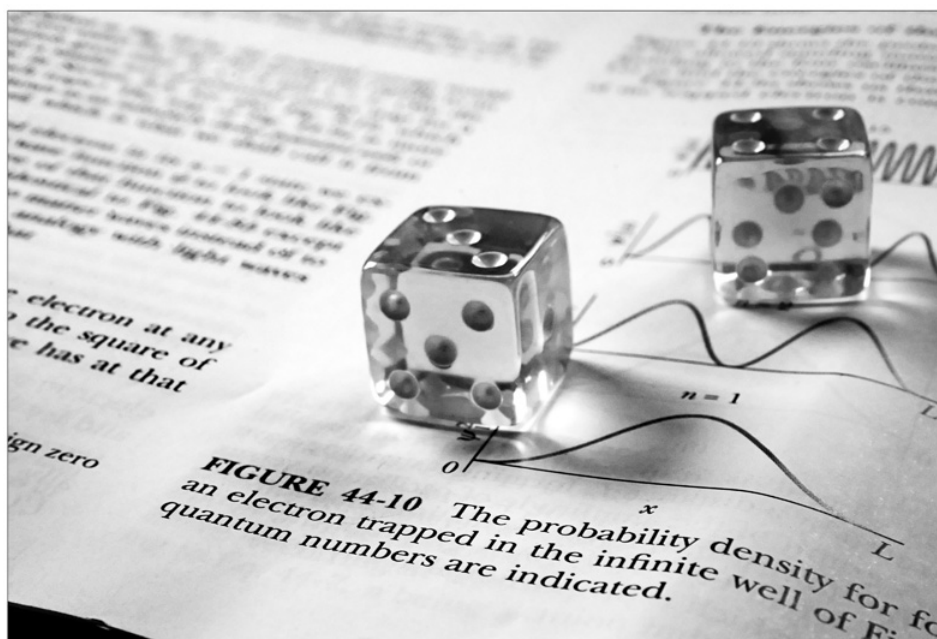


Apuntes de probabilidad, procesos aleatorios e inferencia

Juan Carlos Moreno Torres
Curso A17



Chapter 1

Conceptos e Interpretaciones de Probabilidad

1.1 Definiciones de conceptos asociados a la Probabilidad

Suerte

La falla o el éxito son aparentemente atraídos por la factores externos, ajenos a las acciones de cada persona.

Coincidencia

Una concurrencia sobresaliente de eventos o circunstancias sin aparente conexión casual.

Azar

La cualidad o el estado de la falta de patrones o principios de organización; impredecibilidad.

Incertidumbre

No ser digno de confianza; no conocido o definido.

Riesgo

Una cierta situación envolviendo exposición a peligro.

Duda

El sentimiento de incertidumbre o falta de convicción.

Fortuna

Suerte o posibilidad como una fuerza arbitraria afectando asuntos humanos.

Probabilidad

La cualidad o estado de posibilidad de ocurrencia; grado al que un evento dado es verosímil a ocurrir.

1.2 Interpretaciones de Probabilidad

1.2.1 Interpretación clásica de Probabilidad

La interpretación clásica de probabilidad esta basada en el concepto de **resultados igualmente probables**. En el caso de lanzar una moneda se tienen dos resultados: Cara o cruz, usualmente

se asume que ambos casos tienen la misma posibilidad de ocurrir, por lo tanto teniendo la misma probabilidad. Y ya que la suma de las probabilidades de todos los casos debe ser 1, se les asigna $1/2$ a cada una. Mas generalmente para N casos posibles la probabilidad es expresada de forma clásica como:

$$P(A) = \frac{\text{Numero de casos favorables}}{\text{Numero de casos totales}}$$

Dos problemas surgen al buscar una definición formal con esta interpretación de la probabilidad. La primera es el uso del concepto de *resultados igualmente probables* que esta basada en la idea de la probabilidad. La segunda esta en que ningún tiene método sistemático para asignar probabilidades a resultados que no se asume sean *igualmente probables*. Para tales casos otra interpretación de probabilidad es necesitada.

1.2.2 Interpretación frecuencial de Probabilidad

En muchos problemas, la probabilidad de que algún resultado de un proceso específico sea obtenido puede ser interpretado como la *frecuencia relativa*, la cual seria obtenida si el proceso es repetido un gran numero de veces bajo condiciones similares. Esta definición carga consigo problemas fundamentales, tales como determinar cual es un “gran numero de repeticiones”, así como la precisión requerida para delimitar un experimento con “condiciones similares”. Finalmente los problemas que aborda la probabilidad frecuencial requieren, en principio, la propiedad de ser repetidos en grandes números. En caso que esta propiedad no se cumpla otra interpretación de probabilidad es requerida.

1.2.3 Interpretación subjetiva de Probabilidad

De acuerdo con la interpretación subjetiva, o personal, de la probabilidad, la probabilidad que un individuo asigna a un posible resultado de algún suceso representa su propio juicio de la verosimilitud de que un resultado sea obtenido. Este juicio esta basado en la información y entendimiento acerca del proceso, y debe ser expresado en forma numérica.

Esta interpretación puede ser formalizada, siempre y cuando un juicio personal sobre la verosimilitud de varias combinaciones de resultados satisfagan ciertas condiciones de consistencia. Por supuesto esto conlleva los requerimientos de que cualquier propuesta cuente con consistencia y que se encuentre libre de contradicciones. Además de que no existe una base científica u objetiva sobre la cual iniciar una suposición, restringiendo la posibilidad de colaboración al ocupar ese tipo de probabilidad.

Este enfoque tiene la peculiaridad de apelar por un aspecto subjetivo de la ciencia, ya que la información disponible utilizada para asignar un valor numérico subjetivo suele provenir de otras interpretaciones subjetivas de probabilidad tales como la frecuencial o la clásica.

Chapter 2

Tipos de experimentos

2.1 Experimentos Deterministas y Aleatorios

2.1.1 Definición de experimento

Procedimiento científico realizado para confirmar o refutar una hipótesis, o demostrar un hecho conocido. - Diccionario de Oxford

2.1.2 Ejemplos de 10 experimentos deterministas

1. Refracción de la luz blanca al pasar por un prisma óptico.
2. Verificar un patrón de movimiento parabólico realizado por un proyectil.
3. Determinación de la búsqueda del equilibrio termodinámico entre dos líquidos de diferente temperatura al entrar en contacto.
4. Demostración de la existencia de una superficie de una sola cara y un solo borde.
5. Generación de una corriente eléctrica en un circuito eléctrico en presencia de un campo magnético variable.
6. Validación de que la energía de salida de un sistema termodinámico cerrado no puede ser mayor a la energía de entrada.
7. Calculo del área de un círculo.
8. Demostración de la reacción exotérmica en la formación de dióxido de carbono.
9. Validación empírica de la distancia mas corta entre dos puntos en un plano.
10. Verificación de la transformación de la energía potencial en cinética.

2.1.3 Ejemplos de 10 experimentos aleatorios

1. Evaluación de la posición exacta de un electrón.
2. Evaluación de la cantidad de gotas de lluvia que caerán en un área determinada.
3. Estimación del resultado del lanzamiento de una moneda.
4. Determinación del patrón de movimiento de un insecto volador.
5. Experimento de la cárcel de Stanford.
6. Especulación en la bolsa de valores.
7. Evaluación del efecto placebo.
8. Estimación de la elección de vías alternas por conductores al bloqueo de vialidades.
9. Determinar la posición de un átomo de H_2O en estado gaseoso dentro de un contenedor.
10. Experimento de Milgram

2.2 Reseña de The Math Book

2.2.1 Conteo en Primates

Aproximadamente hace 60 millones de años primates similares a los lemures, iniciaron su evolución al rededor del mundo, y hace 30 millones de años los primates con características de simio hicieron su aparición. En el artículo de Nature “Animals as Mathematicians” de H. Kalmus, se exploran casos concretos en los que animales ha sido enseñados a interpretar el concepto de número, en el que se expone la capacidad de asociar patrones visuales con un número específico de repeticiones de cierta acción, los animales incluyen ardillas, pericos, ratas e insectos. Los chimpancés han sido las criaturas que mas capacidad han demostrado en identificar números, aprendiendo en el mejor de los casos 7 numerales, según reporta Michael Beran del Georgia State University in Atlanta, Georgia.

2.2.2 Números Primos generados por Cigarras

Las cigarras son insectos evolucionados hace 1.8 millones de años, durante la era del pleistoceno. Las cigarras del tipo Magicicada pasan la mayor parte de su vida viviendo bajo tierra, alimentándose de raíces, solo emergen para aparearse y rápidamente morir. Estas criaturas muestran un peculiar comportamiento: Su emerger esta sincronizado con periodos anuales correspondientes a los números primos 13 y 15. Se especula que este comportamiento haya evolucionado como un método de evasión de predadores y bacterias con ciclos de vida cortos. Mario Markus del Max Plank Institute of Molecular Physiology en Dortmund, Alemania, descubrió que este tipo de ciclos se pueden desarrollar naturalmente de modelos matemáticos de interacción presa-predador.

2.2.3 Último Teorema de Fermat

$$X^n + Y^n = Z^n$$

Solo para: $n < 2$

Chapter 3

Axiomas de la Probabilidad

3.1 Espacio Muestral y Eventos

Consideremos un experimento cuyo resultado sea aleatorio. Sin embargo, del cual se tenga conocimiento de todos los resultados posibles esperados. Este conjunto de **todos los resultados posibles esperados** es conocido como *espacio muestral* del experimento y sera denotado con S .

Cualquier subconjunto de un espacio muestral es considerado un **evento**.

Ejemplo: Supongamos el lanzamiento de un dado cubico.

$S=1,2,3,4,5,6$ Representa el conjunto de todos los resultados posibles esperados.

$E=2,4,6$ Representa el subconjunto de que el dado caiga en un número par.

3.2 Axiomas de probabilidad

Se asume que para cualquier evento E , de un espacio muestral S , existe un valor $P(E)$, referido como probabilidad de E .

Axioma 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axioma 2

$$P(S) = 1$$

Axioma 3

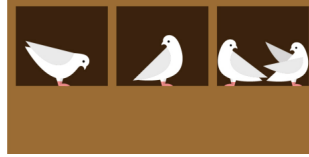
Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes E_1, E_2, E_3, \dots , esto es eventos para los que $E_i \cap E_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Nos referimos a $P(E)$ como probabilidad del evento E .

3.3 Principio del palomar

Si tenemos n nidos y en ellos tenemos $n+1$ palomas, al menos hay un nido en el que hay más de una paloma.



Prueba: Supongamos que el principio es falso, esto significaría que podemos poner $n+1$ palomas en n nidos y tener a lo mas una paloma por nido. El numero total de palomas debe ser la suma sobre todos los nidos i de cada paloma P_i contenida en i . Así que:

$$\sum_{i=1}^n B_i \leq \sum_{i=1}^n 1$$

$$\sum_{i=1}^n 1 = n * 1$$

Lo cual solo puede ser:

$$\sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n 1$$

E implicaría que no existirían $n+1$ palomas, sino a lo mas n . Contradicción al numero de palomas que se tienen.¹

Ejemplo: *Cada grafo, con al menos 2 vértices contiene 2 vértices del mismo grado.*

Primero notemos que todo vértice en un grafo G con n vértices tendrá un grado entre 1 y n .

Después notece que ningún grafo con al menos dos vértices tiene ambos vértices de grado 0.

Así, en cualquier grafo con al menos 2 vértices, todos los grados son un subconjunto de $\{1, \dots, n-1\}$.

Y ya que tenemos n vértices, por el principio del palomar, siempre hay dos vértices con el mismo grado.

¹<https://www.di.ens.fr/~zhentao/math363/pigeonhole.pdf> - Research University of Paris, Computer Science Department

Chapter 4

Métodos de conteo

4.1 Metodos de conteo

A la teoría matemática de conteo se le conoce formalmente como *Análisis Combinacional*.
Principio básico del conteo

Suponga que dos experimentos son realizados. Si el experimento 1 puede resultar en m posibilidades, y para el experimento 2 hay n posibles resultados, entonces existen mn resultados posibles para los dos experimentos juntos.

4.2 Permutaciones

A un arreglo de n símbolos en un **orden definido** se le llama **permutación**.

Con frecuencia se desea saber cuantos arreglos pueden formarse usando n símbolos diferentes, ocupandolos solamente una vez por arreglo.

$$n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

4.3 Permutaciones con caracteres idénticos

De forma general para **permutaciones con elementos idénticos**

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \text{ Donde } n_1, n_2, \dots n_r \text{ son los conjuntos de elementos idénticos.}$$

4.4 Permutaciones con restricción de caracteres

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\dots (n-r+1) \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$${}^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\dots 2 \cdot 1}{(n-r)!}$$

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ Donde : } n \geq r \quad (4.1)$$

4.5 Combinaciones

$${}^nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ Donde : } n \geq r \quad (4.2)$$

Árboles, The Math Book y los Codones

A continuación se muestra un árbol representando 4 tiradas de una moneda.



5.2 Reseña de The Math Book

5.2.1 Los Nudos y el Desarrollo Humano

El uso de los nudos precede a los *Homo Sapiens*, se han registrado conchas marinas agujeradas y pintadas con óxido de más de 82,000 años de antigüedad, en la cueva de Moroccan. Las perforaciones en las conchas implican el uso de nudos para el uso de las piezas como ornamentos.

Los nudos ornamentales son descritos en el “*Libro de Kells*”, un libro ilustrado por monjes celtas en el 800 D.C. En la era actual los nudos son ampliamente estudiados. El matemático alemán Max Dehn demostró que las imágenes en espejo de un nudo trefoil no son equivalentes. Por siglos los matemáticos han desarrollado técnicas para distinguir entre enredos azarosos que parecen nudos, de los nudos verdaderos, sus distinciones y tipos. En la actualidad más de 1.7 millones de nudos no equivalentes han sido identificados, todos con solo 16 o menos cruces.

Conferencias enteras son dedicadas a los nudos, desde el área de la genética -intentando descifrar como desenrollar un nudo de ADN- hasta la física de partículas, en un intento por representar la naturaleza fundamental de las partículas elementales.

Los nudos han sido esenciales en el desarrollo de la civilización humana, usados en amarrar su ropa, asegurar sus armas, crear refugios, y permitir el amarre de velas en barcos exploradores. Los humanos han transformado los nudos de simples uniones en sus collares a modelos de la realidad misma.

5.2.2 Dados, generadores de números al azar

En 1940 la generación de números estadísticamente azarosos era importante para simular la física de explosiones termonucleares, hoy en día, las redes computacionales los ocupan para evitar la congestión de datos en el control de tráfico de Internet. Los encuestadores políticos utilizan datos al azar para seleccionar muestras de votantes potenciales.

Los dados, hechos originalmente de los huesos de tobillo de los animales cuadrúpedos, era uno de los primeros métodos de producción de datos al azar. Se creía que los dioses controlaban el resultado del azar, por lo que decisiones importantes eran tomadas con los dados, desde elegir gobernantes, a la distribución de los bienes en una familia.

El dado más antiguo data de 3,000 A.C. junto con un juego de Backgammon de la legendaria ciudad Burnt en el sureste de Irán. Por siglos los dados han sido utilizados para enseñar probabilidad donde suponiendo un dado de n caras con un número diferente en cada cara, tiene una probabilidad de aparecer $1/n$. Y donde la probabilidad de obtener una secuencia particular i , tiene una probabilidad $1/n^i$. Al usarse los dados tradicionales, la probabilidad de obtener una suma determinada, es el número de maneras en que resulta dicha suma entre la suma de combinaciones totales posibles. Es por eso que la suma de siete, siempre será más probable que obtener una suma de dos.

5.3 Codón

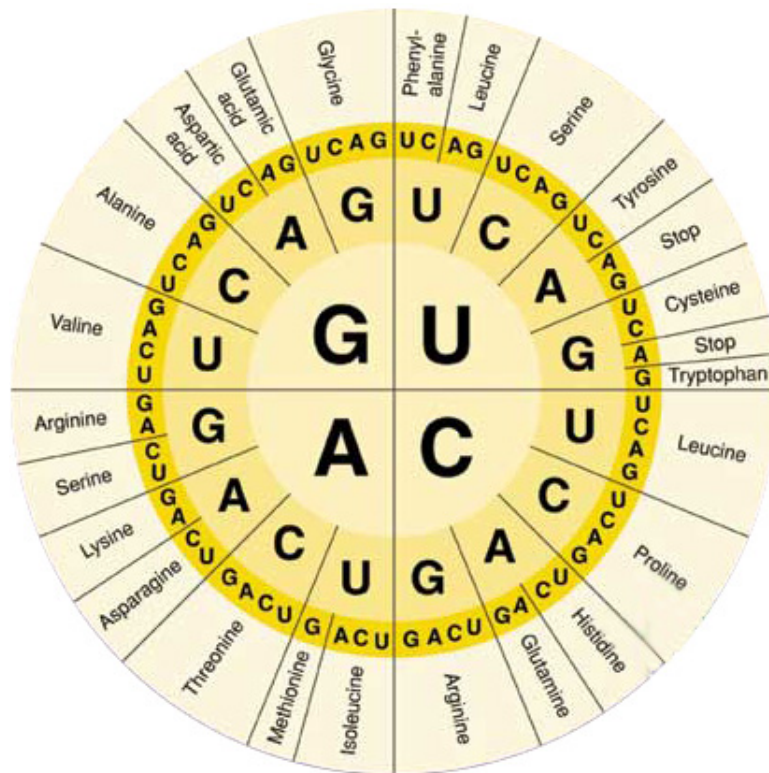
Secuencia de 3 nucleótidos (Tripleta) en la hebra codificadora del DNA ó en el RNA que representa a un aminoácido específico en el código genético y se traduce en su aminoácido correspondiente en el proceso de traducción. También existen codones que no significan aminoácidos y que solo

funcionan como señales de término de la traducción.

Analizando al número de permutaciones posibles para cada codon:

$$A = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ tipos de codón}$$

Los organismos, en realidad solo ocupan 61 de estas combinaciones para codificar aminoácidos, pues 3 de ellos los ocupan como código de paro.



Chapter 6

El Triángulo de Pascal, Fractales de Sierpinski, Producto Cruz y Problemas de Métodos de Conteo

6.1 Triángulo de Pascal y Fractales de Sierpinski

El triángulo de Pascal es un derivado de la ecuación:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

El cual denota los valores que los coeficientes de un polinomio en cada término toma según la potencia a la que se calcule.

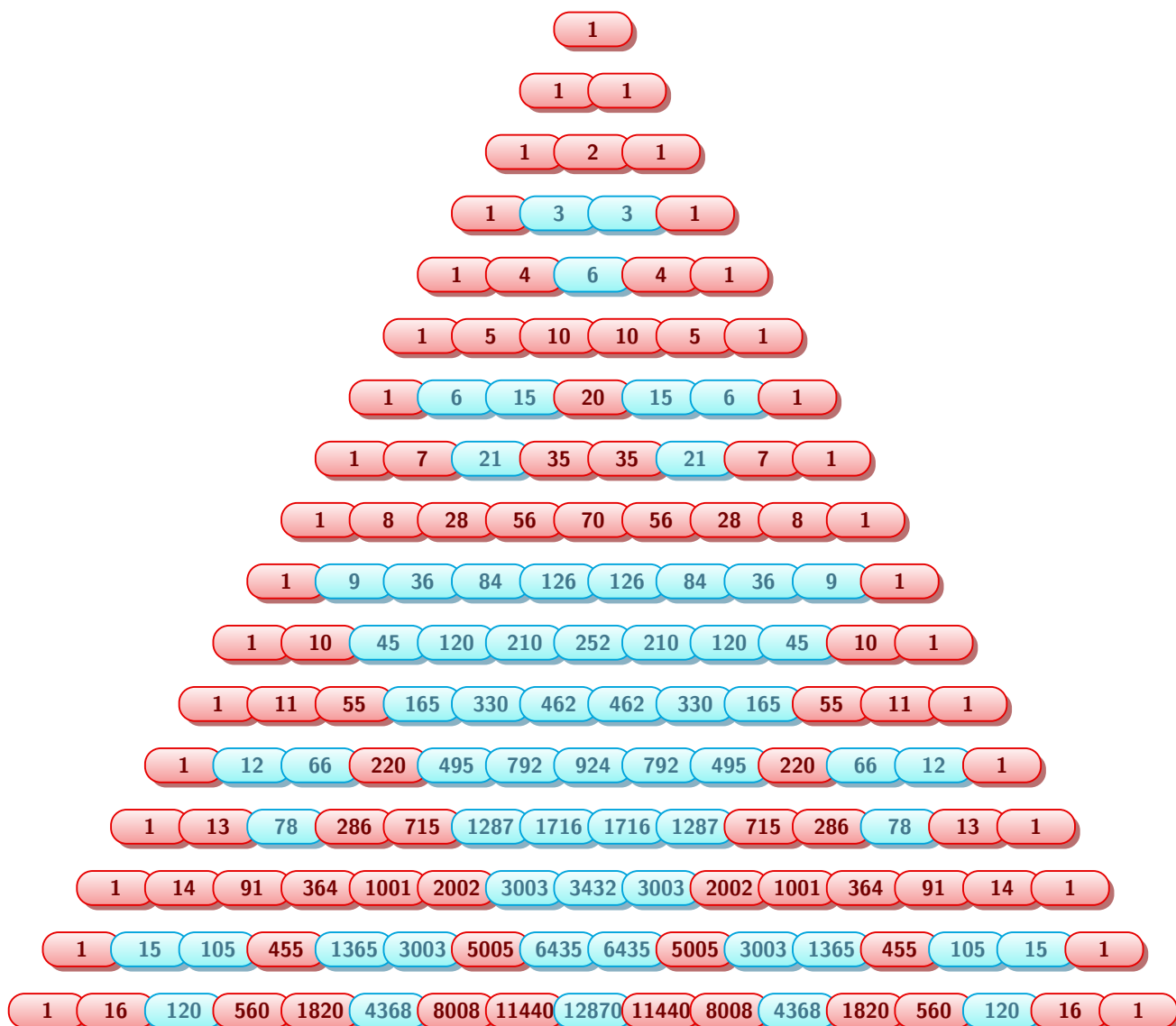
Tiene una disposición de números con forma de triángulo, construida de tal manera que cada elemento es la suma de los dos inmediatamente superiores a él, y donde inicialmente se coloca el número 1 en los lados exteriores.

La palabra fractal, referida a conjuntos matemáticos, apareció por primera vez en el año 1977 cuando Benoit Mandelbrot la utilizó para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades:

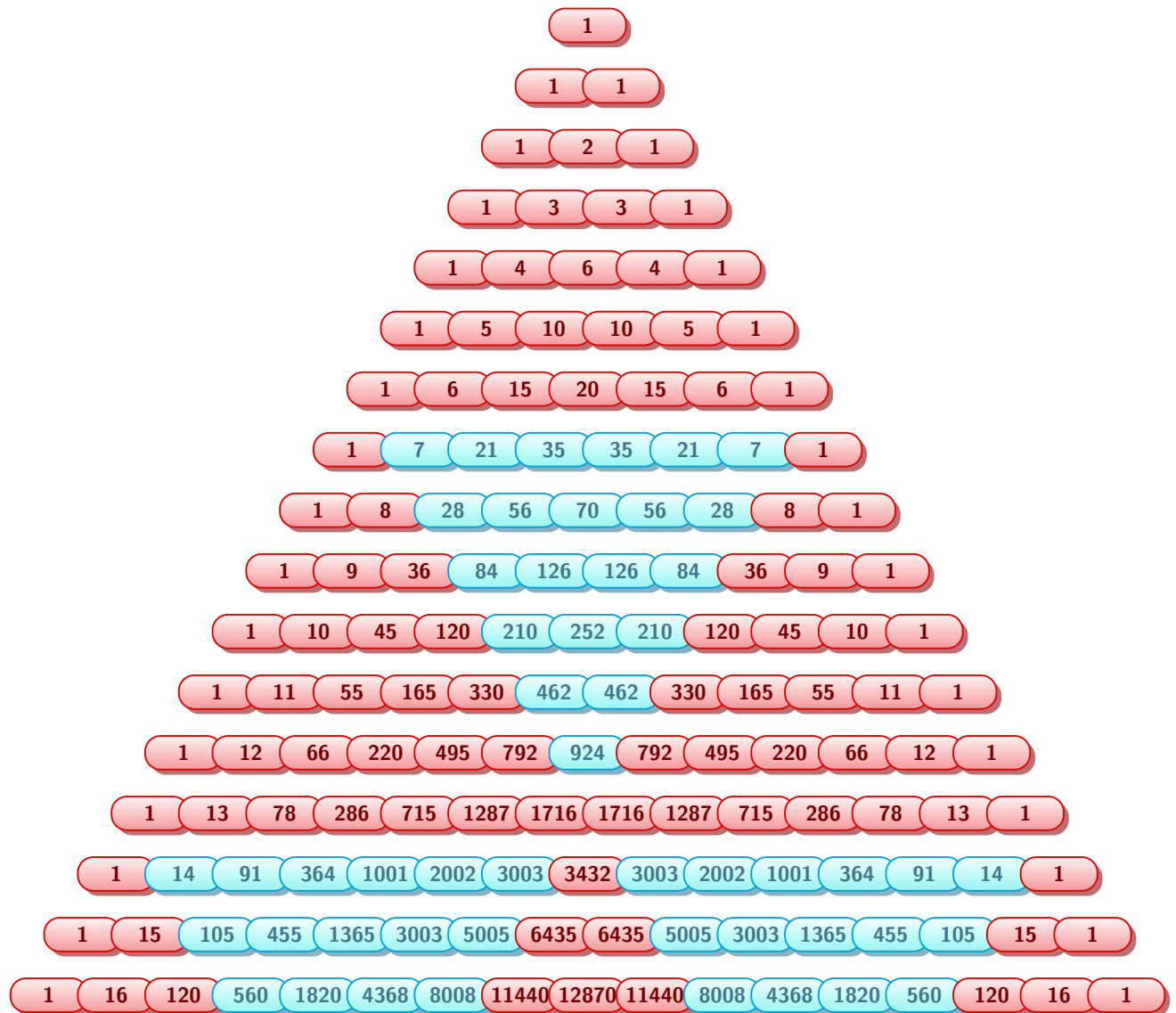
1. Tienen detalles a todas las escalas, entendiendo por esto que mirados a cualquier nivel de escala (zoom) manifiestan detalles ya observados a nivel global.
2. Son autosemejantes, es decir, que están formados por partes que son semejantes al conjunto total.
3. Tienen una descripción algorítmica simple, entendiendo por ello que su construcción se basa en un algoritmo.

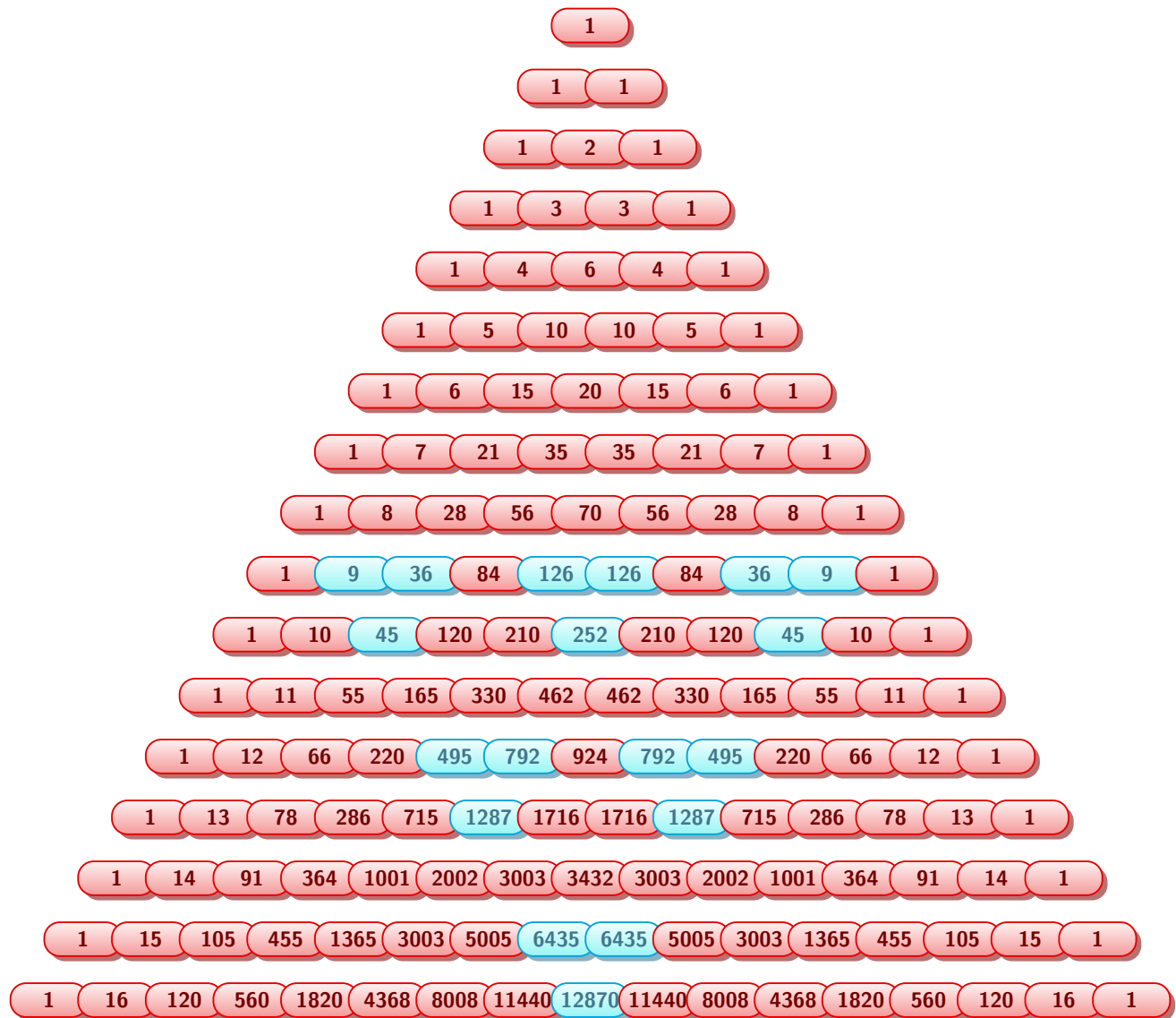
El llamado triángulo de Sierpinski, presentado al mundo en el año 1916 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski, y surge en diversos contextos de la matemática: en los sistemas dinámicos, la teoría de grafos, la matemática aplicada (en la fabricación de antenas de alta frecuencia, en particular en teléfonos celulares), e incluso en el triángulo de Pascal o el juego de las torres de Hano.

6.1.1 Triángulo de $n=16$, factores de 3

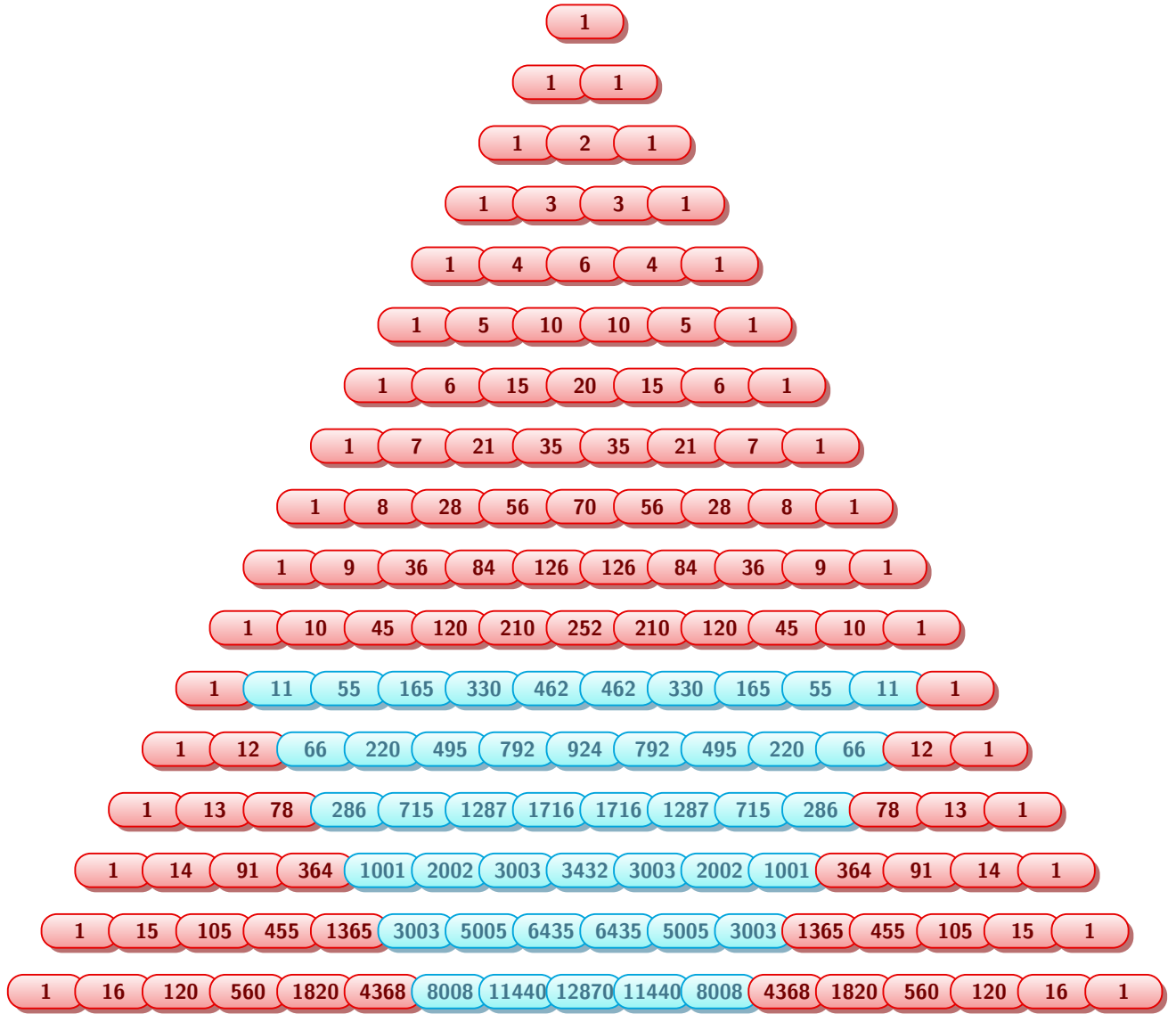


6.1.2 Triángulo de n=16, factores de 7



6.1.3 Triángulo de $n=16$, factores de 9

6.1.4 Triángulo de n=16, factores de 11



6.2 Notación de Einstein

Se denomina notación de Einstein o notación indexada a la convención utilizada para abreviar la escritura de las sumatorias, donde se evita el uso del símbolo sigma Σ .

Dada una expresión del tipo:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

La notación de Einstein obtiene una notación mas condensada, sin embargo requiere de la extracción de los valores de los subindices del contexto en el que se maneja. Dejando la ecuación como:

$$u = u_i x_i$$

Visto en clase tenemos la siguiente expansión:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= a^\mu_\gamma x^\gamma \\ x'^0 &= a^0_0 x^0 + a^0_1 x^1 + a^0_2 x^2 + a^0_3 x^3 \\ x'^1 &= a^1_0 x^0 + a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3 \\ x'^2 &= a^2_0 x^0 + a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 \\ x'^3 &= a^3_0 x^0 + a^3_1 x^1 + a^3_2 x^2 + a^3_3 x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 & a^0_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^3_0 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

6.3 Producto Cruz o Vectorial y Tensor de Levi-Civita

La magnitud del producto vectorial de dos vectores es el resultado de multiplicar las magnitudes de cada vector y por el seno del ángulo que forman ambos vectores (¡ 180 grados) entre ellos. La magnitud del producto vectorial se representa de la forma:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

y la dirección es dada por la regla de la mano derecha. Si los vectores se expresan por medio de sus vectores unitarios i, j, y k en las direcciones x, y, y z, entonces el producto vectorial, se expresa:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_1 (A_y B_z - A_z B_y) - \hat{e}_2 (A_x B_z - A_z B_x) + \hat{e}_3 (A_x B_y - A_y B_x)$$

Otra manera de expresar el producto cruz es usando el determinante de una matriz, donde alguno de sus elementos son los vectores bases:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Estas expresiones pueden ser escritas usando la notación de Einstein, con la presentación del símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk}

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

donde ϵ_{ijk} es definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{para } (i, j, k) = \text{a una permutación par de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{para } (i, j, k) = \text{a una permutación impar de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si dos o más de los subíndices son iguales} \end{cases} \quad (6.1)$$

Una permutación impar de $(1, 2, 3)$ es cualquier rearrreglo de estos tres números que pueda ser realizado con un número impar de intercambio de pares. Así, las permutaciones impares de $(1, 2, 3)$ son $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$ y $(3, 2, 1)$. Similarmente las permutaciones pares de $(1, 2, 3)$ son $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$.

6.4 Problemas de métodos de conteo

1. Cuántas placas para automóvil pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de 3 dígitos diferentes? Resolver el problema si el primer dígito no puede ser cero. Considere un alfabeto de 26 letras.

Abecedario \rightarrow 26 símbolos

Dígito 1 \rightarrow 9 símbolos

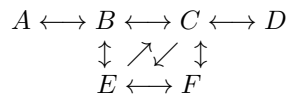
Dígito 2 y 3 \rightarrow 10 símbolos

$$A = {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{26!}{(26-2)!} = 650 \text{ combinaciones de letras}$$

$$B = 9 \cdot 10 \cdot 9 = 810 \text{ combinaciones de números}$$

$$A * B = 526500 \text{ combinaciones totales.}$$

2. El siguiente diagrama A,B,...,F denotan islas, y las líneas denotan puentes. Un hombre empieza en A y camina de isla en isla. Se detiene para almorzar, cuando no puede continuar caminando sin tener que cruzar el mismo puente dos veces. Hallar el número de maneras como pueda hacer su recorrido antes de almorzar.



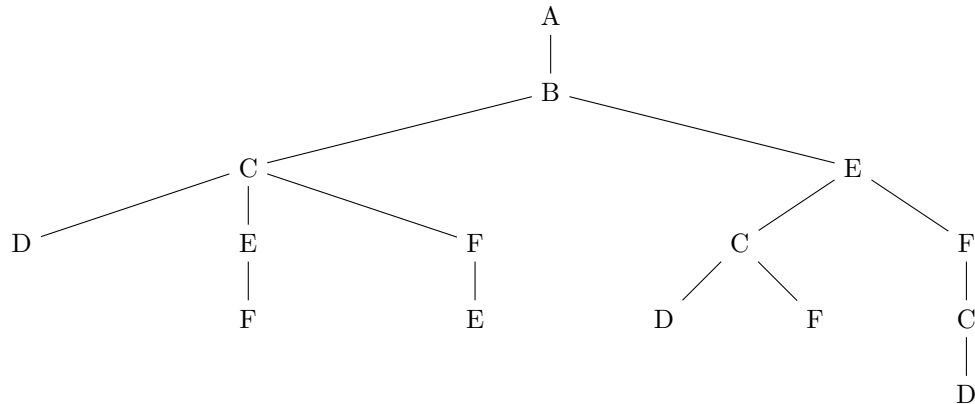
6 maneras de hacer un recorrido antes de almorzar.

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 9 juguetes por igual entre 3 niños?

Como no nos importa el orden en el que el niño reciba sus juguetes:

$$A = {}^nP_r = \frac{n!}{(r_1)!(r_2)!(r_3)!} = \frac{9!}{(3)!(3)!(3)!} = 1680 \text{ combinaciones.}$$

4. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 14 hombres en 6 comités, en los que dos sean de 3 hombres y los otros de dos?



$$A = {}^nP_r = \frac{14!}{(3)!(3)!(2)!(2)!(2)!(2)!} \cdot \frac{1}{(2)!(4)!} = 3153150 \text{ combinaciones.}$$

donde $\frac{1}{(2)!(4)!}$ representa las diferentes maneras en que los 6 comites fueron formados, sin considerar de sus integrantes, es decir que comite fue de 3 y cual de 2.

5. Una señora tiene 11 amigos de confianza *i)* ¿De cuántas maneras puede invitar 5 de ellos a comer? *ii)* ¿De cuántas maneras si dos son casados y no asisten el uno sin el otro? *iii)* ¿De cuántas maneras si dos de ellos no se llevan bien y no asisten juntos?

i) ${}^{11}C_5 = 462$

ii) $\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 210$

iii) $2\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 378$

6. Una urna contiene 10 bultos, hallar el número de pruebas, *i)* de tamaño 3 con sustitución *ii)* de tamaño 3 sin sustitución *iii)* de tamaño 4 con sustitución *iv)* de tamaño 5 sin sustitución.

i) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

ii) $10 \cdot 9 \cdot 8 = {}^{10}P_3 = 720$

iii) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

iv) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = {}^{10}P_5 = 30240$

7. i) Hallar el número de maneras en que 4 niños y 4 niñas se pueden sentar en una fila si los hombres y las mujeres deben quedar alternados *ii)* Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente y uno de los niños se sienta siempre junto a una niña determinada *iii)* Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente pero los dos niños mencionados no quedan en sillas adyacentes.

i) $P_H = 4! = 24$

$P_M = 4! = 24$

$$P_H M = 2 \cdot P_H \cdot P_M = 1152$$

$$ii) P_H = 3! = 6$$

$$P_M = 3! = 6$$

$$P_H M = 2 \cdot 7 \cdot P_H \cdot P_M = 504$$

$$iii) 1152 - 504 = 648$$

8. Resolver el problema anterior si se sientan al rededor de una mesa circular.

$$i) P_H = 4! = 24$$

$$P_M = 3! = 6$$

$$P_H M = P_H \cdot P_M = 144$$

Al ser circular la mesa, si se diera la vuelta completa las posiciones entre personas regresarian a ser las mismas considerando $4!$, como no se hacen distinciones en los acientos de la mesa, si no de quien tienen a su lado, se considera $4!/4 = 3! = 6$ Y no se multiplica por dos, ya que aun si invertimos la posicion de los hombres y las mujeres, siguen estando a lado de las mismas personas.

$$ii) P_H = 3! = 6$$

$$P_M = 3! = 6$$

$$P_H M = 2 \cdot P_H \cdot P_M = 72$$

$$iii) 144 - 72 = 72$$

9. En la síntesis de proteínas hay una secuencia de tres nucleótidos sobre el ADN que decide cuál es el aminoácido a incorporar. Existen cuatro tipos distintos de nucleótidos según la base, que puede ser A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (timina). ¿Cuántas secuencias distintas se podrán formar si se pueden repetir nucleótidos?

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ Secuencias.}$$

10. ¿Cuántas letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos podría tener el alfabeto Morse?

Considerando que solo tenemos líneas y puntos, se repetirán los caracteres. $A = \frac{n!}{(r_1)!(r_2)!} = \frac{5!}{(3)!(2)!} = 10$ letras en alfabeto Morse.

Chapter 7

AES, DES, RCA, Enigma

7.1 Metodos de encriptado

7.1.1 DES

DES significa Standar de Encriptado de Datos, es un método descontinuado de encriptado por llave simetrica. DES trabaja usando la misma llave para encriptar y desencriptar mensajes, de modo que el receptor y el emisor deben conocer y usar la misma llave privada. Siendo el algoritmo de referencia por años, fue sustituido por el algoritmo Estandar de Encriptado Avanzado (AES por sus siglas en inglés).

Originalmente diseñado por investigadores de IBM a inicios de 1970, fue adoptado por el gobierno de los Estados Unidos para encriptar información comercial no clasificada a la fecha. Su uso fue extendido por el sector industrial y servicios financieros donde la necesidad de cifrar datos era alta.

7.1.2 AES

El estándar de encriptado Avanzado (AES) es un bloque cifrado simétrico usado por el gobierno de los estados unidos para proteger información clasificada y es implementada en hardware y sorftware a través del mundo en datos sensibles a encriptación.

Los orígenes de AES data de 1997 en el Instituto de Estándares y Tecnología Nacional, cuando se emitió el anuncio que se requería un sucesor al DES (Estándar de encriptación de Datos) el cual se volvía vulnerable a ataques de fuerza bruta. El nuevo algoritmo de encriptado seria de conocimiento publico, sin embargo seria el modelo de protección de datos utilizado de manera embebida, en hardware y software, con una complejidad espacial y temporal bajas.

7.1.3 RSA

El sistema criptográfico con clave pública RSA es un algoritmo asimétrico cifrador de bloques, que utiliza una clave pública, la cual se distribuye, y otra privada, la cual es guardada en secreto por su propietario.

Una clave es un número de gran tamaño, que una persona puede conceptualizar como un mensaje

digital, como un archivo binario o como una cadena de bits o bytes.

Cuando se envía un mensaje, el emisor busca la clave pública de cifrado del receptor y una vez que dicho mensaje llega al receptor, éste se ocupa de descifrarlo usando su clave oculta.

Los mensajes enviados usando el algoritmo RSA se representan mediante números y el funcionamiento se basa en el producto de dos números primos grandes (mayores que 10^{100}) elegidos al azar para conformar la clave de descifrado.

Emplea expresiones exponenciales en aritmética modular.

La seguridad de este algoritmo radica en que no hay maneras rápidas conocidas de factorizar un número grande en sus factores primos utilizando computadoras tradicionales.

La computación cuántica podría proveer una solución a este problema de factorización.

El algoritmo RSA es un algoritmo de clave pública desarrollado en 1977 en el MIT por Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adelman.

Fue registrado el 20 de Septiembre de 1983. El 20 de Septiembre del 2000, tras 17 años, expiró la patente RSA, pasando a ser un algoritmo de dominio público.

Este popular sistema se basa en el problema matemático de la factorización de numeros grandes.

7.1.4 Enigma

Durante la Segunda Guerra Mundial, la mayor parte de los mensajes transmitidos entre diferentes secciones de cada ejército se hacía mediante el uso de la radio. La radio tiene la desventaja de que cualquier persona que disponga de un receptor funcionando en la frecuencia adecuada puede escuchar los mensajes, por lo que se hace imperioso encriptarlos para mantener el secreto. Los alemanes utilizaron la que luego sería la máquina de encriptar más famosa de la historia: La máquina Enigma.

El alto mando alemán utilizó como base para la construcción de su máquina los trabajos de Arthur Scherbius, creador de una máquina encriptadora comercial, basada en una serie de rotores que cambiaban una letra por otra. Como Scherbius carecía de dinero suficiente para llevar adelante su empresa, por lo que se asoció a Willie Korn, dueño de la compañía Enigma Chiffiermaschinen AG, de Berlín. Estos dos empresarios mejoraron el diseño de la máquina de Scherbius, adicionándole rotores intercambiables. En 1923 disponían de una nueva máquina prácticamente inviolable que vendían para la protección de secretos comerciales. Poco apoco, Enigma fue penetrando en las fuerzas militares alemanas. Primero fue la marina, luego el ejército y por último la fuerza aérea. Todas adoptaron la Enigma como la “encriptadora” oficial. Cuando el Servicio de Inteligencia, las SS, la GESTAPO y el Servicio de Seguridad e Inteligencia Política del Partido Nacionalsocialista comenzaron a utilizarla máquina Enigma, en 1926, la empresa quedó directamente bajo el control del Estado Alemán y la máquina fue retirada del mercado comercial.

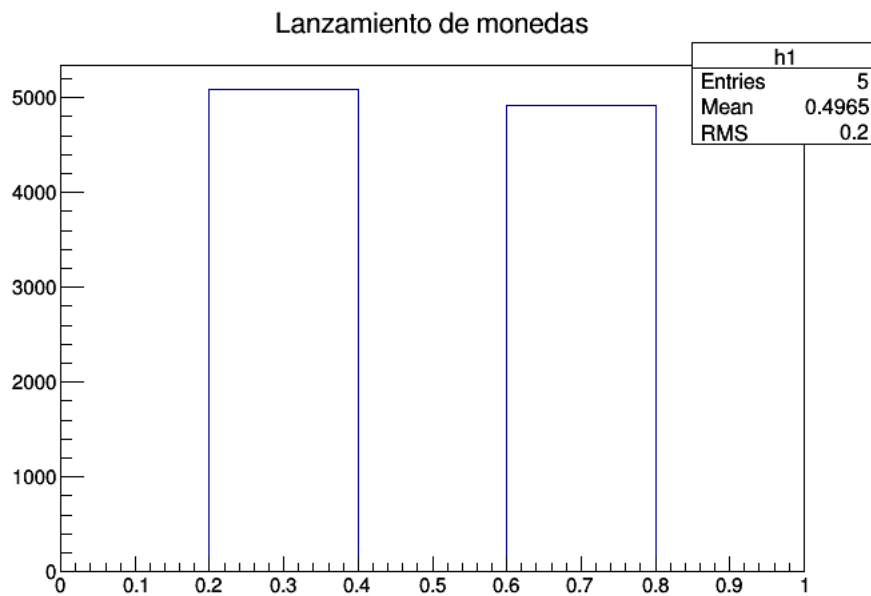
Al grupo de contraespionaje británico encargado de descifrar el código alemán pertenecía Alan Turing, uno de los más famosos matemáticos del siglo XX, que fue uno de los fundadores de la informática teórica.

7.2 Programas de ROOT para lanzamientos de moneda

A continuación se muestran los resultados de los programas elaborados en ROOT correspondientes al lanzamiento de monedas.

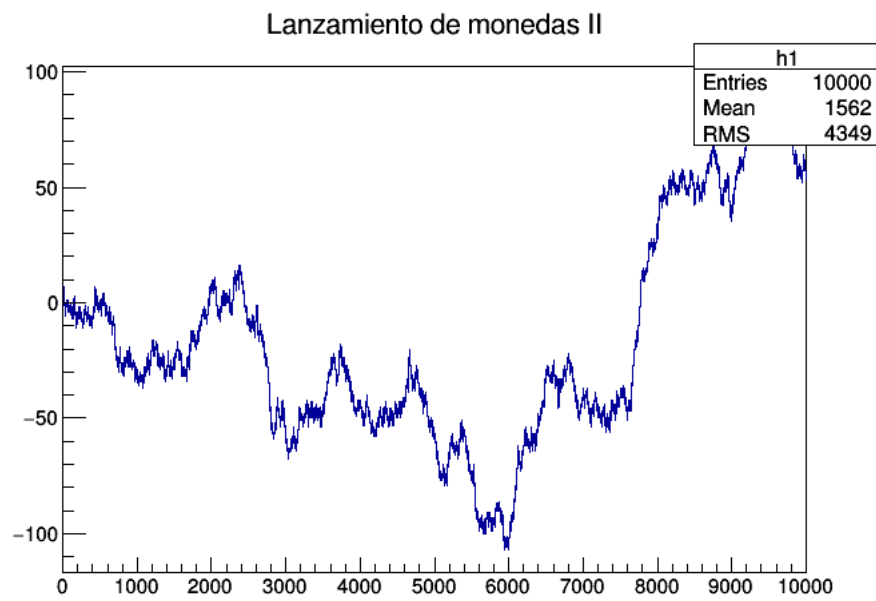
7.2.1 Lanzamiento de moneda en histograma

En este primer programa se simulan 10000 lanzamientos de moneda y se grafica en forma de histograma, teniendo dos casos posibles, cara (de 0.2 a 0.4) o cruz (de 0.6 a 0.8).



7.2.2 lanzamiento de moneda en gráfica por lanzamiento

En el segundo programa se simulan 10000 lanzamientos de moneda y se grafica el resultado por evento, teniendo valores acumulados, agregando 1 si resulta cara y restando 1 si resulta cruz.



Chapter 8

Expansión del producto cruz por levi-civita, El Challenger STS 51-L y La formula de la permutación

8.1 Expansión del producto cruz por levi-civita

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

Sabemos que ϵ se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{Permutación par de (1,2,3), es decir (1,2,3), (3,1,2) y (2,3,1)} \\ -1 & \text{Permutación impar de (1,2,3), es decir (3,2,1), (2,1,3) y (1,3,2)} \\ 0 & \text{Si dos o más de los subíndices son iguales} \end{cases}$$

Expandiendo para i=1:

$$\begin{aligned} \left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_1 &= \epsilon_{1jk} A_j B_k \\ &= \epsilon_{11k} A_1 B_k + \epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k \\ &= \epsilon_{111} A_1 B_1 + \epsilon_{112} A_1 B_2 + \epsilon_{113} A_1 B_3 \\ &\quad + \epsilon_{121} A_2 B_1 + \epsilon_{122} A_2 B_2 + \epsilon_{123} A_2 B_3 \\ &\quad + \epsilon_{131} A_3 B_1 + \epsilon_{132} A_3 B_2 + \epsilon_{133} A_3 B_3 \end{aligned}$$

Sustituyendo su valor de ϵ

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

Expandiendo para i=2:

$$\begin{aligned} \left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_2 &= \epsilon_{2jk} A_j B_k \\ &= \epsilon_{21k} A_1 B_k + \epsilon_{22k} A_2 B_k + \epsilon_{23k} A_3 B_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{211}A_1B_1 + \epsilon_{212}A_1B_2 + \epsilon_{213}A_1B_3 \\
&+ \epsilon_{221}A_2B_1 + \epsilon_{222}A_2B_2 + \epsilon_{223}A_2B_3 \\
&+ \epsilon_{231}A_3B_1 + \epsilon_{232}A_3B_2 + \epsilon_{233}A_3B_3
\end{aligned}$$

Sustituyendo su valor de ϵ

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_2 = -A_1B_3 + A_3B_1$$

Expandiendo para i=3:

$$\begin{aligned}
&\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_3 = \epsilon_{3jk}A_jB_k \\
&= \epsilon_{31k}A_1B_k + \epsilon_{32k}A_2B_k + \epsilon_{33k}A_3B_k \\
&= \epsilon_{311}A_1B_1 + \epsilon_{312}A_1B_2 + \epsilon_{313}A_1B_3 \\
&+ \epsilon_{321}A_2B_1 + \epsilon_{322}A_2B_2 + \epsilon_{323}A_2B_3 \\
&+ \epsilon_{331}A_3B_1 + \epsilon_{332}A_3B_2 + \epsilon_{333}A_3B_3
\end{aligned}$$

Sustituyendo su valor de ϵ

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|_3 = A_1B_2 - A_2B_1$$

8.2 Identidades con notación indicial

Rotacional de un vector

$$b_i = \epsilon_{ijk}a_{j,k}$$

Divergencia de un vector

$$\phi = a_{i,i}$$

Gradiente de un vector

$$T_{ij} = a_{i,j}$$

8.3 El Challenger 51-L

El transbordador Challenger 51-L tenia por misión permanecer en órbita por 7 días, desplegar el satélite Spartan, un observatorio astronómico autónomo, y conducir experimentos de dinámica de fluidos. Agendado originalmente para despegar el 22 de enero de 1986, su lanzamiento fue pospuesto para el 28 de enero, debido a malas condiciones ambientales y una falla en un sistema de detección de incendio. Finalmente el Challenger despegó al rededor de las 11:00 hrs; 1 minuto con 13 segundos después del lanzamiento el cohete dejó de transmitir datos, debido al desprendimiento del transbordador de los tanques de combustible por el estrés de fuerzas aerodinámicas y fuga de combustible. La falla principal es atribuida a la erosión y endurecimiento de los sellos de goma utilizados en

el ensamble de los tanques debido a las bajas temperaturas experimentadas el día del despegue. La desconexión entre la información manejada por la administración y el departamento de ingeniería generó vulnerabilidades de en la seguridad del vehículo; Además de la negligencia y falta de protocolos estrictos en la valoración de calidad de los sistemas. Una nota de evaluación respecto a las condiciones de temperatura fue levantada días previos, pues representaba una situación sin precedentes debido a ser -20°C más frío que cualquier otro lanzamiento, convirtiéndose en un caso sin experiencia práctica para la NASA en el desempeño del vehículo completo y sus componentes. Las bajas temperaturas provocaron el endurecimiento y erosión de los sellos de goma provocando, una fuga en los gases de expulsión, realizando la ignición del combustible de forma descontrolada y encendiendo los tanques de oxígeno e hidrógeno líquido. El accidente aeroespacial tomó la vida de 7 astronautas: El Comandante Dick Scobee, el piloto Michael Smith, los especialistas de misión Judy Resnik, Ronald McNair y Ellison S. Onizuka, el especialista de carga Gregory B. Jarvis y Christa McAuliffe. El reporte de Richard Feynman sobre el incidente, hace incapie en el compromiso de la NASA en proveer datos fidedignos y congruentes para mejorar su toma de decisiones, así como asimilar como primordial los resultados científicos, aun sobre las evaluaciones subjetivas efectuadas por los departamentos de administración y relaciones públicas en busca de apoyo y recursos financieros, que finalmente provocó la muerte de siete individuos, el retraso en la exploración espacial y la pérdida de millones de dólares. [Feynman, 1986] [Aeronautics and Administration, 1986] [Administrator, 2005] [Wade, 1997]

8.4 Producto cartesiano de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Entonces hay un único conjunto cuyos miembros son exactamente los pares ordenados (x,y) tales que $x \in A$ y $y \in B$. A tal conjunto lo denominamos el producto cartesiano de A y B y lo denotamos por $A \times B$.

Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces definimos el producto cartesiano de A, B y C como:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

Supuesto definido el concepto de producto cartesiano para cualesquiera n conjuntos, con $n \geq 3$, y dados los $n + 1$ conjuntos $A_0 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n = (A_0 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$.

[Vidal, 2002]

8.5 La fórmula de la permutación

La fórmula de la permutación con restricción de caracteres se expresa de la forma:

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

Donde el elemento de la ecuación del extremo derecho $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ significa que se toman todos los elementos que no están excluidos para hacer el conteo, pues $(n-r)(n-r-1)\dots(2)(1)$ es el factorial de los elementos excluidos del conteo.

Chapter 9

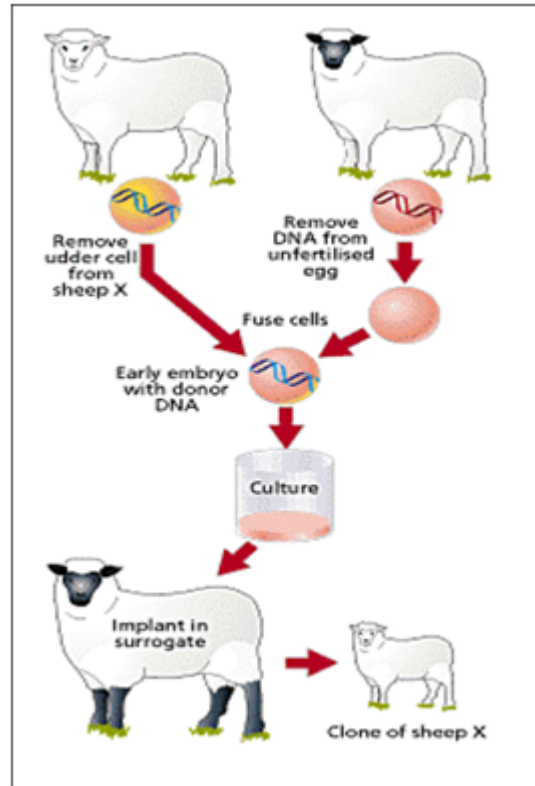
La oveja Dolly y los telomeros

9.1 Clonación de la oveja Dolly

La oveja Dolly es considerada el primer mamífero clonado con éxito a partir de células somáticas de un mamífero adulto. El 25 de Noviembre de 1996 fue reportado para la revista Nature el éxito de I. Wilmut, A. E. Schnieke, J. McWhir, A. J. Kind y K. H. S. Campbell del Instituto de Roslin de Edimburgo, Reino Unido, sobre la fertilización de un ovulo sin núcleo y su división celular que dio por producto a una cría de oveja con información genética idéntica al de su progenitora, sin la necesidad de dos gametos diferentes. [I. Wilmut, 1997]

9.1.1 ¿Cómo funciona la clonación?

El proceso de manera abreviada consta de tomar el núcleo de una célula diferenciada de una criatura adulta, es decir una célula con una función específica, en este caso una célula de ubre, y con ayuda de un ovulo sin núcleo no fertilizado de la misma especie, se inserta el núcleo de la célula diferenciada en el ovulo y se introduce en un ambiente que propicie la división celular. Como resultado esto produce que la célula diferenciada sea revertida a un estado no-diferenciado, en el que ya no cuenta con una función específica, sino que pueda reproducir el organismo entero al dividirse. [papermasters,]



9.1.2 ¿Qué repercusiones tuvo sobre el nuevo organismo?

La oveja clonada Dolly vivió hasta sus 6.5 años de vida, mientras que el promedio de vida de cualquiera de esas criaturas está estimado entre 10 y 12 años. Al tiempo de su muerte el 14 de febrero del 2003, Dolly mostraba enfermedades que otras ovejas solo tenían en sus últimos años de vida, tales como cáncer de pulmón y osteoartritis de rodilla. Estas dos evidencias llevaron a pensar a los científicos que Dolly presentaba un caso de envejecimiento prematuro y que podría ser un efecto secundario de su clonación.

9.1.3 Los telómeros

El término de todo cromosoma de una célula eucariota está cubierto por una secuencia repetitiva y proteínas asociadas (TTAGGG en un humano). Esta estructura es conocida como telómero y su finalidad es estabilizar el final de los cromosomas durante la replicación. En cada proceso de replicación de ADN, que está compuesta por dos cadenas complementarias de nucleótidos, un lado de la cadena no puede ser copiada completamente, provocando la replicación incompleta al final de la cadena. En promedio el final de un cromosoma lineal será acortado en 4 a 6 bases por división celular, lo cual según se propone como un “reloj mitótico” cuya longitud se correlaciona con el número de divisiones celulares e indica la edad molecular de una célula. [Hastie et al., 1990]

Se estipula que la vida de Dolly fue más corta debido a que el ADN extraído de la oveja adulta clonada contenía telómeros más cortos debido a su edad biológica, transfiriendo esa información a Dolly y otorgándole telómeros de menor longitud que los de otras ovejas nacidas por un proceso natural.

El modelo de “reloj mitótico” no es aceptado completamente, pues es considerado que no es el único factor que provoca la muerte de un organismo; y evitar su reducción no significaría alargar el promedio de vida de una criatura, sin embargo representa una manera de medir el número de divisiones celulares y lo que esto puede significar para un organismo en términos de vejez.

El cuanto a la clonación, el uso de células embrionarias y su combinación con ambos gametos, es decir ocupar células del sexo opuesto de la criatura a clonar, ha tenido como resultado en la restauración o mantenimiento de la longitud de los telómeros, evitando el envejecimiento prematuro.

Telomere lengths in cloned animals

Donor Cell				TRF (kb)			Clone vs. Control	Tissue Assayed	Telomerase
Species	Origin	Cell type	Note	Donor	Control	Clone			
Sheep	Adult Female	Mammary gland		23.9	19.14		Shorter	Blood	
Sheep	Fetal Female	Embryonic	Very short culture	23.9	21.19		Similar	Blood	
Cattle	Fetal Female	fibroblast	Extreme Long culture	15.2	18.3	20.1	Longer	Blood cells	High in Blastocyst
Cattle	Adult Female	Fibroblast cumulus		12.4	14.7	15.4	Similar	Fibroblast	High in blastocyst
Cattle	Adult Female	fibroblast		13.68	20.9 (fetal) 20.5 (calf)	17.95 (fetal) 15.3 (calf)	Similar Similar	Fibroblast	High in blastocyst
	Adult Male			17.85	20.9 (fetal) 20.5 (calf)	22.74 (fetal) 21.33 (calf)	Similar	Fibroblast	High in blastocyst
Cattle	Adult Male	Ear					Longer	Ear	
	Adult Male	Ear					Similar	White blood cells	
Cattle	Adult Female	Epithelial		15–16	20.43	12.5–14.3	Shorter	White blood cells	
	Adult Female	Oviduct		16.9	20.43	14.9–16.0	Shorter	White blood cells	
	Adult Male	Muscle		20.1	20.43	19.6–19.9	Similar	White blood cells	
	Adult Male	Skin fibroblast		18.2	20.43	20.0–20.4	Similar	White blood cells	
	Fetal	Embryonic cells			20.43	21.7–26.2	Longer	White blood cells	
Mouse	Adult	Cumulus		48	48	48	Similar		

9.1.4 ¿Qué células son mejores para la clonación?

Desde la clonación de Dolly por transferencia de núcleo en células somáticas (SCNT por sus siglas en inglés) una gran cantidad de mamíferos han sido clonados utilizando esta tecnología. La técnica SCNT suele presentar un bajo porcentaje de eficiencia (1% – 5%), esta deficiencia usualmente se le atribuía al uso de células diferenciadas, y era la razón por la que el uso de células madres en adultos y embriones para la clonación era mas difundida. La razón detrás de esta selección era que una célula madre es capaz de convertirse en cualquier célula particular tras un proceso de diferenciación. Sin embargo nueva evidencia a puesto en tela de juicio la superioridad de las células madre para el uso de técnicas de clonación como SCNT. Particularmente las células de la línea de los fibroblastos y leucocitos han empezado a llamar la atención de los investigadores como nuevas células de estudio para incrementar la eficiencia de las técnica SCNT que dio origen a la oveja Dolly. [Sung et al., 2006] [Secher et al., 2017] [Kamimura et al., 2013]

Chapter 10

La ley de decaimiento, el problema de Monty Hall y la falacia del apostador

10.1 Decaimiento radioactivo

Para átomos de ciertos elementos muy pesados inestables, denominados átomos radioactivos; la pérdida de electrones, pares de protones y neutrones, y fotones de alta energía, produce su transformación en otros elementos más ligeros. Ernest Rutherford describió este fenómeno como:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$$

Donde y_0 es la cantidad original de una muestra de material radioactivo, $y(t)$ la cantidad de materia presente después de t horas después de iniciadas las observaciones, la constante de desintegración radiactiva del elemento. Podemos reescribir la fórmula como:

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}$$

La vida media de una sustancia radioactiva se define como la cantidad de tiempo requerida para reducir a la mitad la cantidad de sustancia radioactiva de un material. Puede ser relacionada con el decaimiento radioactivo de la forma:

$$Q = \frac{Q_0}{2}$$

$$Q_0 e^{-\lambda t_m} = \frac{Q_0}{2}$$

donde se obtiene la expresión:

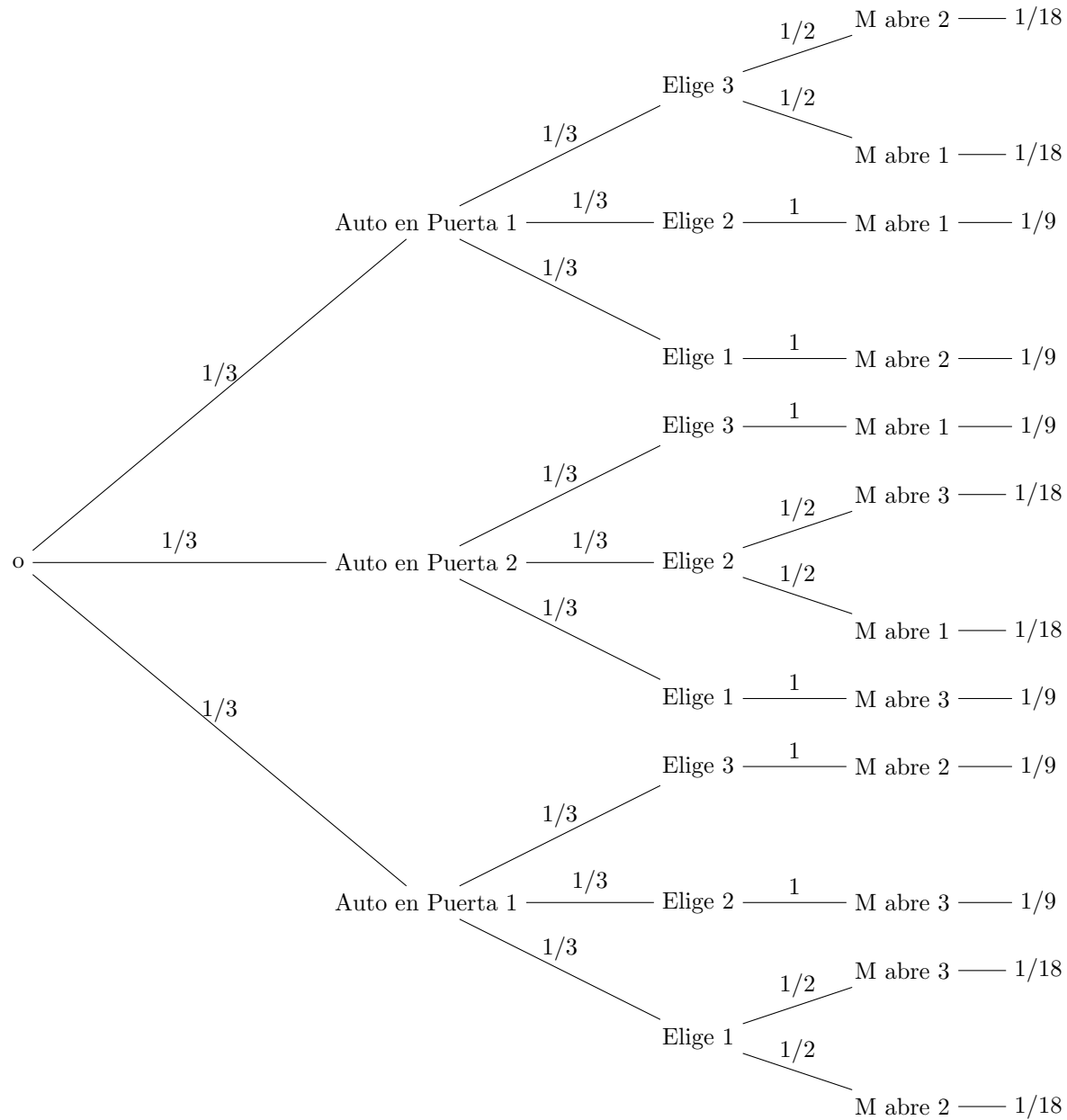
$$t_m = \frac{\ln(1/2)}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

10.2 El problema de Monty Hall

En el programa de concursos estadounidense Let's Make a Deal transmitido en 1963 a 1986, se presentaba una sección que inspiró un problema probabilístico llamado “el problema de Monty Hall” que heredó este nombre por el presentador del programa Monty Hall. El concurso consistía de lo siguiente:

El concursante elige una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un automóvil y las otras dos una cabra cada una. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde está el premio, abre una de las dos puertas que contienen una cabra. Ahora el concursante tiene una última oportunidad de cambiar la puerta escogida.

Intuitivamente se podría pensar que el realizar un cambio no tiene ningún efecto sobre el resultado, pues a lo más se redujo la posibilidad de perder, pasando de $\frac{2}{3}$ a solo $\frac{1}{3}$, sin embargo en 1990 se inició su análisis que mostraba que en realidad existía una diferencia si se decidía cambiar de puerta una vez que se mostraba la primer cabra. Consideremos el diagrama de árbol del problema:



10.3 La falacia del apostador

La Falacia del Jugador también conocida como Falacia de Monte Carlo es el sesgo que se origina de una falla en comprender la noción de independencia probabilística y que nos hace “calcular” la probabilidad de un acontecimiento con base en la cantidad de veces que el ya ocurrió, a pesar de

que se traten de eventos independientes.

En un lanzamiento de monedas, por ejemplo, ese sesgo lleva a una persona a creer que el hecho de que haya ocurrido cara muchas veces seguidas torna la probabilidad de salir cruz en el próximo lanzamiento mayor del 50%, considerando que las "rachas" son poco probables y que influyen en el resultado futuro de los siguientes acontecimientos.

Es una interpretación psicológica producto de la mala apreciación de un proceso probabilístico, el fenómeno es de amplio interés en las ramas que estudian el comportamiento humano y las finanzas.

10.4 Cardinalidad del producto potencia

El producto potencia tiene como propiedad:

$$\begin{aligned} |P(S)| &= 2^n \\ \text{Cuando:} \\ |S| &= n \\ \text{donde } S &\text{ es un conjunto cualquiera} \end{aligned}$$

Significando que el conjunto potencia contiene 2^n elementos. Considerando las combinaciones sabemos que:

$$|P(S)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Y si recordamos el teorema del binomio:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Realizando la igualdad de ambas identidades se puede deducir:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^k (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = |P(S)|$$

Sirviendo de demostración para la propiedad enunciada al inicio de esta sección. Esta demostración resulta poco ilustrativa en términos algorítmicos, pues poco nos habla sobre propiedades intrínsecas del conjunto potencia.

Consideremos la demostración bajo otra óptica; dado un conjunto $S = \{a, b, c\}$ analicemos la clase $|P(S)|$:

$$\begin{aligned} |P(S)| &= \{ \\ \{\emptyset\} &\rightarrow (no, no, no) \\ \{a\} &\rightarrow (sí, no, no) \\ \{b\} &\rightarrow (no, sí, no) \\ \{c\} &\rightarrow (no, no, sí) \\ \{a, b\} &\rightarrow (sí, sí, no) \\ \{a, c\} &\rightarrow (sí, no, sí) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{b, c\} &\rightarrow (no, si, si) \\ \{a, b, c\} &\rightarrow (si, si, si)\end{aligned}$$

Podemos observar que si generamos un vector de tamaño n que indique, basándonos en su posición, la presencia de un elemento de S en cada conjunto de $|P(S)|$, se generan todas las combinaciones de “si y no” posibles para el vector de tamaño n .

Dado que cada elemento puede ser “si” o “no” de manera independiente, podemos contar el número de posibles resultados según el principio de conteo de la forma: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^n$ demostrando una vez mas la cardinalidad del conjunto potencia.

Chapter 11

Game of Life, Criterios de Divisibilidad

11.1 Vecindades Von Neumann y Moore

Un autómata celular es un agente u objeto que tiene la habilidad de cambiar su estado, basado en la aplicación de una regla que relaciona el nuevo con su estado previo y la situación de las celdas vecinas. Es un sistema dinámico discreto que se desarrolla en el espacio y tiempo, compuesto por celdas, cuadrícula, vecinos y reglas. Las celdas son el elemento básico de los autómatas celulares, las que pueden tener estados binarios 1 o 0, y generalmente de forma cuadrada; la cuadrícula es la disposición de esas celdas en una red espacial en n-dimensiones. Los vecinos de una celda, en combinación de las reglas que se apliquen, es lo que determinan el estado de un autómata celular. Se distinguen los siguientes tipos de vecindades:

- Vecindad Von Neumann: compuesto por cuatro celdas: superior, inferior, izquierda y derecha, con radio igual a uno.
- Vecindad Moore: Es una ampliación del modelo Von Neumann, incluyendo diagonales, formando un total de ocho vecinos, con radio igual a uno.
- Vecindad Von Neumann extendida: Incluye las misma cuatro direcciones iniciales, pero el radio es mayor o igual a dos, incluyendo vecinos más allá de los adyacentes al elemento central.
- Vecindad Moore extendida: Equivalente a la vecindad Moore pero incluye vecinos más allá de los adyacentes al elemento central, teniendo un radio mayor o igual a dos.

11.2 Game of Life

El juego de la vida (Game of life) es la simulación de autómatas celulares interactuando en una cuadrícula de gradillas cuadradas, y su desarrollo depende solo de su estado inicial, haciéndolo un juego sin jugadores.

El juego solo tienen 3 reglas, las cuales definen la manera en la que se desarrollaran los eventos en la cuadrícula:

- **Nacimiento:** una célula que este muerta en un tiempo t estará viva para $t+1$ si exactamente 3 de sus 8 vecinos estaban vivos en el tiempo t .
- **Muerte:** Una célula puede morir por dos razones diferentes:
 - **Sobrepoblación:** Si una célula esta viva en un tiempo t y 4 o mas de sus vecinos también están vivos en un tiempo t , la célula morirá en el tiempo $t+1$.
 - **Exposición:** Si una célula viva en un tiempo t solo tiene un o ningún vecino vivo, morirá para el tiempo $t+1$.
- **Supervivencia:** Una célula sobrevive del tiempo t a $t+1$ si y solo si 2 o 3 de sus vecinos están vivos en el tiempo t .

El juego de la vida es una Maquina de Turing, es decir puede realizar cualquier operación algorítmica dadas las condiciones iniciales correctas. Particularmente ha sido utilizado para simular el desarrollo de patrones, simulación de comportamiento de insectos y auto-organización. Dentro del juego de la vida, diferentes “formas de vida” pueden ser creadas con diferentes propiedades, algunas efectuando ciclos infinitos, desplazamiento por la gradilla, pulsación, etc.

11.3 Criterios de Divisibilidad

Todos los números primos conocidos terminan en 1,3,7 ó 9, pero no todos los números primos que terminan en 1,3,7 ó 9 son primos. Todo número natural puede caer en una de dos categorías, es un número primo, o es un número compuesto, representado como una multiplicación de números primos. De igual manera todo entero positivo N se puede escribir como $N = 10d + u$, donde d y u representan, respectivamente, las decenas y unidades de N , con $0 \leq u \leq 9$.

Para determinar el criterio de divisibilidad de un número podemos utilizar sistemas modulares, de la forma $10d + u \equiv 0 \pmod{N}$.

N	Divisibilidad	N	Divisibilidad
11	$11 (d + 10u)$ ó $11 (d - u)$	61	$61 (d + 55u)$ ó $61 (d - 6u)$
21	$21 (d + 19u)$ ó $21 (d - 2u)$	71	$71 (d + 64u)$ ó $71 (d - 7u)$
31	$31 (d + 28u)$ ó $31 (d - 3u)$	81	$81 (d + 73u)$ ó $81 (d - 8u)$
41	$41 (d + 37u)$ ó $41 (d - 4u)$	91	$91 (d + 82u)$ ó $91 (d - 9u)$
51	$51 (d + 46u)$ ó $51 (d - 5u)$	101	$101 (d + 91u)$ ó $101 (d - 10u)$

Chapter 12

Congruencia de Zeller, Agresividad en Automatas Inteligentes y Compuertas Lógicas

12.1 Congruencia de Zeller

Se atribuye su creación a Julius Christian Johannes Zeller, un sacerdote protestante alemán que vivió en el siglo XIX. Zeller observó que existía una dependencia entre las fechas del calendario gregoriano y el día de la semana que les correspondía. A raíz de esa observación, obtuvo una fórmula, que permite obtener a partir de una fecha, el día de la semana que le corresponde.

Para el calendario Gregoriano la congruencia de Zeller es:

$$h = \left(q + \left[\frac{(m+1)26}{10} \right] + K + \left[\frac{K}{4} \right] + \left[\frac{J}{4} \right] + 5J \right) \bmod 7$$

Donde:

- h es el día de la semana (0 = sábado, 1 = domingo, 2 = lunes, ...)
- q es el día del mes
- m es el mes
- J es la centuria (año / 100)
- K el año de la centuria (año mod 100)
- Enero y febrero se cuentan como meses 13 y 14 del año anterior

12.2 Agresividad en Automatas Inteligentes

Previamente se había explorado la posibilidad de que los sentimientos o actitudes de una criatura podían ser producto de la evolución, resultado de las condiciones previas de su entorno, bajo la

óptica de la Ecuación de Price en 1967 y en el libro del Gen Egoísta de Richard Dawking en 1976, que reducían la empatía y la amabilidad a características derivadas de mecanismos de supervivencia colectiva de la especie que las ejerciera; sin embargo dichas teorías no podían ser comprobadas mas que con experimentos a muy largo plazo, donde generaciones enteras controlaran las condiciones de alguna criatura por suficiente tiempo para desarrollar dichas respuesta como un producto de la evolución.

La investigación de Google sobre Inteligencia Artificial podría ser la prueba conclusiva en el ámbito del comportamiento animal referente al desarrollo evolutivo de las actitudes, pues a través de su sistema DeepMind, se observo la formación de una actitud aprendida a partir de las condiciones de su entorno, donde la falta de un recurso y la necesidad de competir por el desarrolla la “agresividad”. En un reporte del mes de febrero del 2017 investigadores de Google reportan que tras aproximadamente 40 millones de iteraciones en un ambiente de escasas en una actividad de recolección, sus “agentes inteligentes” aprendieron a desarrollar la agresividad como un medio de garantizar su éxito en recolectar cierto objeto. Se observo que dicha actitud era resultado de permitir que los agentes aprendieran de su entorno, y era menos probable de desarrollarse en agentes con menor inteligencia o capacidad de aprendizaje. La simulación de autómatas con capacidad de aprendizaje abre la posibilidad de aprender sobre los métodos de desarrollo de las actitudes en criaturas vivas, y mas importante aun, ejemplifica de manera formal la posibilidad de actitudes emergentes en un agente inteligente que no se encontraran programadas previamente, sino que son resultado de su interacción con el ambiente y son por ende un factor inseparable de la inteligencia.

12.3 Combinaciones con repetición: 4 niños 5 dulces

Considerando el problema de 4 niños y 5 dulces, veamos el conjunto (A,B,C,D) y su representación gráfica en términos de asteriscos y barras. Por ejemplo podemos considerar:

AAAAA \rightarrow *****/././.

BBBBB \rightarrow ./*****/./.

CCCCC \rightarrow ././*****/.

DDDDD \rightarrow ./././*****

AAAAB \rightarrow *****/*/./.

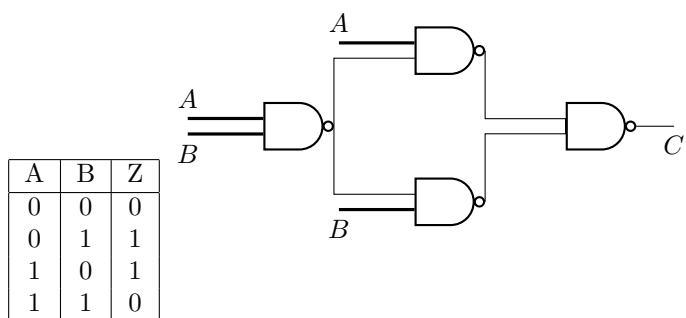
BBBCC \rightarrow ./***/**/.

Notando que se buscan las combinaciones de 3 en 8 posiciones diferentes.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = 56$$

12.4 Compuertas Lógicas en Tikz

OR- Exclusiva o Resta entre conjuntos



Chapter 13

Ejercicios de Conjuntos y Combinatoria

13.1 Conjuntos

1.7 Pruebe la primera ley de De Morgan $(A \cup B)' = A' \cap B'$, e ilustre su resultado con un diagrama de Venn.

Se tiene que:

$$(A \cup B)' = \{x \mid x \notin A \cup B\} = \{x \mid x \notin A, x \notin B\} = \{x \mid x \in A', x \in B'\} = A' \cap B'$$

1.8 Pruebe la primera ley de distributividad $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A, x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A, x \in B \text{ o } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A, x \in B \text{ o } x \in A, x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ o } x \in A \cap C\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

1.29 ¿De cuantas maneras pueden sentarse a 10 personas en una banca, si solo hay 4 lugares disponibles?

El primer asiento puede ser ocupado por cualquiera de las diez personas, el segundo sera ocupado por alguna de las 9 restantes, y siendo 8 para el tercero y 7 para el cuarto. Por lo tanto:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

A esto se le llama la permutación de n elementos diferentes, tomando r a la vez, y es denotado por nP_r .

1.39 De 5 matematicos y 7 fisicos, un comite se formara que consista de 2 matematicos y 3 fisicos. ¿De cuantas maneras se puede realizar, si: a) cualquier matematico y cualquier fisico pueden ser incluidos. (b) Un fisico en particular debe estar incluido en el comite. (c) dos matematicos particulares no pueden estar en el comite?

a) 2 matematicos de 5 pueden ser elegidos de 5C_2 formas.

3 fisicos de 7 pueden ser elegidos de 7C_3 maneras.

El número total de posibles elecciones es $= {}^5C_2 \cdot {}^7C_3 = 10 \cdot 35 = 350$.

b) 2 matematicos de 5 pueden ser seleccionados en 5C_2 maneras.

2 fisicos de 6 pueden ser seleccionados de 6C_2 , debido a que uno ya esta incluido.

El número total de posibles elecciones es $= {}^5C_2 \cdot {}^6C_2 = 10 \cdot 15 = 150$.

c) 2 matematicos de 3 pueden ser seleccionados de 3C_2 formas, debido a que dos fueron excluidos. 3 fisicos de 7 pueden ser seleccionados de 7C_3 maneras.

El número total de posibles elecciones es $= {}^3C_2 \cdot {}^7C_3 = 3 \cdot 35 = 105$.

1.40 ¿Cuántas ensaladas diferentes se pueden hacer con lechuga, escarola, endivia, berro y achicoria?

Cada vegetal puede ser considerado de dos maneras, incluido o no incluido. Y ya que cada una de estas dos maneras esta asociada con las dos maneras de los otros vegetales, de eso sabemos que hay 2^5 maneras. Pero 2^5 incluye que ningun vegetal se elegido, y ya que sin ellos no podemos hacer ensalada, el resultado final es:

$$\text{Numero de ensaladas} = 2^5 - 1 = 31$$

Otro metodo a utilizar es, seleccionar, ya sea 1 de 5 verduras, 2 de 5 verduras, ... , 5 de 5 verduras. Entonces el número de ensaladas posibles es:

$${}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

1.77 Complete la prueba del problema 1.14(b) probando que:

$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

Donde A y $(B - (A \cap B))$ son mutuamente exclusivas.

Chapter 14

Los chícharos de Gregor Mendel

Gregor Johann Mendel fue un fraile de la iglesia católica del siglo XIX conocido por su trabajo experimental en plantas de chícharos y sus deducciones algebraicas, que eventualmente se convertirían en las teorías base de la genética.

Durante 7 años (1856-1863) se dedicó a estudiar los resultados de cruzar plantas de chícharo (*Pisum sativum*) con diferentes características en el jardín de su monasterio, inspirado por el trabajo de sus contemporáneos y otros científicos previos, que estudiaron la herencia y la hibridación. Debido a sus antecedentes religiosos Mendel estaba en desacuerdo con la teoría de la evolución de Charles Darwin, y por lo cual buscaba demostrar con sus experimentos que los cambios en una especie ocurrían únicamente por influencia de los padres, y no tenían relación con los cambios del medio ambiente.

Sus experimentos consistían en considerar características específicas de una familia de plantas de chícharo y combinarlas con otras para observar sus efectos en los productos; siete eran las características a considerar en las plantas:

- Color del chícharo
- Forma del chícharos
- Color del recubrimiento del chícharo
- Color de la vaina
- Forma de la vaina
- Posición de la flor

- Longitud del tallo

Resultando en $2^2 = 4$ combinaciones posibles a considerar.

En la época de Mendel, se creía que las características de un producto de dos familias diferentes contenía la información de ambas de manera “diluida”, en otras palabras, si se combinaban dos chícharos de colores diferentes, el resultante sería de un color intermedio, aunque tal vez imperceptible.

Utilizando una brocha Mendel provocaba la polinización artificial de las flores de chícharo y las protegía durante temporadas de reproducción para mantener el control de sus experimentos. Tras la producción de las semillas estudiaba sus resultados y volvía a realizar la mezcla, ya fuera de nuevo con otra familia, o con otra planta de la misma. Con el tiempo noto que habían familias que generaban características que no estaban en la generación anterior, es decir que no pertenecían a sus padres, sin embargo, que si estaban presentes en dos generaciones anteriores. La repetición de este patrón lo llevo a desarrollar dos principios, que después se convertirían en la base de la genética:

Principio de la segregación

En este principio se definió la existencia de los alelos y su posición como dominantes o recesivos dentro de la expresión de un gen. El resultado era claro para Mendel cuando en la generación 0 combinaba 2 características diferentes, resultando en la expresión de solo una característica por la generación 1; sin embargo al polinizar dos plantas de esta misma generación, sus productos (la generación 2) tendrían una proporción de 3:1 donde 3 elementos presentarían el mismo gen dominante y 1 mostraría el gen recesivo que se consideraba perdido la generación anterior. Si se poliniza una vez mas entre los productos de la misma generación se obtiene una proporción 1:2:1, donde 1 familia expresa solo los genes dominantes, 2 una combinación con la proporción 3:1, y 1 solo con los genes recesivos.

Principio de la distribución independiente

El principio establece que los alelos son transferidos de manera individual y se encuentran segregados uno de otros, resultando en una proporción 9:3:3:1 para cuatro posibles expresiones de alelos.

Chapter 15

Caminta al azar

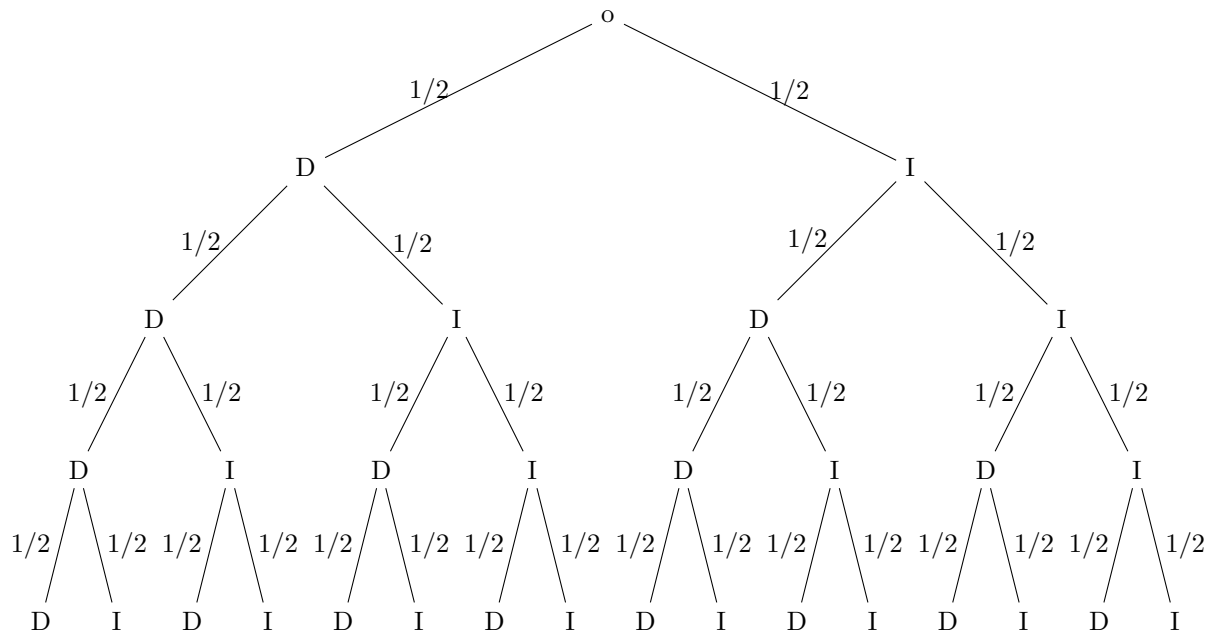
Supongamos una partícula que se mueve en una dimensión, con una probabilidad p para la derecha y $q = p - 1$ para la izquierda. Sabemos que $p + q = 1$, y debido a que los eventos son disjuntos se puede aplicar el principio básico del conteo, quedando de la forma:

$$ppppp \dots pqqqqq \dots q = p^{n_1} q^{n_2}$$

donde:

n_1 y n_2 son el número de pasos a cada lado.

Consideremos los resultados posibles para 4 movimientos de una partícula en el siguiente árbol, cuando $p = 0.5$:



El número total de pasos dados es $N = n_1 + n_2$, que representa la profundidad del árbol binario. Al asociar un resultado a la posición final de la partícula de la forma:

$$x = ml$$

Siendo:

m la posición final unitaria tras N pasos.

l la longitud de los pasos.

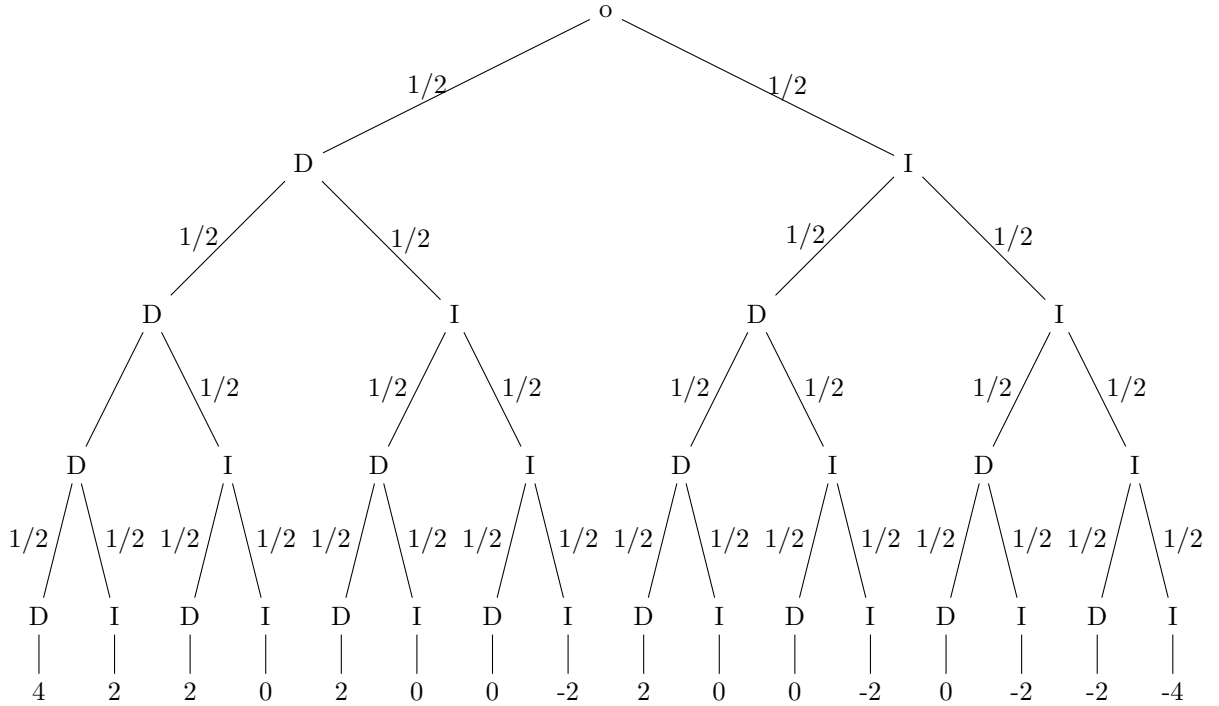
x la posición final en el plano unidimensional.

Sabemos que $-N \leq m \leq N$ y $m = n_1 - n_2$.

El número de maneras diferentes en el que la partícula puede terminar en m es representado por:

$$N(m) = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

En nuestro caso particular podemos regresar al árbol y asociar su m a cada rama resultante:



$$W(m) = \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

Multiplicando la probabilidad previamente calculada para cada caso de pasos n_1 y n_2 , y la cantidad de permutaciones que resultan en m .

Si deseamos conocer la probabiliad de m requerimos convertir todas nuestras variables de la forma:

$$\begin{aligned} m = n_1 - n_2 &= n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N \\ n_1 &= (m + N)/2 \\ n_2 &= (m - N)/2 \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos la formula:

$$P(m) = \frac{N!}{[(m + N)/2]![(m - N)/2]!} p^{(m+N)/2} q^{(m-N)/2}$$

Chapter 16

Porcentaje de inversión en tecnologías de cómputo, RMS, Eigenvectores y Eigenvalores

La investigación se realizó a través de el número de investigaciones publicadas, realizando la analogía de la investigación internacional como porcentaje de inversión internacional en las siguientes tecnologías de cómputo:

- GPU
- FPGA
- CPU
- NETS
- Computadoras Biológicas
- Software

Se utilizó el buscador Google Scholar como buscador, restringiendo todas las búsquedas a los últimos 5 años.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

GPU

Palabras claves: gpu parallel design architecture

Palabras excluidas: -fpga -CPU -network -software

1,280 resultados

FPGA

Palabras claves: FPGA architecture design

Palabras excluidas: -GPU -CPU -network -software

12,800 resultados

CPU

Palabras claves: multicore processors architecture cpu

Palabras excluidas: -fpga -gpu -network -software

2,090 resultados

NETS

Palabras claves: network grid distributed system cloud

Palabras excluidas: -cpu -fpga -gpu -wireless -heuristic -power -mining -software -social

11,000 resultados

BioComputers

Palabras clave: biological computer

Palabras excluidas: -gpu -cpu -software -vision

101 resultados

Software

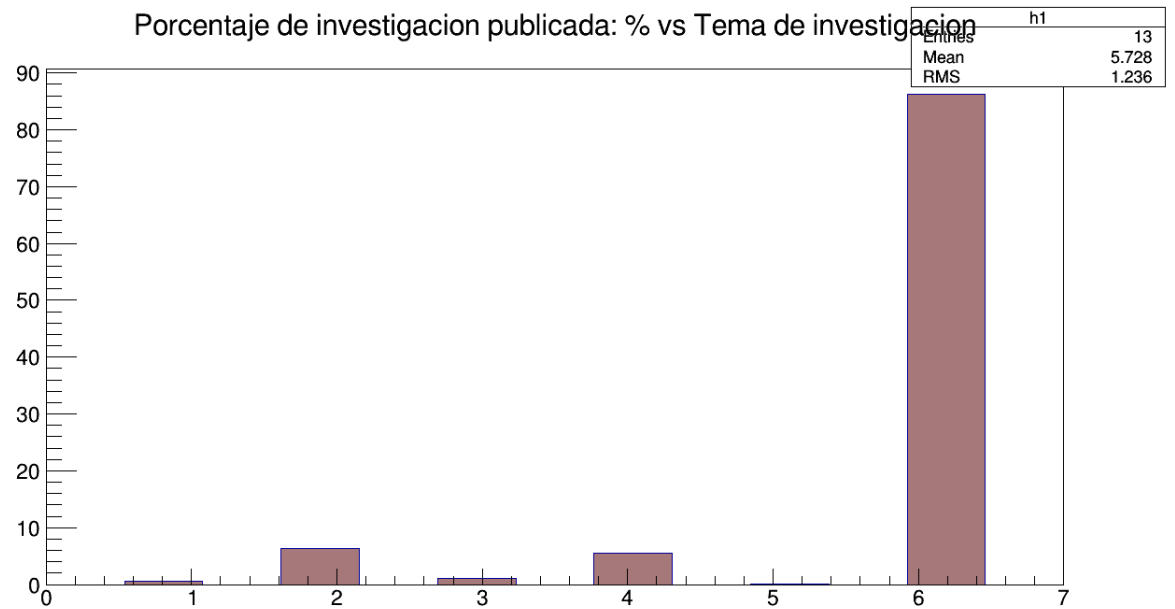
Palabras clave: software architecture design

Palabras excluidas: -gpu -cpu -network -fpga

172,000 resultados

199,271 resultados totales

A continuación se muestra la gráfica comparativa:



Donde la numeración del 1 al 6 representa las tecnologías de la siguiente manera:

1. GPU - 0.64%
2. FPGA - 6.42%
3. CPU - 1.04%
4. NETS - 5.52%
5. Computadoras Biológicas - 0.05%
6. Software - 86.31%

16.1 RMS

Se define como la media aritmética del cuadrado de un conjunto de datos. Considerando la siguiente ecuación para un conjunto X con n valores:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

Estadísticamente el RMS puede fungir como comparativa de la desviación promedio del error respecto a cero entre dos experimentos, si se adquiere de la diferencia de ambos; donde uno sea el conjunto de datos teórico predicho y el otro las mediciones físicas obtenidas.

En el caso particular de un RMS estadístico de un proceso aleatorio, el valor esperado es usado en lugar de la media.

Si \bar{x} es la media aritmética y σ_x es la desviación estándar de una población o de una forma de onda, entonces:

$$x_{rms}^2 = \bar{x}^2 + \sigma_x^2 = \overline{x^2}$$

Donde se puede intuir que el valor RMS siempre sera mas grande o igual promedio, en la que el RMS incluye tambien la varianza.

16.2 Eigenvectores y Eigenvalores

Considere una matriz $A \in R^{n \times n}$ dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Un eigenvector, vector propio, vector característico es un $\vec{b} \in R^n$ tal que $\vec{b} \neq \vec{0}$, de la matriz A, si y solo si:

$$A \vec{b} = \lambda \vec{b} \text{ donde } \lambda \in C$$

Además, se dice que el escalar λ es el eigenvalor, valor propio o valor característico de la matriz A asociado al eigenvector \vec{b} ; de manera recíproca, se dice que \vec{b} es un eigenvector de A asociado al eigenvalor λ . Debe notarse que, aún cuando la matriz A es real, los eigenvalores asociados a la matriz pueden ser números complejos.

La ecuación característica de la matriz A esta definida por:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$$

Que corresponde a una ecuación polinomial real de n-ésimo orden en λ .

Las raíces de la ecuación característica son los eigenvalores de la matriz y los vectores que satisfacen la ecuación $|A - \lambda I_n| \vec{b} = 0$ son los eigenvectores respectivos. Los eigenvalores y eigenvectores son utilizado para extracción de componentes principales asociados a la covarianza en un conjunto de datos. Dicho análisis es ampliamente aplicado a bioinformática, minería de datos e investigación química.

Chapter 17

Histogramas y clasificación de distribuciones

17.1 Histogramas, su normalización y sus clasificaciones

El propósito de un histograma es representar gráficamente la distribución de un conjunto de datos bajo una sola variable.

Un histograma esta compuesto de clases o bins, que se extrae de la respuesta de una variable, y valores o frecuencias de cada respuesta. Es posible extraer los siguientes datos de un histograma:

- Centro de los datos.
- Dispersión de los datos.
- Oblicuidad de los datos (Skewness).
- Presencia de factores ajenos o independientes.
- Presencia de modelos múltiples en los datos.

Estas características proveen indicadores del modelo distribucional de los datos.

El histograma acumulativo es un una variación del histograma, en el cual el eje vertical no solo muestra el valor de su clase, sino es el total de la suma de todas las clases previas. Este tipo de histograma también es llamado de escalera o función de densidad discreta.

Ambas gráficas cuentan con una variante adicional, donde el eje vertical se encuentra normalizado. Existen dos métodos comunes de normalización:

1. Normalización de distribución probabilística: La suma de los valores asociados a todas las clases es igual a uno. El valor asociado a cada clase es modificado de la forma n/N . Donde n es el valor de la clase y N la suma acumulativa del valor de todas las clases del histograma sin normalizar.

2. Normalización de distribución de densidad probabilística: La suma del área todas las clases es igual a uno. Recordando que el área es el dominio de cada clase por el rango de cada valor asociado a la clase. Tras la normalización el valor asociado a cada clase es modificado de la forma $(n/N)/\Delta x$. Donde n es el valor de la clase, N la suma acumulativa del valor de todas las clases del histograma sin normalizar y Δx es el dominio de la clase.

Los histogramas son clasificados según su forma, a continuación los mas comunes:

- Simétrico normal unimodal.
- Simétrico, no-normal de cola corta.
- Simétrico, no-normal de cola larga.
- Simétrico bimodal.
- Mezcla bimodal de dos simétricas normales
- Oblicua derecha.
- Oblicua izquierda.
- Simétrica con factores ajenos.
- Multimodal
- Simétrica

Chapter 18

Problemas Resueltos

1 Probar que el siguiente teorema es cierto

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \\ &= \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!(r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!(r)(r-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot \left(\frac{1}{(n-r+1)} + \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot \left(\frac{r + (n-r+1)}{(n-r+1)(r)} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{(n-r+1)(r)} \right) \\ &= \frac{(n+1)(n!)}{(n+1-r)((n-r)!(r)((r-1)!)} \\ &= \frac{((n+1)!)}{((n+1-r)!((r)!)} \\ &= \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

2 ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse utilizando todas las letras de cada palabra? i)Peso ii)Inusual iii)Psicológico

***ignore los acentos**

Solución:

i) $4! = 24$ ya que no hay letras repetidas.

ii) $(7!)/(2!) = 2520$ Ya que se repite dos veces la letra "u".

iii) $(11!)/((3!)(2!)(2!))$ Ya que se repite tres veces "o", 2 veces "c" y 2 veces "i".

3 Encontrar el número de subconjuntos en un conjunto X que contiene n elementos

Solución:

El número de subconjuntos en un conjunto X con $r \leq n$ elementos es dado por $\binom{n}{r}$. Todas las combinaciones posibles son:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

O escrito de diferente manera:

$$= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$$

Se puede notar que la expresión es un caso específico del teorema del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \text{ con } a=1 \text{ y } b=1$$

$$(2)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$$

El número de subconjuntos en un conjunto X con n elementos es:

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

4 ¿De cuantas maneras pueden arreglarse 6 perlas esféricas de diferentes colores para formar un collar?

Solución:

Considerando que el acomodo de las perlas en el collar puede apreciarse como un problema de permutaciones circular, se tiene:

$$(n-1)! = (6-1)! = 120$$

Ya que nos dan la información que las perlas son esféricas sabemos que no podrá diferenciarse cual es el frente y cual el detrás del collar, por lo que el número de permutaciones se reduce a la mitad.

$$(5!)/2 = 60$$

El collar puede formarse de 60 maneras diferentes.

5 Un sombrero contiene 100 monedas, donde 99 son justas y 1 tiene dos caras (siempre su resultado es cara). Una moneda es elegida al azar del sombrero, y es lanzada 7 veces. Dado que la moneda cae en cara las 7 veces lanzada, ¿Cual es la probabilidad que la moneda elegida es la de dos caras?

Solución:

A \rightarrow Elegir la moneda injusta

B \rightarrow Obtener 7 caras consecutivas

$$P(A) = 1/100$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{1 \cdot (1/100)}{1 \cdot (1/100) + (1/2^7) \cdot (99/100)} = 128/227 = 0.563$$

6 Un punto es seleccionado al azar dentro de un círculo. Encuentre la probabilidad P de que el punto este más cerca del centro que de su circunferencia.

Solución:

Para categorizar un elemento mas cercano o lejano al centro se considerara, que si se encuentra dentro del área de A esta mas cercano al centro, donde A es una circunferencia con la mitad del radio de S, donde S es el área del círculo completo.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{área de A}}{\text{área de S}} = \frac{\pi((1/2)r)^2}{\pi r^2} = 1/4$$

7 Tres maquinas A, B y C producen respectivamente 60%, 30% y 10% del número total de items de una fabrica. Sus porcentajes de productos defectuosos son 2%, 3% y 4% respectivamente. Un item es seleccionado al azar y se identifica defectuoso. Encuentre la probabilidad de que sea producto de la maquina C.

Solución:

Sea $X \rightarrow$ Items defectuosos buscamos $P(C|X)$, la probabilidad de que un item sea producido por la máquina C dado que el item esta defectuoso es:

$$P(C|X) = \frac{P(C)P(X|C)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)}$$

$$P(C|X) = \frac{0.10 \cdot 0.04}{0.60 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.10 \cdot 0.04}$$

$$P(C|X) = 4/25 = 0.16$$

8 Un filtro de spam esta diseñado para buscar frases comunes en los correos basura. Suponga que el 80% del e-mail es spam. En el 10% de los e-mails con spam la frase “dinero gratis” esta presente, mientras que esta frase solo es usada en el 1% de los e-mail no spam. Un nuevo e-mail que contiene “dinero gratis” llega. ¿Cual es la probabilidad de que sea spam?

Solución:

A \rightarrow El correo es spam

B \rightarrow Contiene la frase ”dinero gratis”

$$P(A) = 0.8$$

$$P(B|A) = 0.1$$

$$P(B|A^c) = 0.01$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{(0.1)(0.8)}{(0.1)(0.8) + (0.01)(0.2)} = \frac{0.08}{0.082} = 0.975 = 97.5\%$$

9 El tiempo de vida (en cientos de horas) de un transistor es una variable aleatoria z con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-z^2} & 0 \leq z \end{cases}$$

i) Obtener la función de densidad de probabilidad $P(z)$

ii) Calcular la probabilidad de que un determinado transistor dure mas de 200 hrs.

Solución:

i) $P(z) = \frac{dF(z)}{dz} = 2ze^{-z^2}$, con $z > 0$

ii) Sustituyendo en la función de distribución para mayor a 200 horas, recordando que la función esta en cientos de horas $F(Z > 2) = 1 - F(Z < 2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$

10 Sea una variable aleatoria x , que tiene como función de densidad:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{50} & -6 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

i) Calcular la función de distribución de x

ii) Hallar k , si $P(k \leq x \leq k+1) = 0.09$

Solución:

i) Dada una función de densidad es posible obtener una función de distribución aplicando la integral de la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \int_{-6}^x \frac{x+6}{50} dx = \frac{1}{50} \int_{-6}^x (x+6) dx \\ &= \frac{1}{50} \int_{-6}^x x dx + \frac{1}{50} \int_{-6}^x 6 dx \\ &= \frac{1}{50} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-6}^x \right) + \frac{1}{50} \left(6x \Big|_{-6}^x \right) \\ &= \frac{1}{50} \left(\frac{x^2}{2} + 6x + 18 \right) \end{aligned}$$

ii) La evaluación de la función en el dominio descrito nos permite identificar sus valores, y por lo tanto encontrar el valor 0.09:

$$P(k \leq x \leq k+1) = F_x(k+1) - F_x(k) = 0.09 \text{ si } k = -2$$

11 ¿De cuantas maneras se pueden repartir 3 caramelos a 4 niños?

Solución:

Consideremos un conjunto de 4 niños $\{a, b, c, d\}$, cada niño puede recibir, una cantidad igual o diferente de caramelos; en el mejor de los casos recibirán todos los dulces y en el peor no les tocara ninguno.

Empecemos por enumerar las posibilidades, para eso ocuparemos una notación de asteriscos y barras:

Un caso seria la distribución de 1 caramelo para cada niño, dejando solo uno sin caramelo, es decir

$$\begin{aligned} ABC &\rightarrow */**/* \\ ABD &\rightarrow */**/* \\ ACD &\rightarrow */**/* \\ BCD &\rightarrow */**/* \end{aligned}$$

Cualquier distribución de asteriscos y barras representaría un elemento del multiconjunto, o en este caso, una manera de repartir los caramelos.

Y como observamos previamente, se permiten niños sin caramelo o un niño con todos los caramelos.

$$\begin{aligned} AAA &\rightarrow ***/// \\ BBD &\rightarrow /**/* \end{aligned}$$

Se trata de un problema combinatorio, ya que se reduce a combinar la posición de 3 barras en 6 posiciones posibles. Aplicando la ecuación:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$$

Se puede corroborar el resultado ocupando la ecuación de combinaciones con repetición:

$$\begin{aligned} \binom{\binom{n}{k}}{k} &= \binom{k+n-1}{k} \\ \binom{\binom{4}{3}}{3} &= \binom{4+3-1}{3} = 20 \end{aligned}$$

12 Un arquero golpea en la diana el 80% del tiempo. Si dispara 100 flechas, encuentre la media y desviación estándar del número de veces que acierta en el blanco. Encuentre el rango aproximado de flechas que golpean el objetivo.

Solución:

Debido a la naturaleza descrita del suceso se puede modelar como un experimento binomial ya que cumple las siguientes características:

- 1) Es un experimento de Bernulli, es decir solo existen dos posibles resultados
- 2) Existe un número finito de pruebas ya establecido.
- 3) Los resultados de un evento son independiente de los anteriores.
- 4) La probabilidad de éxito se mantiene constante para cada prueba.

Por estos motivos se procede a analizar como una distribución binomial.

$$n = 100, p = 0.80, q = 1 - p = 0.20$$

La media es:

$$\mu = np = 100 \cdot (0.80) = 80$$

La desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot (0.8) \cdot (0.2)} = \sqrt{16} = 4$$

Los rangos aproximados son los siguientes: $\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma$ $72 < x < 88$

13 Si hay 150 errores tipográficos distribuidos aleatoriamente en un manuscrito de 600 paginas, encuentre la probabilidad de que en alguna pagina dada halla dos errores.

Solución:

Dado que se conoce que el suceso es aleatorio, se puede calcular una media de los sucesos para la variable aleatoria y considera una tipo de distribución espacial, se utilizara una distribución de Poisson:

Se encuentra la media del número de errores $\lambda = 150/600 = 0.25$. En otras palabras hay un promedio de 0.25 de errores por pagina. En este caso, x que es la variable aleatoria $x=2$, así que la probabilidad de seleccionar una página con exactamente dos errores es:

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{(2.7183)^{-0.25} (0.25)^2}{2!} = 0.024$$

Por lo tanto la probabilidad de dos errores en una página es de 2.4%.

14 Una tarjeta de identificación consiste de 3 dígitos seleccionados de 10 dígitos. Encuentre la probabilidad de que una tarjeta de identificación seleccionada al azar contenga los dígitos 1,2 y 3. No se permiten las repeticiones.

Solución:

$$\text{El número de permutaciones de 1,2 y 3 es } {}^3P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 6$$

$$\text{El número de permutaciones de 3 digitos tomados de 10 es } {}^{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una tarjeta de identificación contenga el 1,2 y 3 en cualquier orden es:

$$\frac{6}{720} = 1/120$$

15 Asuma que la profesión de un hombre pueda ser clasificada como profesional, de habilidad o rutinaria. Considere que, de los hijos de hombres profesionistas el 80% también lo son, 10% realizan labores de habilidad y 10% labores rutinarias. En el caso de hombres con labores de habilidad, 60% de los hijos tienen la misma profesión, 20% son profesionistas y 20% se dedican a trabajos rutinarios. Finalmente en el caso de hombres que se dedican a labores rutinarias, 50% de los hijos se dedican al mismo tipo de trabajos, mientras que 25% para cada una de las otras dos categorías respectivamente. Considere que cada hombre tiene al menos un hijo y forme la cadena de Markov. Encuentre la probabilidad que un nieto elegido al azar de un trabajador de labores rutinarias sea un profesionista.

Solución:

$S = \{\text{profesional, de habilidad, rutinaria}\}$

La matriz de transición para esta cadena es:

	Profesional Hijo	Habilidad Hijo	Rutinaria Hijo
Profesional Padre	0.8	0.1	0.1
Habilidad Padre	0.2	0.6	0.2
Rutinaria Padre	0.25	0.25	0.5

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Buscando para la segunda generación:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.6850 & 0.1650 & 0.1500 \\ 0.3300 & 0.4300 & 0.2400 \\ 0.3750 & 0.3000 & 0.3250 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la probabilidad que un nieto de un trabajador de una labor rutinaria sea profesionista es de 0.3750

Chapter 19

Programas Elaborados

19.1 Horton Conway - Game of Life

A continuación se muestra el algoritmo desarrollado para reproducir el programa de Horton Conway - Game of Life.

```
#include <string>
#include <stdio>
#include <iostream>
#include <time>
const int m=46;
const int n=170;

void cgame (){
//inicializar tablero
int array[m][n];
int larray[m][n];
int varray[9]={0,0,0,0,0,0,0,0,0};
int cont=1;
char decide='S';
for (int i=0;i<m;i++){
    for(int j=0;j<n;j++){
        array[i][j]=rand() % 2;
    }
}
//Definición de condición inicial
//array[20][50]=1;
//array[20][51]=1;
//array[19][52]=1;
//array[21][52]=1;
```

```

//array[20][53]=1;
//array[20][54]=1;
//array[20][55]=1;
//array[20][56]=1;
//array[19][57]=1;
//array[21][57]=1;
//array[20][58]=1;
//array[20][59]=1;
//Inicio de visualización
imprimir(array);
while(decide=='S'){
    cont++;
    system("sleep .4");
    //evaluación del tablero
    for (int i=0;i<m;i++){
        for(int j=0;j<n;j++){
            larray[i][j]=array[i][j];
        }
    }
    for (int i=2;i<m-2;i++){
        for(int j=2;j<n-2;j++){
            varray[0]=larray[i-1][j-1];
            varray[1]=larray[i-1][j];
            varray[2]=larray[i-1][j+1];
            varray[3]=larray[i][j-1];
            varray[4]=larray[i][j+1];
            varray[5]=larray[i+1][j-1];
            varray[6]=larray[i+1][j];
            varray[7]=larray[i+1][j+1];
            varray[8]=larray[i][j];
            array[i][j]=reglas(varray);
        }
    }
    imprimir(array);
    if (0==cont%100){
        cout<<"Continuar simulación(S/N): "<<endl;
        scanf("%s",&decide);
    }
}

}

void imprimir(int array[m][n]){
    system("clear");
    cout<<"Reproducción de Game of Life de John Conway"<<endl;

```

```

for (int i=2;i<m-2;i++){
    for(int j=2;j<n-2;j++){
        if (array[i][j]==1){
            cout<<"*";
        }
        else {
            cout<<" ";
        }
    }
    cout<<endl;
}

}

int reglas (int varray[9]){
    int vecinos;
    vecinos=varray[0]+varray[1]+varray[2]+varray[3]+varray[4]+varray[5]+varray[6]+varray[7];
    if ((vecinos<=1)&&(varray[8]==1)){
        return 0;
    }
    else if ((vecinos>3)&&(varray[8]==1)){
        return 0;
    }
    else if ((vecinos>=2)&&(vecinos<=3)&&(varray[8]==1)){
        return 1;
    }
    else if ((vecinos==3)&&(varray[8]==0)){
        return 1;
    }
    else{
        return 0;
    }
}

```



19.2 Caminata al azar en 3 dimensiones

Caminata al azar con dos agentes en tres dimensiones.

```
#include "TTimer.h"
```

```
int rwalk3d(){
int pasos=100;
int Camina1x=0, Camina1y=0, Camina1z=0;
int Camb1x=0, Camb1y=0, Camb1z=0;
int Camina2x=0, Camina2y=0, Camina2z=0;
int Camb2x=0, Camb2y=0, Camb2z=0;
```

```
TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Caminata al azar 3D",200,10,700,500);
```

```
TH3C *h1 = new TH3C("h1", "Caminata al azar 3D, dos agentes.", pasos/4, -pasos/4, pasos/4, pasos
```

```
TPolyLine3D *pl3d1 = new TPolyLine3D(pasos);
```

```
TPolyLine3D *pl3d2 = new TPolyLine3D(pasos);
```

```
h1->Draw();
```

```
pl3d1->SetLineColor(2);
```

```
pl3d2->SetLineColor(3);
```

```
for (int i=0;i<pasos;i++){
```

```
    Camb1x = rand() % 2 + 1;
```

```
    Camb1y = rand() % 2 + 1;
```

```
    Camb1z = rand() % 2 + 1;
```

```
    Camb2x = rand() % 2 + 1;
```

```

Camb2y = rand() % 2 + 1;
Camb2z = rand() % 2 + 1;
if (Camb1x==1) {
    Camina1x=Camina1x+1;
}
else{
    Camina1x=Camina1x-1;
}
if (Camb1y==1) {
    Camina1y=Camina1y+1;
}
else{
    Camina1y=Camina1y-1;
}
if (Camb1z==1) {
    Camina1z=Camina1z+1;
}
else{
    Camina1z=Camina1z-1;
}
if (i==0){
    Camina1x=0;
    Camina1y=0;
    Camina1z=0;
}
pl3d1->SetPoint(i,Camina1x,Camina1y,Camina1z);
pl3d1->Draw();
if (Camb2x==1) {
    Camina2x=Camina2x+1;
}
else{
    Camina2x=Camina2x-1;
}
if (Camb2y==1) {
    Camina2y=Camina2y+1;
}
else{
    Camina2y=Camina2y-1;
}
if (Camb2z==1) {
    Camina2z=Camina2z+1;
}
else{
    Camina2z=Camina2z-1;
}
if (i==0){

```

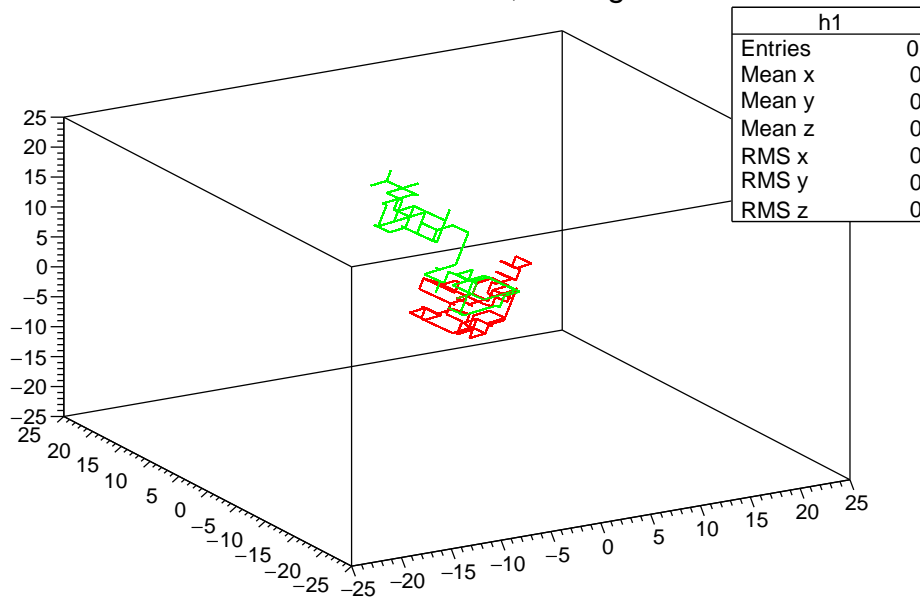
```

        Camina2x=0;
        Camina2y=0;
        Camina2z=0;
    }
    pl3d2->SetPoint(i,Camina2x,Camina2y,Camina2z);
    pl3d2->Draw();
    gPad->Modified();
    gPad->Update();
    system("sleep .2");
}

return Camina1x;
}

```

Caminata al azar 3D, dos agentes.



Bibliography

- [Administrator, 2005] Administrator, N. (2005). Nasa - sts-51l mission profile.
- [Aeronautics and Administration, 1986] Aeronautics, N. and Administration, S. (1986). Transcript of the challenger crew comments from the operational recorder.
- [Feynman, 1986] Feynman, R. P. (1986). Feynman’s appendix to the rogers commission report on the space shuttle challenger accident.
- [Hastie et al., 1990] Hastie, N. D., Dempster, M., Dunlop, M. G., Thompson, A. M., Green, D. K., and Allshire, R. C. (1990). Telomere reduction in human colorectal carcinoma and with ageing. *Nature*, 346(6287):866.
- [I. Wilmut, 1997] I. Wilmut, A. E. Schnieke J. McWhir A. J. Kind, K. H. S. C. (1997). Viable offspring derived from fetal and adult mammalian cells. *Nature*, 385(6619):3.
- [Kamimura et al., 2013] Kamimura, S., Inoue, K., Ogonuki, N., Hirose, M., Oikawa, M., Yo, M., Ohara, O., Miyoshi, H., and Ogura, A. (2013). Mouse cloning using a drop of peripheral blood 1. *Biology of reproduction*, 89(2):Article–24.
- [Marín,] Marín, H. G. D. Cálculo con aplicaciones en biología.
- [papermasters,] papermasters. What is cloning?
- [Secher et al., 2017] Secher, J. O., Liu, Y., Petkov, S., Luo, Y., Li, D., Hall, V. J., Schmidt, M., Callesen, H., Bentzon, J. F., Sørensen, C. B., et al. (2017). Evaluation of porcine stem cell competence for somatic cell nuclear transfer and production of cloned animals. *Animal Reproduction Science*, 178:40–49.
- [Sung et al., 2006] Sung, L.-Y., Gao, S., Shen, H., Yu, H., Song, Y., Smith, S. L., Chang, C.-C., Inoue, K., Kuo, L., Lian, J., et al. (2006). Differentiated cells are more efficient than adult stem cells for cloning by somatic cell nuclear transfer. *Nature genetics*, 38(11):1323–1328.
- [Vidal, 2002] Vidal, J. C. (2002). Teoría de conjuntos.
- [Wade, 1997] Wade, M. (1997). Spartan.