja ocurre debido a que ambas soluciones propuestas parecen correctas pero el resultado de la probabilidad condicional es diferente.

7

Tarea 7

7.1 Problema 1.4 del libro de Pliego

Una máquina de fabricar tornillos se desajusta de forma que produce tornillos de longitud indeterminada. Se sabe que la probabilidad de que la longitud de un tornillo sea inferior a L_1 es P_1, y de que sea superior a L_2 es P_2, donde $L_2 > L$.
Se extraen cuatro tornillos al azar, determínese:

a) Probabilidad de que los cuatro tengan longitud superior a L_1.

$$P(4 \text{ torn. superiores a } L_1) = 4(1 - P_1)^2 \tag{7.1}$$

b) Probabilidad de que tres de ellos tengan longitudes entre L_1 y L_2.

$$\begin{aligned} P(3 \text{ torn. entre } L_1 - L_2) &= 4P_1(1 - P_1 - P_2)^3 + 4P_2(1 - P_1 - P_2)^3 \\ &= 4(1 - P_1 - P_2)^3(P_1 + P_2) \end{aligned} \tag{7.2}$$

c) Probabilidad de que, a lo sumo, tres sean de longitud inferior a L_2.

$$\begin{aligned} P(\text{a lo sumo 3 torn.} < L_2) &= 1 - P(4 \text{ torn.} < L_2) \\ &= 1 - (1 - P_2)^4 \end{aligned} \tag{7.3}$$

A continuación se muestran los diagramas de árbol utilizados para analizar cada iniciso.

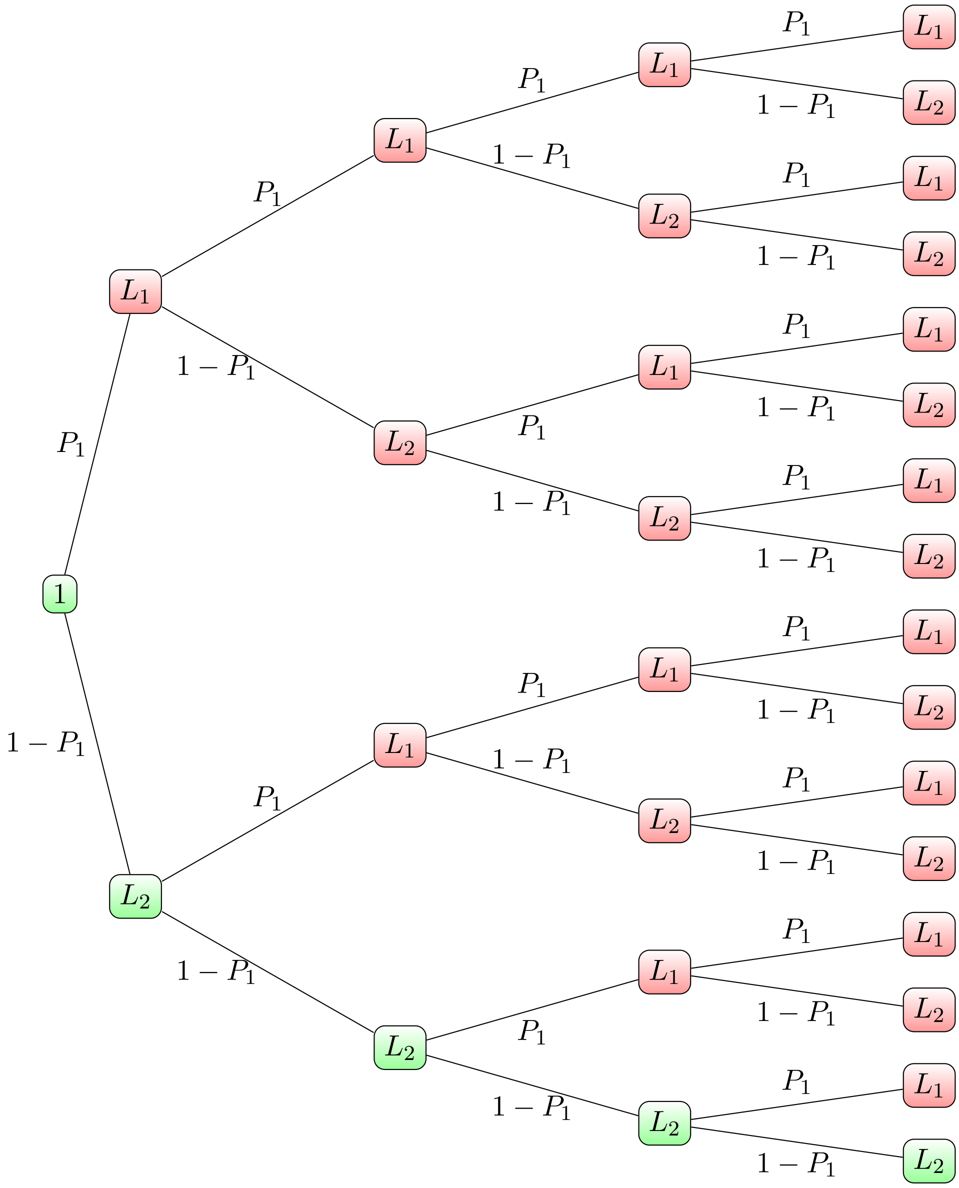


Figure 7.1: Los 4 tornillos tienen longitudes superiores a L_1

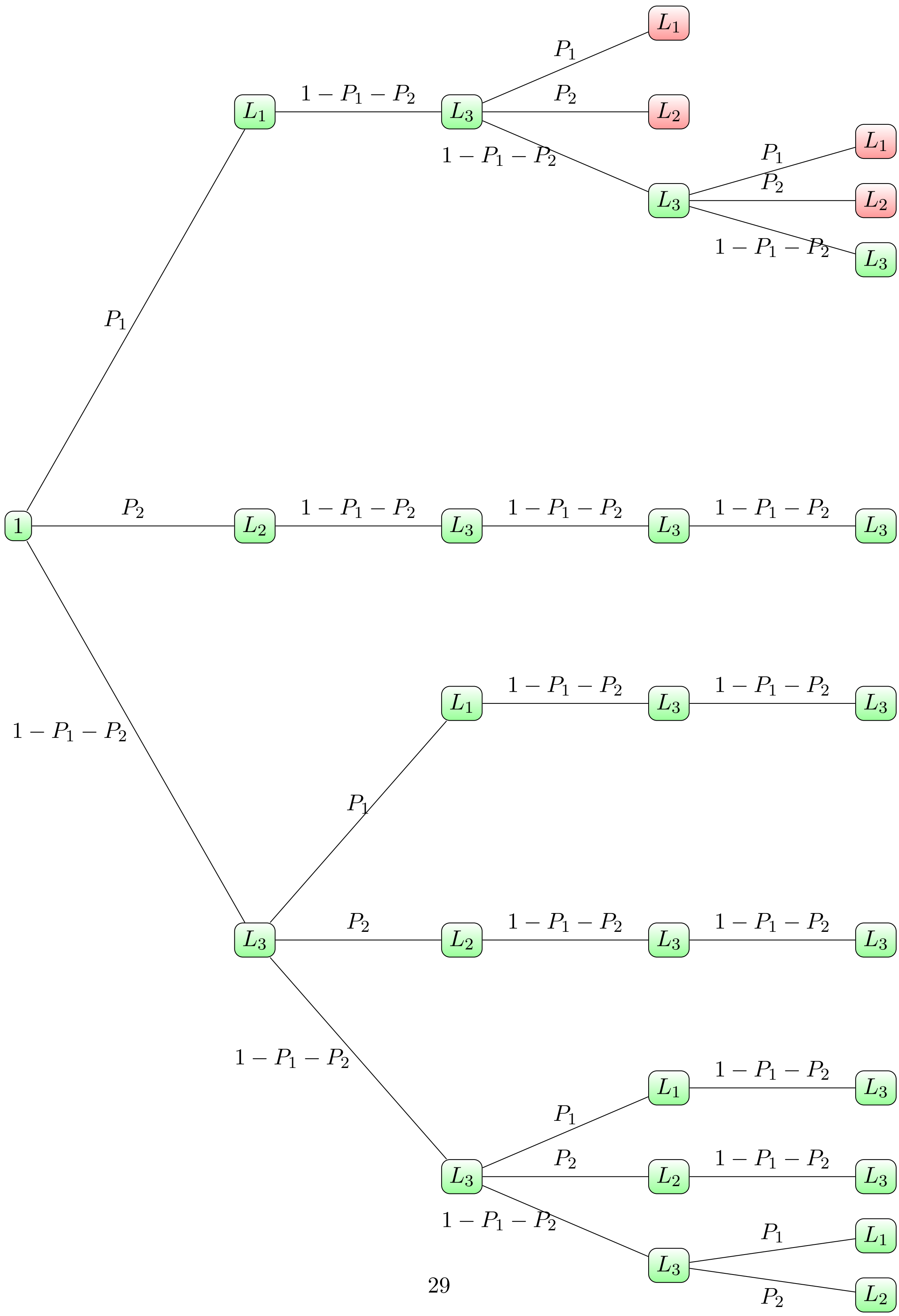


Figure 7.2: Seleccionar 3 tornillos de un tamaño entre L_1 y L_2

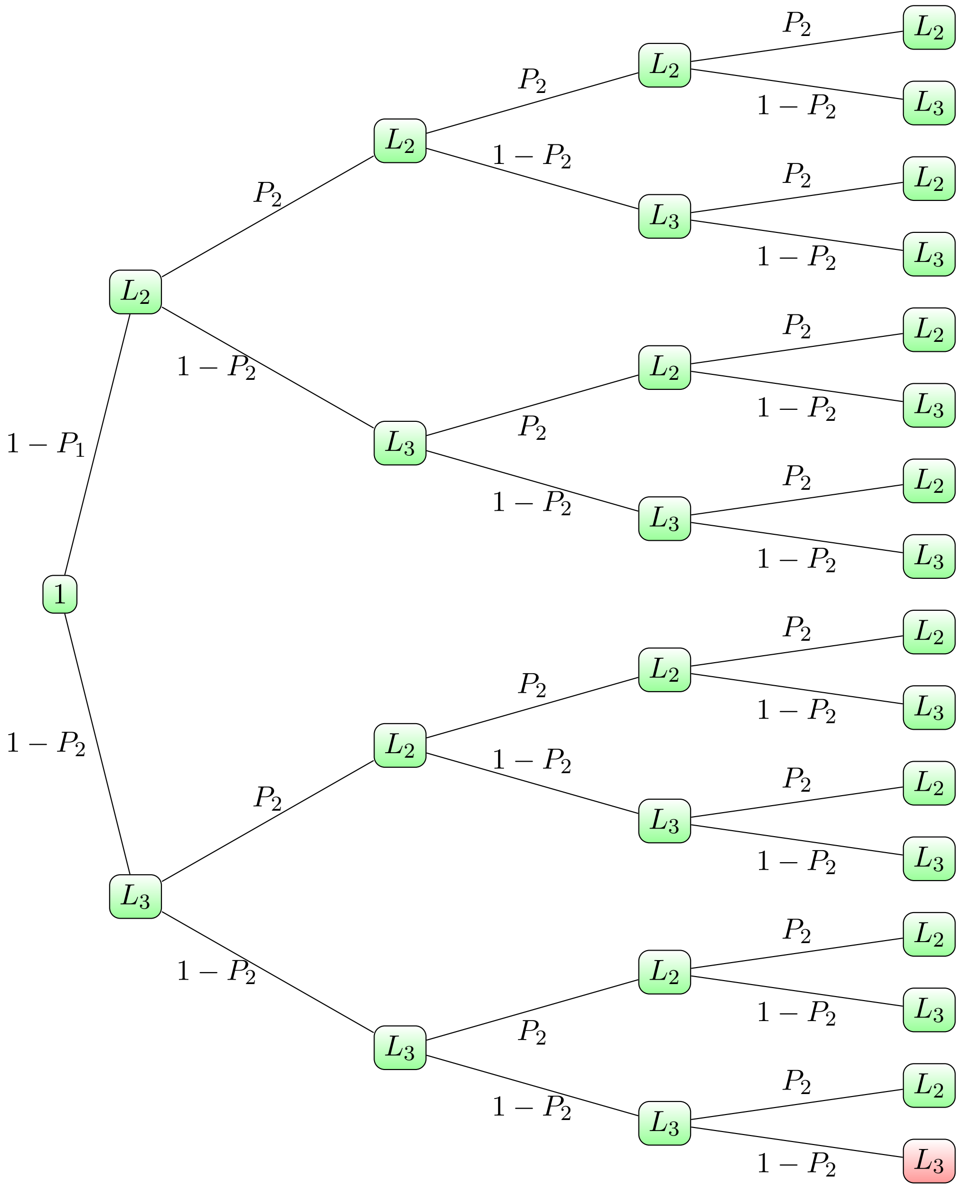


Figure 7.3: A lo máximo 3 tornillos $< L_2$

7.2 Problemas elementales de Bayes

1. Una persona es diagnosticada con una enfermedad poco común. Se sabe que hay una posibilidad de 1% de contraer la enfermedad. Se denota con la letra D al evento de contraer la enfermedad y al evento T por un resultado positivo en la prueba. Se sabe que la prueba es imperfecta por lo que $P(T|D) = 0.98$ y $P(T|\overline{D}) = 0.05$.

   a) Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona realmente tenga la enfermedad?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap D) + P(T \cap \overline{D}) \\ &= P(T|D) \cdot P(D) + P(T|\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) \\ &= 0.98 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0593 \\ P(D|T) &= \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)} = \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.0593} = 0.16526 \end{aligned} \tag{7.4}$$

2. Un estudiante realiza un examen de opción multiple (4 opciones). Suponiendo que para cada pregunta el conoce o seleecciona al azar la respuesta. Si conoce la respuesta, tiene una probabilidad de 1 de contestar correctamente, de lo contrario lo deja a la suerte con una probabilidad de 1/4 de conestar correctamente. Para pasar, el alumno necesita conestar el 70% de las preguntas de manera correcta. El estudiante se preparo para obtener el minimo aprobatorio con una probabilidad de 0.7 de conocer la respuesta a una pregunta. Dado que el estudiante conteste de manera correcta una pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente conosca la respuesta?
Se considere como evento A cuando el estudiante conoce la pregunta y evento B cuando acierta la respuesta. En base al texto de este problema se obtienen los siguientes datos:

   - $P(B|A) = 1$
   - $P(B|\overline{A}) = .25$
   - $P(A) = .70$
   - $P(\overline{A}) = .30$

   Para obtener $P(A|B)$ es necesario calcular $P(B \cap A)$ y P(B):

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ P(B \cap A) &= P(B|A) \cdot P(A) = 1 \cdot 0.7 = 0.7 \\ P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \\ P(B) &= 0.7 + 0.25 \cdot 0.30 = 0.775 \end{aligned} \tag{7.5}$$

   Aplicando el teorema de bayes se calcula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.7}{0.775} = 0.9032 \tag{7.6}$$

8

Tarea 8

8.1 ¿Por qué los astronautas no lloran?, La gran ciencia de las pequeñas cosas – Jorge Alcalde

8.1.1 Esperanza matemática

En estadística la esperanza matemática (también llamada esperanza, valor esperado, media poblacional o media)de una variable X, es un número E[X] que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio.

Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Por lo tanto, representa la cantidad media que se espera como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede no ser esperado en el sentido más general de la palabra – el valor de la esperanza puede ser improbable o incluso imposible. Por ejemplo, el valor esperado cuando tiramos un dado equilibrado de 6 caras es 3.5. El calculo se muestra en la siguiente ecuación:

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5 \tag{8.1}$$

y cabe destacar que 3,5 no es un valor posible al rodar el dado. En este caso, en el que todos los sucesos son de igual probabilidad, la esperanza es igual a la media aritmética. Una aplicación común de la esperanza matemática es en las apuestas o los juegos de azar. Por ejemplo, la ruleta americana tiene 38 casillas equiprobables. La ganancia para acertar una apuesta a un solo número paga de 35 a 1 (es decir, cobramos 35 veces lo que hemos apostado y recuperamos la apuesta, así que recibimos 36 veces lo que hemos apostado). Por tanto, considerando los 38 posibles resultados, la esperanza matemática del beneficio para apostar a un solo número es:

$$E(X) = (-1\frac{37}{38}) + (35\frac{1}{38}) = -0.0526 \tag{8.2}$$

Por lo tanto uno esperaría, en media, perder unos 5 céntimos por cada euro que apuesta, y el valor esperado para apostar 1 euro son 0.9474 euros. En el mundo de las apuestas, un juego donde el beneficio esperado es cero (no ganamos ni perdemos) se llama un juego justo.
Para una variable aleatoria discreta con valores posibles x_1, x_2, ... x_n y sus probabilidades representadas por la función de probabilidad $p(x_i)$ la esperanza se calcula como el ejemplo:

$$E(X) = x_1 p(x_1) + ... + x_n p(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \tag{8.3}$$

Las propiedades de la esperanza matemática son:

1) Si X es siempre positiva, entonces E(X) siempre lo es.

2) La esperanza matemática de una constante es igual a esa misma constante, es decir, si c es una constate, entonces $E[c] = c$.

3) Si X está delimitada por dos números reales, a y b tal que: $a < X < b$, entonces también lo está su media: $a < E(X) < b$

4) La esperanza es un operador lineal.

8.1.2 Un pájaro en mano vale un poco más que 2.48 volando

En el segundo capítulo del libro, el autor utiliza el ejemplo de la loteria para explicar que ante posibilidades infimas de ganar, las personas no comprendemos realmente dichas cantidades pero participamos en el juego ya que entendemos que al final de cuentas, una persona ganara. Esta esperanza de ganar es utilizada por los organizadores de loterias para obtener ganancias debido a que ellos saben que la esperanza matemática de ganar la loteria es menor que 1 y por lo tanto se podria considerar injusto para los jugadores. Se podria suponer que las personas dejarian de jugar debido a que las probabilidades de ganar son muy bajas pero el temor a perder la oportunidad de ganar es más terrible ya que las personas dan mayor valor a las cosas que poseen y les cuesta más dejarlas ir.

8.2 Último teorema de Fermat según los Simpsons

Las hazañas de Homero Simpson llegan a su cénit en el episodio: El mago de Evergreen Terrace. En este episodio Homero, trata de seguir los pasos de Edison por lo que construye diversos aparatos con resultados desastrosos. Durante la etapa de desarrollo de estos inventos, se ve a Homero trabajando con ecuaciones en un pizarrón. Estas ecuaciones comprenden diversos temas de las matemáticas pero la mas interesante de ellas es la segunda que trata sobre el último teorema de Fermat.

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12} \tag{8.4}$$

La ecuación parece inocua a primera vista, a menos que se tengan conocimentos sobre la historia de las matemáticas, debido a que Homero parece haber logrado lo imposible y ha encontrado una solución al último teorema de Fermat.
Pierre de Fermat propuso su teorema alrededor de 1637, mientras leia un libro llamado Aritmética, escrito por Difanto de Alejandría en donde vio la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{8.5}$$

Fermat se propuso encontrar soluciones con números enteros para exponentes mayores a dos, pero al solo encontrar soluciones triviales determino que no era posible encontrar soluciones con números enteros con n> 2 y dejo escrita al margen de libro, una de las frases más frustrantes de la historia de las matemáticas: He descubierto una prueba maravillosa de esto, que este margen es demasiado estrecho para contener.

Tuvieron que pasar más de 300 años para que Andrew Wiles lograr demostrar el teorema de Fermat. Una demostración que le tomó 7 años de trabajo y 130 páginas de fórmulas matemáticas. Para lograr utilizó muchas herramientas que no se habian desarrollado en los tiempos de Fermat por lo que se cree que Fermat nunca demostro realmente su teorema.

Retomando el tema de la ecuación mencionada anteriormente, se podria creer que Homero logro contradecir al teorema de Fermat, ya que si se introducen dichos numeros en una calculadora convencional, se obtendra la igualdad propuesta. Pero al utilizar una calculadora cientifica se descubrira que la ecuación escrita por Homero es una casi solución con un margen de error de 0.0000000002 pero al no ser una solución real, el último teorema de Fermat sigue intacto.

8.3 Notación de Einstein

Se denomina notación de Einstein o notación indexada a la convención utilizada para abreviar la escritura de las sumatorias, donde se suprime el termino de la sumatoria($\sum$). Este convenio fue introducido por Albert Einstein en 1916.
Dada una expresión lineal en la que se escriben todos sus términos en forma explicita:

$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n \tag{8.6}$$

Se puede escribir de la forma:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \tag{8.7}$$

La notación de Einstein botiene una expresión aun mas condensada eliminando el signo de la sumaria y entendiendo que en la expresión resultante un índice indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo.

$$u = u_i x_i \tag{8.8}$$

Esta notación nos permite reescribir el siguiente sistema de ecuaciónes:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\
S_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\
S_3 &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3
\end{aligned} \tag{8.9}
$$

De la siguiente forma:

$$
\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{8.10}
$$

8.3.1 Epsilon de Levi-Civita

Es definido por:

$$
\epsilon_{i,j,k,..} = \begin{bmatrix} 1, \text{ si (i,j,k,...) es una permutación par de (1,2,3,...)} \\ -1, \text{ si (i,j,k,...) es una permutación impar de (1,2,3,...)} \\ 0, \text{ si dos índices son los mismos} \end{bmatrix} \tag{8.11}
$$

8.3.2 Producto punto

Dados $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{8.12}
$$

Obtener $\boldsymbol{A}$*$\boldsymbol{B}$:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B})_{ik} &= a_{ij}bjk = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \\
(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2) &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3) &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\
(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1) &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\
(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2) &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\
(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3) &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\
(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1) &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\
(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2) &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\
(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3) &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}
\end{aligned} \tag{8.13}
$$

La matriz resultante C es:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{8.14}
$$

8.3.3 Producto cruz

Obtener $\boldsymbol{A}\text{x}\boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_{\hat{i}} &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{B}_k \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_1 &= \varepsilon_{11k}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{12k}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{13k}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_k \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_1 &= \varepsilon_{111}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{112}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{113}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{121}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{122}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{123}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{131}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{132}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{133}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_2 &= \varepsilon_{21k}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{22k}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{23k}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_k \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_2 &= \varepsilon_{211}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{212}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{213}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{221}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{222}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{223}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{231}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{232}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{233}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_3 &= \varepsilon_{31k}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{32k}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_k + \varepsilon_{33k}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_k \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_3 &= \varepsilon_{311}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{312}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{313}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{321}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{322}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{323}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\
&+ \varepsilon_{331}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \varepsilon_{332}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \varepsilon_{333}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3
\end{aligned} \tag{8.15}$$

$$(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{111}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{112}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{113}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{121}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{122}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{123}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{131}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{132}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{133}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

$$(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{211}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{212}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{213}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{221}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{222}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{223}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{231}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{232}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{233}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

$$(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{311}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{312}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{313}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{321}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{322}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{323}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 \\ +\varepsilon_{331}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 & +\varepsilon_{332}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 & +\varepsilon_{333}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

Aplicando el epsilon de Levi-Civita se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_1 &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_2 &= \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 \\
(\boldsymbol{A}x\boldsymbol{B})_3 &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1
\end{aligned} \tag{8.19}$$

9

Tarea 9

9.1 Ventaja

Los casinos, los operadores de loterías y los corredores de apuestas desde sus orígenes históricos siempre han estado muy seguros respecto de la rentabilidad que produce la explotación comercial de las dos fuentes que efectivamente les generan riqueza, pues saben que en los juegos de azar a la larga termina imponiéndose la Ventaja Matemática (House Edge) a su favor, y también saben que es imparable la recaudación de la Justa Comisión (Rake) en aquellos juegos y apuestas que lo permiten, es decir, al final esos empresarios siempre logran obtener ingresos sobre el dinero que es apostado por los jugadores, haciendo que los juegos de azar y las apuestas sean un negocio muy rentable.

Grandes matemáticos desde finales del siglo XIX han coincidido desde la óptica de la probabilidad y de la estadística que es imposible evitar que la Ventaja Matemática a favor de la Banca se imponga sobre el jugador una vez que el comportamiento del juego tiende hacia la Regularidad Estadística. En otras palabras, en aquellos juegos que se basan en la explotación de la Ventaja Matemática a favor de la Banca, el jugador está condenado de forma inevitable a que un porcentaje de su apuesta prácticamente ya sea propiedad de la Banca desde el mismo momento en que cada dólar es colocado sobre el tapete de la mesa de juego.

Al respecto se dice que alguna vez el gran científico Albert Einstein analizó el juego de la ruleta francesa, y a su mente de gran genio le bastaron sólo unos pocos segundos para concluir que: Usted no puede vencer a la ruleta, a menos que robe el dinero de la mesa cuando el crupier no está mirando.

Más recientemente, el matemático y experto en juegos de azar Patrick Billingsley , autor de la excelente obra Probability and Measure (1975), afimó que: Ningún sistema matemático de apuestas puede convertir un juego de azar, que es desfavorable para el jugador por causa de la ventaja de la casa, en un negocio rentable.

La Ventaja Matemática es real, existe, es irrefutable mediante el uso de las mismas matemáticas, ya que la Ventaja Matemática está establecida mediante las reglas particulares que rigen cada juego de azar, y por lo tanto, mientras el jugador se someta de forma dócil a esas mismas reglas y el juego se comporte normalmente, entonces a la larga el apostador terminará perdiendo a favor de la Banca un porcentaje de cada dólar que apueste en cada jugada. En efecto, son las reglas de la ruleta francesa las que establecen que el premio a entregar sobre una apuesta plena corresponde a la proporción 35 a 1, mientras que las probabilidades reales de perder el dólar apostado son de 36 a 1, y esa desproporción matemática a favor de la Banca está garantizada por el respeto a las reglas particulares de ese juego que se impone en cualquier casino. Es por ese motivo que Albert Einstein respecto de la ruleta francesa concluyó que la única manera segura de hacer fortuna en la ruleta era apartarse totalmente de las reglas matemáticas que rigen ese juego y tomar de la mesa el dinero que más se pueda cuando nadie esté mirando.

9.1.1 Un pájaro en mano vale 2.48 en el aire

En base a la formula de la media aritmética:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \tag{9.1}$$

Se obtuvo el valor de un pájaro en mano de la siguiente forma:

- a_i = valor propuesto por alguien que no posee el objeto.
- b_i = valor propuesto por alguien que posee el objeto.
- $\overline{x}_a$ = Media aritmética de quienes no poseen el objeto.
- $\overline{x}_b$ = Media aritmética de quienes si poseen el objeto.
- r = relación entre las dos medias aritméticas.

$$r = \frac{\dfrac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n_b}}{\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n_a}} = \frac{\overline{x}_b}{\overline{x}_a} \tag{9.2}$$

Posteriormente se obtuvo la media aritmética de la variable r que se obtuvo en diferentes:

$$\overline{x}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_n}{n_r} = 2.48 \tag{9.3}$$

10

Tarea 10

10.1 Congruencia de Zeller

Es un algoritmo ideado por Julius Christian Johannes Zeller para calcular el dia de la semana de cualquier fecha del calendrario.

$$h = (q + \frac{13 \cdot (m+1)}{5} + K + \frac{K}{4} + \frac{J}{4} - 2J) \bmod 7 \tag{10.1}$$

Donde:

- h es el dia de la semana (0=Sabado, 1=Domingo,..., 6=Viernes).
- q es el dia del mes.
- m es el mes (3=Marzo, 4=Abril,...,13=Enero, 14=Febrero).
- K es el año en la centuria (año mod 100).
- J es la centuria (año/100).

Para modificar el algoritmo de manera que entregue los dias de la semana comenzando por el 1=Lunes, se aplica la siguiente formula:

$$d = ((h+5) \bmod 7) + 1 \tag{10.2}$$

10.1.1 Análisis

Esta fórmula se basa en la observación de que el día de la semana progresa de una manera predecible basada en cada subparte de esa fecha. Cada término de la fórmula se usa para calcular el desplazamiento necesario para obtener el día correcto de la semana. Por lo tanto las diversas partes del algoritmo pueden entenderse de la siguiente forma:

- q representa la progresión del día de la semana basada en el día del mes, dado que cada día sucesivo resulta en un desplazamiento adicional de 1 en el día de la semana.

- K representa la progresión del día de la semana basada en el año. Suponiendo que cada año tiene 365 días, la misma fecha de cada año sucesivo será desplazada por un valor de (365 mod 7 = 1).
- Como hay 366 días en cada año bisiesto, esto de debe tener en cuenta añadiendo un día adicional al valor de desplazamiento del día de la semana. Esto se logra añadiendo $\frac{K}{4}$ al desplazamiento. Este término se calcula como un resultado entero. Cualquier resto que pueda haber es descartado.
- Usando una lógica similar, se puede calcular la progresión del día de la semana para cada centuria observando que hay 36524 días en una centuria normal, y 36525 en cada centuria divisible por 400. Dado que 36525 mod 7 = 6 y 36524 mod 7 = 5, el término: $\frac{J}{4} - 2J$ refleja esto (de nuevo usando división entera y descartando cualquier resto fraccional). Para evitar los números negativos, este término se puede reemplazar por $5J + \frac{J}{4}$ con un resultado equivalente.
- El término $\frac{13(m+1)}{5}$ se puede explicar de la siguiente manera. Zeller observó que, al iniciar cada año el 1 de marzo, el día de la semana de cada mes sucesivo progresaba multiplicando el mes por un valor constante y descartando el resto fraccional.
- La función global, mod 7, normaliza el resultado para que se encuentre en el intervalo de 0 a 6, lo que da el índice del día de la semana correcto para la fecha analizada.

10.2 Variables Aleatorias

10.2.1 Repaso de funciones

Sean S y T conjuntos arbitrarios. Supóngase que a cada $s \in S$ se asigna un elemento único de T; la colección f de tales elemenos se llama función (o aplicación) de S en T y se escribe $f : S \to$T. Escribimos $f(s)$ en lugar del elemento de T que f hace corresponder a $s \in S$ y lo llamamos la imagen de s por f o valor de f en s. La imagen $f(A)$ de un subconjunto A de S y la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de un subconjunto B de T se definen por:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(s) : s \in A\} \\ f^{-1}(B) &= \{s : f(s) \in B\} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Supongamos ahora que S es el espacio muestral de algún experimento. Como anotamos previamente, los resultados del experimento, es decir, los puntos muestrales de S, no necesitan ser números. Sin embargo, frecuentemente deseamos asignar un número determinado a cada resultado; esto puede ser la suma de los puntos de un par de dados, el número de pares en una mano de poker, etc. Tal asignación se denomina variable aleatoria; más precisamente.

Definición:
Una variable aleatoria X de un espacio muestral S es una función de S en el conjunto R de los números reales tal que la imagen inversa de cada intervalo de R es un evento de S.

Si S es un espacio discreto en el cual cada subconjunto es un suceso, entonces cada función de valores reales de S es una variable aleatoria.

Si X y Y son variables aleatorias del mismo espacio muestras S, entonces X+Y, X+k, kX y XY (donde k es un número real) son funciones de S definidas por:

$$\begin{array}{ll} (X+Y)(s) = X(s) + Y(s) & (kX)(s) = kX(s) \\ (X+k)(s) = X(s) + k & (XY)(s) = X(s)Y(s) \end{array} \tag{10.4}$$

Se utiliza la notación $P(X = a)$ y $P(a \leq X \leq b)$ para la probabilidad de los sucesos X toma el valor de a y X toma valores en el intervalo [a,b]. Esto es:

$$\begin{array}{c} P(X = a) = P(\{s \in S : X(s) = a\}) \\ P(a \leq X \leq b) = P(\{s \in S : a \leq X(s) \leq b\}) \end{array} \tag{10.5}$$

10.2.2 Distribución y esperanza de una variable aleatoria finita

Sea X una variable aleatoria de un espacio muestral S con el conjunto imagen finito, donde, X(S) = $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Convertimos X(S) en un espacio probabilidad definiendo las probabilidades x_i como P(X=x_i) que escribimos $f(x_i)$. Esta función, definida por $f(x_i) = P(X = x_i)$ se llama la función de distribución o probabilidad de X y se expresa generalmente en forma de tabla:

x_1	x_2	...	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

La distribución f satisface las condiciones:

$$\text{(i) } f(x_i) \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{(ii) } \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \tag{10.6}$$

Ahora si X es una variable aleatoria con la distribución anterior, entonces la media o esperanza (valor esperado) de X, denotada por E(x) o μ_X se define como:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \tag{10.7}$$

Esto es, E(X) es el promedio ponderado de los valores posibles de X, cada valor ponderado por su probabilidad.

Ejemplo 1

Se lanza un par de dados corrientes. Obtenemos el espacio finito equiprobable S que consta de las 36 parejas ordenadas de números entre 1 y 6.

$$S = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$$

Sea X una variable aleatoria que hace corresponder a cada punto (a,b) de S el máximo de sus números, o sea, X(a,b) = max(a,b). Entonces X es una variable aleatoria cuya imagen es:

$$X(S) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Calculamos la distrubución f de X:

$$\begin{aligned}
&f(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}\\
&f(2) = P(X=2) = P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\}) = \frac{3}{36}\\
&f(3) = P(X=3) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}) = \frac{5}{36}\\
&f(4) = P(X=4) = P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\}) = \frac{7}{36}\\
&f(5) = P(X=5) = \frac{9}{36}\\
&f(6) = P(X=6) = \frac{11}{36}
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Esta información se pone en forma de tabla como sigue:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Calculamos la media X:

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.47 \tag{10.9}$$

Ahora sea Y que hace corresponder a cada punto (a,b) de S la suma de sus números, o sea, $Y(a,b) = a+b$. Entonces Y es también una variable aleatoria de S con un conjunto imagen.

$$Y(S) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Obtenemos, por ejemplo, $g(4) = \frac{3}{36}$ del hecho de que, (1,3),(2,2) y (3,1) son aquellos puntos de S para los que la suma de componentes es 4; por tanto:

$$g(4) = P(Y=4) = P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

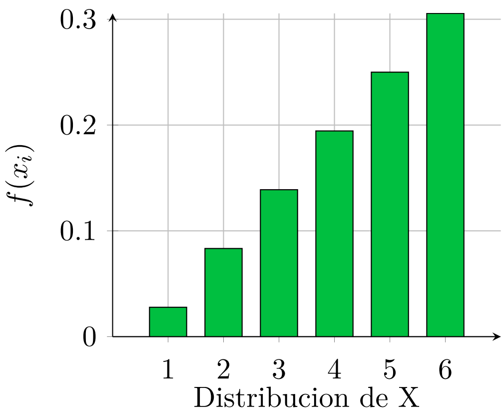
y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La media Y se calcula como sigue:

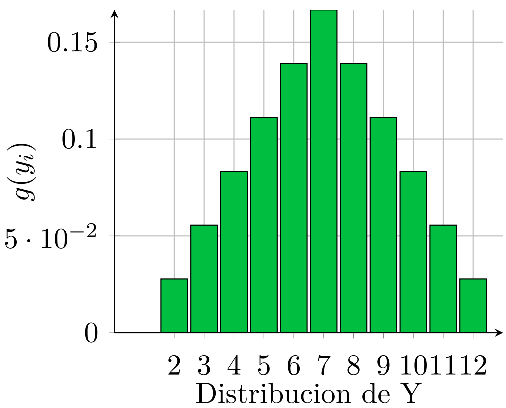
$$E(Y) = \sum y_i g(y_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + ... + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \tag{10.10}$$

Los siguientes diagramas describen gráficamente las distribuciones anteriores:

(a) Frecuencia de la suma de los dados



(b) Frecuencia de la suma de los dados



10.2.3 Varianza y Desviación estandar

La media de una variable aleatoria X mide, en cierto sentido, el valor promedio de X. El concepto siguiente, el de varianza de X, mide el esparcimiento o dispersion de X. La varianza de X, denotada por var(X), se define como:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = E((X - \mu)^2) \tag{10.11}$$

Donde μ es la media de X. La desviación estándar de X, denotada por σ_X es la raíz cuadrada(no negativa) de var(X):

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} \tag{10.12}$$

Utilizando las ecuaciones 4 y 5 se puede obtener otra expresión más útil para calcular la varianza de la variable aleatoria.

$$\begin{aligned} \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) &= \sum (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum x_i f(x_i) + \mu^2 \sum f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Ejemplo 2

Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 1. La distribución X es:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

A partir de la media obtenida en el ejemplo anterior($\mu_X = 4.47$) calculmamos la varianza y la desviación estándar de X. Primero calculamos $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum x_i^2 f(x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{38} = 21.97 \\ var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = 21.97 - 19.98 = 1.99 \\ \sigma_X &= \sqrt{1.99} = 1.4 \end{aligned} \tag{10.14}$$

10.2.4 Distribución conjunta

Sean X y Y variables aleatorias de un espacio muestral S con los respectivos conjuntos imagen:

$$X(S) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \quad \text{y} \quad Y(S) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

Formamos el conjunto producto:

$$\begin{aligned} X(S) \times Y(S) &= \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_n, y_m)\} \\ h(x_i, y_j) &= P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned} \tag{10.15}$$

A esta función se le llama distribución conjunta o función de probabilidad conunta de X y Y. Esta distribución se representa por lo general en forma de tabla:
Las funciones anteriores f y g se define por:

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) \quad \text{y} \quad g(y_i) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_j) \tag{10.16}$$

x y	y_1	y_2	...	y_m	Suma
x_1	$h(x_1, y_1)$	$h(x_1, y_2)$	...	$h(x_1, y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$h(x_2, y_1)$	$h(x_2, y_2)$	...	$h(x_2, y_m)$	$f(x_2)$
...	...	...	...	...	...
x_n	$h(x_n, y_1)$	$h(x_n, y_2)$	...	$h(x_n, y_m)$	$f(x_n)$
Suma	$g(y_1)$	$g(y_2)$	...	$g(y_m)$	

$f(x_i)$ es la suma de los elemenos de la fila i-ésima y $g(y_i)$ es la suma de los elementos de la columna j-ésima; son llamadas distribuciones marginales y son, de hecho, las distribuciones (individuales de X y Y respectivamente.

Ahora si X y Y son variables aleatorias con la distribución conjunta anterior (y las respectivas medias μ_X u μ_Y), entonces la covarianza de X y Y denotada por cov(X,Y), se define por:

$$cov(X,Y) = \sum_{i,j}(x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)h(x_i, y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j h(x_i, y_j) - \mu_X\mu_Y = E(XY) - \mu_X\mu_Y \tag{10.17}$$

La correlación de X y Y, denotada por ρ(X,Y), se define por:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{10.18}$$

Ejemplo 3

Se lanza un par de dados corrientes. Obtenemos el espacio equiprobable finito S que esta formado por 36 parejas ordenadas de números entre 1 y 6. Sean X y Y las variables aleatorias de S en el ejemplo 5.1, o sea, X designa el máximo número y Y la suma de los números de cada punto de S. La distribución conjunta de X y Y es la siguiente:
Por ejemplo, para el caso h(3,5) solo hay dos combinaciones que cuyo número mayor es 3 y la suma de los dos dados es igual a 5:

$$h(3,5) = P(X = 3, Y = 5) = P(\{(3,2),(2,3)\} = \frac{2}{36}$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum x_i y_j h(x_i, y_j) \\
&= 1\cdot 2\cdot \frac{1}{36} + 2\cdot 3\cdot \frac{2}{36} + 2\cdot 4\cdot \frac{1}{36} + ... + 6\cdot 12\cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{1232}{36} = 34.2 \\
Cov(X,Y) &= E(XY) - \mu_X\mu_Y = 34.2 - (4.47)(7) - 2.9 \\
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{2.9}{(1.4)(2.4)} = 0.86
\end{aligned} \tag{10.19}$$

X Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Suma
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
Suma	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

10.2.5 Variables aleatorias independientes

Se dice que un número finito de variables aleatorios X, Y, ..., Z de un espacio muestral S son independientes si:

$$P(X = x_i, Y = y_j, ..., Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j)...P(Z = z_k)$$

Para valores x_i, y_j,...,z_k. Ahora si X y Y tienen las distribuciones f y g, respectivamente, ya la distribución conjunta h, entonces la ecuación anterior se puede describir como:

$$h(x_i, y_j) = f(x_i)g(y_j) \tag{10.20}$$

En otras palabras, X y Y son independientes si cada elemento $h(x_i, y_i)$ es el producto de sus elementos marginales.

10.2.6 Funciones de una variable aleatoria

Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S. Entonces se dice que Y es una función de X si Y puede representarse por alguna función Φ de valor real de una variable real Y = $\Phi(X)$; esto es, si Y(s) = $\Phi[X(s)]$ para todo $s \in S$

10.2.7 Variables aleatorias discretas en general

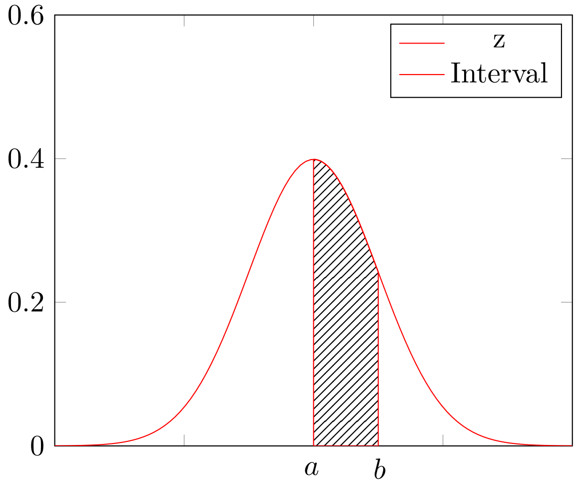
Ahora supongase que X es una variable aleatoria de S con un conjunto imagen infinito contable; o sea, X(S) = $\{x_1, x_2, ...\}$. Tales variables aleatorias junto con aquellas de conjuntos imagen finitos son llamadas variables aleatorias discretas. Como en el caso finito, construimos X(S) en un espacio de probabilidad definiendo la probabilidad de x_i como $f(x_i) = P(X = x_i)$ y llamamos f la distribución de x:

x_1	x_2	x_3	...
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...

En el caso de las variables aleatorias discretas se manejan las ecuaciones utilizadas anteriormente en el cálculo de la media, varianza, desviación estandar y covarianza.

10.2.8 Variables aleatorias continuas

Supóngase que X es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen X(S) es un conjunto continuo de números tales como un intervalo. Recalcando de la definición de variables aleatorias que el conunto $\{a \leq X \leq b\}$ es un suceso de S y por consiguiente, la probabilidad P($a \leq X \leq b$) está bien definida. Suponemos que existe una función continua especial $f : R \to R$ tal que P($a \leq X \leq b$) es igual al área bajo la curva de f entre x=a y x=b (como se muestra en la figura).



Para el caso de f que es la función de distribución o de probabilidad continua (o función de densidad) de X, se expresa con la siguiente ecuación:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{10.21}$$

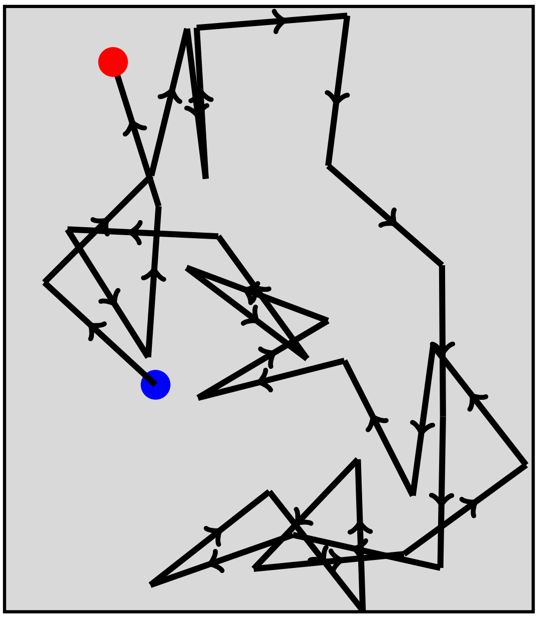
El valor esperado E(X) se define por:

$$E(X) = \int_R xf(x)dx \tag{10.22}$$

La varianza var(X) se define por:

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_R x^2 f(x)dx - \mu^2 \tag{10.23}$$

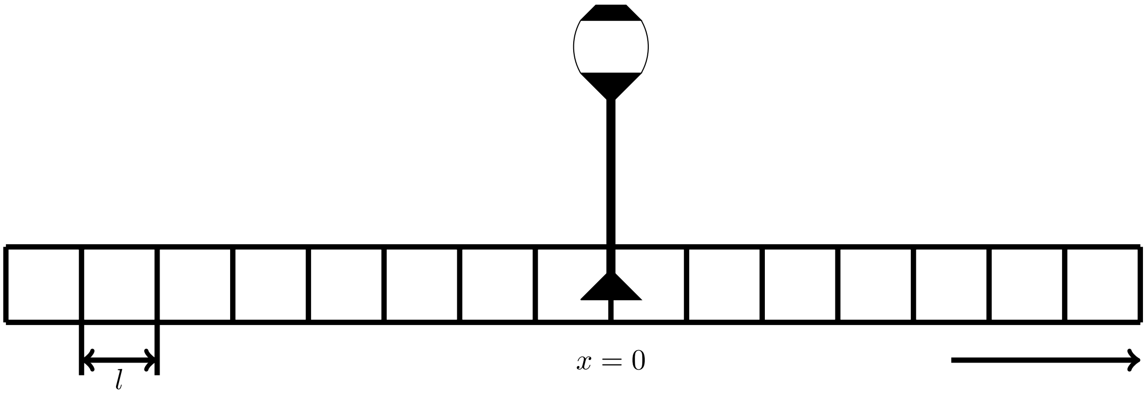
10.3 Caminata al azar



La caminata aleatoria es una formalización matemática de la trayectoria que resulta de hacer sucesivos pasos aleatorios. Por ejemplo, la ruta trazada por una molécula mientras viaja por un líquido o un gas, el camino que sigue un animal en su búsqueda de comida, el precio de una acción fluctuante y la situación financiera de un jugador pueden tratarse como una caminata aleatoria. El término caminata aleatoria fue introducido por Karl Pearson en 1905. Los resultados del estudio de las caminatas aleatorias han sido aplicados a muchos campos como la computación, la física, la química, la ecología, la biología, la psicología o la economía. En particular en este último campo la teoría del paseo aleatorio de Burton G. Malkiel en su obra A Random Walk Down Wall Street se fundamenta en la hipótesis de los mercados eficientes, desarrollado en tres formas o hipótesis. En física el modelo ha servido, por ejemplo, para modelar el camino seguido por una molécula que viaja a través de un líquido o un gas (movimiento browniano). En ecología, se emplea para modelar los movimientos de un animal de pastoreo, etc. Varios tipos diferentes de caminos aleatorios son de interés. A menudo, los caminos aleatorios se suponen que son cadenas de Márkov o proceso de Márkov, pero otros caminos más complicados también son de interés. Algunos caminos aleatorios se dan en grafos finitos, otros en la recta, en el plano, o en dimensiones mayores, mientras algunos caminos aleatorios se dan en grupos.

10.3.1 Caminata al azar en una dimensión

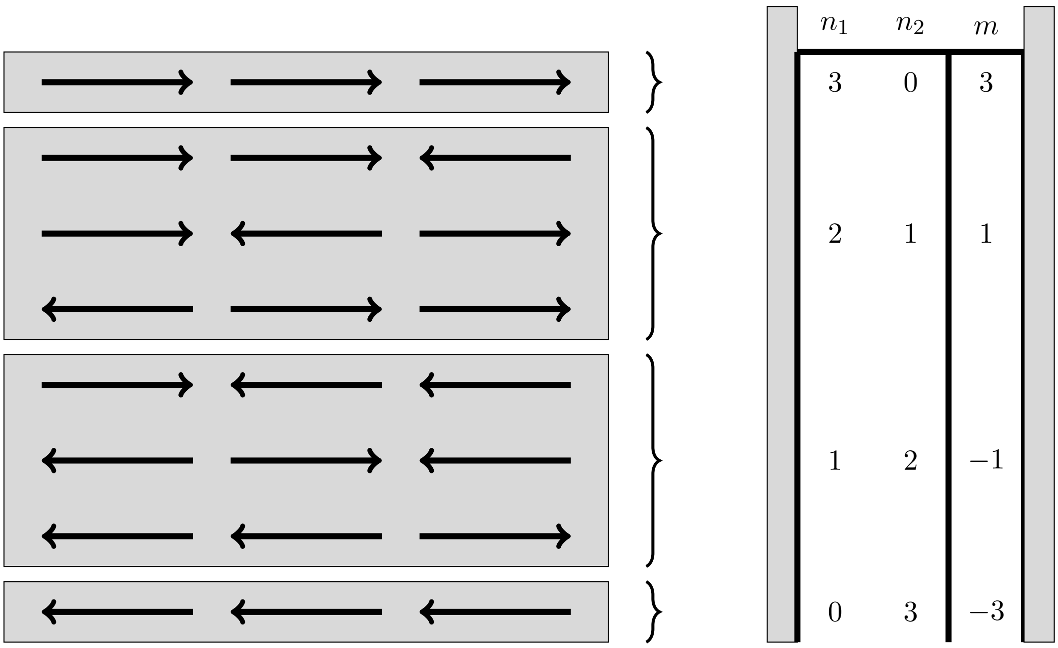
El primer caso de estudio es el de la caminata al aleatoria unidimensional, que se muestra en la siguiente figura.



A partir de esta figura se define:

- n_1 = número de pasos a la derecha.
- n_2 = número de pasos a la izquierda.
- N = número total de pasos.

En la siguiente figura se muestra los posibles escenarios para N=3 y la obtención de la posición final m.



En base a las dos figuras anteriores se pueden definir los siguientes terminos:

- N = $n_1 + n_2$ La cantidad total de pasos es la suma de los pasos a la derecha y a la izquierda.

- m = $n_1 - n_2$: La posición final se obtiene restando la cantidad de pasos a la izquierda de la cantidad de pasos a la derecha.
- $-N \leq m \leq N$: El valor de m se encuentra en el rango delimitado por la cantidad de pasos totales.
- x = ml: La posición final con unidades es igual a m multiplicada por el tamaño de paso l.
- Las dos primeras definiciones nos permiten definir m solamente en terminos de n_1

$$m = n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N \tag{10.24}$$

- El número total de formas en que se pueden dar n pasos en total considerando n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda es:

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} \tag{10.25}$$

Demostracón:

- Sea S un conjunto que consiste de N objetos.
  n_1 es un subconjunto en que cada elemento es indistiguible entre si.
  n_2 es un subconjunto en que cada elemento es indistiguible entre si.
- Suponiendo que $n_1 + n_2 = N$, el número de permutaciones se obtiene mediante la regla de multiplicación.

$$\binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2} = \frac{N!}{n_1(N-n_1)!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!} \tag{10.26}$$

10.4 Calcular π

π es la longitud de la circurcunferencia dividida por el diámetro de un círculo. Su valor, la razón de estas dos longitudes, no depende del tamaño del círculo. Tanto si el círculo es grande como si pequeño, π es en efecto, una constante matemática. El círculo es el hábitat natural de π, pero en matemáticas aparece en muchas partes.
Sin embargo es imposible conocer el valor exacto de π porque es un número irracional. La expansión decimal es infinita, y no sigue un patrón predecible. Los 20 primeros decimales son 3.14159265358979323846...
Para calcular π se puede utilizar la serie de Leibniz:

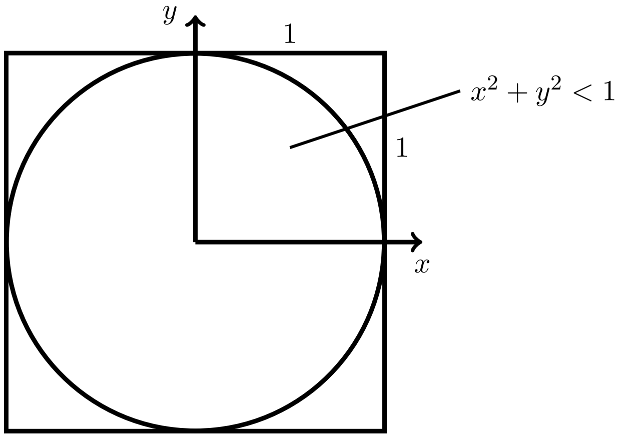
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ... \tag{10.27}$$

El problema es que esta es exasperantemente lenta en su convergencia en π por lo que a lo largo de la historia se han desarrollado diversos algoritmos para el cálculo de π, los cuales se describen a continuación.

10.4.1 Algoritmos

10.4.2 Algoritmo del tablero de dardos

Este algoritmo se basa en un círculo de radio r=1 inscrito dentro de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 2r=2. Los dardos son lanzados al tablero, siguiendo una distribución normal, y se determina como acierto cuando el dardo cae dentro del area delimitada por el círculo.



El procedimiento es sencillo si se considera solamente el primer cuadrante. A medida que el número de lanzamientos N, aumenta, el núumero de aciertos t aproxima la relación del area del cuadrante del círculo con el area del cuadrante del tablero.

$$\begin{aligned} lim\frac{t}{n} &= \frac{A(\text{cuadrante círculo})}{A(\text{cuadrante tablero})} = \frac{\pi r^2/4}{r^2} = \frac{\pi}{4} \\ \pi &\approx \frac{4t}{N} \end{aligned} \tag{10.28}$$

Utilizando este algoritmo se obtuvo una aproximación de $\pi = 3.14152274136$ en 100 mil millones de tiros, la simulación duro 50 minutos.

Algoritmo de Spigot

Este algoritmo desarrollado por Stanley Rabinowitz y Stanley Wagon, es un método reciente para calcular π y es ideal para implementarse en un computador personal.

1. El algoritmo de Spigot devuelve digitos de π en intervalos regulares, en los demás métodos, π debe calcularse en un buffer y el resultado se obtiene hasta el final. Por lo tanto es un buen algoritmo para demostraciones debido a que se puede observar los digitos de pi al mismo tiempo que se obtienen.

2. El algoritmo funciona con números enteros pequeños, incluso para el digito 15,000 de π, los valores no crecen ,as de 32 bits, por lo que el tipo de dato long C es

suficiente para compiladores de 16 y 32 bits. Por lo tanto no existen problemas de redondeo o truncamiento que complican la ejecución de los demás algoritmos.

3. Requiere solamente la libreria estandar de C.

4. El tiempo de ejecución es del orden cuadratico por lo que no se compara con los algoritmos de alto rendimiento, como es el caso del algoritmo de Gauss AGM, pero tiene un mejor rendimiento que algoritmos basados en el cálculo de la seria de arcotangente.

5. El algoritmo requiere pocas lineas de código.

- Inicialización: p=0 y nueves=0.
- Iteración: Para i=0 hasta N, definir a[i]=2.
- Multiplicar cada a[i] por 10.
- Normalizar: Comenzando por la derecha (de i=N a i=1) dividivir a[i] entre (2i+1) para obtener el cociente q y el residuo r. Multiplicar q por i y agregar el resultado al elemento a[i-1].
- Calcular el proximo digito provisional de π. El digito a[0] se divide entre 10. El residuo de la división reemplaza el valor de a[0], mientras que el cociente q produce el siguiente digito provisional de π.
- Corregir los digitos provisionales anteriores. Si q no es 9 o 10, entonces los primeros digitos provisionales hasta p y los nueves que le siguen se confirman como salida. El nuevo digito provisional p se convierte en q y los nueves=0.
  Si q=9 entonces de los números provisionales, solo los nueves se incrementan en 1 y ningun digito es salida.
  Si q=10 entonces el primer digito provisional hasta ahora, p, se incrementa en 1 y es salida. Los nueves provisionales se convierten en ceros e igualmente son salida. El nuevo digito provisional, p, se vuelve 0 y nueves se reseta a 0.

Algoritmo de Gauss AGM

Uno de los métodos mas rapidos para calcular π, fue inventado hace más de 200 años por el matemático Carl Friedrich Gauss. Debido a que ha servido de base para el cálculo de otras formulaciones, existen diferentes veriones pero la que se maneja a continuación se denomina Gauss AGM debido a su distintivo caracteristico de utilizar la media geométrica aritmética (por sus siglas en ingles).

$$\pi = \frac{2 \cdot AGM^2(1, \frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k^2} \tag{10.29}$$

AGM es el promedio de dos variables a y b. Pero el promedio no se puede calcular en una sola iteración por lo que requiere un número infinito de iteraciones. El algoritmo para realizar el cálculo se describe a continuación:

- Inicializar:
  $a_0 =$ a
  $b_0 =$ b

- Iterar: k=0,1,2,...
  $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} \rightarrow AGM(a,b)$
  $b_{k+1} = \sqrt{a_k \cdot b_k} \rightarrow AGM(a,b)$

- Finalmente converger a_k y b_k al mismo limite de AGM(a,b).

El algoritmo de Gauss se puede expresar en los siguientes pasos:

- Inicializar:
  $a_0 = 1$
  $b_0 = 1/\sqrt{2}$
  $s_0 = 1/2$

- Iterar k=0,1,2,...,K-1
  t $= a_k$
  $a_{k+1} = (a_k + b_k/2)$
  $b_{k+1} = \sqrt{tb_k}$
  $c_{k+1}^2 = (a_{k+1} - t)^2$
  $s_{k+1} = s_k - 2^{k+1}c_{k+1}^2$

- Calcular la aproximación de π:
  $\pi_K = \frac{(a_k+b_k)^2}{2s_K}$

Algoritmo BBP

Este algoritmo rompio con el paradigma de que era necesario calcular π para conocer la cifra en p posición de π. Este algoritmo permite encontrar la cifra hexadecimal en la posición p de π, para ello no requiere saturar la memoria de la computadora y el tiempo de ejecución se escala linealmente con el orden del digito deseado. La ecuación siguiente describe el algoritmo necesario para realizar este cálculo:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) \tag{10.30}$$

Este algoritmo tambien podria ser utilizado para calcular π desde cero pero se compara con los demás algoritmos como es el caso del algoritmo de Gauss AGM. La ventaja de este algoritmo radica en calcular digitos individuales en cualquier parte de π. Por esta razón es utilizado para comprobar el calculo de π realizado con otro algoritmo.

Algoritmo de Chudnovsky

Es un método para calcular los dígitos de π. Este ha sido utilizado para lograr el cálculo del actual record mundial de 12.1 trillones de dígitos.

El algoritmo se basa en el negativo del número de Heegner $d = -163$, la función $j(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}) = -640320^3$ y la siguiente generalización de la serie hypergeométrica.

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 (640320^3)^{k+1/2}} \tag{10.31}$$

10.5 Skewness y kurtosis

Estas dos estadisticas describen la forma de la distribución de los datos procesados. El skewness o asimetría estadística tiene un valor de 0 cuando la distribución es normal. En escencia, skewness mide el tamaño relativo de las dos colas de la distribución.

En cambio la kurtosis es la medición del tamaño de las dos colas de la distribución. La kurtosis de una distribución normal es igual a 3, por lo que se dice que la distribución es mas pesada en las colas, cuando la kurtosis es mayor que 3 y se considera mas ligera en las colas cuando la kurotsis es menor a 3. Una manera común de trabajar con la kurtosis es restandole 3 al valor obtenido, de tal manera que la kurtosis de la distribución normal es igual a 0.

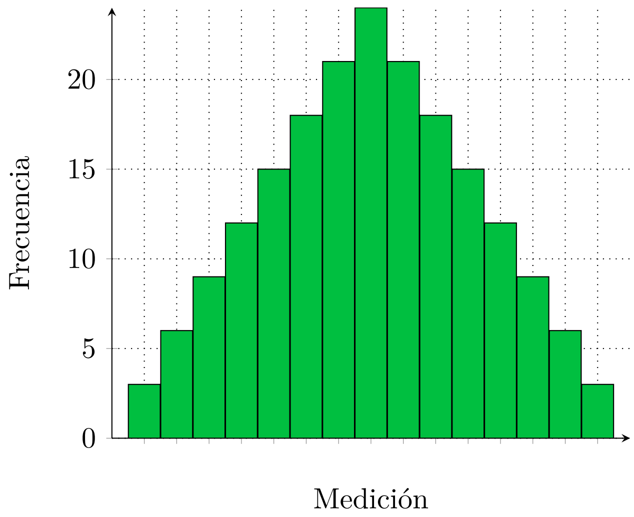
10.5.1 Skewness

El skewness se describe como la simétria, o falta de simétria, de los datos. Se define por la siguiente ecuación

$$a_3 = \sum \frac{(X_i - \overline{X})^3}{ns^3} \tag{10.32}$$

Donde:

- n es el número de muestras.
- X_i es el valor i^{th} de las muestras.
- $\overline{X}$ es la media.
- s es la desviación estandar.



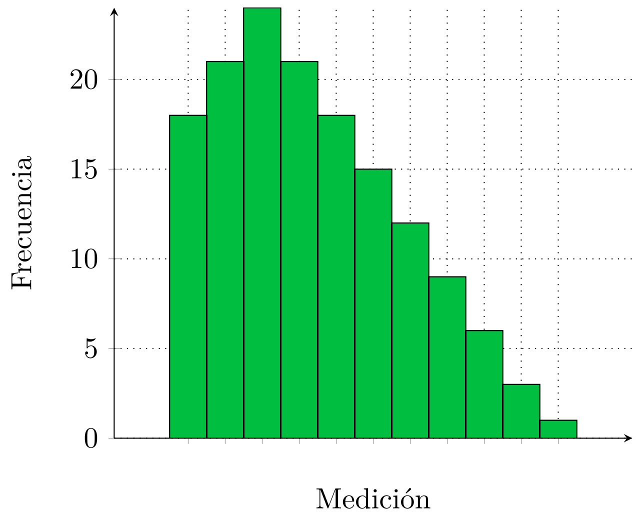
Notese el exponente 3 en la suma, por esta razón se le llama al skewness el tercer momento central estandarizado para el modelo de probabilidad. Para realizar su cálculo computacionalmente comunmente se considera el tamaño de la muestra.

$$Skewness = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \frac{(X_i - \overline{X})^3}{s^3} = \frac{n}{s^3(n-1)(n-2)}(S_{above} - S_{below}) \quad (10.33)$$

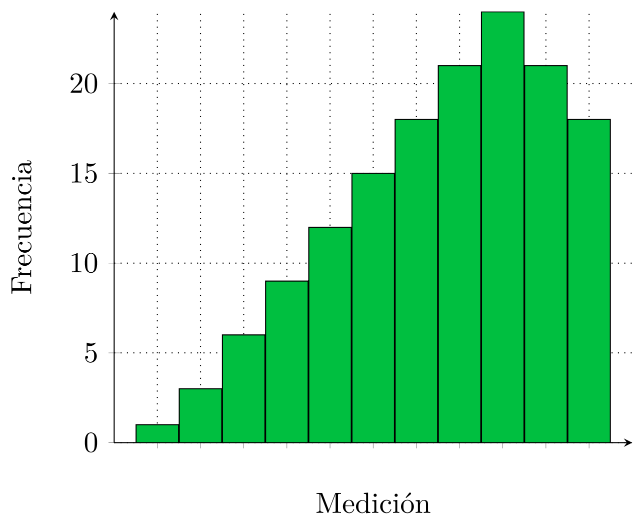
La diferencia entre ambas formulas disminuye a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. Para el cálculo de la segunda ecuación se define:

$$\begin{aligned} S_{above} &= |\sum (X_i - \overline{X})^3| \text{ si } X_i > \text{promedio} \\ S_{below} &= |\sum (X_i - \overline{X})^3| \text{ si } X_i < \text{promedio} \end{aligned} \quad (10.34)$$

Se puede notar que cuando S_{above} es mayor que S_{below} el skewness sera positivo. Esto tipicamente significa que el lado derecho de la distribución sera más largo.



En el caso de que S_{below} sea mayor que S_{above}, el lado izquierdo de la distribución sera más largo.



Consideraciones para entender el valor del skewness:

- Si el skewness se encuentra entre -0.5 y 0.5 la data es bastante simétrica.
- Si el skewness se encuentra entre -1 a -0.5 y 0.5 a 1, la data está moderadamente sesgada.
- Si el skewness es menor que -1 o mayor que 1, la data se encuentra altamente sesgada.

10.5.2 Kurtosis

La kurtosis es un paramétro que mide el peso combinado de las colas de la distribución en relación con el resto. La kurtosis se define por la siguiente ecuación:

$$a_4 = \sum \frac{(X_i - \overline{X})^4}{ns^4} \tag{10.35}$$

Donde:

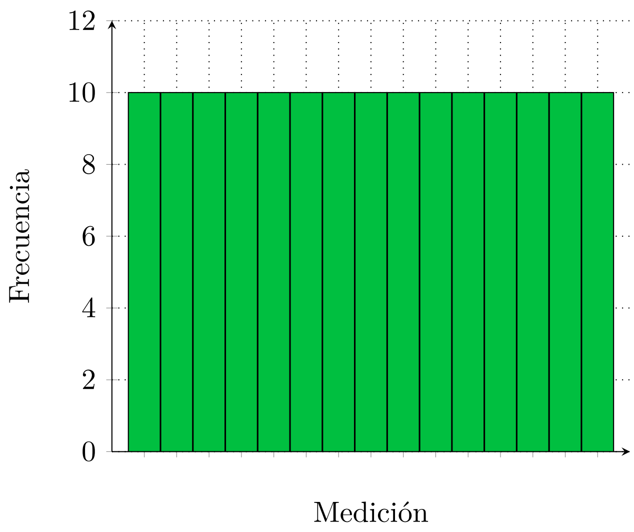
- n es el número de muestras.
- X_i es el valor i^{th} de las muestras.
- $\overline{X}$ es la media.
- s es la desviación estandar.

Notese el exponente 4 en la suma, por esta razón se le llama a la kurtosis el cuarto momento central estandarizado para el modelo de probabilidad. Para realizar su cálculo computacionalmente comunmente se considera el tamaño de la muestra.

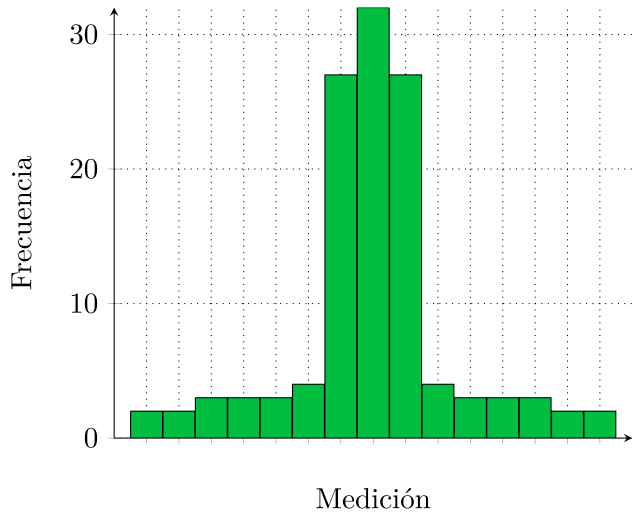
$$Kurtosis = (\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \frac{(X_i - \overline{X})^4}{s^4}) - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \tag{10.36}$$

Esta formula considera el tamaño de la muestra y le resta 3 al valor de la kurtosis. Esto permite que el valor de la kurtosis para una distribución normal sea 0.

La kurtosis disminuye a medida que las colas se vuelven mas ligeras. En la siguiente figura se muestra una figura con kurtosis negativa debido a que tiene la misma cantidad de datos en cada cola.



En el caso de colas más largas, la kurtosis es positiva, como se muestra en la siguiente figura.



10.6 Problema del caballero de Méré

Conociendo la probabilidad que un jugador tiene de conseguir éxito en una partida, ¿Qué número de partidas garantiza al jugador una probabilidad igual de conseguir al menos un éxito que de no conseguirlo (o sea, una probabilidad 0.5 de conseguirlo)?

Se supone que las partidas son independientes entre sí, de forma que el resultado de cada una de ellas no altera los resultados futuros (el jugador no va aprendiendo conforme se va desarrollando el juego), lo cual queda perfectamente representado en un juego de puro azar como el lanzamiento de una moneda equilibrada: cuando coinciden las probabilidades de ganar y perder, con lo que, la idea de juego justo tan presente en todos los autores de la historia temprana de la probabilidad subyace como razón de ser del mismo.

Si p y q son las probabilidades de exito y fracaso, respectivamente, que tiene el jugador en cada partida con p+q=1, y si n es el número buscado de partidas, la solución se encuentra despejando k en la igualdad:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 - q^k \\ q^k &= 1 - P(x) \\ k &= \frac{\log(1 - P(x))}{\log(q)} \\ q &= (\frac{N - n_1}{N}) \\ k &= \frac{\log(1 - P(x))}{\log(\frac{N - n_1}{N})} \end{aligned} \tag{10.37}$$

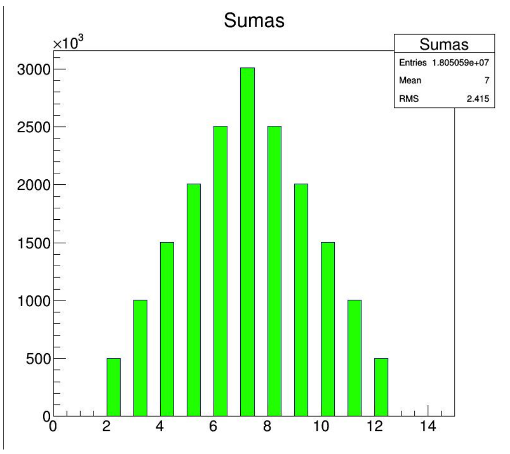
Donde:

- P(x) es la probabilidad de exito
- q es la probabilidad de fracaso.
- N es la cantidad de eventos posibles.
- n_1 es la cantidad de eventos de exito.
- k es la cantidad de iteraciones necesarias para lograr alcanzar la probabilidad P(x).

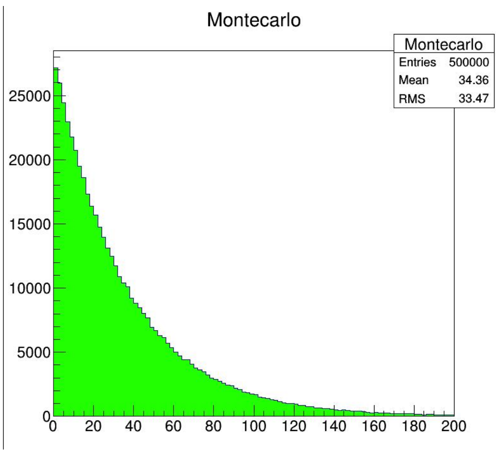
La ecuación de k permite determinar la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar una probabilidad cualesquiera en N casos, es decir, un caso de 2, 3,..., N dados.

Inclusive se puede utilizar para problemas diferentes como el caso de obtener un poker en una mano de 5 cartas.

$$\begin{aligned} pokers &= 13 \cdot 48 = 624 \\ k &= \frac{\log(.5)}{\log(\frac{52P2-624}{52P5})} = 346434.6697 \end{aligned} \tag{10.38}$$

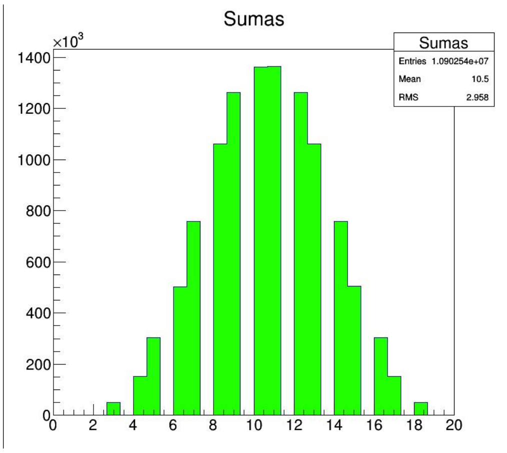


(a) Frecuencia de la suma de los dados

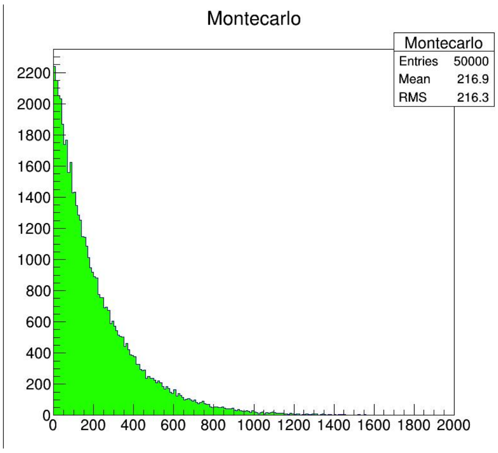


(b) Lanzamientos para obtener (6,6)

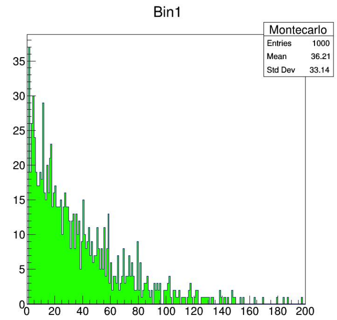
Para un caso donde se utilizaron 3 dados:



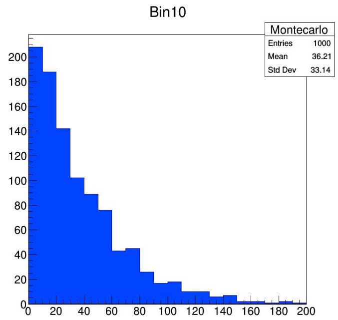
(a) Frecuencia de la suma de los dados



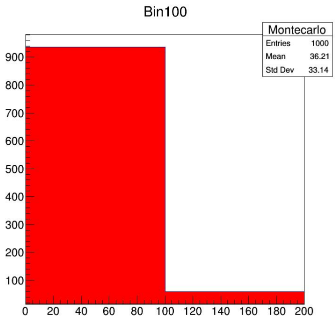
(b) Lanzamientos para obtener (6,6,6)



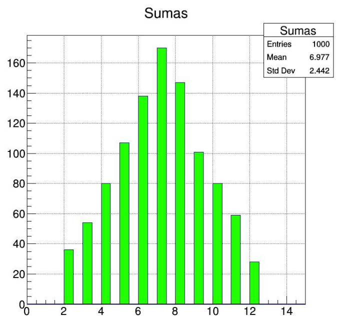
(a) Bin=1



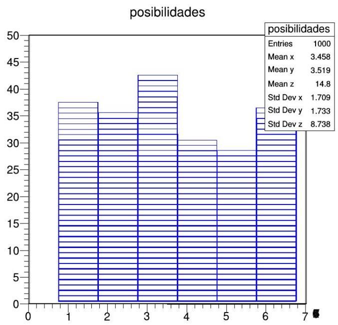
(b) Bin=10



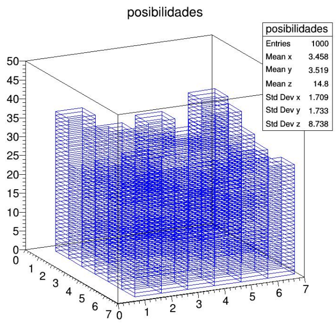
(c) Bin=100



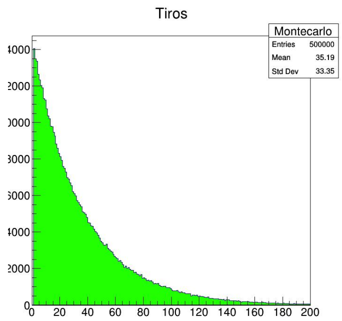
(d) Distribución sumas



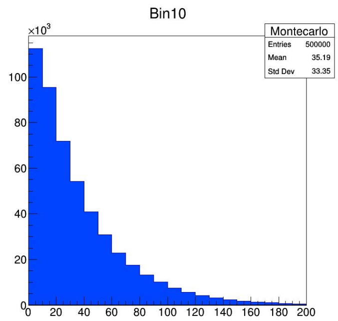
(e) Distribución de combinaciones



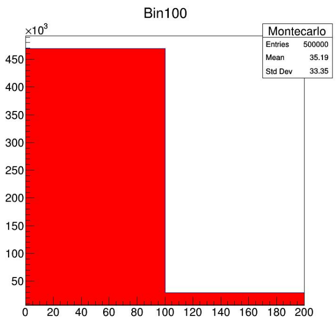
(f) Distribución de combinaciones



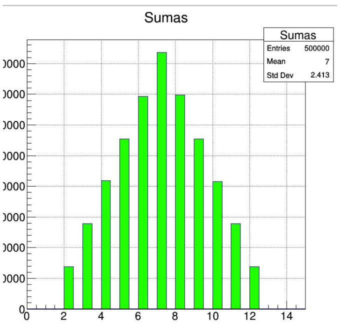
(g) Bin=1



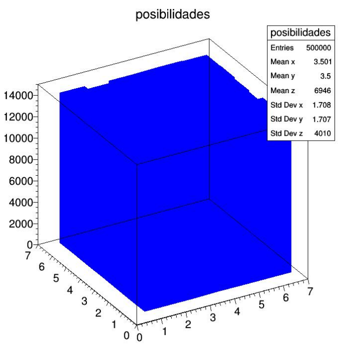
(h) Bin=10



(i) Bin=100



(j) Distribución sumas



(k) Distribución de combinaciones

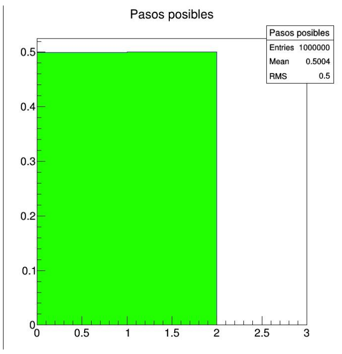
11

Tarea 11

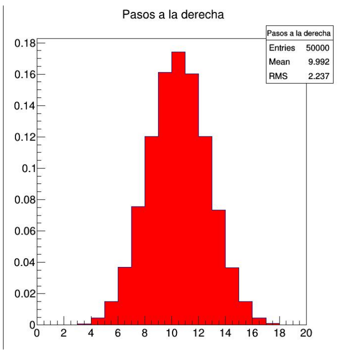
11.1 Caminata aleatoria

11.1.1 Simulación en una dimensión

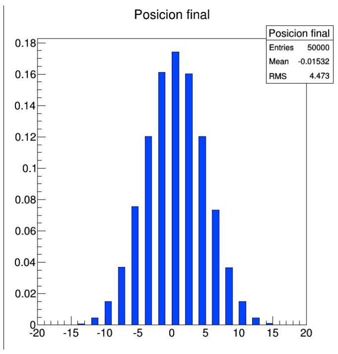
a) La probabilidad de dar un paso a la derecha es de .50 y cada experimento consiste en 20 pasos.



(a) $P(n_1) = .50$

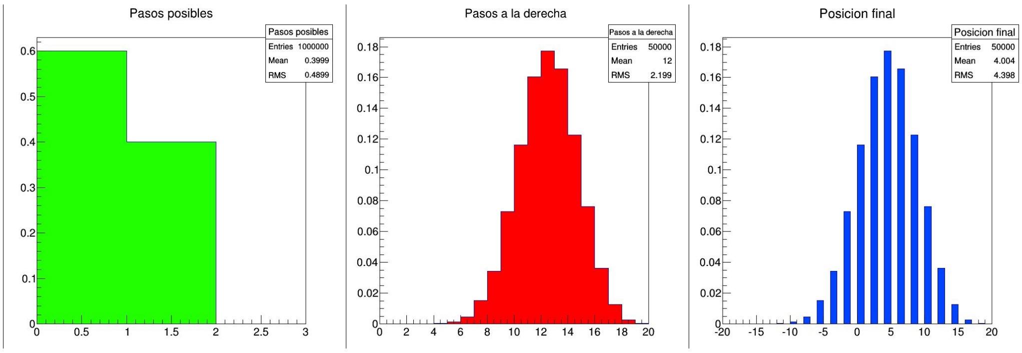


(b) Pasos n1



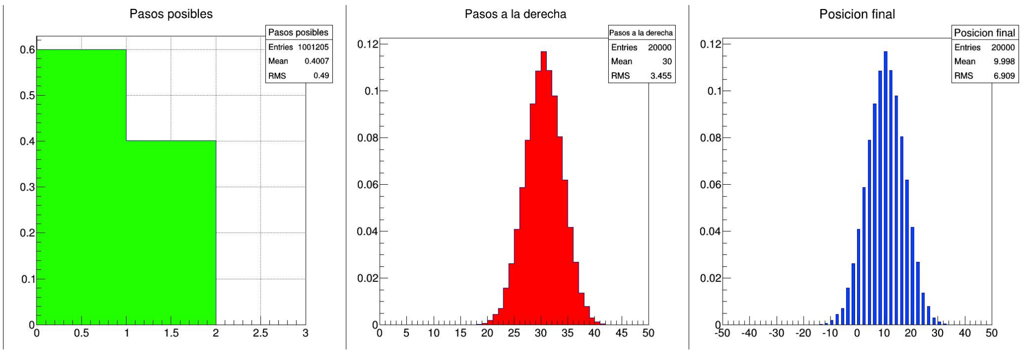
(c) Posición

b) La probabilidad de dar un paso a la derecha es de .60 y cada experimento consiste en 20 pasos.



(a) $P(n_1) = .60$ (b) Pasos n1 (c) Posición

c) La probabilidad de dar un paso a la derecha es de .60 y cada experimento consiste en 50 pasos.



(a) $P(n_1) = .60$ (b) Pasos n1 (c) Posición

11.1.2 Demostraciones

Para las demostraciones se utilizaron las ecuaciones:

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)(u_i) \qquad \sum_{i=1}^{M} P(u_i) = 1 \qquad \Delta u = u - \overline{u}$$

23) $\overline{\Delta u} = 0$

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta u} &= \overline{u - \overline{u}} \\
&= \sum P(u_i)(u_i - \overline{u}) \\
&= \sum P(u_i)(u_i) - \sum P(u_i)(\overline{u}) \\
&= \sum P(u_i)(u_i) - (\overline{u}) \sum P(u_i) \\
&= \sum P(u_i)(u_i) - (\overline{u})(1) \\
&= \overline{u} - \overline{u} = 0
\end{aligned} \tag{11.1}$$

24) $\overline{\Delta u}^2 = \sum P(u_i)(u_i - \overline{u})^2 \geq 0$.
Debido a que las probabilidades de cada evento u son mayores a 0 ($P(u_i) \geq 0$) y cualquier número negativo elevado al cuadrado resulta en un número positivo por lo tanto el término $(u_i - \overline{u})^2$ siempre es mayor que 0 y en el caso de ($P(u_i) = 0$), el resultado es 0.

25) $\overline{(u - \overline{u})^2} = \overline{u^2} - \overline{u}^2$

$$\begin{aligned}
\overline{(u - \overline{u})^2} = \overline{u^2 - 2u\overline{u} + \overline{u}^2} &= \sum P(u_i)(u_i^2) - 2\overline{u} \sum P(u_i)(u_i) + \overline{u}^2 \sum P(u_i) \\
&= \overline{u^2} - 2\overline{u}\overline{u} + \overline{u}^2(1) \\
&= \overline{u^2} - 2\overline{u}^2 + \overline{u}^2 \\
&= \overline{u^2} - \overline{u}^2
\end{aligned} \tag{11.2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(u - \overline{u})^3} &= \overline{u^3 - 3u^2\overline{u} + 3u\overline{u}^2 - \overline{u}^3} \\
&= \sum P(u_i)(u_i^3) - 3\overline{u} \sum P(u_i)(u_i^2) + 3\overline{u}^2 \sum P(u_i)(u_i) - \overline{u}^3 \sum P(u_i) \\
&= \overline{u^3} - 3\overline{u}\overline{u^2} + 3\overline{u}^2\overline{u} - \overline{u}^3(1) \\
&= \overline{u^3} - 3\overline{u}\overline{u^2} + 3\overline{u}^3 - \overline{u}^3 \\
&= \overline{u^2}(\overline{u} - 3\overline{u}) + 2\overline{u}^3 \\
&= -2\overline{u}\overline{u^2} + 2\overline{u}^3 \\
&= -2\overline{u}(\overline{u^2} - \overline{u}^2)
\end{aligned} \tag{11.3}$$

26) $\overline{u^2} \geq \overline{u}^2$

$$\begin{aligned}
\sum P(u_i)(u_i^2) &\geq \sum P(u_i)(u_i) \\
u_i^2 &\geq u_i
\end{aligned} \tag{11.4}$$

29) $\sum W(n_1) = 1$

$$\sum W(n_1) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^N = 1^N = 1 \tag{11.5}$$

31) $n_1 p^{n_1} = p\frac{\delta}{\delta p}(p^{n_1})$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta p} p^{n_1} &= n_1 p^{n_1 - 1} \\ \frac{\delta}{\delta p} p^{n_1} &= n_1 p^{n_1} p^{-1} \\ p\frac{\delta}{\delta p} p^{n_1} &= n_1 p^{n_1} p^{-1} p^1 \\ p\frac{\delta}{\delta p} p^{n_1} &= n_1 p^{n_1} \end{aligned} \tag{11.6}$$

38) $n_1^2 p^{n_1} = p(\frac{\delta}{\delta p})^2(p^{n_1})$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta^2 p} p^{n_1} &= n_1 n_1 p^{n_1 - 1 - 1} \\ \frac{\delta^2}{\delta^2 p} p^{n_1} &= n_1^2 p^{n_1} p^{-2} \\ p^2 \frac{\delta^2}{\delta^2 p} p^{n_1} &= n_1^2 p^{n_1} p^{-2} p^2 \\ (p\frac{\delta}{\delta p})^2 (p^{n_1}) &= n_1^2 p^{n_1} \end{aligned} \tag{11.7}$$

11.2 Análisis ROC

En la teoría de detección de señales una curva ROC (acrónimo de Receiver Operating Characteristic) es una representación gráfica de la sensibilidad frenta a (1 - especificidad) para un sistema clasificado binario según se varía el umbral de discriminación. El análisis de la curva ROC proporciona herramientas para seleccionar los modelos posiblemente óptimos y descartar modelos subóptimos independientemente de (y antes de especificar) el coste de la distribución de las dos clases sobre las que se decide. La curva ROC es también independiente de la distribución de las clases en la población (en diagnóstico, la prevalencia de una enfermadad en la población). El análisis ROC se relaciona de forma directa y natural con el análisis de coste/beneficio en toma de decisiones diagnósticas.

La curva ROC se desarrolló por ingenieros eléctricos para medir la eficacia en la detección de objetos enemigos en campos de batalla mediante pantallas de radar, a partir de lo cual se desarrolla la teoría de detección de señales. El análisis ROC se aplicó posteriormente en medicina, radiología, psicología y otras áreas durante varias décadas.

Sólo recientemente ha encontrado aplicación en áreas como aprendizaje automático y minería de datos.

Consideremos un problema de predicción de clases binario, en la que los resultados se etiquetan positivos (p) o negativos (n). Hay cuatro posibles resultados a partir de un clasificador binario como el propuesto. Si el resultado de una exploración es p y el valor dado es también p, entonces se conoce como un Verdadero Positivo (VP); sin embargo si el valor real es n entonces se conoce como un Falso Positivo (FP). De igual modo, tenemos un Verdadero Negativo (VN) cuando tanto la exploración como el valor dado son n, y un Falso Negativo (FN) cuando el resultado de la predicción es n pero el valor real es p. Un ejemplo aproximado de un problema real es el siguiente: consideremos una prueba diagnóstica que persiga determinar si una persona tiene una cierta enfermedad. Un falso positivo en este caso ocurre cuando la prueba predice que el resultado es positivo, cuando la persona no tiene realmente la enfermedad. Un falso negativo, por el contrario, ocurre cuando el resultado de la prueba es negativo, sugiriendo que no tiene la enfermedad cuando realmente sí la tiene.

		Valor real	
		p	**n**
Predicción	$\overline{\mathbf{p}}$	Verdaderos Positivos	Falsos Negativos
	$\overline{\mathbf{n}}$	Falsos Positivos	Verdaderos Negativos

Las fórmulas utilizadas por la curva ROC son:

- Sensibilidad o razón de Verdaderos positivos (VPR).

$$VPR = \frac{VP}{P} = \frac{VP}{VP + FN} \tag{11.8}$$

- Razón de falsos positivos (FPR)

$$FPR = \frac{FP}{N} = \frac{FP}{FP + VN} \tag{11.9}$$

- Exactitud (ACC)

$$ACC = \frac{VP + VN}{P + N} \tag{11.10}$$

- Especificidad o Razón de verdaderos negativos (SPC)

$$SPC = \frac{VN}{N} = \frac{VN}{FP + VN} = 1 - FPR \tag{11.11}$$

- Valor predictivo positivo (PPV)

$$PPV = \frac{VP}{VP + FP} \tag{11.12}$$

- Valor Predictivo Negativo (NPV)

$$NPV = \frac{VN}{VN + FN} \tag{11.13}$$

- Razón de falsos descubrimientos (FDR)

$$FDR = \frac{FP}{FP + VP} \tag{11.14}$$

11.3 Función de distribución

La función de probabilidad es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor particular:

$$f(x_i) = p(X = x) \tag{11.15}$$

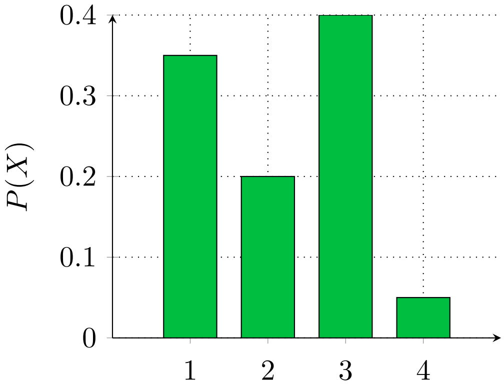
En cambio una función de distribución describe la probabiidad de que una variable aleatoria real X sujeta a cierta ley de distribución de probabilidad se sitúe en la zona de valores menores o iguales a x.

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{11.16}$$

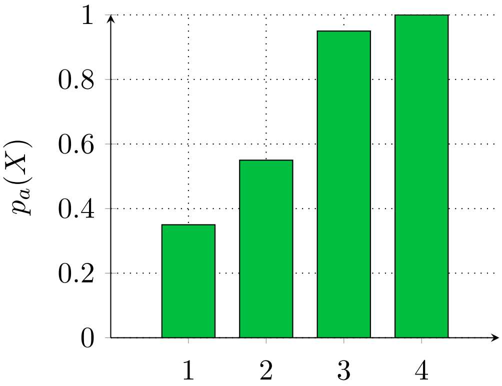
La probabilidad de que X se sitúe en un intervalo [a,b] es:

$$P(a < X < b) = F_x(B) - F_X(a) \tag{11.17}$$

X	**p(X)**	$p_a(X)$
1	0.35	0.35
2	0.20	0.55
3	0.40	0.95
4	0.05	1.0



Distribución de probabilidad



Función de distribución

11.4 Alfabeto griego

Símbolo	Comando latex	Nombre	Símbolo	Comando latex
α	\alpha	alpha	A	
β	\beta	beta	B	
γ	\gamma	gamma	Γ $\varGamma$	\Gamma \varGamma
δ	\delta	delta	Δ $\varDelta$	\Delta \varDelta
ϵ ε	\epsilon \varepsilon	epsilon	E	
ζ	\zeta	zeta	Z	
η	\eta	eta	H	
θ ϑ	\theta \vartheta	teta	Θ $\varTheta$	\Theta \varTheta
ι	\iota	iota	I	
κ	\kappa	kappa	K	
λ	\lambda	lambda	Λ $\varLambda$	\Lambda \varGamma
μ	\mu	mu	M	
ν	\nu	nu	N	
ξ	\xi	xi	Ξ $\varXi$	\Xi \varXi
o		omicron	O	
π	\pi	pi	Π $\varPi$	\Pi \varPi
ρ ϱ	\rho \varrho	ro	P	
σ ς	\sigma \varsigma	sigma	Σ $\varSigma$	\Sigma \varSigma
τ	\tau	tau	T	
υ	\ipsilon	ipsilon	Υ $\varUpsilon$	\Upsilon \varUpsilon
ϕ φ	\phi \varphi	fi	Φ $\varPhi$	\Phi \varPhi
χ	\chi	ji	X	
ψ	\psi	psi	Ψ $\varPsi$	\Psi \varPsi
ω	\omega	omega	Ω $\varOmega$	\Omega \varOmega

12

Tarea 12

12.1 Simulación de movimiento Browniano

Se realizaron simulaciones de movimiento Browniano en base a la siguiente ecuación

$$\Delta S_{t+\Delta t} = S_t \mu \Delta t + S_t \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{12.1}$$

Donde:

- S_t representa el precio de un acción en el tiempo t.
- Δt es el incremento de tiempo.
- ε es una distribución normal con una media de 0 y una desviación estandar igual a 1.
- μ es la desviación.
- σ es la volatilidad.

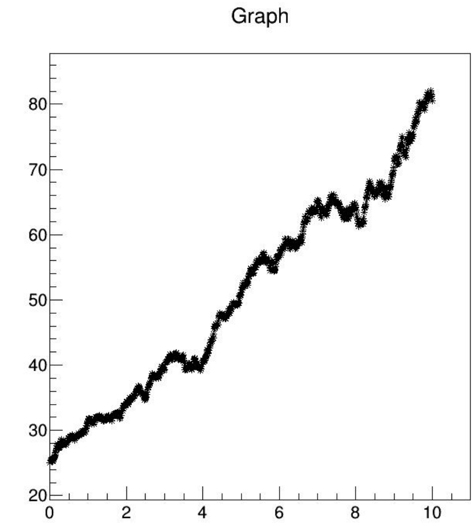


Figure 12.1: *Browniano*

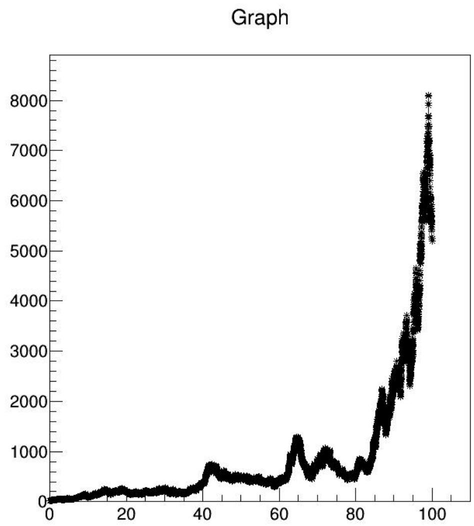


Figure 12.2: *Browniano*

12.2 Caminata aleatoria

12.2.1 Calcular r.m.s y dispersión

Para calcular el r.m.s es necesario conocer primero el valor de la disperción. La cual se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta n_1)^2} &= \overline{(n_1 - \overline{n_1})^2} = \overline{n_1^2} - \overline{n_1}^2 \\ &= p(N + pN(N-1)) - \overline{n_1}^2 \\ &= Np(1 + pN - p) - \overline{n_1}^2 \\ &= (Np)^2 + Npq - \overline{n_1}^2 \\ &= \overline{n_1}^2 + Npq - \overline{n_1}^2 \\ &= Npq\end{aligned} \tag{12.2}$$

Una vez obtenida la disperción se puede calcular el r.m.s utilizando la siguiente ecuación:

$$\Delta^* n_1 = (\overline{(\Delta n_1)^2})^{\frac{1}{2}} \tag{12.3}$$

En la simulación de una caminata unidimensional donde:

$$N = 20 \qquad p = .5 \qquad \overline{n_1} = 9.992$$

Se obtuvieron los siguientes valores de dispersión y r.m.s.

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta n_1)^2} &= 20 * .5 * .5 = 5 \\ \Delta^* n_1 &= \sqrt{5} = 2.2360\end{aligned} \tag{12.4}$$

12.3 Relación de función gamma y factorial

Podemos escribir factoriales utilizando una multiplicatoria de 1 hasta n:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \tag{12.5}$$

Esta notación funciona de manera similar a la sumatoria ($\sum$) pero en este caso se multiplican los terminos en lugar de sumarlos.
La función Γ es una extensión del concepto de números factoriales. Se puede introducir casi cualquier número real o complejo en la función Γ y encontrar su valor.

Existe un caso especial donde se puede ver su relación con los números factoriales.

Si n es un entero positivo, entonces la función Gamma de n es:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{12.6}$$

De igual forma se puede obtener una expresión para $n!$:

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{12.7}$$

Pero la función Γ no esta restringuida a solamente los números enteros. Esta función nos permite encontrar el valor del factorial de cualquier valor n que pertenece a los números reale:

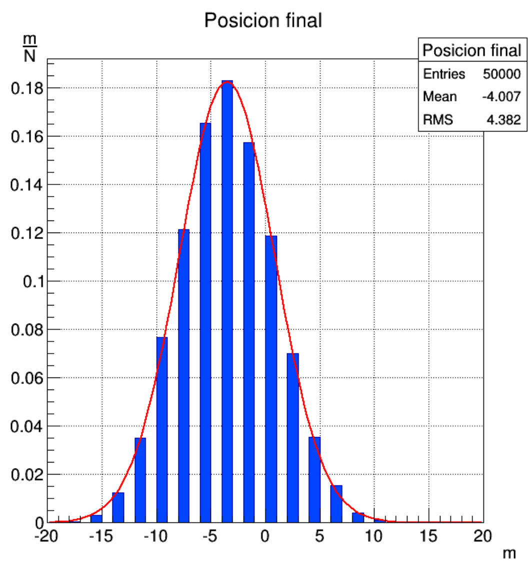
$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \tag{12.8}$$

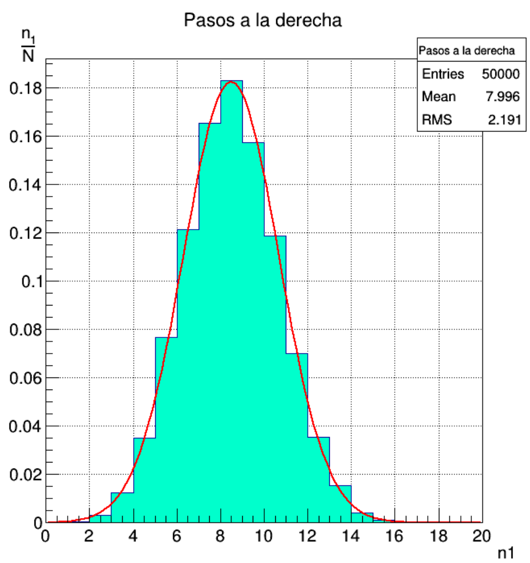
13

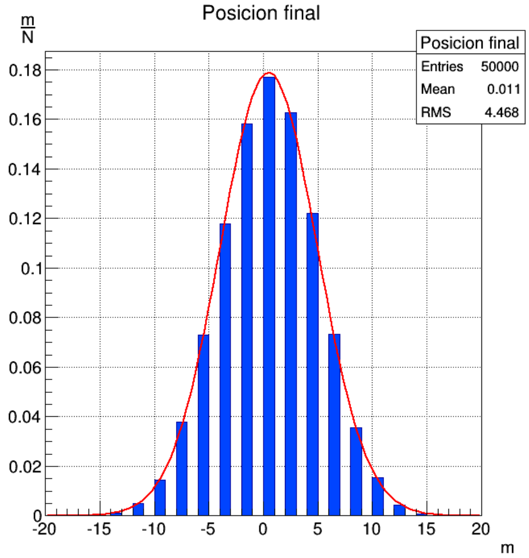
Tarea 13

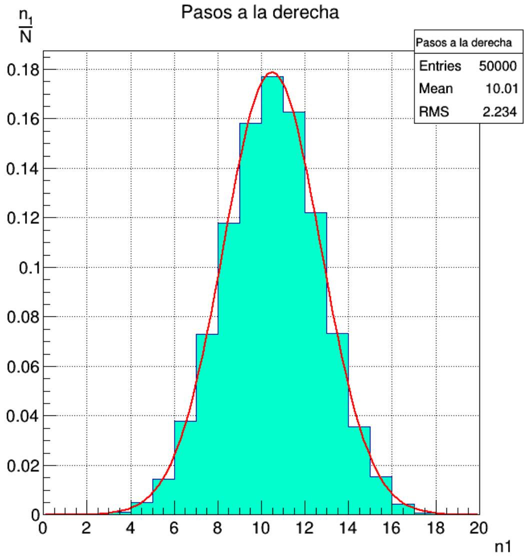
13.1 Caminata aleatoria

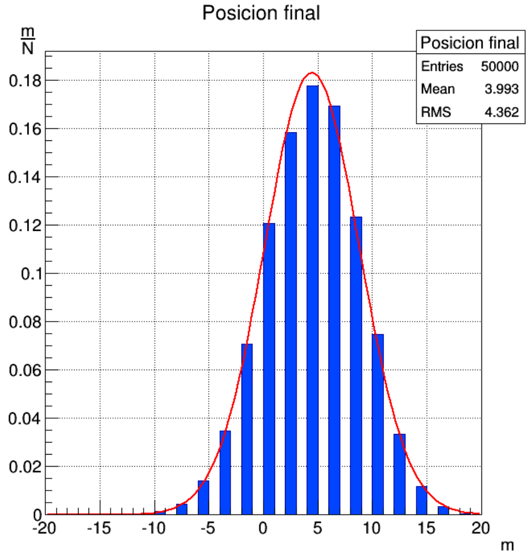
13.1.1 Caminata aleatoria unidimensional

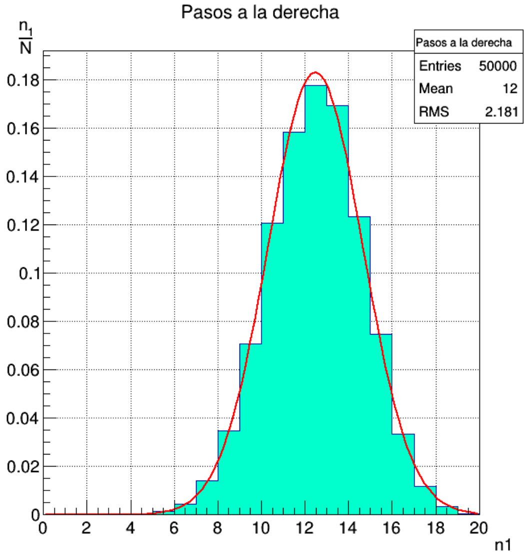





Posicion final
m/N
Posicion final
Entries 50000
Mean 0.011
RMS 4.468
m

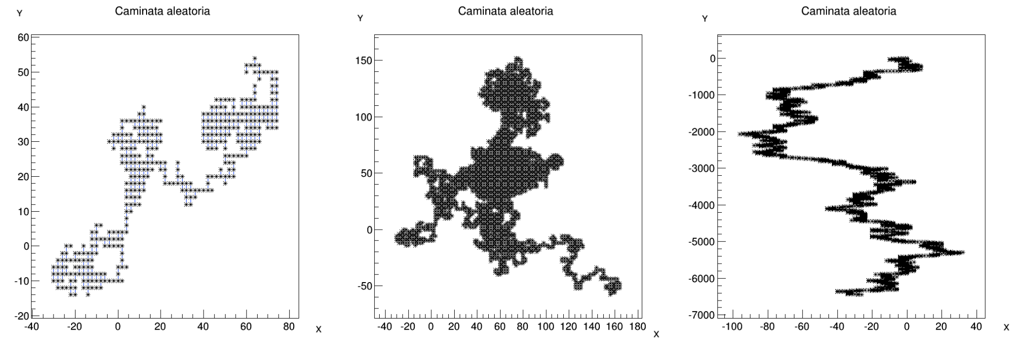

Pasos a la derecha
n1/N
Pasos a la derecha
Entries 50000
Mean 10.01
RMS 2.234
n1


Posicion final
m/N
Posicion final
Entries 50000
Mean 3.993
RMS 4.362
m


Pasos a la derecha
n1/N
Pasos a la derecha
Entries 50000
Mean 12
RMS 2.181
n1

13.1.2 Caminata aleatoria bidimensional

Caminata en el dominio de los números naturales



(a) N=1000 (b) N=10000 (c) N=10000

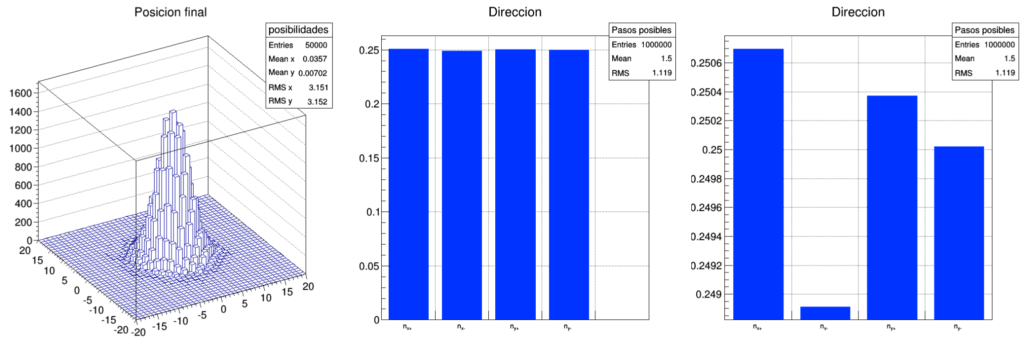


Figure 13.4: $P(n_{x+}) = P(n_{x-}) = P(n_{y+}) = P(n_{y-}) = .25$

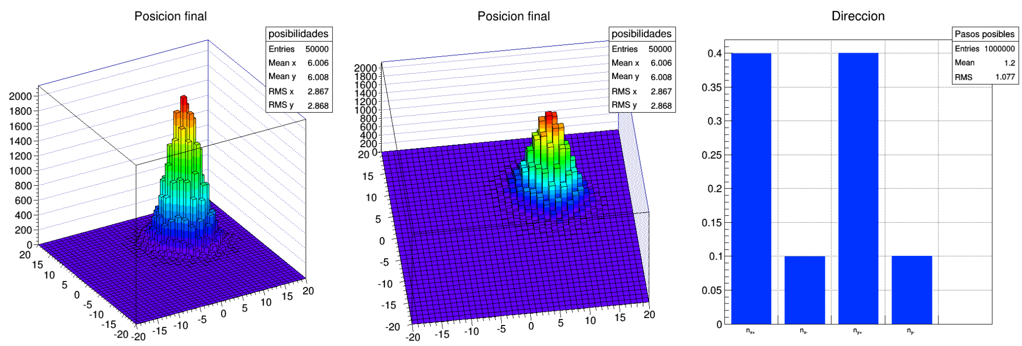


Figure 13.5: $P(n_{x+}) = P(n_{y+}) = .40$ y $P(n_{x-}) = P(n_{y-}) = .10$

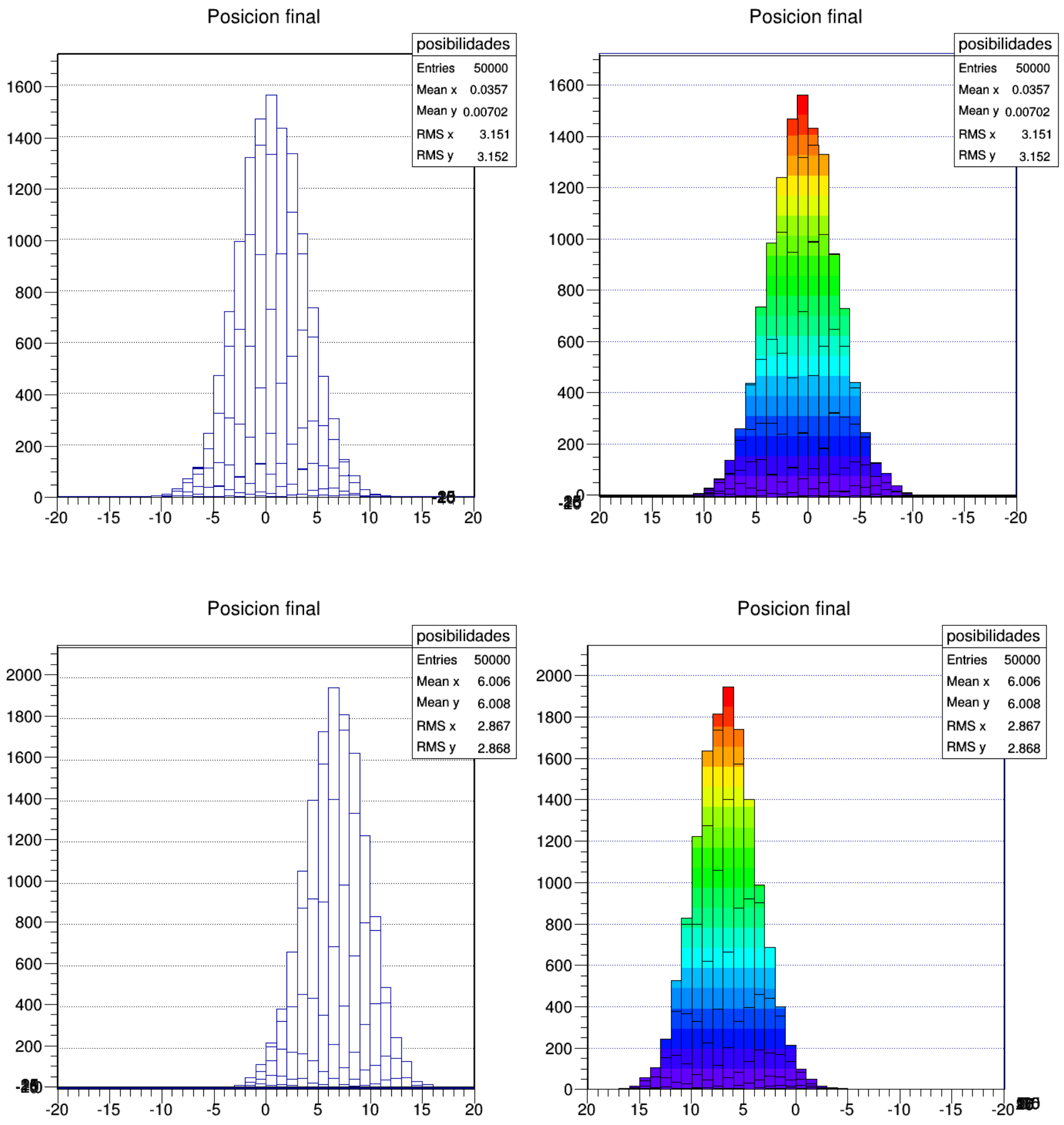
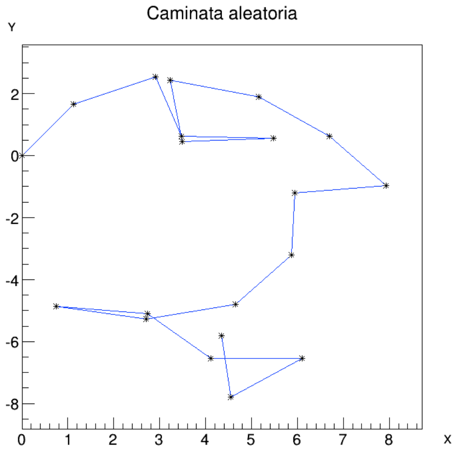


Figure 13.6: Perfiles

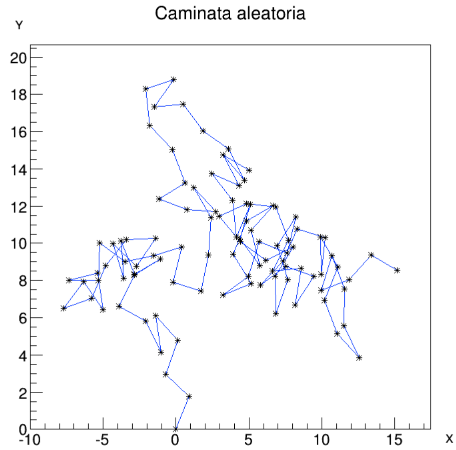
Caminata en el dominio de los números reales

$$dist = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{13.1}$$

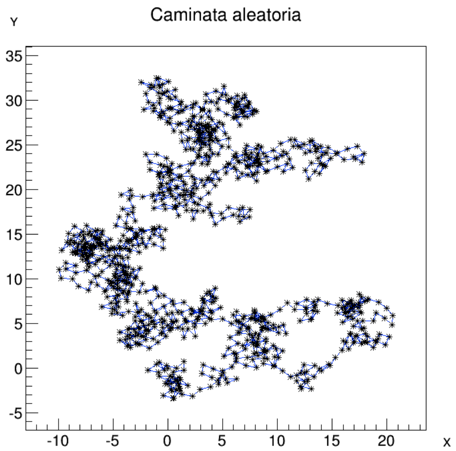
$$\begin{aligned} x_{2(max)} &= x_1 + dist & y_{2(max)} &= y_1 + dist \\ x_{2(min)} &= x_1 - dist & y_{2(min)} &= y_1 - dist \\ y_2 &= \sqrt{dist^2 - (x_2 - x_1)^2} + y_1 & x_2 &= \sqrt{dist^2 - (y_2 - y_1)^2} + x_1 \end{aligned} \tag{13.2}$$



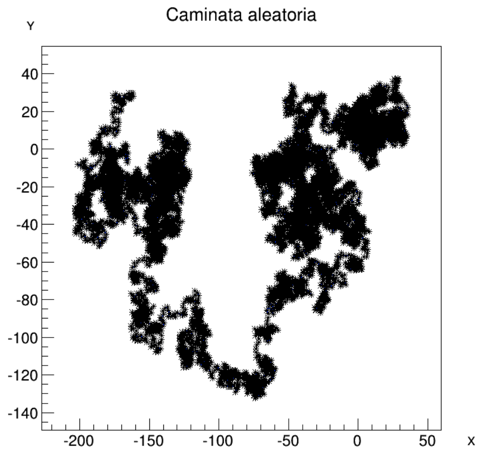
(a) N=20



(b) N=100

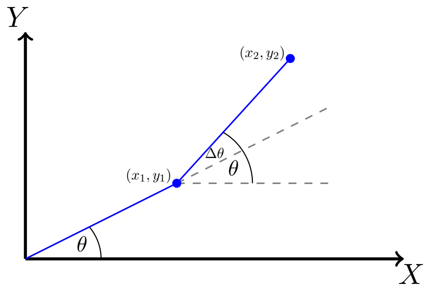


(c) N=1000

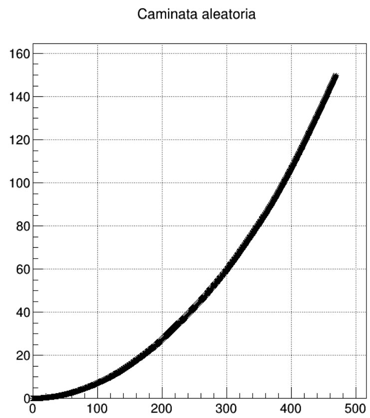


(d) N=10000

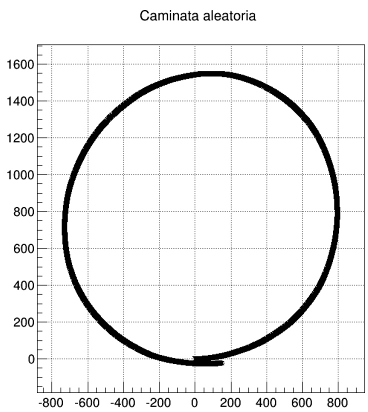
Caminante perdido



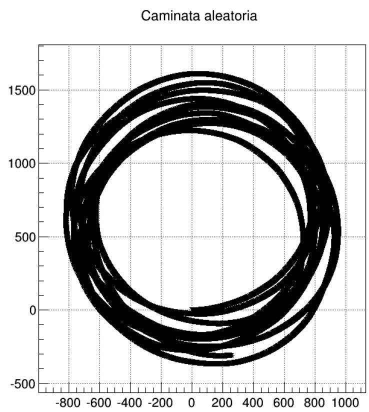
$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= l\cos(\theta + \Delta\theta) + x_i \\
y_{i+1} &= l\sin(\theta + \Delta\theta) + y_i
\end{aligned}
\tag{13.3}
$$



(a) N=1000



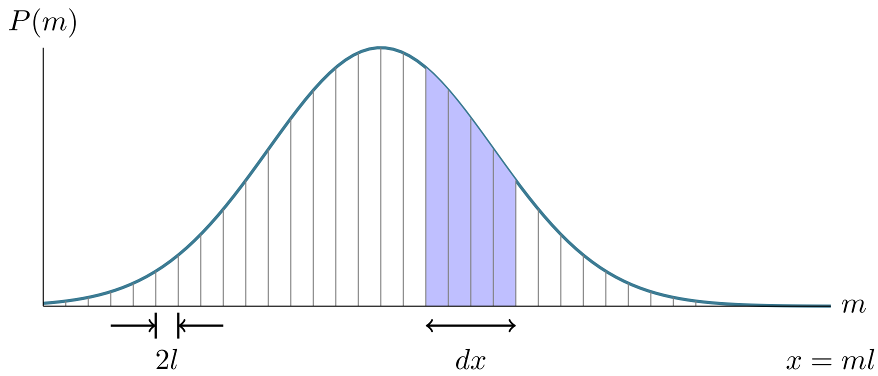
(b) N=10000

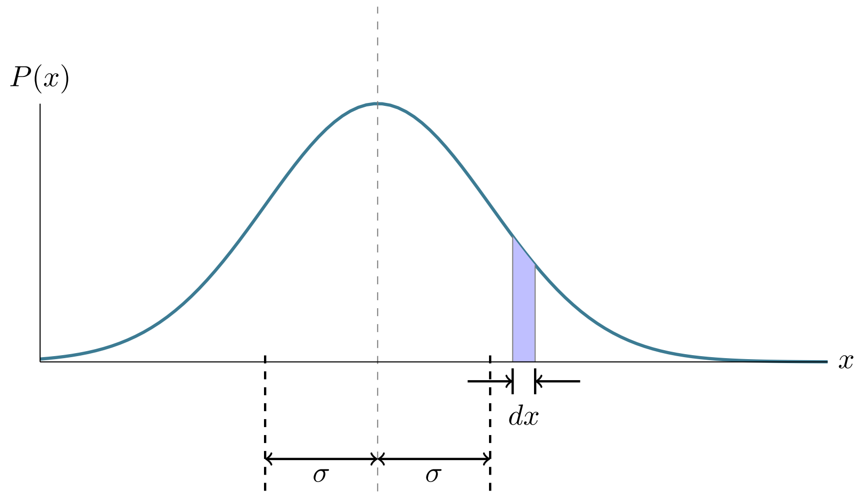


(c) N=100000

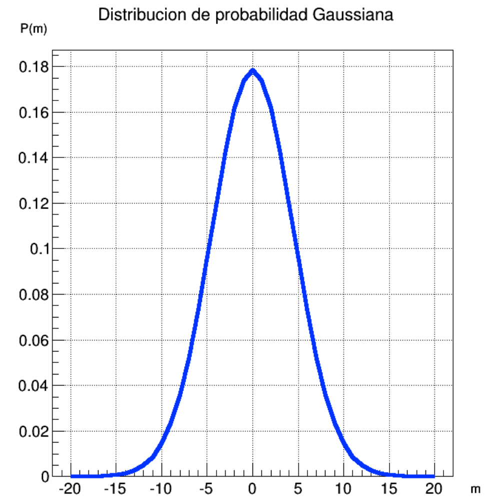
13.1.3 Distribución de probabilidad Gaussiana

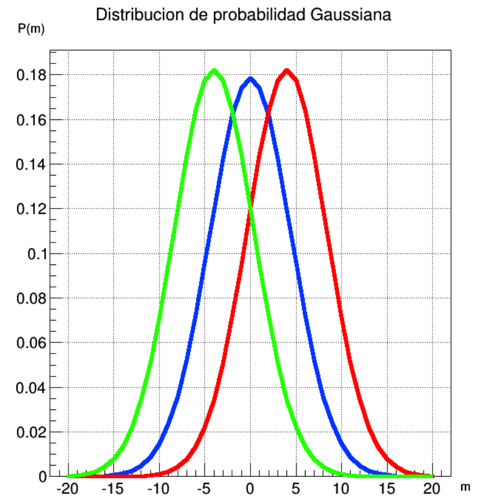
Tikz

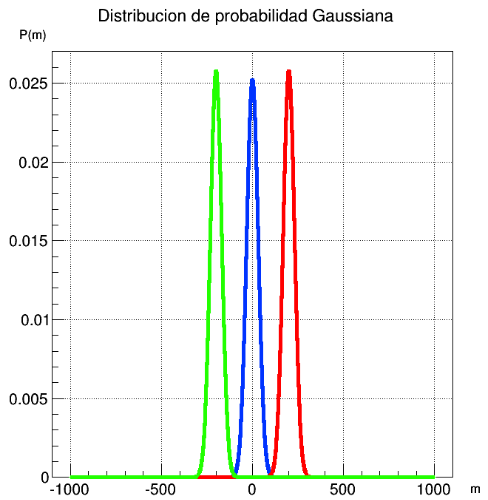


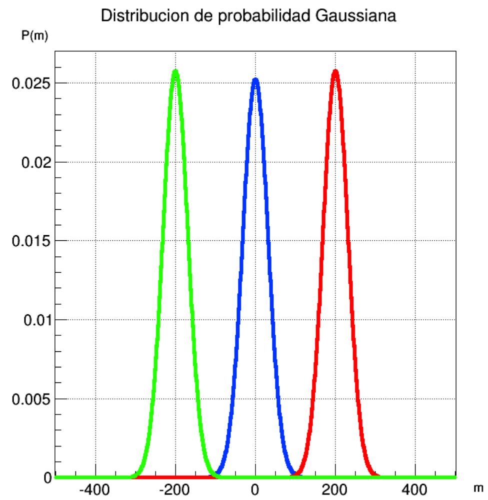


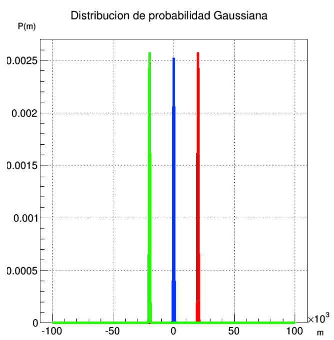
ROOT

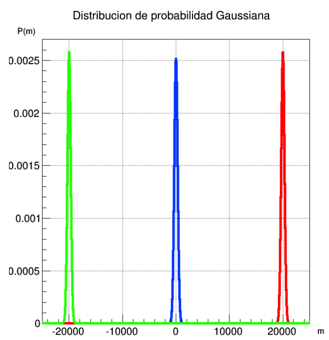

Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20
m

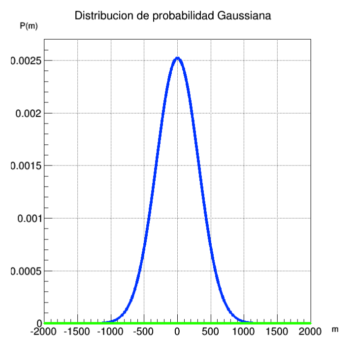

Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20
m


Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-1000 -500 0 500 1000
m

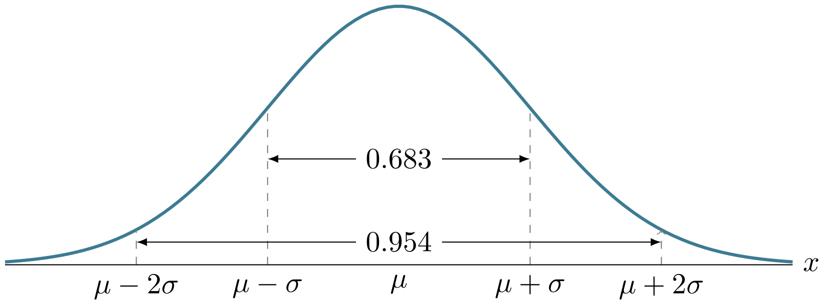

Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-400 -200 0 200 400
m


Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
-100 -50 0 50 100
×10³
m


Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
-20000 -10000 0 10000 20000
m


Distribucion de probabilidad Gaussiana
P(m)
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
-2000 -1500 -1000 -500 0 500 1000 1500 2000
m

13.2 Interpretación gráfica de σ



14

Tarea 14

14.1 ¿Qué es NP?

En la teoría de la complejidad computacional, NP es uno de los casos de estudio fundamentales. NP es el acrónimo en inglés de *nondeterministic polynomial time* y es el conjunto de problemas que pueden ser resueltos en tiempo polinómico por una máquina de Turing no determinista.

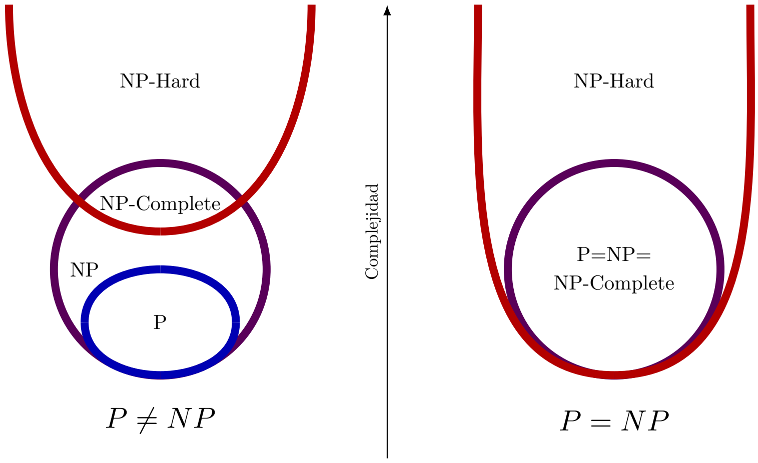
Un algoritmo de complejidad NP consiste en dos partes:

1) Consiste en seleccionar una solución aproximada, la cual es generada por métodos no deterministas.

2) Un algoritmo determinista verifica o rechaza la solución propuesta en la primera parte.

Los problemas de complexidad P , aquellos que pueden ser resueltos por una máquina determinista de Turing utilizando un tiempo polinomial de tiempo computacional, pertenecen al conjunto de la complejidad NP, pero NP contiene muchos problemas importantes, de los cuales los NP-completos son los mas difíciles. Si este tipo de problemas fueran resueltos, su solución seria suficiente para resolver cualquier otro NP problema en tiempo polinomial.

Una de las cuestiones más importantes en la teoría de la complejidad computacional es la pregunta ¿Es $P = NP$? La cual plantea si es posible que existan algoritmos de tiempo polinomial para resolver problemas NP-completos. Aunque es comúnmente aceptado que $P \neq NP$.



14.2 Forks

En computación, en particular en el contexto de los sistemas operativos Unix y similares, fork es una operación donde un proceso crea una copia de si mismo. Usualmente es una llamada del sistema, implementada directamente en el kernel. Fork es la principal (e historicamente único) método para crear procesos en sistemas Unix.

En sistemas operativos multi tareas, los procesos necesitan un método para crear nuevos procesos y poder ejecutar otros programas. El proceso es simple:

1) Para comenzar la ejecución de otro programa, primero el programa en ejecución actualmente se copia a si mismo.

2) La copia, llamada el proceso hijo, realiza una llamada del sistema para sobreescribirse con el nuevo programa por lo que cesa la ejecución del programa actual para trabajar en el nuevo.

15

Tarea 15

15.1 Wirth sintactic diagrams

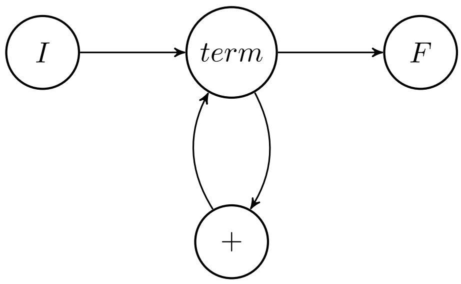


Figure 15.1: Expresion

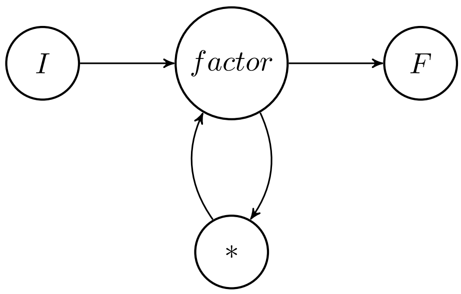


Figure 15.2: Término

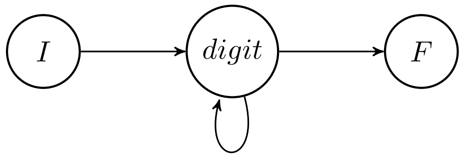


Figure 15.3: Constante

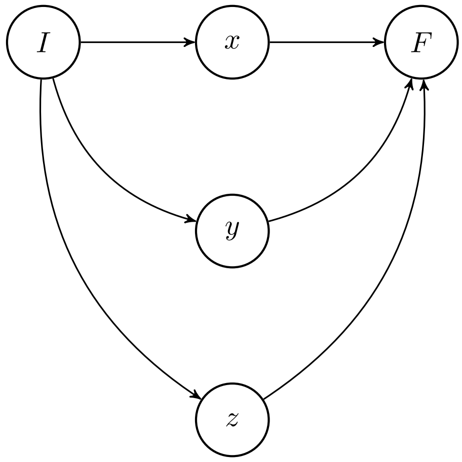


Figure 15.4: Variable

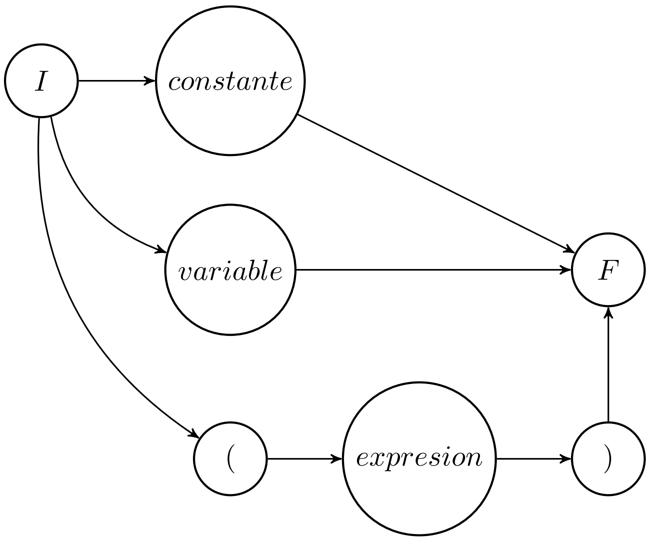


Figure 15.5: Variable

15.2 Problemas de Markov

15.2.1 Problema del viajero

Un hombre decide entre manejar su carro o tomar el metro para ir al trabajo cada dia. Supóngase que nunca toma el metro dos dias seguidos; pero si manejo al trabajo el dia anterior, entonces al dia siguiente es tan posible que maneje como que tome el metro. Para el primer dia de trabajo el hombre lanza un dado y decide manejar para ir al trabajo si y sólo si sale un 6. ¿Cuál es la distribución estacionaria de esta cadena de Markov?

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & c \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \qquad p^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(16)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$p^{(2)} = p^{(0)}\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .3645833 & .63541667 \end{pmatrix}$$

$$p^{(16)} = p^{(0)}\mathbf{P}^{(16)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

15.2.2 Problema del jugador

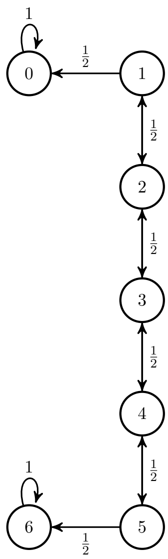
Un jugador tiene \$2. Apuesta \$1 cada vez y gana \$1 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Deja de jugar si pierde los \$2 o si gana \$4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda su dinero al final de, a lo sumo, 5 juegos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas?

La distribución de probabilidad inicial es

$$p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Buscamos la probabilidad de que el sistema esté en estado a_0 después de 5 pasos. Calculamos la distribución de probabilidad del quinto paso $p^{(n)}$:

$$
\begin{aligned}
p^{(1)} &= p^{(0)}\mathbf{P} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right), \; p^{(4)} = p^{(3)}\mathbf{P} = \left(\frac{3}{8}, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right) \\
p^{(2)} &= p^{(1)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0\right), \; p^{(5)} = p^{(4)}\mathbf{P} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{32}, 0, \frac{9}{32}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right) \\
p^{(3)} &= p^{(2)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{8}, 0, \frac{1}{8}, 0\right)
\end{aligned}
$$

La probabilidad $p_0^{(5)}$ no tener dinero después de 5 jugadas es de $\frac{3}{8}$.
Para calcular la probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas, es necesario

obtener la distribución de probabilidad de 7 pasos:

$$p^{(6)} = p^{(5)}\mathbf{P} = \left(\frac{29}{64}, 0, \frac{7}{32}, 0, \frac{13}{64}, 0, \frac{1}{8}\right)$$
$$p^{(7)} = p^{(6)}\mathbf{P} = \left(\frac{29}{64}, \frac{7}{64}, 0, \frac{27}{128}, 0, \frac{13}{128}, \frac{1}{8}\right)$$

La probabilidad de que la partida dure más de 7 jugadas se obtiene calculando la probabilidad de que el sistema no este en los estados a_0 y a_6 después de 7 pasos.

$$p_{n>7} = \frac{7}{64} + \frac{27}{128} + \frac{13}{128} = \frac{27}{64}$$

15.2.3 Problema de genética

Se sabe que las características de un animal son determinadas por los genes transmitidos por sus padres. Una característica dada resulta de dos genes heredados, uno de cada padre. En un tipo muy simple de herencia, cada gene del par transmitido puede ser de cualquiera de dos tipos, que simbolizaremos por D y d.

a) Si un individuo ha heredado dos genes D, se dice que es dominante, DD.

b) Si un individuo ha heredado dos genes d, se dice que es recesivo, dd.

c) Si un individuo hereda un gene D de un padre y un gene de del otro, se dice que es híbrido, Dd.

Se puede estudiar la probabilidad de que aparezcan los tres tipos diferentes en los descendientes de generaciones sucesivas en términos de una cadena de Markov. Los estados son dominante (e_1), híbrido (e_2) y recesivo (e_3). Supongamos que cruzamos un dominante con un híbrido y luego cruzamos todas las generaciones sucesivas con un híbrido. ¿Cuál es la probabilidad $p_{13}^{(3)}$, de que un individuo en la tercera generación sea recesivo?

$DDxDD$

	D	D
D	DD	DD
D	DD	DD

$DDxDd$

	D	d
D	DD	Dd
D	DD	Dd

$DdxDd$

	D	d
d	Dd	dd
D	DD	Dd

$DDxdd$

	d	d
D	Dd	Dd
D	Dd	Dd

$ddxdd$

	d	d
d	dd	dd
d	dd	dd

$Ddxdd$

	d	d
D	Dd	Dd
d	dd	dd

$$p^{(2)} = p^{(0)}\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

$$p_{13}^{(2)} = \frac{3}{16} = .1875$$

15.3 Teorema del punto fijo

En matemáticas, un punto fijo de una función es un punto cuya imagen producida por la función es el mismo. Es decir, x es un punto fijo de la función f si y sólo si $f(x) = x$. Por ejemplo:

1) Si f está definida sobre los números reales como $f(x) = x^2$, entonces 0 y 1 son los puntos fijos de f, porque $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

2) Si f está definida sobre los números reales como $f(x) = x^2 - 3x + 4$ entonces 2 es un punto fijo de f, porque $f(2) = 2$.

- No toda las funciones tienen puntos fijos. Por ejemplo, si f es una función definida sobre los números reales como $f(x) = x + 1$, entonces f no tiene ninguń punto fijo, ya que x nunca es igual a $x + 1$ para ningún número real.

El teorema del punto fijo especifica las condiciones bajo las cuales se puede afirmar que una función f sobre un dominio dado (con rango en el mismo dominio) tiene, al menos, un punto fijo; es decir, que existe un punto x en dicho dominio para el cual: $f(x) = x$

16

Tarea 16

16.1 Clasificaciones de la inteligencia arificial

1) Inteligencia artificial debil.- Se define como la inteligencia artificial racional que se centra tipicamente en una tarea estrecha. Este tipo de inteligencia es limitada, puede simultar el proceso cognitivo, pero no es en si un proceso cognitivo.

2) Inteligencia arificial fuerte.- Es aquella que iguala o excede a la inteligencia humana promedio, es una máquina que exitosamente puede realizar cualquier tarea intelectual de cualquier ser humano. Se basa en el principo que una máquina puede ser programada para exhibir las mismas caracteristicas propias de una mente humana, como lo es entender, percibir, tener creencias y tomar desiciones.

16.2 Descubrimientos de Mendel

Para sus experimentos Mendel cultivó más de 28,000 plantas del guisante y realizó cruzamientos entre las distintas variedades y cuantificó 7 caracteres relacionados con las semillas.

1) La semilla podria ser de forma redonda o arrugada.

2) El color de la semilla podria ser gris o blanco.

3) El color de la flor podria ser blanco o violeta.

4) El color de la vaina podria ser amarillo o verde.

5) La forma de la vaina podria ser llena o constreñida.

6) El crecimiento de las flores podria a los lados o en la cúspide del tallo.

7) El tamaño del tallo podria ser de 30cm hasta 3m de largo.

El exito Mendel se debio a que utilizó variedades de una misma especie, lo que la descendencia obtenida era fértil. La especie que selecciono era hermafrodita, lo que permitia mantener variedades puras de chicharos gracias a la autofecundación. Además los caracteres que reconocio eran sencillos, discretos, fácilmente observables y determinados por un único gen.

Un gen es una secuencia de ADN que constituye la unidad funcional para la transmisión de los caracteres hereditarios. Por su parte un alelo son las formas alternativas que puede tener un mismo gen. Ocupan mismo lugar en los cromosomas.

1) Homocigótico.- Se trata del caso cuando los alelos heredados por los padres son idénticos.

2) Heterocigótico.- Ocurre cuando los alelos heredados por los padres son distintos.

Para describir el conjunto de los genes de un individuo se utiliza el concepto de genotipo y para referirnos a la manifestación visible del genotipo en un determinado ambiente (alimentación, clima, enfermedades, etc.)se utiliza el concepto de fenotipo.

16.2.1 Leyes de Mendel

1) Si se realiza la cruza de dos líneas puras que difieren en un solo carácter, las plantas híbridas de la primera generación filial (F1)tienen todas la misma apariencia externa (es decir, mismo fenotipo), son idénticas entre sí y se parecen a uno de los progenitores.

2) La autofecundación de plantas híbridas procedentes del cruzamiento entre dos líneas puras que difieren en un carácter origina una segunda generación filial (F2) en la que las tres cuartas partes presenta el fenotipo dominante y una cuarte parte del fenotipo recesivo (proporción 3:1).

3) Si cruzamos dos líneas puras que difieren en dos caracteres observamos que los rasgos se heredan de manera independiente unos de otros. No existe relación entre ellos.

16.2.2 Experimento de Mendel

Se realiza la cruza entre plantas de semillas verdes lisas (AA,bb) con plantas de semillas rugosa y amarilla (aa,BB).
De esta cruza obtuvo una primera generación filial F1 de cuatro plantas iguales con el genotipo Aa,Bb. Al autofecundar estas plantas se obtiene la siguiente matriz de posibles combinaciones.

Aa,Bb	**AB**	**Ab**	**aB**	**ab**
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

1) A representa el color verde.

2) a representa el color amarillo.

3) B representa semillas rugosas.

4) b representa semillas lisas.

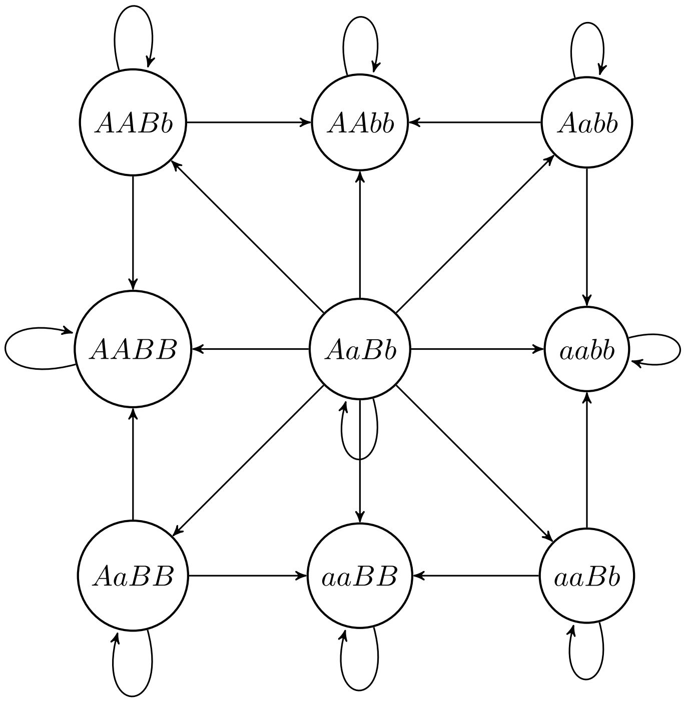
Para cada generación siguiente se vuelve a realizar la autofecundación, por lo que es necesario obtener las posibles combinaciones de cada genotipo.

AA,Bb	**AB**	**Ab**
AB	AABB	AABb
Ab	AABb	AAbb

Aa,BB	**AB**	**aB**
AB	AABB	AaBB
aB	AaBB	aaBB

Aa,bb	**Ab**	**ab**
Ab	AAbb	Aabb
ab	Aabb	aabb

aa,Bb	**aB**	**ab**
aB	aaBB	aaBb
ab	aaBb	aabb



$$
\begin{array}{c} \\ AABB \\ AABb \\ AaBB \\ AaBb \\ AAbb \\ Aabb \\ aaBB \\ aaBb \\ aabb \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} AABB & AABb & AaBB & AaBb & AAbb & Aabb & aaBB & aaBb & aabb \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.25 & .50 & 0 & 0 & .25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.25 & 0 & .50 & 0 & 0 & 0 & .25 & 0 & 0 \\
\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .25 & .50 & 0 & 0 & .25 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .25 & .50 & .25 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{16.1}
$$

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p^{(1)} = p^{(0)}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$p^{(2)} = p^{(0)}\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} .1406 & .09375 & .09375 & .0625 & .140625 & .09375 & .140625 & .09375 & .140625 \end{pmatrix}$$

$$p^{(8)} = p^{(0)}\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} .2480 & .0019 & .0019 & .000015 & .2480 & .0019 & .2480 & .0019 & .2480 \end{pmatrix}$$

Para n muy grande:

$$p^{(n)} = p^{(0)}\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} .25 & 0 & 0 & 0 & .25 & 0 & .25 & 0 & .25 \end{pmatrix}$$

Appendix A

Códigos

A.1 Dado de tres caras

Listing A.1: Distribución

```
void histograma()
{
        // Declaracion de variables
        int N = 10000;
        TRandom2 dado;
        int aleatorio = 0;

        // Crear histograma
        TH1F *hpx = new TH1F("Dado","Distribucion",100,0,4);
        hpx->SetFillColor(80);

        // Crear canvas
        TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Dynamic",200,10,700,500);
        c1->SetFillColor(20);
        c1->GetFrame()->SetFillColor(21);
        c1->GetFrame()->SetBorderSize(6);
        c1->GetFrame()->SetBorderMode(-1);

        const Int_t kUPDATE = 400;
        // Generar N numeros aleatorios
        for( int n=0; n<N; n++ )
        {
                aleatorio = dado.Rndm(1) * 3;
                // Aumentar el contador
                hpx->Fill(aleatorio+1);
```

```
                //Hacer refresh del histograma cada 300 numeros
                if (n && (n%kUPDATE) == 0)
                {
                        if (n == kUPDATE) hpx->Draw();
                        c1->Modified();
                        c1->Update();
                        if (gSystem->ProcessEvents())
                            break;
                }
        }
}
```

Listing A.2: Distribución normalizada

```
void histograma()
{
        // Variables a utilizar
        float media=0;
        TRandom3 aleatorio;
        // Crear histograma
        TH1F *hpx = new TH1F("Gauss","Gauss", 100,-4,4);
        hpx->SetFillColor(80);

        // Generar datos
        for(int index; index<1000; index++)
        {
                hpx->Fill(aleatorio.Gaus(media));
        }

        // Normalizar histograma
        Double_t norm = hpx->GetEntries();
        hpx->Scale(1/norm);
        // Crear canvas y dibujar histograma
        TCanvas *salida = new TCanvas();
        hpx->Draw();
}
```

A.2 Congruencia de Zeller

Listing A.3: Archivo main

```
// Introducir fecha en el orden dia / mes / year
#include "zeller.h"

int main(int argc, char* argv[])
```

```
{
        // Variables dia, mes, year
        int q;          // Dia del mes
        int m;          // Mes
        int a;          // year

        // Conversion de string a int
        istringstream string1(argv[1]);
        istringstream string2(argv[2]);
        istringstream string3(argv[3]);
        string1 >> q;
        string2 >> m;
        string3 >> a;

        congruencia(q, m, a);
        return 0;
}
```

Listing A.4: Libreria

```
// Cabecera para el algoritmo de la congruencia de Zeller
#ifndef ZELLER_H
#define ZELLER_H
#include <string>
#include <sstream>

using namespace std;

void congruencia(int dia, int mes, int year);

#endif
```

Listing A.5: Función para calcular la fecha

```
// Definicion de funcion para calcular algoritmo de congruencia de Zeller
#include <iostream>
using namespace std;
void congruencia(int dia, int mes, int year)
{
        // Calcular parametros K y J
        int K = year % 100;
        int J = year / 100;

        //Calcular dia (sabado=0)
        int h = int (dia + ((mes+1.0)*2.6) + K + (K/4)
```

```
                      + (J/4) +(5*J)) % 7;

        // Estandarizar (lunes = 1)
        int d = ((h+5) % 7) + 1;

        // Imprimir
        switch (d)
        {
                case 1: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue lunes"<<endl; break;
                case 2: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue martes"<< endl; break;
                case 3: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue miercoles"<< endl; break;
                case 4: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue jueves"<< endl; break;
                case 5: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue viernes" << endl; break;
                case 6: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue sabado" << endl; break;
                case 7: cout << "El dia " << dia << "/" << mes <<
                                "/" << year << " fue domingo" << endl; break;
        }
}
```

A.3 Calcular Pi

Listing A.6: Calcular pi mediante aproximación geométrica

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <iomanip>

using namespace std;

int main(int argc, char **argv)
{
        unsigned long long int N=100000000000;  // Total de tiros
        unsigned long long int aciertos=0;              // Aciertos
        double x, y;                            // Coordenadas
        double aproximacion_pi;
        const double factor = 1.0 / RAND_MAX;
```

```
        srand (time(NULL));

        // Generar N coordenadas aleatorias
        for (unsigned long long int i=0; i < N; i++)
        {
                x = rand() * factor;
                y = rand() * factor;
                if (x*x + y*y < 1.0)
                        aciertos++;
                if(i%1000000000==0)
                        cout << i << endl;
        }

        aproximacion_pi = 4.0 * aciertos / N;

        cout << "La aproximacion de pi es" << scientific <<
                        setprecision(15) << aproximacion_pi << endl;

        return 0;
}
```

Listing A.7: Calcular pi con el algoritmo de Spigot

```
// Algoritmo de Spigot para calcular Pi
// Se obtiene un digito en cada ciclo
// g++ spigot2.cpp -o spigot -lmpich -lmpichcxx


#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include "mpi.h"

using namespace std;

void spigot(int digits)
{
        ofstream digitos("pi03.dat");
        ofstream tiempo("tiempo03.dat");
        long double start_time,end_time;


        int i, nines = 0;
```

```
int q,                              // Siguiente digito preliminar
        p = -1;                     // Previo digito prelimnar
int len = 10*digits+3+1;            // Uno mas que R+W
int *a;                             // Array pointer

a = (int*)malloc (len*sizeof(*a));
for (i=0; i < len; ++i)
{
        a[i] = 2;
}

start_time = MPI_Wtime();     /* Initialize start time */

while(digits>=0)
{
        // Compensar por el primer digito
        q=0;
        for (i =len; --i >=1;)
        {
                q += 10L * a[i];
                a[i] = q % (i+i+1);
                q /= (i+i+1);
                q*=i;
        }
        //Primer digito
        q+= 10L * a[0];
        a[0]=q%10;
        q/=10;
        if( q == 9)
        {
                ++nines;
        }

        else
        {
                if(p >= 0)
                        digitos << p+ q/10;
                if (digits < nines)
                        nines = digits;
                digits -= (nines+1);
                while(--nines >= 0)
                {
                        if(q == 10)
```

```
                                        digitos << 0;
                                else
                                        digitos << 9;
                        }
                        nines = 0;
                        if( q == 10)
                                p = 0;
                        else
                                p = q;

                        end_time=MPI_Wtime();
                tiempo << end_time-start_time << endl;
                }
                if (digits %1000 ==0)
                        cout << digits << endl;
        }
        free(a);
        digitos.close();
        tiempo.close();
        return;
}

int main(int argc, char *argv[])
{
        MPI::Init(argc,argv);
        int N = 100000;
        spigot(N);
        return 0;
}
```

A.4 Caminata aleatoria

A.4.1 Problema del caballero de Méré

Listing A.8: Guardar simulación en archivo de texto

```
void captura()
{
        // Variables a utilizar
        Int_t dados[2];
        Int_t cont;
        Int_t acumulado=0;
        Int_t N=100000;
        bool flag;
        ofstream output1("tiros.dat");
```

```
        ofstream output2("dado1.dat");
        ofstream output3("dado2.dat");
        ofstream output4("acumulado.dat");
        srand(time(NULL));

        // Generar datos
        for (int i=1; i <= N; i++)
        {
                cont = 0;
                flag=1;
                while(flag)
                {
                        cont++;
                        dados[0] = 1 + rand()%6;
                        dados[1] = 1 + rand()%6;

                        if((dados[0] == 6) && (dados[1] == 6))
                        {
                                acumulado+=cont;
                                output1 << cont << endl;
                                output4 << acumulado << endl;
                                flag=0;
                        }
                        output2 << dados[0] << endl;
                        output3 << dados[1] << endl;
                }
                cout << i <<endl;
        }
        output1.close();
        output2.close();
        output3.close();
        output4.close();
        cout<< "Terminado" << endl;
}
```

Listing A.9: Gráficar resultados

```
void crear_hist()
{
        // Histogramas
        TH1F *hpx = new TH1F("Montecarlo","Tiros",200,0,200);
        TH1F *hpx2 = new TH1F("Sumas","Sumas",30,0,15);
        TH1F *hpx3 = new TH1F("Montecarlo","Bin10",20,0,200);
        TH1F *hpx4 = new TH1F("Montecarlo","Bin100",2,0,200);
```

```
TH3F *hpx5 = new TH3F("pos","pos",14,0,7,14,0,7,15000,0,15000);
hpx->SetFillColor(80);
hpx2->SetFillColor(80);
hpx3->SetFillColor(60);
hpx4->SetFillColor(100);
hpx5->SetMarkerColor(kBlue);

// Lectura de archivos y guardar datos en vectores
string line;
Int_t dato;
Int_t counter=0;
Int_t eventos[6][6]={0};
vector < Int_t > tiros;
vector < Int_t > dado1;
vector < Int_t > dado2;
vector < Int_t > acumulado;
ifstream farchivo1("tiros.dat", ios::binary | ios::in);
ifstream farchivo2("dado1.dat", ios::binary | ios::in);
ifstream farchivo3("dado2.dat", ios::binary | ios::in);

while (getline(farchivo1, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        tiros.push_back(dato);
}
cout << "aqui" << endl;
while (getline(farchivo2, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        dado1.push_back(dato);
}
cout << "estoy" << endl;
while (getline(farchivo3, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        dado2.push_back(dato);
}


// Llenar histogramas
```

```
        for (int i = 0; i< 500000; i++)
        {
                eventos[dado1[i]-1][dado2[i]-1]++;
                hpx->Fill(tiros[i]);
                hpx2->Fill(dado1[i]+dado2[i]);
                hpx3->Fill(tiros[i]);
                hpx4->Fill(tiros[i]);
                hpx5->Fill(dado1[i],dado2[i],eventos[dado1[i]-1][dado2[i]-1]);
                cout << i << endl;
        }

        // Dibujar histogramas
        TCanvas *salida = new TCanvas();
        hpx->Draw();
        TCanvas *salida1 = new TCanvas();
        hpx2->Draw();
        TCanvas *salida2 = new TCanvas();
        hpx3->Draw();
        TCanvas *salida4 = new TCanvas();
        hpx5->Draw("box");
        TCanvas *salida3 = new TCanvas();
        hpx4->Draw();

        cout << hpx->GetSkewness(1)<<endl;
        cout << hpx->GetKurtosis(1)<<endl;
        cout << hpx3->GetSkewness(1)<<endl;
        cout << hpx3->GetKurtosis(1)<<endl;
        cout << hpx4->GetSkewness(1)<<endl;
        cout << hpx4->GetKurtosis(1)<<endl;
}
```

A.4.2 Caminata aleatoria unidimensional

Listing A.10: Simular caminata aleatoria

```
void captura()
{
        // Variables a utilizar
        Int_t n1=0;                          // Pasos a la derecha
        Int_t n2=0;                          // Pasos a la izquierda
        Int_t muestras=1000000; // Cantidad de muestras deseadas
        Int_t m;                             // n1-n2
        Int_t cont=0;                 // Pasos dados
        Int_t N=20;                   // n1+n2
        // Archivos para guardar resultados
```

```
        ofstream output1("pasos_50.dat");
        ofstream output3("n1_final_50.dat");
        ofstream output4("m_50.dat");
        srand(time(NULL));

        // Generar datos
        for (Int_t i=0; i < muestras; i++)
        {
                // Dar un paso
                if(rand()%100 <50)
                {
                        n1++;
                        output1 << 0 << endl;
                }
                else
                {
                        n2++;
                        output1 << 1 << endl;
                }
                cont++;

                // Guardar resultado de experimento
                if(cont == N)
                {
                        m = n1-n2;
                        output3 << n1 << endl;
                        output4 << m << endl;
                        cont=0; n1=0; n2=0;
                }
                //cout << i << endl;
        }
        // Cerrar archivos .dat
        output1.close();
        output3.close();
        output4.close();
        cout<< "Terminado" << endl;
}
```

Listing A.11: Graficar resultados

```
void crear_hist()
{
        // Pasos por experimento
        Int_t N=20;
```

```
// Histogramas
TH1F *hpx = new TH1F("Pasos posibles","Pasos posibles",3,0,3);
TH1F *hpx2 = new TH1F("Pasos a la derecha"," Pasos a la derecha",N,0,N);
TH1F *hpx3 = new TH1F("Posicion final","Posicion final",N+N,-N,N);

// Darle formato a los histogramas
hpx->SetFillColor(80);
hpx2->SetFillColor(70);
hpx3->SetFillColor(60);

// Label de ejes X
TLatex *x1label = new TLatex();
x1label->SetTextFont(43); x1label->SetTextSize(23);
TLatex *x2label = new TLatex();
x2label->SetTextFont(43); x2label->SetTextSize(23);
TLatex *x3label = new TLatex();
x3label->SetTextFont(43); x3label->SetTextSize(23);


// Label de ejes Y
TLatex *y1label = new TLatex();
y1label->SetTextFont(43); y1label->SetTextSize(23);
TLatex *y2label = new TLatex();
y2label->SetTextFont(43); y2label->SetTextSize(23);
TLatex *y3label = new TLatex();
y3label->SetTextFont(43); y3label->SetTextSize(23);

// Crear vectores para leer archivos
string line;
Int_t dato;
vector < Int_t > pasos;
vector < Int_t > n1;
vector < Int_t > m;
ifstream farchivo1("pasos_50.dat", ios::binary | ios::in);
ifstream farchivo2("n1_final_50.dat", ios::binary | ios::in);
ifstream farchivo3("m_50.dat", ios::binary | ios::in);

// Guardar informacion de archivos en vectores
while (getline(farchivo1, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        pasos.push_back(dato);
```

```
}
while (getline(farchivo2, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        n1.push_back(dato);
}
while (getline(farchivo3, line))
{
        istringstream string1(line);
        string1 >> dato;
        m.push_back(dato);
}

// Llenar histogramas
for (int i = 0; i < pasos.size(); i++)
        hpx->Fill(pasos[i]);

for (int i = 0; i < n1.size(); i++)
{
        hpx2->Fill(n1[i]);
        hpx3->Fill(m[i]);
}


// Normalizar a 1
Double_t norm = hpx2->GetEntries();
hpx2->Scale(1/norm);
norm = hpx3->GetEntries();
hpx3->Scale(1/norm);
norm = hpx->GetEntries();
hpx->Scale(1/norm);






// Fit con distribucion normal
TF1  *f1 = new TF1("f1","[3]*(TMath::Factorial([0])/(TMath::Factor
f1->SetParameter(0,20.);         // cantidad de pasos
f1->SetParameter(1,.60);         // Probabilidad de movimiento a la
f1->SetParameter(2,1);           // Probabilidad total
```

```
        f1->SetParameter(3,.0001);              // Parametro de normalizacion
        TF1  *f2 = new TF1("f2","[1]*TMath::Binomial([0],x)",0,20);
        f2->SetParameter(0,20.);          // cantidad de pasos
        f2->SetParameter(1,1);

        // Dibujar histogramas
        TCanvas *salida1 = new TCanvas();
        salida1->SetGrid();
        hpx2->Draw();
        hpx2.Fit("gaus");
        //hpx2.Fit("f1");

        x2label ->DrawLatex(20.7, -.015, "n1");
        y2label ->DrawLatex(-1.1, .195, "#frac{n_{1}}{N}");

        TCanvas *salida2 = new TCanvas();
        salida2->SetGrid();
        hpx3->Draw();
        hpx3.Fit("gaus");
        x3label ->DrawLatex(21.8, -.015, "m");
        y3label ->DrawLatex(-22.2, .195, "#frac{m}{N}");
}
```

A.4.3 Caminata aleatoria en el dominio de los números naturales

Listing A.12: Simular caminata aleatoria en 2 dos dimensiones

```
void caminata()
{
        // Pasos deseados
        const Int_t N=1000000;
        // Largo de paso
        Double_t dist = 1;
        // Crear vectores de posicion con valor inicial 0,0
        Double_t x[N],y[N];
        x[0]=0;          y[0]=0;
        // Limite inferior de x o y
        Double_t min;
        // Generador de numero aleatorio
        TRandom2 randm;
        //randm.SetSeed(time(NULL));
        //srand (time(NULL));
        randm.SetSeed(988645332);
        srand (2245);
        // Algoritmo
```

```
    for(Int_t i=0; i < N; i++)
    {
            // Selecciona X
            if(rand()%10 <= 8)
            {
                    if(rand()%10 <= 8)          // +
                            x[i+1] = x[i]+dist;
                    else                                // -
                            x[i+1] = x[i]-dist;
                    y[i+1]=y[i];
            }

            // Seleccionar Y
            else
            {
                    if(rand()%10 <= 8)          // +
                            y[i+1] = y[i]+dist;
                    else                                // -
                            y[i+1] = y[i]-dist;
                    x[i+1]=x[i];
            }
            // Seleccionar aleatoriamente cual variable utilizar

            cout << x[i+1] << "\t\t" << y[i+1] << endl;
    }

    //Graficar
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Caminata 2D",200,10,700,500);
    TGraph *gr = new TGraph(N,x,y);
    gr->SetTitle("Caminata aleatoria");
    gr->SetLineColor(kAzure);
    gr->Draw("AL*");

    // Label de los ejes
    TLatex *x1label = new TLatex();
    x1label->SetTextFont(43); x1label->SetTextSize(18);
    TLatex *y1label = new TLatex();
    y1label->SetTextFont(43); y1label->SetTextSize(18);

    x1label ->DrawLatex(-5, -5, "X");
    y1label ->DrawLatex(-6,-6, "Y");

}
```

```
//Primeros experimentos fueron a 100 pasos
```

A.4.4 Caminata aleatoria en el domino de los números reales

Listing A.13: Simular caminata aleatoria utilizando coordenadas cartesianas

```
void caminata()
{
        // Pasos deseados
        const Int_t N=2000;
        // Largo de paso
        Double_t dist = 5;
        // Crear vectores de posicion con valor inicial 0,0
        Double_t x[N],y[N];
        x[0]=0;         y[0]=0;
        // Limite inferior de x o y
        Double_t min;
        // Generador de numero aleatorio
        TRandom2 randm;
        //randm.SetSeed(time(NULL));
        //srand (time(NULL));
        randm.SetSeed(380645);
        srand (8891);
        // Algoritmo
        for(Int_t i=0; i < N; i++)
        {
                // Seleccionar aleatoriamente cual variable utilizar
                if(rand()%10 <= 4)
                {
                        // Obtener aletoriamente valor de x[i+1]
                        min = -dist + x[i];
                        x[i+1] = min + ((dist+dist) * randm.Rndm());
                        // Determinar signo de y[i+1]
                        if(rand()%10 <=4)
                                y[i+1] = sqrt(pow(dist,2) -
                                                pow(x[i+1] - x[i],2)) + y[i];
                        else
                                y[i+1] = -sqrt(pow(dist,2) -
                                                pow(x[i+1] - x[i],2)) + y[i];
                }
                else
                {
                        // Obtener aleatoriamente valor de y[i+1]
                        min = -dist + y[i];
                        y[i+1] = min + ((dist+dist) * randm.Rndm());;
```

```
                    // Determinar signo de x[i+1]
                    if(rand()%10 <=4)
                            x[i+1] = sqrt(pow(dist,2) -
                                            pow(y[i+1] - y[i],2)) + x[i
                    else
                            x[i+1] = -sqrt(pow(dist,2) -
                                            pow(y[i+1] - y[i],2)) + x[i
            }
            cout << x[i+1] << "\t\t" << y[i+1] << endl;
    }

    //Graficar
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Caminata 2D",200,10,700,500);
    TGraph *gr = new TGraph(N,x,y);
    gr->SetTitle("Caminata aleatoria");
    gr->SetLineColor(kAzure);
    gr->Draw("AL*");

    // Label de los ejes
    TLatex *x1label = new TLatex();
    x1label->SetTextFont(43); x1label->SetTextSize(18);
    TLatex *y1label = new TLatex();
    y1label->SetTextFont(43); y1label->SetTextSize(18);

    x1label ->DrawLatex(5, 5, "X");
    y1label ->DrawLatex(6,6, "Y");

}
```

A.4.5 Caminante perdido

Listing A.14: Simular caminata aleatoria utilizando coordenadas polares

```
void caminata()
{
        using namespace TMath;
        // Pasos deseados
        const Int_t N=10000;
        // Largo de paso
        Double_t dist = .5;
        // Crear vectores de posicion con valor inicial 0,0
        Double_t x[N],y[N];
        x[0]=0;         y[0]=0;
        // Desviacion
        Double_t theta=0;
```

```
    Double_t dtheta=2*Pi()*.001;
    // Limite inferior de x o y
    Double_t min;
    // Generador de numero aleatorio
    TRandom2 randm;
    //randm.SetSeed(time(NULL));
    //srand (time(NULL));
    randm.SetSeed(38045);
    srand (91);
    // Algoritmo
    cont=0;



    for(Int_t i=0; i < N; i++)
    {
            // Seleccionar aleatoriamente cual variable utilizar
            if(rand()%10 <= 0)
            {
                    theta=theta+dtheta;
                    cont++;
            }
            x[i+1] = dist* cos(theta)+x[i];
            y[i+1] = dist* sin(theta)+y[i];
            //cout << cos(theta) << "\t\t" << sin(theta)<< endl;
    }
    cout << cont <<endl;

    //Graficar
    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Caminata 2D",200,10,700,500);
    c1->SetGrid();
    TGraph *gr = new TGraph(N,x,y);
    gr->SetTitle("Caminata aleatoria");
    gr->SetLineColor(kAzure);

    gr->Draw("AL*");

}
```

A.4.6 Distribucion de probabilidad para N muy grande

Listing A.15: Calcular distribución de probabilidad para N muy grande

```
void probabilidad_m()
{
```

```
using namespace TMath;
// Pasos deseados
const Int_t N=100000;

// Posicion final
Double_t m[N+N+1];

// Probabilidad de m
Double_t Pm[N+N+1];
Double_t Pm2[N+N+1];
Double_t Pm3[N+N+1];

// Probabilidades de n1 y n2
Double_t p=.50, q=.50;
Double_t p2=.60, q2=.40;
Double_t p3=.40, q3=.60;

// Algoritmo
for(Int_t i=-N; i <= N; i++)
{
        m[i+N]=i;
        Pm[i+N]=Power(2*Pi()*N*p*q,-.5)*
                        Exp(-(Power(i-N*(p-q),2))/(8*N*p*q));
        Pm2[i+N]=Power(2*Pi()*N*p2*q2,-.5)*
                        Exp(-(Power(i-N*(p2-q2),2))/(8*N*p2*q2));
        Pm3[i+N]=Power(2*Pi()*N*p3*q3,-.5)*
                        Exp(-(Power(i-N*(p3-q3),2))/(8*N*p3*q3));
}

//Graficar
TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Distribucion",200,10,700,500);
c1->SetGrid();
TMultiGraph *mg = new TMultiGraph();
mg->SetTitle("Distribucion de probabilidad ");

TGraph *gr = new TGraph(N+N+1,m,Pm);
gr->SetTitle("Distribucion de probabilidad ");
gr->SetLineColor(kAzure);
gr->SetMarkerColor(kAzure);
gr->SetLineWidth(5);

TGraph *gr2 = new TGraph(N+N+1,m,Pm2);
gr2->SetTitle("Distribucion de probabilidad ");
```

```
        gr2->SetLineColor(100);
        gr2->SetMarkerColor(100);
        gr2->SetLineWidth(5);

        TGraph *gr3 = new TGraph(N+N+1,m,Pm3);
        gr3->SetTitle("Distribucion de probabilidad ");
        gr3->SetLineColor(80);
        gr3->SetMarkerColor(80);
        gr3->SetLineWidth(5);

        mg->Add(gr);
        mg->Add(gr2);
        mg->Add(gr3);
        mg->Draw("ALP");

        // Label de los ejes
        TLatex *x1label = new TLatex();
        x1label->SetTextFont(43); x1label->SetTextSize(18);
        TLatex *y1label = new TLatex();
        y1label->SetTextFont(43); y1label->SetTextSize(18);

        //x1label ->DrawLatex(520, -0.0005, "m");
        //y1label ->DrawLatex(-520,0.009, "P(m)");
        x1label ->DrawLatex(0, -0.0002, "m");
        y1label ->DrawLatex(0, -0.0002, "P(m)");

}
```

A.5 Movimiento Browniano

Listing A.16: Generar distribución gaussiana

```
void captura()
{
        // Variables a utilizar
        Int_t muestras=100000;  // Cantidad de muestras deseadas
        Double_t media = 0.0;
        Double_t varianza= 1.0;
        TRandom2 aleatorio;
        aleatorio.SetSeed(time(NULL));

        // Archivos para guardar resultados
        ofstream output1("distribucion.dat");
```

```
        // Generar Distribucion
        for (Int_t i=0; i < muestras; i++)
                output1 << aleatorio.Gaus(media,varianza) << endl;

        // Cerrar archivos .dat
        output1.close();

        cout<< "Terminado" << endl;
}
```

Listing A.17: Simulación de movimiento Browniano

```
void browniano()
{
        // Varibles
        Double_t volatilidad=.07;
        Double_t desviacion=.1;
        Double_t dt=.01;
        Double_t tiempo[1000];
        Double_t S[1000];
        Double_t sumatoria=0;
        vector < Double_t > distribucion;
                Double_t media = 0.0;
        Double_t varianza= 1.0;
        TRandom2 aleatorio;
        aleatorio.SetSeed(time(NULL));

        // Extraer distribucion del archivo
        string line;
        Double_t dato;

        ifstream farchivo1("distribucion.dat", ios::binary | ios::in);

        while (getline(farchivo1, line))
        {
                istringstream string1(line);
                string1 >> dato;
                distribucion.push_back(dato);
        }

        S[0]=25;
        tiempo[0]=0;

        for(Int_t i=0; i< distribucion.size();i++)
```

```
        {
                sumatoria+= distribucion[i];
        }

        cout << sumatoria/distribucion.size() << endl;
        //for(Int_t i=0; i< distribucion.size()-1; i++)
        for(Int_t i=0; i< 1000-1; i++)
        {
                S[i+1] = S[i]+ S[i]*desviacion*dt +
                S[i]*volatilidad*aleatorio.Gaus(media, varianza)*sqrt(dt);
                tiempo[i+1]= tiempo[i]+dt;
                cout << S[i+1] << '\t' << tiempo[i+1] << endl;
        }

        //Graficar
        TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Browniano",200,10,700,500);
        TGraph *gr = new TGraph(1000,tiempo,S);
        gr->Draw("AC*");

}
```

Appendix B

Examen propuesto

Resuelva:

1. En el sorteo de los partidos de playoffs de la UEFA Euro 2004, 10 equipos fueron seleccionados en parejas. Para ello se utilizaron sobres enumerados del 1 al 10 en orden de mejor a peor equipo. Se barajaron los sobres y los partidos quedan definidos en el orden en que se sacan los sobres (el primero contra el segundo, el tercero contra el cuarto, etc.)

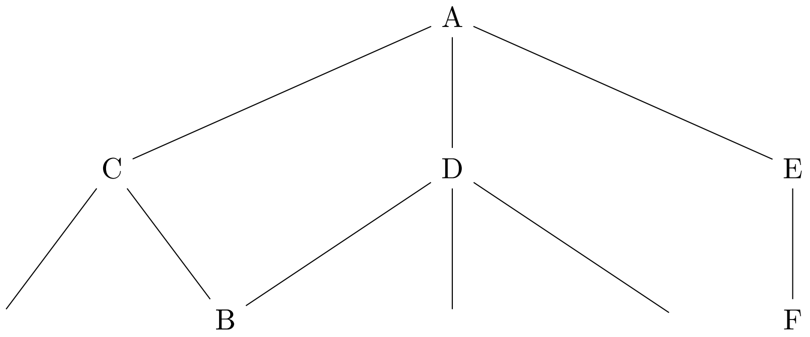
    a) Un posible resultado del sorteo es la secuencia 4,9,3,7,5,10,1,8,2,6. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?
    La probabilidad de obtener ese resultado, dado el número de permutaciones posibles es:
    $$P = \frac{1}{10!} \tag{B.1}$$

    b) ¿Cuántas posibles permutaciones existen para que los primeros cinco sobres sean sorteados en posiciones impar y los últimos cinco sobres en posiciones par?
    Existen 5! permutaciones para los cinco primeros sobres y 5! para los otros cinco sobres, por lo que en total existen $5! \cdot 5!$ posibles resultados.

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 mejores equipos se enfrenten a los 5 peores (sin importar el orden)?
    En el inciso anterior se obtuvo la probabilidad cuando los equipos mejores equipos son sorteados en posicion impar pero para este inciso no importa si son sorteados en posición par o impar. Por lo tanto las permutaciones posibles son 2^5 veces más, dando como probablidad:
    $$P = \frac{32 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} = \frac{8}{63} = 12.7\% \tag{B.2}$$

2. El profesor desea caminar del punto A al punto B (ver el mapa). Para lograrlo, selecciona aleatoriamente uno de los caminos posibles C, D o E. Después selecciona

el siguiente camino de manera aleatoria (por ejemplo, si seleccionó ir al punto E en el primer paso, en su siguiente paso tiene dos opciones: puede seleccionar entre *regresar* al punto A o ir al punto F con probabilidad de 0.5 para cada opción) ¿ Cuál es la probabilidad de que llegue a B en dos pasos?



Para resolver el problema, se define B como el evento de llegar al punto B en el segundo paso, C como el evento de seleccionar el el punto C en la primera iteración y asi sucesivamente para D y E. Dados que los eventos C, D y E son mutuamente exclusivos, el cálculo se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap C) + P(B \cap D) + P(B \cap E) \\ &= P(B|C)P(C) + P(B|D)P(D) + P(B|E)P(E) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{7}{36} \end{aligned} \tag{B.3}$$

3. Un dado no trucado es lanzado dos veces. A es el evento donde la suma de los tiros es igual a 4 y B es el evento donde al menos uno de los tiros es igual a 3.

   a) Determine el valor de $P(A|B)$
   El evento A puede ocurrir de 3 maneras, mientras que el evento B puede ocurrir de 11 formas distintas y $A \cap B = \{(1,3),(3,1)\}$. Por lo tanto:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11} \tag{B.4}$$

   b) ¿ Son A y B eventos independientes?
   Debido a que $P(A) \neq P(A|B)$, los eventos A y B son dependientes.

4. Al seleccionar dos cartas de una baraja regular de 52 naipes. Siendo el evento A que la primera carta sea de espadas y el evento B que la segunda carta sea de tambien de espadas.

   a) Determine P(A),$P(B|A)$ y $P(B|\overline{A})$
   Existen 13 espadas en la baraja y cada carta tiene una probabilidad de 1/52 de ser seleccionada por lo que $P(A) = 13/52 = 1/4$. Dado que la primera carta que

se selecciona es espada $P(B|A) = 12/51$. En caso de que la primera carta no sea espada$P(B|\overline{A}) = 13/51$

b) Determine P(B) dependiendo de si la primera carta fue espada.
Asumiendo $\omega = A \cup \overline{A}$, se calcula:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= \frac{12}{51} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12+39}{51 \cdot 4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{B.5}$$

5. La nave espacial Spiff tiene una luz de advertencia que se enciende cuando los desintegradores se sobrecalientan. Sea W el evento en que se enciede la luz de alarma y F el evento en que ocurrio el sobrecalentamiento. Supongase que la probabilidad de que ocurra el sobrecalentamiento P(F) es igual a 0.1, que la luz se enciende de manera correcta en .99 de los casos que ocurre el sobrecalentamiento y existe un 2% de probabilidad de que se encienda cuando nada está mal: $P(W|\overline{F}) = 0.02$.

   a) Determine la probabilidad de que la luz se encienda.
   Para obtener P(W) es necesario descomponer $\omega = F \cup \overline{F}$:

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W \cap F) + P(W \cap \overline{F} \\ &= P(W|F)P(F) + P(W|\overline{F})P(\overline{F}) \\ &= .99 \cdot 0.1 + 0.02 \cdot 0.9 = 0.099 + 0.018 = 0.117 \end{aligned} \tag{B.6}$$

   b) Determine la probabilidad condicional de que los desintegradores se sobrecalienten, dado que la luz se encendio.
   Para determinar $P(F|W)$ se utiliza la la regla de Bayes:

$$P(F|W) = \frac{P(F \cap W)}{P(W)} = \frac{0.99 \cdot 0.1}{.117} = 0.846 \tag{B.7}$$

6. Un estudiante realiza un examen de opción multiple (4 opciones). Suponiendo que para cada pregunta el conoce o seleecciona al azar la respuesta. Si conoce la respuesta, tiene una probabilidad de 1 de contestar correctamente, de lo contrario lo deja a la suerte con una probabilidad de 1/4 de conestar correctamente. Para pasar, el alumno necesita conestar el 70% de las preguntas de manera correcta. El estudiante se preparo para obtener el minimo aprobatorio con una probabilidad de 0.7 de conocer la respuesta a una pregunta. Dado que el estudiante conteste de manera correcta una pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente conosca la respuesta?
   Se considere como evento A cuando el estudiante conoce la pregunta y evento B cuando acierta la respuesta. En base al texto de este problema se obtienen los siguientes datos:

   - $P(B|A) = 1$

- $P(B|\overline{A}) = .25$
- $P(A) = .70$
- $P(\overline{A}) = .30$

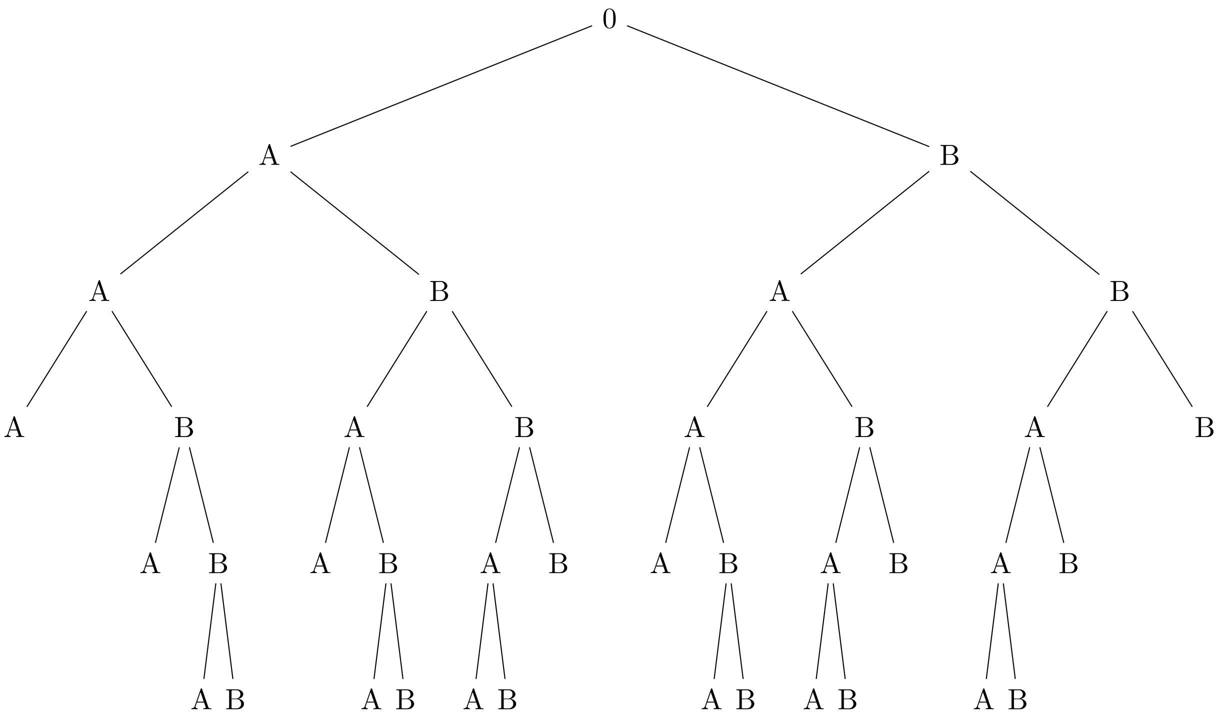
Para obtener $P(A|B)$ es necesario calcular $P(B \cap A)$ y P(B):

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ P(B \cap A) &= P(B|A) \cdot P(A) = 1 \cdot 0.7 = 0.7 \\ P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \\ P(B) &= 0.7 + 0.25 \cdot 0.30 = 0.775 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Aplicando el teorema de bayes se calcula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.7}{0.775} = 0.9032 \tag{B.9}$$

7. Dos equipos de beisbol A y B juegan una serie al mejor de 5. Construya el diagrama de árbol y encuentre el número posible de combinaciones en que la serie se puede llevar a acabo.



8. Considere un contenedor de 50 piezas manufacturadas que contiene 5 piezas defectuosas. 6 piezas son seleccionadas al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 piezas defectuosas?
   Primero se obtiene el número de posible combinaciones de piezas defectuosas que se pueden seleccionar dado que hay 5 piezas defectuosas en el lote.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10 \tag{B.10}$$

   Posteriormente se calculan las posibles combinaciones de obtener 4 piezas funcionales de las 45 que hay en el contenedor.

$$\binom{45}{4} = \frac{45!}{4! \cdot (45-4)!} = 148995 \tag{B.11}$$

   Por lo tanto el número de posibles combinaciones que posean exactamente dos piezas defectuosas es $10 \cdot 148995 = 1489950$ y la probabilidad se obtiene:

$$P(2 \text{ piezas defectuosas}) = \frac{1489950}{\binom{50}{6}} = 0.09376 \tag{B.12}$$

9. Sea S = {1,2,3,...,500}. Encuentre la cantidad de enteros en S que son divisibles entre 2,3 o 5. Para resolver el problema considere las siguientes dos observaciones:

   1) Por cada $n \in N$, el número de enteros en S que son divisibles o multiplos de n se obtiene por:
   $$\frac{500}{n}$$
   2) Para a,b,c∈N, c es divisible por a y b si y solo si c es divisible por el minimo comun multiplo de a y b.

   Para obtener la unión de $|S_2 \cup S_3 \cup S_5|$ es necesario despejar los elementos de la formula:

$$|S_2 \cup S_3 \cup S_5| = (|S_2|+|S_3|+|S_5|)-(|S_2 \cap S_3|+|S_2 \cap S_5|+|S_3 \cap S_5|)+(|S_2 \cap S_3 \cap S_5|) \tag{B.13}$$

   - $|S_2| = 500/2 = 250$
   - $|S_3| = 500/3 = 166$
   - $|S_5| = 500/5 = 100$
   - $|S_2 \cap S_3| = 500/(2 \cdot 3) = 83$
   - $|S_2 \cap S_5| = 500/(2 \cdot 5) = 50$
   - $|S_3 \cap S_5| = 500/(3 \cdot 5) = 33$
   - $|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = 500/(3 \cdot 5 \cdot 2) = 16$

$$|S_2 \cup S_3 \cup S_5| = (250 + 166 + 100) - (83 - 50 - 33) + (16) = 366 \tag{B.14}$$

10. Una persona es diagnosticada con una enfermedad poco común. Se sabe que hay una posibilidad de 1% de contraer la enfermedad. Se denota con la letra D al evento de contraer la enfermedad y al evento T por un resultado positivo en la prueba. Se sabe que la prueba es imperfecta por lo que $P(T|D) = 0.98$ y $P(T|\overline{D}) = 0.05$.

    a) Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona realmente tenga la enfermedad?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap D) + P(T \cap \overline{D}) \\ &= P(T|D) \cdot P(D) + P(T|\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) \\ &= 0.98 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0593 \\ P(D|T) &= \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)} = \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.0593} = 0.16526 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Bibliography

[1] Joseph Blitzstein and Jessica Hwang. Introduction to probability, 2015.

[2] Chen Chuan-Chong. Principles and techniques in combinatorics, world scientific, 1992.

[3] Seymour Lipschutz. Schaum's outline of probability, 1965.