NOTAS DE PROBABILIDAD, PROCESOS ALEATORIOS E INFERENCIA

Francisco Javier Vázquez Vázquez

Centro de Investigación en Computación

19-Diciembre-2016

Índice general

Capítulo 1

Señal Wow

1.1. ¿Qué es la señal Wow?

En 1971 la NASA en colaboración con el vicepresidente de Hewlett Packard Bernad Oliver fundaron un estudio sobre la busqueda de inteligencia extraterrestre cuyo principal proyecto fue nombrado "Proyecto C'iclope". Dentro de este proyecto se construyó un radio telescopio nombrado "Big Ear", dicho telescopio era capaz de escribir en plotters la señal recibida del espacio apoyandose en la computadora IBM 1130 para realizar la busqueda de señales de inteligencia extraterrestre.
Este programa ganó mucha fama cuando en 1977 Jerry Ehman fue testigo de una señal recibida por el telescopio proveniente del espacio, por lo cual inmediatamente escribió dicha señal junto con la leyenda "Wow", en reacción al asombro por dicho acontecimiento.

1.2. ¿Qué la hace interesante?

El principal asombro por parte de los investigadores de la NASA fue que dicha señal cumpl'ia con el perfil que se esperaba de señales de inteligencia extraterrestre, es decir la frecuencia de la señal era 1420Mhz que es la frecuencia de la emisión del hidrógeno neutro que es el elemento mas abundante en el Universo. Dicho estudio dedujo que el origen de la señal proviene de la constelaci'on de Sagitario, además ha sido de gran ayuda para la busqueda de inteligencia extraterrestre por mas de 50 años.

1.3. ¿En que consiste la señal?

Principalmente consiste en una serie de valores de 72 segundos que son transcritos como 6EQUJ5 , lo único que se ha podido saber es que procede del espacio y no de interferencias con satélites, estudios atribuyen la señal a una civilizaci'on extraterrestre.

1.4. ¿Futuros trabajos a partir de la señal Wow?

La señal Wow ha sido considerada como el primer contacto con inteligencia extraterrestre y el origen a muchos proyectos de investigación tales como el Observatorio Espacial Kleper diseñado para la busqueda de vida inteligente ademas de algunas otras teorías que hasta la fecha no han sido comprobadas pero abren las puertas a nuevos campos en la busqueda de Inteligencia Extraterrestre.

1.5. Efecto Seebeck

El efecto Seebeck se da cuando los dos polos de un conductor eléctrico son puestos a diferentes temperaturas produciendo que los electrónes del conductor hagan que un polo del conductor se caliente mientras el otro se enfría generando una tensión eléctrica a través del conductor originalmente nombrada termomagnetismo por Seebeck.
De un inicio Seebeck pensó que hab'ia descubierto una forma de transportar energía magnética a través de un conductor pero mas tarde se demostró que la corriente de difusión del electrón produce un campo magnético sobre el conductor lo que se conoce como la Ley de Lenz.

La magnitud de la energia de un campo magnético producida por el conductor depende del material y las temperaturas a las que son expuestos los polos, lo cual define el coeficiente de Seebeck para el material.

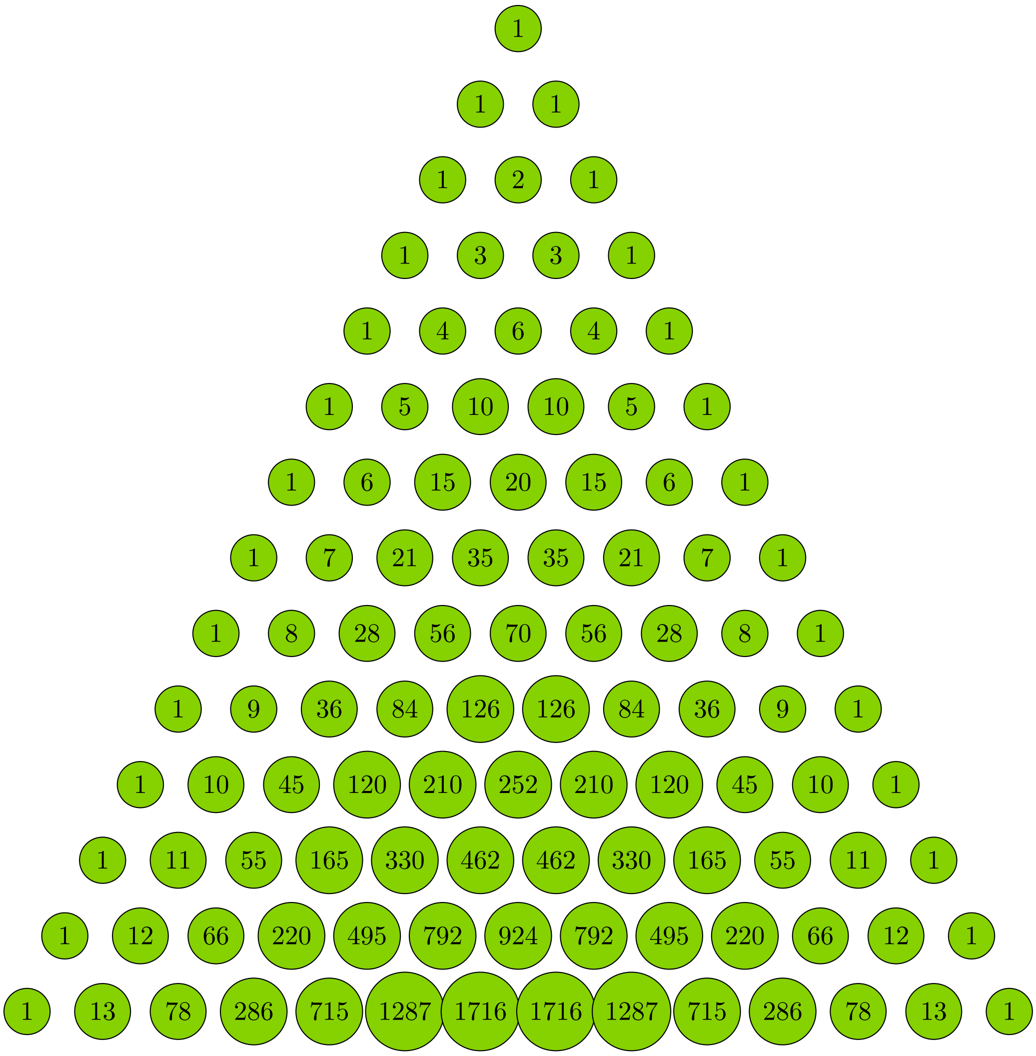
1.6. Efecto Peltier

Consiste en hacer pasar corriente eléctrica por un circuito compuesto de diferentes materiales en donde los polos que los unen están a la misma temperatura produciendo un efecto inverso al Seebeck. En el circuito se absorbe calor en una unión y se desprende en la otra.
Al invertir la polaridad de alimentación se invierte tambi'en su funcionamiento, provocando que la superficie que generaba frío ahora genere calor, y la que generaba calor realice el proceso contrario. El efecto Peltier sucede cuando dos metales distintos se ponen en contacto lo que hace que se genere una diferencia de potencial debido a que los electrones libres de uno de los metales tienen mas energía que los del otro. Además cuando se hace pasar una corriente eléctrica por la unión, si la dirección de la corriente es contraria a la diferencia de potencial, los electrónes ganan energía y la extraen de los metales enfriando la unión.

El efecto Peltier es reversible y es lo que da lugar al efecto termoeléctrico (Seebek). Es decir cuando dos metales se unen se puede producir una corriente el'ectrica en entre el conductor si los dos polos están a distintas temperaturas. Este efecto se aplica en las celdas Peltier, alimentando la celda, se establece una diferencia de temperatura entre las dos caras de la celda, esta diferencia depende de la temperatura ambiente donde este situada la celda Peltier empleada en la mayoria de casos para enfriar, ya que para calentar existen las resistencias eléctricas, que son mucho mas eficientes.

Capítulo 2

Triángulo de Pascal



Capítulo 3

Probabilidad , función gamma y teorema del binomio

3.1. Probabilidad

Podemos definir la probabilidad como el método matemático empleado en el estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Es decir aquellos experimentos que cuando se repiten bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo. Un ejemplo de un experimento aleatorio es el lanzar un dado . En principio no sabemos cual ser'a el resultado del experimento aleatorio, asi que agrupamos en un conjunto a todos los resultados posibles a lo que conocemos como espacio muestral, es decir es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, y se le denota generalmente por la letra:Ω. Se le denomina evento a cualquier subconjutno del espacio muestral y normalmente se denotan por las letras A B C.

3.2. Casos Favorables

Los casos favorables son los resultados exitosos en la ocurrencia de un evento, es decir aquellos que cumplen con lo esperado. Normalmente el número de casos exitosos es representado por la letra m seguido del subindice para indicar que eventos son favorables.

$$(m_A, m_B, ...) = 0$$

3.3. Casos Posibles

Los casos posibles de un evento son todos los resultados que pueden seuceder en un evento, es decir aquellos que cumplen o no con lo esperado.

3.4. Tipos de probabilidad

Probabilidad teórica Es la probabilidad en la cual asumimos que las n possibles de un particular experimentos son comparables y asignamos la probabilidad a cada resultado. Por ejemplo: La probabilidad teor/'ica de obtener un 3 en un dado de 6 lados es:

$$= \frac{1}{6} \tag{3.1}$$

3.5. Proabilidad relativa

Nombramos probabilidad relativa aquella que se obtiene de la interpretación de la frecuencia de un evento, por ejemplo si realizamos un experimento demasiadas veces entonces podemos de duducir a esta probabilidad como:

$$= \frac{cuantas\ veces\ un\ evento\ A\ ocurre}{cuantas\ veces\ se\ realiza\ el\ experimento} \tag{3.2}$$

3.6. Proabilidad subjetiva

En este tipo de probabilidad existen valores de 0 a 1 ó 0 a 100 asignados individualmente basados en como se espera que dichos eventos ocurran, Por ejemplo: La probabilidad de que un determinado dia llueva puede ser el 10 %.

3.7. Proabilidad estocástica

Es un proceso en el cual se define una colección o familia de variables aleatorias
Por tanto, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por X_2 con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables ables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo.

en la que se representa para cada t la función de densidad correspondiente a por X_t A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominan estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto y un espacio de estados continuo .Por otro lado, la variable tiempo puede ser de tipo discreto o de tipo continuo. En el caso del tiempo discreto se podría tomar como ejemplo que los cambios de estado ocurran cada día, cada mes, cada año, etc.. En el caso del tiempo continuo, los cambios de estado se podrían realizar en cualquier instante.

3.8. Función Gamma

La función gamma fue introducida por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), con el objetivo de generalizar la funciÃşn factorial a valores no enteros. Más tarde, por su gran importancia, esta fue estudiada por matemáticos eminentes tales como Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedr ich Gauss (1777-1855),.... al igual que muchos otros. La función gamma pertenece a una categoría de funci ones transcendentes especiales, y esta función ocurre en algunas constantes matemátic as especiales. Esta aparece en varias areas de estudio, como en las series asintóticas, i ntegrales definidas, series hiper geométricas, la función Zeta de Riemann, teoría de números, otras.

La función gamma completa $\Gamma(n)$ es definida como una extensión de la función factorial de argumentos de números complejos y reales. Está relacionada por $\Gamma(n) = (n-1)!$ Esta es analítica en todas partes excepto en z = 0,-1, -2, ...y el residuo en z = -k, es decir no existen puntos z en la cual $\Gamma(n) = 0$

3.9. Función Factorial

Es el resultado de series consecutivas del producto de un numero n por el número menor o igual a n, es decir:
0! = 1
1! = 1
2! = 2 × 1
3! =3 × 2 × 1
4! =4 × 3 × 2 × 1
La formula es:

$$n! = \prod_{k=1} \tag{3.3}$$

3.10. Espacio muestral

Para un experimento aleatorio $\boldsymbol{E}$ el conjunto de todos los posibles resultados de $\boldsymbol{E}$. Es denominado espacio muestral y es denotado por la letra $\boldsymbol{S}$. , por ejemplo para un lanzamiento de una moneda, $\boldsymbol{S}$. sería cruz o cara que pueden ser representados de la siguiente forma: $\boldsymbol{S}$. ={H,T}

3.11. Desarrollo formula del binomio

$$(x+y)^1 = x + y \tag{3.4}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{3.5}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + 3xy^2 + y^3 \tag{3.6}$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \tag{3.7}$$

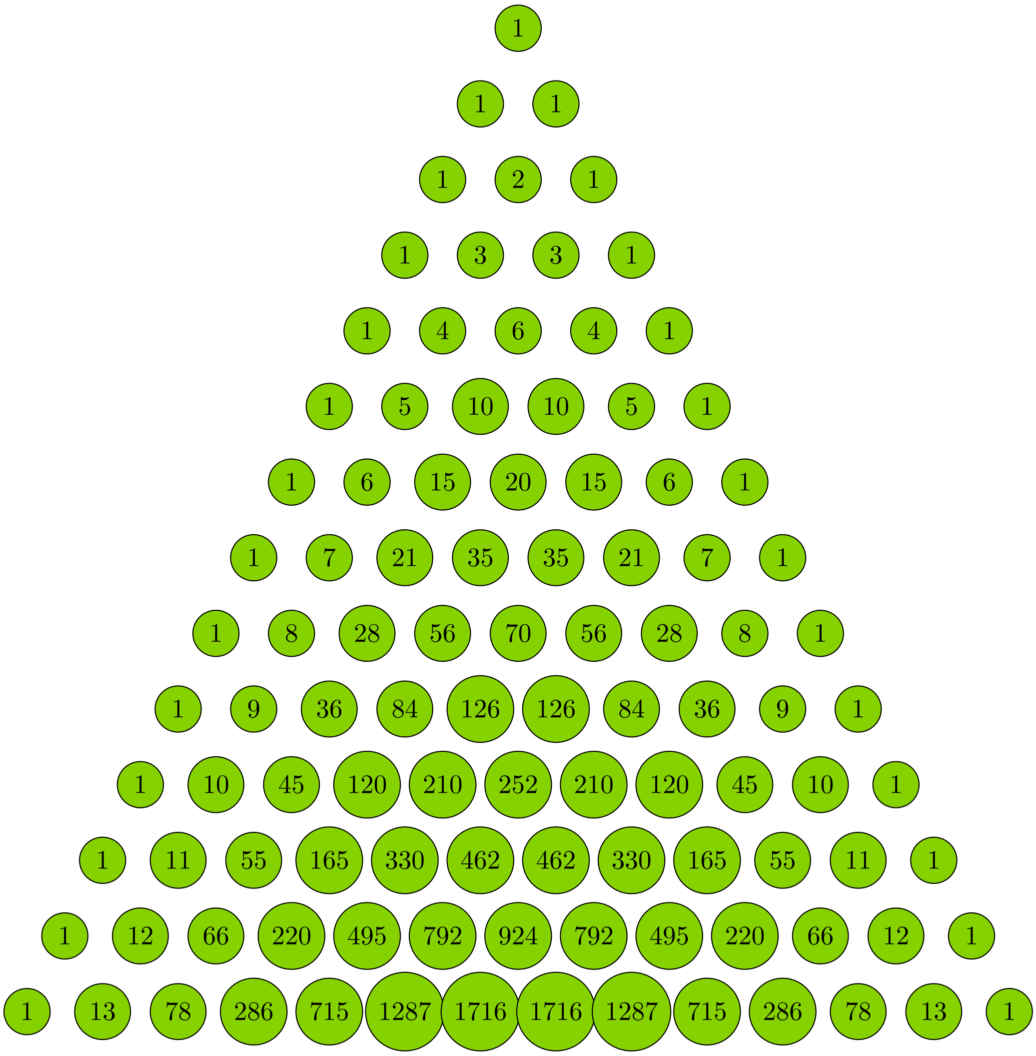
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \tag{3.8}$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \tag{3.9}$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7 \tag{3.10}$$

.

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8 \tag{3.11}$$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Capítulo 4

Permutaciones y combinaciones

4.1. Permutaciones

Es una técnica de conteo para hacer un arreglo de objetos en un específico y único orden: $r = \#\ de\ elementos n = conjunto\ de\ elementos$
Si tenemos una colección de n objetos distintos, el número de maneras diferentes que podemos tomar un número r de objetos (r <n) de la colección, está dado por la fórmula de la permutación:

$$P\binom{n}{r} = n(n-1).........(n-r+1) \tag{4.1}$$

$$n! = n(n-1).........(n-r+1)(n-r)(n-r-1) \tag{4.2}$$

$$n! = P\binom{n}{r}\ (n-r)! \tag{4.3}$$

4.2. Combinaciones

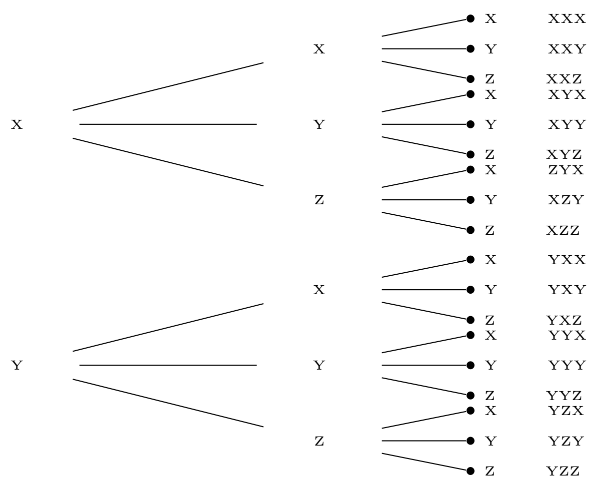
Es una técnica de conteo para definir arreglos de objetos de n objetos sin importar el orden de estos y se denota como $C\binom{n}{r}$ También se le conoce al nÃžmero combinatorio de n en m o de n sobre m, o combinaciones de n elementos tomados de m en m que es igual al número de formas posibles de tomar m elementos de un conjunto de n elementos distintos. De esta forma, m no puede ser menor que 0, ni mayor que n, pues no se puede elegir un número negativo de elementos, y de entre n elementos, no puedo elegir más de n
. Una propiedad de los números combinatorios es la siguiente:
puede ser cualquier entero no negativo, y m cualquier entero no negativo y menor o igual que n.

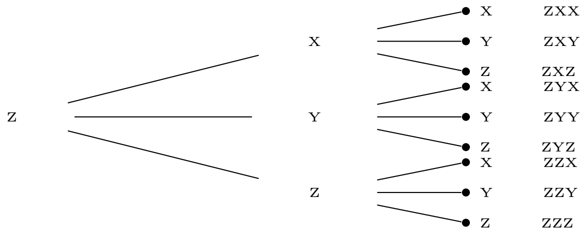
$$P\binom{n}{r} = C\binom{n}{r} r! \tag{4.4}$$

$$C\binom{n}{r} = \frac{P\binom{n}{r}}{r!} C\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{4.5}$$

4.3. Principio de multiplicación

Determina el número de resultados cuando hay 2 ó mas pruebas $\#resultados = n_1 \times n_2 \times .... n_k$
Si un experimento tiene k muestras ¿Cuántas palabras de 3 letras pueden formarse con {x,y,z} si pueden existir letras repetidas?





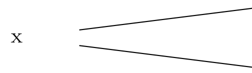
$$n_1 = 3 \quad n_2 = 3 \quad n_3 = 3 \tag{4.6}$$

$$numerototal\ de\ palabras = n_1 \times n_2 \times n_3 \ = \ 3 \times 3 \times 3 = 27 \tag{4.7}$$

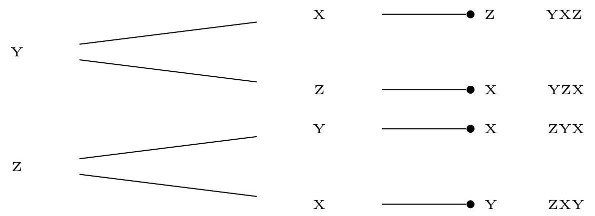
4.4. Permutación

Definición Es una técnica de conteo para hacer un arreglo de objetos en un específico y único orden:

$$r = \#\ de\ elementosn = conjunto\ de\ elementos \tag{4.8}$$



Ejemplo 2: ¿Cuántas palabras de 3 letras pueden formarse con {x,y,z} si no pueden tener letras repetidas?



Retomando el ejemplo

$$n_1 = 3n_2 = 2n_3 = 1 \tag{4.9}$$

$$P\binom{n}{r} = n(n-1).........(n-r+1) \tag{4.10}$$

$$n! = n(n-1).........(n-r+1)(n-r)(n-r-1) \tag{4.11}$$

$$n! = P\binom{n}{r}\ (n-r)! \tag{4.12}$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{4.13}$$

Retomando el ejemplo 2 tenemos:

$$r = 3 \quad n = 3 \tag{4.14}$$

Usando la ecuación (3) :

$$P\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!} \tag{4.15}$$

$$P\binom{3}{3} = \frac{3!}{(0)!} \tag{4.16}$$

Ejemplo Solución:
$n = 4 \quad r = 3$

abc abd acb acd adb adc

bac bad bca bcd bda bdc

cab cad cba cbd cda cdb

dab dac dba dbc dca dcb

$P\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!}$ =24

4.5. Combinación

Definición: Es una técnica de conteo para definir arreglos de objetos de n objetos sin importar el orden de estos y se denota como $C\binom{n}{r}$ Retomando ejemplo 3: $n = 4 \quad r = 3$

$\underline{abc}$ *abd* $\underline{acb}$ *acd adb adc* $\{a, b, c\}$

$\underline{bac}$ *bad* $\underline{bca}$ *bcd bda bdc* $\{a, b, d\}$

$\underline{cab}$ *cad* $\underline{cba}$ *cbd cda cdb* $\{a, c, d\}$

dab dac dba dbc dca dcb $\{b, c, d\}$

$P\binom{n}{r} = C\binom{n}{r}r!$

$$C\binom{n}{r} = \frac{P\binom{n}{r}}{r!} \tag{4.17}$$

$$C\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{4.18}$$

Ejemplo 4: Un estudiante debe elegir 8 respuestas de un éxamen para responder
(i) ¿Cuantas elecciones puede tener?
(ii) ¿Cuantas elecciones puede tener si debe responder las primeras 3?

$$i)C\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10 * 9(8!)}{(2!)(8!)} = \frac{10 * 9}{2} = 45 \tag{4.19}$$

$$(ii)C\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10 * 9(8!)}{(2!)(8!)} = \frac{10 * 9}{2} = 45 \tag{4.20}$$

4.6. Permutaciones repetidas

El número de permutaciones de n objectos donde n_1 son iguales, n_2 iguales,.... n_r iguales se define como: $= \frac{n!}{n_1!n_2!....n_r!}$ Ejemplo 5:
¿Cuantas palabras de 5 letras se pueden formar usando la palabra DADDY?
D_1, A, D_2, D_3, Y

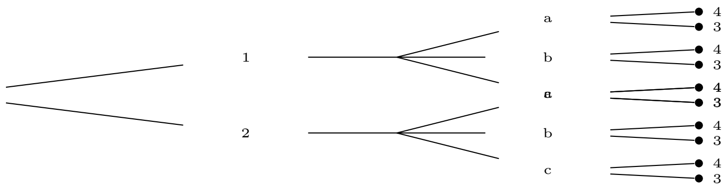
$D_1, D_2, D_3, A, Y \quad D_2, D_3, D_1, A, Y \quad D_3, D_1, D_2, A, Y \quad D_1, D_3, D_2, A, Y$

$D_2, D_3, D_1, A, Y \quad D_3, D_2, D_1, A, Y$

$= \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6}$

4.7. Diagramas de árbol

Es usado para enumerar todas las posibles salidas de una secuencia de experimentos donde cada experimento puede ocurrir un n número de veces.
Ejemplo: Encontrar el producto de los conjuntos donde $A = \{1, 2\} \quad B = \{a, b, c\} \quad C = \{3, 4\}$

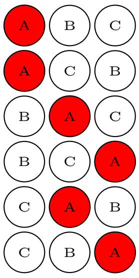


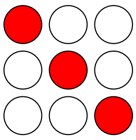
$n = 4 \quad r = 1$

a bcd c abd
a bdc c adb
a cbd c bad
a cdb c bda
a dbc c dab
a dcb c dba

$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{6} = 4$

b acd d abc
b adc d acb
b cad d bac
b cda d bca
b dac d cab
b dca d cba





$n = 4 \quad r = 2$

ab	cd	ca	bd
ab	dc	ca	db
ac	bd	cb	ad
ac	db	cb	da
ad	bc	cd	ab
ad	cb	cd	ba

$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{2} = 12$

ba	cd	da	bc
ba	dc	da	cb
bc	ad	db	ac
bc	da	db	ca
bd	ac	dc	ab
bd	ca	dc	ba

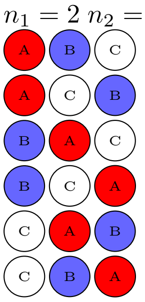
Cuantas palabras de 4 letras se pueden usar con la palabra "papa" definimos: $p_1a_1p_2a_2$

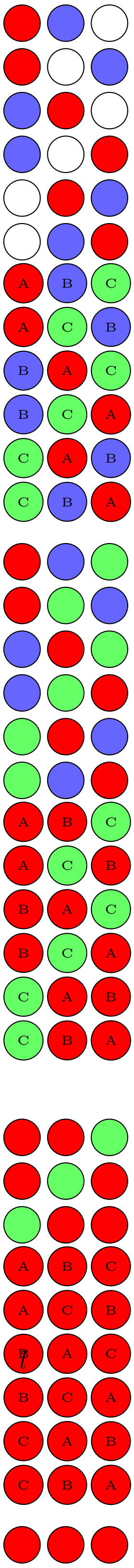
$p_1a_1p_2a_2$	$p_1p_2a_1a_2$	$a_1p_1a_2p_2$
$p_1a_2p_2a_1$	$p_1p_2a_2a_1$	$a_1p_2a_2p_1$
$p_2a_1p_1a_2$	$p_2p_1a_1a_2$	$a_2p_1a_1p_2$
$p_2a_2p_1a_1$	$p_2p_1a_2a_1$	$a_2p_2a_1p_1$

$p_1a_1a_2p_2$	$a_1p_1p_2a_2$	$a_1a_2p_1p_2$
$p_1a_2a_1p_2$	$a_1p_2p_1a_2$	$a_1a_2p_2p_1$
$p_2a_1a_2p_1$	$a_2p_1p_2a_1$	$a_2a_1p_1p_2$
$p_2a_2a_1p_1$	$a_2p_2p_1a_1$	$a_2a_1p_2p_1$

$PR\binom{n_1 n_2 \ldots n_r}{n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots.n_r!} = \frac{24}{2!2!} = 6$

$n_1 = 2 \; n_2 = 2$




A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A
A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A
A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A

Capítulo 5

Tensor Levi-Civita y demostración formula permutaciones

5.1. definición

El tensor Levi-Civita es un simbolo ijk en un rango de 3 definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \;\; si \;\; son \;\; repetidos \\ \\ 1 \;\; si \;\; ijk \;\; es \;\; una \;\; permutacion \;\; par \;\; de \;\; 1,2,3 \\ \\ -1 \;\; si \;\; ijk \;\; es \;\; una \;\; permutacion \;\; impar \;\; de \;\; 1,2,3 \end{cases}$$

1. El tensor Levi-Civita ijk tiene 3 x 3 x 3 = 27 componentes.
2. 3 x (6 + 1) = 21 componentes son igual a 0.
3. 3 componentes son igual a 1

El tensor Levi Civita también puede definirse como el producto del vector o simplemente como el producto cruzado:

$$(a \times b)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{5.1}$$

$$a \times b = det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j b_k$$

5.2. Telomeros en el envegecimiento

Son unas estructuras celulares compuestas por repeticiones de secuencias de ADN localizadas en los extremos de los cromosomas, cuya función es proteger a los cromosomas frente a la degradación que tiene lugar, durante la replicacion de las moleculas lineales de ADN tras completarse cada ciclo de replicación.
Dichas repeticiones se unen un grupo de proteínas conocidas como shelterinas que se encargan de proporcionar estabilidad y protección a los telómeros, y algunas de ellas participan activamente en su replicación y cohesión durante las distintas fases del ciclo celular.

Una característica es la longitud telomérica es muy variable entre las di stintas especies, y en cada ciclo replicativo los telómeros se acortan a causa del problema intrínseco de la replicación de los extremos de las secuencias de ADN lineales. Ademas la longitud telomérica en cada tipo celular de los tejidos disminuye con el tiempo, constituyendo por tanto una aproximación bastante representativa de la edad biológica de nue stros tejidos y órganos. La telomerasa es una ribonucleoproteína cuya funció n enzimática es la de anadir repeticiones teloméricas de novo para poder mantener una longitud telomÃĺrica estable a lo largo de la historia replicativa de determinados tipos celulares, aquéllos en los que se encuentra presente. La telomerasa se expresa durante el desarrollo embrionario, restringiéndose en el adulto a determinados compartimentos celulares tales como las células madre adultas, órganos hematopoyéticos y las células reproductoras.

5.3. ¿Estan relacionados los telomeros con el envejecimiento celular?

Los telomeros estan relacionados al envegecimiento celular. Telomeros estan conectados en todos los aspectos del envejecimiento a nivel celular. El tamaño de un telomero representa nuestra edad biologica opuesta a nuestra edad cronológica .
Algunos estudios cientificos han mostrado fuerte relación entre telomeros cortos y el envegecimiento celular.
Por ejemplo, el sistema inmune que normalmente se debilita con la edad, es altamente sensible de tener telomeros cortos.

Además se ha demostrado que telomeros cortos estan fuertemente asociados con baja densidad de minerales en la estructura osea en mujeres.

$$(\tilde{A} \times \tilde{B}) = \epsilon_{ijk} A_j Bk (\tilde{A} \times \tilde{B})_1 = \epsilon_{111} A_1 B_1 \ + \ \epsilon_{112} A_1 B_2 \ + \tag{5.2}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \ \ si \ \ son \ \ repetidos \\ 1 \ \ si \ \ ijk \ \ es \ \ una \ \ permutacion \ \ par \ \ de \ \ 1,2,3 \\ -1 \ \ si \ \ ijk \ \ es \ \ una \ \ permutacion \ \ impar \ \ de \ \ 1,2,3 \end{cases} \quad \epsilon_{113} A_1 B_3$$

$$+ \ \ \epsilon_{121} A_2 B_1 + \epsilon_{122} A_2 B_2 \ \ + \epsilon_{123} A_2 B_3$$

$$+ \ \ \epsilon_{131} A_1 B_1 \ \ + \ \ \epsilon_{132} A_3 B_2 \ \ + \ \ \epsilon_{133} A_3 B_3$$

$$= \epsilon_{123} A_2 B_3 \ \ + \ \ \epsilon_{132} A_3 B_2$$

$$= A_2 B_3 \ \ - \ \ A_3 B_2$$

$$(\tilde{A} \times \tilde{B})_2 = \epsilon_{211} A_1 B_1 \ \ + \ \ \epsilon_{212} A_1 B_2 \ \ + \ \ \epsilon_{213} A_1 B_3$$

$$+ epsilon_{221} A_2 B_1 + \epsilon_{222} A_2 B_2 \ \ + \ \ \epsilon_{223} A_2 B_3$$

$$+ \epsilon_{231} A_3 B_1 \ \ + \ \ \epsilon_{232} A_3 B_2 \ \ + \ \ \epsilon_{233} A_3 B_3$$

$$= \epsilon_{213} A_1 B_3 \ \ + \ \ \epsilon_{231} A_3 B_1$$

$$= -A_1 B_3 + A_3 B_1$$

$$(\tilde{A} \times \tilde{B})_3 = \epsilon_{311} A_1 B_1 \ \ + \ \ \epsilon_{312} A_1 B_2 \ \ + \ \ \epsilon_{313} A_1 B_3$$

$$+ \epsilon_{321} A_2 B_1 \ \ + \epsilon_{322} A_2 B_2 \ \ + \epsilon_{323} A_2 B_3$$

$$+ \epsilon_{331} A_3 B_1 \ \ + \epsilon_{332} A_3 B_2 \ \ + \epsilon_{333} A_3 B_3$$

$$= \epsilon_{312} A_1 B_2 \ \ + \epsilon_{321} A_2 B_1$$

$$= A_1 B_2, A_2 B_1$$

Capítulo 6

Demostración Fórmula Permutaciones

$$P\binom{n}{r} = n(n-1)(n-1).........(n-r+1) \tag{6.1}$$

Para demostrar el teorema de permutaciones de n elementos tomando r cuando $n \geq r$, tomemos el siguiente ejemplo: se requieren formar palabras de 3 letras usando el conjunto $\{a, b, c, d\}$ sin que se repita ninguna letra, con base en el principio de multiplicación tenemos que el total de palabras que se pueden formar es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Esto lo podemos representar como:

$$n(n-1)(n-2)...(n-r) \tag{6.2}$$

$$Donde \begin{cases} n = numero\ de\ elementos \\ r = elementos\ que\ se\ toman \end{cases}$$

Si consideramos que estrictamente se deben colocar las letras sin repetirse, este proceso basado en el principio de multiplicación se puede basar de la siguiente forma:

$$(n-(1-1))(n-(2-1))(n-(3-1))...(n-(r-1)) \tag{6.3}$$

Donde cada factor representa el número de repetición del exprimento, relizando la resta de cada factor obtenemos lo siguiente:

$$(n-)(n-1))(n-2)...(n-r+1) \tag{6.4}$$

Esto lo podemos multiplicar por 1 lo cual utilizando las ecuaciones planteadas se puede representar como:

$$(n-)(n-1))(n-2)...(n-r+1)(\frac{(n-r)(n-r-1)}{(n-r)(n-r-1)}) \tag{6.5}$$

De esta forma tambiÃĺn representar el dividendo como:

$$(n-)(n-1))(n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1) = n! \tag{6.6}$$

y

$$(n-r)(n-r-1) = (n-r)! \tag{6.7}$$

obteniendo la representación de la permutaci'on de n objetos tomando r

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{6.8}$$

Capítulo 7

Máquina enigma, medidas de dispersión y aproximación Stirling

7.1. Máquina enigma

La máquina enigma es tipo de hardware inventado por Arthur Scherbius y fue utilizada por los británicos como una forma de decifrar señales de tráfico durante la segunda Guerra Mundial. Como resultado de la información obtenida a tráves de este dispositivo, los ataques entre los Alemánia y sus fuerzas aleadas fueron neutralizadas por dos aÃśos.
La máquina engima permitía al operador escribir un mensaje, después este era cifrado mediante 3 a 5 rotores que desplegaban diferentes letras del alfabeto, el receptor necesitaba conocer las caracteristicas de los rotores para reconstruir el mensaje.

7.2. ¿Cómo funciona enigma?

Es un dispositivo mecánico el cual opera cuando señales eléctricas son enviadas a través de sus componentes mecánicos. El funcionamiento de enigma es el siguiente:
1.- Teclado: Cuando el operador oprima una tecla, se envía una señal eléctrica que inicia el proceso a través de la maquina generando el resultado final con el reflejo de una lampara el cual es envía la el resultado final.

2.-Rotor estático El siguiente paso es el roto estático que simplemente se encargar de transmitir la señal al siguiente rotor, transformando dicha señal eléctrica, cabe mencionar que en este paso la letra ingresada sigue siendo la misma,

3.- Rotores Estos 3 rotores estan conectados entre si por medio de anillos conectados cuyo proposito es codificar la señal que proviene del rotor estático y enviar la señal al reflector.
4.-Reflector Toma la entrada codificada por los rotores y regresa una señal electrica nuevamente a través de los rotores, como resultado se obtiene una letra diferente a la ingresada por el teclado.

5.-Regreso de la señal Una vez que la señal eléctrica ha sido codificada se envia de nuevo a los rotores los cuales se conectan para dar salida a la letra que ha sido codificada.

6.-En el paso final la señal codificada es enviada a otro teclado en donde la letra encriptada es iluminada, por ejemplo si se ingresó una letra G en el teclado, el resultado de esta podría ser una letra W, cabe destacar que aunque se repitan las letras de entrada, el resultado no será el mismo.

7.3. Medidas de dispersión estandar

Las medidas de dispersión se encargan de cuantificar que tan próximos o alejados estan los datos de la muestra de un punto central Estas medidas indican el grado de variabilidad que hay en la muestra y por otro, la representatividad de dicho punto central, si se obtiene un valor pequeño, eso significará que los valores se concentran entorno al centro (por lo que habrá poca variabilidad y el centro representará a todos). En cambio, si se obtiene un valor grande, significa que los valores no estan concentrados, sino dispersos (por lo que existe mucha variabilidad y el centro no es muy representativo).

7.4. Varianza.

Es una medida de dispersión común, que se calcula al promediar los cuadrados de las desviaciones individuales a partir de la media, es la media de desviaciones cuadráticas o la varianza. La varianza es una medida de dispersión promedia de un conjunto de datos. Para una población se construye al tomar la diferencia entre cada valor observado y la media poblacional, elevando al cuadrado cada una de estas desviaciones y luego hallando la media aritmética de los valores cuadrados.
Se puede representar como:

$$\sigma_x^2 = \frac{sumadetodaslasdistancias^2}{ndeelementos} = \frac{\sum_i^k = (x_1 - x)^2}{N} \tag{7.1}$$

7.5. Desviación estándar

Es la medida de dispersión más utilizada por ser la más estable de todas, ya que para su cálculo se utilizan todos los desvíos con respecto a la media aritmética de las observaciones, y además, se toman en cuenta los signos de esos desvíos. La desviación estandar típica se define como:
1.- La desviación tpica como medida absoluta de dispersión, es la que mejor nos proporciona la variación de los datos con respecto a la media aritmética, su valor se encuentra en relación directa con la dispersión de los datos, a mayor dispersión de ellos, mayor desviación típica, y a menor dispersión, menor desviaciÃşn típica.
2.-Desviación estándar de la población. Es la raíz cuadrada de la varianza de la población. Debido a que la varianza es el promedio de las distancias al cuadrado que van desde las observaciones a la media, la desviación estándar es la raíz cuadrada del promedio de las distancias al cuadrado que van desde las observaciones a la media.

7.6. Aproximación Stirling

Al evaluar las funciones de distribución en estadísticas, a menudo es necesario evaluar considerables factoriales de numeros, como en la distribuciÃşn binomial, una relación aproximada útil y de uso común en la evaluaciÃşn de factoriales de grandes números es la aproximación de Stirling que es:

$$n! = n^n e^- n\sqrt{2\pi n} \tag{7.2}$$

En la mayoría de los casos la diferencia es pequeÃśa. Este término adicional, nos proporciona una forma de valorar si la aproximación tiene un error grande.

La aproximación de Stirling es también útil para calcular la aproximación al logaritmo de un factorial, la cual encuentra aplicación en la evaluación de la entropía en términos de la multiplicidad, como en el sólido.

La fórmula resulta útil en diversas áreas como la mecánica estadística, donde aparecen ecuaciones que contienen factoriales del número de partículas. Puesto que en la materia ordinaria los sistemas macroscópicos típicos tienen en torno a N = 10 $23N \approx 10^{23}N \approx 10^{23}$ partículas la formula de Stirling resulta muy buena aproximación. Ademas la fórmula aproximante de Stirling es diferenciable lo cual permite el cálculo muy aproximado de máximos y mínimos en expresiones con factoriales.

La aproximación de Stirkling también se puede definir como:

$$ln(n!) \approx nln(n) - n \tag{7.3}$$

7.7. Permutaciones circulares

Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar de forma circular , de modo que el primer elemento que se situe en la muestra determina el principio y el final de muestra. El número de arreglos circulares de n elementos está dado por :

$$PC_n = (n-1)! \tag{7.4}$$

En donde se puede tomar como punto de partida cualquier elemento del conjunto y el el final de la permutación debe de ser el mismo elemento, una permutación de 3 elementos que puede representarse de 3 formas diferentes. Pero solo una de ellas nos interesa pues al iniciar en una pocisión diferente al estar en forma circular se obtiene el mismo elemento.
Dos permutaciones circulares son diferentes cuando los arreglos están precedidos o seguidos por un elemento diferente al avanzar en un sentido u otro. Asi si cuatro personas estan sentadas alrededor de una mesa y todas se desplazan una posición

en el mismo sentido, no se tendrá una permutación diferente, pero si se deja a una persona fija y se mueven a las tres restantes en todas las formas posibles, se tendrán $3! = 6$ formas diferentes de sentarse. Esto equivale a permutar todos los (n-1) elemento a la vez.

Capítulo 8

Teorema 2.7 Schaum's outline of theory and problems of probability

8.1. Teorema 2.7 Schaum's outline of theory and problems of probability

Teorema 2.7: $(a_1 + a_2 + ... + a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_r=n} \begin{pmatrix} n \\ n_1 n_2 ... n_r \end{pmatrix} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_r^{n_r}$

Comprobacion: -Se puede representar el teorema considerando r=1 utiliando induccion de tal forma que :

$a_1^n = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a_1^n = a_1^n$

Tomando como el caso base: $r \implies (r+1)$

$$(a_1 + a_2 ... + a_r + a_{r+1})^n = (a_1 + a_2 ... + (a_r + a_{r+1}))^n \tag{8.1}$$

Usando el teorea del binomio:

$\sum_{k_1 k_2 ...+k_{r-1}+K=n} \begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2 ..., k_{r-1}, K \end{pmatrix} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{r-1}^{k_{r-1}} (a_r + a_{r+1})^K$

Aplicando el teorema del binomio al último término obtenemos:

$\sum_{k_1 k_2 ...+k_{r-1}+K=n} \begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2 ..., k_{r-1}, K \end{pmatrix} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{r-1}^{k_{r-1}} \sum_{kr}^{K} \begin{pmatrix} K \\ k_r \end{pmatrix} a_r^{k_r} a_{r+1}^{K-k}$

Notemos que en el siguiente multinomio y coeficiente binomial son iguales: $\begin{pmatrix} n \\ k_1, k_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k_r \end{pmatrix} \quad para k_r = 0, 1..., K \ y \ para \ \ k_{r+1} = K - k_r$

Entonces podemos reescribir nuestra ecuación como:

$\sum_{k_1 k_2 ...+k_{r-1}+K=n} \begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2 ..., k_{r-1}, K \end{pmatrix} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{r-1}^{k_{r-1}} \sum_{kr+k_{r+1}=K} \begin{pmatrix} K \\ k_r, K_{r+1} \end{pmatrix} a$ Por definción tenemos que:

$\begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2 ..., K_{r+1}, K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K \\ k_r, K_{r+1} \end{pmatrix} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_{r-1} K!} \cdot \frac{K!}{k_r! k_{r+1}!} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_{r+1}!} = \begin{pmatrix} n \\ k_1, k_2 ... k_{r+1} \end{pmatrix}$

Por lo tanto obtenemos:

$= \sum_{k1+k_2...+k_{r+1}=n} \begin{pmatrix} n k_1, k_2 ... k_{r+1} \end{pmatrix} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{r+1}^{k_{r+1}}$

8.2. Ejercicio permutaciones

$n = 4 \quad r = 1$

a bcd c abd

a bdc c adb

a cbd c bad

a cdb c bda

a dbc c dab

a dcb c dba

$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{6} = 4$

b acd d abc

b adc d acb

b cad d bac

b cda d bca

b dac d cab

b dca d cba

$n = 4 \quad r = 2$

ab cd ca bd

ab dc ca db

ac bd cb ad

ac db cb da

ad bc cd ab

ad cb cd ba

$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{2} = 12$

ba cd da bc

ba dc da cb

bc ad db ac

bc da db ca

bd ac dc ab

bd ca dc ba

$n = 4r = 3$

abc d cab d

abd c cad b

acb d cba d

acd b cbd a

adb c cda b

adc b cdb a

$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{1} = 24$

bac d dab c

bad c dac b

bca d dba c

bcd a dbc a

bda c dca b

bdc a dcb a

$n = 4r = 4$

abcd cabd

abdc cadb

acbd cbad

acdb cbda

adbc cdab

adcb cdba $P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{1} = 24$

bacd dabc

badc dacb

bcad	dbac
bcda	dbca
bdac	dca b
bdca	dcb a

Capítulo 9

Demostración aproximación Stirling y Leyes de Morgan, teoría de Ramsey

9.1. Aproximación de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e}) \tag{9.1}$$

De acuerdo a la función Gamma de Euler podemos describir el factorial de cualquier número como:

$$\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx \tag{9.2}$$

Donde $n \geq 0$, cuando n=10 e integrar obtenemos:

$$f(x) = x^n \cdot e^{-x} \tag{9.3}$$

Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando n=0:

$$f(x) = \frac{10}{e}^{10*} \cdot e^{\frac{-x^2}{20}} \tag{9.4}$$

Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemo que definimos las variables de la integral como:

$u = x + n$ y $du = dx$ y sustituyendo
$I = \int_{u=-n}^{\infty} (u+n)^n \cdot e^{u+n} du$ factorizando $(u+n)^n$ la integral es:

$$I = \int_{u=-n}^{\infty} (n)^n \cdot (1 + \frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du \tag{9.5}$$

, tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:

$$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty} (1 + \frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du \quad (1) \tag{9.6}$$

Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expander el logaritmo:

$$ln(1 + \frac{u}{n})^n = n \cdot ln(1 + \frac{u}{n}) \quad (2) \tag{9.7}$$

$$\implies \quad ln(1 + \frac{u}{n} = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2}) \tag{9.8}$$

Finalmente sustituyendo 2 tenemos:

$$n \cdot ln(1 + \frac{u}{n}) \approx u - \frac{u^2}{2n} \tag{9.9}$$

Sustituyendo en 1 tenemos:
$I_2 = (\frac{n}{e})^n \cdot \int_{u=-n}^{n} e^{\frac{u^2}{2n}} du$, notemos que regresamos a la integral Gaussiana:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n} \tag{9.10}$$

Por lo tanto decimos que n tiende al infinito y el factorial de n tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

$$n! \sim (\frac{n}{2})^n \cdot \sqrt{2\pi n} \tag{9.11}$$

9.2. Ley distributiva

Dado $X = A \cap B$ y $Y = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
demostrar que :
1.- $X \subseteq Y$
2.- $Y \subseteq X$

Caso 1 $X \subseteq Y$:
Si $x \in X$, despues $x \in A$ y $x \in (B \cup C)$, esto último implica que x es un miembro de al menos B o C, entonces plantearemos 3 casos:

Caso A: $x \in B$ y $x \notin C$
Sabemos que $x \in A$, si:
$x \in B$ y $x \in A$, entonces $x \in (A \cap B)$
si $x \in (A \cap B)$ entonces $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = Y$, por eso $x \in Y$

Caso B: $x \notin B$ y $x \in C$, es un caso igual al de A
Caso C: $x \in B$ y $x \in C$, es una extensión del caso A y del caso B, por lo tanto si $x \in X$ entonces $x \in Y \implies X \subseteq Y$

Caso 2 $Y \subseteq X$, si $y \in Y$ entonces y es un miembro de al menos uno de los conjuntos $(A \cap B) o (A \cap C)$,nuevamente tenemos 3 casos:

Caso A: $y \in (A \cap B)$ y $y \notin (A \cap C)$
Sabemos que $x \in A$, si:
Esto implica que $y \in A$ y $y \in B$, por la definicion de interseccion:
si $y \in B$ entonces $y \in (B \cup C)$
si $y \in A$ y $y \in (B \cup C)$ entonces $y \in (A \cap (B \cup C))$

Caso B: Es simetrico al caso A
Caso C $y \in (A \cap B)$ y $y \in (A \cap C)$, es una extensión del caso B

Por lo tanto del caso 2 1 y 2 tenemos que:

$X \subseteq Y$ y $Y \subset X$, por lo tanto $X = Y$ que implica $A \cap (B \cup C) = (A \cap B)$

9.3. Principio de dualidad

Si la dualidad de A es B, entonces de forma análoga, dualidad de B es A, cumpliéndose una relación uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de A es a veces A (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es amplia mente usado en diversos representaciones matemáticas, tales como lógica.

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

- Unión por Intersecciń $\cup \to \cap$
- Intersección por Unión $\cap \to \cup$
- Conjunto universo por vacío $U \to \oslash$
- Conjunto vacío por universo $\oslash \to U$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$

Aplicando la dualidad:
$$(\oslash \cup A) \cap (B \cup A) = A$$
La dualidad en un principio que se puede aplicar en una gran variedad de áreas del conocimiento, a continuación se muestra la dualidad en lógica boleana. Se realiza lo homólogo a la teoría de conjuntos, se reemplazan las operaciones de suma por multiplicación, los 1 por 0 y viceversa.

9.4. Número de Erdös

El número de Erdös es una forma de medir el nivel de colaboración que una persona ha tenido con el prolífico matemático Húngaro. Es decir, una forma de expresar la distancia colaborativa. Para que una persona pueda tener un numero de Erdös, debido a co-escribir un artículo con otra persona que ya posea un número de Erdös finito. Es decir:

* Erdös posee un número de Erdös = 0.
* Si una persona ha colaborado directamente con Erdös, ésta pasa a tener un número de Erdös = 1.
* Si una persona ha colaborado con una persona que ha colaborado con Erdös, tendrá un numero de Erdös = 2. Y así sucesivamente.

Actualmente un matemático suele tener un numero de Erdös no mayor a 8.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuan separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama.

Se asegura que Paul Erdös es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producciÃşn de Erdös es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos estÃąn aún por publicarse después su muerte.

Erdös utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas. Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: Habrá mucho tiempo para descansar en la tumba. Erdös viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas.

Erdös seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta aÃśos. Erdös, sin duda, tenÃŋa el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todos las especialidades.

9.5. Leyes de Morgan

Sirven para declarar que la suma de n variables proposicionales globalmente negadas o invertidas es igual al producto de las n variables negadas individualmente e inversamente, el producto d n variables proposicionales globalmente negadas es igual a la suma de las n variables negadas individualmente.

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{9.12}$$

$$2.(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{9.13}$$

DemostraciÃşn de 9.20

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{9.14}$$

En efecto, sea x un elemento arbitrario del conjunto universal ϑ . Entonces,

$$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin (A \cup B) \tag{9.15}$$

Definicion de complementario

$$\leftrightarrow \neg(x \in (A \cup B)) \tag{9.16}$$

Negacion

$$\leftrightarrow \neg((x \in A) \vee (x \in B) \tag{9.17}$$

Definicion de union

$$\leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \tag{9.18}$$

Negacion

$$\leftrightarrow (x \in A') \wedge (x \in B') \tag{9.19}$$

Definicion de complementario

$\leftrightarrow x \in (A' \cap B')$ Definicion de interseccion

y al ser x un elemento arbitrario de ϑ, se sigue que

$\forall x[x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$

luego tenemos que:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{9.20}$$

9.6. Divisibilidad entre 11

Un número es divisible por 11 si: N es divisible por 11 si y solo si al sumar los dígitos en posición impar y luego restar los dígitos en posición par, obtenemos un número divisible por 11. Por ejemplo, el número 20 482 es divisible por 11 porque $2-0+4-8+2=0$, y 0 es divisible por 11. El número 123 456 no es divisible por 11 porque $1-2+3-4+5-6=-3$ no es divisible por 11 .

9.7. Teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey afirma que en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura, con orden. Por ejemplo sea A una familia inifinita de conjuntos binarios, o si se desea de pares desordenados de números naturales es decir pares (a,b) de naturales con a $\neq f$ donde (a,b) se confunde con (b,a). Entonces existe un conjunto infinito M de naturales tal que o bien A contiene todos los pares desordenados formados por elementos de M o bien no contiene a ninguno.

PRUEBA
Se define la relación simétrica x conoce a y en N si el par (x,y) de naturales pertenec a A, entonces podemos representar como una persona que asiste a una reunión de N_0 miembros,. Se puede generalizar por inducción del teorema de Ramsey para particiones finitas de cualquier orden de la familia de subconjuntos de dos elementos de N.

También establece que en cualquier esquema de color aplicado a un grafo de un grafo completo suficientemente grande, se hallan subgrafos completos monocromáticos. Para dos colores, el teorema enuncia que para cualquier par de enteros positivos (r,s), existe al menos un entero positivo $R(r,s)$ como aquel para cualquier grafo completo en $R(r,s)$ vértices, cuyas aristas (o ramas) están coloreados de rojo o azul, existe un subgrafo completo de r vértices que es totalmente azul, o un subgrafo completo de s vértices que es totalmente rojo. $R(r,s)$ representa un entero que depende conjuntamente de r y s. Se entiende que representa al entero más pequeño para el que el teorema aplica al que se le denomina número de Ramsey.

El teorema de Ramsey es importante en análisis combinatorio. Esto inició la teoría combinatoria, que busca regularidad en medio del desorden: condiciones generales para la existencia de subestructuras con propiedades regulares.

Alguna extensión de este teorema se aplica a cualquier número finito de colores, en lugar de solamente dos, el teorema enuncia que por cualquier número dado de colores c, y cualquier entero $n_1, ..., n_c$ existe un número, $R(n_1, ..., n_1)$, que si las aristas de un grafo completo de orden $R(n_1, ..., n_c)$ se colorea con c colores diferentes, entonces para algún i entre 1 y c, debe contener un subgrafo completo de orden n_i cuyas aristas son de color i.

Capítulo 10

Cuantificadores

10.1. Cuantificadores

La cuantificación es la conversiÃşn de una senal discreta en el tiempo evaluada de forma continua a una seńal discreta en el tiempo discretamente evaluada. El valor de cada muestra de la seńal se representa como un valor elegido de entre un conjunto finito de posibles valores.

Se conoce como error de cuantificacion (o ruido), a la diferencia entre la seńal de entrada (sin cuantificar) y la seńal de salida (ya cuantificada), interesa que el ruido sea lo mÃąs bajo posible. Para conseguir esto, se pueden usar distintas técnicas de cuantificación:

Cuantificación uniforme
Cuantificación logaritmica
Cuantificacion no uniforme
Cuantificacion vectorial

Cuantificacion uniforme

En los cuantificadores uniformes (o lineales) la distancia entre los niveles de reconstrucciÃşn es siempre la misma, como se observa en la siguiente figura:

No hacen ninguna suposición acerca de la naturaleza de la seńal a cuantificar, de ahi que no proporcionen los mejores resultados. Sin embargo, tienen como ventaja que son los más faciles y menos costosos de implementar.

En la siguiente figura se ve un ejemplo de cuantificación uniforme:

Cuantificación logaritmica

Las seńales de voz pueden tener un rango dinÃąmico superior a los 60 dB, por lo que para conseguir una alta calidad de voz se deben usar un elevado numero de niveles de reconstruccion. Sin embargo, interesa que la resolucion del cuantificador sea mayor en las partes de la seńal de menor amplitud que en las de mayor amplitud. Por tanto, en la cuantificaciÃşn lineal se desperdician niveles de reconstrucciÃşn y, consecuentemente, ancho de banda. Esto se puede mejorar incrementando la distancia entre los niveles de reconstrucciÃşn conforme aumenta la amplitud de la seńal.

Un método sencillo para conseguir esto es haciendo pasar la seńal por un compresor logaritmico antes de la cuantificaciÃşn. Esta seńal comprimida puede ser cuantificada uniformemente. A la salida del sistema, la seńal pasa por un expansor, que realiza la funciÃşn inversa al compresor. A esta tecnica se le llama compresion. Su principal ventaja es que es muy fácil de implementar y funciona razonablemente bien con seńales distintas a la de la voz.

Capítulo 11

Probabilidad subjetiva y tensor flow

11.1. Probabilidad subjetiva

La probabilidad subjetiva representa una relación entre una aserción y un cuerpo de evidencia, pero la relación no es puramente lógica. Se puede describir como una relación casi lógica y el número que le es asignado representa el grado de creencia. Dada una aserción, puede asignársele cualquier probabilidad entre cero y uno, sobre un cuerpo de evidencia, de acuerdo con los grados de creencia de la persona que hace dicha asignación, si hay afirmación absoluta o de negación absoluta de la evidencia, son aplicables los criterios de la lógica clásica de dos valores 0 y 1. En el resto de los casos, la probabilidad subjetiva postula una lógica polivalente o, mejor, una lógica de escala continua.

La persona o sujeto que determine la probabilidad subjetiva debe ser consistente en el sentido lógico de la palabra: si hay una evidencia lgica de que ocurra el suceso S debe haber eI máximo grada de confanza en S: si la evidencia entra en la negación de S, habrá que poner en S el mínimo grado de confianza. La teoría es subjetivista en el sentido de que una persona puede tener un grado de creencia cualquiera con respecto a cualquier afirmación y en cualquier tipo de evidencia, con tal de que sus otras gradas de creencia tengan valores adecuados. Es sólo en este sentido que una teoría es subjetivista.
Las distribuciones de grados de creencia no son todas admisibles en la interpretación subjetivista. Si una persona analiza sus grados de creencia y los halla incoherentes. Entonces, deseosa de proceder con lógica y llevar a cabo sus deseos, procurará eliminar dicha incoherencia. El modo de hacerlo es un asunto totalmente personal. Algunas de sus opiniones, que luego han de transformarse en asignaciones de prabahilidad, deben ser modificadas, pero esta modificación no ha de ser dictada par ninguna regla externa, ni en su esencia ni en el modo.

Por ejemplo dada una aserción cualquiera S, si una persona tiene en ella un grado de creencia p, en la aserción contraria (la que niega S) depositaría un grado de confianza igual a $1-p$. Para medir los grados de creencia los subjetivistas han introducido el método de la apuesta, que consiste en determinar la cantidad máxima que se está dispuesto a apostar en favor de la verdad de una aserción, por ejemplo que la probabilidad de S es $\frac{1}{3}$ quiere decir que se está dispuesto a apostar uno contra dos a favor de su certeza. Si la probabilidad de la negación fuera de $1/3$ de S habría dos apuestas: una de 1 contra 2 a favor de S y otra de 1 contra 2 a favor de la aserción o del hecho contraria. Sería perder en ambas condiciones y, en consecuencia, portarse incoherente.

Para la probabilidad objetivista, los sucesos son independientes y equiprobables. En cambio, en la probabilidad subjetivista los sucesos, que son indepertdientes para la probabilidad objetivista, son intercarmbiables (o equivalentes) para el subjetivista. De un modo más formal: Si asignamos el valor X_i a la prueba i y llamamos $P(X_i)$ a la probabilidad correspondiente y $P(X_i/X_j1..., X_{jy}n)$ a la probabilidad condicional de X_j en el supuesto de que resulte X_j en la prueba $X_j, .., Xn$ en la prueba n, para un objetivista habrá independencia y equiprobabilidad si se verifica $P(X_i) = P(X_i/X_j, ..., X_n)$, para todos los índices distintos $(j_1, ..., j_n)$. Para la probabilidad subjetivista, habrá intercambiabilidad. Y habrá, además, si se verifica una o ambas de las relaciones siguientes:

$$P(X_i) = P(X_j) \tag{11.1}$$

$$P(X_i/X_{j1}, ..., X_{jn}) = P(X_h/X_{k1}, ..., X_{kn}) \tag{11.2}$$

Para todo conjunto de indices distintos $(j_1, ..., j_n)$ y $(k_1, ...,)$siempre que existan las probabilidades condicionantes para dichos conjuntos de indices.

11.2. Tensor flow

Es un sistema de Machine Learning de Google de segunda generación preparado para redes neuronales, inteligencia artificial y Deep Learning. Contiene librerías de Inteligencia Artificial que Google usa en toda su infraestructura que fue originalmente desarrollada por Ingenieros e Investigadores pertenecientes a el área de Investigación e Inteligencia Artificial de Google. TensorFlow es una librería bastante poderosa y se piensa que esta gran noticia traerá una revolución completa a lo que se conoce como Machine Learning. Para poder usar esta librería se requiere de un amplio conocimiento en matemáticas avanzadas.

De esta manera, cualquier investigador, interesado en la inteligencia artificial podrá usar los datos y experiencias de Google para crear sus propios desarrollos. Este software puede ir más allá de reconocer patrones de forma automática, ya que se trata de un sistema que identifica patrones tras analizar cantidades masivas de información.

11.3. ¿Como funciona el tensor flow?

Describe modelos matemátics computacionale con un grafo directo compuesto por nodos y aristas. Los nodos tipicamente implementan operaciones matematicas, pero tambien pueden representar puntos finales, o leer y escribir variables persistentes.Los aristas describen la relación entre nodos, estos datos son colocados dinamicamente en arreglos multidimensionales también conocidos como tensores.
El fluho de los tensores a traves de los grafos es donde se determina dicha función del tensor.Los nodos son asignados a dispositivos computacionales y ejecutados asincronamente de forma paralela una vez que los tensores de los datos de entrada estan disponibles.

11.4. Modelo Ising

Es un modelo de particulas interactuantes para el cual se conoce su solución exacta e indudablemente el mas simple de todos ellos. El método de solución en una dimensión presentado por Ising y luego extendido a dos dimensiones por Onsager, constituye la base de diversos métodos modernos de cálculo en la fisica estadÄśstica de los fenomenos criticos. Tambien se sabe que el modelo de Ising y generalizaciones del mismo sirven para explicar una variedad de fenómenos, no solo sino también de diversas areas de la biologÄśa.

11.5. Modelo ising en una dimensión

En una dimensión ($d = 1$) el Hamiltoniano de Ising puede ser escrito de la forma:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{11.3}$$

Donde $\sigma_i = + - 1$ y se utilizan las condiciones de contorno periódicas, esto es:

$$\sigma i + N = \sigma_i \tag{11.4}$$

En una dimensión, las condiciones de contorno periódicas son equivalentes a resolver el problema en un anillo, de esta forma podemos escribir el Hamiltoniano (1) de forma simétrica.

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{B}{2} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \tag{11.5}$$

A lo cual la función de partición canónica viene dada por:

$$Z_N = \sum_{\sigma_i} exp[K \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma i + 1 + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i + \sigma i + 1)] \tag{11.6}$$

Donde $K == \beta J$ y $h = \beta B$ Notemos que la función de partición puede ser escrita de la forma:

$$Z_N \sum_{\sigma_1 = +-1} \sum_{\sigma_2 = +-1} ... \sum_{\sigma_N = +-1} \Pi_{i=1}^{N} (\sigma_i, \sigma_{i+1}) \tag{11.7}$$

11.6. Puentes de Königsberg

Königsberg era el nombre de una ciudad en Prusia del Este, la cual es atravesada por un rio, el rio Preget que divide la ciudad en cuatro areas. En ese entonces, siete puentes conectaban estas diferentes areas. Los habitantes de Konigsberg trataban de encontrar una ruta alrededor de la ciudad que recorriese los siete puentes de Konigsberg, sin pasar por un puente mas de una vez. Dado que estos intentos habian resultado infructuosos, varios de los habitantes de Konigsberg creian que esta ruta no existia. En 1736, Leonhard Euler, publicó un artículo en el cual no solo solucionaba este problema particular, sino que ademas proporcionaba un metodo general para resolver otros problemas del mismo tipo:
Como una primera simplificación, Euler utiliza letras mayúsculas para denotar a las regiones en las que el rio divide a la ciudad y letras minúsculas a los puentes.
Euler logra asi representar una ruta mediante una sucesión de letras. Por ejemplo, $ABDC$ representa a la ruta que va de A a B, de B a D, y de D a C, atravesando tres puentes. Es inmediato que si la ruta deseada existe, entonces su representaci6n debe consistir de 8 letras (ya que cada uno de los siete puentes debe cruzarse exactamente una vez).
Como una primera simplificación, Euler utiliza letras mayúsculas para denotar a las regiones en las que el rio divide a la ciudad y letras minúsculas a los puentes.
Euler logra asi representar una ruta mediante una sucesión de letras. Por ejemplo, $ABDC$ representa a la ruta que va de A a B, de B a D, y de D a C, atravesando tres puentes. Es inmediato que si la ruta deseada existe, entonces su representaci6n

debe consistir de 8 letras (ya que cada uno de los siete puentes debe cruzarse exactamente una vez).
Euler nota que si el número n de puentes que conducen al area A es impar, entonces A debe aparecer $\frac{m+1}{2}$ veces en la representación correspondiente a la ruta buscada, concluyendo:

En el caso de los puentes de Konigsberg , debe haber tres ocurrencias de La letra A en la representacien de la ruta, dado que cinco puentes (a, b, c, d, e) conducen al area A. Dado que tres puentes conducen a B, la letra B debe ocurrir dos veces; similarmente, D debe ocurrir dos veces y C también. Así en una serie de 8 letras representando el recorrido de los siete puentes, la letra A debe ocurrir 3 veces, y las letras B, C, y D dos veces cada una pero esto no puede suceder en una sucesión de 8 letras, estableciendo que tal travesia no puede ser tomada a lo largo de los siete puentes de Konigsberg.
En el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente, tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. El requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.n . Entonces se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas que son los 7 puentes de Königsberg.

11.7. When Are Bone Marrow Transplants Considered?

El término transplante de medula osea hace referencia en reparar aquellas cavidades de los huesos que se encuentren afectadas, haciendo enfasis en las celulas que componen la médula osea, es decir las celulas madre, que normalmente residen en la médula donde tienen la capacidad de generar celulas a traves de la sangre.
En enfermedades como la anemía la medula de los huesos puede llegar a ser dañada, degenerandola y provocando que la producción de celulas en la médula osea sea menor. Debido a que las celulas que se producen en la medula osea son mayormente responsables de conbatir daños que sufre el cuerpo tales como virus o bacterias, los metodos utilizados como quimioterapía pueden dañar también la médula.

El objetivo principal de un transplante de medula es tratar de reemplazar con sangre sana que produsca correctamente las celulas que se generan, esta sangre proveniente de un donante ayudará a que la producción de celulas beneficas en la medula sea mejor. Sin embargo tratamientos como la quimioterapía pueden llegar a matar algunas otras celulas que son generadas en el cabello, estomago o intestinos, es por eso que durante los tratamientos las personas que son sometidas a ellos pierden de forma momentanea el cabello y tienen algunos otros sintomas.
El primer proceso que se realiza en la quimioterapía es utilizar radiación para matar todas aquellas celulas cancerijenas, despues las celulas madre son inyectadas en las cavidades del hueso donde una vez situadas generan la medula. Este proceso normalmente dura entre dos y cinco semanas, débidoa que les lleva mayor tiempo alcanzar una determinada madurez. Desafortunadamente existen muchos pacientes que mueren durante el transcurso de este proceso de madurez de las celulas debido a que a raíz de que el proceso no ha sido terminado el cuerpo se encuentra expuesto a multiples daños.

Normalmente un familiar cercano del paciente puede realizar la donación de dichas celulas, sin embargo en el proceso de implantación de las celulas en el paciente enfermo, dichas celulas donadas pueden llegar a confundir el tejido residente y por lo tanto atacarlo, este riesgo incrementa si las celulas de la médula provienen de un familiar no cercano al paciente. El proceso mas comun en transplantes de medula llamado autologo transplante es donde se toman las celulas del paciente antes del proceso de quimioterapía, en esos casos no existe riesgo de ataque por parte de las celulas implantadas. Sin embargo si la medula de un paciente con cancer puede ser contaminada por un tumor de celular, causando que las celulas cancerijenas sobrevivan al proceso de quimioterapía y vuelvan a dañar la producción de celular beneficas.
De alguna forma no todos los pacientes con cancer pueden mantener el tratamiento de quimioterapía y recuperarse, de hecho quimioterapía o radiación combinados con trasnplantes autologos son de gran beneficio para algunos tipos de cancer, en otros tipos de cancer estos tipos de tratamientos han sido muy cuestionados pero prometen grandes resultados, algunos estudios realizados han mostrado la eficiencia en paciente que reciben transplantes de medula en contra de los que reciben una quimioterapía convencional.

Capítulo 12

Distribución de Probabilidad

12.1. Distribución de probabilidad

Considerando que podemos definir el numero de pasos N como la suma de los pasos a la izquierda n_1 mas los pasos a la derecha n_2:

$$N = n_1 + n_2 \tag{12.1}$$

Y definiendo a m como la pocisión final en la que los pasos a la derecha se consideran positivos y los pasos a izquierda negativos, podemos establecer:

$$m = n_1 - n_2 \tag{12.2}$$

Donde n_1 son los pasos a la izquierda y n_2 pasos a la derecha, definiendo de (1):

$$n_2 = N - n1 \tag{12.3}$$

Podemos sustituir en (2) y obtener:

$$m = 2n_1 - (N - n_1) \tag{12.4}$$

$$\Longrightarrow \; m = 2n_1 - N \tag{12.5}$$

De esta forma se pude definir n_1:

$$n_1 = \frac{1}{2}(N + m) \tag{12.6}$$

Tomando (3) para $n_1 = N - n_2$ y de forma similar sustituyendo en (2), podemos obtener para n_2:

$$n_2 = \frac{1}{2}(N - m) \tag{12.7}$$

Definiendo la formula para la probabilidad del estado final realizando todos los estados posibles que se tiene con n_1 y n_2 tenemos que :

$$P_N(m) = \frac{N!}{n_1!n_2!}p^{n_1}q^{n_2} \tag{12.8}$$

Utilizando esta formula podemos sustituir los términos previamente definidos n_1 y n_2 en nuestra ecuación , sin embargo tenemos que desconocemos la variable q, si bien la regla de la multiplicación nos dice que dado un evento que depende de otro, la probabilidad de este evento será la probabilidad total menos la probabilidad del evento del cual se depende, es decir:

$$q = 1 - p \tag{12.9}$$

, de esta forma obtenemos:

$$P_N(m) = \frac{N!}{[(N + m)/2]![(N - m)/2]!}p^{(N+m)/2}(1 - p)^{(N-m)/2} \tag{12.10}$$

12.2. Ecuación 22

$$\Delta u = u - \overline{u} \tag{12.11}$$

En esta ecuación se desea encontrar la distancia del valor de una variable discreta u, con respecto al valor promedio de la dsitribución de los valores discretos, de esta forma se puede representar:

$$\Delta u = u - \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)} \tag{12.12}$$

Cabe destacar que en esta distancia delta de u pueden ser valores negativos lo cual para casos especiales unicamente tomaremos en cuanta la magnitud de dicho valor.

12.3. Ecuación 23 y 24

De igual forma se puede obtener el valor medio de la distancia de un variable aleatoria con respecto a la media de la distribución de probabilidad, para este caso se aplica la generalidad de valor medio a la ecuación 12

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)}} \tag{12.13}$$

De esta forma podemos obtener:

$$\overline{\Delta u} = \overline{u} - \overline{\frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)}} \tag{12.14}$$

Lo cual podemos representar como

$$\overline{\Delta u} = \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)} - \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)} \tag{12.15}$$

$$\implies \overline{\Delta u} = \overline{u} - \overline{u} \tag{12.16}$$

12.4. Ecuación 25 y 26

Tomando la ecuación número 12 podemos obtener la varianza con base a la distacnia que se se tiene desde el punto de una variable discreta al valor de la media, definiendo la formula:

$$\overline{(u - \overline{u})^2} = \overline{u^2} - \overline{u}^2 \tag{12.17}$$

Desarrollando el binomio:

$$= \overline{u^2 - 2u\overline{u} + \overline{u}^2} \tag{12.18}$$

$$= \overline{u^2} - \overline{2u\overline{u}} + \overline{\overline{u}^2} \tag{12.19}$$

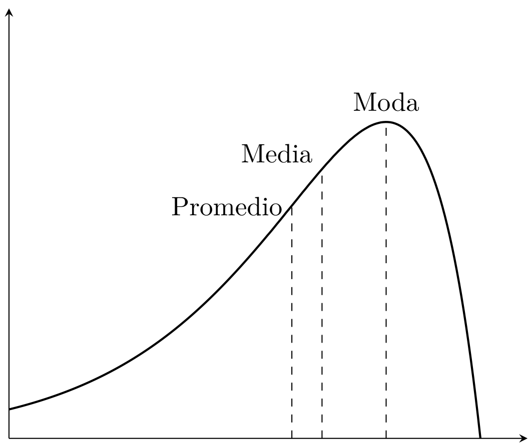
Lo cual podemos representar como:

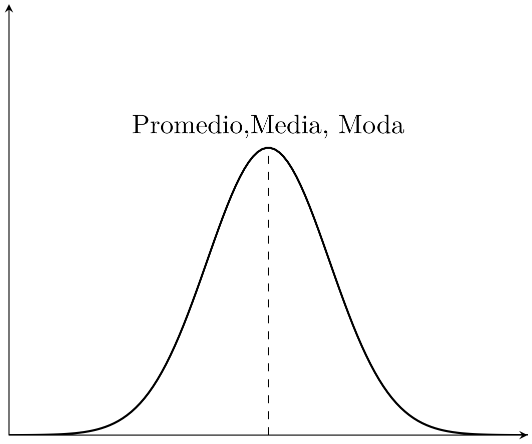
$$= \overline{u^2} - 2\overline{u}^2 + \overline{u}^2 \tag{12.20}$$

Finalmente obtenemos que :

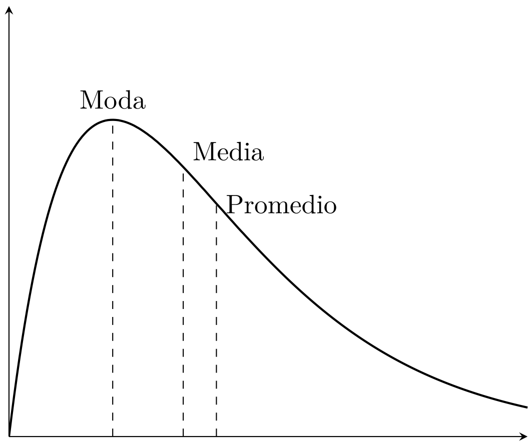
$$\implies = \overline{u^2} - \overline{u}^2 \tag{12.21}$$

12.5. Distribución de probabilidad skewed





12.6. Distribución positiva



Capítulo 13

Curvas ROC

13.1. Curvas ROC

Es un gráfico bidimensional que representa la proporción de verdaderos positivos frente la proporción de falsos positivos asociados a un biomarcador a lo largo de distintos puntos de corte. Las curvas ROC proporcionan un buen índice de la capacidad de una prueba diagnóstica para la calsificación de posibles resultados cuando estos son medidos en escala ordinal, por intervalo o continua. Son útiles también para comparar distintos procederes diagnósticos y seleccionar umbrales de decisión (puntos de corte entre los resultados positivos y negativos de la prueba).

13.2. Definción formal de curvas ROC

Formalmente una cirva ROC se define:
Dada una determinada medida proporcional por un biomarcador X realizada sobre una población de positivos X_p y la otra de negrativos X_n con función de distribución F_p y F_n respectivamente, podemos suponer que $E(X_n) \leq E(X_p)$ para clasificar a los individuos en un grupo a otro se debe fijar un criterio, punto de corte a partir del cual será considerado positivo. Fijado ese punto de corte x_0, la sensibilidad de la prueba vendrá determinada por:

$$1 - F_p(x_0) = 1 - P(X_p > x_0) \tag{13.1}$$

siendo

$$F_N(X_0) = P(X_N \leq x_0) \tag{13.2}$$

Su especificidad y quedando por tanto determinada la curva ROC por las coordenadas del vector:

$$(1 - F_N(x_0), 1 - F_p(x_0)) \tag{13.3}$$

Para $x_0 \in R$ Equivalentemente por la función que a cada $p \in [0, 1]$ le asocia:

$$R(p) = 1 - F_p[(1 - F_N)^{-1}(p)] = 1 - P(X_P \leq (1 - F_N)^1(p)) = P(X_p > (1 - F_N)^{-1}(p)) \tag{13.4}$$

Y por las propiedades de la función de distribución empírica,

$$R(p) = P(X_p > F_N^{-1}(1 - p) = P(F_N(X_p) \geq (1 - p) = P(1 - F_N(X_P) \leq p) = F_{1-FN}(X_p)(p) \tag{13.5}$$

Donde $F_{1-F_N(xp)}$ denota la función de distribución de la variable aleatoria $1 - F_N(X_p)$
El problema surge cuando no se conocen las distribuciones reales de la variable X en las poblaciones de positivos y negativos y apartir de ciertas muestras aleatorias deben estimarse. Una de las posibilidades es suponer que las poblaciones siguen algun módelo paramétrico, el gausiano usualmente paramétrico, siendo los más frecuentes sustituir las funciones de distribución Empíricas (FDE) o por las funciones de distribución Empíricas Suavizadas (FDES).

Este modelo de clasificación permite decidir cuáles de un conjunto de instancias están relacionadas o no por pertenecer a un mismo tipo o clase. El resultado puede ser un número real en cuyo caso el límite del clasificador entre cada clase debe determinarse por un valor umbral o puede ser un resultado discreto que indica directamente una de las clases.

13.3. Especificación de una cruva ROC

Para una curva ROC son necesarias las razones de Verdaderos Positivos (VPR) y de falsos positivos (FPR), VPR mide hasta qué punto un clasificador o prueba diagnóstica es capaz de detectar o clasificar los casos positivos correctamente, de entre todos los casos positivos disponibles durante la prueba. Por el otro lado la FPR define cuántos resultados positivos son incorrectos de entre todos los casos negativos disponibles durante la prueba.

El espacio se puede definir por FPR y VPR como ejes x e y, puede representar los intercambios entre verdaderos positivos y falsos positivos. Dado que VPR equivale a la sensibilidad y FPR es igual a 1-especificidad, la gráfica de una curva ROC es también conocida como la representación de sensibilidad.

El mejor método de predicción se situaría en un punto en la esquina superior izquierda, o coordenada $(0, 1)$ representando un 100 de sensibilidad (ningún falso negativo) y un 100 también de especificidad (ningún falso positivo).
A este punto $(0, 1)$ también se le llama una clasificación perfecta. Por el otro lado, una clasificación totalmente aleatoria daría un punto a lo largo de la línea diagonal, que se llama línea de no-discriminación, desde el extremo inferior izquierdo hasta la esquina superior derecha independientemente de los tipos de base positiva.

La diagonal que divide el espacio ROC representa que los puntos por encima de la diagonal son buenos resultados de clasificación , puntos por debajo de la línea de los resultados pobres.

En el caso de los arboles de decisión , dan como resultados a valores numéricos una etiqueta binaria. Cuando se usan estos clasificadores con un conjunto concreto de instancias para clasificar o predecir, el rendimiento del clasificador proporciona un único punto en el espacio ROC. Para un clasificador bayesiano o una red neuronal artificial la salida son valores de probabilidad que representan hasta qué punto una instancia pertenece a una de las dos clases.

El valor humbral debe determinar un punto en el espacio ROC. Si ante una determinada magnitud fijamos ese umbral en 0.8, la probabilidad de las instancias iguales o superiores serán predichas como positivas, y los valores por debajo como negativos. Por tanto podremos calcular una tabla de contingencia para ese umbral de 0.8, y encontrar el punto correspondiente en el espacio ROC. Si se varia el humbral se obtendría una tabla de contingencia y un nuevo punto en el espacio ROC.
VP=63 FP=28 91 FN=37 VN=72 109 100 100 200

VP=63	FP=28	91
FN=37	VN=72	109
100	VN=100	200

13.4. Ejemplo

Se tien un sistema para la detección del cancer donde la fiabilidad es del 98 % para el caso de resultados negativos y positivos, si se sabe con certeza que 1 de cada 200 personas en una población de 10000 personas padece cáncer. Si estas 10000 personas son sometidas a un análisis con este sistema, cuantas pruebas positivas arrojará dicho sistema?

VP=49	FP=199	248
FN=1	VN=9751	9752
50	VN=9950	1000

VPR=0.98 %
FPR=0.02 %
ACC=98 %

Capítulo 14

Paradojas y cifrado Cesar

14.1. Birthday Paradox

Se requiere determinar la probabilidad de que en un juego de futbol con 2 equipos de 11 jugadores cada uno mas el arbitro, existan dos o mas personas que cumplan el mismo dia de entre las 23 personas. De esta forma establecemos que un cumpleaÃśos puede ser cualquiera de los 365 dias sin considerar aÃśos bisiestos, de esta forma podemos establecer la probabilidad de un cumpleaÃśos como:

$$P_c = \frac{1}{365} \tag{14.1}$$

También se asume que las probabilidades de cada jugador son independientes, lo cual no sería cierto si se determinará que los jugadores tuvieran diferente fecha de nacimiento. Para encontrar la probabilidad supongamos la posibilidad de que los 23 cumpleaños sean diferentes, despues usando la regla de probabilidad restaremos 1 de este resultado para encontrar la probabilidad de dos o mas cumpleaños en el mismo dia.
Para el calculo de esta probabilidad se asume que cada jugador llega al campo de uno en uno, cuando el primero llega al campo nadie mas esta presente en el campo, es decir la probabilidad de que exista un cumpleaÃśos diferente es igual a 1 Cuando el segundo jugador entra al campo, el cumpleaÃśos debe de ser diferente al de la primer persona, entonces hay 364 elecciones de 365 esto quiere decir:

$$P_1 = \frac{364}{365} \tag{14.2}$$

Al entrar el tercer jugador la probabilidad de tener un cumpleaÃśos diferente con respecto a las dos personas en el campo es de 363 de 365 personas, usando el principio de multiplicación nos dice que para dos eventos independientes podemoos obtener la probabilidad de que ambos pasen multiplicando la probabilidad de cada uno, es decir:

$$= P_1 P_2 \tag{14.3}$$

$$= \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \tag{14.4}$$

De igual forma para el cuarto jugador tenemos:

$$= P_1 P_2 P_3 \tag{14.5}$$

$$= \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \tag{14.6}$$

Siguiendo este patron podemos establecer la probabilidad de que los cumpleaÃśos sean diferentes de los 23 jugadores:

$$p(k) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times ... \times \frac{365-k+1}{365} \tag{14.7}$$

De esta forma obtenemos el resultado de los cumpleaÃśos en diferente fecha de los 23 jugadores:

$$P(23) = 1 - 0.492703 \tag{14.8}$$

Supongamos el ejemplo de obtener la probabilidad de cumpleaños en Jupiter donde habitan determinados aliens, para esto consideramos un aÃśo de desde el sol a Jupiter, el tiempo que tarda Jupiter en dar una vuelta al sol es aproximadamente 4332.58 dias, pero el tiempo que tarda Jupiter en dar una vuelta sobre su eje es de 9 horas 55 minutos y 30 segundos, por lo tanto, un año en Jupiter contiene aproximadamente 10477 dias, de igual forma calculamos para 3 equipos de 40 aliens mas el arbitro, obteniendo la probabiidad de que existan dos cumpleaÃśos o mas el mismo dia de la siguiente forma:

$$P(121) = 1 - (\frac{10476}{10477} \times \frac{10475}{10477} \times .... \times \frac{10356}{10477}) = 0.501234 \tag{14.9}$$

14.2. Códigos secretos

Durante la segunda guerra mundial las 26 letras del alfabeto ingles fueron utilizadas en la máquina enigma como una form de codificar y decodificar determinado mensajes. Sin embargo la máquina engima tenia determinadas propiedad que hacian que el código pudiera ser descifrado.

14.3. Cifrado Cesar

Uno de los primero códigos de cifrado fue el cifrado Cesar el cual consistia de 23 letras las cuales se usaban para cifrar determinado mensaje unicamente recorriendo 4 pocisiones desde la letra elejida y sustituyendo por la letra obtenida, por ejemplo:
$JULIUSCAESAR$
$OZQNZXHFJXFW$

Para descrifrar el mensaje unicamente se tenian que cambiar hacia el otro lado las pocisiones del alfabeto, teniedo como resultado:
$OZQNZXHFJXFW$
$JULIUSCAESAR$
Se le considera un algoritmo de cifrado debido a que para realizar dicho proceso se incluyen los siguientes 4 procesos:
-Texto plano: Es el mensaje original
-Texto cifrado: versión encriptada -Algoritmo de encriptación: el método usado para convertir el texto plano en texto cifrado
-Algoritmo de deseincriptación: método usado para convertir el teto cifrado en texto plano
-Llave: información secreta para encriptar o desencriptar el texto.
El algoritmo de encriptación cesar puede expresarse mediante la siguiente formula:

$$n \implies n+5 \tag{14.10}$$

El algortimo usa las 26 letras del alfabeto del idioma ingles y para deseincriptar el texto se usa

$$n \implies n-5 \tag{14.11}$$

Podemos definir la clave de encriptación como k para ambos casos y decir que la regla para encriptación y desencriptación es:

$$n \implies n+k \tag{14.12}$$

$$n \implies n-k \tag{14.13}$$

14.4. La máquina enigma

Consistia de un teclado y una serie de rotores cada uno con 26 pocisiones correspondientes a las letras del alfabeto, las primeras versiones de las máquinas tenian tres motores mientras que las segundas incrementaban a cinco, El funcionamiento de cada rotor era generar las letras del mensaje ingresado en el teclado de tal forma que fuera cambiada cada letra ingresada desde el teclado.

Cuando una letra es cambiada por el primer rotor esta es cambiada al segundo, este crea otra letra y la pasa al tercer rotor, esta señal llega a un reflector que intercambia las letras resultantes a otro luga, regresando el resultado a los 3 rotores para generar el mensaje cifrado, el cual es colocado en 26 lamparas que se iluminan dependiendo la letra que resulte del mensaje cifrado

Los rotores de la máquina engima funcionan como el odometro de un auto el cual puede generar las permutaciones de una serie de dígitos del 0 al 9, en el caso de los rotores de la máquina engima pueden generar letras con las 26 elementos del alfabeto teniedo un total de posibles permutaciones:

$$3rotores = 26 \times 26 \times 26 = 17576 \tag{14.14}$$

14.5. Descifrando la máquina enigma

En 1937 se desarrollo un dispositivo para descrifrar el código generado por la máquina engima teniendo como base la fuerza bruta para generar el analisis de los 17576 posibles cifrados de los rotores, en 1939 Turing introdujo una nueva versión de este dispositivo conocido como "bombe.[el] cual tenia la función de deducir las caracteristicas iniciales del rotor y el orden de los rotores, a mediados de Junio de 1941 se usaron 5 máquinas para el descrifrado y en 1945 210, permitiendo descrifrar el código generado por enigma

Capítulo 15

Codificación UTF-8

15.1. Codificación UTF-8

Conjunto de caracteres es ASCII (CÃşdigo EstÃąndar Americano para el Intercambio de InformaciÃşn). Es ampliamente aceptado de que ASCII es el estándar de software más exitoso jamás creado. El ASCII actual se estandarizó en 1986 (ANSI X3.4, RFC 20, ISO/IEC 646:1991, ECMA-6) por el instituto nacional americano de estándares. ASCII es una codificación estrictamente de siete bits, lo que significa que utiliza patrones representables con siete dÃŋgitos binarios, lo que proporciona una gama de 0 a 127 en decimal. Estos incluyen 32 caracteres de control no visibles, la mayoría entre 0 y 31, con el carácter de control final, o de eliminación en el 127. Los caracteres del 32 al 126 son visibles: un espacio, marcas de puntuación, letras latinas y números. El octavo bit en ASCII se utilizó originalmente como un bit de paridad para el control de errores. Si no se desea control de errores, se deja a 0. Esto significa que, con ASCII, cada carácter se representa mediante un único byte. Los estándares ISO 8859 se desarrollaron para satisfacer estas necesidades. Estos estándares eran compatibles con ASCII, pero en lugar de dejar el octavo bit en blanco, lo utilizaron para permitir otros 127 caracteres en cada codificación. Las limitaciones de los estandares ISO 8859 aparecieron pronto y actualmente hay 15 variantes del estándar ISO 8859 (del 8859-1 al 8859-15). Fuera del rango de bytes compatible con ASCII de estos conjuntos de caracteres hay a menudo conflicto entre las letras representadas por cada byte. Para complicar aún mas la interoperabilidad entre las codificaciones de caracteres, en algunas versiones de Windows de Microsoft se utiliza la codificación Windows-1252 en lugar de los idiomas de Europa del oeste. Esto es un superconjunto de la codificación ISO 8859-1. Sin embargo, es diferente en algunos aspectos, estos conjuntos no conservan completamente la compatibilidad con ASCII.

Unicode prescinde de utilizar un solo byte, el límite tradicional de los conjuntos de caracteres. Utiliza 17 planos de 65,536 puntos de código para describir un máximo de 1,114,112 caracteres. Como el primer plano, también conocido como Plano MultilingÃije Básico o BMP, contiene prácticamente todos los caracteres que un usuario necesita. Mucha gente piensa erróneamente que Unicode es un conjunto de caracteres de 16 bits.

Unicode se ha mapeado de muchas formas diferentes, pero las dos más comunes son UTF (Formato de TransformaciÃşn Unicode) y UCS (Conjunto Universal de Caracteres). El número a continuaciÃşn de las siglas UTF indica el nÃžmero de bits en una unidad, por el contrario, el número a continuaciÃşn de las siglas UCS indica el nÃžmero de bytes. UTF-8 ha sido la forma mÃąs extendida de intercambiar texto Unicode debido a su naturaleza limpia de ocho bits y por tanto es el objeto de este documento.
UTF-8 permite trabajar a los usuarios en un entorno que cumple los estándares y que es aceptado internacionalmente, con una redundancia de datos relativamente baja. Es la forma preferida para transmitir caracteres que no son ASCII a través de Internet, mediante correo electrónico, IRC, o casi cualquier otro medio.

15.2. Wiki

Sitio web, cuyas páginas pueden ser editadas directamente desde el navegador, donde los usuarios crean, modifican o eliminan contenidos que, generalmente, comparten. Los textos o páginas wiki tienen títulos únicos. Si se escribe el título de una página wiki en algún sitio del wiki entre dobles corchetes esta palabra se convierte en un a la página correspondiente. . La mayor parte de las implementaciones de wikis indican en el localizador de recursos uniforme (URL) de la pÃągina el propio título de la página wiki.

Las aplicaciones de mayor peso y a la que le debe su mayor fama hasta el momento ha sido la creación de enciclopedias colectivas, género al que pertenece Wikipedia. Existen muchas otras aplicaciones más cercanas a la coordinación de informaciones y acciones, o la puesta en común de conocimientos o textos dentro de grupos.

La mayor parte de los wikis actuales conservan un historial de cambios que permite recuperar fácilmente cualquier estado anterior y ver que usuario hizo cada cambio, lo cual facilita el mantenimiento conjunto y el control de usuarios nocivos.

La principal utilidad de un wiki es que permite crear y mejorar las páginas de forma inmediata, dando una gran libertad al usuario, y por medio de una interfaz muy simple. Esto hace que mÃąs gente participe en su modificaciÃşn, a diferencia de los sistemas tradicionales, donde resulta mÃąs difÃŋcil que los usuarios del sitio contribuyan a mejorarlo. Dada la gran rapidez con la que se actualizan los contenidos, la palabra adopta todo su sentido. El documento de hipertexto resultante, lo produce típicamente una comunidad de usuarios. Muchos de estos lugares son inmediatamente identificables por su particular uso de palabras en mayúsculas, o texto capitalizado, su uso que consiste en poner en mayúsculas las iniciales de las palabras de una frase y eliminar los espacios entre ellas. Esto convierte automáticamente a la frase en un enlace.

Capítulo 16

Multiplicadores de Lagrange

16.1. Multiplicadores de Lagrange

El teorema de los multiplicadores de Lagrange se encontrarse probado en muchos textos. La demostración habitual se basa en el teorema de las funciones implícitas. Se utiliza el teorema que permite extraer de una sucesion acotada en una subsucesión convergente y el teorema que afirma que una funcion real continua definida en una bola cerrada de radio n alcanza su mínimo en algún punto.

Sea x un mínimo local y regular ($\bigtriangledown h_i(x^*)$ son linealmente independientes), es decir existen $\lambda_i^*, ..., \lambda_m^*$) tales que:

$$\bigtriangledown f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \bigtriangledown h_i(x^*) = 0 \tag{16.1}$$

La técnica de los multiplicadores de Lagrange te permite encontrar el máximo o el mínimo de una funcion multivariable,$f(x, y, \text{âĂę})$, cuando hay alguna restricción en los valores de entrada que puedes usar. Esta técnica solo se aplica a restricciones que se ven como:

$$g(x, y, \text{âĂę}) = c \tag{16.2}$$

g es otra función multivariable con el mismo espacio de entrada que f y c es alguna constante. La idea central es buscar puntos en donde las curvas de nivel de f y g sean tangentes entre si.

Esto es lo mismo que encontrar puntos en donde los vectores de los gradientes de f y g sean paralelos entre sí. Todo el proceso se puede reducir a hacer el gradiente de una cierta función, llamada el lagrangiano, igual al vector cero.

Ejemplo Podemos considerar un bidimensional en donde se tiene la función, $f(x, y)$, y queremos maximizarla, estando sujeta a la condición:

$$g(x, y) = c \tag{16.3}$$

donde c es una constante. Podemos visualizar las curvas de nivel de f dadas por

$$f(x, y) = c \tag{16.4}$$

para varios valores de dn, y el contorno de g dado por $g(x, y) = c$. Por ejemplo si se tiene de la curva de nivel donde $g = c$. Las curvas de nivel de f y g serán distintas, y la curva $g = c$ por lo general intersectará y cruzará muchos contornos de f. En general, moviéndose a través de la línea $g = c$ podemos incrementar o disminuir el valor de f. Sólo cuando g=c (el contorno que estamos siguiendo) toca tangencialmente (no corta) una curva de nivel de f, no se incrementa o disminuye el valor de f. Esto ocurre en el extremo local restringido y en los puntos de inflexión restringidos de f.

Se puede interpretar la condición de tangencia diciendo que los gradientes de f y g son vectores paralelos en el máximo. Introduciendo un nuevo escalar, λ, resolvemos. Una vez determinados los valores de λ, volvemos al número original de variables y así continuamos encontrando el extremo de la nueva ecuación no restringida.

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)F(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c) \tag{16.5}$$

de forma tradicional. Eso es, $F(x, y) = f(x, y)$ $F(x, y) = f(x, y)$ para todo (x, y) satisfaciendo la condición porque $g(x, y) - c$ es igual a cero en la restricción, pero los ceros de $\nabla F(x, y)$ están todos en $g(x, y) = c$

16.2. Función de distribución

La función de distribución caracteriza a la ley. En particular, F_X es une función creciente, continua por la derecha con un límite por la izquierda en todo punto.

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$. Leyes discretas. La función de distribución de una variable aleatoria discreta es una función en escalera. Si la variable aleatoria toma los valores x_k , $k = 1, 2, \ldots$, que se supone están ordenados en orden creciente, entonces la funcion de distribucion F_X toma los valores mutivariantes.

$$F_X(x)P[X = x_1]\} para\ x \in [x_1, x_2] \tag{16.6}$$

$$F_X(x)P[X = x_1]\} + ... + P[X = x_k] para\ x \in [x_k, x_{k+1}] \tag{16.7}$$

$$0 para\ x < x_0 \tag{16.8}$$

Capítulo 17

EigenValores y EigenVectores

17.1. Eigenvalores y Eigenvectores

Los prcesos para determinar valores propios y vectores propios son los siguientes:

1)Formar la ecuación caracteristica $|\lambda - A|$, que es una ecuación polinomial de grado n en la variable A.
2)Determine la raices reales de la ecuación caracteristica, valores propios de A.
3)Para todo valor propio λ determine los vectores caracteristicos correpondientes a λ, al resolver el sistema homógeneo $|\lambda - A| = 0$.

Ejemplos:

*Determinar los valores y vectores propios de de la transformacion $R^2 \to R^2$ tal que $f(x, y) = (2y, x)$

$$\begin{cases} \lambda x &= 2y \\ \lambda y &= x \end{cases}$$

Sustituimos:

$$\lambda^2 y = 2y \tag{17.1}$$

$$\lambda^2 = 2 \tag{17.2}$$

Lo valores propios de f son $\lambda \pm \sqrt{2}$
Tenemos que:

$$(x, y) = (\pm\sqrt{2}y, y) = (\pm\sqrt{2}, 1)y \tag{17.3}$$

Los vectores propios son:

$$(\pm\sqrt{2}, 1)t, t \in R \tag{17.4}$$

*Calcular los valores y vectores propios para una matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

La ecuación característica queda:

$$det(A - \lambda l) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

De tal forma:

$$(4 - l)(-3 - l) + 10 = l^{-}l - 2 = 0 \tag{17.5}$$

$$(l + 1)(l - 2) = 0 \tag{17.6}$$

Los valores propios son:

$$1_1 = -1, l_2 = 2 \tag{17.7}$$

Se busca el vector propio:
para $l_1 = -1$

$$det(a - \lambda_1 l)x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

*Dada la matriz, calcular los valores y vectores propios:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Primero se determina el polinomio caracteristico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \tag{17.8}$$

Los valores propios son:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(3 - \lambda)(\lambda - 4) \tag{17.9}$$

Para obtener el vector propio:
Se resuelve el sistema $(A - \lambda I)v = 0$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$2x - y = 0 \tag{17.10}$$

$$-x + y - z = 0 \tag{17.11}$$

$$-y + 2z = 0 \tag{17.12}$$

Resolviendo el sistema:

$$(1^a + 2 * 2^a \begin{cases} y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ son:

$$v = tv_1, con\ v_1 = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = 3$ son: $(A - 3I)v = 0$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Para $\lambda = 3$ lo vectores propios son:

$$v = tv_2, con\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Dadas las siguientes tranformaciones, encuentre los valores propios $T : R^2 \to R^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$ Sea:

$$T(x, y) = \lambda(x, y) = (x + y, 2x + y), donde\ se\ tiene \tag{17.13}$$

$$\begin{cases} \lambda x = x + y & \to \lambda x - x = y \\ \lambda y = 2x + y \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\lambda(\lambda x - x) = 2x + \lambda x - x \tag{17.14}$$

$$\lambda^2 x - \lambda x = x + \lambda x \tag{17.15}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \tag{17.16}$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2} \tag{17.17}$$

Los valores propios son $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$, de esta forma:

$$(x, y) = (x, \pm\sqrt{2}x) = (1, \pm\sqrt{2})x \tag{17.18}$$

Con esto tenemos que los vectores propios son:

$$(1, \pm\sqrt{2})t, t \in R \tag{17.19}$$

*Dada la matriz, enecuentre los valores y vectores propios:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right.$$

Formamos el sistema de ecuaciones:

$$A - \lambda I = \left\{ \begin{array}{ll} 2-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{array} \right.$$

Tenemos:

$$-(2-\lambda)(1+\lambda) = 0, \lambda = -1, 2 \tag{17.20}$$

$$\lambda = 2 \implies \left| \begin{array}{ll} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right|.$$

$$\implies \left| \begin{array}{ll} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Por lo tanto $x_2 = 0$ y x es multiplo de :

$$\left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right|.$$

Para $\lambda = -1$ tenemos:

$$\lambda = -1 \implies \left| \begin{array}{ll} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Por lo tanto $3x_1 + 1x_2 = 0$ y x es un multiplo de:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{array} \right|.$$

Los valores propios son -1,2 y los vectores propios son:

$$a \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right|.$$

$$a \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{array} \right|.$$

*Determina los valores propios y vectores propios para :

$$a \left| \begin{array}{ll} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{array} \right|.$$

Solución: obtenemos la ecuación caracteristica:

$$A - \lambda = \left| \begin{array}{ll} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{array} \right|.$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 = 0, \lambda = 2, 3 \tag{17.21}$$

$$\lambda = 2 \implies \left| \begin{array}{ll} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{array} \right|.$$

$$\implies \left| \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Por lo tanto el valor propio es $x_1 = -2x_2$, y $\bar{x}$ es multiplo de :

$$\left| \begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array} \right|.$$

Ademas:

$$\lambda = 3 \implies \left| \begin{array}{ll} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{array} \right|.$$

$$\implies \left| \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto $x_1 = -x_2$ y $\bar{x}$ es un multiplo de:

$$\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Los valores propios son 2 y 3 y los vectores propios:

$$a\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

$$a\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

*Determina los valores y vectores propios de la siguienta matriz:

$$a\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

$$a\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

*Determina los valores propios y vectores propis de la siguiente matriz:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Los valores propios estan dados por: $\lambda_1 = -5$ $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 10$ y los vectores propios por

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

*Determina los valores propios y vectores propios de la matriz:

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Los valores propios son dados por $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 2$, el vector propio estaa dado porla ecuación:

$$2x_1 + 2x_3 = 0 \tag{17.22}$$

$$4x_2 = 0 \tag{17.23}$$

Obteniendo el vector :

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Capítulo 18

Teorema de Bayes

18.1. Ejercicios teorema de Bayes

18.2. Problema 1

Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43 %, 26 % y 31 % de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8 %, 2 % y 1.6 % del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso, a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cual es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B?

Se definen los eventos:

D = evento de que el producto seleccionado sea defectuoso
A = evento de que el producto sea fabricado en la mÃąquina A
B = evento de que el producto sea fabricado por la mÃąquina B
C = evento de que el producto sea fabricado por la mÃąquina C

$$P(B|D) = \frac{p(B)p(C|D)}{p(D)} = \frac{p(B)p(D|B)}{p(A)p(D|A) + p(B)p(D|B) + p(C)p(D|C)} \tag{18.1}$$

$$P(B|D) = \frac{(0.26 * 0.02)}{(0.43 * 0.08 + 0.26 * 0.02 + 0.31 * 0.016)} \tag{18.2}$$

$$= \frac{0.0052}{0.04456} \tag{18.3}$$

$$= 0.116697 \tag{18.4}$$

18.3. Problema 2

Una empresa recibe visitantes en sus instalaciones y los hospeda en cualquiera de tres hoteles de la ciudad, Palacio del Sol, Sicomoros o Fiesta Inn, en una proporción de 18.5, 32 y 49.5 respectivamente, de los cuales se ha tenido información de que se les ha dado un mal servicio en un 2.8, 1 y 4 respectivamente, Si se selecciona a un visitante al azar y se encuentra que el no se quejó del servicio prestado, cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en el Palacio del Sol?, Se definen las probabilidades: NQ = evento de que un visitante no se queje del servicio
PS = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol
S = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicomoro
FI = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$P(PS|NQ) = \frac{PS \cap NQ}{p(NQ)} \tag{18.5}$$

$$P(B|D) = \frac{(0.185 * 0.972)}{(0.185 * 0.972 + 0.32 * 0.99 + 0.495 * 0.96)} \tag{18.6}$$

$$= \frac{0.17982}{(0.17982 + 0.3168 + 0.4752} \tag{18.7}$$

$$= \frac{0.17982}{0.97182} \tag{18.8}$$

$$= 0.1850342 \tag{18.9}$$

18.4. ejemplo

Tomando el problema anterior, si se selecciona a un visitante al azar Â£cuÃąl es la probabilidad de que no se le haya dado un mal servicio?

Definimos las probabilidades:

NQ = evento de que un visitante no se queje del servicio
PS = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol
S = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicomoro
FI = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$P(NQ) = p(PS)p(NQ|PS) + p(S)p(NQ|S) + p(FI)p(NQ|FI) \tag{18.10}$$

$$= 0.185 * 0.972 + 0.32 * 0.99 + 0.495 * 0.96 \tag{18.11}$$

$$= 0.17982 + 0.3168 + 0.4752 \tag{18.12}$$

$$= 0.97182 \tag{18.13}$$

4 En una sala de pediatría de un hospital, el 60porciento de los pacientes son nińas. De los nińos el 35poorciento son menores de 24 meses. El 20 porciento de las nińas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar: Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una nińa. Definimos los eventos:

Suceso H: seleccionar una nińa.

Suceso V: seleccionar un nińo.

Suceso M: infante menor de 24 meses.

Solución:

Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica comÃžn de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea nińa una infante menor de 24 meses será:

$$P(H|M) = \frac{P(H) * P(M|H)}{P(H) * P(M|H) + P(V) * P(M|V)} \tag{18.14}$$

$$= \frac{0.6 * 0.2}{(0.6 * 0.2) + (0.4 * 0.35)} \tag{18.15}$$

$$= \frac{0.12}{0.26} = 0.46 \tag{18.16}$$

Capítulo 19

Cadenas de Markov

19.1. Cadenas de Markov

Una suseción de observaciones $X_1, X_2, ...$ se denomina proceso estocástico, si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente, sin embargo si se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores en cualquier instante de tiempo. X_1 define los estados iniciales del proceso mientras que X_n define el estado del proceso en el instante de tiempo n Para cada posible valor del estado inicial y de los sucesivos de los estados $X_n, n = 2, 3...$, Se puede definir:

$$P(X_{n+1} = S_n | X_1 = S_1, X_2 = S_2, ..., X_n = S_n \tag{19.1}$$

En un proceso estocástico los resultados dependen de otros, ocurre cuando el resultado en cada etapa sólo depende del resultado de la etapa anterior y no de cualquiera de los resultados previos. Tal proceso se denomina proceso de Markov o cadena de Markov. Estas cadenas reciben su nombre del matemático ruso Andrei Andreevitch Markov (1856-1922), estas cadenas tiene memoria, recuerdan el último evento y eso condiciona las posibilidades de los eventos futuros.
Este tipo de proceso presenta una forma de dependencia simple, pero muy útil en muchos modelos, entre las variables aleatorias que forman un proceso estocástico.

Se conoce como cadena de Markov a la sucesión de pruebas similares en un experimento en la cual cada prueba tiene el mismo número finito de resultados posibles y la probabilidad de cada resultado para una prueba dada depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo.

En un cadena de Markov si el estado actual X_n y los estados previos $X_1...X_{n-1}$ son conocidos, esto implica la probabilidad de un estado futuro X_{n+1} no depende de los estados anteriores $X_1...X_{n-1}$ y solamente del estado actual X_n, por ejemplo para $n = 1, 2, ...$ y para la sucesión de estados $S_1....s_n$

19.2. Propiedad de Markov

Dada una secuencia de variables aleatorias X_1, X_2, X_3 tales que el valor de X_n es el estado del proceso en el tiempo n. Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por si sola, entonces

$$P(X_n + 1 = \frac{x_{n+1}}{X_n} = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ...X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{X_n} = x_n) \tag{19.2}$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante i. Esta identidad es la denominada propiedad de Markov es el estado en $t + 1$ sólo depende del estado en t y no de la evolución anterior del sistema.

19.3. Matriz de transición

Los elementos de la matriz de transición representan las probabilidades de que en el próximo ensayo el estado del sistema del partido indicado a la izquierda de la matriz cambie al estado del partido indicado arriba de la matriz. En un proceso de Markov en que el sistema posee n estados posibles, dados por los números $1, 2, 3,$ âĂę.$, n$. Denotemos p_{ij} a la probabilidad de que el sistema pase al estado j después de cualquier ensayo en donde su estado era i antes del ensayo. Los números p_ij se denominan probabilidades de transición y la matriz nxn $P = (P_{ij})$ se conoce como matriz de transición del sistema.

La suma $p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{in} = 1$. Esta suma representa la probabilidad de que el sistema pase a uno de los estados $1, 2,$ âĂę.$, n$ dado que empieza en el estado i. Ya que el sistema ha de estar en uno de estos n estados, la suma de probabilidades debe ser igual a 1. Esto significa que los elementos en cualquier renglón de la matriz detransición deben sumar 1.Y cada elemento debe ser $P_{ij} \geq 0$.
En la matriz de transición los elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Dada una cadena de Markov con k estados posibles $s_1, ..., s_k$ y probabilidades de transición estacionarias.

$$Si\ p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) \implies P = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}.$$

Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estadoi se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto nÃžmero de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es accesible desde el estado i. Si consideramos el ejemplo 1 podemos afirmar que el estado 3 es accesible desde el estado 1. AÃžn cuando en una etapa no podemos llegar desde el estado 1 al estado 3, si podemos hacerlo al cabo de $2, 3, ..., n$ etapas. Cabe destacar en este punto que es relevante que exista una probabilidad no nula que comenzando en 1 se pueda llegar a 3 al cabo de un cierto número de etapas no importando el valor exacto de esta probabilidad para un n cualquiera. En cuanto al ejemplo 2, se puede verificar que el estado 2 es accesible desde el estado 3, sin embargo, el estado 2 no es accesible desde el estado 4 (esto porque una vez que se llega al estado 4 no se sale de ese estado). Finalmente, dos estados que son accesibles viceversa se dice que se comunican y que pertenecen a una misma clase de estados.

En cambio si al menos existen 2 clases de estados la cadena ya no es irreducible. Si tenemos 2 estados que no se comunican (esto porque no son accesibles viceversa) estos estados perteneceran a distintas clases de estados. En el ejemplo 2 existen 3 clases de estados 0, 1,2,3, 4 (en consecuencia no es una cadena irreducible). En cuanto al estado 0 y estado 4, estos son estados absorventes debido a que una vez que se accede a ellos la probabilidad de seguir en ese estado es de un 100. Un estado absorvente define una clase de estados por si mismo.

Capítulo 20

Transplante médula osea

Algunos médicos en Estados unidos recomiendan a sus pacientes un transplante de médula ósea, el cual desde un punto de vista científico puede seguir siendo experimental, incluso letal para algunos pacientes, en este documento se describe el proceso de tranplante de médula ósea que en algunos casos puede ser una buena alternativa para ciertos pacientes, abriendo las puertas de un nuevo tratamiento.

20.1. Introducción

El término transplante de medula osea hace referencia en reparar aquellas cavidades de los huesos que se encuentren afectadas, haciendo enfasis en las celulas que componen la médula osea, es decir las celulas madre, que normalmente residen en la médula donde tienen la capacidad de generar celulas a traves de la sangre.
En enfermedades como la anemía la medula de los huesos puede llegar a ser dañada, degenerandola y provocando que la producción de celulas en la médula osea sea menor. Debido a que las celulas que se producen en la medula osea son mayormente responsables de conbatir daños que sufre el cuerpo tales como virus o bacterias, los metodos utilizados como quimioterapía pueden dañar también la médula.

20.2. Proceso de transplante de médula

El objetivo principal de un transplante de medula es tratar de reemplazar con sangre sana que produsca correctamente las celulas que se generan, esta sangre proveniente de un donante ayudará a que la producción de celulas beneficas en la medula sea mejor. Sin embargo tratamientos como la quimioterapía pueden llegar a matar algunas otras celulas que son generadas en el cabello, estomago o intestinos, es por eso que durante los tratamientos las personas que son sometidas a ellos pierden de forma momentanea el cabello y tienen algunos otros sintomas.
El primer proceso que se realiza en la quimioterapía es utilizar radiación para matar todas aquellas celulas cancerijenas, despues las celulas madre son inyectadas en las cavidades del hueso donde una vez situadas generan la medula. Este proceso normalmente dura entre dos y cinco semanas, débidoa que les lleva mayor tiempo alcanzar una determinada madurez. Desafortunadamente existen muchos pacientes que mueren durante el transcurso de este proceso de madurez de las celulas debido a que a raíz de que el proceso no ha sido terminado el cuerpo se encuentra expuesto a multiples daños.

Normalmente un familiar cercano del paciente puede realizar la donación de dichas celulas, sin embargo en el proceso de implantación de las celulas en el paciente enfermo, dichas celulas donadas pueden llegar a confundir el tejido residente y por lo tanto atacarlo, este riesgo incrementa si las celulas de la médula provienen de un familiar no cercano al paciente. El proceso mas comun en transplantes de medula llamado autologo transplante es donde se toman las celulas del paciente antes del proceso de quimioterapía, en esos casos no existe riesgo de ataque por parte de las celulas implantadas. Sin embargo si la medula de un paciente con cancer puede ser contaminada por un tumor de celular, causando que las celulas cancerijenas sobrevivan al proceso de quimioterapía y vuelvan a dañar la producción de celular beneficas.
De alguna forma no todos los pacientes con cancer pueden mantener el tratamiento de quimioterapía y recuperarse, de hecho quimioterapía o radiación combinados con trasnplantes autologos son de gran beneficio para algunos tipos de cancer, en otros tipos de cancer estos tipos de tratamientos han sido muy cuestionados pero prometen grandes resultados, algunos estudios realizados han mostrado la eficiencia en paciente que reciben transplantes de medula en contra de los que reciben una quimioterapía convencional.

20.3. Conclusiones

A diferencia de un tratamiento convencional como la quimioterapía, los transplantes de médula osea puden ser una opción mas fiable para algunos pacientes, esto dependerá de gran medida de las condiciones de la células del donador y la compatibilidad con las células del paciente, aun así este proceso puede llegar a dar buenos resultados debido a la complejidad del mismo y el proceso que se cuenta con mayor cuidado que en otro tipo de tratamiento.

Capítulo 21

Análisis de componentes principales

21.1. Ejemplo

Se desea obtener el análisis de componentes principales de la siguiente tabla recoge las valoraciones medias que han concedido los encuestados a cada una de las marcas en las tres caracterÄśisticas consideradas. AsÄśí la marca A tiene una calificación media de 2 en la caracterÄśistica elegancia, de 3 en comodidad y 6 en deportividad.

MARCA	ELEGANCIA	COMODIDAD	DEPORTIVIDAD
A	2	3	6
B	3	2	4
C	4	5	4
D	5	5	4
E	8	9	6
F	9	7	7

Antes de aplicar el ACP debe comprobarse si es necesario, es decir, si la correlación entre las variables analizadas es lo suficientemente grande como para justificar la factorización de la matriz de coeficientes de correlaciÃşn. Esta comprobaciń puede hacerse mediante el test de Bartlett (1950), que parte de la hipótesis nula de que la matriz de coeficientes de correlación no es significativamente distinta de la matriz identidad. Bartlett calcula un estadístico basado en el valor del determinante de la matriz de coeficientes de correlación del siguiente modo.

$$-[n-1-(2k+5)/6]ln|R| \approx \lambda^2(k^2-k)/2 \tag{21.1}$$

donde k es el nÃžmero de variables de la matriz, n el tamańo de la muestra y R la matriz de correlaciones. En nuestro ejemplo la matriz de correlaciones entre las caracterÄśísticas es:

	ELEGANCIA	COMODIDAD	DEPORTIVIDAD
elegancia	1.00	0.892	0.585
comodidad	0.892	1.00	0.519
deportividad	0.585	0.519	1.00

y la prueba de esfericidad de Bartlett para esta matriz de correlaciones es: Bartlett's sphericity test chi.square = 6.341 , df = 3 ,
p-value = 0.0961431

El resultado no deberÄśíamos continuar nuestro análisis ya que con un nivel de significación del 0,05 no rechazamos la hipótesis nula de esfericidad. Sin embargo, la distribución ji-cuadrado asociada es asintótica y supone la normalidad multivariante de los datos. En nuestro caso podemos dudar de la normalidad conjunta y, sobre todo, el tamańo muestral es muy pequeńo n = 6

El siguiente paso consiste en la obtención de los valores y vectores propios de la matriz de covarianzas muestral o de la matriz de coeficientes de correlación que se obtienen a partir de la matriz de datos. La elección de una u otra matriz para realizar el ACP es una cuestión controvertida. En este caso vamos a utilizar la matriz de correlaciones.

Importancia de componentes:

|	componente 1	componente2	componente 3
Desviación estandar	1.5312	0.7421	0.3233
Varirable de proporción	0.7815	0.1835	0.3484
Proporción acumululativa	0.7815	0.965	1.000

La varianza asociada a cada factor (el cuadrado de las desviaciones estándar) viene expresada por su valor propio o raíz caracterÄśística de la matriz de coeficientes de correlación (en este caso) o de la matriz de covarianzas.
Varianzas:

componente 1	componente2	componente 3
2.3470	0.550744	0.1045

Los otros elementos importantes en un ACP son los vectores propios asociados a cada valor propio

	componente 1	componente2	componente 3
Elegancia	-0.619	-0.290	0.730
Comodidad	-0.604	-0.419	-0.768
Deportividad	-0.502	0.861	

	componente 1	componente2	componente 3
proporcion varible	0.333	0.333	0.333
acumulación variable	0.333	0.667	1.00

Cada columna representa una combinación lineal (loadings) de las variables originales que proporcionan las componentes principales o factores. Así la primera componente se obtiene con la siguiente combinación.
newline

$$F_1 = -0.619 * elegancia - 0.604 \tag{21.2}$$

Observamos que la primera componente tiene todos los coeficientes negativos. De manera que, aunque no es obligatorio, por necesidades de interpretación y estéticas cambiaremos todos esos coeficientes (de la primera componente) de signo. En consecuencia también debemos cambiar las puntuaciones o scores de la primera componente.

	componente 1	componente2	componente 3
elegancia	0.619	-0.290	0.730
comodidad	0.604	-0.419	- 0.678
deportividad	0.502	0.861	–

21.2. Ejemplo

Realizar el análisis de componentes principales de la siguiente tabla que muestra el beneficio y la dimensiÃşn de 9 explotaciones bovinas ecológicas?
Solución: se utilizan las siguientes dos variables:
Beneficio: costo por explotación
Dimensión: inversión por explotación

explotación	inversión	beneficio
1	775.104	23.795
2	775.218	58.778
3	700.96	1.53
4	674.063	-12.756
5	631.003	14.729
6	537.744	9.059
7	489.155	12.54
8	448.465	13.495
9	445.852	-34.828

Primero debemos encontrar la relación entre los datos y despues eliminar el problema de escala, tipificando las variables.

explotación	inversión	beneficio	inversión	beneficio
1	775.104	23.795	1.257	0.556
2	775.218	58.778	1.258	1.927
3	700.96	1.53	0.697	-0.316
4	674.063	-12.756	0.494	-0.875
5	631.003	14.729	0.169	0.201
6	537.744	9.059	-0.535	-0.020
7	489.155	12.54	-0.902	0.115
8	448.465	13.495	-1.209	0.152
9	445.852	-34.828	-1.229	1.749

La matriz de correlación es igual a la matriz de covarianzas :

$$\sum_{componentes} = \sum_{variables} = \sum variables\ \ tipificadas \tag{21.3}$$

Despues obtenemos los componente principales, calculamos las raíces de la matriz de covarianzas

$$\lambda_1 = 1.54603 \quad \lambda_2 = 0.45397 \tag{21.4}$$

La función de cada componente principal es igual al valor de la raíz característica.
La primera componente principal se obtiene de forma que maximice la función.

- Si la variable esta tipificada, la función CP1 >1

. -Si las variables originales están incorrelacionadas, las CP coincidirán exactamente con las variables originales coincidirán exactamente con la variables originales.

Enelcasode2variables, G de CP1 = G de una de las variables tipificadas + coeficiente de correlación: 1 + 0,54603 = 1,54603.

$$\lambda_1 = 1,54603 \tag{21.5}$$

$$\lambda_2 = 0,45397 \tag{21.6}$$

Cada raíz tiene asociado un vector característico, que con dos variables:

Si los datos están tipificados, siempre con 2 variables se obtienen los siguientes vectores:

u_1 0.7071
0.7071

u_2 0.7071
0.7071

Los coeficientes de los vectores son los coeficientes que hay aplicar a las variables tipificadas para obtener los componentes principales:
componente principal 1

$$u_{11}X_1 + u_{12}X_2 \tag{21.7}$$

componente principal 2

$$u_{21}X_1 + u_{22}X_2 \tag{21.8}$$

Los coeficientes de los vectores son los coeficientes que hay aplicar a las variables tipificadas para obtener los componentes principales

$$componente1 = 0.7071 \times inversion + 0.7071 \times beneficio \tag{21.9}$$

$$componente2 = 0.7071 \times inversion - 0.7071 \times beneficio \tag{21.10}$$

Una suseción de observaciones $X_1, X_2, ...$ se denomina proceso estocástico, si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente, sin embargo si se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores en cualquier instante de tiempo. X_1 define los estados iniciales del proceso mientras que X_n define el estado del proceso en el instante de tiempo n Para cada posible valor del estado inicial y de los sucesivos de los estados $X_n, n = 2, 3...$, Se puede definir:

$$P(X_{n+1} = S_n | X_1 = S_1, X_2 = S_2, ..., X_n = S_n \tag{21.11}$$

En un proceso estocástico los resultados dependen de otros, ocurre cuando el resultado en cada etapa sólo depende del resultado de la etapa anterior y no de cualquiera de los resultados previos. Tal proceso se denomina proceso de Markov o cadena de Markov. Estas cadenas reciben su nombre del matemático ruso Andrei Andreevitch Markov (1856-1922), estas cadenas tiene memoria, recuerdan el último evento y eso condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Este tipo de proceso presenta una forma de dependencia simple, pero muy útil en muchos modelos, entre las variables aleatorias que forman un proceso estocástico.

Se conoce como cadena de Markov a la sucesión de pruebas similares en un experimento en la cual cada prueba tiene el mismo número finito de resultados posibles y la probabilidad de cada resultado para una prueba dada depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo.

En un cadena de Markov si el estado actual X_n y los estados previos $X_1...X_{n-1}$ son conocidos, esto implica la probabilidad de un estado futuro X_{n+1} no depende de los estados anteriores $X_1...X_{n-1}$ y solamente del estado actual X_n, por ejemplo para $n = 1, 2, ...$ y para la sucesión de estados $S_1....s_n$

Dada una secuencia de variables aleatorias X_1, X_2, X_3 tales que el valor de X_n es el estado del proceso en el tiempo n. Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por si sola, entonces

$$P(X_n + 1 = \frac{x_{n+1}}{X_n} = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ...X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{X_n} = x_n) \tag{21.12}$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante i. Esta identidad es la denominada propiedad de Markov es el estado en $t + 1$ sólo depende del estado en t y no de la evolución anterior del sistema.

Matriz de transición Los elementos de la matriz de transición representan las probabilidades de que en el próximo ensayo el estado del sistema del partido indicado a la izquierda de la matriz cambie al estado del partido indicado arriba de la matriz. En un proceso de Markov en que el sistema posee n estados posibles, dados por los números $1, 2, 3,$ âĂę.$, n$. Denotemos p_{ij} a la probabilidad de que el sistema pase al estado j después de cualquier ensayo en donde su estado era i antes del ensayo. Los números p_ij se denominan probabilidades de transición y la matriz nxn $P = (P_{ij})$ se conoce como matriz de transición del sistema.

La suma $p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{in} = 1$. Esta suma representa la probabilidad de que el sistema pase a uno de los estados $1, 2,$ âĂę.$, n$ dado que empieza en el estado i. Ya que el sistema ha de estar en uno de estos n estados, la suma de probabilidades debe ser igual a 1. Esto significa que los elementos en cualquier renglón de la matriz detransición deben sumar 1.Y cada elemento debe ser $P_{ij} \geq 0$.

En la matriz de transición los elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

MATRIZ DE TRANSICIÓN EN UN SOLO PASO

Dada una cadena de Markov con k estados posibles $s_1, ..., s_k$ y probabilidades de transición estacionarias.

$$Si\ p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) \implies P = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}.$$

Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estadoi se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto nÃžmero de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es accesible desde el estado i. Si consideramos el ejemplo 1 podemos afirmar que el estado 3 es accesible desde el estado 1. AÃžn cuando en una etapa no podemos llegar desde el estado 1 al estado 3, si podemos hacerlo al cabo de $2, 3, ..., n$ etapas. Cabe destacar en este punto que es relevante que exista una probabilidad no nula que comenzando en 1 se pueda llegar a 3 al cabo de un cierto número de etapas no importando el valor exacto de esta probabilidad para un n cualquiera. En cuanto al ejemplo 2, se puede verificar que el estado 2 es accesible desde el estado 3, sin embargo, el estado 2 no es accesible desde el estado 4 (esto porque una vez que se llega al estado 4 no se sale de ese estado). Finalmente, dos estados que son accesibles viceversa se dice que se comunican y que pertenecen a una misma clase de estados.

En cambio si al menos existen 2 clases de estados la cadena ya no es irreducible. Si tenemos 2 estados que no se comunican (esto porque no son accesibles viceversa) estos estados perteneceran a distintas clases de estados. En el ejemplo 2 existen 3 clases de estados 0, 1,2,3, 4 (en consecuencia no es una cadena irreducible). En cuanto al estado 0 y estado 4, estos son estados absorventes debido a que una vez que se accede a ellos la probabilidad de seguir en ese estado es de un 100. Un estado absorvente define una clase de estados por si mismo.

Capítulo 22

Distribución normal

Distribucion normal tabla

.	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000000	0.003989	0.007978	0.011966	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106420	0.110261	0.114092
0.3	0.117911	0.121720	0.125516	0.129300	0.133072	0.136831	0.140576	0.144309	0.148027	0.151732
0.4	0.155422	0.159097	0.162757	0.166402	0.170031	0.173645	0.177242	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198468	0.201944	0.205401	0.208840	0.212260	0.215661	0.219043	0.222405
0.6	0.225747	0.229069	0.232371	0.235653	0.238914	0.242154	0.245373	0.248571	0.251748	0.254903
0.7	0.258036	0.261148	0.264237	0.267305	0.270350	0.273373	0.276373	0.279350	0.282305	0.285236
0.8	0.288145	0.291030	0.293892	0.296731	0.299546	0.302337	0.305105	0.307850	0.310570	0.313267
0.9	0.315940	0.318589	0.321214	0.323814	0.326391	0.328944	0.331472	0.333977	0.336457	0.338913

22.1. Distribución normal

un experimento produce observaciones numéricas que varían de muestra a muestra estase define como una función con valores numéricos definida sobre un espacio muestral.
CLASIFICACIÓN.

22.2. Variable aleatoria discreta.

-Es una variable que solo puede asumir un conjunto numerable de valores.

22.3. Variable aleatoria continua

- Es una variable que puede asumir el numero infinitamente grande de valores correspondientes a los puntos sobre un intervalo de lÃŋnea recta.

Distribuciones de probabilidad para variable aleatoria discretas: binomial, hipergeométrica, geométrica, poisson. Distribuciones de probabilidad para var. alea. continuas; normal, gamma, exponencial, t-student, chi-cuadrada y F- snedecor. Para cada distribución se deben conocer sus propiedad.

Binomial
- El experimento consiste en n intentos repetidos
-Los resultados de cada uno de los intentos puede ser exito o fracaso
- La probabilidad de exito âĂIJpâĂİ, permanece constante para todos los intentos.
- Los intentos repetidos son independientes.

Hipergeométrica
- Una muestra aleatoria de tamaÃśo n se selecciona sin reemplazo de un total de N resultados o artÃŋculos totales.
- K resultados o artÃŋculos del total de N pueden clasificarse como éxitos y N âĂŞ K como fracasos.

Geométrica
- Si repetidos intentos independientes pueden resultar en un éxito con una probabilidad p y en un fracaso con una probabilidad de $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número del intento en el cual ocurre el primer éxito es:

$$g(x, p) = pqx - 1 \tag{22.1}$$

Capítulo 23

Funciones de distribución

23.1. Conceptos previos

$$Media\ \ o\ \ valor\ \ esperado \mu = \begin{cases} \sum_k^n x_k f(x_k) \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \end{cases} \tag{23.1}$$

$$Varianza\ \ \sigma^2 = \begin{cases} \sum (x_k - \mu)^2 f(x_k) \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \end{cases} \tag{23.2}$$

$$Desviación\ estandar\ \sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{23.3}$$

23.2. Distribución Bernoulli:

En este tipo de distribución unicamente se consideran dos posibles resultados para cada experimento: caso de fracaso y caso de éxito, se define el espacio muestral como $\{V, F\}$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X=0) = 1-p \\ f(1) &= P(X=1) = p \end{aligned} \tag{23.4}$$

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \ \ x = 0, 1 \tag{23.5}$$

23.3. Distribución binomial

¿ Cuál es la probabilidad de obtener como máximo dos veces el número 6 en 5 lanzamientos de forma independiente de un dado ?

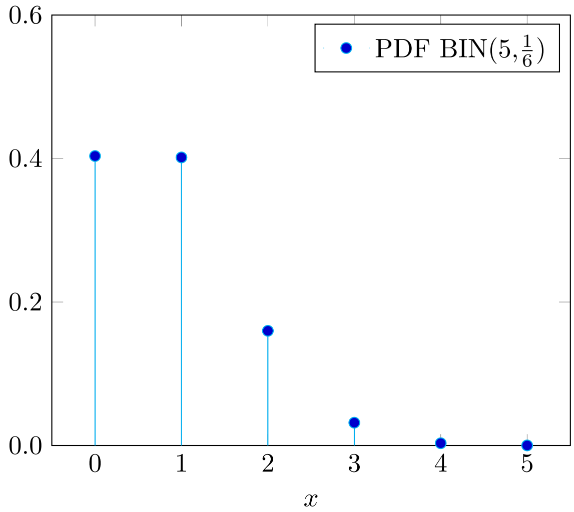
$$P(6) = p^x (1-p)^{n-x}\ En\ un\ solo\ lanzamiento \tag{23.6}$$

Para dos veces un 6

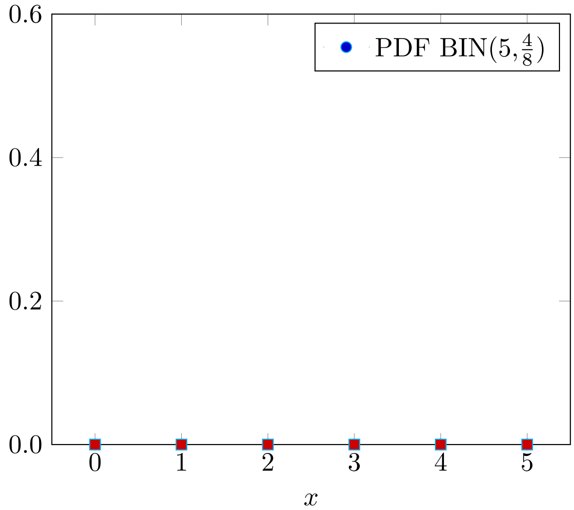
$$\begin{vmatrix} \{6,6,3,4,5\} \\ \{3,6,6,4,5\} \\ \\ \\ \\ \{3,1,3,6,6\} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, ...n \\ &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{5-2} \\ \\ &= 0.158 \end{aligned} \tag{23.7}$$

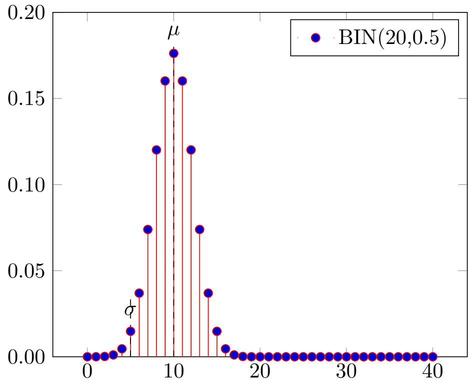
$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= f(0) + f(1) + f(2) \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{k=0}^{2} (\tbinom{5}{k})(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{5-k} \\
&= (\tbinom{5}{0})(\frac{1}{6}^0)(\frac{5}{6}^5) + (\tbinom{5}{1})(\frac{1}{6}^1)(\frac{5}{6}^4) + (\tbinom{5}{2})(\frac{1}{6}^2)(\frac{5}{6}^3) \\
&= 0.9577
\end{aligned}
\tag{23.8}
$$



Distribución binomial de nuestro ejemplo



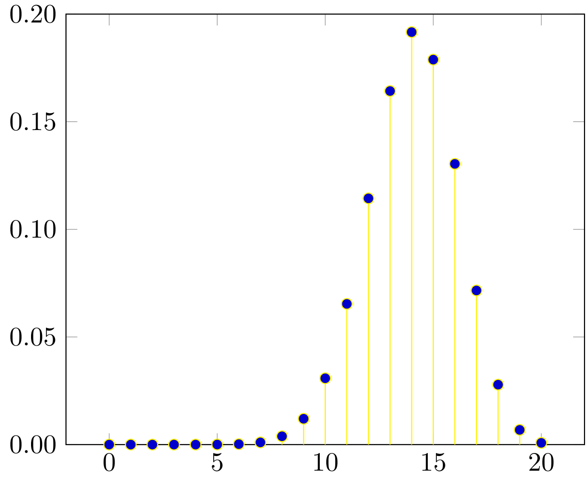
Distribución binomial de nuestro ejemplo

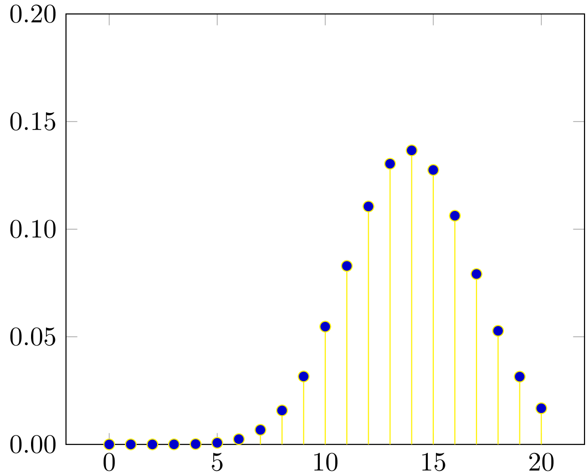


$$\mu_x = np \tag{23.9}$$

$$\sigma_x^2 = np(1-p) \tag{23.10}$$

Estas gráficas muestran aproximaciones binomiales:





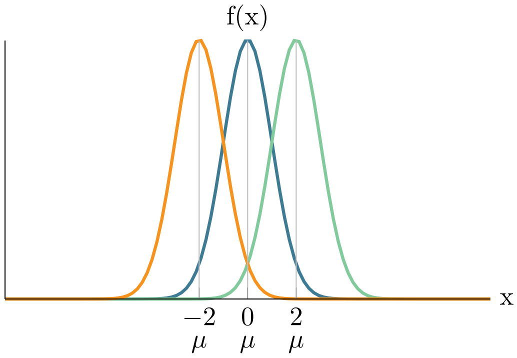
23.4. Distribución Normal

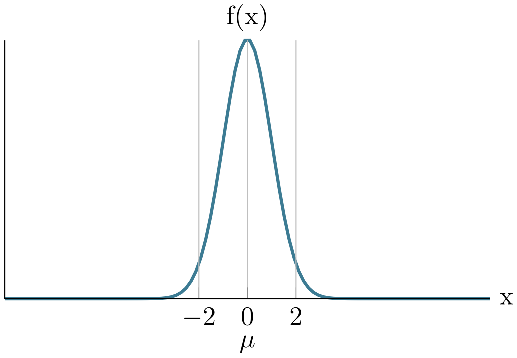
Una variable aleatoria tiene una distribución normal si la función de densidad de probabilidad esta dada por:

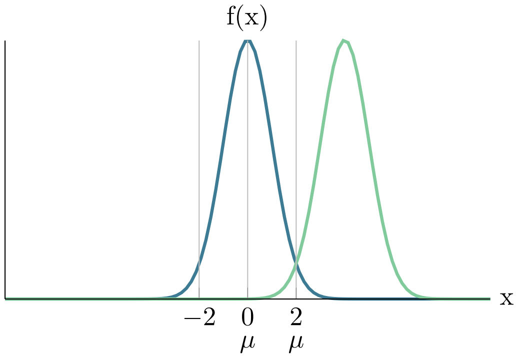
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \ , \quad -\infty < x < \infty \tag{23.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{23.12}$$

X $\approx$ N(μ,σ^2)

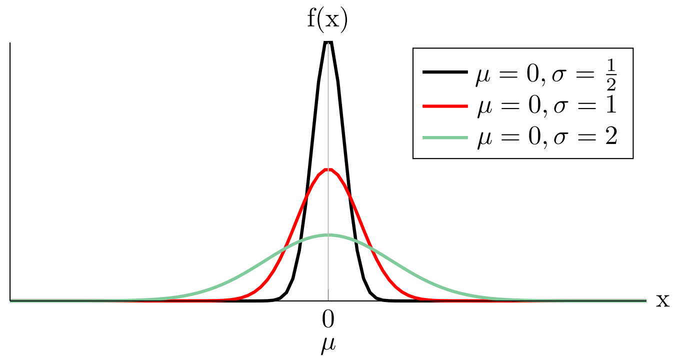






$$E(X) = \mu \quad \textit{valor esperado} \tag{23.13}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \quad \textit{Desviación} \quad \textit{estandar} \tag{23.14}$$



Media	μ
Varianza	σ^2
Desviación estandar	σ

23.5. Distribución Normal Estandarizada

Si X es una variable aleatoria con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$, se puede obtener una distribución normal estandarizada:

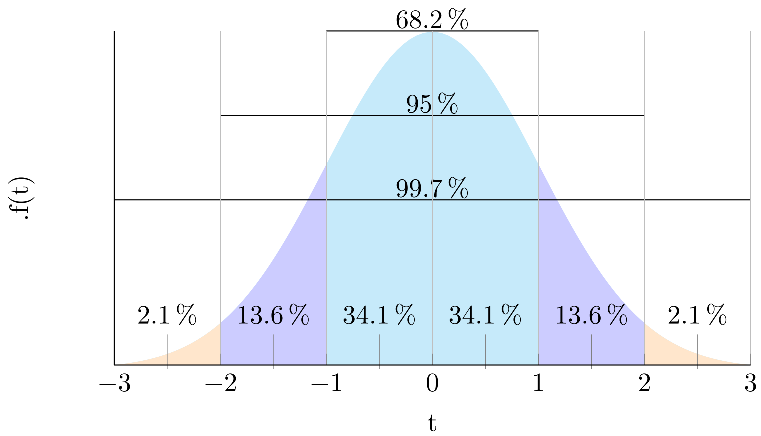
$$\begin{aligned} E(Y) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{23.15}$$

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{23.16}$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{23.17}$$

$$\mu = 0 \quad \sigma^2 = 1 \tag{23.18}$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a-\mu}{\sigma} \\ b' &= \frac{b-\mu}{\sigma} \end{aligned} \tag{23.19}$$



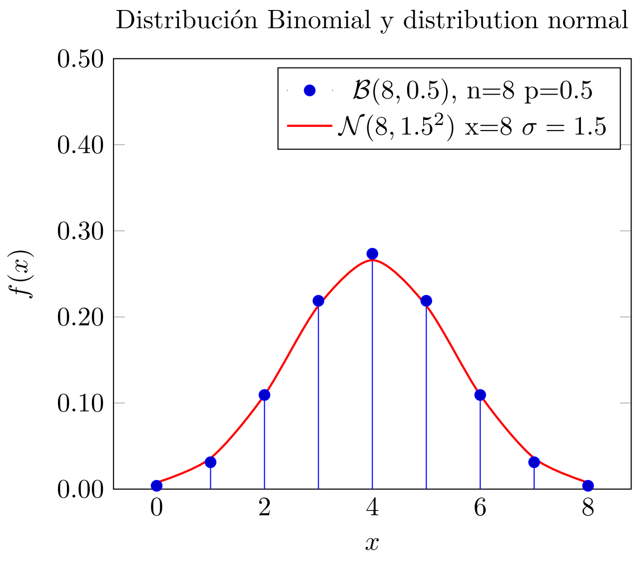
Distribución Normal Estandar

23.6. Teorema del limite central

$$Z_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \tag{23.20}$$

$$lim_{n\to\infty} P(a \leq Zn \leq b) = P(a \leq \phi \leq b) \tag{23.21}$$

23.7. Distribución Normal estandar y binomial comparación

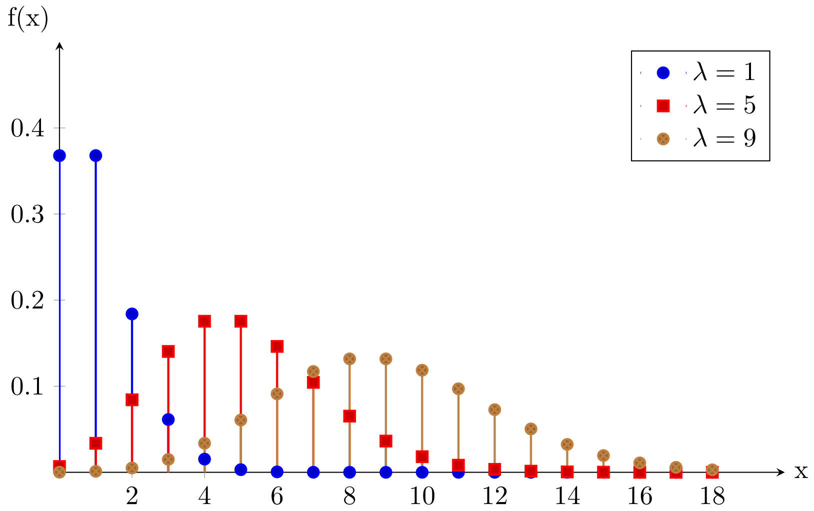


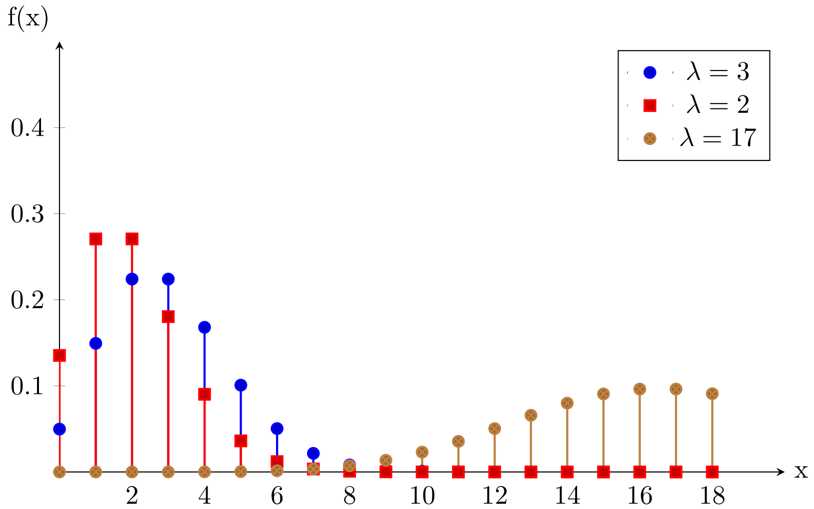
$$\begin{aligned} Var(Y) &= Var(\frac{X-\mu}{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E(X-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{23.22}$$

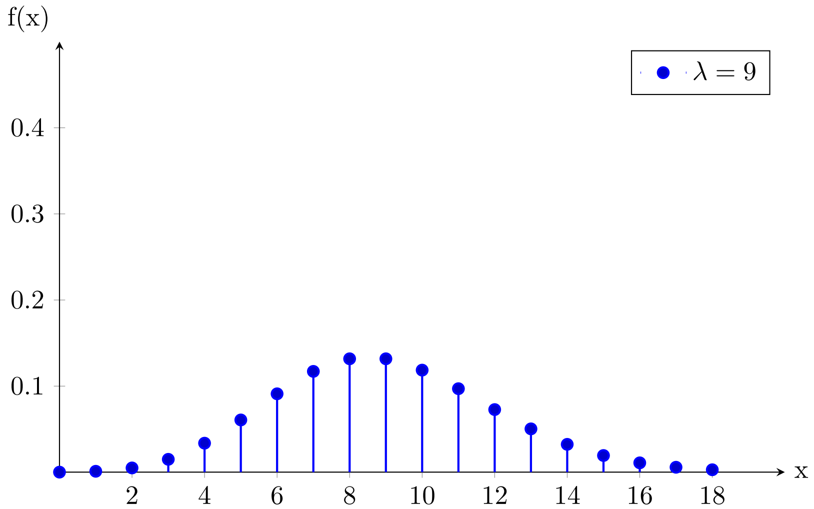
23.8. Distribución Poisson

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución Poisson si la función de densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, ..., \infty \quad donde \;\; 0 < \lambda < \infty \tag{23.23}$$





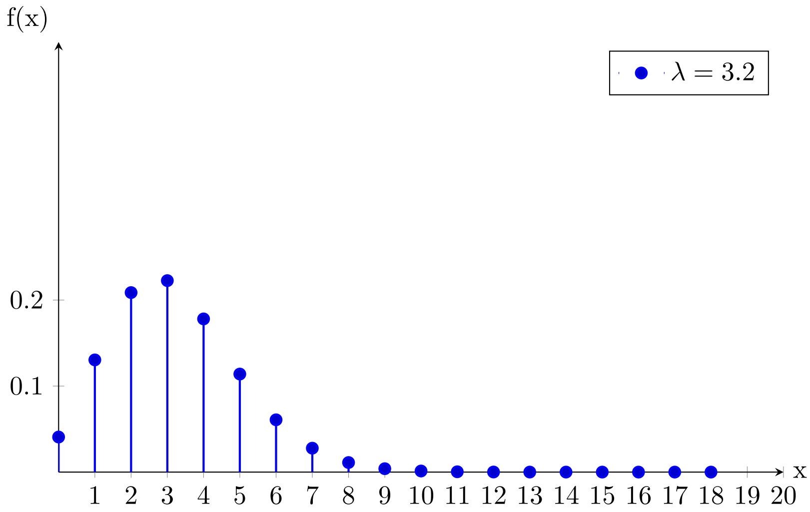


23.9. Ejemplo

Durante un determinado experimento el numero de particulas cruzan en un sensor en un intervalo de 1ms es 3.2 . Se requiere obtener la probabilidad de que seis particulas crucen por el sensor en 1 ms.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\ f(6) &= e^{-3.2}\frac{3.2^{6}}{6!} = 0.06079 \end{aligned} \tag{23.24}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \lambda \\ \sigma^2 &= \lambda\end{aligned} \tag{23.25}$$



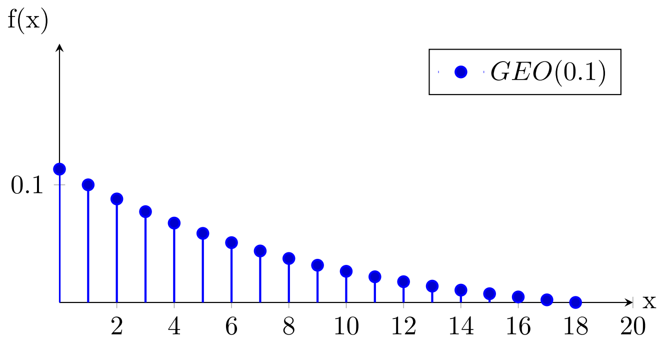
23.10. Distribución Geométrica

Una variable aleatoria es distribuida geométricamente si X representa el número de ensayos requeridos para lograr el primer éxito.

$$f(x) = p^x(1-p)^{n-x} \quad x = 1, 2, ..., \infty \tag{23.26}$$

La función de ditrisbución de probabilidad de una variable aleatoria que tiene distribución geométrica esta dada por:

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \tag{23.27}$$



$$\mu = \frac{1}{p} \tag{23.28}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} \tag{23.29}$$

23.11. Ejemplo

La probabilidad de que una maquina produzca una pieza defectuosa es 0.2 . Cada pieza es supervisada al momente de ser producida. Asumiendo que son eventos independientes, ¿Cual es la probabilidad de que 20 piezas sean supervisadas correctamente antes de encontrar una pieza defectuosa?

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-p)^{x-1}p \\ f(x) &= (1-0.2)^{20-1}0.2 \\ &= .00288 \end{aligned} \tag{23.30}$$

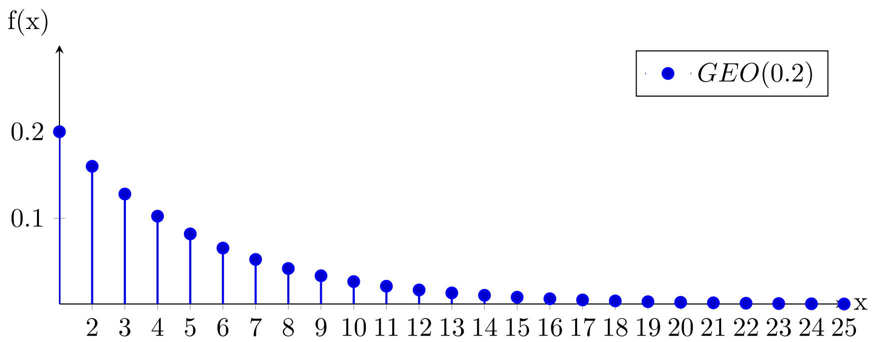
$$P(X = 20) = \sum_{x=100}^{\infty} f(x) \tag{23.31}$$

$$= \sum_{x=100}^{\infty} (1-p)^{x-1}p \tag{23.32}$$

$$= (1-p)^9 9 \sum_{y=0}^{\infty} (1-p)^y p \tag{23.33}$$

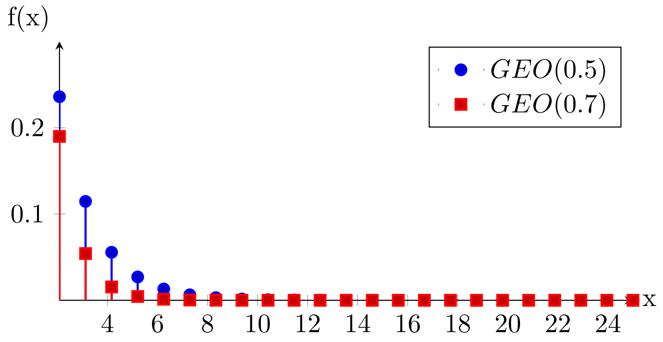
$$= (1-p)^9 9 \tag{23.34}$$

$$= (0.98)^9 9 = 0.1353 \tag{23.35}$$



$$\mu = \frac{1}{p} = 0.5 \tag{23.36}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 0.032 \tag{23.37}$$



Capítulo 24

Examenes propuestos

24.1. Exámen 1 propuesto

1. .
   Desarrolle $(a+b)^6$ utilizando el teorema del binomio
   Sol:
   $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

   $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

2. .
   Dados los siguiente coeficientes:

   1 6 15 20 15 6 1

   Que respresentan los coeficientes de la n-esima fila del triángulo de pascal. Desarrolle el triangulo de pascal indicando lo coeficientes de las filas anteriores hasta llegar a la primer fila.
   Sol:

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1
   1 5 10 10 5 1
   1 6 15 20 15 6 1

3. .
   Un estudiante debe responder 8 preguntas de un exámen de 10 preguntas, determine lo siguiente:
   I) ¿De cuantas formas puede elegir las 8 preguntas?
   2)¿De cuantas formas puede elegir las 8 preguntas si debe responder obligatoriamente las primeras 3 preguntas?
   Sol:

   I. Las preguntas pueden ser seleccionadas de un conjunto de 10 preguntas en donde se deben elegir 8 y el orden es irrelevante; utilizando:

   $C\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1(2\times1)} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$

   II. Si el estudiante debe responder obligatoriamente las primeras 3 preguntas, solo podra elegir las siguientes 5 preguntas de un conjunto de 7 preguntas, generando todas las posibles combinaciones:

$C\binom{7}{3} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1(2\times1)} = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$

4. .
Redusca la siguiente expresión a su forma mas simple en terminos de n
$\frac{(n+2)!}{n!}$
Sol:
$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)...3\cdot2\cdot2\cdot2}{n(n-1)...3\cdot2\cdot1}$
$=(n+2)(n+1) = n^2+3n+2$

5. .

Desarrolle y simplifique la expansion de $(x^2-2y)^6$

Utilizando el teorema del binomio:

$(x^2-2y)^6 = (x^2)^6 + \frac{6}{1}(x^2)^5(-2y) + \frac{6\cdot5}{1\cdot2}(x^2)^4(-2y)^2 + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}(x^2)^3(-2y)^3 +$

$\frac{6\cdot5}{1\cdot2}(x^2)^2(-2y)^4 + \frac{6}{1}(x^2)(-2y)^5 + (-2y)^6$

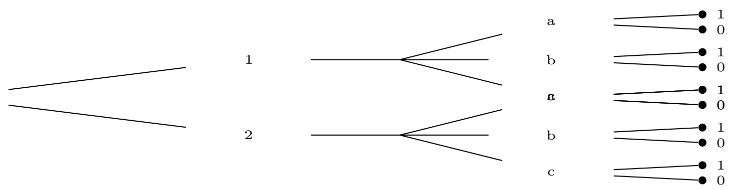
$= x^{12} - 12x^{10}y + 60x^8y^2 - 160x^6y^3 + 240x^4y^4 - 192x^2y^5 + 64y^6$

6. .

I.) ¿Cuántos numeros de 3 digitos pueden ser formados por el conjunto de números A=0,1.......9 si no pueden existir numeros repetidos? y II.)¿Cuántos números pueden formarse si el último dígito debe ser el numero 0 y no pueden existir numeros repetidos?
Sol:
I) En primer inciso se requieren formar números de 3 dígitos empleando todos los elementos del conjunto sin repetir números, de esta forma podemos generar las permutaciones de el número total de elementos tomando solamente 3 de ellos a la vez:
$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = P\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 10\times9\times8 = 720$

II) En la segunda pregunta solo podemos elegir 9 elementos de 10 y nuestras permutaciones consistirán unicamente en números de 2 dígitos pues el tercero ya estara definido, de esta forma aplicamos:
$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 9\times8 = 72$

7. .
Dados los iguientes conjuntos A=1,2, B=a,b,c y C=0,1, represente mediante un diagrama de arbol el producto de AxBxC
Sol:



8. .
Determine mediante una expresión cuantos subconjuntos pueden existir dentro de un conjunto X que contiene N elementos
Sol:
El número de subconjuntos de X conjunto con $r \leq n$ esta dado por $\binom{n}{r}$, esto se puede representar de las siguiente expresión:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

9. .
Demuestre que $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

Tomando como punto de partida $\binom{16}{5} + \binom{16}{6}$ y usando la formula de combinaciones se procede a demostrar:

$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{16!}{5!11!}+\frac{16!}{6!10!}$, multiplicamos ambos operandos por $\frac{6}{6}$ y $\frac{11}{11}$para obtener lo siguiente:

$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{6\cdot 16!}{6\cdot 5\cdot 11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!\cdot 11\cdot 10!}$

$=\frac{6\cdot 16!}{6!\cdot 11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!\cdot 11!}$

$=\frac{6\cdot 16!+11\cdot 16!}{6!\cdot 11!}=\frac{(6+11)\cdot 16!}{6!\cdot 11!}$

$=\frac{17\cdot 16!}{6!\cdot 11!}=\frac{17!}{6!\cdot 11!}$

10. .
Un departamento de policias consiste en 6 oficiales, el departamento de policias debe tener 3 oficiales patrullando las callles, 2 oficiales trabajando tiempo completo dentro de la estación y 1 oficial como reserva en la estación, ¿cuantas divisiones de los 10 oficiales en 3 grupos pueden ser posibles?
Sol:

Para resolver este problema utilizamos el teorema de coeficientes multinomial, que reprsenta el numero de posibles combinaciones de n objetos divididas en r distintos grupos :
$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$
sustituyendo obtenemos:
$=\frac{6!}{1!3!2!}=60$

11. .
Escribe la formula para la aproximación de un numero factorial demasiado grande
Sol: $n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$

12. .
Encuentra el número mínimo de estudiantes en una clase para asegurar que tres de ellos nacieron en el mismo mes.
Sol: En este problema se hace uso del principio de la pichonera en el cual nuestra variable $n=12$ representa las pichoneras, el problema menciona que pueden existir tres de ellos nacidos en el mismo mes, esto significa $k+1=3$, y $k=2$, usando el principio de la pichonera tenemos que el mínimo de estudiantes es igual a $kn+1=25$

13. .
Una clase se forma de 8 estudiantes . Encuentra el numero de forma de:
Seleccionar un comite con 4 estudiantes.

Sol: a)$C\binom{10}{4}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4!}=70$

14. .
Desarrolla los coeficientes multinomiales de:
$(x_1+x_2+x_3)^2$
Sol:
$=\binom{2}{2,0,0}x_1^2x_2^0x_3^0+\binom{2}{0,2,0}x_1^0x_2^2x_3^0+\binom{2}{0,0,2}x_1^0x_2^0x_3^2+\binom{2}{1,1,0}x_1^1x_2^1x_3^0$

$+\binom{2}{1,0,1}x_1^1x_2^0x_3^1+\binom{2}{0,1,1}x_1^0x_2^1x_3^1$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

15. .
Se requiere asignar habitaciones a un grupo de n estudiantes dentro del piso de un edificio con n habitaciones hubicadas de forma lineal, considerando que solo un estudiante debe ser asignado a una habitación y dados dos estudiantes A y B, de cuantas formas pueden asignarse las habitaciones de modo que la habitación del estudiante A este junto a la habitación del estudiante B.

Sol: Existen $n-1$ formas de elegir un par de habitaciones juntas y 2 formas de asignar a los estudiantes A y B de modo que las habitaciones esten juntas en cada par de habitaciones de modo que existen $2(n-1)$ formas de acomodar A y B, los otros $n-2$ estudiantes pueden ser asignados de $n-2$ formas, entonces el número total de formas es igual a :
$2(n-1)(n-2)!=2(n-1)!$

16. .
Cuantos números par de 2 dígitos pueden formarse? Considere el conjunto de numeros A=0,1,2,...9 en cada dígito
Sol:
Dado E el evento de elegir un digito para la pocision de las unidades y sea F el evento de elegir un número para las decenas, tenemos que el total de números par es igual a:
Utilizando el principio multiplicativo $(9)(5)=45$ numeros.

17. .
Demuestre que :

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Sol:
$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n\binom{n-1}{k-1}$

18. .
Demuestre que :

$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$
Sol:

$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$= (n-k+1)\binom{n}{k-1}$

19. .
Demuestre que :

$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

Sol:
$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Para obtener el mismo denominador multiplicamos la primera fracción por $\frac{r}{r}$ y la segunda fracción por $\frac{n-r+1}{n-r+1}$

$= \frac{rn!}{r(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)(n-r)!}$

$= \frac{rn!}{r(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}$

$= \frac{rn!+(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{[r+(n-r+1)]n!}{r!(n-r+1)!}$

$= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}$

20. .
Simplifique :

$\frac{n!}{(n-1)!}$

Sol:

$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1} = n$

24.2. Exámen 2 propuesto

1. .

   Dos jugadores A y B compiten en un test que incluye una serie de preguntas. Para cada una de las preguntas, las probabilidades de que A y B den la respuesta correcta son α y β respectivamente, para todas las preguntas. Se consideran todas las preguntas eventos independientes. El juego termina cuando un jugador responde una pregunta correctamente.
   Defina la probabilidad de que el jugador A gane si:
   a)El jugador A responda la primera pregunta.
   b)El jugador B responda la primera pregunta:

   Solución:

   Primer definimos las condiciones:
   -Ω consiste en el espacio de muestreo que son todas las posibles secuencias infinitas de respuestas
   -Evento A determina que el jugador A responda la primera pregunta correctamente
   -Evento F el juego termina despues de la primera pregunta
   -Evento W el jugador A gana
   -Evento A^c determina que el jugador B responda la primera pregunta correctamente
   Se quiere obtener $P(W|A)$ y $P(W|A^c)$
   Usando el teorema de la probabilidad total y la particion dada por $\{F, F^c\}$
   $P(W|A) = P(W|A \cap F)P(F|A) + P(W|A \cap F^c)P(F^c|A)$

   Ahora tenemos:
   P(F|A)=P[A responda correctamente la primera pregunta]=$alpha$
   $P(F^c|A) = 1 - alpha$,
   $P(W|A \cap F) = 1$
   pero $P(W|A \cup F^c) = P(W|A^c)$
   entonces tenemos que

   $$P(W|A) = (1 \times \alpha) + (P(W|A^c) \times (1 - \alpha)) = \alpha + P(W|A^c)(1 - \alpha) \tag{24.1}$$

   de forma similar:

   $$P(W|A^c) = P(W|A^c \cap F)P(F|A^c) + P(W|A^c \cap F^c)P(F^c|A^c) \tag{24.2}$$

   entonces definimos:

   $P(F|A^c)$=P[B responda la primer pregunta correctamente]=β
   $P(F^c|A) = 1 - \beta$

   pero $P(W|A^c \cap F) = 0$, finalmente $P(W|A^c \cap F^c) = P(W|A)$, entonces tenemos:

   $$P(W|A^c) = (0 \times \beta) + (P(W|A) \times (1 - \beta)) = P(W|A)(1 - \beta) \tag{24.3}$$

   Resolviendo la euación 1 y 3 tenemos que :

   $$P(W|A) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \tag{24.4}$$

   $$P(W|A^c) = \frac{(1 - \beta)\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \tag{24.5}$$

2. 2 La información de un dispositivo es transmitida como una secuencia de numeros binarios(bits), sin embargo el ruido en el canal interrumpe la señal, en el que un digito transmitido como 0 es recibido como 1 con una probabilidad $1 - \alpha$, con una interrución similar cuando el digito 1 es transmitido, se ha observado que en un gran numero de señales transmitidas, los 0s y 1s son transmitidos en el radio 3:4.

   Dado que la secuencia 101 es recibida, cual es la distribucion de probabilidad sobre las señales transmitidas?, asume que la trasmisión y recepción son procesos independientes.

Solución:

-El espacio de muestreo Ω consiste en todas las posibles secuencias de longitud 3 que es:
$\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
A conjunto correspondiente a eventos de señales
$\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ y eventos de recepcion
$\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

Hemos observado el evento R_5 que 101 fue recibido, deseamos obtener $P(S_i)|R_5$ para i=0,1,...7. Sin mebargo en la información dada solo tenemos $P(R_5|S_i)$, primero usando el teorema de la probabilidad total calculamos $P(R_5)$

$$P(R_5) = \sum_{i=0}^{7} P(R_5|S_i)P(S_i) \tag{24.6}$$

Si consideramos $P(R_5|S_0)$, si 000 es transmitido, la probabilidad de que 101 sea recibido es $(1-\alpha)\times\alpha\times(1-\alpha) = \alpha(1-\alpha)^2$, completando la evaluación tenemos:

$P(R_5|S_0) = \alpha(1-\alpha)^2$
$P(R_5|S_1) = \alpha^1(1-\alpha)$
$P(R_5|S_2) = (1-\alpha)^3$
$P(R_5|S_3) = \alpha(1-\alpha)^2$
$P(R_5|S_4) = \alpha^2(1-\alpha)$
$P(R_5|S_5) = \alpha^3$
$P(R_5|S_6) = \alpha(1-\alpha)^2$
$P(R_5|S_7) = \alpha^2(1-\alpha)$
La información de los digitos transmitidos es la probabilidad de transmitir 1 que es 4/7, entonces tenemos:
$P(S_0) = (\frac{3}{7}^3)$
$P(S_1) = (\frac{4}{7})(\frac{3}{7}^2)$
$P(S_2) = (\frac{4}{7})(\frac{3}{7}^2)$
$P(S_3) = (\frac{4}{7}^2)(\frac{3}{7})$
$P(S_4) = (\frac{4}{7}(\frac{3}{7}^2)$
$P(S_5) = (\frac{4}{7}^2)(\frac{3}{7})$
$P(S_6) = (\frac{4}{7}^2)(\frac{3}{7})$
$P(S_7) = (\frac{4}{7}^3)$
De esta forma tenemos:

$$P(R_5) = \frac{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1-\alpha) + 123\alpha(1-\alpha)^2 + 36(1-\alpha)^3}{343} \tag{24.7}$$

Finalmente usando el teorema de bayes tenemos que la probabillidad de distribución sobre:
$\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$

$$P(S_i|R_5) = \frac{P(R_5|S_i)P(S_i)}{P(R_5)} \tag{24.8}$$

La probabilidad de recepción de S_5 es:

$$P(S_5|R_5) = \frac{P(R_5|S_5)P(S_5)}{P(R_5)} = \frac{48\alpha^3}{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1-\alpha) + 123\alpha(1-\alpha)^2 + 36(1-\alpha)^3} \tag{24.9}$$

3. 3.

En una una ciudad hay 51 % son hombres y 49 % mujeres, un adulto es seleccionado aleatoriamente para una encuesta, encuentra las siguientes dos probabilidades:
a)La encuesta es acerca de las personas que fuman, 9.5 % de los hombres fuman mientras que el 1.7 % de las mujeres también fuman, encuentra la probabilidad de que una persona entrevistada al azar sea fumador y hombre.

Solución:

Definimos:
M=hombres
M^c=mujeres

C=fumadores
C^c=no fumadores

Basados en la información definimos:
$P(M) = 0.51$
$P(M^c) = 0.49$
$P(C|M = 0.095)$ probabilidad de que un hombre tomado al azar sea fumador
$P(C|M^c) = 0.017$ probabilidad de que una mujer seleccionada al azar sea fumadora

Aplicando teorema de Bayes queremos obtener la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea fumador.

$$\frac{P(M)P(C|M)}{(P(M)P(C|M) + (P(M^c)P(C|M^c)} \tag{24.10}$$

$$\frac{0.51 \times 0.095}{(0.51 \times 0.095) + (0.49 \times 0.017)} = 0.85329341 \tag{24.11}$$

4. • Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43 %, 26 % y 31 % de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8 %, 2 % y 1.6 % del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso, a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cual es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B?

   Se definen los eventos:

   D = evento de que el producto seleccionado sea defectuoso
   A = evento de que el producto sea fabricado en la mÃąquina A
   B = evento de que el producto sea fabricado por la mÃąquina B
   C = evento de que el producto sea fabricado por la mÃąquina C

$$P(B|D) = \frac{p(B)p(C|D)}{p(D)} = \frac{p(B)p(D|B)}{p(A)p(D|A) + p(B)p(D|B) + p(C)p(D|C)} \tag{24.12}$$

$$P(B|D) = \frac{(0.26 * 0.02)}{(0.43 * 0.08 + 0.26 * 0.02 + 0.31 * 0.016)} \tag{24.13}$$

$$= \frac{0.0052}{0.04456} \tag{24.14}$$

$$= 0.116697 \tag{24.15}$$

5. • A un paciente de un hospital se le aplica una prueba para la detección de una enfermedad, dicha enfermedad solo afecta al 1 % de la población. El resultado es positivo indicando que el paciente tiene la enfermedad. Siendo D el evento que el paciente tenga la enfermedad y T de que el la prueba resulte positiva.

   Suponiendo que la prueba tiene una precisión del 95 %, existen diferentes medidas para calcular la precisión, pero en este este problema se considera $P(T|D)$ Y $P(T^c|D^c)$. La probabilidad $P(T|D)$ es conocida como la sensibilidad o verdaderos positivos y $P(T^c|D^c)$ son los falsos negativos.

   Encuentra la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad dada la evidencia proporcionada por el test.

   Solucion:

   Aplicando el teorema de bayes y el teorema de probabilidad completa:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} \tag{24.16}$$

$$= \frac{P(T|D)P(D)}{P(D|T)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} \tag{24.17}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} \tag{24.18}$$

$$= 0.16 \tag{24.19}$$

Capítulo 25

Programas en root

25.1. Poligono avanzando en forma vertical

Listing 25.1: Poligono avanzando

```
#include "TStyle.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TF2.h"
#include "TTimer.h"
#include "TMath.h"
#include "TROOT.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TEllipse.h"
#include "TROOT.h"

Double_t pi;
TF2 *f2;
Float_t t = 0;
Float_t phi = 30;


double x_centro=0.5;
double y_centro=0.5;
double r=0.4;
int N=0;
double angle =0.0;
double angle_increment = 0.0;
double aux=0.0;


TCanvas *c1;

void PoligonoAvanzando(int m)
{
        N=m;
        angle = (270*TMath::Pi())/180;
         angle_increment = (2*TMath::Pi()) / N;
         aux=angle+(angle_increment/2.0);
        angle=aux;



   gStyle->SetCanvasPreferGL(true);
   gStyle->SetFrameFillColor(42);
   c1 = new TCanvas("c1");
   c1->SetFillColor(17);
   pi = TMath::Pi();
   f2 = new TF2("f2","sin(2*x)*sin(2*y)*[0]",0,pi,0,pi);
   f2->SetParameter(0,1);
```

```
   f2->SetNpx(15);
   f2->SetNpy(15);
   f2->SetMaximum(1);
   f2->SetMinimum(-1);
  // f2->Draw("glsurf1");
   TTimer *timer = new TTimer(200);
   timer->SetCommand("Animate()");
   timer->TurnOn();
}
void Animate()
{
   //just in case the canvas has been deleted
   if (!gROOT->GetListOfCanvases()->FindObject("c1")) return;



if(x_centro>1.0)
x_centro=0.0;

c1->Clear();
double x[N+1];
double y[N+1];



for (int i=0;i<N;i++){
     x[i] = x_centro + r * TMath::Cos(angle);
     y[i] = y_centro + r * TMath::Sin(angle);
     angle += angle_increment;
 }
x[N]=x[0];
y[N]=y[0];
TPolyLine *l= new TPolyLine(N+1,x,y);
 l->Draw();
c1->Update();
x_centro=x_centro+0.01;
}
```

25.2. Gráficación de Logaritmos

Listing 25.2: Logaritmos

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <TMath.h>
#include <time.h>
#include <TGraph.h>
#include <TF1.h>
#include <TH1F.h>
#include <TCanvas.h>
#include <TRandom.h>
#include <TFile.h>
#include <TNtuple.h>
#include <TTree.h>
#include <TApplication.h>
#include <TROOT.h>
void Logaritmos() {

TF1*f=new TF1("f","log(x)",0.,100.);
TF1*f1=new TF1("f1","x*log(x)",0.,100.);

TF1*f2=new TF1("f2","log(TMath::Factorial(x))",0.,100.);

TCanvas*c1 = new TCanvas("c1","Title",800,600);
c1->Divide(3,1);
c1->cd(1);
f->Draw();
c1->cd(2);
f1->Draw();
c1->cd(3);
f2->Draw();


//TF1*f= new TF1("f","log(x)",0.,100.);
//f->Draw();
//TF1*f1= new TF1("f1","x*log(x)",0.,100.);
//f1->Draw();
//TF1*f2= new TF1("f2","log(TMath::Factorial(x))",0.,100.);
//f2->Draw();


}
```

25.3. Poligono girando

Listing 25.3: Poligono girando

```
#include "TStyle.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TF2.h"
#include "TTimer.h"
#include "TMath.h"
#include "TROOT.h"
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TEllipse.h"
#include "TROOT.h"



Double_t pi;
TF2 *f2;
Float_t t = 0;
Float_t phi = 30;


double x_centro=0.5;
double y_centro=0.5;
double r=0.4;
int N=0;
double angle =0.0;
double angle_increment = 0.0;
double aux=0.0;
int inicio=270;

TCanvas *c1;

void PoligonoGirando(int m)
{
        N=m;


//        gStyle->SetCanvasPreferGL(true);
   //gStyle->SetFrameFillColor(42);
   c1 = new TCanvas("c1");
   c1->SetFillColor(17);

   TTimer *timer = new TTimer(700);
   timer->SetCommand("Animate()");
   timer->TurnOn();
}
void Animate()
{






   //just in case the canvas has been deleted
   if (!gROOT->GetListOfCanvases()->FindObject("c1")) return;


angle = (inicio*TMath::Pi())/180;
        angle_increment = (2*TMath::Pi()) / N;
        aux=angle+(angle_increment/2.0);
```

```
        angle=aux;


if(x_centro>1.0)
x_centro=0.0;

c1->Clear();
double x[N+1];
double y[N+1];



for (int i=0;i<N;i++){
    x[i] = x_centro + r * TMath::Cos(angle);
    y[i] = y_centro + r * TMath::Sin(angle);
    angle += angle_increment;
 }
x[N]=x[0];
y[N]=y[0];
TPolyLine *l= new TPolyLine(N+1,x,y);
 l->Draw();
c1->Update();
//x_centro=x_centro+0.01;
inicio=inicio+10;
}
```

25.4. Cono Koch

Listing 25.4: Cono Koch

```
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TError.h"
#include "TColor.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TH1D.h"
#include "TRandom.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TROOT.h"
#include "TPoint.h"
#include "TEllipse.h"
TCanvas *c2 = new TCanvas("c2","triangles",10,10,900,600);

int dibuja(Double_t inx,Double_t finx,Double_t iny,Double_t finy,int iteraciones){

Double_t x[5];
Double_t y[5];
Double_t xborra[2];
Double_t yborra[2];
Double_t rotacion=(60*TMath::Pi())/180;
Double_t finalx,inicialx,finaly,inicialy=0.0;
Double_t px,py,rx,ry,qx,qy=0.0;
Double_t tx,ty=0.0;

inicialx=inx;
finalx=finx;
inicialy=iny;
finaly=finy;

px=((2*inicialx)+finalx)/3.0;
py=((2*inicialy)+finaly)/3.0;
rx=(inicialx+(2*finalx))/3.0;
ry=(inicialy+(2*finaly))/3.0;
tx=rx-px;
ty=ry-py;
qx=px+((tx*cos(rotacion))-(ty*sin(rotacion)));
qy=py+((tx*sin(rotacion))+(ty*cos(rotacion)));
x[0]=inicialx;
y[0]=inicialy;
x[1]=px;
y[1]=py;
x[2]=qx;
y[2]=qy;
x[3]=rx;
y[3]=ry;
x[4]=finalx;
y[4]=finaly;
TPolyLine * l= new TPolyLine(5,x,y);
l->SetLineColor(4);
l->Draw();
xborra[0]=px;
xborra[1]=rx;
yborra[0]=py;
yborra[1]=ry;
TPolyLine * a= new TPolyLine(2,xborra,yborra);
a->SetLineColor(0);
a->Draw();
//c2->Update();
```

```
iteraciones--;
if(iteraciones>0){
dibuja(inicialx,px,inicialy,py,iteraciones);
dibuja(px,qx,py,qy,iteraciones);
dibuja(qx,rx,qy,ry,iteraciones);
dibuja(rx,finalx,ry,finaly,iteraciones);


}else{
return 0;
}
}





void curvaKoch(int iteraciones) {



dibuja(0.0,1,.2,.2,iteraciones);

}
```

25.5. Poligónos normal

Listing 25.5: Poligonos

```
#include <TSysEvtHandler.h>
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TEllipse.h"
#include "TROOT.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TSystem.h"
#include <iostream>
#include <time.h>
void poligonos1(Int_t N) {


//TCanvas *c3 = new TCanvas("c3","poligonod",10,10,600,600);
TCanvas *c3 = new TCanvas("c1","Dynamic Filling Example",10,10,700,500);
/*
TTimer *timer = 0;
  timer = new TTimer(100,kFALSE);     // 100 msec timeout
  timer->Connect("Timeout()", "TCanvas", c3, "Paint()");
  timer->Connect("Timeout()", "TCanvas", c3, "Update()");
  timer->Start(100, kFALSE);
*/

TTimer *timer = new TTimer();
timer->Connect("Timeout()", "TCanvas",
                  c3, "Update()");
timer->Start(2000, kTRUE);






double x[N+1];
double y[N+1];
double x_centro=0.5;
double y_centro=0.5;
double r=0.4;

double angle = (270*TMath::Pi())/180;
double angle_increment = (2*TMath::Pi()) / N;
double aux=angle+(angle_increment/2.0);
angle=aux;

TPolyLine *l;

for(int a=0;a<3;a++){

c3->Clear();
for (int i=0;i<N;i++){
     x[i] = x_centro + r * TMath::Cos(angle);
     y[i] = y_centro + r * TMath::Sin(angle);
     angle += angle_increment;
  }
x[N]=x[0];
y[N]=y[0];
l= new TPolyLine(N+1,x,y);
l->Draw();
x_centro=x_centro+0.1;
```

```
    c3->Update();
}

}
```

25.6. Probabilidad de bolas negras y blancas

Listing 25.6: Probabilidad de bolas negras y blancas

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <TMath.h>
#include <time.h>
#include <TGraph.h>
#include <TF1.h>
#include <TH1F.h>
#include <TCanvas.h>
#include <TRandom.h>
#include <TFile.h>
#include <TNtuple.h>
#include <TTree.h>
#include <TApplication.h>
#include <TROOT.h>
#include <TRandom3.h>
//#include "TH1D.h"
//#include "TH1F.h"
void ProblemadeBolas() {

TRandom3* gRandom = new TRandom3;


double arreglo[10000];

for(int m=0;m<10000;m++)
{
double final=0.0;
double random=0.0;
int contadorRoja=0;
gRandom->SetSeed(0);
for (int i = 0; i < 10; ++i)
         {
         random=gRandom->Rndm();
         if(random<0.70){
            printf("salio roja en bolsa 1 \n");
            contadorRoja++;
         }else{
              printf("salio negra en bolsa 1 \n");
         }
printf(" found %f \n",random);

}

double resultado1=contadorRoja/10.0;
printf("Resultado %f ",resultado1);


gRandom->SetSeed(0);

int   contadorRoja2=0;
         if(resultado1 <=0.70){
          contadorRoja2=1;
                  for(int i=0;i<10;i++){
                           random=gRandom->Rndm();
                         if(random<=.40){
                         contadorRoja2++;
                         printf("Salio roja en bolsa 2 \n");
```

```
                        }else{
                                printf("Salio negra en bolsa 2 \n");
                        }
                }
                double resultado2=0.0;
                resultado2=contadorRoja2/10.0;
                final=resultado2;
                printf("La probabilidad de que sea roja dado roja %f \n",resultado2);
        }else{
        contadorRoja2=0;
                for(int i=0;i<10;i++){
                   random=gRandom->Rndm();
                        if(random<=0.3){
                        contadorRoja2++;
                        printf("Salio roja en bolsa 2 \n");
                        }else{
                        printf("Salio negra en bolsa \n");
                        }
                }
                 double resultado3=0.0;
                resultado3=contadorRoja2/10.0;
                final=resultado3;
                 printf("La probabilidad de que sea roja dado negra %f \n",resultado3);
        }
arreglo[m]=final;

}




    TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","c1",600,400);






TH1F *hist_1 = new TH1F("hist_1", "Probabilidad salga roja", 100, -1,1);
hist_1->SetLineColor(8);
hist_1->SetFillStyle( 3001);
hist_1->SetFillColor( kGreen);
double valor=0.0;
for(int g=0;g<10000;g++)
{
valor=arreglo[g];
 hist_1->Fill(valor);
}
 hist_1->Draw();
   c1->Update();


}
```

25.7. Fractal

Listing 25.7: Fractal

```
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TError.h"
#include "TColor.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TH1D.h"
#include "TRandom.h"
#include "TStyle.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TROOT.h"
#include "TEllipse.h"
void fractal(Int_t ntriangles=50) {


TCanvas *c2 = new TCanvas("c2","triangles",10,10,600,600);
  TRandom r;


  Double_t x[4] = {.2,.8,.5,.2};
  Double_t y[4] = {.2,.2,.8,.2};
  TPolyLine * l= new TPolyLine(4,x,y);
//   l->Draw();
        double x1=0.0;
        double y1=0.0;
        double xmedio=(.2+.8)/2;
        double ymedio=(.2+.2)/2;
        double xpunto=0.0;
        double ypunto=0.0;


 for(int i=0;i<400;i++){
        double a=r.Rndm();

        if(a<=0.3){
        x1=.2;
        y1=.2;

        }else if(a>0.3&&a<=0.6){
        x1=.8;
        y1=.2;
        }else{
        x1=.5;
        y1=.8;
        }
        xpunto=(x1+xmedio)/2.0;
        ypunto=(y1+ymedio)/2.0;
//      printf("efe %f \n",a);
//      printf("a%f \n",xpunto);
//      printf("b%f \n",ypunto);
//      TLine *p=new TLine(xpunto,ypunto,xpunto+0.00001,ypunto);
//7     p->Draw();
        TEllipse *o=new  TEllipse(xpunto,ypunto,.001,.001);
o->Draw();
        xmedio=xpunto;
        ymedio=ypunto;
        }

//TEllipse *o=new  TEllipse(0.375004,0.525000,.001,.001);
//o->Draw();
```

```
//a0.386004
//b0.572008
  //c1->AddExec("ex","TriangleClicked()");

//D_t f=sqrt(2*TMath::Pi()*150) * pow((150/TMath::E()),150);

//printf("resuk %lu",f);

}
```

25.8. Juego de vida

Listing 25.8: Juego de vida

```
#include "TCanvas.h"
#include "TGraph.h"
#include "TMath.h"
#include "TLine.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TEllipse.h"
#include "TROOT.h"
#include "TPolyLine.h"
#include "TRandom3.h"
#include "TGraph.h"
#include "TSystem.h"
#include <iostream>
#include <time.h>
#include "TSysEvtHandler.h"
#include "Riostream.h"
using namespace std;
/* File Pointer */



void juego() {

                TCanvas *c3 = new TCanvas("c1","Juego",10,10,1000,600);


                TRandom3* gRandom = new TRandom3;
                double random=0.0;
                gRandom->SetSeed(0);

                int matriz[18][18];
                TGraph *l;
                TPolyLine *k;




                double x[5];
                double y[5];
                double xi=0.0,X,Y,avr;
                double yi=0.0;
                int n=0;
                int contador=0;
                int filas,columnas=0;





        /*
                 TTimer *timer = new TTimer(200);
                 timer->SetCommand("Animate()");
                 timer->TurnOn();*/

        Y=0.1;
        for(int a=0;a<6;a++){
        X=0.1;

        for(int b=0;b<6;b++){
                //xi=0.1;
                yi=Y;
                //printf("dsadas %f",Y);
                for(int j=0;j<3;j++)
                        {
```

```
                                xi=X;
                                for(int i=0;i<3;i++)
                                {
                                x[0]=xi;
                                y[0]=yi;
                                x[1]=xi+0.05;
                                y[1]=yi;
                                x[2]=xi+0.05;
                                y[2]=yi+0.05;
                                x[3]=xi;
                                y[3]=yi+0.05;
                                x[4]=xi;
                                y[4]=yi;


                                random=gRandom->Rndm();
                                n=(int)(random*10.0);
                                l= new TGraph(5,x,y);
                                k=new TPolyLine(5,x,y);

                                        //printf("asa %d",random);
                                        //printf("dsssd,%f",contador);
                                l->SetLineColor(3); //green
                                l->SetLineWidth(3);

                                        if(random<0.5)
                                                {
                                                        l->SetFillColor(kBlack);
                                                        printf("negro\n");
                                                }else{
                                                        l->SetFillColor(kWhite);
                                                        matriz[filas][columnas]=1;

                                                }

                                                l->Draw("LF");
                                                k->Draw();
                                                contador++;
                                                xi=xi+0.05;
                                                columnas++;
                                                }
                                        yi=yi+0.05;
                                        filas++;
                                        }

                        X=X+(0.05*3);
                        }

                        Y=Y+(0.05*3);

    }




                                c3->Update();



    cout<<"Ingresa el avance rotacion (grados):";
cin>>avr;

gSystem->ProcessEvents();
gSystem->Sleep(3000);
```

```
          filas=0;
          columnas=0;

//leep(3000);

//                c3->Clear();
Y=0.1;
for(int a=0;a<6;a++){
X=0.1;

for(int b=0;b<6;b++){
          //xi=0.1;
          yi=Y;
          //printf("dsadas %f",Y);
          for(int j=0;j<3;j++)
                    {

                              xi=X;
                              for(int i=0;i<3;i++)
                              {
                              x[0]=xi;
                              y[0]=yi;
                              x[1]=xi+0.05;
                              y[1]=yi;
                              x[2]=xi+0.05;
                              y[2]=yi+0.05;
                              x[3]=xi;
                              y[3]=yi+0.05;
                              x[4]=xi;
                              y[4]=yi;


                              l= new TGraph(5,x,y);
                              k=new TPolyLine(5,x,y);
                              l->SetLineColor(3);
                              l->SetLineWidth(3);

                                        if((columnas%2!=0))
                                                  {
                                                  l->SetFillColor(kWhite);
                                                  printf("llego\n");
                                                  //matriz[filas][columnas]=1;
                                                  l->Draw("LF");
                                                  k->Draw();
                                                  }

                                        contador++;
                                        xi=xi+0.05;
                                        columnas++;
                                        }
                              yi=yi+0.05;
                              filas++;
                              }

                    X=X+(0.05*3);
                    }

                    Y=Y+(0.05*3);


}
```

```
c3->Update();

}
```

25.9. Distribución normal estandar

Listing 25.9: Distribución normal estandar

```
#include "TF1.h"
#include "TH1F.h"
#include "TLatex.h"
#include "Math/WrappedTF1.h"
#include "Math/GaussIntegrator.h"
#include "TGraph.h"
#include "TCanvas.h"
#include <string>
void integral(double mean,double z)
{

std::string zz = "z=" + std::to_string(z);
char tab2[1024];
strcpy(tab2, zz.c_str());


TCanvas *c1 = new TCanvas("c1");
TF1* f1=new TF1("f1","( (1/sqrt(2*pi))*(e^ (-0.5* (x^2) ) ))",-5,5);
double integral;

double inicial=0.0;
for(int j=0;j<10;j++)
{
for(int i=0;i<10;i++)
        {
        integral=f1->Integral(0.0,inicial);
        printf(" %lf",integral);
        inicial+=0.01;
        }
        printf(" \n");
}
f1->GetXaxis()->SetTitle(tab2);
f1->GetYaxis()->SetTitle("$\\phi(z)$");
f1->Draw("fc");
TF1 *f2 = new  TF1("f1","( (1/sqrt(2*pi))*(e^ (-0.5* (x^2) ) ))",-5,5);
f2->Draw("lsame");


integral=f1->Integral(0.0,z);
printf("Probabilidad z %lf",integral);

  const Int_t np = 10, npf = 20;

   //first fill area below a sub-range of f2
   Double_t x[np+3], y[np+3];
   Double_t xmin = mean; Double_t xmax = z;
   Double_t dx = (xmax-xmin)/(np-1);
   for (Int_t i=0;i<np;i++) {
      x[i] = xmin + dx*i;
      y[i] = f2->Eval(x[i]);
   }
   x[np]   = x[np-1]; y[np]   = c1->GetUymin();
   x[np+1] = x[0];    y[np+1] = y[np];
   x[np+2] = x[0];    y[np+2] = y[0];
   TGraph *gr = new TGraph(np+3,x,y);
   gr->SetFillStyle(3008);
   gr->SetFillColor(2);
   gr->Draw("lf");
```

}

Bibliografía

[1] An Introduction to Probability Theory and Its Applications , William Feller

[2] Combinatorics schaum s Outline , V.K. Balakrishnan

[3] Probability and statistics, M URRAY R. S PIEGEL , J OHN S CHILLER

[4] Probability, Random Variables, and Random Processes , Hwei P. Hsu, Ph.D.

[5] Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions , Frederick Mosteller

[6] Introduction to Probability , Dimitri P. Bertsekas