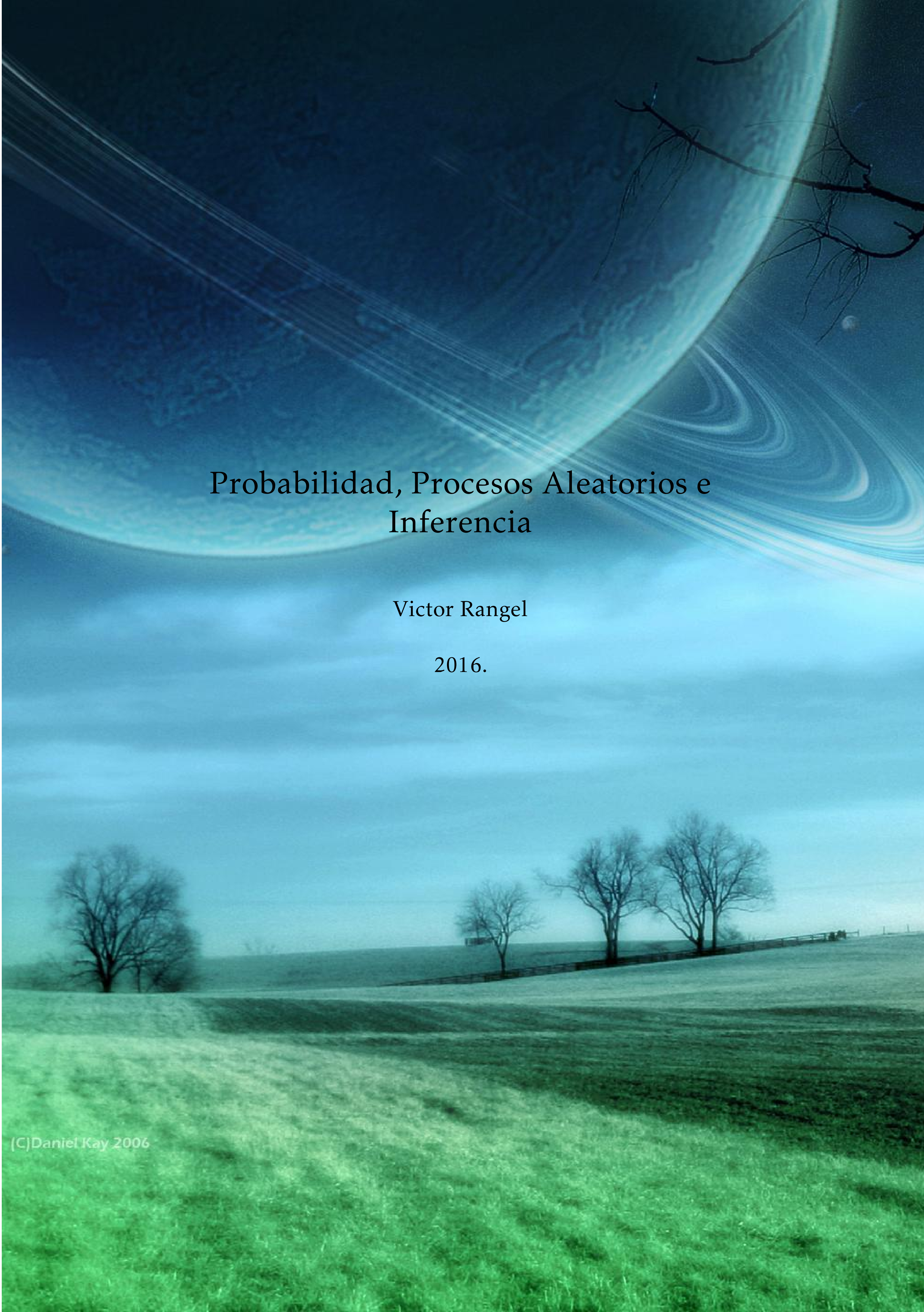


Probabilidad, Procesos Aleatorios e Inferencia

Victor Rangel

2016.

Índice general

Capítulo 1

Probabilidad

1.1. ¿Qué es?

Es muy común comprar la probabilidad con alguno otros conceptos, tales como: posibilidad, azar, suerte, etc., a pesar de que estos conceptos están entrelazados, no son rigurosamente una definición propia de "Probabilidad", a continuación se presentan las definiciones de los conceptos antes mencionados.

Posibilidad "Aptitud o facultad para hacer o no hacer algo".[1]

Azar "Casualidad, caso fortuito".[1]

Casualidad "Combinación de circunstancias que no se pueden prever ni evitar".[1]

Suerte " Encadenamiento de los sucesos, considerado como fortuito o casual".[1]

Así es como define cada uno de estos concepto la Real Academia Española, una vez conociendo la diferencia entre cada uno de los conceptos, es posible definir una concepto de probabilidad.

Probabilidad "En cualquier experimento aleatorio siempre hay incertidumbre en cuanto a si una evento en particular va o no va a producir. Como una medida de la probabilidad, o probabilidad, con la que podemos esperar que ocurra el evento, es conveniente para asignar un número entre 0 y 1".[2]

Ademas de este concepto que podemos llamas un concepto general de la probabilidad, existen muchos otros, los cuales definen con precisión un de los tantos objetos de estudio de la probabilidad. A continuación se mencionan algunos.

1.1.1. Probabilidad Clásica.

Si en un experimento pueden producirse con N resultados igualmente posibles y si dentro de estos N resultados el evento A puede ocurrir $n(A)$ veces, la probabilidad del evento A está dada por:

$$P(A) = \frac{Casos\,favorables}{Casos\,posibles} = \frac{n(A)}{N} \tag{1.1}$$

Esto quiere decir, que la probabilidad de que un evento suceda se relaciona con el total de casos que pueden ocurrir en el mismo evento; por ejemplo, supóngase el evento de arrojar un dado una sola vez; ¿Cuál es la probabilidad de que la cara obtenida sea 3?.

El número de casos Favorables es 1 (el evento de que la cara sea 3), mientras que todos los casos que pueden ocurrir al realizar el lanzamiento del dado es 6, entonces, aplicando 1.1.

Casos Favorables = $n(A) = 1$
Casos Posibles = $N = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que suceda el evento $n(A)$ el lanzar el dado es: $\frac{1}{6}$, de igual forma, la probabilidad de que la cara obtenida sea alguna otra de las 5 restantes es la misma. Ahora bien si deseamos calcular la probabilidad de que sucedan dos o mas eventos sucedan (obtener 2,4,6) tenemos:

Casos Favorables = $n(A) = 4$
Casos Posibles = $N = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.1.2. Probabilidad Geométrica.

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región dentro del un espacio de 2 o 3 dimensiones. A continuación de describen breve mente los tipos de probabilidad geométrica.

Probabilidad Dada Una Longitud

Se usa la relación 1.2 para obtener la probabilidad de una longitud deseada (caso favorable) dado un segmento posible (caso posible).

$$P(A) = \frac{longitud(A)}{longitud(S)} \tag{1.2}$$

Probabilidad Dada Un área

La probabilidad dada un área usa el mismo principio de le ecuación 1.1, pero ésta vez la relación se computa entre el área total de la región y el área deseada.

$$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(S)} \tag{1.3}$$

Probabilidad Dado Un Volumen

Es posible incluso calcular la probabilidad de dos objetos en tri– dimencionales.

1.1.3. Probabilidad Frecuentista.

La probabilidad frecuentista hace referencia a la cantidad de veces que se repita el experimento, y al final, las posibilidades de que ocurra cada uno de los sucesos será regular. Aunque cualquier comportamiento sea aleatorio, por proceso empírico llegaremos a una regularidad. Es cuando se lanza un dado y suponiendo cuantas veces cae el número que se seleccionó.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n}{N} = P(S) \tag{1.4}$$

1.1.4. Probabilidad Subjetiva.

La probabilidad subjetiva, esta basada en las creencias de las personas, las cuales efectúan estimaciones con base al conocimiento empírico.

Las tomas de decisiones para esta probabilidad puede hacer uso de cualquier evidencia que tengan a mano el individuo y mesclarlas con los sentimientos personales sobre la situación. Las asignaciones de probabilidad subjetiva se dan con más frecuencia cuando los eventos se presentan sólo una vez o un número muy reducido de veces.

Este tipo de probabilidad se suele presentar día con día, con puras estimaciones empíricas, por ejemplo, si el día esta nublado, por experiencia diría que es muy probable que llueva, sin embargo esta suposición, carece de evidencias factibles que soporten la tesis propuesta, el único factor que interviene es la experiencia adquirida.

1.1.5. Probabilidad Axiomática.

Este tipo de probabilidad, cuenta quizás, con una de las definiciones menos ambiguas y controvertidas, ya que se basa en un conjunto de axiomas, sólidamente establecidos; una de las ventajas que ofrece esta definición es que permite llegar a un desarrollo matemático de la "Teoría Probabilística".

Definición matemática: Dado un espacio muestral Ω asociado a un determinado experimento aleatorio y una clase de conjuntos de Ω con estructura de σ álgebra, A, (esto es, (Ω, A) un espacio medible) se define una función de probabilidad, medida de probabilidad o simplemente probabilidad como una función de conjunto P definida sobre A y con valores en [0,1].

$$P : A \longrightarrow \Re$$

I. Axioma de no negatividad

$$P(a) \geq 0, \forall a \in A$$

II. Axioma del suceso seguro

$$P(\Omega) = 1$$

III. σ álgebra

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\forall_i \neq j$$

1.1.6. Evento Determinista.

En estadística, un suceso determinista es un experimento o fenómeno que da lugar a un resultado cierto o seguro, es decir, cuando partiendo de unas mismas condiciones iniciales tenemos la certeza de lo que va a suceder. La relación causa- efecto se conoce en su totalidad.

A continuación se presentan una serie de ejemplos de eventos deterministas.

1. Dejar caer un objeto, este siempre tenderá a caer.
2. Patear una pelota, esta siempre saldrá disparada.
3. Golpear un vidrio no templado, con un martillo, el vidrio se romperá.
4. Estirar un cable más allá de su límite a al ruptura.
5. Calentar agua sobre por arriba de su punto ebullición.
6. Enfriar agua por debajo de su punto de congelamiento.
7. Comprimir en gas contenido, éste siempre reducirá su volumen.
8. Calentar un gas comprimido, éste siempre tenderá a expandirse.
9. Colocar dos imanes encontrados con el mismo polo, tenderán a repelerse.
10. Colocar dos imanes encontrados con diferentes polos, tenderán a unirse.

1.1.7. Evento Probabilistas/Aleatorio.

Los eventos probabilista o aleatorio, son aquellos eventos donde el resultado del evento varia. De forma más rigurosa se define como un subconjunto de un espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un experimento aleatorio. En teoría de la probabilidad a cada evento aleatorio se le puede asignar una medida de probabilidad, y el conjunto de todos los sucesos aleatorios constituye una álgebra de conjuntos.

A continuación se presentan una serie de ejemplos de eventos aleatorios.

1. Lanzar una moneda al aire, cuenta con dos resultados posibles.
2. Lanzar de un dado cúbico, cuenta 6 resultados posibles.
3. Elegir un 4 de corazones al azar, de deck 52 cartas.
4. Ganar la lotería.
5. Obtener 4 ases un un juego de poker.
6. Obtener una sumatoria combinada de 21, haciendo uso de 3 cartas en un juego de blackjack.
7. El peso de una docena de manzana de la gama red delicious.
8. Sacar de un bolso, una bola blanca, de un total de 3 rojas, 3 azules y 3 blancas.
9. Girar una ruleta y obtener el resultado esperado.
10. El número de personas en un vagón del metro a las 7:00 am un día lunes.

Capítulo 2

Principios Fundamentales

2.1. Técnicas De Conteo

Cuando el número de posibles resultados de un experimento es finito, su espacio muestral es finito y su cardinal es un número natural. Si el experimento es simple, el espacio muestral es unidimensional, constituido por puntos muestrales con una sola componente, y el cardinal es simplemente el número de posibles resultados del experimento, los que se pueden enumerar fácilmente. Pero si el experimento es combinado, el cardinal puede ser tan grande, que sería del todo absurdo pretender enumerarlos todos, por ser un proceso lento, tedioso, costoso y susceptible de errores. Y realmente no es importante poder enumerarlos, sino saber contarlos.

2.1.1. Principio Multiplicativo

Si una acción puede realizarse de n_1 maneras diferentes y una segunda acción puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces ambas acciones pueden realizarse secuencialmente de $n_1 \cdot n_2$ maneras diferentes.

Este principio multiplicativo se generaliza para cualquier número de acciones a realizar, esto es, si una primera acción se puede realizar de n_1 maneras diferentes, una segunda acción se puede realizar de n_2 maneras diferentes,..., y una r ésima acción se puede realizar de nr maneras diferentes, entonces las r acciones se pueden realizar de $n_1 n_2 ... n_r$ maneras diferentes.

$$N = n_1 n_2 n_3 ... n_n \tag{2.1}$$

Ejemplo: Supóngase que se tienen dos dados de 6 caras cada dado $\{1,2,3,4,5,6\}$; el primer dado puede caer en una de las seis caras, el segundo a su vez puede caer en una de las 6 caras. Entonces el número de maneras que pueden caes ambos dados es $6 \times 6 = 36$.

2.1.2. Principio Aditivo

Si se desea llevar a efecto una actividad, la cuál tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de N_1 maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de N_2 maneras o formas ..... y la última de las alternativas puede ser realizada de N_n maneras o formas, entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de como sigue.

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_n \tag{2.2}$$

2.2. Espacio Muestral

En la teoría de probabilidades, el espacio muestral o espacio de muestreo, consiste en el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar dos monedas, donde $H = cara$ y $T = cruz$ el espacio muestral es el conjunto $\{\{H,H\},\{H,T\},\{T,H\},\{T,T\}\}$. Un evento o suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral con estructura de σ álgebra,1 llamándose a los sucesos que contengan un único elemento sucesos elementales. En el ejemplo, el suceso "sacar cara en el primer lanzamiento", o $\{\{H,H\},\{H,T\}\}$, estaría formado por los sucesos elementales $\{\{H,H\}\}$ y $\{\{H,T\}\}$.

2.3. Triángulo de Pascal

En matemática, el triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma triangular. Es llamado así en honor al matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654, en su Traité du triangle arithmétique. Si bien las propiedades y aplicaciones del triángulo fueron conocidas con anterioridad al tratado de Pascal por matemáticos indios, chinos o persas, fue Pascal quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y el primero en organizar la información de manera conjunta.

La construcción del triángulo está relacionada con los coeficientes binomiales según la fórmula que a continuación se presenta.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{2.3}$$

A continuación se presenta la representación del triangulo de pascal con hasta $n = 10$

2.3.1. Coeficiente Binomial

El coeficiente binomial o número de combinaciones, son el número de formas en que se puede extraer subconjuntos a partir de un conjunto dado. De forma formal se define de la siguiente forma.

Definición:

El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el subconjunto de k escogidos de un conjunto con n elementos.

Fila 0:											1										
Fila 1:										1		1									
Fila 2:									1		2		1								
Fila 3:								1		3		3		1							
Fila 4:							1		4		6		4		1						
Fila 5:						1		5		10		10		5		1					
Fila 6:					1		6		15		20		15		6		1				
Fila 7:				1		7		21		35		35		21		7		1			
Fila 8:			1		8		28		56		70		56		28		8		1		
Fila 9:		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
Fila 10:	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

Figura 2.1: Triángulo de Pascal

Por ejemplo. Sea S el conjunto $\{A,B,C,D,E\}$ con 5 elementos, de los cuales se desea escoger dos (sin importar el orden). Existen 10 formas de hacer la selección, tal que:

$$\{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)\}$$

2.4. Teorema Del Binomio

En matemáticas se le llama teorema del binomio al desarrollo de la potencia n–ésima, de n para cualquier entero positivo de un binomio; por lo tanto con ayuda del teorema es posible expandir la potencia $(x+y)^n$ por medio de una suma de la forma ax^by^c donde b y c son números naturales tal que $b+c=n$ y los coeficientes están definidos como $\binom{n}{k}$.

Por ejempo.

$$(x+y)^2 = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

Donde A,B,C son los coeficientes respectivos 1,2,1, por lo tanto.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Podemos generalizar la expresión haciendo uso de coeficientes binomiales, para obtener el teorema general.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Ejemplo: Desarrollar el binomio $(x+y)^n$, con n de 0 hasta 6.

Haciendo uso del teorema del binomio 2.3, es posible determinar la sucesión, además que por medio del uso del Triángulo de Pascal 2.1 es posible determinar el coeficiente, para cada grupo del binomio.

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$(x+y)^5 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

Sin hacer uso del triángulo de de pascal también es posible realizar el desarrollo, pero esta vez tendremos que tomar en cuenta el coeficiente binomial. Ejemplo, desarrollar $(x+y)^{10}$

$$(x+y)^{10} = \binom{10}{0}x^{10}+\binom{10}{1}x^9y+\binom{10}{2}x^8y^2+\binom{10}{3}x^7y^3+\binom{10}{4}x^6y^4+\binom{10}{5}x^5y^5+\binom{10}{6}x^4y^6+$$

$$+\binom{10}{7}x^3y^7+\binom{10}{8}x^2y^8+\binom{10}{9}xy^9+\binom{10}{10}y^{10}$$

$$(x+y)^{10} = x^{10}+10x^9y+45x^8y^2+120x^7y^3+210x^6y^4+252x^5y^5+$$

$$210x^4y^6+120x^3y^7+45x^2y^8+10xy^9y^{10}$$

2.4.1. Demostraciones

Considerando la identidad 2.4

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.4}$$

Por construcción se demuestran las siguientes equivalencias:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!}$$
$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} = \frac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!} + \frac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{kn!}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!(k+(n-k))}{nk!(n-k)!}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. $\binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!}$$
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!}$$
$$\binom{n}{0} = 1$$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. $\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$

$$\binom{k}{r-1} = \frac{k!}{r!(k-(r-1))!} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!}$$
$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$
$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$
$$\binom{k+1}{r} = \frac{rk!}{r!(k-r+1)!} + \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$
$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!(r+(k-r+1))}{r!(k-r+1)!} = \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$
$$\binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

2.5. Permutación

La permutación es una técnica matemática que se utiliza para determinar la variación del orden o de la disposición de los elementos de un conjunto. Esto quiere decir, la permutación es una combinación ordenada de objetos. La permutacion se divide en dos grandes grupos:

1. Con repetición
2. Sin repetición

2.5.1. Permutación Sin Repetición

Una permutación sin repetición, es donde el los objetos del conjunto, como su nombre lo indica no pueden repetirse en el ordenamiento de tal permutación.

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.5}$$

Por ejemplo. ¿De cuantas maneras se puede permutar el grupo $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ tomando solo 3 elementos del conjunto.

Sea:

Número total de elementos: $n = 8$
Número de elementos usados: $k = 3$

$${}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{40320}{120} = 336$$

2.5.2. Permutación Con Repetición

A su vez en una permutación con repetición es permisible la repetición de uno o más elementos del conjunto.

$$P_n^{a,b,c,...} = \frac{n!}{a!b!c!...} \tag{2.6}$$

Donde n es el número total de elementos del conjunto a, b, c hace referencia a los conjuntos repetidos.

Por ejemplo. ¿Cuántas señales diferentes, cada una consiste de 8 banderas, se pueden formar de un grupo de 4 banderas indistinguibles rojas, 3 banderas indistinguibles blancas y una bandera azul?

Sea:

Número total de elementos: $n = 8$
Elementos Repetidos:

1. $a = 4$; banderas rojas.
2. $b = 3$; banderas blancas.
3. $c = 1$; banderas azules.

$$P_8^{4,3,1} = \frac{8!}{4!3!1!} = \frac{40320}{(24)(6)(1)} = 280$$

Por ejemplo, el código de seguridad para ingresar a una instalación consta de 4 dígitos de la forma $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales se pueden repetir los números en la clave de acceso (no es lo recomendable pero es permisible), entonces el código de acceso podría contener uno o mas números del grupo de números permitidos.

En cuanto a la permutacion donde no se permite repetición, como su nombre lo indica la permutacion debe tomar uno y solo uno de los objetos, ya que los objetos son objetos únicos, por ejemplo, en una carrera de 100mts planos, donde 8 corredores se alistan para partir, estos pueden ser ubicados en cualquiera de los 8 carriles disponibles, y por razones físicas, dos personas no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo, como tampoco un competidos puede ocupar dos carriles a la vez.

Demostración de Permutación

A continuación se presenta una demostración básica del principio de permutacion.

Demostración.

$$P\binom{n}{r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Q.E.D.

2.6. Combinación

Una combinación es un ordenamiento de elementos sin importar el orden de estos.

$$C\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.7}$$

Ejemplo: En una bolsa de canicas, 8 rojas y 8 azules, se sacan al azar grupos de 4 canicas; ¿Cuántos grupos de canigas se pueden obtener, si se regresan las canicas seleccionadas al término de cada evento? Es una pregunta un tanto engañosa, ya que podemos formar una gran cantidad de combinaciones, y muchas de ellas pueden ser repetidas, pero no podemos determinar cuales hemos previamente seleccionado, lo que ocasiona eventos repetidos, que de igual forma son válidos.

2.7. Principio De La Pichonera

También llamado principio de Dirichlet o principio de las cajas, establece que si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma. Otra forma de decirlo es que m huecos pueden albergar como mucho m objetos si cada uno de los objetos está en un hueco distinto, así que el hecho de añadir otro objeto fuerza a volver a utilizar alguno de los huecos.

Por ejemplo: si se toma un grupo de $n = 366$ personas, habrá amenos dos personas que cumplan años el mismo día, ya que el número total de días en un año es $m = 365$ y suponiendo que $n - 1$ personas cumplen años en días diferentes, es decir se asigna un número de día a cada $n - 1$ personas, por lo tanto la persona n, por lógica, habrá nacido en uno de los 365 días, por lo que al menos 2 personas habrán nacido el mismo día.

2.8. Cálculo Tensorial

En matemáticas y en física, un tensor es cierta clase de entidad algebraica de varias componentes, que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido.

Una vez elegida una base vectorial, las componentes de un tensor en una base vendrán dadas por una multimatriz. El orden de un tensor será el número de índices necesario para especificar sin ambigedad una componente de un tensor: un escalar será considerado como un tensor de orden 0; un vector, un tensor de orden 1; y dada una base vectorial, los tensores de segundo orden pueden ser representados por una matriz.

Figura 2.2: Principio de la Pichonera

2.8.1. Tensor De Levi-Civita

En cálculo tensorial, se define el símbolo de Levi-Civita, también llamado el símbolo de permutación o tensor de Levi- Civita, como sigue:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk), (1,2,3), (2,3,1) \text{ ó } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (ijk), (3,2,1), (1,3,2) \text{ ó } (2,1,3) \\ 0 & \text{de otro modo } (i=j) \text{ ó } (j=k) \text{ ó } (k=i) \end{cases} \tag{2.8}$$

Ejemplo:

$$(A \times B) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = i(A_2B_3 - A_3B_2) - j(A_1B_3 - A_3B_1) + k(A_1B_2 - A_2B_1)$$

Por el método clásico de determinantes se obtiene el resultado, sin embargo, es posible aplicar el tensor de Levi- Civita, 2.8, para obtener el mismo resultado.

sea $i = 1$;
$(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k = \varepsilon_{1jk}A_jB_k$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_{11k}A_1B_k + \varepsilon_{12k}A_2B_k + \varepsilon_{13k}A_3B_k \\ &= \varepsilon_{111}A_1B_1 + \varepsilon_{112}A_2B_2 + \varepsilon_{113}A_3B_3 \\ &+\varepsilon_{121}A_2B_1 + \varepsilon_{122}A_2B_2 + \varepsilon_{123}A_2B_3 \\ &+\varepsilon_{131}A_3B_1 + \varepsilon_{132}A_3B_2 + \varepsilon_{133}A_3B_3 \end{aligned}$$

Aplicando el tensor 2.8:

$$= A_2B_3 - A_3B_2$$

sea $i = 2$;
$(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{2jk} A_j B_k$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{21k} A_1 B_k + \varepsilon_{22k} A_2 B_k + \varepsilon_{23k} A_3 B_k \\
&= \varepsilon_{211} A_1 B_1 + \varepsilon_{212} A_2 B_2 + \varepsilon_{213} A_3 B_3 \\
&+ \varepsilon_{221} A_2 B_1 + \varepsilon_{222} A_2 B_2 + \varepsilon_{223} A_2 B_3 \\
&+ \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{232} A_3 B_2 + \varepsilon_{233} A_3 B_3
\end{aligned}$$

Aplicando el tensor:

$$= A_3 B_1 - A_1 B_3$$

sea $i = 3$;
$(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{3jk} A_j B_k$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{31k} A_1 B_k + \varepsilon_{32k} A_2 B_k + \varepsilon_{33k} A_3 B_k \\
&= \varepsilon_{311} A_1 B_1 + \varepsilon_{312} A_2 B_2 + \varepsilon_{313} A_3 B_3 \\
&+ \varepsilon_{321} A_2 B_1 + \varepsilon_{322} A_2 B_2 + \varepsilon_{323} A_2 B_3 \\
&+ \varepsilon_{331} A_3 B_1 + \varepsilon_{332} A_3 B_2 + \varepsilon_{333} A_3 B_3
\end{aligned}$$

Aplicando el tensor:

$$= A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Por lo tanto:

$$(A \times B) = (A_2 B_3 - A_3 B_2) + (A_3 B_1 - A_1 B_3) + (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Capítulo 3

Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática.

La teoría de los conjuntos es lo suficientemente rica como para construir el resto de objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas,...; y junto con la lógica permite estudiar los fundamentos de aquella. En la actualidad se acepta que el conjunto de axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel es suficiente para desarrollar toda la matemática.

3.1. álgebra de conjuntos De Conjuntos

Existen operaciones básicas que permiten manipular los conjuntos y sus elementos, similares a las operaciones aritméticas, constituyendo el álgebra de conjuntos. A continuación se enuncian dichas leyes.

- **Unión**. La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ que contiene cada elemento que está por lo menos en uno de ellos.

- **Intersección**. La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ que contiene todos los elementos comunes de A y B.

- **Diferencia**. La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \setminus B$ que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.

- **Complemento**. El complemento de un conjunto A es el conjunto A_c que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A. También se puede representar como: $\bar{A}$, A' ó $com(A)$

Haciendo uso de esta operaciones básicas se pueden construir las identidades de álgebra de conjuntos.

3.2. Principio De La Dualidad

Traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, a menudo por medio de una operación de involución, esto es: Si la dualidad de A es B, entonces de forma análoga, dualidad de B es A, cumpliéndose una relacion uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de A es a veces A (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues (ver anexo) en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es amplia mente usado en diversos representaciones matemáticas, tales como lógica, lógica boleana, teoría de conjuntos.

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

- Unión por Intersección $\cup \to \cap$
- Intersección por Unión $\cap \to \cup$
- Conjunto universo por vacío $U \to \oslash$
- Conjunto vacío por universo $\oslash \to U$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

Aplicando la dualidad:

$$(\oslash \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Ahora bien, como se enuncia anteriormente, la dualidad en un principio que se puede aplicar en una gran variedad de áreas del conocimiento, a continuación se muestra la dualidad en lógica boleana. Se realiza lo homólogo a la teoría de conjuntos, se reemplazan las operaciones de suma por multiplicación, los 1 por 0 y viceversa.

Sea:

$$x(y+0) \text{ y } \bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$$

Aplicando el principio de la dualidad de las ecuaciones correspondientes.

$$x + (y \cdot 1)$$

$$(\bar{x} + 1) \cdot (\bar{y} \cdot z)$$

A continuación se presenta una demostración haciendo uso de los principios antes expuestos.

3.3. Ley Distributiva

Sea la identidad (ó ley) distributiva del álgebra de conjuntos:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{3.1}$$

La cual establece que en la suma y el producto permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado.

Demostración por contención:

Sea $\{x|x \in A \cup (B \cap C)\}$, entonces, $x \in A$ ó $x \in (B \cap C)$.

Siguiendo este razonamiento se tiene que:

$$\begin{gathered} x \in A \text{ ó } x \in (B \text{ y } C) \\ x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \\ \{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \\ x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \\ x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cap C) \\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ahora bien se proponemos $\{x|x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$, entonces $x \in (A$ ó $B)$ y $x \in (A$ ó $C)$.

$$\begin{gathered} x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \\ \{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ ó } x \in C\} \\ x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \\ x \in A \text{ ó } \{x \in (B \text{ y } C)\} \\ x \in A \cup \{x \in (B \cap C)\} \\ x \in A \cup (B \cap C) \\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

Observando las dos demostraciones (parte izquierda y derecha de la ley) por construcción, se puede obviar la igualdad, demostrando que efectivamente la igualdad se cumple.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Segunda La Ley Distributiva

Sea la identidad (ó ley) distributiva del álgebra de conjuntos:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{3.2}$$

Demostración

Se propone $\{x|x \in A \cap (B \cup C)\}$, entonces $x \in A$ y $x \in (B$ ó $C)$.

$$\begin{gathered}
x \in A \text{ y } x \in (B \text{ ó } C) \\
x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \\
\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \\
x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \\
x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C) \\
x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

Se propone $\{x|x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\}$, entonces $x \in (A \cap B)$ ó $x \in (A \cap C)$.

$$\begin{gathered}
x \in (A \text{ y } B) \text{ ó } x \in (A \text{ y } C) \\
\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \\
x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ ó } x \in C\} \\
x \in A \text{ y } \{x \in (B \text{ ó } C)\} \\
x \in A \cap \{x \in (B \cup C)\} \\
x \in A \cup (B \cap C) \\
x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)
\end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

Observando las dos demostraciones (parte izquierda y derecha de la ley) por construcción, se puede obviar la igualdad, demostrando que efectivamente la igualdad se cumple.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dualidad Ley Distributiva

Como se estudio con anterioridad, el principio de dualidad se puede aplicar para producir nuevas identidades a partir de identidades ya existentes, para este caso, se tiene la ley de dualidad 3.1, si se aplica el principio de dualidad se tiene:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ahora, el principio de dualidad establece un intercambio de operaciones, es decir, se intercambia unión por intersección y viceversa.

Cambiando:

- $\cup$ por $\cap$, y
- $\cap$ por $\cup$, se tiene que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ahora, se demostró que la identidad 3.1 es cierta, y que el principio de la dualidad es verdadero, por inducción se puede decir que la dualidad de la ley 3.1 por tanto es de igual manera verdadera.

3.4. Notación Lógica

Es útil introducir el tipo de notación utilizada en lógica, con el fin de realizar demostraciones haciendo uso de ella, y así, reducir el uso del lenguaje natural que puede llevar consigue ambigedad, por lo que definir un sistema rígido en definiciones es de gran utilidad.

Sean p y q una preposiciones tal que:

- La negación se define como $\neg p$, p' o bien $\bar{p}$.
- La conjunción se define como $p \wedge q$, p y q.
- La disyunción se define como $p \vee q$, p ó q.
- La or exclusiva se define como $p \oplus q$, p ó q pero sin p y q.
- La sentencia condicional se define como $p \longrightarrow q$ si p, entonces q.
- La doble sentencia condicional se define como $p \leftrightarrow q$ o bien $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, p si y solo si q.

3.5. Leyes De D'Morgan

A continuación se presentan las leyes de D'Morgan 3.3 que son de gran utilidad para reducir términos.

Dados dos conjuntos A y B en un universal U , se verifica:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{3.3}$$

Traducido la ley a lógica proposicional, se tiene:

$$(A \vee B)' \leftrightarrow A' \wedge B'$$

Demostración:

Sea $\{x|x \in U\}$, y si $x \in (A \cup B)'$ por lo que $x \notin (A \cup B)$, entonces.

$$\neg[x \in (A \vee B)]$$

$$\neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$$

$$\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

$$(x \notin A) \wedge (x \notin B)$$

$$(x \in A') \wedge (x \in B')$$

$$x \in (A' \cap B')$$

Entonces bien:

$$\forall x[x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$$

Por lo tanto:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

3.5.1. Dualidad

Como se vio en la demostración de la ley distributiva 3.1; es posible obtener una nueva expresión a partir de una conocida, utilizando el principio de la dualidad.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Cambiando:

- $\cup$ por $\cap$, y
- $\cap$ por $\cup$, se tiene que:

Se tiene que:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{3.4}$$

Por lo que esta ley también es verdadera ya se utilizo la dualidad en ley ya demostrada.

3.6. Aproximación de Stirling

Al evaluar las funciones de distribución en estadísticas, a menudo es necesario evaluar considerables factoriales de números, como en la distribución binomial. Una relación aproximada útil y de uso común en la evaluación de factoriales de grandes números es la aproximación de Stirling.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e}) \tag{3.5}$$

De acuerdo a la función Gamma de Euler podemos describir el factorial de cualquier número como:

$$\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Donde $n \geq 0$, cuando n=10 e integrar obtenemos:

$$f(x) = x^n \cdot e^{-x}$$

Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando n=0:

$$f(x) = \frac{10}{e}^{10*} \cdot e^{\frac{-x^2}{20}}$$

Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemo que definimos las variables de la integral como:

$u = x+n$ y $du = dx$ y sustituyendo $I = \int_{u=-n}^{\infty}(u+n)^n \cdot e^{u+n} du$ factorizando $(u+n)^n$ la integral es:

$I = \int_{u=-n}^{\infty}(n)^n \cdot (1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du$, tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:

$$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty} (1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du \quad (1)$$

Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expander el logaritmo:

$$ln(1+\frac{u}{n})^n = n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \quad (2)$$

$$\implies \quad ln(1+\frac{u}{n} = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2})$$

Finalmente sustituyendo 2 tenemos:

$$n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \approx u - \frac{u^2}{2n}$$

Sustituyendo en 1 tenemos:

$$I_2 = (\frac{n}{e})^n \cdot \int_{u=-n}^{n} e^{\frac{u^2}{2n}} du$$

Se nata que regresamos a la integral Gaussiana:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n}$$

Por lo tanto decimos que n tiende al infinito y el factorial de n tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

$$n! \sim (\frac{n}{2})^n \cdot \sqrt{2\pi n} \tag{3.6}$$

3.7. Sistemas Complejos

Un sistema complejo, a diferencia de uno simple es visto como una entidad cuyo comportamiento global es más que la suma de las operaciones de sus partes. Usualmente se le define como una red de muchos componentes cuyo comportamiento de agregados da lugar a estructuras en varias escalas y patrones de manifestación, cuya dinámica no es posible de inferir de una descripción simplificada del sistema. El campo es altamente multidisciplinario, juntando expertos en varias ramas para su estudio que van desde economía, ciencias sociales, biología, física, meteorología, etc., Las bases teóricas de los sistemas complejos han sido enfocadas principalmente en su organización; considerándolos como el conjunto de relaciones que determinan las clases de interacciones y transformaciones dentro de un sistema y en los arreglos que contribuyen al desarrollo y persistencia de ciertas características dentro de la organización. Son las relaciones entre los componentes, más que los componentes y sus propiedades las que son más significativas, donde al dar un mayor énfasis a la estructura y relaciones en lugar de su composición es lo que hace que muchos de los diferentes tipos de sistemas puedan ser caracterizados con herramientas analíticas similares.

3.7.1. Cuantificacion De La Complejidad En un Sistema

La búqueda de medidas de complejidad toca muchos temas interesantes de la teorí de sistemas dinámicos y ha dado lugar a una serie de potentes herramientas, aunque el objetivo original de desarrollar una medida que valga para medir la complejidad de cualquier sistema no parece realista y se ha eliminado de los objetivos científicos. Los sistemas dinámicos complejos muestran una gran variedad de comportamientos cualitativamente diferentes, y no parece apropiado intentar meter todos los sistemas complejos en una sola bolsa para medir su grado de complejidad siguiendo un único criterio.

La tarea de desarrollar una medida matemáticamente bien definida para la complejidad se ve obstaculizada por la falta de un objetivo claramente definido. Vamos a presentar algunos requisitos previos y algunas de las restricciones que deben postularse para obtener una medida de complejidad válida. Al final, sin embargo, es algo que depende de nuestra intuición el decidir si estos requisitos son apropiados o no para ello[3].

3.7.2. Complejidad y Aleatoriedad

Una propuesta habitual para medir la complejidad es la **entropía informativa de Shannon:**

$$H[p] = -\sum_{x_i} p(x_i) log(p(x_i)) \tag{3.7}$$

Esta medida se anula cuando el sistema es regular (es decir, hay un solo evento probable), lo que concuerda con nuestra intuición de que la complejidad es baja cuando no pasa nada, y sin embargo, es máxima para una dinámica completamente al azar.

3.8. Número de Erdös

Es un número que pretende cuantificar el grado de separación entre las personas que han publicado un artículo de investigación, en este caso particular el mateático Paul Erdös.

3.8.1. Cálculo Del Número De Erdös

En un principio, se considera:

- Erdös tiene un número 0.
- Si se ha colaborado con el, directamente en la publicacion de un artículo se tiene número de Erdös.
- Si se ha colaborado con alguien que colabóro directamente con Erdös se tiene número 2 y así sucesivamente.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuan separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama.

Se asegura que Paul Erdös es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producción de Erdös es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos están aún por publicarse después su muerte.

Erdös utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, ¿el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas?. Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: ¿Habrá mucho tiempo para descansar en la tumba?. Erdös viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas.

Erdös seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta años. Erdös, sin duda, tenía el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todos las especialidades.

Capítulo 4

Bayes

Thomas Bayes nació en Londres, Inglaterra, en 1702 y falleció en Tunbridge Wells[4], Inglaterra, en 1761 fue un prolífero matemático una de sus más grandes contribuciones fue al estudio de la probabilidad, donde en su obra más conocida plasma los hoy conocidos "Teorema de Bayes". Fue miembro de la Royal Society desde 1742[5], Bayes fue uno de los primeros en utilizar la probabilidad inductivamente y establecer una base matemática para la inferencia probabilística.

Estudió el problema de la determinación de la probabilidad causal a través de los efectos observados. El teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Más específicamente, con su teorema se resuelve el problema conocido como de la "*probabilidad inversa*"[6]. Esto es, valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Se trata de probabilidad *inversa* en el sentido de que la *directa* sería la probabilidad de observar algo supuesto que rigen ciertas condiciones. Los cultores de la inferencia bayesiana (basada en dicho teorema) afirman que la trascendencia de la probabilidad inversa reside en que es ella la que realmente interesa a la ciencia, dado que procura sacar conclusiones generales (enunciar leyes) a partir de lo objetivamente observado, y no viceversa. Algunos de sus trabajos se mencionan en seguida:

- Divine Providence and Government Is the Happiness of His Creatures (1731).
- An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of The Analyst (1736).
- An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances (1763).

Donde el último trabajo fue publicado después de su muerte y el cual es considerado una de sus más grandes aportaciones ya que de él se desprende lo que conocemos como "*Teorema de Bayes*", además que es la base de la "*inferencia bayesiana*".

4.1. Teorema de Bayes

Es una proposición planteada por Thomas Bayes que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A, esto es, Bayes planteó vincular matemáticamente la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Es decir, que sabiendo la probabilidad de tener un dolor de cabeza dado que se tiene gripe, se podría saber (si se tiene algún dato más), la probabilidad de tener gripe si se tiene un dolor de cabeza.

Teorema 4.1.1. *Sean* $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ *un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea* B *un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales* $P(B \mid A_i)$*. Entonces, la probabilidad* $P(A_i \mid B)$*, esta dada por la expresión:*

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} \tag{4.1}$$

La ecuación anterior describe el teorema de Bayes para casos generalizado, pero es posible hacer una simplificación para dos eventos cualesquiera tal que:

Teorema 4.1.2.
i) Sea A *un conjunto de sucesos.*
ii) Sea B *un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales* $P(B \mid A)$ *y/o* $P(A \mid B)$*. Entonces, la probabilidad* $P(A \cap B)$*, esta dada por:*

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) \tag{4.2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) \tag{4.3}$$

Si representamos estos la probabilidad de ocurrencia de cierto evento A, B por medio de la superposición de árboles de decisión, podemos ser capaces de encontrar la relación probabilista de acuerdo al teorema de Bayes. Este árbol se presenta en la figura 4.1.

Es necesario definir algunos otros conceptos para tener un mejor entendimiento de lo ex-

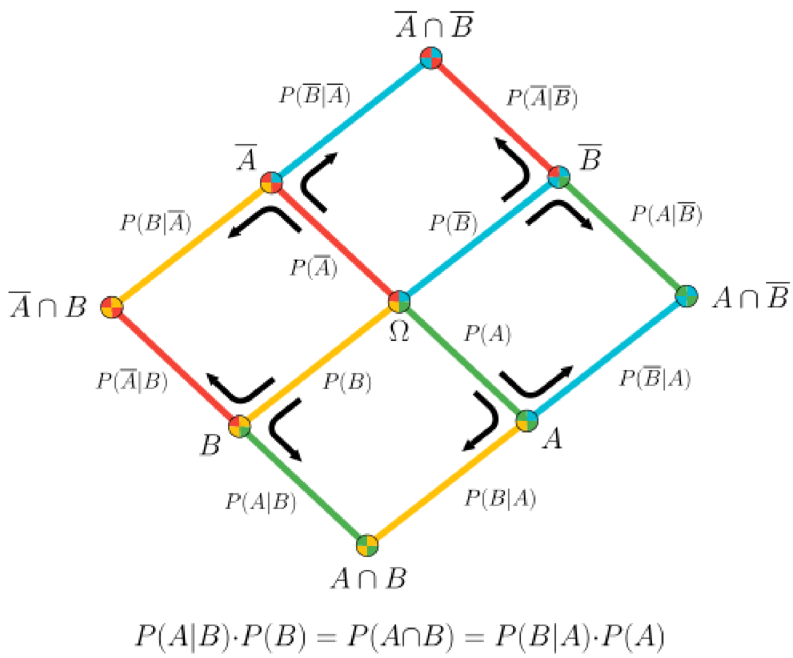


Figura 4.1: La visualización del teorema de Bayes por la superposición de dos árboles de decisión.

puesto por Bayes. Tales conceptos se describen a continuación.

- **Sucesos o Eventos**: Se define simplemente como un subconjunto del espacio muestral Ω asociado a un experimento ϵ.

- **Sucesos mutuamente excluyentes**: Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes, si estos no pueden ocurrir juntos a la vez, lo que se denota así: $A \cap B = \oslash$, es decir su intersección es el conjunto vacío.

- **Probabilidad Condicional**: Este tipo de probabilidad permite modificar la creencia que se tiene acerca de la realización de un experimento aleatorio, algunas veces se obtiene información parcial de un experimento aleatorio de antemano, a que se conozcamos el resultado final del experimento.

4.1.1. Probabilidad a Priori

En un evento futuro incierto y de probabilidad condicional, los resultados de la muestra deben ser conocidas. Por lo general, las probabilidades condicionales están determinadas por la aplicación de una norma de distribución de probabilidad de acuerdo con el carácter de dicha distribución.

Teorema 4.1.3.
i) Sea A un evento nulo, $A = \oslash$, entonces $P(A) = P(\oslash) = 0$.
ii) Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes $A_i \cap A_j = \oslash$ si $i \neq j$, entonces:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{4.4}$$

iii) Sean A y A^c los eventos complementarios esto es $A \cup A^c = \Omega$, es decir la unión de dos eventos es el espacio muestral y se tiene $P(A) + P(A^c) = 1$ o bien $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo evento o suceso A en Ω,
iv) Sea $A \cup B$ el evento definido como que ocurre A o bien ocurre B. Se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{4.5}$$

El teorema de Bayes es válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y el hecho de permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia empírica es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Una aplicación de esto son los clasificadores bayesianos que son frecuentemente usados en implementaciones de filtros de correo basura o spam, que se adaptan con el uso. Otra aplicación se encuentra en la fusión de datos, combinando información expresada en términos de densidad de probabilidad proveniente de distintos sensores.

4.2. Inferencia Bayesiana

La incertidumbre es natural en el proceso de razonamiento donde se pueden establecer reglas para inferir de manera deductiva una proposición determinada que puede ser verdadera o falsa, según sea el límite de esta estimación. Dentro de los métodos de razonamiento se encuentran los Modelos Bayesianos, que simulan diferentes condiciones de incertidumbre cuando no se conoce si es verdadera o falsa la hipótesis enunciada en un rango de variación.

Todos los modelos bayesianos tienen en común la asignación de la probabilidad como medida de creencia de una hipótesis, así es que, la inferencia es un proceso de reajuste de medidas de creencia al conocerse nuevos axiomas.

Cuando se utilizan evidencias y observaciones para establecer que una suposición sea cierta, es lo que se denomina como Inferencia Bayesiana. La inferencia bayesiana observa la evidencia y calcula un valor estimado según el grado de creencia planteado en la hipótesis. Esto implica que al tener mayor cantidad de datos disponibles se podrá obtener resultados más satisfactorios. El uso de la inferencia bayesiana en los casos donde las distribuciones normales se aplican, requiere que sólo dos actos decisión sean evaluados en cierto momento.

La distribución de probabilidad a priori es descriptiva con respecto a la incertidumbre y asocia la estimación de probabilidad con la ocurrencia de un evento al azar. Por el contrario la distribución de probabilidad, más bien, es la estimación de un evento dado que se basa en un juicio informado. Para situaciones de sentencia en la que una decisión es informada se debe ser consciente de una serie de factores de incertidumbre que podrían influir en el valor de los resultados finales.

El uso de la distribución normal puede ser una solución satisfactoria para hallar una aproximación de incertidumbre; la distribución normal se define mediante la identificación de la media y la desviación estándar de la distribución. La media de la distribución normal se puede obtener mediante la identificación el valor más probable al evento aleatorio.

La probabilidad tiene dos formas de interpretación, una *frecuentista* y otra *bayesiana*, estas dos corrientes de pensamiento tienen la comunidad estadística dividida: la primera considera la probabilidad como la frecuencia relativa de un experimento aleatorio, es decir se interpreta la probabilidad como un evento netamente objetivo que encontramos en la naturaleza, en este enfoque se considera que bajo las mismas condiciones si el experimento se realiza un numero grande de veces, la probabilidad del evento A esta dado por $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$, donde n_A es el numero de observaciones dentro del experimento que tienen el atributo y n el número de veces que se repite el experimento.

La segunda, el enfoque *bayesiano*, interpreta la probabilidad de manera subjetiva, y la utiliza para expresar su creencia respecto a una afirmación, dada cierta evidencia; está estrechamente relacionada con el concepto de probabilidad condicional, en la corriente *bayesiana* es común asignarle probabilidades a cualquier tipo de afirmación, incluso si el experimento asociado no es aleatorio, es de aclarar que el método *bayesiano* también hace uso de la información contenida en la muestra, pero no depende solo de ella al momento de la toma de una decisión.

Aplicando la inferencia Bayesiana es posible identificar distintos tipos de patrones de transición como estados de ganancias discretas en un gran conjunto de datos administrativos. Además, se puede investigar acerca de los efectos y las condiciones del mercado por medio de la estimación de un modelo probabilístico.

También se puede estudiar y analizar las deficiencias futuras de las actividades operacionales de una empresa, con la aplicación del método de inferencia bayesiana, el cual no deberá basarse sólo en datos históricos, sino que se debe incluir el análisis de los diferentes escenarios para poder predecir un comportamiento futuro y la gravedad del riesgo; esto con el fin de mejorar las políticas de gestión de riesgos.

La Inferencia bayesiana es una técnica estadística adecuada para reunir las opiniones de expertos en el análisis de datos. Actualmente existe una amplia literatura que envuelve toda la teoría de la inferencia bayesiana y sus aplicaciones para el marco financiero y de negocios.

4.3. Análisis de Decisión

El análisis de decisión proporciona un soporte cuantitativo a los tomadores de decisiones en todas las áreas tales como ingenieros, analistas en las oficinas de planificación, agencias publicas, consultores en proyectos de gerencia, planificadores de procesos de producción, analistas financieros y de economía, expertos en diagnósticos de soportes medico y tecnológicos e infinidad, así cómo en la modelación de eventos, de otras áreas.

Aproximación Progresiva al Modelado: El modelado para la toma de decisiones envuelve a dos partes diferentes, una es el tomador de decisiones y la otra es el constructor del modelo, conocido como el analista.El analista debe asistir al tomador de decisiones en el proceso de decidir. Por lo tanto, el analista debe estar equipado con mas que un conjunto de métodos analíticos.

Los especialistas en la construcción de modelos se encuentran normalmente tentados a estudiar el problema, y luego aislarse a desarrollar un modelo matemático para ser utilizado por el gerente (es decir, el tomador de decisiones.) Desgraciadamente el gerente podría no entender el modelo, por lo tanto podría usarlo ciegamente o simplemente rechazarlo. El especialista podría sentir que el gerente es exageradamente ignorante y poco sofisticado para valorar el modelo, mientras que el gerente podría pensar que el analista vive en un mudo de fantasía de supuestos irreales y de lenguaje matemático irrelevante.

Dichos problemas de mal interpretación y de incomunicación pueden ser evitados si el gerente trabaja en conjunto con el especialista en el desarrollo de; primero un modelo simple que proporcione un análisis crudo pero entendible. Luego que el gerente le ha ganado confianza al modelo, detalles adicionales y una mayor sofisticación pueden ser agregados, quizás de una forma lenta y progresiva. Este proceso requiere la inversión de tiempo por parte del gerente e interés sincero por parte del analista para solucionar los problemas reales del gerente, en vez de tratar de crear y explicar modelos extremadamente sofisticados. Esta construcción progresiva de modelos es comúnmente referida como la aproximación de bootstrapping y es el factor más importante en la determinación de un modelo de decisión de implementación exitosa. Adicionalmente, el acercamiento de bootstrapping simplifica las dificultades del proceso de validación y verificación del modelo.

En los modelos determinísticos, una buena decisión es juzgada de acuerdo a los resultados. Sin embargo, en los modelos probabilísticos, el gerente no esta preocupado solamente por los resultados, sino que también con la cantidad de riesgo que cada decisión acarrea.

Como un ejemplo de la diferencia entre los modelos probabilísticos congtra determinísticos, considere el pasado y el futuro: Nada que hagamos ahora puede cambiar el pasado, pero cualquier cosa que hacemos influencia y cambia el futuro, a pesar de que el futuro tiene un elemento de incertidumbre. Los gerentes se encuentran mucho mas cautivados por darle forma al futuro que por la historia pasada.

El concepto de probabilidad ocupa un lugar importante en el proceso de toma de decisiones, ya sea que el problema es enfrentado en una compañía, en el gobierno, en las ciencias sociales, o simplemente en nuestra vida diaria. En muy pocas situaciones de toma de decisiones existe información perfectamente disponible de todos los hechos necesarios.- La mayoría de las decisiones son hechas de cara a la incertidumbre. La probabilidad entra en el proceso representando el; rol de sustituto de la certeza es un sustituto para el conocimiento completo.

Los modelos probabilísticos están ampliamente basados en aplicaciones estadísticas para la evaluación de eventos incontrolables (o factores), así como también la evaluación del riesgo de sus decisiones. La idea original de la estadística fue la recolección de información sobre y para el Estado. La palabra estadística no se deriva de ninguna raíz griega o latina, sino de la palabra italiana state. La probabilidad tiene una historia mucho mas larga. LaProbabilidad se deriva del verbo probar lo que significa .[a]veriguar"lo que no es tan fácil de obtener o entender. La palabra "prueba"tiene el mismo origen el cual proporciona los detalles necesarios para entender lo que se requiere que sea cierto.

Los modelos probabilísticos son vistos de manera similar que a un juego; las acciones están basadas en los resultados esperados. El centro de interés se mueve desde un modelo determinístico a uno probabilístico usando técnicas estadísticas subjetivas para estimación, prueba y predicción. En los modelos probabilísticos, el riesgo significa incertidumbre para la cual la distribución de probabilidad es conocida. Por lo tanto, la evaluación de riesgo significa un estudio para determinar los resultados de las decisiones junto a sus probabilidades.

Los tomadores de decisiones generalmente se enfrentan a severa escasez de información. La evaluación de riesgo cuantifica la brecha de información entre lo que es conocido y lo que necesita saber para tomar una decisión óptima. Los modelos probabilístico son utilizados para protegerse de la incertidumbre adversa, y de la explotación de la propia incertidumbre.

La Dificultad en la Evaluación de la Probabilidad se obtiene de la información, la cual es escasa, vaga, inconsistente, o incompleta. Una afirmación tal y como que "la probabilidad de una baja de electricidad se encuentra entre 0,3 y 0,4.[es] mas natural y realista que su contraparte exacta de que "la probabilidad de una baja de electricidad es 0,36342."

Es una tarea desafiante comparar varios cursos de acción y finalmente seleccionar la acción que se va a realizar. En determinados casos, esta tarea puede resultar excesivamente desafiante. Las dificultades de la toma de decisiones están representadas por la complejidad de las alternativas de decisión. La capacidad que tiene un decisor de procesar información limitada es un factor de exigencia ya cuando se consideran las implicancias de un solo curso de acción, pero en muchas decisiones se deben visualizar y comparar las implicancias de varios cursos de acción. Además, hay factores desconocidos que se inmiscuyen en la situación problemática; rara vez se conoce con certeza el resultado. La mayoría de las veces, el resultado depende de las reacciones de otras personas que quizás ni siquiera saben qué van a hacer. No es de sorprender entonces que a veces los decidores pospongan la elección lo más posible y que luego decidan sin intentar considerar todas las implicancias de su decisión.

La toma de una decisión, fundamentalmente, tiene que ver con combinar información sobre probabilidades con información sobre deseos e intereses. ¿Cuántas ganas tienes de conocer a esa mujer? ¿Cuán importante es la salida? ¿Cuánto vale ese premio?

Abordar las decisiones como si fueran apuestas es la base de la teoría de la decisión. Significa que tenemos que compensar el valor de un cierto resultado contra su probabilidad.

Para operar según los cánones de la teoría de la decisión debemos hacer cálculos del valor de un cierto resultado y sus probabilidades, y a partir de allí de las consecuencias de nuestras elecciones.

En el contexto de la teoría de la decisión, la probabilidad del suceso incierto θ_{ij} cuando se toma la decisión a_i en condiciones C, representada por $P_r(\theta_{ij} \mid a_i, C)$, es una medida sobre una escala $(0,1)$ de la verosimilitud de la ocurrencia de θ_{ij} en esas condiciones. Para una alternativa a_i con un número finito m_i de sucesos relevantes, entonces:

$$0 \leq P_r(\theta_{ij} \mid a_i, C) \leq 1, \ \sum_{j=1}^{n_i} (\theta_{ij} \mid a_i, C) = 1 \tag{4.6}$$

4.4. Multiplicadores de Lagrange

En los problemas de optimización, los multiplicadores es un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de $n+k$ variables, donde k es igual al número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. Estas nuevas variables escalares desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange. El método dice que los puntos donde la función tiene un extremo condicionado con k restricciones, están entre los puntos estacionarios de una nueva función sin restricciones construida como una combinación lineal de la función y las funciones implicadas en las restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores.

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto abierto n–dimensional $\{x \in R^n\}$. Se definen s restricciones $g_k(x) = 0, k = 1, \cdots, s$ y se observa si las restricciones son satisfechas que:

$$h(x, \lambda) = f - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k \tag{4.7}$$

Sea:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$$

Por tanto la equivalencia se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \tag{4.8}$$

Capítulo 5

Paradojas

El término deriva de la forma latina paradoxum, que es un préstamo del griego como paradoxon ’inesperado, increíble, singular’ etimológicamente formado por la preposición para-, que significa ”junto a.º .ª parte de”más la raíz doxon ’opinión, buen juicio’. La paradoja del mentiroso y otras paradojas similares ya se estudiaron en la Edad Media, eran conocidas como insolubilia. Esta paradoja es uno de los primeros casos de paradoja autoreferente. De hecho, entre los temas recurrentes en las paradojas se encuentra la auto- referencia directa e indirecta, la infinitud, definiciones circulares y confusión de niveles de razonamiento, aunque no todas las paradojas son de tipo autorreferente.

En filosofía moral una paradoja juega un rol particularmente importante en debates sobre ética. Por ejemplo, una admonición ética a “amar a tu vecino”no solamente se encuentra en contraste, sino también en contradicción, con un vecino armado que intenta asesinarte: de ser exitoso, entonces, uno no es capaz de amarlo. Sin embargo, atacar o reprimir al vecino agresor no es generalmente considerado amar. Esto puede ser llamado un dilema ético. Otro ejemplo es el conflicto entre el mandato de no robar y la responsabilidad personal de alimentar a la familia, la cual, bajo determinadas circunstancias, no puede ser mantenida sin dinero robado.

Una paradoja o antilogía es una idea extraña opuesta a lo que se considera verdadero a la opinión general. También se considera paradoja a una proposición en apariencia falsa o que infringe el sentido común, pero no conlleva una contradicción lógica, en contraposición a un sofisma que solo aparenta ser un razonamiento verdadero.3 En retórica, es una figura de pensamiento que consiste en emplear expresiones o frases que implican contradicción. Un ejemplo de paradoja es la “Paradoja de Jevons”, más conocida como efecto rebote. La paradoja es estímulo para la reflexión. A menudo los filósofos se sirven de las paradojas para revelar la complejidad de la realidad. La paradoja también permite demostrar las limitaciones de las herramientas de la mente humana. Así, la identificación de paradojas basadas en conceptos que a simple vista parecen simples y razonables ha impulsado importantes avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas.

5.1. Tipos de Paradojas

Podemos agrupar las paradojas en diferentes grupos, sin embargo ésta clasificación no es única ya que por su naturaleza, ciertas paradojas pueden ser agrupadas en más de una categoría.

1. Paradoja del mentiroso.

> Un hombre afirma que está mintiendo. ¿Lo que dice es verdadero o falso ?

En esta paradoja se centra en el hecho de que si una persona afirma que "Estoy mintiendo", entramos en conflicto ya que si aceptamos que la premisa de que él miente, entonces nos ha dicho la verdad, por lo tanto no esta mintiendo, pero si tomamos la premisa como una mentira entonces esta premisa sigue siendo verdad, por lo que no se puede determinar lógicamente si esta mintiendo o no.

2. Paradoja de Curry.

> Si esta declaración es verdad, el mundo terminará en una semana
> si no me equivoco, Y es verdad
> que se puede representar como: $X \longrightarrow Y$

En esta paradoja hacemos uso de relaciones lógicas, donde:

$$X = \{x \mid x \in X \longrightarrow Y\}$$
$$X \in X \Longleftrightarrow (X \in X \longrightarrow Y)$$
$$X \in X \longrightarrow (X \in X \longrightarrow Y)$$
$$X \in X \longrightarrow Y$$
$$(X \in X \longrightarrow Y) \longrightarrow X \in X$$
$$X \in X$$

entonces:

$$Y$$

3. Paradoja del viaje en el tiempo

> Se parte del supuesto que una persona realiza un viaje a través del tiempo y mata al padre biológico de su padre/ madre biológico (abuelo del viajero), antes de que éste conozca a la abuela del viajero y puedan concebir. Entonces, el padre/madre del viajero (y por extensión, ese viajero) nunca habrá sido concebido, de tal manera que no habrá podido viajar en el tiempo; al no viajar al pasado, su abuelo entonces no es asesinado, por lo que el hipotético viajero sí es concebido; entonces sí puede viajar al pasado y asesinar a su abuelo, pero no sería concebido, y así indefinidamente.

En esta paradoja se llega a la contradición debido a que los eventos no pueden suceder al mismo tiempo.

4. El hotel infinito de Hilbert

Capítulo 6

Demostraciones por Inducción

También conocida como inducción matemática, es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n que toma una infinidad de valores enteros. En términos simples, la inducción matemática consiste en el siguiente razonamiento:

El número entero a tiene la propiedad P. El hecho de que cualquier número entero n también tenga la propiedad P implica que $n+1$, también la tiene. Entonces todos los números enteros a partir de a tienen la propiedad P.

A continuación se presentan algunas demostraciones por inducción.

Preposición 1. *Si* $n \in \mathfrak{Re}$, *entonces* $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$

Demostración.

1. Sea $n = 1$, entonces $1 = 1^2 = 1$, que es cierto.

2. Ahora probamos para $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ para todo $k \geq 1$.
   Para k, entonces $1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$, suponemos que es verdad,entonces.
   para $k+1$, entonces $1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$
   usando el lado derecho de la ecuación y reduciendo se tiene que:

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+\cdots+(2(k-1)+1) &= \\ [1+3+5+7+\cdots+(2k-1)]+(2(k-1)+1) &= \\ Q(k)+(2(k-1)+1) &= \\ k^2+(2(k-1)+1) &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ esto demuestra que $S_k \Rightarrow S_{k+1}$

Q.E.D.

Preposición 2. *Sea* $\sum_{i=1}^{n} J^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *para todo* $n \geq 1$

Demostración.

$$\text{Sea } P(n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} J^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 \text{ y } Q(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Entonces valuando con $n = 1$; $P(1) = 1$, $Q(1) = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$.

2. Suponemos que para k es verdadero, entonces:

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2;\ Q(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{ por lo que } P(k) = Q(k)$$

Ahora bien se tiene que demostrar para $k+1$ casos, entonces:

$$P(k+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = Q(k+1)$$

$$\begin{array}{rcl}
[1^2 + 2^2 + \cdots + k^2] + (k+1)^2 & = & \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
Q(k) + (k+1)^2 & = & \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 & = & \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
P(k+1) = k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 & = & (k+1)(k+2)(2k+3) = Q(k+1) \\
(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] & = & \\
(k+1)[2k^2 + 7k + 6] & = & (k+1)[2k^2 + 7k + 6]
\end{array}$$

$$\therefore P(k+1) = Q(k+1)$$

Q.E.D.

Preposición 3. *Sea* $\sum_{i=1}^{n} m(m+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ *para todo* $n \geq 1$

Demostración.

Sea $P(n) = \sum_{i=1}^{n} m(m+1) = 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + \cdots + n(n-1)$ y $Q(n) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

1. Entonces valuando con $n = 1$; $P(1) = 0$, $Q(1) = \frac{(0)(1)(2)}{3} = 0$.

2. Ahora planteamos la hipótesis que para todo k es verdadero, entonces:

$$P(k) = 1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+\cdots+k(k-1);\ Q(k) = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \text{ por lo que } P(k) = Q(k)$$

Ahora bien para $k+1$ casos, entonces:

$$P(k+1) = 1(1-1)+2(2-1)+3(3-1)+\cdots+k(k-1)+(k+1)(k+1-1);\ Q(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

se quiere demostrar que $P(k+1) = Q(k+1)$

$$
\begin{aligned}
[1(1-1)+2(2-1)+\cdots+k(k-1)]+(k+1)k &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\
Q(k)+(k+1)k &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\
\tfrac{(k-1)k(k+1)}{3}+(k+1)k &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\
(k-1)k(k+1)+3(k+1)k &= k(k+1)(k+2) \\
k(k+1)[(k-1)+3] &= \\
k(k+1)[(k+2)] &= \\
k(k+1)(k+2) &= k(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

$$\therefore P(k+1) = Q(k+1)$$

Q.E.D.

Capítulo 7

Curva ROC

Una curva ROC (Receiver Operating Characteristic, pro sus siglas en inglés o Característica Operativa del Receptor) es una representación gráfica de la sensibilidad frente a la especificidad para un sistema clasificador binario según se varía el umbral de discriminación. Otra interpretación de este gráfico es la representación de la razón o ratio de verdaderos positivos (TP; true positive) frente a la razón o ratio de falsos positivos (FP; false positive) también según se varía el umbral de discriminación (valor a partir del cual decidimos que un caso es un positivo). La curva ROC es también independiente de la distribución de las clases en la población (en diagnóstico, la prevalencia de una enfermedad en la población).

La curva ROC se desarrolló por ingenieros eléctricos para medir la eficacia en la detección de objetos enemigos en campos de batalla mediante pantallas de radar, a partir de lo cual se desarrolla la Teoría de Detección de Señales (TDS). El análisis ROC se aplicó posteriormente en medicina, radiología, psicología y otras áreas durante varias décadas. Sólo recientemente ha encontrado aplicación en áreas como aprendizaje automático (o machine learning en inglés), y minería de datos (data mining en inglés).

7.1. Error tipo I y tipo II

El error de tipo I también denominado error de tipo alfa (α) o falso positivo (FP), es el error que se comete cuando el investigador no acepta la hipótesis nula H_0 siendo esta verdadera en la población. Es equivalente a encontrar un resultado falso positivo, porque el investigador llega a la conclusión de que existe una diferencia entre las hipótesis cuando en realidad no existe. A continuación se presentan algunos errores de tipo I.

- Se considera que el paciente está enfermo, a pesar de que en realidad está sano; hipótesis nula: El paciente está sano.
- Se declara culpable al acusado, a pesar de que en realidad es inocente; hipótesis nula: El acusado es inocente.
- No se permite el ingreso de una persona, a pesar de que tiene derecho a ingresar; hipótesis nula: La persona tiene derecho a ingresar.

El error de tipo II, también llamado error de tipo beta β (β es la probabilidad de que exista este error) o falso negativo (FN; false negative), se comete cuando el investigador no rechaza la hipótesis nula siendo esta falsa en la población. Es equivalente a la probabilidad de un resultado falso negativo, ya que el investigador llega a la conclusión de que ha sido incapaz de encontrar una diferencia que existe en la realidad. Para que un estudio sea aceptado, se requiere que el error β se encuentre entre 5 y 20 %.

7.2. Interpretación de la Curva ROC

Para dibujar una curva ROC sólo son necesarias las razones de Verdaderos Positivos (TR, true positive) y de falsos positivos (FP). La TP mide hasta qué punto un clasificador o prueba diagnóstica es capaz de detectar o clasificar los casos positivos correctamente, de entre todos los casos positivos disponibles durante la prueba. La FP define cuántos resultados positivos son incorrectos de entre todos los casos negativos disponibles durante la prueba.

El mejor método posible de predicción se situaría en un punto en la esquina superior izquierda, o coordenada (0,1) del espacio ROC, representando un 100 % de sensibilidad (ningún falso negativo) y un 100 % también de especificidad (ningún falso positivo). Al punto (0,1) también se le llama una clasificación perfecta. En cambio, mientras más cercanos sean los puntos a la línea media del gráfico, esto se traduce una clasificación aleatoria.

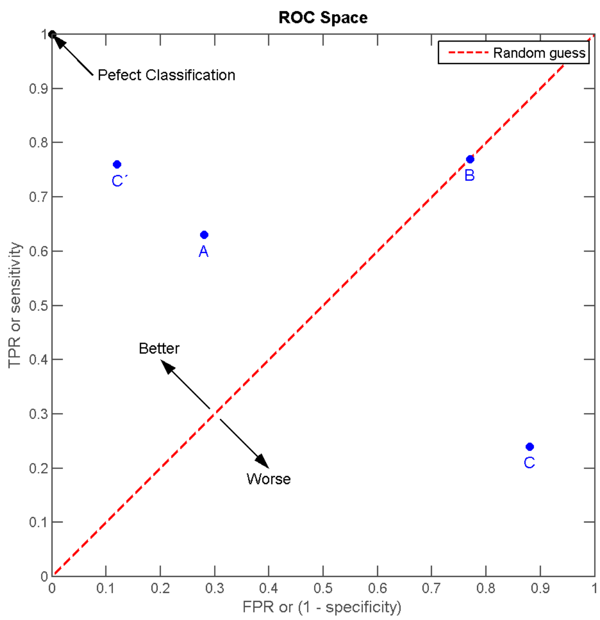


Figura 7.1: Curva ROC

Capítulo 8

Cadenas de Markov

8.1. Proceso Estocástico

En estadística, y específicamente en la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para tratar con magnitudes aleatorias que varían con el tiempo, o más exactamente para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden o no, estar correlacionadas entre ellas. A continuación se mencionan algunos ejemplos de procesos estocásticos.

- Señales de telecomunicación.
- Señales biomédicas (electrocardiograma, encefalograma, etc.)
- Señales sísmicas.
- El número de manchas solares año tras año.
- El índice de la bolsa segundo a segundo.
- La evolución de la población de un municipio año tras año.

Entonces, a una sucesión de observaciones $X_1, X_2, X_3, \ldots$ se denomina proceso estocástico; además si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo.

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, X_2 = s_2, X_1 = s_1) \tag{8.1}$$

8.2. Cadenas de Markov

En la teoría de la probabilidad, se conoce como cadena de Markov o modelo de Markov[7] a un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior. Esta característica de falta de memoria recibe el nombre de propiedad de Markov.

Un proceso estocástico discreto se define si cumple con la propiedad de Markov, es decir, si se conoce la historia del sistema hasta su instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su estado futuro.

Una cadena de Markov es una secuencia $X_1, X_2, X_3, \dots$ de variables aleatorias. El dominio de estas variables es llamado espacio estado; el valor de X_n es el estado del proceso en el tiempo n. Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por sí sola, entonces:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_2 = s_2, X_1 = s_1) = P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n) \qquad (8.2)$$

8.3. Cadena de Markov Finita

Una cadena finita de Markov es una cadena para la que existe solo un número finito k de estados posibles $s_1, ..., s_k$ y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

Es útil definir la probabilidad de transición, como la probabilidad condicionada:

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) \qquad (8.3)$$

Una cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias si para cualquier par de estados s_i y s_j existe una probabilidad de transición p_{ij} tal que:

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = p_{ij} \text{ para } n = 1, 2, \dots \qquad (8.4)$$

8.4. Matriz Estocástica

En matemáticas, una matriz estocástica (también denominada matriz de probabilidad, matriz de transición, matriz de sustitución o matriz de Markov) es una matriz utilizada para describir las transiciones en una cadena de Markov. Ha encontrado uso en la teoría de la probabilidad, en estadística y en álgebra lineal, así como en informática.

La matriz estocástica es una matriz cuadrada cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Para el caso de cadenas de Markov es útil también definir la matriz de transición en un solo paso; Dada una cadena de Markov con k estados posibles $s_1, \dots, s_k$ y probabilidades de transición estacionarias, la matriz de transición es:

$$\text{Si } p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) \Rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \qquad (8.5)$$

Capítulo 9

Análisis de Componentes Principales

En estadística, el análisis de componentes principales (en español ACP, en inglés, PCA) es una técnica utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos.

Técnicamente, el ACP busca la proyección según la cual los datos queden mejor representados en términos de mínimos cuadrados. Esta convierte un conjunto de observaciones de variables posiblemente correlacionadas en un conjunto de valores de variables sin correlación lineal llamadas componentes principales.

Supongamos que existe una muestra con n individuos para cada uno de los cuales se han medido m variables (aleatorias) F_j. El ACP permite encontrar un número de factores subyacentes $p < m$ que explican aproximadamente el valor de las m variables para cada individuo. El hecho de que existan estos p factores subyacentes puede interpretarse como una reducción de la dimensionalidad de los datos: donde antes eran necesarios m valores para caracterizar a cada individuo ahora bastan con p valores. Cada uno de los p encontrados se llama componente principal, de ahí el nombre del método.

Existen dos formas básicas de aplicar el ACP:

1. Método basado en la matriz de correlación, cuando los datos no son dimensionalmente homogéneos o el orden de magnitud de las variables aleatorias medidas no es el mismo.

2. Método basado en la matriz de covarianzas, que se usa cuando los datos son dimensionalmente homogéneos y presentan valores medios similares.

9.1. Método de Correlaciones

El método parte de la matriz de correlaciones, consideremos el valor de cada una de las m variables aleatorias F_j. Para cada uno de los n individuos tomemos el valor de estas variables y escribamos el conjunto de datos en forma de matriz:

$$(F_j^\beta)_{j=1,\cdots,m}^{\beta=1,\cdots,n} \tag{9.1}$$

puede considerarse una muestra aleatoria para la variable F_j. A partir de los $m \times n$ datos correspondientes a las m variables aleatorias, puede construirse la matriz de correlación muestral, que viene definida por:

$$R = [r_{ij}] \in M_{m\times m} \qquad \text{donde} \qquad r_{ij} = \frac{cov(F_i, F_j)}{\sqrt{var(F_i)var(F_j)}} \tag{9.2}$$

9.2. Método basado de Covarianzas

El objetivo es transformar un conjunto de datos X de dimensión $n\times m$ a otro conjunto de datos Y de menor dimensión $n\times l$ con la menor perdida de información útil posible utilizando para ello la matriz de covarianza.

Se parte de un conjunto n de muestras cada una de las cuales tiene m variables que las describen y el objetivo es que, cada una de esas muestras, se describa con solo I variables, donde $l < m$. Además, el número de componentes principales l tiene que ser inferior a la menor de las dimensiones de X.

$$l \leq min(n, m) \tag{9.3}$$

Los datos para el análisis tienen que estar centrados a media 0 (restándoles la media de cada columna) y/o auto– escalados(centrados a media 0 y dividiendo cada columna por su desviación estándar).

Los vectores t_a son conocidos como scores y contienen la información de cómo las muestras están relacionadas unas con otras además, tienen la propiedad de ser ortogonales. Los vectores p_a se llaman loadings e informan de la relación existente entre las variables y tienen la cualidad de ser ortonormales. Al coger menos componentes principales que variables y debido al error de ajuste del modelo con los datos, se produce un error que se acumula en la matriz E.

El PCA se basa en la descomposición en vectores propios de la matriz de covarianza. La cual se calcula con la siguiente ecuación:

$$cov(X) = \frac{X^T X}{n-1} \tag{9.4}$$

$$cov(X)p_a = \lambda_a p_a \tag{9.5}$$

$$\sum_{a=1}^{m} \lambda_a = 1 \tag{9.6}$$

Capítulo 10

Examen De Combinatoria

A continuación se presentan el examen propuesto, el examen resuelto y el examen revisado.

10.1. Examen Propuesto

Combinatoria

Nombre:

Instrucciones: Resuelva cada ejercicio/pregunta según lo que se pide.

1. Sea n y r dos números enteros positivos tal que $r < n$, demuestre que: ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$
2. Demuestre que:
$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$$
3. Demuestre que:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
4. ¿Cuántas señales diferentes, cada una consiste de 8 banderas, se pueden formar de un grupo de 4 banderas indistinguibles rojas, 3 banderas indistinguibles blancas y una bandera azul?
5. Un código de seguridad consiste de dos letras del alfabeto (considere el alfabeto de 26 letras), y 4 números (0-9). Si se sabe que el código empieza por una letra y termina con otra letra, encentre el número total de códigos posibles si a) se sabe que ningún carácter puede ser repetido, b)si se permite la repetición de símbolos.
6. Un estudiante del CIC esta por hacer un examen de probabilidad que consta de 21 preguntas, de las cuales solo tiene que resolver 20 (todas las preguntas tiene el mismo peso en puntaje). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas a resolver?
7. Si en el examen anterior un alumno copió las respuestas de las preguntas (1,3,8,13 y 21). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas que le restan?

8. Un viernes cualquier en un seminario de innovación, después de una sesión aburrida, 8 alumnos deciden intercambiar lugares cada 10 minutos, para hacer más ameno el rato, ¿Cuánto tiempo tomará para que los estudiantes intercambien lugares de todas las formas posibles?

9. Después del seminario tedioso, los 8 jóvenes deciden ir a comer, al llegar a un puesto de tacos concurrido, notan que hay 5 sillas y de inmediato deciden que dos de esas sillas será para las únicas dos mujeres que integran en grupo. ¿De cuantas maneras se pueden sentar los hombres en las sillas restantes si no tomamos en cuenta el orden en que se sienten?

10. En una entrevista de trabajo donde participan cinco candidatos, estos son invitados a sentarse al rededor de una mesa circular, ¿de cuantas maneras se pueden sentar estos candidatos?

11. ¿De cuantas maneras se pueden reordenar las letras de la palabra Eichhörnchen (ardilla en alemán)? considere solo aquellas combinaciones diferentes.

12. Claude Shannon perdió su código de seguridad para ingresas a su correo electrónico, sabe que su pass contiene 8 caracteres, además recuerda los primeros cuatro caracteres, y también que contiene almeno un número en las posiciones desconocidas, pero no recuerda cual, si los caracteres que restan pueden ser un número del 0 al 9 ó una letra de las 26 existes. Determine la cantidad de códigos que se pueden formar a)con repetición caracteres y b) sin repetición de caracteres.

13. Expanda $(x+y)^5$ haciendo uso del teorema del binomio.

14. El laboratorio de neumática cuenta con 5 plc's y 10 actuadores y 15 compuertas, ¿de cuantas maneras un estudiante puede seleccionar 1 plc, 3 actuadores?

15. El profesor de probabilidad despues de aplicar ocho exámenes los arroja sobre escritorio, de los cuales 5 de ellos quedan sobre el escritorio, si el profesor decide exentar a los examines que cayeron sobre el escritorio, ¿de cuantas maneras se seleccionarían los alumnos afortunados?

16. Un conductor infractor hace un trato con un policía, el conductor dice "si tiro una moneda 3 veces y cae cruz(T), cara(H), cara(H), me dejas libre, en caso contrario la multa es doble", el policía acepta gustoso. Muestre el experimento gráficamente por medio de un diagrama de árbol y remarque la ruta que muestre al conductor como vencedor. Considere a) que el orden importa, b) que el orden no importa.

17. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

18. Se quiere construir un equipo de 2 matemáticos y 3 físicos, aparir de una candidaturas de 5 matemáticos y 7 físicos. ¿De cuantas formas podrá hacerse el equipo?

19. Del problema anterior, De el número de formas para hacer el equipo si hay un físico en particular que debe estar en el equipo.

20. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

10.1.1. Respuestas

1. Sea:
   ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ con $r < n$
   y se sabe que:

   $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   entonces

   $${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$$

   ahora, al recorrer los valores de n, desde 1 hasta n, en la serie de multiplicaciones para el desarrollo del factorial, en un momento se tiene que multiplicar r, por lo que la ecuación se puede escribir como sigue:

   $${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$$
   $${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\left(\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\right)$$
   $$\therefore\ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

2. Para $\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$, se sabe que: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

   sustituyendo las variables correspondientes en la ecuación de permutación se tiene que:

   para $\binom{k}{r-1} = \dfrac{k!}{(r-1)!(k-(r-1))!} = \dfrac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} \cdots (1)$
   para $\binom{k}{r} = \dfrac{k!}{r!(k-r)!} = \dfrac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}} \cdots (2)$

   Sumando las ecuaciones 1 y 2

   $$\binom{k+1}{r} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$
   $$\binom{k+1}{r} = \frac{rk!}{r!(k-r+1)!} + \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$
   $$\binom{k+1}{r} = \frac{k!(r+(k-r+1))}{r!(k-r+1)!} = \frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!}$$
   $$\binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

3. Para $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

   sustituyendo las variables correspondientes en la ecuación de permutación se tiene que:

   para $\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!} \cdots (1)$

   para $\binom{n-1}{k} = \dfrac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} = \dfrac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}} \cdots (2)$

   Sumando las ecuaciones 1 y 2

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!} + \frac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{kn!}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!(k+(n-k))}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Sea:
   Número total de elementos: $n = 8$
   Elementos Repetidos:
   $a = 4$; banderas rojas.
   $b = 3$; banderas blancas.
   $c = 1$; banderas azules.

$${}_8P_{4,3,1} = \frac{8!}{4!3!1!} = \frac{40320}{(24)(6)(1)} = 280$$

5. Se tiene dos letras del alfabeto (26 símbolos) y 4 números (10 símbolos).
   a) Usando la regla de la multiplicación y considerando que no se pueden repetir los símbolos, se tiene:

$$R = (26)(25)(10)(9)(8)(7) = 3,276,000$$

   b) Usando la regla de la multiplicación y considerando que se pueden repetir los símbolos, se tiene:

$$R = (26)(26)(10)(10)(10)(10) = 6,760,000$$

6. Se puede resolver de $\binom{21}{20} = \dfrac{21!}{20!(21-20)!} = 21$ maneras.

7. Sea:
$p = 5$ preguntas resueltas.
$n = 21 - 5 = 16$ Preguntas restantes
$r = 20 - 5 = 15$ Preguntas a elegir.

$$\binom{n}{r} = \frac{16!}{15!(16-15)!} = 16$$

ó simplemente, se sabe por el ejercicio anterior que había 21 maneras, si se contestaron 5, entonces $21 - 5 = 16$ maneras retan.

8. Sea: $P = n! = 8! = 40320$, entonces
La actividad tendrá una duración de $40320(10min)(\frac{1hrs}{60min})(\frac{1dia}{24hrs}) = 280$ días.

9. Sea $C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, entonces $C\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(3!)} = 20$

10. Como se indica que es una permutación circular, se sabe que $(n-1)(n-2)\cdots 2{\cdot}1 = (n-1)!$, entonces los candidatos se pueden sentar de $P = (4)! = 24$ maneras diferentes alrededor de una mesa circular.

11. La palabra "Eichhörnchen", cuenta con un total de 12 letras, de hay letras repetidas (e-2,c-2,n-2,h-3), entonces:

$$P = \frac{12!}{2!2!2!3!} = 9,979,200$$

12. El pass consta de 9 caracteres, descartando los que son conocidos se tienen 4, de los cuales se sabe que uno es un número del 0-9, entonces: sumando 26 letras y 10 números, $n = 36$
a) $P = (36)(36)(36)(10) = 36^3(10) = 466,560$
b)$P = (36)(35)(34)(10) = 428,400$

13. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

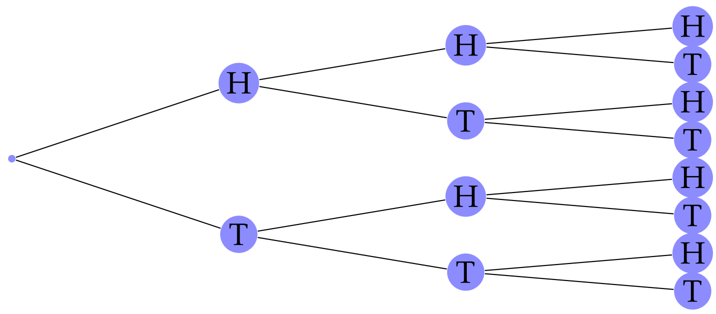
14. En este ejercicio no importa el orden, por lo que se utiliza la ecuación de combinación y el principio multiplicativo

$$\frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} = 600$$

15. Los casos posibles son 8 mientras que los favorables 5 y el orden de los elementos no importa, estocen:

$$C\binom{8}{4} = \frac{8!}{5!(3!)} = 56$$

16. El diagrama de árbol se representa a continuación.



a) Si el orden importa se toma la rama T, H, H

b) Si el orden no importase toman las ramas T, H, H, H, H, T y H, T, H

17. El total de posiciones es 9, hay 4 posiciones pares (que deben ser ocupadas por las 4 mujeres) y 5 posiciones impares (para los 5 hombres). Por lo tanto, pueden colocarse de $P = 5! \cdot 4! = 2880$ maneras.

18. Se puede formar un equipo de $T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350$ formas diferentes

19. Considerando que hay un físico que debe estar en el equipo, entonces hay:
$T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$ formas diferentes.

20. Dado que las estaciones de origen y destino no pueden coincidir, y además, dadas dos estaciones, es importante saber si corresponden al principio o al final del trayecto, hay un total de:
$B = 25 \cdot 24 = 600$ billetes.

10.2. Examen Resuelto

El siguiente examen fue propuesto por: Sandra Lizeth Sánchez González.

1. Cuantas permutaciones distintas pueden formarse con todas las letras de cada una de las siguientes palabras: i)Sufre, ii)examen, iii)abandonado.

   Solución:
   i) Sea $n = 5$, entonces $5!$;
   ii)Sea $n = 6$, con 2 elementos repetidos, entonces $\frac{6!}{2!}$;
   iii)Sea $n = 10$, con $3, 2, 2, 2$ elementos repetidos, entonces $\frac{10!}{3!2!2!2!}$

2. Simplificar $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

   Solución:

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{(n!)}}{\cancel{(n!)}} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

3. i) En cuantas maneras diferentes pueden ser colocadas 7 personas en 7 sillas, ii) cuantas si son colocadas en una mesa circular.

   Solución:
   Sea $n = 7$
   i)Para sillas de forma lineal $7!$
   ii)Para sillas en forma circular $(n-1)! = 6!$

4. Encuentre el valor de n si $P(n,4) = 42P(n,2)$

   Solución:

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1)$$
$$(n-2)(n-3) = 42$$
$$n^2 - 5n - 36$$
$$n_1 = 9 \text{ y } n_2 = -4$$

Como n debe de ser positiva, entonces $n = 9$

5. Demuestra el siguiente teorema:

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$$

   Solución:

$$\binom{k}{r-1} = \frac{k!}{r!(k-(r-1))!} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!}$$

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{rk!}{r!(k-r+1)!} + \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!(r+(k-r+1))}{r!(k-r+1)!} = \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

6. En cuantas maneras puede formarse un comité que consta de 3 hombres y 2 mujeres y estos son escogidos de 7 hombres y 5 mujeres.

Solución:

- 3 hombres de 7 $\therefore \binom{7}{3}$
- 2 mujeres de 5 $\therefore \binom{5}{2}$

Usando el principio multiplicativo, hay:

$$\frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = 350 maneras$$

7. i) Encuentra el numero de las distintas permutaciones que pueden ser formadas de la palabra "AVANZA"
ii) Cuantas de estas permutaciones empiezan y terminan con "A"
iii) Cuantas tienen 3 "A's"juntas
$iiii$) Cuantas empiezan con "A"y terminan con "Z"

Solución:
i)Sea $n = 6$, con 3 elementos repetidos, entonces $\frac{6!}{3!} = 120$
ii)Si empieza y termina con A, entonces $n = 4 \therefore 4! = 24$
iii)Se consideran las A's con un solo elementos, entonces $n = 4 \therefore 4! = 24$
iv)Sea $n = 4$ quitando conociendo el primer y ultimo elementos, además hay 2 elementos repetidos, entonces $\frac{4!}{2!} = 12$

8. Cuantas soluciones distinta tiene la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \text{tal que}$$

$$x_1 \in \{1,2,3,...\}; x_2 \in \{2,3,4,...\}; x_3, x_4 \in \{0,1,2,3,...\}$$

Solución:
se dice:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Nos adecuamos las retricciones para coincidir con la formula general
proponemos:

$$y_1 = x_1 - 1 \text{ entonces} \in \{0,1,2,3,...\}\ y_2 = x_2 - 2 \text{ entonces} \in \{0,1,2,3,...\}$$

El problema queda

$$y_1 + 1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 = 100 \text{ donde } y_1; y_2; x_3; x_4 \in \{0,1,2,3,...\}$$

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 97 \text{ donde } y_1; y_2; x_3; x_4 \in \{0,1,2,3,...\}$$

$$\binom{4+97-1}{3} = \binom{100}{3}$$

9. Cuantos mensajes telegráficos diferentes se pueden enviar utilizando exactamente 4 puntos y 5 rayas

   Solución:
   Sea $n = 9$, además hay 4 y 5 elementos repetidos (puntos y rayas), entonces:

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \text{ mensajes}$$

10. Si en un salón hay 14 estudiantes ¿Cuantos partidos diferentes de voleibol se podrían realizar si los equipos son de 6 jugadoras ?

    Solución:
    Se forman dos equipos, tal que:

    - Primer equipo: $\binom{14}{6}$
    - Segundo equipo: $\binom{8}{6}$

    Como una sexteta puede pertenecer a ambas combinaciones, se divide entre la permutación de los 2 equipos.

$$\frac{\frac{14!}{6!(14-6)!} \cdot \frac{8!}{6!(8-6)!}}{2!} = 42042 \text{ partidos}$$

11. Encuentra el termino que contiene y^6 en la expancion de $(3xy^2 - z^2)^7$

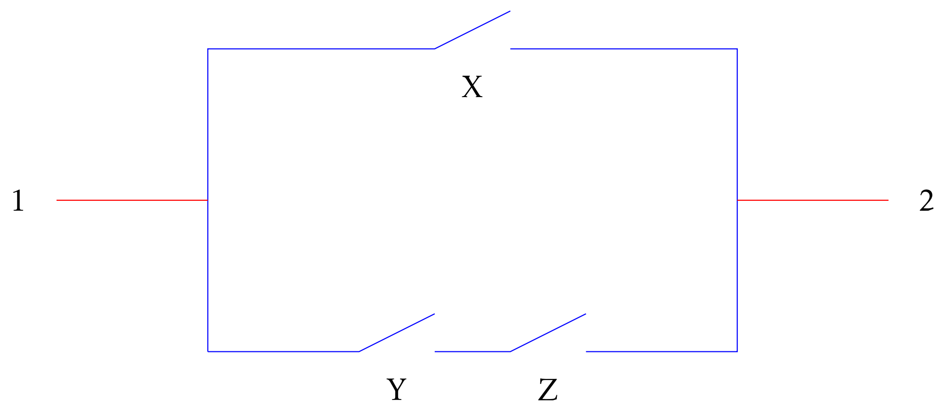
Solución:
Sea sabe que el teorema del binomio es:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

y si queremos el término y^6, entonces $n - r = 3$, si se sabe que $n = 7$, entonces $r = 4$

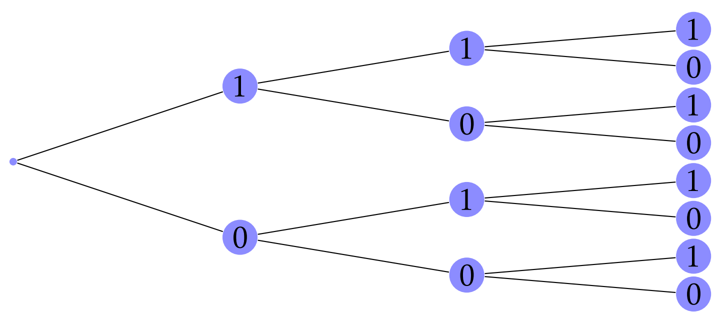
$$\binom{7}{4}(3xy^2)^{7-4}(z^2)^4 = 945x^3y^6z^8$$

12. En el circuito mostrado en la siguiente figura,la corriente fluye de la terminal 1 a la terminal 2, siempre que el interruptor X esté cerrado, o que los interruptores Y y Z, ambos estén cerrados.



El experimento consiste en observar el funcionamiento de un interruptor,que puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1,cerrado, generando el espacio muestral $S_1 = \{0, 1\}$.
Observando el funcionamiento de los tres interruptores, simultáneamente. Construya el diagrama de árbol asociado a tal experimento.

Solución:
El funcionamiento de cada interruptor es independiente del funcionamiento de los otros dos, por lo que cada interruptor puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1, cerrado. Entonces, el diagrama de árbol correspondiente es:



Donde los estados de activación son:

X	Y	Z
1	0	0
1	1	0
1	0	1
1	1	1
0	1	1

13. La selección mexicana está integrada por 25 jugadores en total, de los cuales tres son porteros, siete defensas, diez medios y cinco delanteros. ¿De cuántas maneras puede el entrenador integrar un equipo de once jugadores, si cualquiera de ellos puede ocupar cualquier posición?

    Solución:

$$\binom{25}{11} = \frac{25!}{11!(25-11)!} = 4457400$$

14. Del problema anterior ¿De cuántas maneras puede integrar el entrenador en equipo que tenga un portero,cuatro defensas, cuatro medios y dos delanteros?

    Solución:

    - Para el portero es: $\binom{3}{1}$
    - Para los defensas es: $\binom{7}{4}$
    - Para los medios es: $\binom{10}{4}$
    - Para los delanteros es: $\binom{5}{2}$

$$C\binom{3}{1} * C\binom{7}{4} * C\binom{10}{4} * C\binom{5}{2} = 3 * 840 * 210 * 10 = 5,292,000 \text{ Equipos}$$

15. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si, los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.

    Solución:

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 207360$$

16. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se puede formar con sus vértices?, si se sabe que:

    - No entran todos los elementos.
    - No importa el orden.
    - No se repiten los elementos.

Solución:
Vamos a determinar en primer lugar las rectas que se pueden trazar entre 2 vértices y suponiendo que entre dos vértices ya hay una línea, entonces:

hay $C\binom{5}{2}$, a las que tenemos que restar los lados que determinan 5 rectas que no son diagonales.

$$C\binom{5}{2} - 5 = \frac{5!}{2!3!} - 5 = 5 \text{ Diagonales}$$

$$C\binom{5}{3} - 5 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ Triangulos}$$

17. Demuestre:
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$$

Solución:
expandir : $(1-1)^n$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$(1+(-1))^n = \binom{n}{0} 1^{n-0} (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \ldots + \binom{n}{n} 1^{n-n} (-1)^n = 0$$

$$(1+(-1))^n = \binom{n}{0} \cancel{1^{n-0}} - \binom{n}{1} \cancel{1^{n-1}} + \ldots + \binom{n}{n} 1^{n-n} (-1)^n = 0$$

18. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?

- Sí entran todos los elementos
- Sí importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

Solución:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

son pares :

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81 \text{son pares}$$

19. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?

- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.

- No se repiten los elementos.

Solución:
hay 5 números impares que se pueden ordenar en 5 lugares, esto es:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

Ahora considerando solo aquellos mayores de 70,000, entonces el primer posición será ocupada por el 7 o el 9 (2!), los números restantes serán acomodados en las 4 posiciones faltantes (4!), entonces hay:

$$2! \cdot 4! = 48\text{números mayores a } 70{,}000$$

20. Calcular

$$i)\binom{7}{5,3,6}$$

$$ii)\binom{12}{10,3,5}$$

Solución:

$$i)\frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 6!}$$

i)no se puede ya que excede el número máximo de elementos $(10 + 3 + 5 \neq 12)$

10.3. Examen Revisado

A continuación se presenta el examen revisado, que corresponde al examen realizado por: Francisco Javier Vázquez Vázquez.

1. Dadas las siguientes ecuaciones, explique la relación que tiene asé como el significado de sus términos.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1)$$

$$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} \qquad (2)$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (3)$$

   1)Ecuación para obtener el número de combinaciones de n elementos tomando r elementos diferentes,
   2)Ecuación para obtener el numero de combinaciones de n elementos tomando r elementos repetidos.
   3)Ecuación para obtener el número de permutaciones de n elementos tomando r a la vez.

2. En un restaurante nos dan tres bolas de helado a escoger entre: vainilla, plátano, fresa, chocolate y melocotón. ? ‘Cuántas combinaciones podremos hacer?

   Solución:
   $n = 5$ y $r = 3$ se consideran elementos repetidos por lo tanto se usa la formula de combinaciones repetidas:

$$C = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(3+5-1)!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{3!*4*3*2*1} = 35$$

3. En un catering se quieren repartir los 20 canapés de 4 en 4. ¿Cuántas combinaciones de canapés podremos formar?

   Solución:
   Se consideran combinaciones sin repetir elementos, por lo tanto:

$$n = 20 \text{ y } r = 4$$
$$C\binom{20}{4} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{4!*16*15*14*13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1} = \frac{116289}{24} = 4845$$

4. ¿De cuántas maneras se pueden dar los primeros tres lugares entre 10 personas?

   Solución:
   Se consideran que son permutaciones por lo tanto:

$$n = 10 \text{ y } r = 3$$
$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{7*6*5*4*3*2*1} = 720$$

5. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

   Solución:
   En este problema se usa el principio multiplicativo:
   Dado que las dos primeras personas siempre van a estar juntas, los separamos en dos grupos de 2 y 6 y multiplicamos las permutaciones de cada conjunto:

$$P_2^2 P_6^6 = 2!6! = 2*6*5*4*3*2*1 = 1440$$

6. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. ? 'De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si: Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos?

   Solución:
   Dado que los libros siempre van juntos y son diferentes los separamos en grupos de 3 divididos en 4, 6 y 2 multiplicamos las permutaciones de cada conjunto:

$$P_4^4 P_6^6 P_2^2 = 24(720)(2) = 34560$$

7. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. ? 'De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si: Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos?

   Solución:

$$P_4^4 P_8^8 = (4*3*2*1)(8*7*6*5*4*3*2*1) = 967680$$

8. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse nueve personas alrededor de una mesa redonda?

   Solución:
   Se utilizan permutaciones circulares: $P_c(n-1)!$

$$(9-1)! = 8! = 8*7*6*5*4*3*2*1 = 40320$$

9. ¿De cuántos modos distintos podemos ubicar las cifras del 1 al 7 en una figura que tiene un centro y seis posiciónes alrededor?

   Solución:
   Aplicamos permutaciones circulares multiplicada por el numero de elementos:

$$7 * Pc(6-1)! \implies 7 * 5! = 7 * (5 * 4 * 3 * 2 * 1) = 840$$

10. En una clase de 30 alumnos, 20 juegan fútbol y el resto baloncesto.¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 alumnos de entre los que juegan al fútbol y 2 de entre los que juegan al baloncesto?

    Solución:
    Se considera el producto de ambas combinaciones, la primera tomando 3 elementos de 20 y la segunda tomando 2 de 10, por lo tanto:

$$C\binom{20}{3}C\binom{10}{2} = \frac{20!}{3!17!} \cdot \frac{10!}{2!8!}$$
$$= \frac{20*19*18}{6} \cdot \frac{10*9}{2} = 1140 * 45 = 51300$$

11. ¿Cuántos números de 5 cifras son divisibles por 5?

    Solución:
    Aplicamos el principio multiplicativo, dado que en el primer dígito solo podemos usar de 1 al 9 se consideran 9 elementos, en los siguientes 3 dígitos se consideran los 10 elementos y el último dígito determina la divisbilidad entre 5, es decir solo pueden ser dos elementos del conjunto el 0 o el 5.

$$total = 9 * 10 * 10 * 10 * 2 = 18000$$

12. Se tiene un cierto número de objetos, y se sabe que si se toman 7 objetos distintos se pueden hacen tantas combinaciones como si se tomaran 5. ¿Cuánto son los objetos?

    Solución:

$$\begin{gathered}
\frac{n!}{7!(n-7)!} = \frac{n!}{5!(n-5)!} \\
\frac{1}{n!}\frac{n!}{7!(n-7)!} = \frac{1}{n!}\frac{n!}{5!(n-5)!} \\
\frac{1}{7!(n-7)!} = \frac{1}{5!(n-5)!} \\
5!(n-5)! = 7!(n-7)! \\
(n-5)! = \frac{7!(n-7)!}{5!} \\
(n-5)! = 42(n-7)! \\
42 = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)...}{(n-7)(n-8)(n-9)...} \\
42 = (n-5)(n-6) \\
42 = (n^2 - 11n + 30) \\
12 = n^2 - 11n \\
12 = n(n-11)
\end{gathered}$$

n debe de ser entero, por lo tanto:

$$n = 12$$

13. Dado el siguiente conjunto de letras (A,B,C,D,E), construya el árbol que represente las combinaciones de 5 tomando 3, dónde no se permiten repeticiones y el orden no importa.
No se muestran datos

14. Obtener el número de triángulos que se pueden formar en un polígono de 20 lados, considere que un triangulo esta formado por tres vértices.

Solución:
Se usan combinaciones tomando r elementos, por lo tanto:

$$C(^20_3) = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{3!*17*16*15*14*13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1} = 1140$$

15. ¿Cuántas iniciales de cuatro letras distintas se pueden formar usando los alfabetos del idioma Inglés (26 letras) de forma que la última de las cuatro palabras siempre es una consonante?

Solución:
Se usa el principio multiplicativo, como no se permiten elementos repetidos, el número total de iniciales es:

$$Total = 26 * 25 * 24 * 21 = 327684$$

16. ¿Cuál es el número total de formas en que Juan puede distribuir 9 regalos distintas entre sus 8 novias distintas tales que cada una de ellas obtiene al menos un regalo ?

Solución:
Obtenemos el número de combinaciones de 9 tomando 8 y lo multiplicamos por el total de regalos y por las permutaciones que se pueden formar con los 8 regalos:

$$= C_8^9 * 8 * 8! = \frac{9!}{8!1!} * 8 * 8!$$
$$= (\frac{9*8*7*6*5*4*3*2*1}{8*7*6*5*4*3*2*1}) * 8 * 8! = 9 * 8 * 8!$$

17. ¿Cuántas veces aparece el número 7 entre los números 1 y 1000?

Solución:
Se considera cuando el 7 esta en la prisión 007 una vez, dos en 017 y tres en 777, se calcula el numero total de veces por cada caso:
caso1:

$$1 * 9 * 9 = 81 * 3 = 243$$

caso2:

$$1 * 1 * 9 = 9 * 3 = 27$$

caso3:

$$1 * 1 * 1 = 1 * 3 = 3$$

$$\text{Total} = 243 + (27 * 2) + 3 = 300$$

18. ¿De cuántas formas se pueden sentar 15 personas en dos mesas redondas con capacidades de 8 y 7 personas?

    Solución:
    Se considera el producto de las combinaciones circulares de 8 y 7 que son las capacidades de cada mesa:

    $$P_{c1}P_{c2} = (8-1)!(7-1)! = 7! * 6! = 10240 * 740 = 7577600$$

19. ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos existe la suma de cuyos dígitos son impares?

    Solución:
    Se aplica el principio multiplicativo, en el primer dígito no podemos usar el 0, entonces se toman 9 elementos, para los siguientes 3 dígitos se usan los 10 elementos y en el último dígito determinamos la paridad o no, solo existen 5 números impares dentro de los 10 elementos que son los que se tomarán en cuenta:

    $$Total = 9 * 10 * 10 * 10 * 5 = 45000$$

20. Hay 2 hermanos entre un grupo de 20 personas, ¿De cuántas formas puede ser ordenado el grupo de tal forma que haya exactamente una persona entre los hermanos?

    Solución:
    Se considera el número de permutaciones de los 2 hermanos multiplicado por las permutaciones de 19 elementos, tomando en cuenta que no deben estar juntos, de esta forma:

    $$P_{19} * 2! = (19-1)! * 2! = 18! * 2$$

Capítulo 11

Programas

A continuación se presentan los programas realizados, a lo largo del semestre, estos programas están desarrollados en C, C++ así como implementaciones en ROOT.

1. Cuadro mágico (C++).

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>

int main(void)
{

system("clear");

  int n=0;
  int c=0;
  int sm=0;
  printf("Ingresa el numero n (inpar) para contruir un cuadro de
  nxn casillas: ");
  scanf("%i",&n);
  c=(n*n)/2+1;
  sm=n*c;

        int Matriz[n][n];
        int contador=0;
        int x=0;
        int y=0;
        int vx=0;
        int vy=0;
int i=0;
        int limite=n*n;
        int limitex = n - 1;
        int limitey = n - 1;
        // Inicializar los valores de la matriz a 0

if (n%2==0){printf ("no es numero inpar\n"); goto uno;}
printf("\nLa suma magica es: %i \n",sm);
        for( x=0 ; x<n ; x++)
```

```
        {
           for( y=0 ; y<n ; y++ )
             {
                 Matriz[x][y] = 0;
            }
        }
        x = n / 2;
        y = 0;
        for(contador=1;contador<=limite;contador++)
        {
            Matriz[y][x] = contador;

            vx = x;
            vy = y;
            x++;
            if( x > limitex ) x = 0;
            y--;
            if( y < 0 ) y = limitey;
            if (Matriz[y][x]>0)
            {
                x = vx ;
                y = vy +1 ;
            }
        }
        for( x=0 ; x<n ; x++)
  {
    for(i=0;i<n;i++){printf("______"); }
     printf("\n");
             for( y=0 ; y<n ; y++ )
             {

                  printf(" %3d |",Matriz[x][y]);
             }
     printf("\n");
        }
for(i=0;i<n;i++){printf("______"); }
 uno:
printf ("\nFin del Programa\n");
}
```

2. Generador de números aleatorios (C++)

```
#include <cstdlib>
#include <stdlib.h>
    #include <time.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
using namespace std;


int main(int argc, char** argv) {
```

```
    int num, c,r,n,x,ev;
    int tot;
    double pr,pn;
    srand(time(NULL));

    std::cout<<"Eventos: ";
    cin>>tot;
    std::cout<<std::endl;

    std::cout<<"Iteraciones: ";
    cin>>ev;
    std::cout<<std::endl;

    ofstream fs("Bolas.txt");
    fs << "Rojas,Negras,ProbaR,ProbaN" << endl;

for(int i=0; i<ev;i++){
    r=0;n=0;x=0;c=0;

    do{
        for(c = 1; c <= 1; c++){
            num = 1 + rand() % (11-1);
            //std::cout <<"["<<x<<"]"<< num<< " ";
            if (num<=7) {
            //std::cout<<"Roja";
                r++;
            }
        else {
            //std::cout<<"Negra";
            n++;
        }
    }

    x++;
    }while(x!=tot);

    pr=(double)r/(double)tot;
    pn=(double)n/(double)tot;
    fs<<r<<","<<n<<","<<pr<<","<<pn<<std::endl;

}
    fs.close(); //Cierra el archivo
    std::cout<<"Eveto Terminado"<<endl;
    return 0;

}
```

3. Generador de puntos para triángulo fractal (C++)

```
#include<iostream>
```

```
#include <fstream>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>

using namespace std;

typedef struct{
    double x;
    double y;
}punto;

punto Mitad(punto a, punto b)
{
    punto centro;

    centro.x = (a.x+b.x)/2;
    centro.y = (a.y+b.y)/2;

    return centro;
}

    int main(){
    int N;
    float L;

    cout<<"Generador de puntos para un tri\'angulo equil\'atero fractal de Sierpi
    std::cout<<std::endl;

    cout<<"Ingresa el n\'umero de puntos: ";
    cin>>N;
    std::cout<<std::endl;
    cout<<"Ingresa la longitud de un lado del tri\'angulo equil\'atero: ";
    cin>>L;
    std::cout<<std::endl;

    srand (time(NULL));
    int r;

    ofstream fp;
    fp.open("puntos.txt");

    punto triangulo[3] = {
        {0,0},
        {L,0},
        {L/2,(L*0.866)}
    };
    punto variable = {L/2,(L*0.866)/2};

    for(int i = 0; i < N; i++)
    {
```

```
        r = rand();
        variable = Mitad(triangulo[r], variable);
        fp << variable.x << " " << variable.y << endl;
    }
    fp.close();
    std::cout<<"Se han generado todos los puntos"<<endl;
    std::cout<<std::endl;

    return 0;
}
```

4. Generados de triángulo fractal (ROOT)

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
using namespace std;

void fractal() {
    std::string line_;
    int n,i=0;
    ifstream coor("puntos.dat");
    coor>>n;
    std::cout<<n<<'\n';
       Double_t x[n], y[n];

        while(getline(coor,line_)){
            coor>>x[i];
            coor>>y[i];
            i++;
        }

    //for(int a=0;a<n;a++){
    //cout<<x[a]<<", "<<y[a]<<endl;
    //}

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","triangulo",200,10,700,500);

   c1->SetFillColor(0);
   c1->SetGrid();

   TGraph *gr = new TGraph(n,x,y);
   gr->SetLineColor(0);
```

```
   gr->SetLineWidth(0);
   gr->SetMarkerColor(4);
   gr->SetMarkerStyle(1);
   gr->SetTitle("Tri#acute{a}ngulo Fractal de Sierpinski");
   gr->GetXaxis()->SetTitle("X");
   gr->GetYaxis()->SetTitle("Y");
   gr->Draw();

   // TCanvas::Update() draws the frame, after which one can
   change it
   c1->Update();
   c1->GetFrame()->SetFillColor(0);
   c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
   c1->Modified();
   coor.close(); //Cierra el archivo

}
```

5. Generador de puntos para triangulo fractal (ROOT)

```
#include<iostream>
#include <fstream>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>

using namespace std;

typedef struct{
    double x;
    double y;
}punto;

punto Mitad(punto a, punto b)
{
    punto centro;

    centro.x = (a.x+b.x)/2;
    centro.y = (a.y+b.y)/2;

    return centro;
}

int puntos(){
    int N;
    float L;

    cout<<"Generador de puntos para un triangulo equilatero
    fractal de Sierpinski"<<endl;
    std::cout<<std::endl;
```

```
    cout<<"Ingresa el n\'umero de puntos: ";
    cin>>N;
    std::cout<<std::endl;
    cout<<"Ingresa la longitud de un lado del triangulo equilatero: ";
    cin>>L;
    std::cout<<std::endl;

    srand (time(NULL));
    int r;

    ofstream fp;
    fp.open("puntos.dat");
    fp <<N<< endl;


    punto triangulo[3] = {
        {0,0},
        {L,0},
        {L/2,(L*0.866)}
    };

    punto variable = {L/2,(L*0.866)/2};

    for(int i = 0; i < N; i++)
    {
        r = rand()%3;

        variable = Mitad(triangulo[r], variable);

        fp << variable.x << " " << variable.y << endl;
    }

    fp.close();
    std::cout<<"Se han generado todos los puntos"<<endl;
    std::cout<<std::endl;

    return 0;
}
```

6. Generador de polígonos regulares (ROOT)

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
```

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
using namespace std;

void poli() {

    int n;
    double cx,cy,nx,ny,can,anp,r,an=270;
    cout<<"N\'umero de lados: ";
    cin>>n;
    anp=360/n;
    n=n+1;
    cout<<endl;
    Double_t x[n], y[n];
    cout<<"Centro de la figura: "<<endl;
    cout<<"cx: ";
    cin>>cx;
    cout<<"cy: ";
    cin>>cy;
    cout<<"Radio: ";
    cin>>r;

    ny=cy;
    can=270+(anp/2);
    x[0]=cx+r*cos(can*TMath::Pi()/180);
    cout<<x[0]<<endl;
    y[0]=ny+r*sin(can*TMath::Pi()/180);
    cout<<y[0]<<endl;

   an=can+anp;

    for(int i=1;i<n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=anp;
    }
    x[n]=x[0];
    y[n]=y[0];

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Pol#acuteigono Regular",700,700);

   c1->SetFillColor(0);
   c1->SetGrid();

   TGraph *gr = new TGraph(n,x,y);
   gr->SetFillColor(38);
   gr->SetLineColor(4);
   gr->SetLineWidth(4);
   gr->SetTitle("Pol#acute{i}gono Regular");
```

```
    TEllipse *el = new TEllipse(cx,cy,r/100,r/100,0,360,0);
    el->SetFillColor(2);
    gr->GetListOfFunctions()->Add(el);
    gr->Draw();

    c1->GetFrame()->SetFillColor(0);
    c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
    c1->Modified();
}
```

7. Generador de polígonos

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <unistd.h>
using namespace std;

void poligon() {

    int n;
    double cx,cy,r,anp,anr,an=0;
    n=4;
    n=n+1;
    cout<<endl;
    Double_t x[n], y[n];

    cx=0.5;
    cy=0.45;
    r=0.15;
    an=45;

    for(int i=0;i<n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=360/(n-1);
    }
    x[n-1]=x[0];
    y[n-1]=y[0];

   for(int i=0;i<n;i++){
```

```
        cout<<i<<". "<<x[i]<<", "<<y[i]<<endl;
usleep(1000000);
    }

 TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Pol#acuteigono Regular",700,700);

   c1->SetFillColor(0);
   c1->SetGrid();


   TPolyLine *pline = new TPolyLine(n,x,y);
   pline->SetFillColor(38);
   pline->SetLineColor(2);
   pline->SetLineWidth(4);
   pline->Draw("f");
   pline->Draw();

   TPaveText *pt = new
   TPaveText(0.1439828,0.8783383,0.8560172,0.9836795,"br");
   pt->SetTextSize(0.0578635);
   TText *AText = pt->AddText("Pol#acute{i}gono Regular");
   pt->Draw();

   c1->GetFrame()->SetFillColor(0);
   c1->GetFrame()->SetBorderSize(12);
   c1->Modified();
}
```

8. Rotación de Polígono(ROOT)

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
using namespace std;

void rotp() {

    int n=5,c;
    double ex,ey,cx=0.5,cy=0.5,anp=90,r=.3,an=45,ang=45;
    Double_t x[n], y[n];
```

```
   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Pol#acuteigono Regular",700,700);

   TGraph *gr = new TGraph(n);
   gr->SetFillColor(38);
   gr->SetLineColor(c);
   gr->SetLineWidth(4);
   TEllipse *el = new TEllipse();
   el->SetFillColor(2);

   TPaveText *pt = new
   TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
   TText *AText = pt->AddText("Rotaci#acute{o}n de Pol#acute{i}gono");

while(1){
    c1->Clear();
    c1->SetFillColor(35);
    c1->SetBorderSize(12);
    for(int i=0;i<=n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=anp;
    }
    ex=cx+r*cos((ang*TMath::Pi())/180);
    ey=cy+r*sin((ang*TMath::Pi())/180);
    if (c==35) c=1;
    if(sin(ang*TMath::Pi()/180)==1) {c++; gr->SetLineColor(c);}


    pt->Draw();
    gr->DrawGraph(n,x,y);
    el->DrawEllipse(ex,ey,0.03,0.03,0,360,0);
    an-=0.5;
    ang-=0.5;
    c1->Update();

    gSystem->ProcessEvents();
    gSystem->Sleep(5);

}

}
```

9. Generador de rutas (ROOT)

```
#include "TCanvas.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
```

```
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
using namespace std;

void ruta() {

int n=5,con=0,c=1;
double ex,ey,cx=0.1,cy=0.1,r,ang=0,ang2=0,r2,avt,avr;
Double_t x[n], y[n];

r=0.1;
r2=0.25;
avt=.3;
avr=1;

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Rot y Tras",700,700);
TEllipse *el = new TEllipse();
el->SetFillColor(3);

TPaveText *pt = new TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
TText *AText = pt->AddText("Ruta");
pt->Draw();
c1->SetFillColor(38);
c1->SetBorderSize(12);

while(1){
cx=0.5+r2*cos((ang2*TMath::Pi())/180);
cy=0.5+r2*sin((ang2*TMath::Pi())/180);
ex=cx+r*cos((ang*TMath::Pi())/180);
ey=cy+r*sin((ang*TMath::Pi())/180);
ang2+=avt;
ang+=avr;

el->DrawEllipse(ex,ey,0.003,0.003,0,360,0);
c1->Update();
}

}
```

10. Traslación de polígono

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
```

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
using namespace std;

void trasp() {

    int n=5,con=0,c=1;
    double ex,ey,px=0,py=0,cx=0.1,cy=0.1,anp=90,r=.05,an=45,ang=45;
    bool r1=true,r2=false,r3=false,r4=false;
    Double_t x[n], y[n];

   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Rot y Tras",700,700);

   TGraph *gr = new TGraph(n);
   gr->SetFillColor(38);
   gr->SetLineColor(4);
   gr->SetLineWidth(4);
   TEllipse *el = new TEllipse();
   el->SetFillColor(2);

   TPaveText *pt = new
   TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
   TText *AText = pt->AddText("Traslaci#acute{o}n de
   Pol#acute{i}gono");

while(1){
    c1->Clear();
    c1->SetFillColor(35);
    c1->SetBorderSize(12);

   for(int i=0;i<=n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=anp;
    }
    ex=cx+r*cos((ang*TMath::Pi())/180);
    ey=cy+r*sin((ang*TMath::Pi())/180);
    if(r1){cx+=0.001;cy+=0.001;
            if(con==720){con=0;r1=false;r2=true;}
            con+=1;
    }
    if(r2){cx-=0.001;
            if(con==720){con=0;r2=false;r3=true;}
            con+=1;
    }
    if(r3){cx+=0.001;cy-=0.001;
            if(con==720){con=0;r3=false;r4=true;}
            con+=1;
```

```
    }
    if(r4){cx-=0.001;
            if(con==720){con=0;r4=false;r1=true;}
            con+=1;
    }
    an+=1;
    ang+=1;
    if (c==35) c=1;
    if(sin(ang*TMath::Pi()/180)==1) {c++; gr->SetLineColor(c);}

    pt->Draw();
    gr->DrawGraph(n,x,y);
    el->DrawEllipse(ex,ey,0.01,0.01,0,360,0);
    c1->Update();

    gSystem->ProcessEvents();
    gSystem->Sleep(10);

}
}
```

11. Traslación de polígono

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
using namespace std;

void trasp2() {

    int n=5,con=0,c=1;
    double ex,ey,px=0,py=0,cx=0.1,cy=0.1,anp=90,r=.
    05,an=45,ang=45,ang2=0,r2,avt,avr;
    Double_t x[n], y[n];

    cout<<"Ingresa el radio de desplazamiento (0<r<.5):";
    cin>>r2;
    cout<<"Ingresa el avance de traslacion (grados):";
    cin>>avt;
    cout<<"Ingresa el avance rotacion (grados):";
    cin>>avr;
```

```
   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Rot y Tras",700,700);

   TGraph *gr = new TGraph(n);
   gr->SetFillColor(38);
   gr->SetLineColor(c);
   gr->SetLineWidth(4);
   TEllipse *el = new TEllipse();
   el->SetFillColor(2);
   TEllipse *elc = new TEllipse();
   elc->SetFillColor(c);

   TPaveText *pt = new
   TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
   TText *AText = pt->AddText("Traslaci#acute{o}n de
   Pol#acute{i}gono");

while(1){
    c1->Clear();
    c1->SetFillColor(35);
    c1->SetBorderSize(12);

    cx=0.5+r2*cos((ang2*TMath::Pi())/180);
    cy=0.5+r2*sin((ang2*TMath::Pi())/180);

   for(int i=0;i<=n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=anp;
    }
    ex=cx+r*cos((ang*TMath::Pi())/180);
    ey=cy+r*sin((ang*TMath::Pi())/180);

    ang2+=avt;

    an-=avr;
    ang-=avr;
    if (c==35) c=1;
    if(sin(ang*TMath::Pi()/180)==1) {c++; gr->SetLineColor(c);elc-
    >SetFillColor(c);}

    pt->Draw();
    gr->DrawGraph(n,x,y);
    el->DrawEllipse(ex,ey,0.01,0.01,0,360,0);
    elc->DrawEllipse(cx,cy,0.003,0.003,0,360,0);

    c1->Update();

    gSystem->ProcessEvents();
    gSystem->Sleep(10);
```

```
}
}
```

12. Puntos de rotación

```
#include "TSPlot.h"
#include "TTree.h"
#include "TH1.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TFile.h"
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
#include <fstream>

using namespace std;

void trasp3() {
    ofstream fp;
    fp.open("pnt_ruta.dat");
    int n=5,con=0,c=1,arut=0;
    double ex,ey,px=0,py=0,cx=0.1,cy=0.1,anp=90,r=.
    05,an=45,ang=45,ang2=0,r2,avt,avr,anc=0;
    Double_t x[n], y[n];

    cout<<"Ingresa el radio de desplazamiento (0<r<.5):";
    cin>>r2;
    cout<<"Ingresa el avance de traslacion (grados):";
    cin>>avt;
    cout<<"Ingresa el avance rotacion (grados):";
    cin>>avr;
    cout<<"Ingresa el total de la ruta:";
    cin>>arut;


   TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Rot y Tras",700,700);

   TGraph *gr = new TGraph(n);
   gr->SetFillColor(38);
   gr->SetLineColor(c);
   gr->SetLineWidth(4);
   TEllipse *el = new TEllipse();
   el->SetFillColor(2);
   TEllipse *elc = new TEllipse();
   elc->SetFillColor(c);
```

```
   TPaveText *pt = new
   TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
   TText *AText = pt->AddText("Traslaci#acute{o}n de
   Pol#acute{i}gono");

while(1){
    c1->Clear();
    c1->SetFillColor(35);
    c1->SetBorderSize(12);

    cx=0.5+r2*cos((ang2*TMath::Pi())/180);
    cy=0.5+r2*sin((ang2*TMath::Pi())/180);

   for(int i=0;i<=n;i++){
        x[i]=cx+r*cos((an*TMath::Pi())/180);
        y[i]=cy+r*sin((an*TMath::Pi())/180);
        an+=anp;
    }
    ex=cx+r*cos((ang*TMath::Pi())/180);
    ey=cy+r*sin((ang*TMath::Pi())/180);
    fp << ex << " " << ey << endl;

    ang2+=avt;

    an+=avr;
    ang+=avr;
    anc+=avt;
    if (c==35) c=1;
    if(sin(ang*TMath::Pi()/180)==1) {c++; gr->SetLineColor(c);elc-
    >SetFillColor(c);}

    pt->Draw();
    gr->DrawGraph(n,x,y);
    el->DrawEllipse(ex,ey,0.01,0.01,0,360,0);
    elc->DrawEllipse(cx,cy,0.003,0.003,0,360,0);
    if(anc>arut)break;

    c1->Update();

    gSystem->ProcessEvents();
    gSystem->Sleep(10);
}
fp.close();
cout<<endl;
cout<<"Se ha generado la ruta que sigui\'o el punto rojo del
poligono, presionar ruta en menu"<<endl;
}
```

13. Pseudo juego de la vida

```
#include "TCanvas.h"
```

```
#include "TPaveLabel.h"
#include "TPad.h"
#include "TPaveText.h"
#include "Riostream.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include "TEllipse.h"
#include <time.h>
using namespace std;

void juego() {
int i=0,c=0,num,a;
float x1,y1,x2,y2;
srand(time(NULL));

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Rot y Tras",700,700);
//TPaveText *pt = new
TPaveText(0.254298,0.8872404,0.745702,0.9747774,"br");
//TText *AText = pt->AddText("Juego");
//pt->Draw();
c1->SetFillColor(38);
c1->SetBorderSize(12);

TBox *box1 = new TBox(0.02,0.02,0.04,0.04);
TBox *box2 = new TBox(0.04,0.02,0.06,0.04);
TBox *box3 = new TBox(0.06,0.02,0.08,0.04);
TBox *box4 = new TBox(0.02,0.04,0.04,0.06);
TBox *box5 = new TBox(0.04,0.04,0.06,0.06);
TBox *box6 = new TBox(0.06,0.04,0.08,0.06);
TBox *box7 = new TBox(0.02,0.06,0.04,0.08);
TBox *box8 = new TBox(0.04,0.06,0.06,0.08);
TBox *box9 = new TBox(0.06,0.06,0.08,0.08);

a=0;
num = rand() % (2);
box1->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box2->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box3->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box4->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box5->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box6->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box7->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
```

```
box8->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);
box9->SetFillColor(num);
num = rand() % (2);

box1->Draw();
box2->Draw();
box3->Draw();
box4->Draw();
box5->Draw();
box6->Draw();
box7->Draw();
box8->Draw();
box9->Draw();
    gSystem->Sleep(1000);

///*
x1=0.08;
y1=0.02;
i++;
while(c<255){
x2=x1+0.02;
y2=y1+0.02;
TBox *cbox1;
cbox1 = new TBox(x1,y1,x2,y2); cbox1->Draw();
cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+0.02,y1,x2+0.02,y2); cbox1-
>Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+0.04,y1,x2+0.04,y2); cbox1-
>Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1,y1+.02,x2,y2+.02); cbox1-
>Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+.02,y1+.02,x2+.02,y2+.02);
cbox1->Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+0.04,y1+.02,x2+0.04,y2+.02);
cbox1->Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1,y1+.04,x2,y2+.04); cbox1-
>Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+.02,y1+.04,x2+.02,y2+.04);
cbox1->Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
cbox1 = new TBox(x1+0.04,y1+.04,x2+0.04,y2+.04);
cbox1->Draw(); cbox1->SetFillColor(17);
x1+=0.06;
c++;
i++;
if(i==16){x1=0.02;y1+=0.06;i=0;}
}
}
```

Capítulo 12

Anexos

Señal WOW

Se le denomina señal WOW, a una captación de radio que se cree es el único mensaje recibido que pudo ser enviado por una inteligencia extraterrestre, esto ocurrió el 15 de agosto de 1977 a las 23:16, donde el investigador Jerry Ehman se percato de la señal recibida por el radio-telescopio, Big Ear de la Universidad Estatal de Ohio.
La señal de radio duró 72 segundos y parecía proceder de un grupo celeste llamado Chi Sagitarii, a una distancia de 220 años luz de la tierra; en realidad esta señal no fue captada en forma de sonido, esta señal fue sensada y registrada por una computadora. La señal fue conocida como Wow! debido a la anotación que Jerry Ehman hizo en el papel continuo, denotando su sorpresa y emoción. La secuencia de dicha señal fue: 6EQUJ5.

La computadora del radio-observatorio, una IBM 1130 equipada con 1 MB de disco duro y 32 KB de memoria RAM, se encargaba de convertir los datos recibidos directamente por el radio-telescopio a una serie de caracteres alfanuméricos. El software, diseñado por Bob Dixon y Jerry Ehman, era bastante sofisticado, ya que hacía continuos chequeos del funcionamiento del equipo y era capaz de ejecutar varios algoritmos de búsqueda simultáneamente, incluidos unos algoritmos de búsqueda capaces de aislar señales pulsantes o continuas.

Cada fila representaba los resultados de los datos recogidos durante aproximadamente doce segundos de búsqueda. Eran necesarios diez segundos para obtener las intensidades de todos los canales, y aproximadamente dos segundos para que la computadora procesara los datos recibidos. Las columnas representaban las intensidades para los cincuenta canales en rastreo, de 10kHz de ancho de banda cada uno, con el canal n. 1 situado en el extremo izquierdo y el canal n. 50 situado en el extremo derecho.

Ancho de Banda

El ancho de banda de la señal es menor a 10 kHz. Para la frecuencia se han dado dos valores diferentes: 1420, 356 MHz y 1420, 456 MHz; en cualquier caso, esas frecuencias están próximas a la frecuencia de transición hiperfina del hidrógeno. Esa frecuencia forma parte del espectro de radio donde está prohibida la emisión por tratados internacionales.

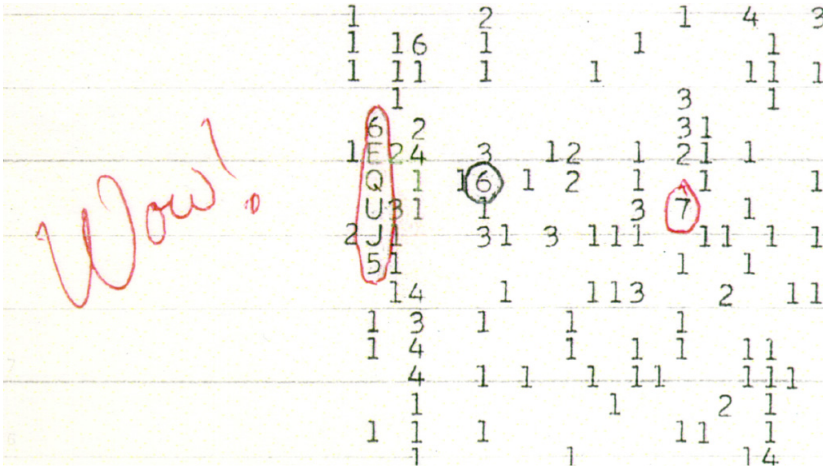


Figura 12.1: Señal Wow!

Efecto Peltier

El efecto termoeléctrico es la conversión directa de la diferencia de temperatura a voltaje eléctrico y viceversa. Un dispositivo termoeléctrico crea un voltaje cuando hay una diferencia de temperatura a cada lado. Por el contrario cuando se le aplica un voltaje, crea una diferencia de temperatura (conocido como efecto Peltier). A escala atómica (en especial, portadores de carga), un gradiente de temperatura aplicado provoca portadores cargados en el material, si hay electrones o huecos, para difundir desde el lado caliente al lado frío, similar a un gas clásico que se expande cuando se calienta; por consiguiente, la corriente es inducida termalmente.
Este efecto se puede usar para generar electricidad, medir temperatura, enfriar objetos, o calentarlos o cocinarlos. Porque la dirección de calentamiento o enfriamiento es determinada por el signo del voltaje aplicado, dispositivos termoeléctricos producen controladores de temperatura muy convenientes.
Tradicionalmente, el término efecto termoeléctrico o termoelectricidad abarca tres efectos identificados separadamente, el efecto Seebeck, el efecto Peltier, y el efecto Thomson.

Efecto Seebeck

Seebeck descubrió que la aguja de una brújula se desviaba cuando se formaba un circuito cerrado de dos metales unidos en dos lugares con una diferencia de temperatura entre las uniones. Esto se debe a que los metales responden diferentemente a la diferencia de temperatura, creando una corriente de circuito, que produce un campo magnético. Seebeck, aun así, en ese momento no reconoció allí una corriente eléctrica implicada, así que llamó al fenómeno el efecto termomagnético, pensando que los dos metales quedaban magnéticamente polarizados por el gradiente de temperatura. El físico Danés Hans Christian Ørsted jugó un papel vital en la explicación y concepción del término "termoelectricidad".
El efecto es que en un voltaje, la FEM (fuerza electro motriz) termoeléctrica, se crea en presencia de una diferencia de temperatura entre dos metales o semiconductores diferentes. Esto ocasiona una corriente continua en los conductores si ellos forman un circuito completo. El voltaje creado es del orden de los microvolts por kelvin de diferencia. Una de esas combinaciones, cobre-constantán, tiene un coeficiente Seebeck de 41 microvolts por kelvin a temperatura ambiente.

Telómeros

Hace referencia a los extremos de los cromosomas; son regiones de ADN no codificante, altamente repetitivas, cuya función principal es la estabilidad estructural de los cromosomas en las células eucariotas, la división celular y el tiempo de vida de las estirpes celulares. Además están involucradas en enfermedades tan importantes como el cáncer.
A los pasos de los años de han postulado una seria de teorías para reducir el envejecimiento de las células modificando la estructura celular de los telómeros, esperando, por tanto aumentar la longevidad de la vida humana; las pregunta clave, ¿es posible aumentar la longevidad con ayuda de los telómeros?, de ser posible, seria un avance significativo para reducir también el deterioro mental, pero como afectaría en la sociedades el incremento exponencial de las personan adultas, pueden contribuir a la economía de la sociedad o sería un carga para las nuevas generaciones. Una discusión controvertida, que no compete ser analizada a fondo en este momento[1]
Los telómeros son estructuras que constituyen las extremidades de los cromosomas y cuya longitud es capaz de predice la capacidad replicativa de las células. Por otra parte, la telomerasa, que es la enzima que sintetiza el ADN telomérico y controla la síntesis de los telómeros.
Los métodos empleados para cuantificar esta enzima son reproducibles, seguros y semicuantitativos, y han permitido mostrar que la telomerasa es sobre-expresada en muchos tipos de tumores malignos, no así en los tejidos somáticos normales. El estudio de la regulación de la longitud de los telómeros y de la actividad de la telomerasa ha permitido comparar dos fenómenos biológicos diferentes y fundamentales, como lo son la senescencia y el cáncer, por lo que el telómero y la telomerasa podrían constituir un blanco atractivo para el desarrollo de nuevos agentes antitumorales.

Determinismo De La Muerte

Existe una teoría conocida como *teoría del ritmo de vida*, la cual plantea que el desgaste de los órganos y tejidos es consecuencia de su uso prolongado. Ahora bien si tomamos en cuenta la estructura homérica, se puede predecir el desgaste de los órganos y poder estimar una fecha de vida media de una persona.

Maquina De Enigma

Era una máquina que se utilizaba para cifrar y descifrar mensajes; fue amplia mente utilizada en segunda guerra mundial por el bloque conformado por Alemania, Italia y Japón, pero principal mente por las fuerzas alemanas.

El corazón de la máquina Enigma era mecánico y constaba de varios rotores conectados entre sí. Cada rotor es un disco circular plano con 26 contactos eléctricos en cada cara, uno por cada letra del alfabeto. Cada contacto de una cara está conectado o cableado a un contacto diferente de la cara contraria. Por ejemplo, en un rotor en particular, el contacto número 1 de una cara puede estar conectado con el contacto número 14 en la otra cara y el contacto número 5 de una cara con el número 22 de la otra. Cada uno de los cinco rotores proporcionados con la máquina Enigma estaba cableado de una forma diferente y los rotores

[1] Un artículo muy interesante sobre teorías de envejecimiento puede hayarce en: Pardo Andreu, G. (2003). Consideraciones generales sobre algunas de las teorías del envejecimiento. Revista Cubana de Investigaciones Biomédicas, 22(1), 0-0.

utilizados por el ejército alemán poseían un cableado distinto al de los modelos comerciales.

Al principio de cada mes, se daba a los operadores de la Enigma un nuevo libro que contenía las configuraciones iniciales para la máquina. Por ejemplo, en un día particular las configuraciones podrían ser poner el rotor n. 1 en la hendidura 7, el n. 2 en la 4 y el n. 3 en la 6. Están entonces rotados, para que la hendidura 1 esté en la letra X, la hendidura 2 en la letra J y la hendidura 3 en la A. Como los rotores podían permutarse en la máquina, con tres rotores en tres hendiduras se obtienen otras 3 x 2 x 1 = 6 combinaciones para considerar, para dar un total de 105.456 posibles alfabetos.

Rompiendo Enigma

Marian Rejewski, hizo uno de los mayores descubrimientos significativos en la historia del criptoanálisis usando técnicas fundamentales de matemáticas y estadística al encontrar una manera de combinarlas. Rejewski notó un patrón que probó ser vital; puesto que el código del mensaje se repitió dos veces al principio del mensaje, podría suponerse el cableado de un rotor no por las letras, sino por la manera que estas cambiaban.

Puentes de Königsberg

El problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado.

> Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.

Teorema de los Cuatro Colores

Es un teorema sobre la coloración de grafos que establece lo siguiente:

> Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color

Teorema de Desargues

En geometría proyectiva, el teorema de Desargues, llamado así en honor al geómetra y arquitecto francés Gérard Desargues (1591-1661) que lo enunció en 1638, expone:

Teorema 12.0.1. *En el plano proyectivo, dos triángulos son proyectivos desde un punto si y solo si son proyectivos desde una recta.*

Modelos Ising

Es uno de los pocos modelos de partículas interactuantes para el cual se conoce su solución exacta e indudablemente el más simple de todos ellos, este modelo fue propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos y las transiciones de fases. Constituye la base de diversos métodos modernos de cálculo en la física estadística de los fenómenos críticos. También sirve para modelar diversas áreas de la biología.

$$H = \sum_{<i,j>} -J\sigma_i\sigma_j \tag{12.1}$$

La función de partición esta definida como:

$$Z = \sum_{\sigma_i} \prod_{<i,j>} e^{-J\sigma_i\sigma_j/K_B T} \tag{12.2}$$

Para el caso específico de una dimensión se tiene que:

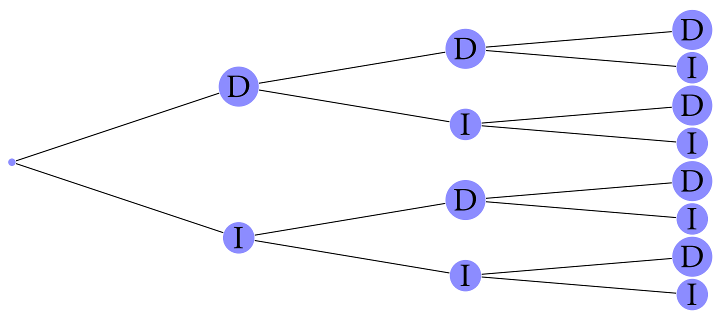
$$H = -J\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\sigma_{j+1} - B\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{12.3}$$

Donde:

- H es el hamiltoniano del sistema.
- $\sum_{<i,j>}$ denota una suma sobre partículas vecinas entre sí.
- J es el factor de escala entre interacción entre espines y energía.
- σ_i es el espín de la partícula i-ésima, que puede tomar sólo dos valores, +1 y -1.

Explicación Ecuaciones

$pp\cdots pqq\cdots q = p^{n_1}q^{n_2}$: Esta ecuación representa el espacio de probabilidades de dar un paso a derecha o a la izquierda, si consideramos su representación en un diagrama de árbol:



Donde D representa un paso a la derecha e I representa un paso a la izquierda, para este caso en particular tenemos que se dan 3 pasos, si consideramos que la probabilidad no esta pesada, esto es que en cada nivel tenemos la mima probabilidad de ocurrencia de cierto evento, por tanto la probabilidad de que ocurra un evento esta dado por la regla de la multiplicación, entonces para este caso la probabilidad de que ocurra cualquiera de los eventos es $P(D) \cdot P(I) \cdot P(D) = P(D)^2 \cdot P(I)$, ahora bien extrapolando este pensamiento tenemos que la probabilidad de que ocurra cierto evento dado n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda esta dado por: $P(D)^{n_1} P(I)^{n_2}$.

$\frac{N!}{n_1!n_2!}$: Para esta ecuación, se quiere determinar la cantidad de posiciones diferentes a las que se puede llegar dado n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda, se sabe que $N = n_1 + n_2$, entonces si pensamos en un caso particular donde se dan 3 pasos, se tiene que es primer paso es una de dos opciones al igual que el segundo y el tercero, entonces hay $2 \times 2 \times 2$ formas de dar los pasos, esto de forma general, ahora bien, nosotros solo queremos determinar la posición final a la que podemos llegar después de dar n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda, por lo que hay N formas de dar los pasos y eliminando posiciones finales repetidas de (n_1 y n_2) del principio de la multiplicación, entonces se puede llegar al esquema planteado al principio. Ahora bien si queremos determinara la probabilidad de dar n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda donde tenemos $\frac{N!}{n_1!n_2!}$ formas de llegar a cierta posición, entonces vasta con multiplicar la probabilidad de dar paso a la derecha y/o izquierda por la cantidad de formas de llegar a una posición, por tanto $W_N = \frac{N!}{n_1!n_2!} \cdot p^{n_1} q^{n_2}$.

La razón de cambio de un sistema de un punto dado respecto a su media aritmética en una distribución esta dado como $\triangle u = u - \mathbb{E}(u)$, ahora bien si sacamos que remos obtener el valor esperado de la razón de cambio tenemos: $\mathbb{E}(\triangle u) = \mathbb{E}(u - \mathbb{E}(u))$ usando las propiedades de la linearidad se tiene que: $\mathbb{E}(\triangle u) = \mathbb{E}u - \mathbb{E}(\mathbb{E}(u))$, un caso particular de esta construcción $\mathbb{E}(\triangle u) = 0 \iff u = \mathbb{E}(u)$. Para obtener la varianza de la razón de cambio basta con elevar al cuadrado nuestro valor esperado para obtener el momento central de segundo orden, entonces $\mathbb{E}(\triangle u)^2 = \mathbb{E}(u - \mathbb{E}(u))^2$. Por definición el valor esperado esta dado como $\mathbb{E}(x) = \sum_i^\infty x_i p_i$, aplicando a nuestro momento centrada de segundo orden se tiene que: $\mathbb{E}(\triangle u)^2 = \sum_i^\infty p_i (u - \mathbb{E}(u))^2$.

Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Es decir, por mucho que nos acerquemos o alejemos del objeto, observaremos siempre la misma estructura. De hecho, somos incapaces de afirmar a qué distancia nos encontramos del objecto, ya que siempre lo veremos de la misma forma. El término fue propuesto por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 y deriva del latín fractus, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.

Generación del Triángulo de Sierpinski

Para la generación de un triángulo de Sierpinski equilátero de se realizo un algoritmo que obtiene coordenadas x, y aleatorias dentro de un espacio de trabajo (área del triangulo) estos puntos son obtenidos de trazar una recta perpendicular que corta por la mitad uno de los lados del triángulo, el lado seleccionado es elegido al azar promedio de un generador de números aleatorios, los puntos son almacenados y después son graficados en un espacio de 1×1 unidades virtuales, es importante destacar que a un mayor número de puntos generados, mayor espacio se cubrirá y las formas obtenidas serán cada vez más definidas. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

Para un triángulo de 0.2886 unidades y con 1,000, 10,000 y 1,000,000 de puntos graficados, se obtienen los siguiente fractales.

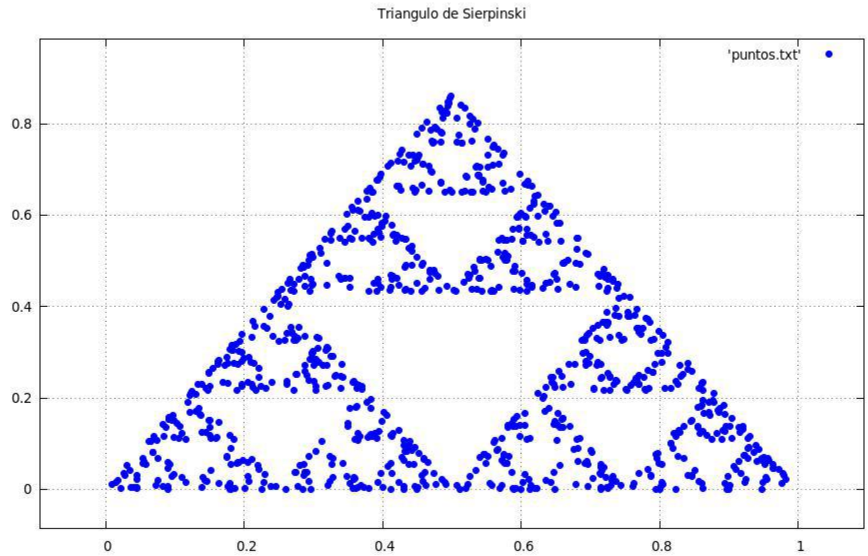


Figura 12.2: Triangulo fractal para 1,000 puntos.

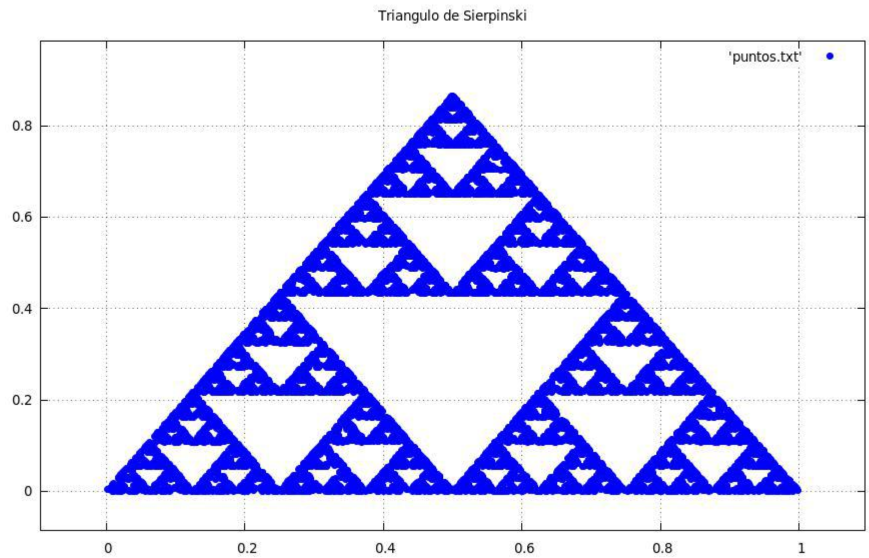


Figura 12.3: Triangulo fractal para 10,000 puntos.

Al ser altamente densa la cantidad de puntos para un triángulo de 1,000,000 de puntos, se puede distinguir la estructura fractal para un triángulo de $18{,}47\mu$ de unidad.

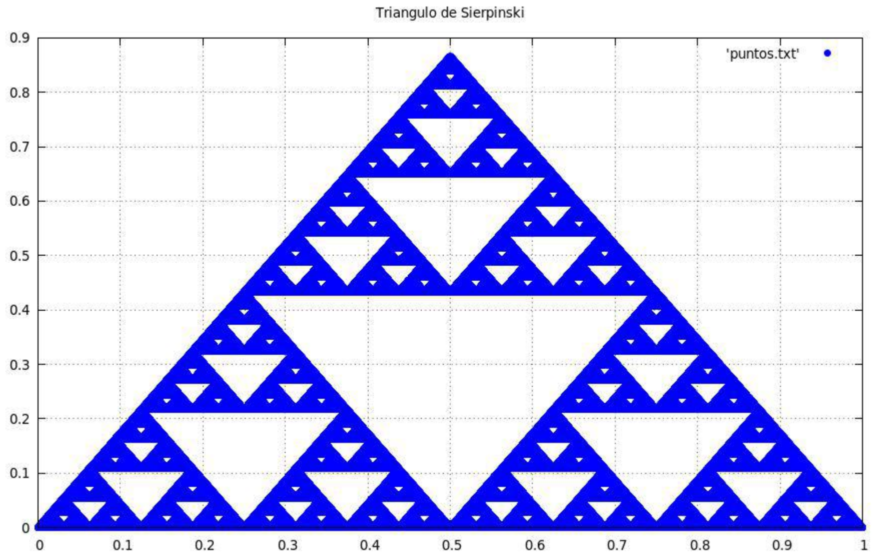


Figura 12.4: Triangulo fractal para 1,000,000 puntos.

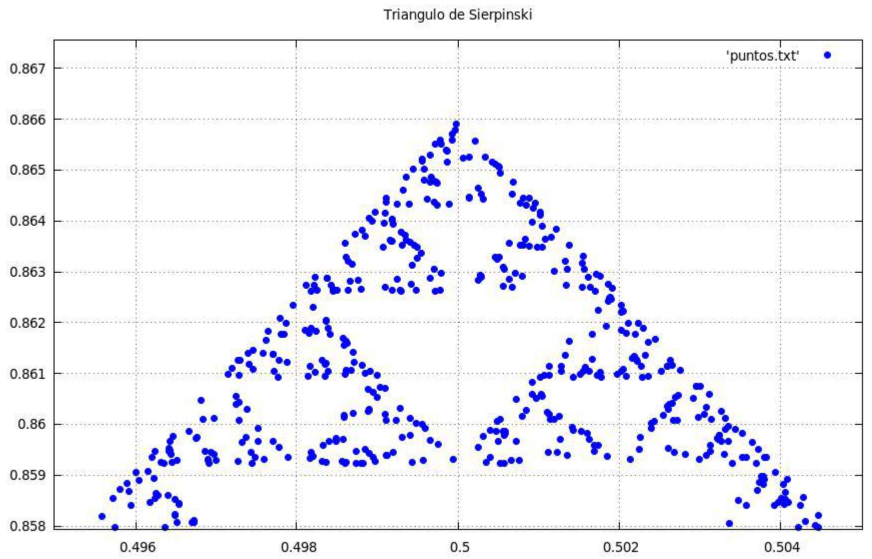


Figura 12.5: Triangulo fractal para 1,000,000 y área de 18,74μ de unidad virtual puntos.

Por tanto, al seguir generando más puntos, la estructura se define cada vez con más detalle a escalas gradualmente más pequeñas, hasta un punto donde no seríamos capaces de distinguir la estructura fractal debido al tamaño del punto, sería necesario utilizar puntos de una tamaño más pequeño para que la estructura permaneciera continua. Otro de los problemas que presenta el generar cada vez más puntos es la cantidad de espacio de los archivos además de la longitud de los caracteres obtenidos es finita en una computadora, por lo que se llegará a un punto donde no es posible seguir generando puntos.

Galaxias Markarian

Las galaxias markarian[8] son clases de galaxias que tiene núcleos con cantidades excesivas de emisiones ultravioleta en comparación con otras galaxias. A partir de 1963, Benjamin Markarian focó su atención a este tipo de galaxias. Los núcleos de las galaxias tenían color azul, asociado a estrellas de clases A a F. Estos núcleos azules no coincidían con los previamente encontrados en el resto de la galaxia. El espectro espacial en detalle tiende a mostrar un ciclo continuo a lo que Markarian concluyó que no era producido por efectos térmicos. La mayoría de estas líneas de emisión se tiende a caracterizarse por una alta actividad energética.

Radiacin de cuerpo negro

Un cuerpo negro es un objeto terico o ideal que absorbe toda la luz y toda la energa radiante que incide sobre l. Nada de la radiacin incidente se refleja o pasa a travs del cuerpo negro. A pesar de su nombre, el cuerpo negro emite luz y constituye un sistema fsico idealizado para el estudio de la emisin de radiacin electromagntica. El nombre Cuerpo negro fue introducido por Gustav Kirchhoff en 1862. La luz emitida por un cuerpo negro se denomina radiacin de cuerpo negro.

Todo cuerpo emite energa en forma de ondas electromagnticas, siendo esta radiacin, que se emite incluso en el vaco, tanto ms intensa cuando ms elevada es la temperatura del emisor. La energa radiante emitida por un cuerpo a temperatura ambiente es escasa y corresponde a longitudes de onda superiores a las de la luz visible, (es decir, de menor frecuencia, como las de la luz infrarroja, o de frecuencia an ms corta). Al elevar la temperatura no slo aumenta la energa emitida sino que lo hace a longitudes de onda ms cortas; a esto se debe el cambio de color de un cuerpo cuando se calienta. Los cuerpos no emiten con igual intensidad a todas las frecuencias o longitudes de onda, sino que siguen la ley de Planck.

A igualdad de temperatura, la energa emitida depende tambin de la naturaleza de la superficie; as, una superficie mate o negra tiene un poder emisor mayor que una superficie brillante. As, la energa emitida por un filamento de carbn incandescente es mayor que la de un filamento de platino a la misma temperatura. La ley de Kirchhoff establece que un cuerpo que es buen emisor de energa es tambin buen absorbente de dicha energa. As, los cuerpos de color negro son buenos absorbentes.

Ley de Rayleigh-Jeans

La ley de Rayleigh-Jean intenta describir la radiacin espectral de la radiacin electromagntica de todas las longitudes de onda de un cuerpo negro a una temperatura dada.
El modelo que define la radiacin del cuerpo negro a una longitud de onda concreta:

$$B_\lambda(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} \tag{12.4}$$

donde:
c es la velocidad de la luz.
k es constante de Boltzman.
T es temperatura absoluta.

Es posible tambin relacionar esta ecuacin con la longitud de onda, por lo que:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\nu kT}{c^2} \tag{12.5}$$

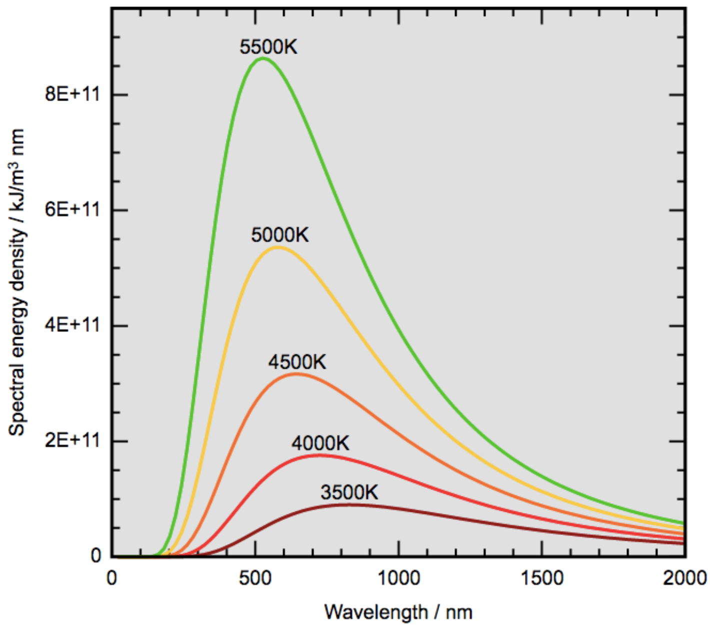


Figura 12.6: Relacin entre longitud de onda y temperatura de un cuerpo negro

Donde:
ν es la frecuencia.

12.1. Ley de desplazamiento de Wien

La ley de desplazamiento de Wien es una ley de la fsica que establece que hay una relacin inversa entre la longitud de onda en la que se produce el pico de emisin de un cuerpo negro y su temperatura (ver Fig. 12.1). La ley se expresa matemticamente como sigue:

$$\lambda_{max} = \frac{0{,}0028976\, m \cdot K}{T} \tag{12.6}$$

Donde:
T es la temperatura de cuerpo negro en grados Kelvin.
λ es la longitud de onda del pico de emisin en metros.

Cuanta mayor sea la temperatura de un cuerpo negro menor es la longitud de onda en la cual emite.

Tycho Brahe

Fue un astrnomo dans, considerado el ms grande observador del cielo en el perodo anterior a la invencin del telescopio.

Hizo que se construyera Uraniborg, un palacio que se convertira en el primer instituto de investigacin astronmica. Los instrumentos diseados por Brahe le permitieron medir las posiciones de las estrellas y los planetas con una precisin muy superior a la de la poca. Atrado por la fama de Brahe, Johannes Kepler acept una invitacin que le hizo para trabajar junto a l en Praga. Tycho pensaba que el progreso en astronoma no poda conseguirse por la observacin ocasional e investigaciones puntuales sino que se necesitaban medidas sistemticas, noche tras noche, utilizando los instrumentos ms precisos posibles.

Tycho Brahe fue el ltimo de los grandes astrnomos observadores de la era previa a la invencin del telescopio. El 24 de agosto de 1563, mientras estudiaba en Leipzig, ocurri una conjuncin de Jpiter y Saturno, suceso predicho por las tablas astronmicas existentes. Sin embargo, Tycho se dio cuenta de que todas las predicciones sobre la fecha de la conjuncin estaban equivocadas en das o incluso meses. Este hecho tuvo una gran influencia sobre l. Brahe se percat de la necesidad de compilar nuevas y precisas observaciones planetarias que le permitieran realizar tablas ms exactas.

Durante su carrera cientfica persigui con ahnco este objetivo. As desarroll nuevos instrumentos astronmicos. Con ellos fue capaz de realizar un preciso catlogo estelar de ms de 1000 estrellas cuyas posiciones midi con una precisin muy superior a la alcanzada hasta entonces (777 de ellas con una precisin muy elevada). Las mejores medidas de Tycho alcanzaban precisiones de medio minuto de arco. Estas medidas le permitieron mostrar que los cometas no eran fenmenos meteorolgicos sino objetos ms all de la Tierra. Desde entonces sus instrumentos cientficos se copiaron ampliamente en Europa.

Tycho fue el primer astrnomo en percibir la refraccin de la luz, elaborar una completa tabla y corregir sus medidas astronmicas de este efecto.

El conjunto completo de observaciones de la trayectoria de los planetas fue heredado por Johannes Kepler, ayudante de Brahe en aquel tiempo. Gracias a estas detalladas observaciones Kepler sera capaz, unos aos ms tarde, de encontrar las hoy denominadas leyes de Kepler que gobiernan el movimiento planetario.

Ramanujan

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (22 de diciembre de 1887 - 26 de abril de 1920) fue un matemtico autodidacta indio que, con una mnima educacin acadmica en matemticas puras, hizo contribuciones extraordinarias al anlisis matemtico, la teora de nmeros, las series y las fracciones continuas. Ramanujan desarroll inicialmente su propia investigacin matemtica en forma aislada; que fue rpidamente reconocida por los matemticos indios. Cuando sus habilidades se hicieron evidentes a una comunidad matemtica ms amplia, centrada en Europa en ese momento, comenz su famosa colaboracin con el matemtico britnico G. H. Hardy. Redescubri teoremas conocidos previamente, adems de producir numerosos nuevos teoremas.

¿Cómo piensan los bebes?

Victor Manuel Rangel Fajardo vmrangelf@gmail.com
Maestría En Ciencias De La Computación.
Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, Av. Juan de Dios Bátiz, Esq. Miguel Othón de Mendizábal S/N, Nueva Industrial Vallejo, 07738 Ciudad de México, D.F.
August, 22 2016.

Hace aproximadamente una década se creía que los pensamientos de los bebes eran irracionales, egocéntricos y morales. últimos estudios sugieren que que los niños saben más del mundo de lo que habíamos pensado. Los niños aprenden acerca del mundo de la misma maneara que lo hacen los científicos "haciendo experimentos, analizando estadísticas y formando teorías intuitivas de física, biología y psicología".

Los infantes son capaces de entender relaciones físicas fundamentales como el movimiento de trayectorias, gravedad y situaciones de control. A la edad de tres o cuatro, los niños tiene ideas elementales de biología y tiene su primer noción de crecimiento. Este entendimiento biológico sugiere que el razonamiento de los infantes a más allá de una perspectiva superficial.

A la edad de cuatro, ellos pueden explicarse si una persona esta actuando de manera extraña si cree que algo no es cierto. Los científicos han descubierto que los bebes e infantes pequeños pueden aprender más rápido y de forma más adecuada, gracias a que tienen una habilidad extraordinaria para aprender de "*patrones estadísticos*". Los bebes son capaces de detectar patrones estadísticos en tonos musicales, escenas visuales y también en patrones abstractos de gramática. Además los bebes pueden entender la relación entre una muerta estadística y un población. Más aún, los infantes usan esa información estadística recogida para dibujar conclusiones del mundo que los rodea.

En 2007[9] se condujo un experimento que arrojo como resultado que los niños pequeños son capaces usar deducción con base a estadística para aprender el funcionamiento de una máquina, estos niños pudieron usar probabilidad para descubrir nuevos y otros hechos sorprendentes del mundo. Niños de cuatro años de edad fueron sorprendentemente buenos averiguando como funcionaba la máquina basándose en patrones, además que jugaron con la máquina como si estuvieran llevando acabo un experimento.

Los infantes no están llevando experimentos ni analizando datos de forma similar a los cientificismos, sin embargo los cerebros de los bebes debe inconscientemente estar procesando la información, la idea propuesta es que *los cerebros de los bebes son un tipo de computadora diseñada para evolucionar y programada por la experiencia*. El estudio de los pensamientos de los bebes puede ayudar a desatollar una nueva teoría de programas computacionales para "machine leanign"llamados modelos probabilistas, también conocidos como modelos Bayecianos o redes Bayecianas. Estos modelos se centran en dos ideas principales:

- Usan matemáticas para describir la hipótesis que los niños tiene acerca de las cosas.
- Los programas estadísticos relacionados con la hipótesis a la probabilidad de diferentes patrones de eventos.

Los niños inconsciente mente usan este modelos estadístico Bayeciano que suele ser mejor que los adultos al considerar posibilidades inusuales. Otro estudio encontró que los niños que empiezan a ser instruidos modifican su análisis estadístico y como resultada se vuelven menos creativos.

Neurocientíficos han empezado a entender algunos de los mecanismos que permiten que este aprendizaje ocurra. Los cerebros de los bebes son más flexibles que el de los adultos que tiene más conexiones neuronales, si embargo no todas ellas son eficientes. El cerebro de los bebes tiene altos contenidos químicos que permiten un cambio de conexiones sencillo.

En conclusión, una nueva imagen de la niñez y de la naturaleza humana emerge en este estudio, los niños estás diseñador por la evolución para cambiar y crear, para aprender y explorar. "*Nuestros más preciados logros son posibles porque fuimos una vez indefensos y dependientes niños*"[9]. Niñez y cuidados son fundamentales para la humanidad.

El Número de Dios

Victor Manuel Rangel Fajardo vmrangelf@gmail.com
Maestría En Ciencias De La Computación.
Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, Av. Juan de Dios Bátiz, Esq. Miguel Othón de Mendizábal S/N, Nueva Industrial Vallejo, 07738 Ciudad de México, D.F.

August, 22 2016.

Un pregunta que siempre ha estado presente en la ciencia y en pensamiento de los hombres, es la religión, ¿existe dios?, Michael Shermer afrontó el reto de probar la existencia de dios. Uno de los trabajos más innovadores en esta dirección es *La Probabilidad de Dios* (Crown Forum, 2003), propuesta por Stephen D. Unwin, usando probabilidad Bayeciana, empezó con una probabilidad de 50 % de que dios existiese, modificando el teorema de Bayes tal que:

$$P_{after} = \frac{P_{before} \times D}{P_{before} \times D + 100\,\% - P_{before}}$$

Donde D es un indicador *Escala Divina*:

- $D = 10$ indica 10 veces más probabilidades de producirse si Dios existe,
- $D = 2$ es dos veces probable si dios existe,
- $D = 1$ es neutral,
- $D = 0{,}5$ es moderadamente probable si dios no existe, y
- $D = 0{,}1$ es muy probable que dios no exista.

Usando esta escala en la ecuación anterior haciendo iteraciones empezando con $D = 10, D = 0{,}5, D = 0{,}1, D = 2, D = 1$ y $D = 2$ obteniéndose una probabilidad de 67 % de que dios exista, sin embargo, al alterar el orden en que se hacen las iteraciones con la *escala divina* se puedn llegar a resultados diferentes como ejemplo el autor empezó el cálculo con $D = 0{,}5$, sin usar valores mas allá de $D = 1$ obteniendo como resultado esta vez una probabilidad del 2 % de que exista dios, esto muestra la naturaleza subjetiva de la ecuación propuesta por Bayes y modificada para este caso.

La técnica utilizada para el cálculo del número de dios es llamada *Inferencia Bayeciana*. Los estadísticos bayesianos sostienen que aun cuando distintas personas puedan proponer probabilidades a priori muy diferentes, la nueva evidencia que surge de nuevas observaciones va a lograr que las probabilidades subjetivas se aproximen cada vez más. Otros, sin embargo, sostienen que cuando distintas personas proponen probabilidades a priori muy diferentes, las probabilidades subjetivas a posteriori pueden no converger nunca, por más evidencias nuevas que se recolecten. Estos críticos consideran que visiones del mundo que son completamente diferentes al principio pueden seguir siendo completamente diferentes a través del tiempo por más evidencias que se acumulen, por tanto.

La inferencia bayesiana usa un estimador numérico del grado de creencia en una hipótesis aún antes de observar la evidencia y calcula un estimador numérico del grado de creencia en la hipótesis después de haber observado la evidencia. La inferencia bayesiana generalmente se basa en grados de creencia, o probabilidades subjetivas, en el proceso de inducción y no necesariamente declara proveer un método objetivo de inducción. El cálculo de la inferencia se realiza haciendo uso del conocido teorema de Bayes, entonces:

$$P(H_0 \mid E) = \frac{P(E \mid H_0)P(H_0)}{P(E)}$$

Donde:

- $P(H_0 \mid E)$ es la probabilidad a posteriori.
- $P(H_0)$ es la probabilidad a priori.
- $P(E \mid H_0)$ es la probabilidad condicional, de que se cumpla E si H_0 es verdadero, también llamada función de verosimilitud.
- H_0 representa la hipótesis.
- $P(E)$ es la probabilidad marginal.

Bibliografía

[1] R. R. A. Española, *Ortografía de la lengua española*. Espasa, 2010.

[2] M. R. Spiegel, J. J. Schiller, R. A. Srinivasan, and M. LeVan, *Probability and statistics*, vol. 2. Mcgraw-hill New York, USA, 2009.

[3] R. García *et al.*, "Interdisciplinariedad y sistemas complejos," *Ciencias sociales y formación ambiental*, pp. 85–124, 1994.

[4] T. Bayes, "A letter from the late reverend mr. thomas bayes, frs to john canton, ma and frs," *Philosophical Transactions (1683-1775)*, vol. 53, pp. 269–271, 1763.

[5] T. Bayes, "An essay toward problem solving in the doctrine of chaos. reprinted in," *Biometrika*, vol. 45, pp. 293–315, 1958.

[6] G. A. Barnard and T. Bayes, "Studies in the history of probability and statistics: Ix. thomas bayes's essay towards solving a problem in the doctrine of chances," *Biometrika*, vol. 45, no. 3/4, pp. 293–315, 1958.

[7] H. Rojo and M. Miranda, "Cadenas de markov," *Investigación Operativa*, p. 102, 2009.

[8] J. P. Huchra, "The nature of markarian galaxies," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 35, pp. 171–195, 1977.

[9] A. Gopnik, "How babies think," *Scientific American*, vol. 303, no. 1, pp. 76–81, 2010.