



Apuntes y Tareas de Probabilidad.

Luis Alejandro Barranco Juárez

June 21, 2016

Contents

1	Tarea 1	1
1.1	Dar 10 ejemplos de experimentos deterministas y 10 de experimentos aleatorios.	1
1.2	Dar ejemplos de espacios muestrales.	2
1.3	Conceptos.	2
1.3.1	Probabilidad Clásica	2
1.3.2	Probabilidad Geométrica	3
1.3.3	Probabilidad Frecuentista	3
1.3.4	Probabilidad Subjetiva	3
1.3.5	Probabilidad Axiomática	3
1.3.6	Probabilidad Lógica	4
1.3.7	Proceso Estocástico	4
1.3.8	Frecuencia Estadística	4
1.3.9	Frecuencia Absoluta	4
1.3.10	Frecuencia Relativa	4
1.3.11	Frecuencia Acumulada	5
1.3.12	Riesgo	5
1.3.13	Peligrosidad	5
1.3.14	Amenaza	5
1.3.15	Vulnerabilidad	5
1.4	Triángulos de Pascal.	6
1.5	Teorema del Binomio.	8
1.6	Principio de la Pichonera o del Palomar	9
1.7	Diagrama de árbol.	10
2	Tarea 2	11
2.1	Reseña de extractos de libro.	11
2.2	Demostrar las siguientes fórmulas.	11
2.3	Ejemplos en cómputo del principio del palomar.	12
2.4	Ejemplos de permutaciones y combinaciones.	13

2.4.1	Permutaciones	13
2.4.2	Combinaciones	13
2.5	Generalización de problemas de caminos.	13
2.5.1	Rectángulo	13
3	Tarea 3	15
3.1	Magnetic Cloaking.	15
3.2	Operaciones lógicas con circuitos.	15
4	Tarea 4	17
4.1	Demostraciones.	17
4.1.1	Si $(A \subset B)$ y $(B \subset A)$ entonces $A = B$	17
4.1.2	Leyes de De Morgan.	17
4.1.3	$(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$	17
4.1.4	$(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$	18
4.1.5	$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^*)$	18
4.2	Desarrollo de probabilidad de una unión de conjuntos.	18
4.2.1	Para 3 conjuntos.	18
4.2.2	Para 4 conjuntos.	19
4.3	Antinomia vs. Paradoja.	19
4.3.1	Definición de Paradoja.	19
4.3.2	Definición de Antinomia.	20
4.3.3	Diferencia	20
4.3.4	Paradoja de Russell	20
4.3.5	Enunciado formal de la paradoja	20
4.3.6	Antinomia de Bertrand	20
4.4	Conjuntos Singulares	20
5	Tarea 5	21
5.1	Probabilidad Bayesiana	21
5.2	No me da vergüenza confesar que soy ignorante de lo que no sé.	21
5.3	Paradoja del falso positivo.	21
5.4	Falacia del apostador.	21
5.5	Problema 2 de la exposición.	22
5.6	Histogramas de dado de 3 caras (ROOT)	23
6	Tarea 6	26
6.1	Falacia del apostador.	26
6.1.1	Falacia del apostador inversa.	26
6.2	Teorema de límite cental.	27
6.2.1	Enunciado formal.	27

6.3	Explosión Challenger.	28
6.4	Campana de Gauss en ROOT.	28
7	Tarea 7	30
7.1	Criterios de divisibilidad.	30
7.1.1	Divisibilidad por 2.	30
7.1.2	Divisibilidad por 3.	30
7.1.3	Divisibilidad por 5.	30
7.1.4	Divisibilidad por 7.	30
7.1.5	Divisibilidad por 11.	30
7.1.6	Algoritmo para diseño de grafos para determinar divisibilidad entre n.	30
7.2	Problema 3 de exposición Pliego.	33
7.3	Problemas de teorema de Bayes.	36
7.3.1	Ejercicio 1.	36
7.3.2	Ejercicio 2.	36
8	Tarea 8	38
8.1	Convenio de suma de Einstein.	38
8.1.1	Definición.	38
8.1.2	Tensor de Levi-Civita.	38
8.2	¿Cómo funcionaba Enigma?	39
8.3	¿Porqué los astronautas no lloran? Cap.2	39
8.3.1	Esperanza matemática.	39
9	Tarea 9	40
9.1	Ventaja Matemática (House Edge).	40
9.2	Riesgo.	40
9.3	Apuestas en línea.	41
10	Tarea 10	42
10.1	Skewness (Asimetría).	42
10.2	Curtosis.	42
10.3	Primer Examen.	43
11	Tarea 11	49
11.1	Algoritmos para calcular PI.	49
11.2	Enteros extra largos.	49
11.3	Demostración fórmula presentación.	49
12	Tarea 12	51
12.1	Problema Lewis Carroll.	51
13	Tarea 13	52

13.1	Función de distribución.	52
13.2	¿Es la economía la siguiente ciencia física?	52
14	Tarea 14	54
14.1	Curva ROC.	54
15	Tarea 15	55
15.1	Demostraciones.	55
15.2	Histograma caminata aleatoria.	56
16	Tarea 16	58
Tarea 16		58
16.1	Relación entre función Gamma y Factorial.	58
16.2	Simulación de movimiento Browniano.	58
17	Tarea 17	61
17.1	Delta de Dirac y Theta de Heaviside.	61
17.2	Interpretación gráfica de la desviación estándar.	62
17.3	Gráficas de caminata con Gaussiana.	63
17.3.1	Justificación.	64
17.4	Caminata al azar en 2 dimensiones.	64
18	Tarea 18	66
18.1	Caminata aleatoria con coordenadas cartesianas.	66
19	Tarea 19	68
19.1	Clasificación de Problemas.	68
19.1.1	Clase P.	68
19.1.2	Clase NP.	69
19.1.3	Clase NP-completo.	69
19.1.4	Clase NP-difícil.	69
19.2	Fork.	69
19.3	Histograma normalizado.	69
19.3.1	Histogramas originales.	70
19.3.2	Histogramas normalizados.	71
19.4	Distribuciones de Probabilidad.	72
19.4.1	Distribución de Bernoulli.	72
19.4.1.1	Propiedades.	72
19.4.1.2	Características.	73
19.4.1.3	Ejemplos.	73
19.4.2	Distribución Binomial.	73
19.4.2.1	Propiedades.	73

19.4.2.2	Características.	74
19.4.2.3	Ejemplos.	74
19.4.3	Distribución Uniforme Continua.	74
19.4.3.1	Propiedades.	75
19.4.3.2	Características.	75
19.4.3.3	Ejemplos.	75
19.4.4	Distribución Exponencial.	75
19.4.4.1	Propiedades.	76
19.4.4.2	Características.	76
19.4.4.3	Ejemplos.	76
20	Tarea 20	77
20.1	Matrices Similares.	77
20.2	Ejercicios de eigenvalores y eigenvectores.	77
20.2.1	Ejercicio 1.	78
20.2.2	Ejercicio 2.	79
21	Tarea 21	81
21.1	Matrices poco densas.	81
21.1.1	Matriz triangular superior.	81
21.1.2	Matriz triangular inferior.	82
21.1.3	Matriz tridiagonal.	82
21.1.4	Usos de matrices poco densas.	82
21.2	Teorema de punto fijo.	83
21.3	Problemas de cadenas de Markov.	83
21.3.1	Ejercicio 1.	83
21.3.2	Ejercicio 2.	84
22	Tarea 22	86
22.1	Clasificación de Inteligencia Artificial.	86
22.1.1	Inteligencia Artificial Débil.	86
22.1.2	Inteligencia Artificial Fuerte.	86
22.2	Problema de 4 colores.	86
22.3	Leyes de Mendel.	87
	Bibliografía	87

Tarea 1

1.1 Dar 10 ejemplos de experimentos deterministas y 10 de experimentos aleatorios.

Para esto, primero damos la definición de experimento determinista y experimento aleatorio.

Un experimento es **determinista** cuando, realizado en las mismas condiciones, da los mismos resultados, es decir, se puede predecir lo que va a ocurrir. <http://www.matemath.com/azar/p02.html>

Un experimento es **aleatorio** cuando no se puede predecir lo que va a ocurrir, incluso cuando se realiza en las mismas condiciones los resultados pueden ser distintos. <http://www.matemath.com/azar/p02.html>

Basado en estas definiciones, podemos dar los siguientes ejemplos para **experimentos deterministas**.

- 1) Dejar caer una pelota desde una ventana y medir el tiempo que tarda en caer.
- 2) Mezclar dos sustancias para obtener un compuesto químico.
- 3) Calcular la distancia de un punto A en la ciudad de México a un punto B.
- 4) Determinar el tiempo que tomará recorrer una distancia viajando a velocidad constante.
- 5) Aplicar corriente eléctrica a un foco para que encienda.
- 6) Prender fuego a un papel.
- 7) Reproducir una nota musical en una guitarra.
- 8) Agarrar un cable conectado a una toma de corriente eléctrica.
- 9) Arrancar un automovil.
- 10) Determinar la distancia que recorre un haz de luz en el vacío en un segundo.

Y también podemos dar los siguientes ejemplos de **experimentos aleatorios**.

- 1) Determinar el resultado al lanzar un dado.
- 2) Preguntar un número cualquiera a una persona.
- 3) Predecir el resultado del juego Melate.
- 4) Predecir el resultado de la ruleta.

- 5) Sacar una carta de un mazo revuelto.
- 6) Lanzar una moneda.
- 7) El tiempo que tarda en fundirse un foco.
- 8) Preguntar a una persona en que día de la semana nació.
- 9) El color de una esfera extraída de un envase opaco en el cual hay varias esferas de diferentes colores.
- 10) Predecir el sexo de un bebe previo a su concepción.

1.2 Dar ejemplos de espacios muestrales.

En la teoría de probabilidades, el espacio muestral o espacio de muestreo (denotado E, S, Ω o U) consiste en el conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio. [34]

Para los ejemplos dados anteriormente de experimentos aleatorios se tienen los siguientes espacios muestrales.

- 1) Los números del uno al seis.
- 2) Los números reales.
- 3) Las combinaciones posibles que se pueden realizar con los números de la boleta del Melate.
- 4) Los números del 0 al 36 en el juego de ruleta.
- 5) Las cartas de una baraja.
- 6) Las caras de una moneda.
- 7) Tiempos mayores a cero.
- 8) Los días de la semana.
- 9) Las esferas dentro de un envase.
- 10) Los posibles géneros de un bebe, masculino o femenino.

1.3 Conceptos.

1.3.1 Probabilidad Clásica

Si un suceso puede ocurrir de N maneras mutuamente excluyentes e igualmente probables, y m de ellas poseen una característica A , se tiene la Eq.(1.1).

$$P(A) = \frac{m}{N} = \frac{\text{Nro. de casos favorables a } A}{\text{Nro. de casos posibles}} \quad (1.1)$$

También se le llama a priori o de Laplace.

[17]

1.3.2 Probabilidad Geométrica

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región.

Considerando una recta \overline{AB} y un segmento \overline{CD} dentro de esta recta, la probabilidad de que un evento X se encuentre dentro del segmento \overline{CD} se define por la Eq.(1.2).

$$P(\overline{CD}) = \frac{Long(\overline{CD})}{Long(\overline{AB})} \quad (1.2)$$

Considerando una región A y una región B dentro de A , la probabilidad de que un evento X se encuentre dentro de la región B se define por la Eq.(1.3).

$$P(B) = \frac{Area\ de\ B}{Area\ de\ A} \quad (1.3)$$

[9]

1.3.3 Probabilidad Frecuentista

También se le llama a posteriori. Es la que se obtiene al realizar un número finito de repeticiones n de un experimento aleatorio y se obtiene el número de veces $n(A)$ que se repite el evento A . En este caso, la probabilidad se define con la Eq.(1.4).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{Número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ A}{Número\ total\ de\ repeticiones} \quad (1.4)$$

[17]

1.3.4 Probabilidad Subjetiva

: Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda ocurrir.

[17]

1.3.5 Probabilidad Axiomática

La probabilidad P de un suceso E , denotada por $P(E)$, se define con respecto a un "universo" o espacio muestral Ω , conjunto de todos los posibles sucesos elementales, tal que P verifique los Axiomas de Kolmogoróv, enunciados por el matemático ruso de este nombre en 1933. En este sentido, el suceso E es, en términos matemáticos, un subconjunto de Ω .

PRIMER AXIOMA:

La probabilidad de un suceso A es un número real mayor o igual que 0. La probabilidad de un suceso es un número positivo o nulo.

$$P(A) \geq 0 \quad (1.5)$$

SEGUNDO AXIOMA:

La probabilidad del total, Ω , es igual a 1. Ω representa todas las posibles alternativas y se denomina suceso seguro.

$$P(\Omega) = 1 \quad (1.6)$$

TERCER AXIOMA:

Si A_1, A_2, \dots son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces:

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \text{ cuando } A_1, \dots, A_k \text{ son ajenos} \quad (1.7)$$

Según este axioma se puede calcular la probabilidad de un suceso compuesto de varias alternativas mutuamente excluyentes sumando las probabilidades de sus componentes.

[18]

1.3.6 Probabilidad Lógica

Es un tipo de probabilidad en desarrollo que analiza la probabilidad como una generalización de la lógica.

1.3.7 Proceso Estocástico

Es aquel en el que se representan todos y cada uno de los pasos necesarios para realizar una actividad, además de las formas o maneras en que cada uno de los pasos puede ser llevado a efecto y sus respectivas probabilidades, dicho de otra manera, cualquier proceso en el que se involucren probabilidades es un proceso estocástico.

[19]

1.3.8 Frecuencia Estadística

Es la cantidad de veces que se repite un suceso en un rango de un espacio muestral dado.

[8]

1.3.9 Frecuencia Absoluta

Es el número de veces que aparece un valor de la variable estadística X en un estudio. Se suele denotar por F_i a la frecuencia absoluta del valor $X = x_i$ de la variable X . Dada una muestra de N elementos, la suma de todas las frecuencias absolutas debe dar el total de la muestra estudiada N .

[45]

1.3.10 Frecuencia Relativa

Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra (N).

$$f_i = \frac{n_i}{N} = \frac{n_i}{\sum_i n_i} \quad (1.8)$$

[45]

1.3.11 Frecuencia Acumulada

Hay dos tipos, absoluta y relativa.

Frecuencia absoluta acumulada: (N_i) , se refiere al total de las frecuencias absolutas para todos los eventos iguales o anteriores que un cierto valor, en una lista ordenada de eventos.

Frecuencia relativa acumulada: (F_i) , es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el total de la muestra.

$$F_i = \frac{N_i}{N} \quad (1.9)$$

[45]

1.3.12 Riesgo

Es una medida de la magnitud de los daños frente a una situación peligrosa. El riesgo se mide asumiendo una determinada vulnerabilidad frente a cada tipo de peligro.

[47]

1.3.13 Peligrosidad

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de una situación peligrosa.

[46]

1.3.14 Amenaza

Es una posible causa de riesgo.

1.3.15 Vulnerabilidad

Probabilidad de ocurrencia de daños dado que se ha presentado un peligro.

[47]

1.4 Triángulos de Pascal.

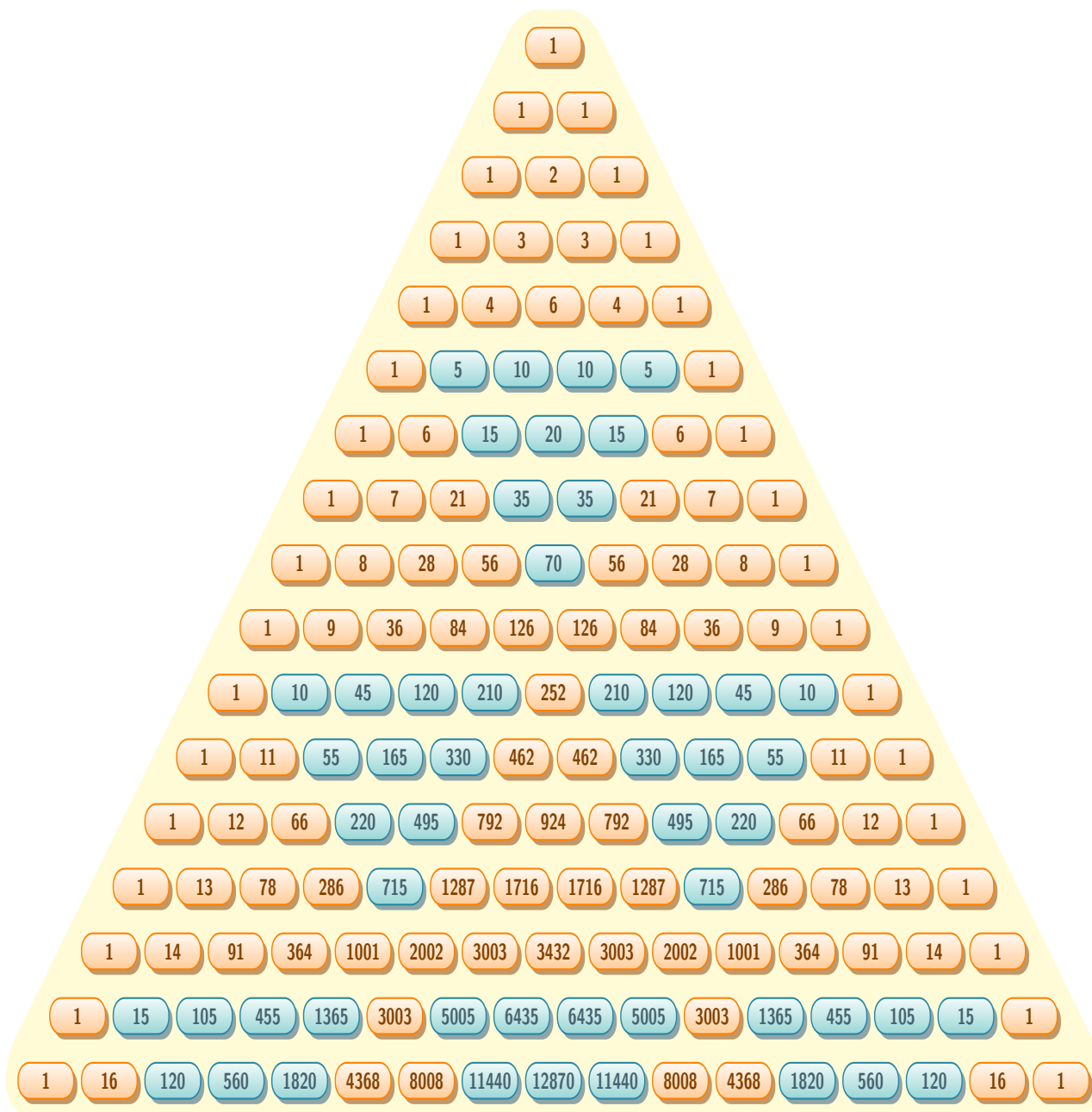
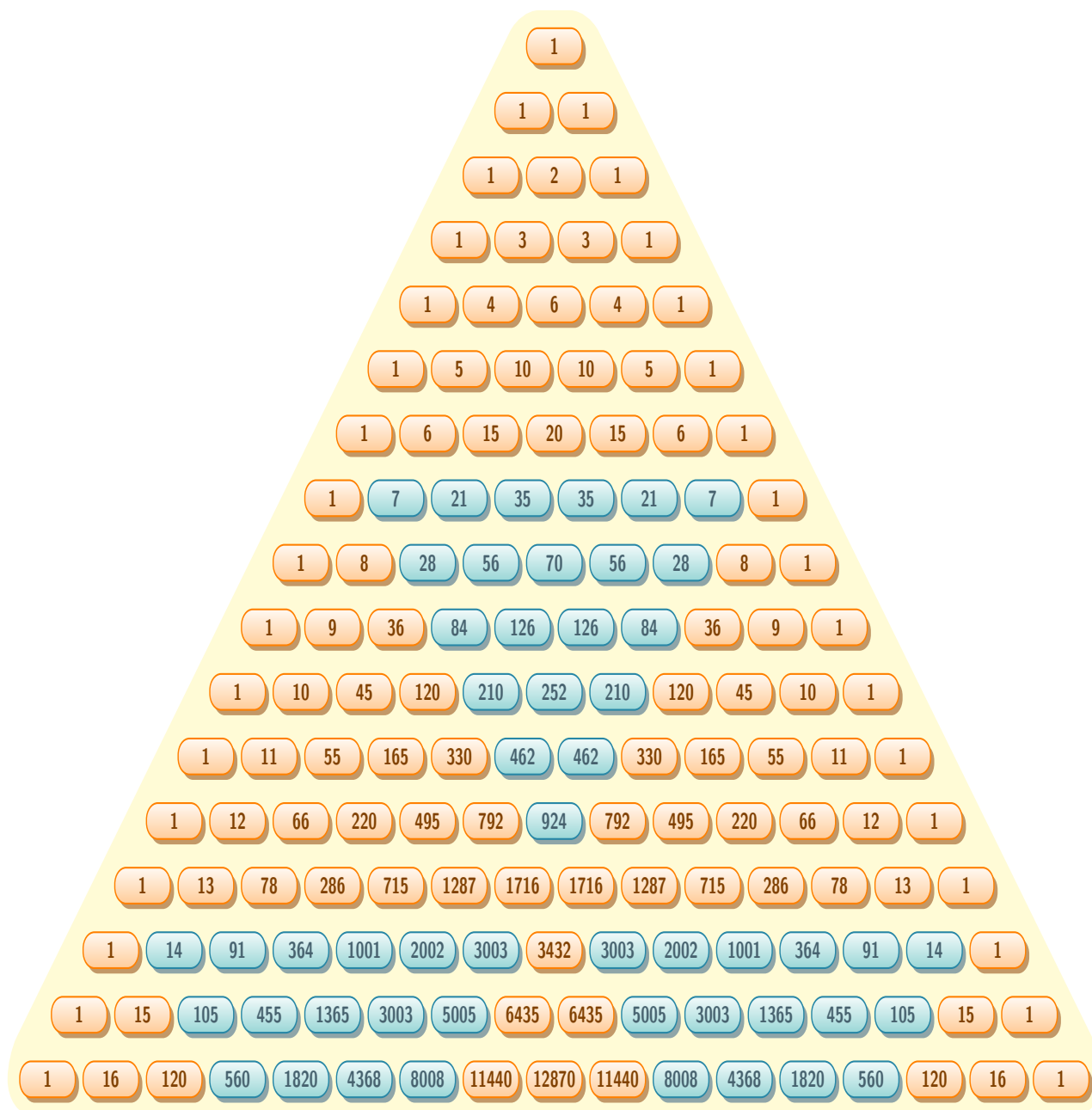


Figure 1.1: Triángulo de Pascal para $n=5$

Figure 1.2: Triángulo de Pascal para $n=7$

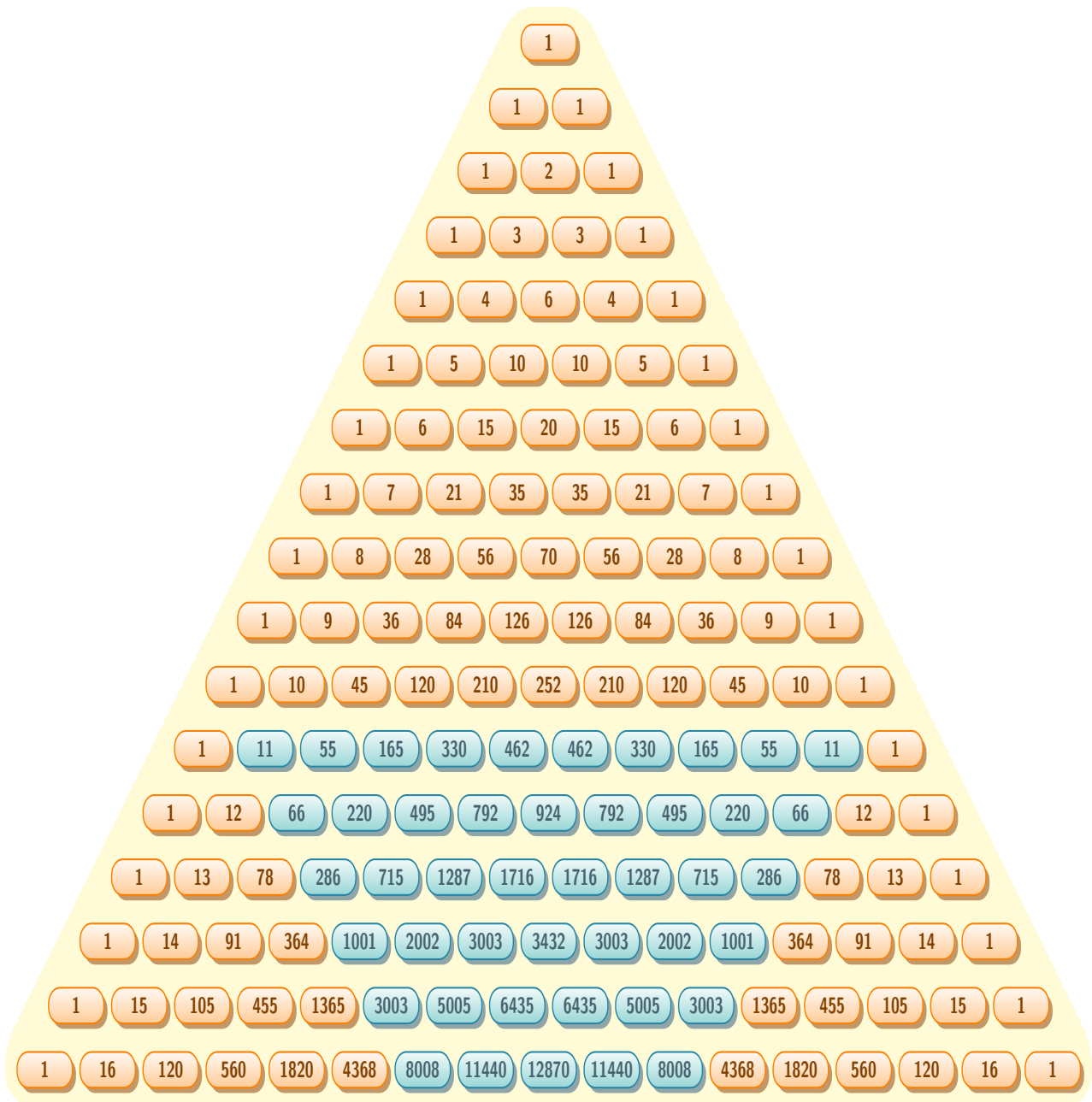


Figure 1.3: Triángulo de Pascal para n=11

1.5 Teorema del Binomio.

Expandir el binomio $(x + y)^n$ para $n = 10$.

Para realizar este ejercicio se utiliza la Eq.(1.10).

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1.10)$$

Donde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.11)$$

Para $n = 10$ se obtiene la Eq.(1.12)

$$(x+y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{10-k} y^k \quad (1.12)$$

Desarrollando la sumatoria:

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} = & \binom{10}{0} x^{10} + \binom{10}{1} x^9 y^1 + \binom{10}{2} x^8 y^2 + \binom{10}{3} x^7 y^3 + \binom{10}{4} x^6 y^4 + \\ & \binom{10}{5} x^5 y^5 + \binom{10}{6} x^4 y^6 + \binom{10}{7} x^3 y^7 + \binom{10}{8} x^2 y^8 + \binom{10}{9} x^1 y^9 + \\ & \binom{10}{10} y^{10} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Realizando las combinaciones:

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} = & \frac{10!}{0!(10-0)!} x^{10} + \frac{10!}{1!(10-1)!} x^9 y^1 + \frac{10!}{2!(10-2)!} x^8 y^2 + \frac{10!}{3!(10-3)!} x^7 y^3 + \frac{10!}{4!(10-4)!} x^6 y^4 + \\ & \frac{10!}{5!(10-5)!} x^5 y^5 + \frac{10!}{6!(10-6)!} x^4 y^6 + \frac{10!}{7!(10-7)!} x^3 y^7 + \frac{10!}{8!(10-8)!} x^2 y^8 + \frac{10!}{9!(10-9)!} x^1 y^9 + \\ & \frac{10!}{10!(10-10)!} y^{10} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Desarrollando los factoriales:

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} = & \frac{3628800}{1(3628800)} x^{10} + \frac{3628800}{1(362880)} x^9 y^1 + \frac{3628800}{2(40320)} x^8 y^2 + \\ & \frac{3628800}{6(5040)} x^7 y^3 + \frac{3628800}{24(720)} x^6 y^4 + \frac{3628800}{120(120)} x^5 y^5 + \\ & \frac{3628800}{720(24)} x^4 y^6 + \frac{3628800}{5040(6)} x^3 y^7 + \frac{3628800}{40320(2)} x^2 y^8 + \\ & \frac{3628800}{362880(1)} x^1 y^9 + \frac{3628800}{3628800(1)} y^{10} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} = & x^{10} + 10x^9 y^1 + 45x^8 y^2 + 120x^7 y^3 + 210x^6 y^4 + 252x^5 y^5 + \\ & 210x^4 y^6 + 120x^3 y^7 + 45x^2 y^8 + 10x^1 y^9 + y^{10} \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.6 Principio de la Pichonera o del Palomar

Si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces al menos un nido tiene dos o más palomas en él.

[10]

1.7 Diagrama de árbol.

Un diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de objetos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción de un diagrama de árbol.

El diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados del experimento, el cual consta una serie de pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en los problemas de conteo y probabilidad.

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. Cada una de estas ramas se conoce como rama de primera generación.

En el final de cada rama de primera generación se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas conocidas como ramas de segunda generación, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta que la construcción de un árbol no depende de tener el mismo número de ramas de segunda generación que salen de cada rama de primera generación y que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

[28]

Tarea 2

2.1 Reseña de extractos de libro.

Los artículos incluidos en la presentación nos dan una visión general de como diferentes métodos de conteo se manifiestan en la naturaleza. En algunos casos pareciera que estos métodos de conteo han sido incorporados al instinto de algunos animales, como en la forma en que las hormigas *Cataglyphis fortis* navegan de regreso a sus hormigueros o en como las cigarras del género *Magicicada* tienen sus ciclos de reproducción en periodos de años que coinciden con los números primos. En otros casos se ha logrado demostrar que algunos animales pueden contar utilizando diferentes mecanismos desarrollados por el ser humano. Y el mismo ser humano a través de la historia ha utilizado diferentes métodos de conteo para registrar eventos de su historia, además de que conforme avanza el nivel de análisis matemático que puede desarrollar, ha podido identificar diferentes patrones que se repiten en la naturaleza. Con esto podemos ver como las matemáticas están fuertemente relacionadas con la evolución de nuestro planeta y gracias a su estudio podemos entender algunos fenómenos que se presentan en él.

2.2 Demostrar las siguientes fórmulas.

a) Eq.(2.1).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.1)$$

Primero obtenemos el número de permutaciones posibles con todos los elementos de un conjunto considerando que no es posible repetir el mismo elemento dos veces. Considerando que tenemos n elementos podemos calcular el número de permutaciones por medio del principio multiplicativo. De esta forma obtenemos la Eq.(2.2).

$$\text{Permutaciones posibles} = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 3 * 2 * 1 = n! \quad (2.2)$$

Después, para calcular el número de permutaciones posibles tomando un número de elementos k menor al total del conjunto n y utilizando el principio multiplicativo, obtenemos la Eq.(2.3).

$$n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+2) * (n-k+1) \quad (2.3)$$

Y podemos agregar elementos para escribir la Eq. (2.4).

$$\frac{n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+2) * (n-k+1) * (n-k) * (n-k-1) * \dots * 3 * 2 * 1}{(n-k) * (n-k-1) * \dots * 3 * 2 * 1} \quad (2.4)$$

La Eq.(2.4) la podemos reducir a la Eq. (2.5).

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad (2.5)$$

Que es la fórmula general para las permutaciones sin repetición.

Y si queremos calcular el número de combinaciones (no importa el orden de los elementos) sin repetición, dividimos entre el número de permutaciones entre los elementos de la muestra que por la Eq.(2.2) sabemos que es $k!$. Por lo tanto, para las combinaciones sin repetición obtenemos la Eq.(2.6).

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.6)$$

Que es lo que se buscaba demostrar.

b) Eq.(2.7).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (2.7)$$

Esta fórmula se demuestra en la generalización de los caminos para un rectángulo.

c) Eq.(2.8) y Eq.(2.9).

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (2.8)$$

$$\binom{0}{k} = 0 \quad (2.9)$$

Para la Eq.(2.9) sabemos por la definición de combinatoria que se requiere de un espacio muestral con un número de elementos mayor a 0, por lo tanto, si $n = 0$ no es posible realizar ninguna combinación, que es lo que expresa la Eq.(2.9).

Para la Eq.(2.8) desarrollamos la Eq.(2.10).

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad (2.10)$$

d) Eq.(2.11).

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (2.11)$$

Utilizando la fórmula general para las combinatorias podemos desarrollar la Eq.(2.12).

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2.12)$$

2.3 Ejemplos en cómputo del principio del palomar.

- a) Se puede utilizar al analizar si un espacio de memoria ha sido referenciado dos veces por el mismo proceso, lo cual puede indicar que el proceso entró a un ciclo infinito o que no tenemos suficiente memoria para procesar el problema.
- b) Se utiliza para demostrar si un proceso es o no computable.

2.4 Ejemplos de permutaciones y combinaciones.

2.4.1 Permutaciones

1. La combinación de una caja fuerte.
2. La forma de ordenar las bolas de billar.
3. Los resultados de una carrera.
4. Las posiciones de arranque en una carrera de autos.
5. El valor de un byte.
6. La creación de una contraseña.
7. Las placas de un vehículo.
8. La asignación de puestos al personal de una empresa.
9. Las formas en que se puede sentar una familia en una fila del cine.

2.4.2 Combinaciones

1. El resultado de un sorteo donde se busca adivinar los números que saldrán.
2. Una mano en el juego de baraja.
3. Una mezcla de colores.
4. Una mezcla de compuestos químicos.
5. Preparas un coctél de frutas.
6. Mezcla para preparas cemento para una construcción.
7. Un equipo de fultbol.
8. Preparar una limonada.
9. Elegir vestimenta.

2.5 Generalización de problemas de caminos.

2.5.1 Rectángulo

En la Fig.(2.1) podemos observar la representación de un rectángulo con dimensiones k y $n - k$.

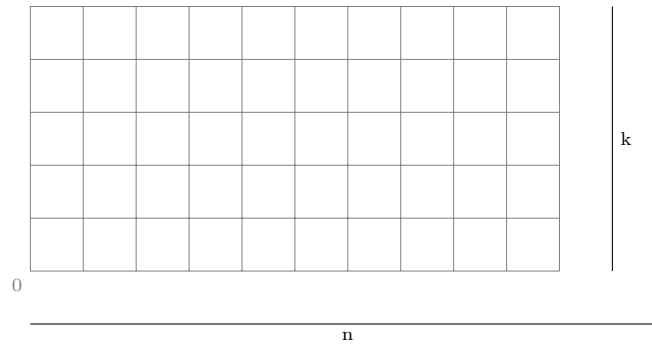


Figure 2.1: Caminos en un rectángulo

En la Fig.(2.2) podemos observar la cantidad de caminos de menor longitud con los cuales se pueden llegar a cada nodo partiendo desde el el origen marcado en la Fig.(2.1).

1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n

k

Figure 2.2: Representación de triángulo de Pascal en rectángulo

Se observa que la cantidad de caminos que se pueden recorrer coincide con los números del triángulo de Pascal.

También observamos que para cualquier vertice de $n - k$ y k se cumple que el número de caminos es igual a la combinación ${}_nC_k$. Y también cualquier vertice ${}_nC_k$ es igual a la suma de los dos vertices anteriores ${}_{n-1}C_k$ y ${}_{n-1}C_{k-1}$.

[62]

Tarea 3

3.1 Magnetic Cloaking.

En la última década la investigación en invisibilidad se ha desarrollado basándose en las propiedades de los metamateriales, los cuales son materiales artificiales con propiedades electromagnéticas específicas que proceden de su estructura y no de su composición.

En un inicio se analizó como los campos electromagnéticos podían ser redireccionados utilizando estos materiales [60].

En la actualidad, se han desarrollado estructuras con los metamateriales, capaces de esconder objetos en dos y tres dimensiones, pero con dificultades para trabajar en altas frecuencias, como la de la luz visible [57, 60].

3.2 Operaciones lógicas con circuitos.

Para realizar operaciones lógicas existen tres operadores fundamentales *AND*, *OR*, *NOT* los cuales se implementan con circuitos como se explica a continuación.

Se utilizarán botones como entradas lógicas y una resistencia como la carga que recibirá el resultado de la operación.

a) Operación *AND*.

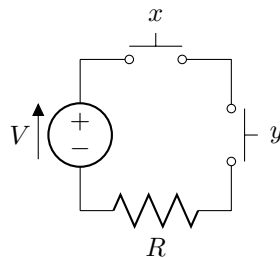
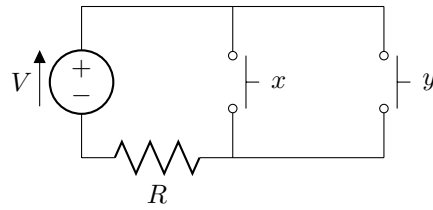
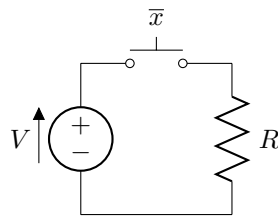


Figure 3.1: Compuerta *AND*.

b) Operación *OR*.

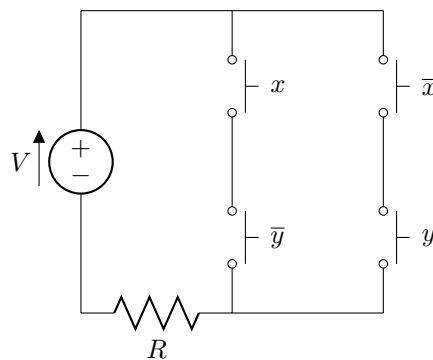
Figure 3.2: Compuerta *OR*.

c) Operación *NOT*.

Figure 3.3: Compuerta *AND*.

Nota: Se podría utilizar un botón normalmente cerrado para esta compuerta, pero en este caso se utiliza un botón normalmente abierto pero con el valor de entrada negado.

Con estas compuertas se puede crear cualquier otra compuerta lógica, como por ejemplo la *XOR*.

Figure 3.4: Compuerta *XOR*.

Tarea 4

4.1 Demostraciones.

4.1.1 Si $(A \subset B)$ y $(B \subset A)$ entonces $A = B$

Partimos de que las premisas del lado izquierdo de la deducción son verdaderas.

$$A \subset B \quad B \subset A \tag{4.1}$$

Debido a esto, podemos describir a los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{x | x \text{ pertenece a } B\} \quad B = \{y | y \text{ pertenece a } A\} \tag{4.2}$$

Podemos observar que el único caso en que se cumple esto es cuando $A = B$, que es lo que se quería demostrar.

4.1.2 Leyes de De Morgan.

4.1.3 $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$

Partimos analizando $(A \cap B)^*$ y en específico la descripción de un x elemento que pertenece a este conjunto.

$$x \in (A \cap B)^* \tag{4.3}$$

Desarrollando esta expresión observamos lo siguiente:

$$x \notin (A \cap B) \tag{4.4}$$

$$x \notin A \cup x \notin B \tag{4.5}$$

$$x \in A^* \cup x \in B^* \tag{4.6}$$

$$x \in A^* \cup B^* \tag{4.7}$$

Que es lo que se quería demostrar.

4.1.4 $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$

Partimos analizando $(A \cup B)^*$ y en específico la descripción de un elemento x que pertenece a este conjunto.

$$x \in (A \cup B)^* \quad (4.8)$$

Desarrollando esta expresión observamos lo siguiente:

$$x \notin (A \cup B) \quad (4.9)$$

$$x \notin A \cap x \notin B \quad (4.10)$$

$$x \in A^* \cap x \in B^* \quad (4.11)$$

$$x \in A^* \cap B^* \quad (4.12)$$

Que es lo que se quería demostrar.

4.1.5 $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^*)$.

Desarrollamos la expresión de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} A &= [(A \cap B) \cup A][(A \cap B) \cup B^*] \\ &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \cap (A \cup B^*) \cap (B \cup B^*) \\ &= A \cap (A \cup B) \cap (A \cup B^*) \cap \Omega \\ &= A \cap (A \cup B^*) \cap \Omega \\ &= A \cap \Omega \\ &= A \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, la expresión original es verdadera.

4.2 Desarrollo de probabilidad de una unión de conjuntos.

4.2.1 Para 3 conjuntos.

Se tienen los conjuntos S_1 , S_2 y S_3 .

La probabilidad de la unión de estos conjuntos se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) &= \\ &= P(S_1 \cup (S_2 \cup S_3)) = \\ &= P(S_1) + P(S_2 \cup S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cup S_3)) = \\ &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_2 \cap S_3) - P((S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)) = \\ &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2.2 Para 4 conjuntos.

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) &= \\ P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) + P(S_4) - P((S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap S_4) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Desarrollando el elemento $P((S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap S_4)$:

$$\begin{aligned} P((S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap S_4) &= \\ &= P(((S_1 \cup S_2) \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)) = \\ &= P[(S_1 \cap S_4) \cup (S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)] = \\ &= P(S_1 \cap S_4) + P[(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)] - P((S_1 \cap S_4) \cap [(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)]) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desarrollando el elemento $P[(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)]$:

$$\begin{aligned} P[(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)] &= \\ &= P(S_2 \cap S_4) + P(S_3 \cap S_4) - P(S_2 \cap S_3 \cap S_4) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Desarrollando el elemento $P((S_1 \cap S_4) \cap [(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)])$:

$$\begin{aligned} P((S_1 \cap S_4) \cap [(S_2 \cap S_4) \cup (S_3 \cap S_4)]) &= \\ &= P[(S_1 \cap S_2 \cap S_4) \cup (S_1 \cap S_3 \cap S_4)] = \\ &= P(S_1 \cap S_2 \cap S_4) + P(S_1 \cap S_3 \cap S_4) - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sustituyendo Eq.4.17 y Eq.4.18 en Eq.4.16:

$$\begin{aligned} P((S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap S_4) &= \\ &= P(S_1 \cap S_4) + P(S_2 \cap S_4) + P(S_3 \cap S_4) - P(S_2 \cap S_3 \cap S_4) - P(S_1 \cap S_2 \cap S_4) - P(S_1 \cap S_3 \cap S_4) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sustituyendo Eq.4.19 y Eq.4.14 en Eq.4.15

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) &= \\ &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) + P(S_4) \\ &\quad - P(S_1 \cap S_4) - P(S_2 \cap S_4) - P(S_3 \cap S_4) + P(S_2 \cap S_3 \cap S_4) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_4) + P(S_1 \cap S_3 \cap S_4) - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \end{aligned}$$

Y, finalmente, ordenando los elementos anteriores:

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) &= \\ &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) - \\ &\quad - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_1 \cap S_4) - P(S_2 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_4) - P(S_3 \cap S_4) + \\ &\quad + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_4) + P(S_1 \cap S_3 \cap S_4) + P(S_2 \cap S_3 \cap S_4) - \\ &\quad - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \end{aligned}$$

4.3 Antinomia vs. Paradoja.

4.3.1 Definición de Paradoja.

f. Hecho o expresión aparentemente contrarios a la lógica.

4.3.2 Definición de Antinomia.

f. Contradicción entre dos principios racionales.

4.3.3 Diferencia

Según los conceptos, ambos conceptos representan una irregularidad en la lógica de una propuesta.

La diferencia radica en que la paradoja es un evento contrario a la lógica, es decir, no es congruente con los preceptos de la lógica.

Mientras que una antinomia es una contradicción entre dos principios considerados como racionales, es decir, es una incongruencia entre dos principios, los cuales son vistos como verdaderos.

4.3.4 Paradoja de Russell

Supongamos los casos de conjuntos que son miembros de sí mismos. Un ejemplo descrito es el que supone un conjunto que consta de "ideas abstractas". Dicho conjunto es miembro de sí mismo porque el propio conjunto es una idea abstracta. Otro ejemplo sería una bolsa con bolsas dentro. Por otro lado un conjunto que consta de "libros" no es miembro de sí mismo porque el conjunto en sí no es un libro. Russell preguntaba (en carta escrita a Frege en 1902), si el conjunto de los conjuntos que no forman parte de sí mismos (es decir, aquel conjunto que engloba a todos aquellos conjuntos que no están incluidos en sí mismos, como el de "libros" en el ejemplo anterior) forma parte de sí mismo. La paradoja consiste en que si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismos y por lo tanto forma parte de sí mismo. Es decir, formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

4.3.5 Enunciado formal de la paradoja

Llamemos M al "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros". Es decir

$$M = x : x \notin x \quad (4.20)$$

Según la teoría de conjuntos de Cantor, la Eq.4.20 se puede representar por

$$\forall x \quad x \in M \iff x \notin x \quad (4.21)$$

es decir "Cada conjunto es elemento de M si y sólo si no es elemento de sí mismo".

Ahora, en vista de que M es un conjunto, se puede substituir x por M en la Eq.4.21, de donde se obtiene

$$M \in M \iff M \notin M \quad (4.22)$$

Es decir que M es un elemento de M si y sólo si M no es un elemento de M , lo cual es absurdo.

[57]

4.3.6 Antinomia de Bertrand

4.4 Conjuntos Singulares

Se llama conjunto singular en la teoría de conjuntos a todo conjunto que se contiene a sí mismo. Este tipo de conjuntos es la base de ciertas paradojas matemáticas que, como la paradoja de Russell o la paradoja del conjunto de todos los conjuntos de Georg Cantor, se basan en admitir la existencia de este tipo de conjuntos.

Tarea 5

5.1 Probabilidad Bayesiana

Este tipo de probabilidad es muy preciso para analizar eventos a posteriori, pero su exactitud depende de la correcta definición de las relaciones entre los eventos que son analizados.

[48]

Es imposible en el cálculo de inferencias inductivas capturar todos los hechos inductivos en un dominio, sin tener que recurrir a contenido fuera de ese dominio.

[5]

5.2 No me da vergüenza confesar que soy ignorante de lo que no sé.

Esta frase es atribuida a Marco Tulio Cicerón jurista, político, filósofo, escritor, y orador romano.

Abierto a todas las tendencias, fue discípulo del epicúreo Fedro y del estoico Diodoto, siguió lecciones en la Academia y fue a encontrar a Rodas al maestro de la oratoria, Molón de Rodas, y al estoico Posidonio.

Formado en las principales escuelas filosóficas de su tiempo, mostró siempre una actitud antidogmática y recogió aspectos de las diversas corrientes. La originalidad de sus obras filosóficas es escasa, aunque con sus sincréticas exposiciones se convirtió en un elemento crucial para la transmisión del pensamiento griego.

[2]

5.3 Paradoja del falso positivo.

Esta situación se produce al realizar una prueba para determinar la presencia de alguna condición médica que tiene una probabilidad de dar un falso positivo, que aunque es baja, es mayor a la probabilidad de que un sujeto en específico tenga dicha condición médica.

Esto se presenta, cuando se realiza la prueba en una población que tiene muy pocas probabilidades de tener la enfermedad.

5.4 Falacia del apostador.

Esta falacia se origina al aplicar de manera incorrecta la probabilidad condicional.

Para explicar esta falacia podemos tomar el ejemplo de lanzar un volado. Antes de lanzar la moneda podemos calcular que la probabilidad de que caiga cara es de $1/2$. De la misma forma, calculamos que la probabilidad de lanzar 2 caras seguidas es de $1/4$, y para 3 caras es de $1/8$, y así sucesivamente. Esta probabilidad es la misma para cualquier combinación en los resultados de los lanzamientos, como, por ejemplo, cara-cruz-cara, cara-cara-cruz, etc.

Al lanzar la moneda por vez primera, se obtiene un resultado en específico que deja de ser objeto de probabilidad, y pasa a ser un dato estadístico. Entonces para el segundo lanzamiento tenemos que la probabilidad de que caiga cara o cruz es $1/2$, sin importar el resultado del primer lanzamiento.

Este comportamiento lo podemos observar en cualquier evento en el que el resultado actual no tiene dependencia de los resultados anteriores. Es decir, cuando el evento es completamente aleatorio.

5.5 Problema 2 de la exposición.

Se lanzan dos dados. Se define como A al suceso «la suma de los dos números que salen es múltiplo de tres» y como B al suceso «sale al menos un seis».

Obtégase las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A^* \cap B$, y $(A \cup B)^*$.

La probabilidad del evento «la suma de los dos números que salen es múltiplo de tres» se obtiene de la siguiente forma:

$$P(A) = P(+3) + P(+6) + P(+9) + P(+12) \quad (5.1)$$

La totalidad de eventos que se pueden presentar es de $6 \cdot 6 = 36$.

El evento $+3$ se obtiene en dos casos, $(1,2)$ y $(2,1)$, por lo que su probabilidad es $2/36$.

El evento $+6$ se obtiene en cinco casos, $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ y $(5,1)$, por lo que su probabilidad es $5/36$.

El evento $+9$ se obtiene en cuatro casos, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ y $(6,3)$ por lo que su probabilidad es $4/36$.

El evento $+12$ se obtiene en un caso, $(6,6)$, por lo que su probabilidad es $1/36$.

De esta forma, obtenemos que la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} \quad (5.2)$$

Para el evento «sale al menos un seis» tenemos once casos, $(1,6)$, $(2,6)$, $(3,6)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(6,6)$, $(6,5)$, $(6,4)$, $(6,3)$, $(6,2)$ y $(6,1)$ por lo que su probabilidad es $11/36$.

$$P(B) = \frac{11}{36} \quad (5.3)$$

El evento $A \cap B$ se da en los casos que se repiten en ambos eventos, estos son $(3,6)$, $(6,6)$ y $(6,3)$ por lo que su probabilidad es:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} \quad (5.4)$$

Para el evento $A \cup B$ podríamos contar también los casos que se presentan en ambos eventos, pero como ya conocemos el valor de $A \cap B$ podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{12}{36} + \frac{11}{36} - \frac{3}{36} = \frac{20}{36} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La probabilidad del evento $A^* \cap B$ la calculamos de la siguiente forma:

$$P(A^* \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} - \frac{3}{36} = \frac{8}{36} \quad (5.6)$$

Y para la probabilidad de $(A \cup B)^*$:

$$P((A \cup B)^*) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} \quad (5.7)$$

5.6 Histogramas de dado de 3 caras (ROOT)

Para relizar los histogramas se utilizaron los siguientes comandos en ROOT:

```
////////////////////////////////Inicio de programa////////////////////////////////
```

```
luis@luis-K46CB: /root-6.04.14 root
```

```
— Welcome to ROOT 6.04/14 http://root.cern.ch —
— (c) 1995-2014, The ROOT Team —
— Built for linuxx8664gcc —
— From tag v6-04-14, 3 February 2016 —
— Try '.help', '.demo', '.license', '.credits', '.quit'/'.' —
```

```
root [0] TRandom3 dado
(TRandom3 &) @0x7f1c8a7cb028
root [1] TH1F *D1 = new TH1F("D1","Dado de tres caras",100,0,4)
(class TH1F *) 0x1fc4510
root [2] TH1F *D2 = new TH1F("D2","Dado de tres caras",100,0,4)
(class TH1F *) 0x1fdc260
root [3] TH1F *D3 = new TH1F("D3","Dado de tres caras",100,0,4)
(class TH1F *) 0x1fbf770
root [4] TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","Dynamic",200,10,700,500);
root [5] for(int n=0;n<100;n++) D1->Fill(int(dado.Rndm(1)*3)+1)
root [6] for(int n=0;n<1000;n++) D2->Fill(int(dado.Rndm(1)*3)+1)
root [7] for(int n=0;n<10000;n++) D3->Fill(int(dado.Rndm(1)*3)+1)
root [8] D1->Draw()
root [9] Info in ;TCanvas::Print;: GIF file /home/luis/root-6.04.14/100muestras.gif has been created
D2->Draw()
root [10] Info in ;TCanvas::Print;: GIF file /home/luis/root-6.04.14/1000muestras.gif has been created
D3->Draw()
root [11] Info in ;TCanvas::Print;: GIF file /home/luis/root-6.04.14/10000muestras.gif has been created
////////////////////////////////Fin de programa////////////////////////////////
```

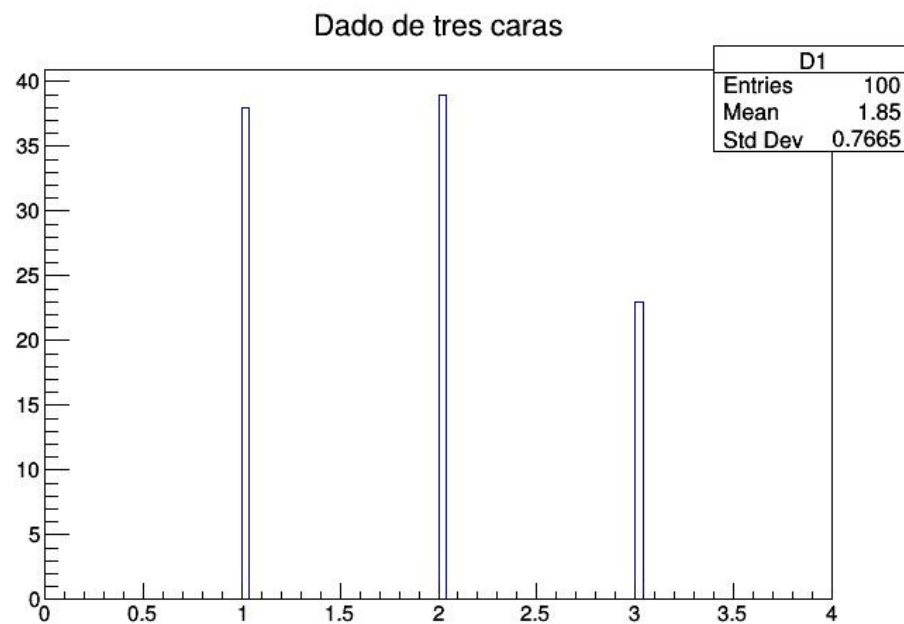


Figure 5.1: Experimento de dado de 3 caras - 100 repeticiones

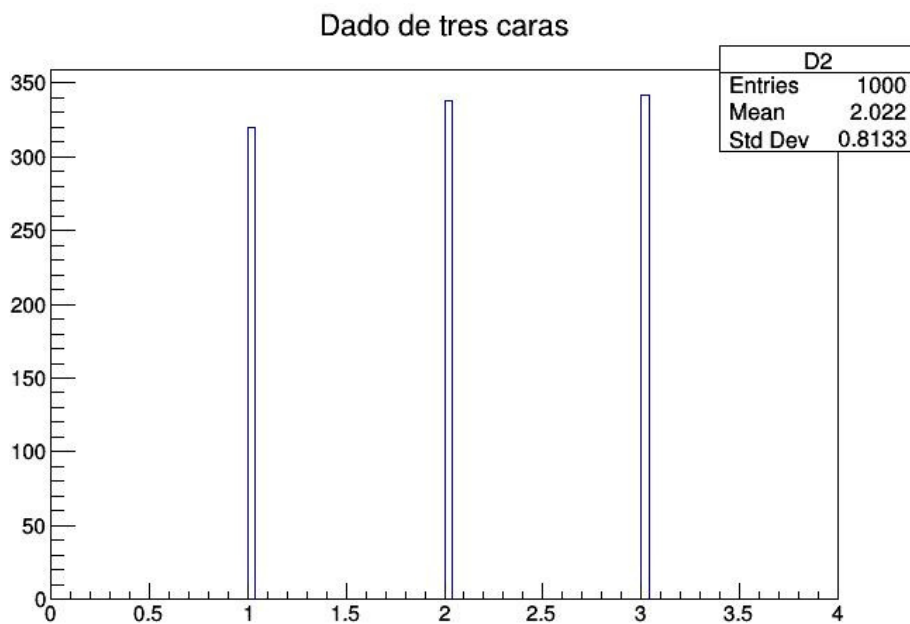


Figure 5.2: Experimento de dado de 3 caras - 1,000 repeticiones

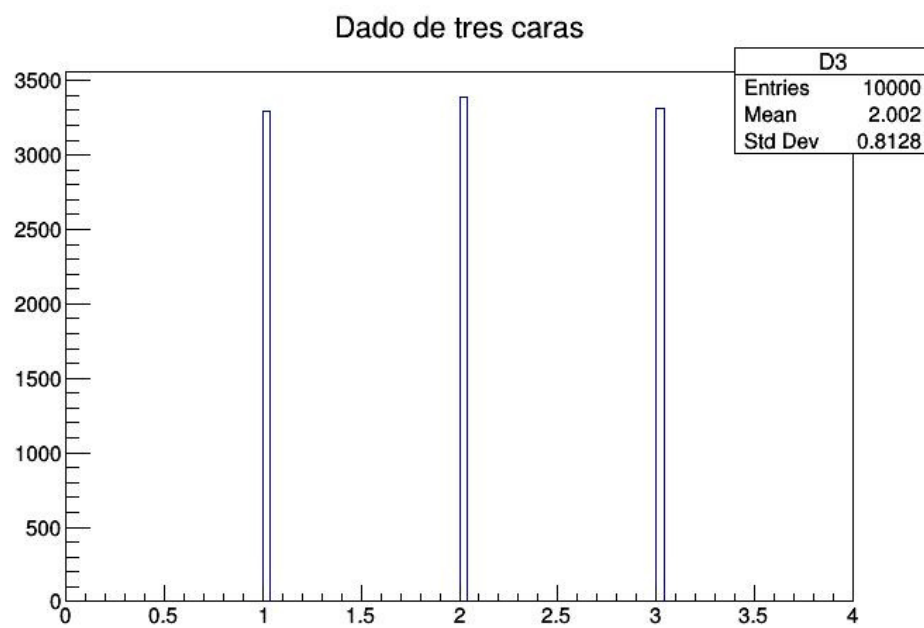


Figure 5.3: Experimento de dado de 3 caras - 10,000 repeticiones

Tarea 6

6.1 Falacia del apostador.

Esta falacia se origina al aplicar la probabilidad condicional en una situación en que los resultados de los eventos analizados son totalmente independientes.

Para explicar esta falacia podemos tomar el ejemplo de lanzar un volado. Antes de lanzar la moneda podemos calcular que la probabilidad de que caiga cara es de $1/2$. De la misma forma, calculamos que la probabilidad de lanzar 2 caras seguidas es de $1/4$, y para 3 caras es de $1/8$, y así sucesivamente. Esta probabilidad es la misma para cualquier combinación en los resultados de los lanzamientos, como, por ejemplo, cara-cruz-cara, cara-cara-cruz, etc.

Al lanzar la moneda por vez primera, se obtiene un resultado en específico que deja de ser objeto de probabilidad, y pasa a ser un dato estadístico. Entonces para el segundo lanzamiento tenemos que la probabilidad de que caiga cara o cruz es $1/2$, sin importar el resultado del primer lanzamiento.

Este comportamiento lo podemos observar en cualquier evento en el que el resultado actual no tiene dependencia de los resultados anteriores. Es decir, cuando el evento es completamente aleatorio.

Esto lo podemos representar con la siguiente fórmula:

$$P(A|B) = P(A) \quad (6.1)$$

[36]

6.1.1 Falacia del apostador inversa.

Esta falacia se presenta cuando, al observar un evento en un suceso completamente aleatorio, se piensa que necesariamente ha habido otros eventos anteriores a este.

Esto se puede generar cuando un resultado que no se creó representativo de la aleatoriedad de un suceso es el primero que se presenta, como por ejemplo, un doble seis al tirar dos dados, una flor imperial en el poker, etc.

Esto lo podemos comprobar utilizando el teorema de Bayes:

$$P(M|U) = P(M) \frac{P(U|M)}{P(U)} \quad (6.2)$$

Pero como $P(U|M) = P(U)$, debido a que el evento es aleatorio, entonces:

$$P(M|U) = P(M) \quad (6.3)$$

[39]

6.2 Teorema de límite cental.

Las medias de muestras grandes y aleatorias son aproximadamente normales.

El teorema establece que la distribución de \bar{x} , que es la media de una muestra aleatoria de una población con varianza finita, tiene una distribución aproximadamente normal cuando el tamaño de la muestra es grande, independientemente de la forma de la distribución de la población.

Sea $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la función de densidad de la distribución normal definida como:

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.4)$$

con una media μ y una varianza σ^2 . El caso en el que su función de densidad sea $\mathcal{N}(0, 1)$, a la distribución se le conoce como normal estándar.

Se define S_n como la suma de n variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas, y con una media μ y varianza σ^2 finitas ($\sigma^2 \neq 0$):

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad (6.5)$$

de manera que, la media de S_n es $n \cdot \mu$ y la varianza $n \cdot \sigma^2$, dado que son variables aleatorias independientes. Con tal de hacer más fácil la comprensión del teorema y su posterior uso, se hace una estandarización de S_n como

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (6.6)$$

para que la media de la nueva variable sea igual a 0 y la desviación estándar sea igual a 1. Así, las variables Z_n convergerán en distribución a la distribución normal estándar $N(0, 1)$, cuando n tienda a infinito. Como consecuencia, si $\Phi(z)$ es la función de distribución de $N(0, 1)$, para cada número real z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n \leq z) = \Phi(z) \quad (6.7)$$

donde $\Pr()$ indica probabilidad y \lim se refiere a límite matemático.

[44]

6.2.1 Enunciado formal.

De manera formal, normalizada y compacta el enunciado del teorema es:

Teorema del límite central: Sea X_1, X_2, \dots, X_n un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Sea

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad (6.8)$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z) \quad (6.9)$$

Es muy común encontrarlo con la variable estandarizada Z_n en función de la media muestral \bar{X}_n ,

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (6.10)$$

puesto que son equivalentes, así como encontrarlo en versiones no normalizadas como puede ser:

Teorema (del límite central): Sea X_1, X_2, \dots, X_n un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas de una distribución con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$. Entonces, si n es suficientemente grande, la variable aleatoria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.11)$$

tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Nota: es importante remarcar que este teorema no dice nada acerca de la distribución de X_i , excepto la existencia de media y varianza.

[44]

6.3 Explosión Challenger.

El 28 de enero de 1986, 73 segundos después del decimo despegue del *Challenger*, el mismo explotó al quemar casi 2 millones de litros de combustible en un segundo.

Las actitudes descuidadas en la administración de la NASA hacia las advertencias de los equipos de ingeniería llevaron a realizar un despegue en condiciones que no eran óptimas, lo cual ocasionó que un elemento clave para la contención del combustible, los sellos que impedían que el combustible saliera de los propulsores, fallara debido principalmente a la baja temperatura del día en que se efectuó el lanzamiento.

Estos sellos habían sido probados para temperaturas superiores a los 20°C con una probabilidad de funcionamiento óptimo de 0.977, y se observó que a esta temperatura existía la posibilidad de que se abriera el sello por algunos segundos.

En pruebas a 10°C se observó que los sellos podían llegar a fallar por tiempos mayores a 10 minutos. El día del lanzamiento la temperatura era de 2°C .

Esto aunado a que eran seis los puntos en que se usaban estos sellos para impedir la salida del combustible, desencadenó en que un par de ellos fallaran durante el despegue, lo que ocasionó una fuga que llegó hasta el lugar de combustión y desencadenó en la explosión de la nave.

Si analizamos la probabilidad de que fallaran los sellos, podemos determinar que la probabilidad de todos funcionaran correctamente era de $(0.977)^6 = 0.87$, la cual deja una probabilidad de fallo de 0.13 la cual es muy alta al considerar que se trata de un evento del que dependía la vida de los astronautas.

Este suceso llevó a suspender de manera temporal las misiones de la NASA, y generó una cultura de precaución para evitar posibles fallas en todos los elementos de sus naves.

[12, 22]

6.4 Campana de Gauss en ROOT.

```

////////////////////////inicio de código////////////////////////////////
root [0] auto medidas2 = new TH1F("medidas2","Campana de Gauss",100,-0.5,10.5);
root [1] auto media = 5
(int) 5

```

```

root [2] TRandom3 rnd;
root [3] for(int i=0;i<400;i++) medidas2->Fill(rnd.Poisson(media));
root [5] auto c=new TCanvas();
root [6] medidas2->Draw();
////////////////////////////////fin de código////////////////////////////////

```

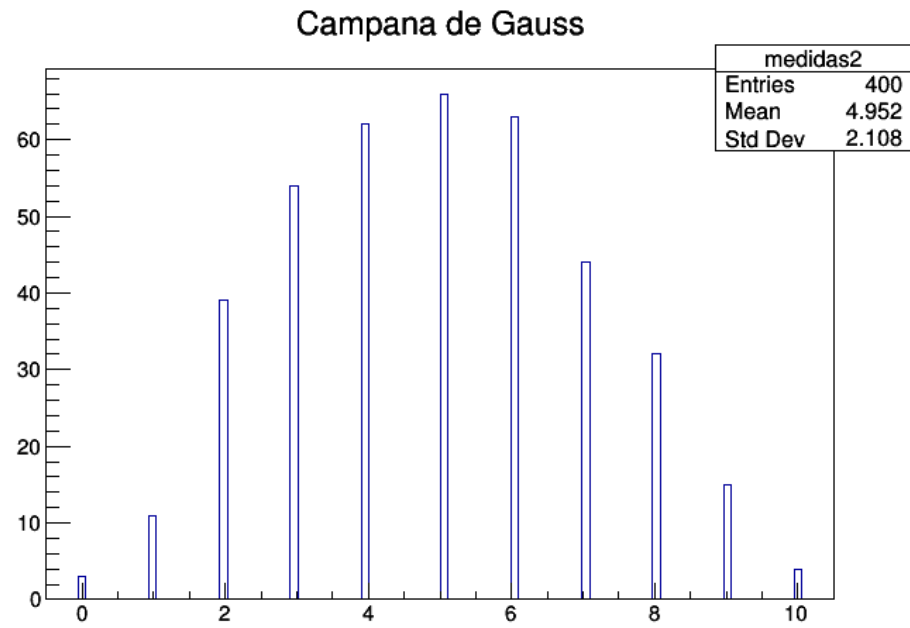


Figure 6.1: Campana de Gauss en Root

Tarea 7

7.1 Criterios de divisibilidad.

7.1.1 Divisibilidad por 2.

Un número es divisible entre 2 si termina en cero o cifra par.

7.1.2 Divisibilidad por 3.

Un número es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de tres.

7.1.3 Divisibilidad por 5.

Un número es divisible entre 5 si termina en cero o cinco.

7.1.4 Divisibilidad por 7.

Un número es divisible entre 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7.

7.1.5 Divisibilidad por 11.

Un número es divisible entre 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o múltiplo de 11.

[24]

7.1.6 Algoritmo para diseño de grafos para determinar divisibilidad entre n .

Se quiere hacer un grafo de divisibilidad para n .

1. Hacer n puntos y etiquetarlos $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.
2. Hacer una flecha negra entre cada punto i hacia $i + 1$ desde 0 hasta $n - 2$. Para $n - 1$ hacer una flecha hacia el punto 0. Estas flechas representan la operación de sumar 1 a el número actual.

3. Hacer una flecha azul desde cada punto i hacia el punto con el módulo de $\frac{10 \cdot i}{n}$. Estas flechas representan la operación de multiplicar por 10 el número actual.

Una vez que se tiene el grafo terminado, se puede calcular el módulo de cualquier número entre n de la siguiente manera:

1. Iniciar en el punto 0.
2. Tomar la primera cifra de la izquierda del número que se quiere analizar.
3. Avanzar en el grafo siguiendo las flechas negras la cantidad indicada por la primera cifra.
4. Al terminar con la primera cifra, saltar una vez siguiendo la flecha azul del punto en el que se terminó el recorrido.
5. Repetir los pasos 3 y 4 con cada una de las cifras del número, recorriendo desde la mas significativa hacia la menos significativa.
6. Al llegar a la cifra menos significativa, solamente hacer el recorrido siguiendo las flechas negras, sin realizar el salto con las flechas azules al final.
7. El número en el que se haya terminado el recorrido corresponde al módulo n del número analizado.

[11]

Se incluyen algunos ejemplos.

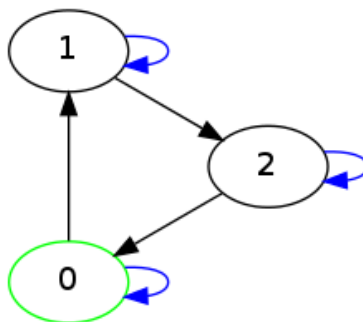


Figure 7.1: Grafo de divisibilidad por 3

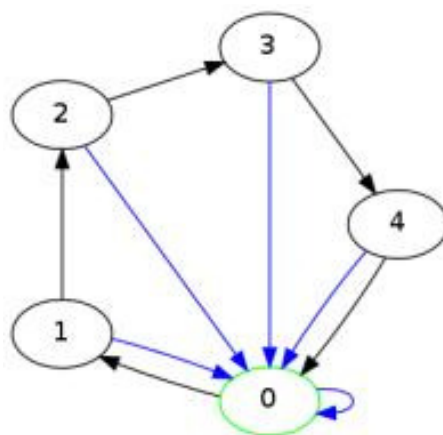


Figure 7.2: Grafo de divisibilidad por 5

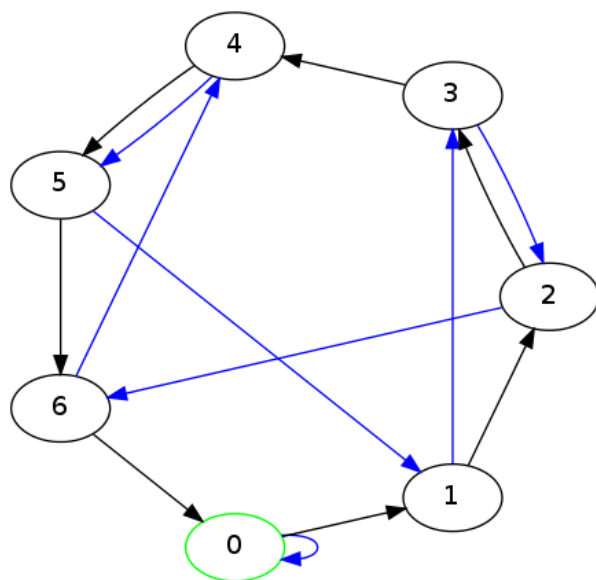


Figure 7.3: Grafo de divisibilidad por 7

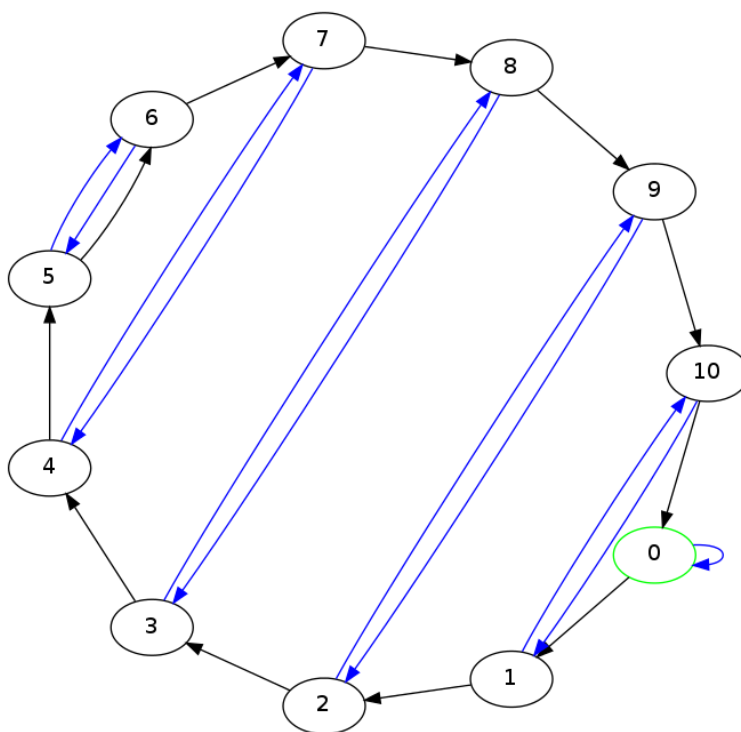


Figure 7.4: Grafo de divisibilidad por 11

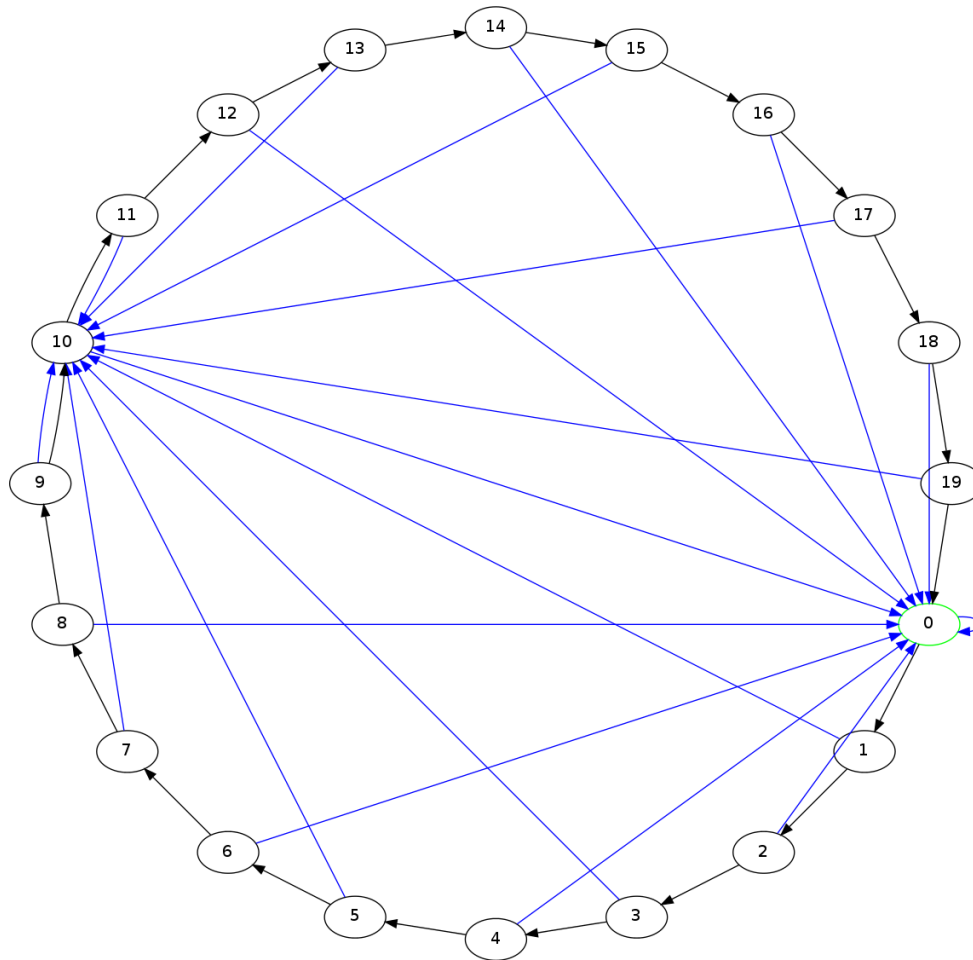


Figure 7.5: Grafo de divisibilidad por 20

7.2 Problema 3 de exposición Pliego.

Una máquina de fabricar tornillos se desajusta de forma que produce tornillos de longitud indeterminada. Se sabe que la probabilidad de que la longitud de un tornillo sea inferior a L_1 es p_1 , y de que sea superior a L_2 es p_2 , donde $L_2 > L_1$.

Se extraen cuatro tornillos al azar, determínese:

- (a) Probabilidad de que los cuatro tengan longitud superior a L_1 .
- (b) Probabilidad de que tres de ellos tengan longitudes entre L_1 y L_2 .
- (c) Probabilidad de que, a lo sumo, tres sean de longitud inferior a L_2 .
- (d) Probabilidad de que, como máximo, haya dos tornillos con longitud comprendida entre L_1 y L_2 .

Podemos esquematizar las probabilidades de cada tamaño posible de la siguiente manera:

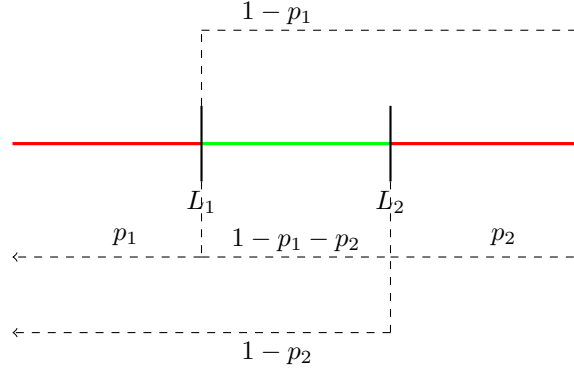


Figure 7.6: Tamaños de tornillos

Para el inciso (a) necesitamos calcular la probabilidad de que los cuatro tornillos tengan una longitud superior a L_1 .

En la fig.7.7 podemos ver el diagrama de árbol correspondiente a este caso.

Con base en el diagrama de árbol obtenemos que la probabilidad de que salgan 4 tornillos con longitud superior a L_1 es:

$$P(4 \text{ torn. sup. } L_1) = (1 - p_1)^4 \quad (7.1)$$

Para el inciso (b) necesitamos calcular la probabilidad de que tres tornillos tengan longitudes entre L_1 y L_2 .

$$\begin{aligned} P(3 \text{ torn. entre } L_1 \text{ y } L_2) &= 4p_1(1 - p_1 - p_2)^3 + 4p_2(1 - p_1 - p_2)^3 \\ &= 4(1 - p_1 - p_2)^3(p_1 + p_2) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Para el inciso (c) necesitamos calcular la probabilidad de que, a lo sumo, tres tornillos sean de longitud inferior a L_2 .

Observamos que este evento es el complemento de que los cuatro tornillos tengan una longitud inferior a L_2 . Debido a esto, podemos calcular su probabilidad de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} P(a \text{ lo sumo } 3 \text{ torn. inf. } L_2) &= 1 - P(4 \text{ torn. inf. } L_2) \\ &= 1 - (1 - p_2)^4 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Para el inciso (d) necesitamos calcular la probabilidad de que, como máximo, haya dos tornillos con longitud comprendida entre L_1 y L_2 .

$$\begin{aligned} P(\text{max. dos torn. entre } L_1 \text{ y } L_2) &= P(\text{ningun torn. entre } L_1 \text{ y } L_2) + P(1 \text{ torn. entre } L_1 \text{ y } L_2) \\ &\quad + P(2 \text{ torn. entre } L_1 \text{ y } L_2) \\ &= [p_1^4 + 4p_1^3p_2 + 6p_1^2p_2^2 + 4p_1p_2^3 + p_2^4] \\ &\quad + 4(1 - p_1 - p_2)[p_1^3 + 3p_1^2p_2 + 3p_1p_2^2 + p_2^3] \\ &\quad + 6(1 - p_1 - p_2)[p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2] \\ &= (p_1 + p_2)^4 + 4(1 - p_1 - p_2)(p_1 + p_2)^3 + 6(1 - p_1 - p_2)(p_1 + p_2)^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

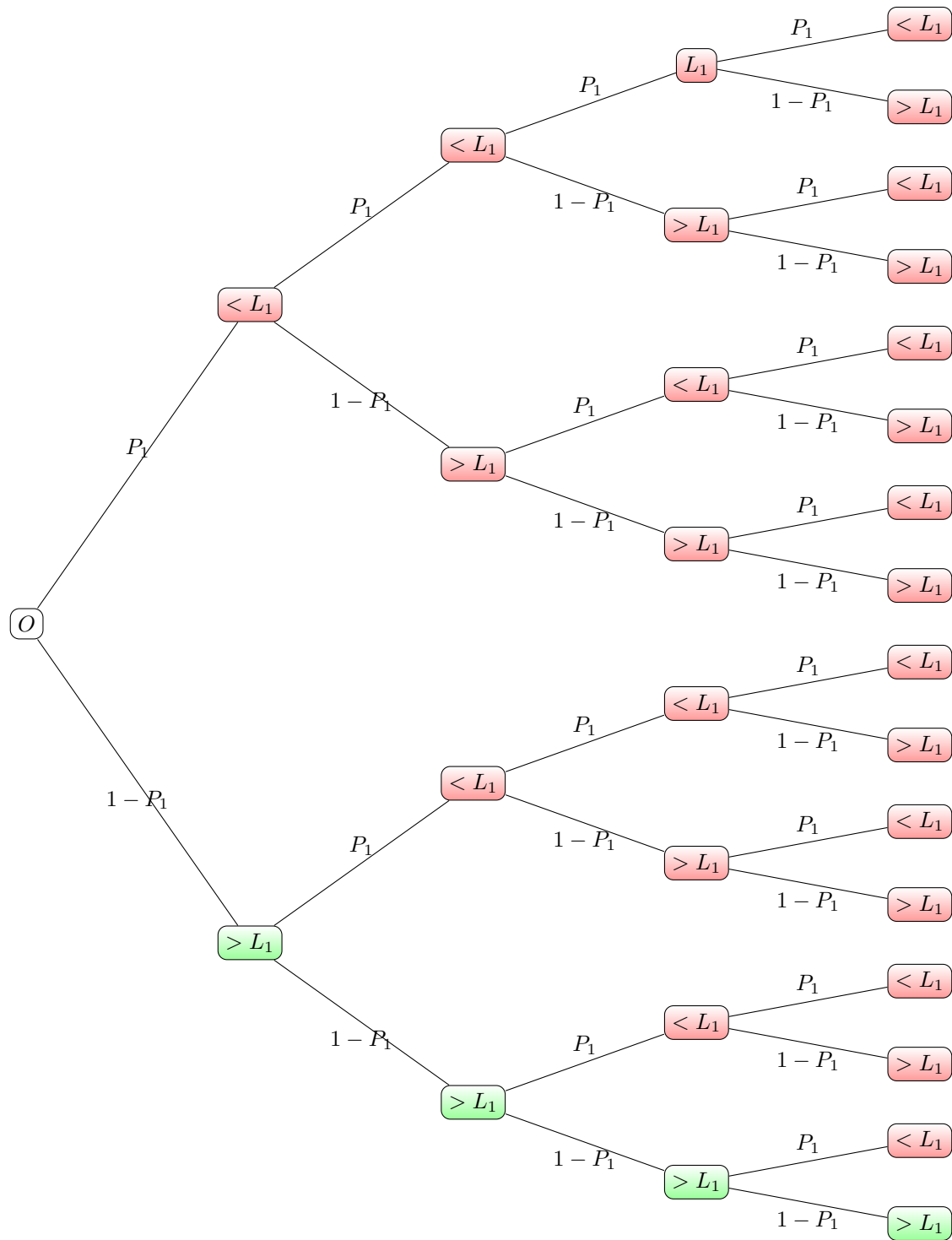


Figure 7.7: Los 4 tornillos tienen longitudes superiores a L_1

7.3 Problemas de teorema de Bayes.

7.3.1 Ejercicio 1.

Se tienen dos lotes con piezas procedentes de un mismo proceso productivo. Del primer lote L_1 se sabe que un 1% son defectuosas, en tanto que del segundo lote L_2 lo son el 5%. El primer lote tiene el doble de piezas que el segundo.

Se elige aleatoriamente una pieza de esos lotes:

(a) Calcúlese la probabilidad de que la pieza escogida sea defectuosa.

(b) Si la pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del segundo lote?

(a) Primero calculamos la probabilidad de elegir uno de los lotes. Por lo mencionado en el enunciado del problema sabemos lo siguiente:

$$P(L_1) + P(L_2) = 1 \quad (7.5)$$

$$P(L_1) = 2P(L_2) \quad (7.6)$$

Debido a esto, podemos deducir lo siguiente:

$$P(L_1) = \frac{2}{3}, \quad P(L_2) = \frac{1}{3} \quad (7.7)$$

Por el teorema de probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D/L_1)P(L_1) + P(D/L_2)P(L_2) \\ &= 1\% \cdot \frac{2}{3} + 5\% \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{0.02 + 0.05}{3} \\ &= \frac{7}{300} \end{aligned} \quad (7.8)$$

(b) Para este inciso usamos el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(L_2/D) &= \frac{P(D/L_2)P(L_2)}{P(D)} \\ &= \frac{0.05 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{300}} \\ &= \frac{5}{7} \end{aligned} \quad (7.9)$$

7.3.2 Ejercicio 2.

Se tienen 8 dados regulares y 2 trucados. En estos últimos, la probabilidad de obtener un as es el triple que la de las restantes posibilidades que son entre sí equiprobables.

De entre los 10 dados se elige uno al azar, se arroja al aire y se obtiene un as. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea no trucado?

La probabilidad que nos interesa es la de que el dado seleccionado sea no trucado dado que se obtuvo un as, es decir $P(\text{no trucado}/\text{as})$.

$$P(\text{no trucado}/\text{as}) = \frac{P(\text{as}/\text{no trucado})P(\text{no trucado})}{P(\text{as})} \quad (7.10)$$

Y la probabilidad de que sea as la podemos calcular de la siguiente manera:

$$P(\text{as}) = P(\text{as}/\text{no trucado})P(\text{no trucado}) + P(\text{as}/\text{trucado})P(\text{trucado}) \quad (7.11)$$

En los dados trucados, hay que tener en cuenta lo siguiente:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 3p + p + p + p + p + p = 1 \quad (7.12)$$

$$p = \frac{1}{8} \quad (7.13)$$

Por lo tanto,

$$P(\text{as}/\text{trucado}) = p_1 = \frac{3}{8} \quad (7.14)$$

Sustituyendo los valores en la Eq.(7.11).

$$\begin{aligned} P(\text{as}) &= P(\text{as}/\text{no trucado})P(\text{no trucado}) + P(\text{as}/\text{trucado})P(\text{trucado}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{10} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Y sustituyendo en la Eq.(7.10).

$$\begin{aligned} P(\text{no trucado}/\text{as}) &= \frac{P(\text{as}/\text{no trucado})P(\text{no trucado})}{P(\text{as})} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{10}} = \frac{16}{25} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Tarea 8

8.1 Convenio de suma de Einstein.

8.1.1 Definición.

Se denomina notación de Einstein a la convención utilizada para abreviar la escritura de las sumatorias, donde se suprime el término de la sumatoria \sum . Este convenio fue introducido por Albert Einstein en 1916.

Dada una expresión lineal en \mathbb{R}^n en la que se escriben todos sus términos en forma explícita:

$$u = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n \quad (8.1)$$

Se puede escribir de la forma:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i x_i \quad (8.2)$$

La notación de Einstein obtiene una expresión aun mas condensada eliminando el signo de la sumatoria y entendiendo que en la expresión resultante un índice indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo.

$$u = u_i x_i \quad (8.3)$$

8.1.2 Tensor de Levi-Civita.

Es definido por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutacion ciclica} \\ -1, & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutacion anticiclica} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.4)$$

Es decir:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad (8.5)$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \quad (8.6)$$

8.2 ¿Cómo funcionaba Enigma?

La máquina Enigma es una máquina de encriptación utilizada durante la segunda guerra mundial por los alemanes para escribir sus mensajes.

Funciona por medio de un conjunto de 3 o 4 cilindros, los cuales para una letra de entrada tienen asignada una letra de salida. Los cilindros van conectados en serie de manera que la letra que se introduce sufre 4 transformaciones antes de obtener el mensaje cifrado.

Además, cada vez que se introduce una letra los cilindros de cifrado giran, lo que genera que para una misma entrada no se tenga la misma salida.

8.3 ¿Porqué los astronautas no lloran? Cap.2

En este capítulo del libro se habla de los motivos que impulsan a la gente a participar en juegos de azar como la lotería.

Se compara como una persona valora más (2.48 veces) algo que le pertenece, y se compara este hecho con las pequeñas inversiones que se tienen que hacer para participar en un juego de lotería.

Se hace un breve análisis de como es que el cerebro, al presentarse ante una situación que no comprende, como lo es la probabilidad extremadamente baja de ganar un juego de lotería, tiende a buscar una solución rápida que lo saque del estado de incertidumbre.

Esto, aunado a los diseños de los juegos que buscan dar refuerzos positivos con falsas victorias, genera que una persona siga participando en estos juegos pese a la baja probabilidad de ganar y a encontrarse con la derrota una y otra vez.

8.3.1 Esperanza matemática.

En el libro se hace mención de la esperanza matemática, indicando que si se multiplica la probabilidad de ganar por el valor del premio, y se obtiene un resultado mayor a uno, entonces la probabilidad de ganar es mayor a la de perder.

Este análisis es incorrecto debido a que para calcular la esperanza matemática en un juego de azar, es necesario tomar en cuenta la probabilidad de ganar y de perder, y el valor de cada uno de los casos. Al considerar estos factores, si la esperanza matemática es igual a cero, entonces la probabilidad de ganar es la misma que la de perder. Si es un valor positivo, es mayor la probabilidad de ganar, y si es negativo es mayor la probabilidad de perder.

Para observar esto hacemos un análisis del sorteo de melate en el que las posibles combinaciones de seis números es ${}_6C_6 = 32,468,436$ y la posibilidad de ganar usando una combinación en particular es $\frac{1}{32,468,436}$. En el último sorteo la bolsa a ganar fue de \$74,600,000.

Por otro lado, la posibilidad de perder al usar una combinación es de $\frac{32,468,435}{32,468,436}$ y el costo del boleto es de aproximadamente \$30.

Con estos datos, podemos calcular la esperanza matemática de la siguiente manera:

$$74,600,000 * \frac{1}{32,468,436} - 30 * \frac{32,468,435}{32,468,436} \approx -28 \quad (8.7)$$

Lo cual indica que por cada \$30 pesos que se invierten se pierden \$28 en promedio.

Tarea 9

9.1 Ventaja Matemática (House Edge).

Este es un término utilizado comunmente en los juegos de casino. En términos sencillos, la ventaja matemática es la diferencia entre la probabilidad de ganar un juego vista como un porcentaje, y el porcentaje que paga el casino cuando alguien gana. [23]

En otras palabras, la desventaja de los jugadores es resultado de que los pagan a los ganadores según la verdadera probabilidad del juego.

Por ejemplo, en la ruleta americana, hay dos valores con los que solamente gana la casa (0, 00), y 36 valores con los que puede ganar un jugador. Analizando el caso en que se apuesta a un color en particular, el valor esperado para el jugador es $EV = (\frac{18}{38} * 1) + (\frac{20}{38} * -1) = -\frac{2}{38}$.

[38]

9.2 Riesgo.

La definición de riesgo es: Una fuente de peligro. Una poibilidad de incurrir en una pérdida o mala fortuna. [56]

El riesgo se mide frecuentemente como el valor esperado de un evento indeseable. Esto combina la probabilidad de varios eventos y algunas estimaciones del daño correspondiente en un solo valor. El caso mas sencillo es el caso binario *Accidente* o *No Accidente*. La fórmula asociada a este riesgo es de:

$$R = (probabilidad\ de\ que\ ocurra\ un\ accidente) \cdot (perdida\ esperada\ en\ caso\ de\ accidente)$$

Pero los eventos normalmente son mas complejos. En una situación con varios posibles accidentes, el riesgo total es la suma de los riesgos para cada accidente, siempre y cuando los resultados sean comparables:

$$R = \sum_{Para\ todos\ los\ accidentes} (probabilidad\ de\ que\ ocurra\ un\ accidente) \cdot (perdida\ esperada\ en\ caso\ de\ accidente)$$

[42]

9.3 Apuestas en línea.

En algunos sitios web de apuestas (e.g. www.caliente.mx) se utilizan momios para determinar los montos que serán asignados a cada apuesta.

Definen momio como el cociente entre la probabilidad de que un evento **suceda** y la probabilidad de que **no suceda**. Para efectos prácticos, el momio es la cuota que ofrecen pagar por apostar y acertar a un determinado resultado.

Los momios se presentan en dos formatos:

- Americano $(-160, +230, +410)$.
- Europeo $(1.60, 3.30, 5.10)$.

Para ambos casos, analizando un partido de futbol, el equipo que tenga el momio mas bajo es considerado el favorito.

Para calcular el pago correspondiente a cada apuesta en el caso americano $(Momio/100) * apuesta = ganancia$.

Si el monto es negativo $(100/Momio) * apuesta = ganancia$.

En el caso europeo $Momio * apuesta = ganancia$

Tarea 10

10.1 Skewness (Asimetría).

Es una medida del grado de asimetría de una distribución. Si la pendiente del lado izquierdo de la distribución es mas pronunciados que el lado derecho, se dice que la función tiene una asimetría negativa. Si lo opuesto es verdadero, la asimetría es positiva. Si los dos lados son iguales, entonces se tiene una asimetría con el valor de 0.

Varios tipos de asimetría son definidos, cuyas terminología y notación suelen ser confusas. La asimqtría de una distribución se define como:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad (10.1)$$

donde μ_i es el i – *esimo* momento central.

La notación γ_1 se debe a Karl Pearson, pero las notaciones α_3 (Kenney y Keeping) y $\sqrt{\beta_1}$ (R. A. Fisher) también son utilizadas. Abramowitz y Stegun se refieren a la asimetría como γ_1 y β_1^2 .

[64]

10.2 Curtosis.

Es una medida que nos indica que tan puntiaguda es una distribución, definida como una forma normalizada del cuarto momento central μ_4 de una ditribución.

Hay varias formas en que se puede encontrar a la curtosis, incluyendo la curtosis propia, denotada β_2 (Abramowitz y Stegun) o α_4 (Kenney y Keeping) y esta definida como:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (10.2)$$

donde μ_i denota el i – *esimo* momento central (en particular, μ_2 es la varianza).

El "exceso" de curtosis (Kenney y Keeping) es denotado γ_2 (Abramowitz y Stegun) o b_2 , y es definido como:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad (10.3)$$

Esta formula es usada comúnmente porque γ_2 de una distribución normal es igual a 0, mientras que la curtosis propia es igual a 3.

[63]

10.3 Primer Examen.

Ejercicio 1.- En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:

- a) los premios son diferentes
- b) los premios son iguales

Solución:

- a) Si los premios son diferentes, el número de formas de distribuirlos se calcula de la siguiente manera:

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

- b) Si los premios son iguales

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

Ejercicio 2.- ¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

Solución:

Disponemos de 9 bolas, m=9.

Formamos grupos de 9 bolas, n=9.

Observaciones:

- Influye el orden de los elementos
- Las bolas del mismo color son iguales

Utilizamos la fórmula de permutaciones con repetición de 9 elementos (m=n) tomados de 4 en 4 (a), de 3 en 3 (b) y de 2 en 2 (c)

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{2520}{2} = 1260$$

Ejercicio 3.- ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con las cifras 0,1,...,9

a) permitiendo repeticiones;

b) sin repeticiones;

c) si el último dígito ha de ser 0 y no se permiten repeticiones?

Observaciones:

- Para que un número sea de 4 dígitos su primer dígito debe ser distinto de cero

Solución:

a) Por lo tanto hay nueve posibilidades para el primer dígito y 10 para los siguientes 3

Por lo que queda $9 \cdot 10^3 = 9000$ números posibles

b) En este caso hay 9 posibilidades para el primero, 9 para el segundo, 8 para el tercero y 7 para el cuarto no hay repeticiones $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

c) Fijamos el último dígito y no hay repeticiones $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$ números

Ejercicio 4.- En una fábrica hay dos máquinas. La máquina 1 realiza el 60% de la producción total y la máquina 2 el 40 %. De su producción total, la máquina 1 produce 3% de material defectuoso, la 2 el 5%. El asunto es que se ha encontrado un material defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que este material defectuoso provenga de la máquina 2?

Solución:

Sea M_1 el evento “La máquina 1 produjo el material escogido”, M_2 en evento “La máquina 2 produjo el material escogido” y finalmente sea D el evento “El material escogido es defectuoso”. El problema es encontrar $P(M_2|D)$ y observamos que la información que tenemos es $P(D|M_2)$. Por el teorema de Bayes tenemos entonces que

$$\begin{aligned} P(M_2|D) &= \frac{P(D|M_2)P(M_2)}{P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2)} \\ &= \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{3}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100}} \\ &= \frac{10}{19} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.- Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan 3 bolas al azar, determina la probabilidad de que:

- a) las 3 sean rojas;
- b) las 3 sean blancas;
- c) 2 sean rojas y 1 blanca;
- d) al menos 1 sea blanca;
- e) sea 1 de cada color;
- f) salgan en el orden roja, blanca y azul.

Solución:

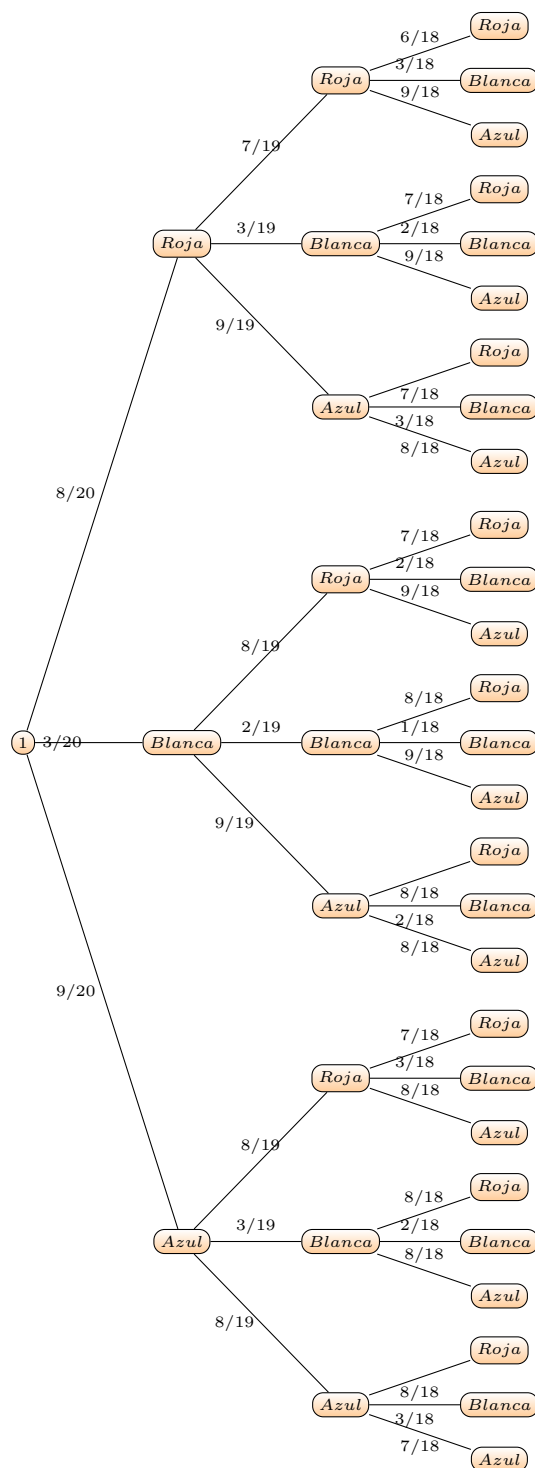


Figure 10.1: Diagrama de árbol - Ejercicio 5

Hay 20 bolas de diferentes colores en total en la caja:

a) La probabilidad de que al extraer la primera bola, esta sea roja es: $\frac{8}{20}$, para la segunda bola es $\frac{7}{19}$ debido a que ya se sacó una bola roja y solo quedan 19 en la caja y para la tercera es $\frac{6}{18}$.

Por lo tanto

$$P(3 \text{ rojas}) = \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{6}{18}\right) = \frac{336}{6840} = \frac{14}{285}$$

b) De acuerdo al inciso anterior

$$P(3 \text{ blancas}) = \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{2}{19}\right) \left(\frac{1}{18}\right) = \frac{6}{6840} = \frac{1}{1140}$$

c) Hay tres formas diferentes de que salgan 2 bolas rojas y 1 blanca por lo que:

$$P(2 \text{ rojas } 1 \text{ blanca}) = 3 \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{3}{18}\right) = \frac{504}{6840} = \frac{7}{95}$$

d) Considerando que se puede obtener 1 blanca, 2 blancas o 3 blancas queda:

$$\begin{aligned} P(\text{al menos } 1 \text{ blanca}) &= 6P(1 \text{ roja } 1 \text{ blanca } 1 \text{ azul}) + 3P(2 \text{ rojas } 1 \text{ blanca}) + 3P(2 \text{ azules } 1 \text{ blanca}) \\ &\quad + 3P(2 \text{ blancas } 1 \text{ roja}) + 3P(2 \text{ blancas } 1 \text{ azul}) + P(3 \text{ blancas}) \\ &= 6 \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{9}{18}\right) + 3 \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{3}{18}\right) \\ &\quad + 3 \left(\frac{9}{20}\right) \left(\frac{8}{19}\right) \left(\frac{3}{18}\right) + 3 \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{2}{19}\right) \left(\frac{8}{18}\right) \\ &\quad + 3 \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{2}{19}\right) \left(\frac{9}{18}\right) + \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{2}{19}\right) \left(\frac{1}{18}\right) \\ &= \frac{2760}{6840} = \frac{23}{57} \end{aligned}$$

e) Sea una de cada color, existen 6 formas diferentes y queda:

$$6P(1 \text{ roja } 1 \text{ blanca } 1 \text{ azul}) = 6 \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{9}{18}\right) = 6 \frac{216}{6840} = \frac{18}{95}$$

f) Salgan en el orden roja, blanca y azul, solo hay un resultado posible ya que el orden si importa.

$$P(1 \text{ roja } 1 \text{ blanca } 1 \text{ azul}) = \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{9}{18}\right) = \frac{216}{6840} = \frac{3}{95}$$

Ejercicio 6.- Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:

a) Que sea un rey o un as;

b) Que sea una copa o una figura;

c) Que no sea figura.

La baraja española contiene 40 cartas repartidas en 4 palos (oros, bastos, espadas y copas).

a) La probabilidad de que sea un rey o un as $P(\text{sea un Rey o un As})$.

$$(R \cup A) = P(R) + P(A) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40}$$

b) $P(\text{sea Copa o Figura})$

$$P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

c) $P(\text{no sea Figura})$

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{12}{40} = \frac{28}{40}$$

Ejercicio 7.- Sean A y B los sucesos tales que:

$$P(A) = 0.4$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0.4$$

$$P(A \cap B) = 0.1$$

Calcula $P(A \cup B)$ y $P(B)$.

Solución:

$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.1 = 0.8$$

Ejercicio 8.- En la empresa “Alimentos Mr Pollo” el 20% de los empleados son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un cargo directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los demás trabajadores (no ingenieros y no economistas) solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

$$P(I) = 0.2 \quad P(E) = 0.2 \quad P(O) = 0.6$$

$$P(D/I) = 0.75 \quad P(D/E) = 0.5 \quad P(D/O) = 0.2$$

$$P(\text{Ingeniero} | \text{Directivo}) = \frac{0.2 * 0.75}{0.2 * 0.75 + 0.2 * 0.5 + 0.6 * 0.2}$$

Ejercicio 9.- En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

a) Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses;

b) Si el infante resulta ser menos de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

Solución:

Se definen los sucesos:

- Suceso H: seleccionar una niña.
- Suceso V: seleccionar un niño.
- Suceso M: infante menor de 24 meses.

a) En este caso, la población es de los infantes. Y la característica en común es que sean menores de 24 meses. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$$P(M) = P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(M|V) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35 = 0.26$$

b) Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de Bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña una infante menor de 24 meses será:

$$\begin{aligned} P(H|M) &= \frac{P(H) \cdot P(M|H)}{P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(M|V)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35} = \frac{0.12}{0.260} = 0.46 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.- Un jugador de Rol, en una partida de Dungeons and Dragons, para salvarse de un conjuro de Raistlin, necesita sacar un 18 en el lanzamiento de los dados. El Dungeon Master le ofrece lanzar tres dados de seis caras o uno de diez junto con uno de ocho.

a) ¿En cual de estas dos alternativas es más probable obtener un 18 y salvarse del conjuro? Explique su respuesta

b) ¿Sería la respuesta la misma si hubiese que sacar 17 o más para evitar el conjuro?

Solución:

a) Para sacar 18 con 3 dados de seis caras tiene que ocurrir el suceso (6,6,6) que tiene una probabilidad $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Para obtener 18 con un dado de diez caras y otro de ocho tiene que ocurrir el suceso (10, 8) cuya probabilidad es $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$. Obviamente esta probabilidad es mayor que la anterior.

b) Para obtener 17 o más con los tres dados tiene que ocurrir el suceso:

$(5, 6, 6) \cup (6, 5, 6) \cup (6, 6, 5) \cup (6, 6, 6)$ cuya probabilidad es: $\frac{4}{216}$

Para conseguir el mismo resultado con los dos dados tiene que ocurrir: $(10, 7) \cup (9, 8) \cup (10, 8)$ que tiene probabilidad de $\frac{3}{80}$ que sería también mayor que con los tres dados.

Tarea 11

11.1 Algoritmos para calcular PI.

Para calcular π se pueden utilizar algunas de las siguientes series:

$$\pi = \frac{8}{1 + \sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8k+1} - \frac{1}{8k+7} \right)$$
$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(-\frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} + \frac{4}{8k+1} \right)$$

[61]

Existen algunos algoritmos que permiten calcular cualquier decimal de π sin necesidad de conocer todos los decimales anteriores, estos algoritmos se llaman *spigot*.

Uno de ellos es el algoritmo de Rabinovitz y Wagon [59].

El algoritmo que se ha utilizado para los mas recientes cálculos de pi es el propuesto por los hermanos Chudnovsky [4], el cual se basa en el trabajo de Ramanujan.

11.2 Enteros extra largos.

Para manejar enteros muy grandes, se han desarrollado librerías específicamente diseñadas para este fin.

Una de la mas potentes es la libreria GMP (GNU Multiple Precision Arithmetic Library) la cual puede operar con números enteros, racionales y de punto flotante.

El límite en el tamaño de los enteros que se pueden manejar con esta librería es de $2^{32} - 1$ en máquinas de 32 bits, y de 2^{37} bits en máquinas de 64 bits.

https://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Multiple_Precision_Arithmetic_Library

<https://gmplib.org/>

11.3 Demostración fórmula presentación.

Se van a dar N pasos en total, n_1 en una dirección y n_2 en la dirección contraria.

$$N = n_1 + n_2 \quad (11.1)$$

Primero se analizan los pasos que se darán en la primera dirección. Para ellos, hay N posibles momentos para realizar el paso en la dirección de n_1 . Como estos pasos son iguales, no importa el orden en el que se elijan los momentos de dar el paso, por lo que tenemos la siguiente combinación para n_1 .

$$\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \quad (11.2)$$

Para el caso de n_2 , como ya consideramos los pasos que se dieron en la dirección de n_1 quedan $N - n_1$ posibles momentos en los que dar un paso en dirección n_2 por lo que tenemos la siguiente combinación.

$$\frac{(N - n_1)!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!} \quad (11.3)$$

Multiplicando ambas combinaciones, obtenemos el número de combinaciones totales:

$$\frac{N!}{n_1!(\cancel{N - n_1})!} \cdot \frac{(\cancel{N - n_1})!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!(N - (n_1 + n_2))!} \quad (11.4)$$

Y como $N = n_1 + n_2$ tenemos que el número de formas en que se pueden dar N pasos, con n_1 en una dirección y n_2 en la dirección contraria, se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} \quad (11.5)$$

Tarea 12

12.1 Problema Lewis Carroll.

Una bolsa contiene una pelota, la cual tiene la misma probabilidad de ser blanca o negra. Posteriormente, una pelota blanca es introducida y se sacude la bolsa para mezclar las pelotas. Se extrae una pelota la cual resulta que es blanca, si se saca la segunda pelota ¿cuál es la probabilidad de que también sea blanca?

Originalmente se tiene en la bolsa una pelota, la cual puede ser blanca o negra. La probabilidad de que sea de uno de los dos colores es $1/2$.

Al realizar el experimento y extraer la bola blanca, hay tres posibles maneras en que esto haya sucedido:

- La primera pelota fue blanca, y la pelota que se extrajo fue la primera pelota.
- La primera pelota fue blanca, y la pelota que se extrajo fue la segunda pelota.
- La primera pelota fue negra, y la pelota que se extrajo fue la segunda pelota.

Por lo tanto, la probabilidad de que la pelota restante sea blanca es de $2/3$.

Tarea 13

13.1 Función de distribución.

Una función de distribución de probabilidad (*Cumulative Distribution Function*) de una variable aleatoria X es la función F_X dada por $F_X(x) = P(X \leq x)$. Cuando no hay riesgo de ambigüedad, se puede escribir solamente F (o cualquier otra letra) para una *CDF*.

Las funciones de distribución válidas tienen las siguientes propiedades:

- Incremental: Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- Continua por la derecha: La CDF es continua excepto que tal vez tenga algunos brinco. Donde sea que haya un brinco, la CDF es continua por la derecha. Esto es, para cualquier a , tenemos que:

$$F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

- Convergencia a 0 y 1 en los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

[58]

13.2 ¿Es la economía la siguiente ciencia física?

El artículo habla de como la física se ha aplicado en diferentes áreas de la economía.

Inicia resaltando que en la última década, varios físicos han empezado a enfocarse en un campo emergente conocido como la econofísica. En dicha década, han surgido revistas científicas enfocadas a este campo, se han realizado varias conferencias respecto al tema, se han publicado por lo menos 10 libros, se están dando grados de doctorado en física a tesis enfocadas en la economía. En general, la física cada vez interactúa mas con la economía.

La interacción de la física con las ciencias sociales se puede rastrear hasta 1738 con el trabajo de Daniel Bernoulli. Posteriormente, en 1812, Pierre-Simon Laplace publica un ensayo en el que señala que eventos que parecieran ser aleatorios e impredecibles, pueden ser en ocasiones bastante predecibles y se pueden describir con leyes simples. Posteriormente, Adolphe Quetelet estudia patrones existentes en diferentes bases de datos, y en 1835 acuña el término

”física social”. En esta época, algunos de los fundadores de la teoría económica neoclásica, como Irving Fisher, fueron originalmente educados como físicos.

Hay muchos temas en economía que se pueden ver desde un punto de vista físico, como las dinámicas que generan los precios, el análisis de burbujas y pánicos, y la construcción de portafolios óptimos.

Los aspectos físicos de las teorías de orden social no recapitulan directamente teorías físicas existentes, aunque hay varios elementos en común.

Las instituciones económicas traen consigo conceptos de eficiencia y optimización al satisfacer los deseos humanos. Estas ideas son difíciles de normalizar aún cuando se han logrado avances.

Mucho del trabajo de los físicos en economía concierne leyes de potencia. Una ley de potencia es una relación asintótica de la forma $f(x) \rightarrow x^{-\alpha}$, donde x es una variable y $\alpha > 0$ es una constante. En muchos casos, f es una distribución de probabilidad.

Uno de los modelos más famosos y más usado es la caminata aleatoria. Una interesante y sorprendente propiedad de las caminatas aleatorias para precios reales es que la velocidad de difusión no es constante. La magnitud del cambio en un precio en un tiempo t está correlacionada con el precio en un tiempo $t + \tau$ aún cuando las direcciones de los cambios de los precios no están correlacionadas. Este fenómeno es llamado volatilidad en clúster.

Los físicos han descubierto que la volatilidad es uno de varios procesos de memoria a largo plazo en los mercados.

La diferencia fundamental entre un sistema físico y una economía es la gente, la cual tiene interacciones estratégicas. La creencia de que las decisiones de los seres humanos pueden ser aproximadas usando elecciones racionales dominó la microeconomía desde 1950 hasta mediados de los 80's, aun cuando claramente no es plausible más que para las tareas cognitivas más sencillas. Esta manera de pensar no resuelve el problema macroeconómico, la agregación de elecciones individuales y el comportamiento de grandes poblaciones.

El mercado de valores artificial de Santa Fe, una colaboración entre físicos, económicos y un científico computacional, reemplazó a los agentes racionales en un mercado idealizado, por un modelo de inteligencia artificial.

Los modelos basados en agentes tienden a requerir suposiciones ad hoc que son difíciles de validar.

En contraste, la hipótesis de la elección racional tiene la virtud de la parsimonia. Hace predicciones fuertes a partir de hipótesis simples y, en ese sentido, es más como una teoría física. Esto ha motivado la búsqueda de alternativas parsimoniosas simples, una de las cuales es llamada comúnmente inteligencia cero.

Los agentes con inteligencia cero se comportan de manera más o menos aleatoria, sujetos a restricciones como el presupuesto. Los modelos de inteligencia cero pueden ser usados para estudiar las propiedades de instituciones de mercado y para determinar cuáles propiedades de un mercado dependen en la intención y cuáles no.

Una vez que un modelo de inteligencia cero ha sido construido puede volverse más realista al añadir un poco de inteligencia basándose en observaciones empíricas o modelos de aprendizaje.

Tarea 14

14.1 Curva ROC.

En estadística, una curva ROC (Receiver Operating Characteristic, Característica Operativa del Receptor) es una gráfica que ilustra el desempeño de un clasificador binario cuando es modificado su umbral de discriminación. La curva es generada al graficar la frecuencia de positivos verdaderos (TPR) contra la frecuencia de falsos positivos (FPR) para diferentes valores de umbral. El TPR es también conocido como sensibilidad. El FPR es también conocido como fall-out y se puede calcular como $1 - \textit{especificidad}$.

En general, si las distribuciones de probabilidad para la detección y para falsas alarmas son conocidas, la curva ROC puede ser generada al graficar la función de distribución acumulativa (área bajo la distribución de probabilidad desde $-\infty$ hasta el umbral de discriminación) de la probabilidad de detección en el eje y, contra la función de distribución acumulativa de la probabilidad de falsa alarma en el eje x.

[43]

Tarea 15

15.1 Demostraciones.

- Ecuación 23.

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad (15.1)$$

Partimos de la definición de Δu la cual expresamos en la Eq.(15.2).

$$\Delta u \equiv u - \bar{u} \quad (15.2)$$

Utilizando la Eq.(??), expresamos el valor medio con la Eq.(15.3).

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \bar{u}} \quad (15.3)$$

Desarrollando, obtenemos la 15.4.

$$\overline{u - \bar{u}} = \bar{u} - \bar{\bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad (15.4)$$

Debido a que $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$ porque el valor medio es una constante, y el valor medio de una constante es la misma constante.

- Ecuación 24.

$$\overline{(\Delta u)^2} \equiv \sum_{i=1}^M P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0 \quad (15.5)$$

Utilizando la definición de Δu expresada en la Eq.(15.2) podemos expresar la Eq.(15.6).

$$(\Delta u)^2 = (u - \bar{u})^2 \geq 0 \quad (15.6)$$

Debido a que, si $\Delta u \in \Re$, entonces $(\Delta u)^2$ siempre será un número positivo.

Posteriormente, definimos $f(u) = (u - \bar{u})^2$ y recordando el valor medio de una función expresado en la Eq.(15.7).

$$\overline{f(u)} \equiv \sum_{i=1}^M P(u_i)f(u_i) \quad (15.7)$$

Calculamos para $f(u) = (u - \bar{u})^2$ utilizando la Eq.(15.6) y obtenemos la Eq.(15.8).

$$\overline{f(u)} = \overline{(\Delta u)^2} = \sum_{i=1}^M P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0 \quad (15.8)$$

15.2 Histograma caminata aleatoria.

Se utilizó el siguiente código en Root para simular la caminata aleatoria.

```

////////////////////////////////////Inicio de programa////////////////////////////////////
void caminata()
TRandom3 *r = new TRandom3(0);
TCanvas *c1 = new TCanvas();
c1->SetGrid();
TCanvas *c2 = new TCanvas();
c2->SetGrid();
TH1I* PF= new TH1I("Posicion Final","Caminata aleatoria con 20 pasos",42,-21,21);
PF->SetLineColor(4);
PF->SetLineWidth(2);
PF->GetXaxis()->SetTitle("Posicion");
PF->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia");
TH1I* PD= new TH1I("Pasos a la derecha","Caminata aleatoria con 20 pasos",20,0,20);
PD->SetLineColor(4);
PD->SetLineWidth(2);
PD->GetXaxis()->SetTitle("Pasos Derecha");
PD->GetYaxis()->SetTitle("Frecuencia");
int repeticiones = 100000;
int pasos = 20;
int posicion = 0;
int paso;
int n1;
int n2;
for(int i = 0; i < repeticiones; i++)
for(int j=0 ; j<pasos ; j++)
paso = (r->Integer(2))+1;
if (paso == 1)
n1++;
else
n2++;
posicion = n1 - n2;
PF->Fill(posicion);
PD->Fill(n1);
posicion = 0;
n1=0;
n2=0;
c1->cd();

```

```
PF-¿Fit("gaus");
PF-¿Draw();
c2-¿cd();
PD-¿Fit("gaus");
PD-¿Draw();
/////////////////////////////////Fin de código/////////////////////////////////
```

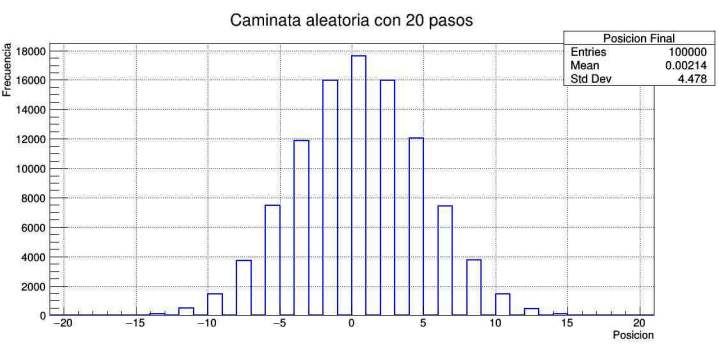


Figure 15.1: Posición final

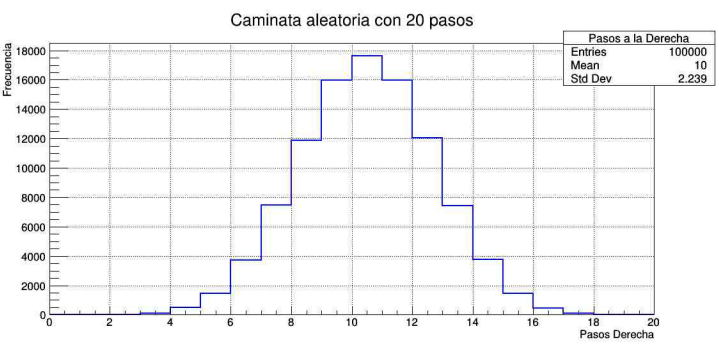


Figure 15.2: Pasos a la derecha

Tarea 16

16.1 Relación entre función Gamma y Factorial.

La función gamma ($\Gamma(z)$) es una aplicación que extiende el concepto de factorial a los números complejos. La notación fue propuesta por Adrien-Marie Legendre. Si la parte real del número complejo z es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (16.1)$$

converge absolutamente; esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, excepto a los enteros negativos y al cero. Si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (16.2)$$

lo que nos muestra la relación de esta función con el factorial. De hecho, la función gamma extiende el concepto de factorial a cualquier valor complejo de z . La función gamma aparece en varias funciones de distribución de probabilidad, por lo que es bastante usada tanto en probabilidad y estadística como en combinatoria.

[35]

El factorial de un número se puede calcular con la función gamma de la siguiente forma

$$n! = \Gamma(n+1) \quad (16.3)$$

[54]

16.2 Simulación de movimiento Browniano.

El movimiento browniano es el movimiento aparentemente aleatorio de partículas suspendidas en un fluido.

[49]

Se han desarrollado algunos modelos basados en el movimiento Browniano, los cuales se implementan en mercados financieros.

Utilizando este modelo, se pueden modelar los precios de algunos activos que evolucionan constantemente con el tiempo.

[26]

A continuación se muestra un programa para simular un movimiento Browniano en Root.

```
////////////////////////////////////Inicio de Programa////////////////////////////////////
```

```
void browniano()
TRandom3 *r = new TRandom3(0);
float sigma = 0.1; //Volatilidad
float mu = 0.1; //Deriva
float deltaT = 0.01; //Diferencial de tiempo
float deltaX;
float deltaY;
float epsilon;
int repeticiones = 50;
float X[repeticiones];
float Y[repeticiones];
float T[repeticiones];
X[0] = 10;
Y[0] = 10;
T[0] = 0;
TCanvas *c1 = new TCanvas();
c1->SetGrid();
TCanvas *c2 = new TCanvas();
c2->SetGrid();
for(int i = 1; i < repeticiones; i++)
epsilon = r->Gaus();
deltaX = X[i-1]*mu*deltaT + X[i-1] * sigma * epsilon * sqrt(deltaT);
X[i] = X[i-1] + deltaX;
epsilon = r->Gaus();
deltaY = Y[i-1]*mu*deltaT + Y[i-1] * sigma * epsilon * sqrt(deltaT);
Y[i] = Y[i-1] + deltaY;
T[i] = T[i-1] + deltaT;
c1->cd();
gr = new TGraph(repeticiones,T,X);
gr->SetTitle("Movimiento Aleatorio Tiempo vs Posicion X");
gr->SetLineColor(4);
gr->SetLineWidth(2);
gr->GetXaxis()->SetTitle("Tiempo");
gr->GetYaxis()->SetTitle("Posicion");
gr->Draw("AC*");
c2->cd();
gr1 = new TGraph(repeticiones,X,Y);
gr1->SetTitle("Movimiento Aleatorio 2D");
```

```

gr1->SetLineColor(6);
gr1->SetLineWidth(2);
gr1->GetXaxis()->SetTitle("X");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("Y");
gr1->Draw("AC*");
/////////////////////////////////Fin de Programa/////////////////////////////////

```

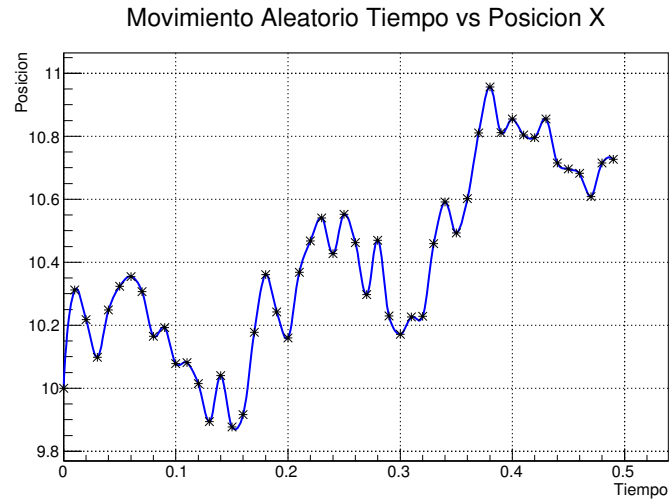


Figure 16.1: Movimiento Browniano - 1 dimensión

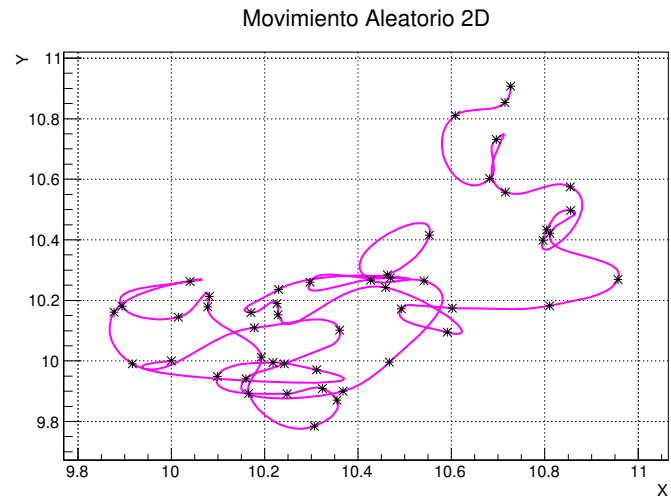


Figure 16.2: Movimiento Browniano - 2 dimensiones

Tarea 17

17.1 Delta de Dirac y Theta de Heaviside.

La Θ de Heaviside (tambiéén conocida como función escalón de Heaviside o función escalón unitario) es una función discontinua cuyo valor es cero para un argumento negativo y uno para argumentos positivos.

La definición mas simple de esta función es como la derivada de la función rampa.

$$H(x) := \frac{d}{dx} \max\{x, 0\} \quad (17.1)$$

La función escalón de Heaviside también puede ser definida como la integral de la fución Delta de Dirac.

$$H(x) := \int_{-\infty}^x \delta(s) ds \quad (17.2)$$

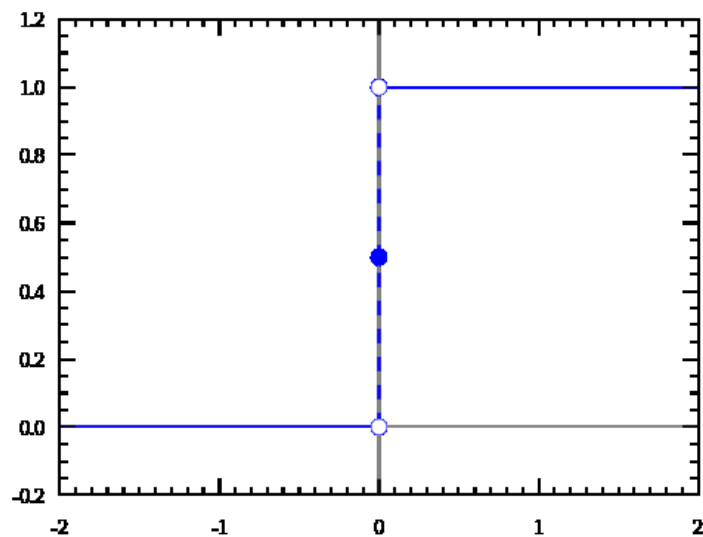


Figure 17.1: Theta de Heaviside

La función delta de Dirac, o función δ es una función generalizada en el espacio de los números reales que tiene el valor de cero en todos los puntos menos en el origen, donde tiende a infinito.

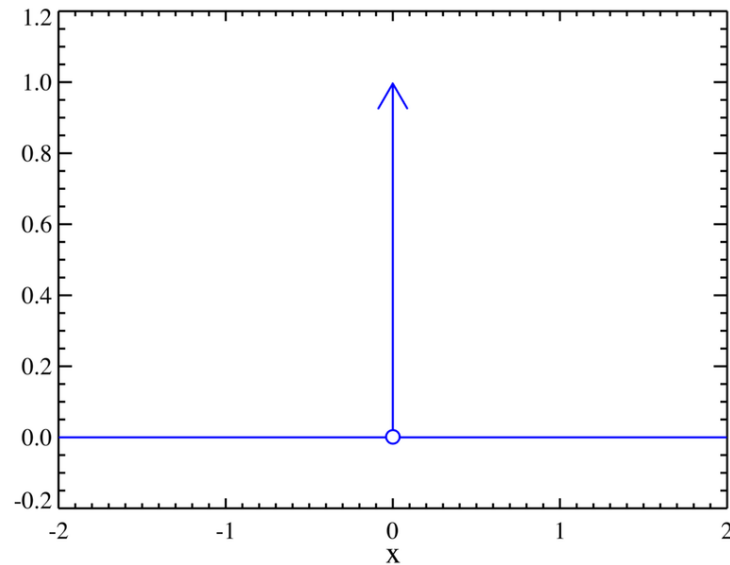


Figure 17.2: Delta de Dirac

[29, 37]

17.2 Interpretación gráfica de la desviación estándar.

La desviación estándar es un índice numérico de la dispersión de un conjunto de datos (o población). Mientras mayor es la desviación estándar, mayor es la dispersión de la población. La desviación estándar es un promedio de las desviaciones individuales de cada observación con respecto a la media de una distribución. Así, la desviación estándar mide el grado de dispersión o variabilidad.

[15]

En un histograma, la desviación estándar mide que tan lejos están los datos del promedio.

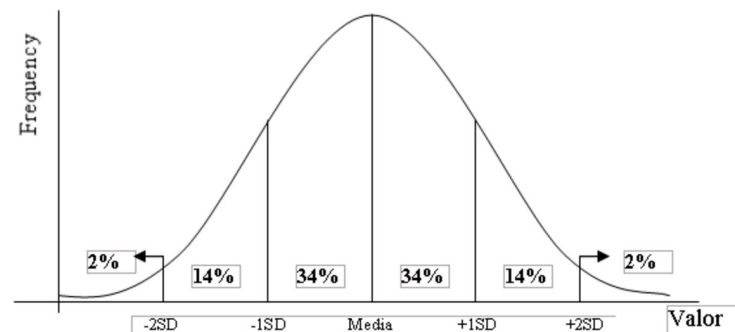


Figure 17.3: Desviación Estándar

La mayoría de los datos (aproximadamente $\frac{2}{3}$) se encontrarán a una desviación estándar del promedio. Muy pocos

datos estarán a mas de dos desviaciones estándar.

[1]

17.3 Gráficas de caminata con Gaussiana.

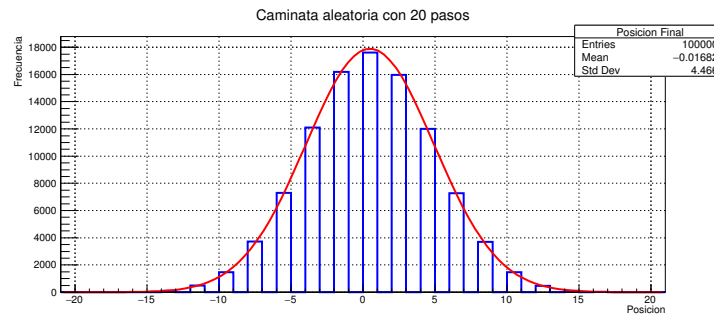


Figure 17.4: Caminata Aleatoria - Posición Final

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.79014e + 04$
- Media: $4.84297e - 01$
- Sigma: $4.45389e + 00$

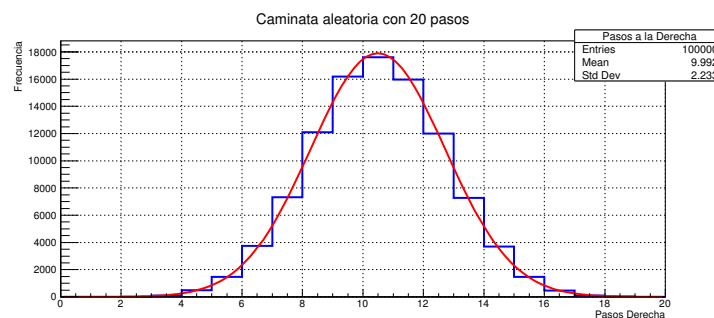


Figure 17.5: Caminata Aleatoria - Pasos a la Derecha

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.79014e + 04$
- Media: $1.04921e + 01$
- Sigma: $2.22695e + 00$

17.3.1 Justificación.

Se utiliza una Gaussiana debido a que cumple con las siguientes condiciones:

- El valor de la media es el mas probable.
- Es simétrico respecto a la media.
- Hay mas probabilidad de que se aproxime a la media de que se aleje.

[6]

17.4 Caminata al azar en 2 dimensiones.

Con el siguiente código se simula una caminata aleatoria en dos dimensiones utilizando coordenadas polares.

```

////////////////////////////////////Inicio de código////////////////////////////////////
void caminata2d()
int repeticiones = 21;
float angulo;
float x[repeticiones];
float y[repeticiones];
TRandom3 *r = new TRandom3(0);
x[0] = 0;
y[0] = 0;
TCanvas *c1 = new TCanvas();
for(int i = 1; i < repeticiones; i++)
angulo = r->Rndm()*2*TMath::Pi();
x[i] = x[i-1] + TMath::Cos(angulo);
y[i] = y[i-1] + TMath::Sin(angulo);
gr1 = new TGraph(repeticiones,x,y);
gr1->SetTitle("Caminata aleatoria");
gr1->SetLineColor(4);
gr1->SetLineWidth(2);
gr1->GetXaxis()->SetTitle("X");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("Y");
gr1->Draw("AL*");
////////////////////////////////////Fin de código////////////////////////////////////

```

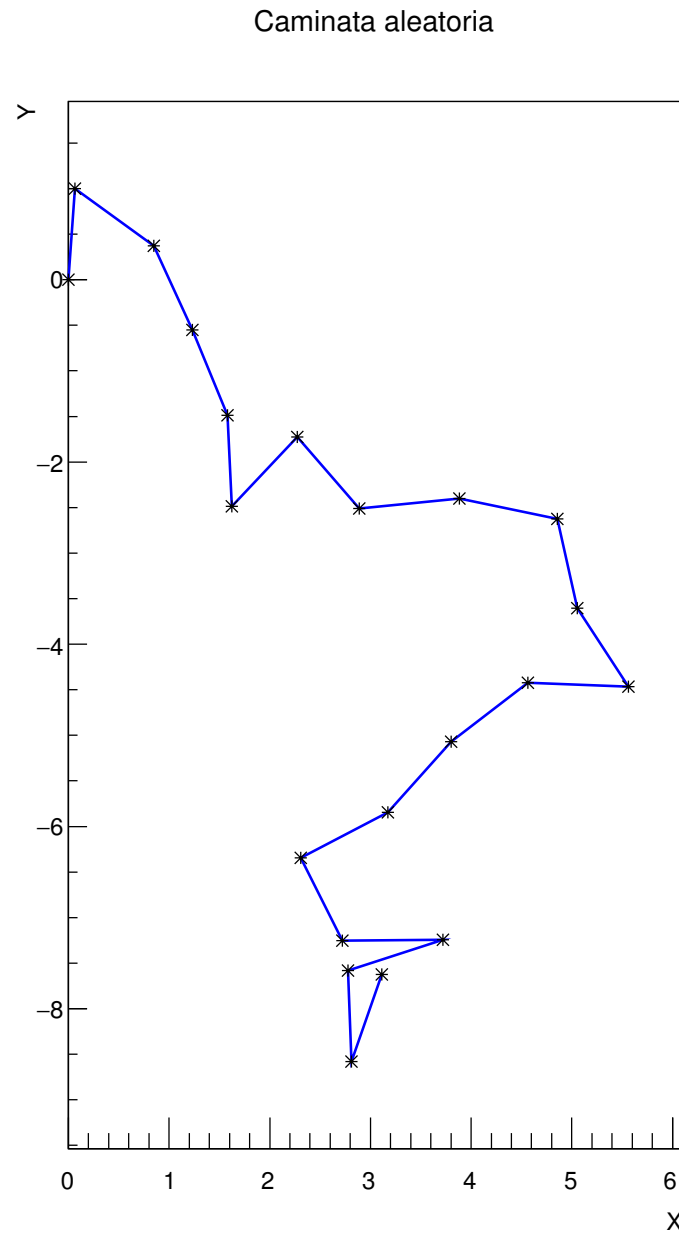


Figure 17.6: Caminata aleatoria - Coordenadas polares

Tarea 18

18.1 Caminata aleatoria con coordenadas cartesianas.

Con el siguiente código se simula una caminata aleatoria en dos dimensiones utilizando coordenadas cartesianas.

```
////////////////////////////////////Inicio de código////////////////////////////////////
```

```
void caminata2d_C()
int repeticiones = 21;
float Dx, Dy;
float x[repeticiones];
float y[repeticiones];
int signo;
TRandom3 *r = new TRandom3(0);
x[0] = 0;
y[0] = 0;
TCanvas *c1 = new TCanvas();
for(int i = 1; i < repeticiones; i++)
if ((int)(r->Rndm()*2) == 1)
signo = -1;
else
signo = 1;
Dx = signo * r->Rndm();
if ((int)(r->Rndm()*2) == 1)
signo = -1;
else
signo = 1;
Dy = signo * TMath::Sqrt(1 - Dx*Dx);
x[i] = x[i-1] + Dx;
y[i] = y[i-1] + Dy;
gr1 = new TGraph(repeticiones,x,y);
```



```

gr1->SetTitle("Caminata aleatoria (Coordenadas cartesianas)");
gr1->SetLineColor(4);
gr1->SetLineWidth(2);
gr1->GetXaxis()->SetTitle("X");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("Y");
gr1->Draw("AL*");
////////////////////////////////////Fin de código////////////////////////////////////

```

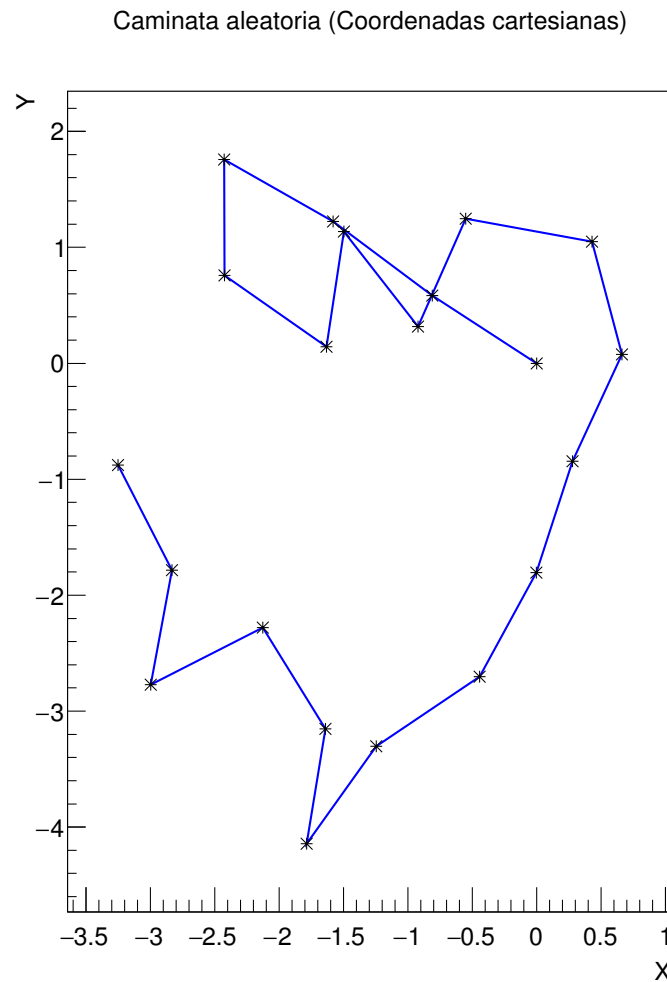


Figure 18.1: Caminata aleatoria - Coordenadas cartesianas

Tarea 19

19.1 Clasificación de Problemas.

Según su complejidad, los problemas computacionales se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Clase P.
- Clase NP.
- Clase NP-completo.
- Clase NP-difícil.



Figure 19.1: Clasificación de problemas según su complejidad

19.1.1 Clase P.

Un problema es asignado a la clase P (tiempo polinómico) si existe por lo menos un algoritmo para resolverlo, de tal forma que el número de pasos del algoritmo está acotado por un polinomio en n , donde n es el tamaño de la entrada.

19.1.2 Clase NP.

Un problema es asignado a la clase NP (tiempo polinómico no determinístico) si se puede resolver en tiempo polinómico por una máquina de Turing no determinista.

Algunos de estos problemas se caracterizan por el hecho de que puede aplicarse un algoritmo polinómico para comprobar si una solución es válida o no.

Esta característica lleva a un método de resolución no determinista consistente en aplicar heurísticos para obtener soluciones hipotéticas que se desestiman (o aceptan) en tiempo polinómico.

19.1.3 Clase NP-completo.

En esta categoría entran los problemas que son al mismo tiempo NP (verificables de manera no determinista en tiempo polinómico) y NP-difícil (cualquier problema NP puede ser convertido en este tipo de problemas).

19.1.4 Clase NP-difícil.

Un problema es NP-difícil si un algoritmo para resolverlo puede ser modificado de manera que resuelva cualquier problema NP. Por lo tanto, NP-difícil significa "por lo menos tan difícil como cualquier problema NP", aunque en realidad puede ser más difícil.

19.2 Fork.

Fork es un comando utilizado para crear nuevos procesos en Unix. Cuando se utiliza el comando, se crea una copia del proceso original cuya única diferencia es el ID de proceso.

Estos son algunos ejemplos de aplicaciones en las que se utiliza este comando:

- El shell lo utiliza para correr los programas que son invocados desde la línea de comando.
- Google Chrome utiliza fork para manejar cada pestaña como un proceso independiente. Esto previene que el código de una página afecte a todo el navegador.

19.3 Histograma normalizado.

El programa que simula la caminata aleatoria fue modificado para normalizar los datos desplegados en los histogramas.

19.3.1 Histogramas originales.

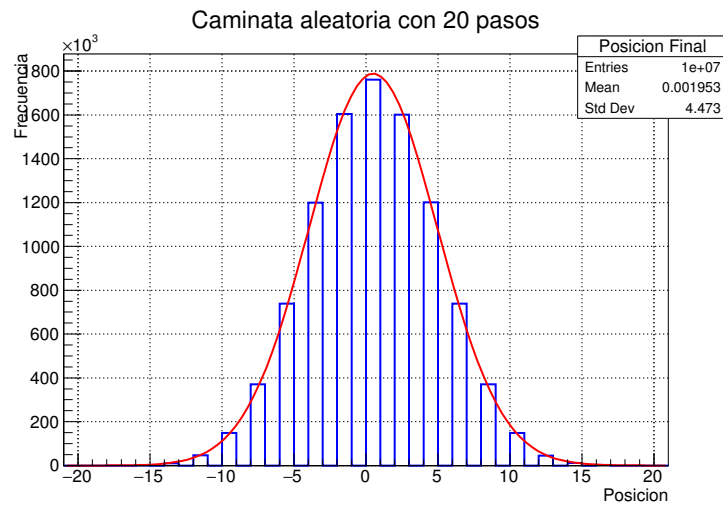


Figure 19.2: Caminata Aleatoria - Posición Final

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.78849e + 06$
- Media: $5.02625e - 01$
- Sigma: $4.45806e + 00$

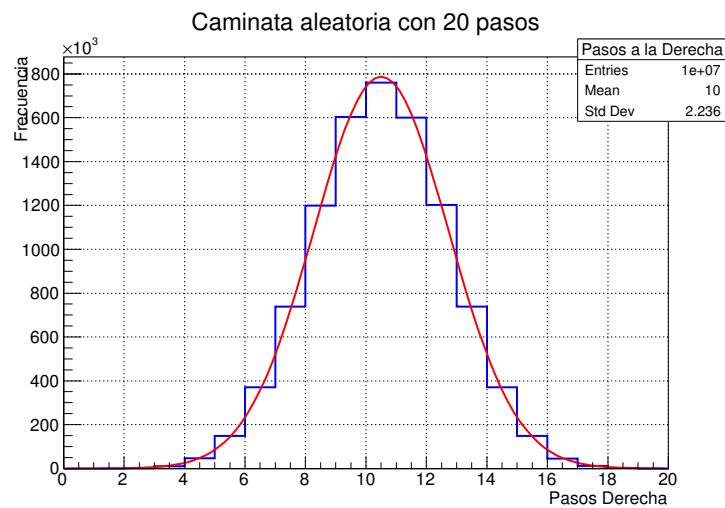


Figure 19.3: Caminata Aleatoria - Pasos a la Derecha

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.78774e + 06$

- Media: $1.05019e + 01$
- Sigma: $2.23010e + 00$

19.3.2 Histogramas normalizados.

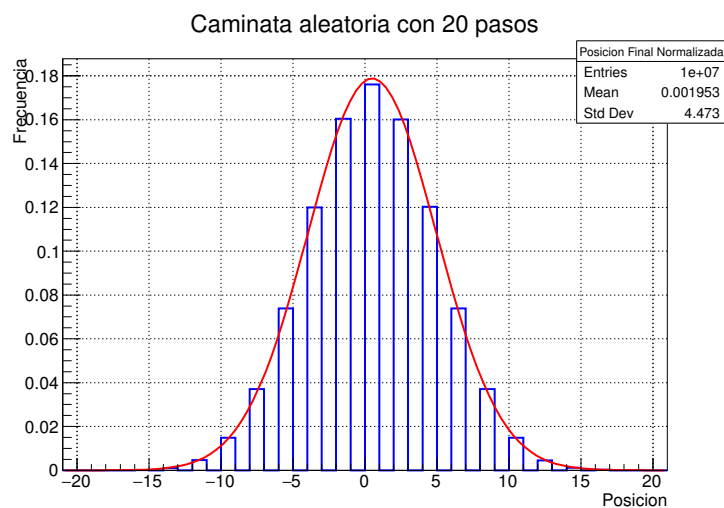


Figure 19.4: Caminata Aleatoria - Posición Final (Normalizado)

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.78846e - 01$
- Media: $5.03017e - 01$
- Sigma: $4.45814e + 00$

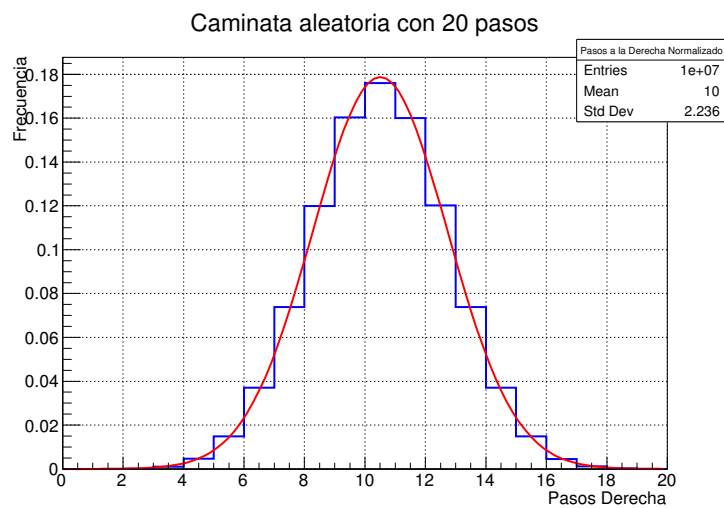


Figure 19.5: Caminata Aleatoria - Pasos a la Derecha (Normalizado)

La Gaussiana en esta gráfica fue generada con los siguientes parámetros:

- Constante: $1.78766e - 01$
- Media: $1.05024e + 01$
- Sigma: $2.23015e + 00$

19.4 Distribuciones de Probabilidad.

19.4.1 Distribución de Bernoulli.

Es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de éxito (p) y valor 0 para la probabilidad de fracaso ($q = 1 - p$).

[31]

Su función de densidad de probabilidad esta definida por:

$$f(x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x} \text{ con } x = 0, 1$$

En la siguiente gráfica se ve una distribución de Bernoulli con $p = 0.3$ y $p = 0.6$.

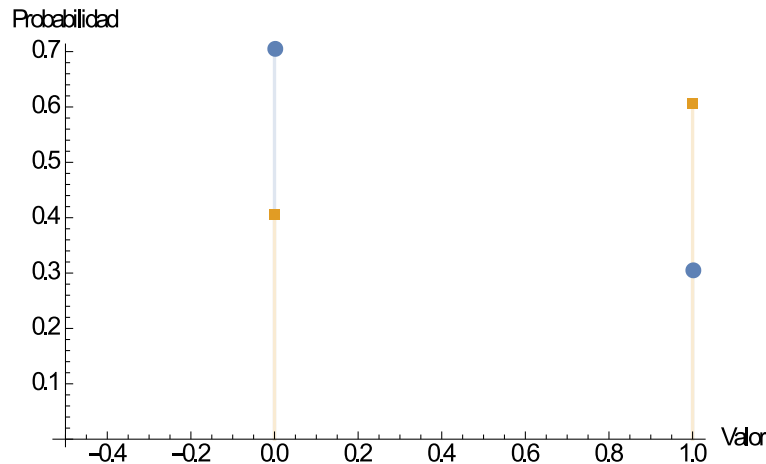


Figure 19.6: Distribución de Bernoulli

19.4.1.1 Propiedades.

- Media: $\mu = p$
- Varianza: $\sigma^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$
- Desviación Estándar: $\sigma = \sqrt{p \cdot (1 - p)} = \sqrt{p \cdot q}$

[51]

19.4.1.2 Características.

- Solo tiene dos posibles resultados, éxito y fracaso; la variable aleatoria solo puede tener uno de dos valores.
- La probabilidad de éxito es constante.
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.

[6]

19.4.1.3 Ejemplos.

- Obtención de 6 caras al lanzar 10 veces una moneda.
- Obtención de 4 al lanzar un dado.

19.4.2 Distribución Binomial.

Es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. Para $n = 1$, la binomial se convierte en una distribución de Bernoulli.

[30]

Su función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; & 0 \leq x \leq n \\ 0; & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la siguiente gráfica se ve una distribución binomial para $n = 20$ y $p = 0.5$, y para $n = 20$ y $p = 0.8$.

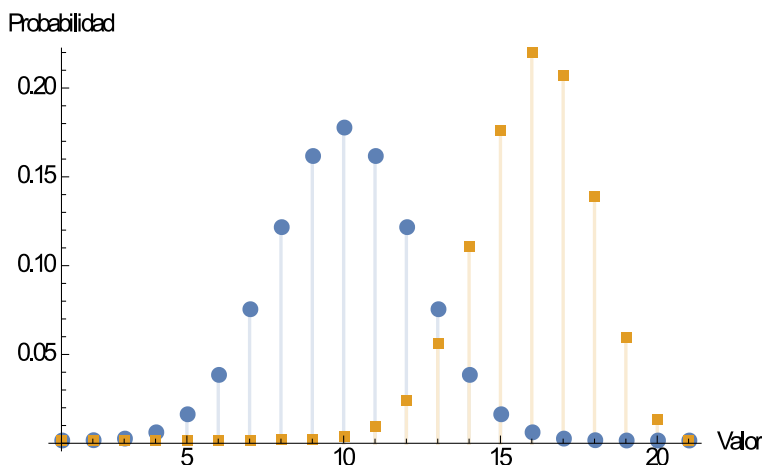


Figure 19.7: Distribución de Binomial

19.4.2.1 Propiedades.

- Media: $\mu = n \cdot p$
- Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- Desviación Estándar: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

[50]

19.4.2.2 Características.

- En cada prueba solo hay dos posibles resultados.
- Las pruebas son independientes.
- La probabilidad es la misma en cada prueba.
- La distribución de Bernoulli equivale a la distribución binomial con una prueba.

[6]

19.4.2.3 Ejemplos.

- Se desea describir el número de elementos defectuosos de un total de 50 elementos fabricados (n), el 7% de los cuales (p) ha resultado defectuoso en las pruebas preliminares.
- El gerente de ventas de una empresa desea describir el número de personas que prefieren su producto. El gerente realiza una encuesta a 100 consumidores (n) y se determina que el 60% (p) prefieren el producto de la empresa.

19.4.3 Distribución Uniforme Continua.

Es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que para cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros, a y b , que son sus valores mínimo y máximo.

[33]

Su función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{\max - \min}; & \min \leq x \leq \max \\ 0; & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la siguiente gráfica se ve una distribución uniforme continua para $\min = 0$ y $\max = 4$, y para $\min = 0$ y $\max = 1.5$.

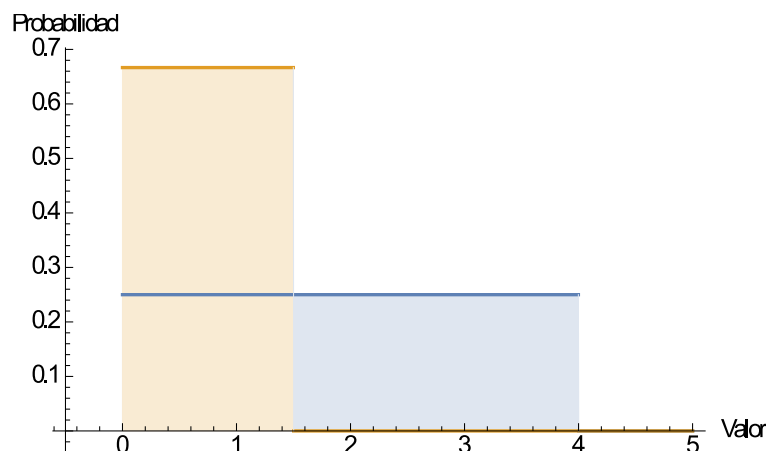


Figure 19.8: Distribución Uniforme

19.4.3.1 Propiedades.

- Media: $\mu = \frac{max+min}{2}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{12} \cdot (max - min)^2$
- Desviación Estándar: $\sigma = \frac{max-min}{2\sqrt{3}}$

[53]

19.4.3.2 Características.

- El mínimo es fijo.
- El máximo es fijo.
- Todos los valores en el rango tienen la misma probabilidad de producirse.
- La distribución uniforme discreta es el equivalente discreto de la distribución uniforme.

[6]

19.4.3.3 Ejemplos.

- Al lanzar un dado, cada resultado tiene la misma probabilidad (1/6) de caer.

19.4.4 Distribución Exponencial.

La distribución exponencial es continua y se suele utilizar a menudo para describir eventos recurrentes en puntos aleatorios en el tiempo o en el espacio. Está relacionada con la distribución de Poisson, que describe el número de veces que se repite un evento en un determinado intervalo de tiempo o espacio.

[32]

Su función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$P(X = x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(-x)}; x \geq 0 \\ 0; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la siguiente gráfica se ve una distribución uniforme continua para $min = 0$ y $max = 4$, y para $min = 0$ y $max = 1.5$.

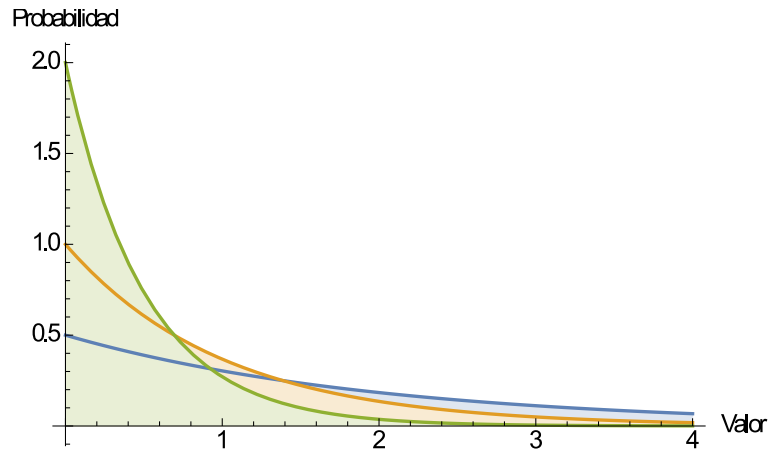


Figure 19.9: Distribución Exponencial

19.4.4.1 Propiedades.

- Media: $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- Desviación Estándar: $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

[52]

19.4.4.2 Características.

- La distribución describe el tiempo transcurrido entre repeticiones.
- La distribución no se ve afectada por los tiempos anteriores.

[6]

19.4.4.3 Ejemplos.

- Una agencia de viajes desea describir el tiempo transcurrido entre las llamadas entrantes si el promedio de llamadas entrantes es de unas 35 cada 10 minutos, o bien una tasa de 35.
- Un vendedor de automóviles necesita saber cada cuánto tiempo llega un posible nuevo cliente a su tienda para así poder asignar personal de ventas de forma más eficaz. El vendedor de automóviles sabe que llega una media de 6 clientes cada hora. En este caso, la tasa por hora es 6.

Tarea 20

20.1 Matrices Similares.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son *similares* (o *semejantes*) si existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ tal que P es invertible y

$$P^{-1}AP = B$$

En este caso escribimos $A \sim B$.

[14]

Las matrices semejantes comparten varias propiedades:

- Poseen el mismo rango.
- Poseen el mismo determinante.
- Poseen la misma traza.
- Poseen los mismos valores propios (aunque los vectores propios, en general, serán distintos).
- Poseen el mismo polinomio característico.
- Poseen el mismo polinomio mínimo.

Hay dos razones para estas características:

1. Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de una misma transformación lineal, pero con respecto a bases distintas.
2. La transformación $X \mapsto P^{-1}XP$ es un automorfismo del álgebra asociativa de todas las matrices de n -por- n .

[41]

20.2 Ejercicios de eigenvalores y eigenvectores.

Para obtener los valores y vectores propios de una matriz se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Obtener el determinante de $A - \lambda I$. Este determinante es un polinomio de grado n , que comienza con λ^n
2. Encontrar las raíces de este polinomio. Las n raíces son los valores propios de A .

3. Para cada valor propio resolver la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$. Debido a que el determinante es cero, existen soluciones además de $x = 0$. Estas soluciones son los vectores propios.

[7]

20.2.1 Ejercicio 1.

Sea una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Determinar sus valores y vectores propios.

Solución:

Primero se obtiene la matriz $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \quad (20.1)$$

Posteriormente se calcula el determinante de dicha matriz.

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) - (-6) = -12 - 4\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 \quad (20.2)$$

Posteriormente obtenemos las raíces del determinante.

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \quad (20.3)$$

Por lo tanto, los eigenvalores de A son $\lambda = 3, -2$.

Posteriormente, para cada eigenvalor resolvemos la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$ donde x es el eigenvector asociado al eigenvalor λ .

Para $\lambda = 3$ tenemos lo siguiente:

$$(A - \lambda I)x = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (20.4)$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 3 & 1 \\ -6 & -3 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (20.5)$$

Y con base en lo obtenido en la Eq.(20.5) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -6x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20.6)$$

Cuya solución es $x_1 = -x_2$.

Con base en esto podemos determinar el vector propio siguiente.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20.7)$$

Para $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Procediendo de la misma forma para $\lambda = -2$ obtenemos el siguiente eigenvector.

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20.8)$$

Para cualquier $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

20.2.2 Ejercicio 2.

Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Primero se obtiene la matriz $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad (20.9)$$

Posteriormente, se obtiene el determinante de dicha matriz.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)((-5 - \lambda)(4 - \lambda) - (3)(-6)) - (-3)((3)(4 - \lambda) - (3)(6)) + 3((3)(-6) - (-5 - \lambda)(6)) \\ &= (1 - \lambda)(-20 + 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 18) + 3(12 - 3\lambda - 18) + 3(-18 + 30 + 6\lambda) \\ &= (1 - \lambda)(-2 + \lambda + \lambda^2) + 3(-6 - 3\lambda) + 3(12 + 6\lambda) \\ &= -2 + \lambda + \lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned} \quad (20.10)$$

Posteriormente, obtenemos las raíces del determinante.

$$\lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0 \quad (20.11)$$

Por lo tanto, los eigenvalores de A son $\lambda = 4, -2$.

Posteriormente, para cada eigenvalor resolvemos la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$ donde x es el eigenvector asociado al eigenvalor λ .

Para $\lambda = 4$ tenemos lo siguiente:

$$(A - \lambda I)x = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (20.12)$$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (20.13)$$

Y con base en lo obtenido en la Eq.(20.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\
3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \\
6x_1 - 6x_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{20.14}$$

Trabajando con la primera y la tercera ecuación del sistema obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
\tag{20.15}$$

Y con base en estas ecuaciones podemos determinar el vector propio siguiente.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_3}{2} \\ \frac{x_3}{2} \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
\tag{20.16}$$

Para $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Procediendo de la misma forma para $\lambda = -2$ obtenemos el siguiente eigenvector.

$$x = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{20.17}$$

Para cualquier $x_2, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tarea 21

21.1 Matrices poco densas.

Una matriz poco densa es aquella que está formada por elementos que en su mayoría son ceros.

[13]

Cuando cumplen determinadas características se pueden catalogar de la siguiente forma:

- Matriz triangular superior
- Matriz triangular inferior
- Matriz tridiagonal

21.1.1 Matriz triangular superior.

En este tipo de matriz los elementos iguales a cero se encuentran debajo de la diagonal principal.

Por ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & -6 & 0 \\ 9 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para evitar el desperdicio de memoria que ocasionaría el almacenar una matriz donde la mayoría de los elementos son ceros, es conveniente convertirla en un arreglo unidimensional con todos los elementos diferentes de cero.

Por ejemplo:

$$M = [5, 8, 2, 7, 4, -3, -6, 9, -5, 1]$$

Para saber en qué lugar del arreglo quedó situado un determinado elemento se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$LOC(A[i, j]) = base(A) + (n * (i - 1)) - ((i - 2) * (i - 1)) / 2 + (j - 1)$$

donde:

A = Matriz triangular superior n = No. total de elementos j = renglones i = columnas

21.1.2 Matriz triangular inferior.

En este tipo de matriz los elementos iguales a cero se encuentran por encima de la diagonal principal.

Por ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

De igual forma, esta matriz se puede convertir en el arreglo siguiente.

$$M = [5, 8, 2, 6, 1, -4, 3, 7, 6, 9]$$

Y para calcular el lugar de un elemento en particular, se utiliza la siguiente fórmula:

$$LOC(A[i, j]) = base(A) + ((i - 1) * i) / 2 + (j - 1)$$

21.1.3 Matriz tridiagonal.

En esta matriz, los elementos diferentes de cero se encuentran en la diagonal principal o en las diagonales por debajo o encima de ésta.

Por ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

Y el arreglo con los elementos diferentes de cero correspondiente a esta matriz es el siguiente:

$$M = [4, 5, 8, 3, 2, 7, 6, 1, 9, -5]$$

La localización de los elementos distintos de cero en el arreglo unidimensional se realiza aplicando la siguiente fórmula:

$$LOC(A[i, j]) = base(A) + 2 * i + (j - 3)$$

[40]

21.1.4 Usos de matrices poco densas.

Una de las principales aplicaciones de estas matrices es para el manejo de sistemas algebraicos lineales.

Muchas operaciones en un sistema computacional suficientemente complejo requieren manejar muchas operaciones algebraicas lineales.

Algunos de los campos donde se aplican reglas de álgebra lineal son los siguientes:

- *Gráficos*: Requiere muchas multiplicaciones de matrices.
- *Machine Learning*: La mayoría de los métodos de aprendizaje depende en gran medida de operaciones con vectores y matrices poco densos.

- *Recuperación de Información:* Un sistema de indexado es una forma de matriz poco densa.

[21]

21.2 Teorema de punto fijo.

Si g es una función continua $g(x) \in [a, b]$ para toda $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo $[a, b]$. Esto puede ser demostrado suponiendo lo siguiente:

$$g(a) \geq a \quad g(b) \leq b$$

$$g(a) - a \geq 0 \quad g(b) - b \leq 0$$

Como g es continua, el teorema del valor intermedia garantiza que existe una $c \in [a, b]$ tal que:

$$g(c) - c = 0$$

Por lo que debe de existir una c tal que:

$$g(c) = c$$

Por lo tanto, debe de existir un punto fijo $\in [a, b]$.

Hay diferentes teoremas de punto fijo, según el área de estudio, entre los que están los siguientes.

- Teorema de punto fijo de Banach
- Teorema de punto fijo de Brouwer
- Teorema de la bola peluda
- Teorema de punto fijo de Kakutani
- Fórmula de punto fijo de Lefschetz

[55]

21.3 Problemas de cadenas de Markov.

21.3.1 Ejercicio 1.

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto en un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solución:

El problema se puede analizar con el siguiente esquema.

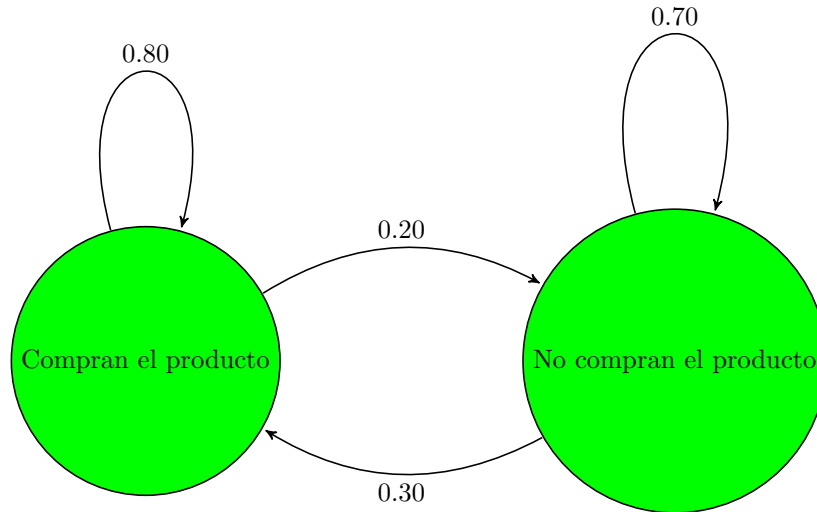


Figure 21.1: Problema 1 - Cadenas de Markov

Utilizando esta información se construye la siguiente matriz donde $P^{(1)}$ representa la situación inicial.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Para calcular ¿Cuántos cliente comprarán el producto el mes próximo? se realiza la siguiente multiplicación de matrices.

$$[C, N] = [100 \quad 900] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = [350, 650]$$

Lo cual significa que el primer mes comprarán el producto $C = 350$ clientes y no comprarán el producto $N = 650$ clientes.

Para el cálculo después de dos meses se calcula $P^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Y posteriormente se multiplica por el estado inicial para obtener el número de personas que comprará el producto en dos meses.

$$[C, N] = [100 \quad 900] \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix} = [475, 525]$$

Lo cual significa que el segundo mes comprarán el producto $C = 475$ clientes y no comprarán el producto $N = 525$ clientes.

21.3.2 Ejercicio 2.

En una población de 10,000 habitantes, 5,000 no fuman, 2,500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2,500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que

fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

Solución:

El problema se puede analizar con el siguiente esquema.

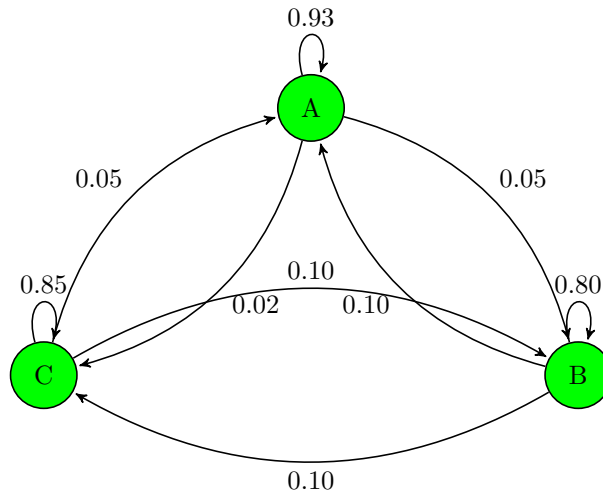


Figure 21.2: Problema 2 - Cadenas de Markov

Utilizando esta información se construye la siguiente matriz donde $P^{(1)}$ representa la situación inicial.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{bmatrix}$$

Para calcular ¿Cuántos individuos habrá de cada clase después de un mes?, se realiza la siguiente multiplicación de matrices.

$$\begin{bmatrix} 5000 & 2500 & 2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{bmatrix} = [5025, 2500, 2475]$$

Lo cual significa que después de un mes habrán 5025 individuos no fumadores, 2500 individuos que fumen uno o menos de un paquete diario, y 2475 individuos que fumen más de un paquete diario.

Tarea 22

22.1 Clasificación de Inteligencia Artificial.

Hay dos maneras principales de clasificar a la inteligencia artificial, fuerte y débil, las cuales se describen a continuación.

22.1.1 Inteligencia Artificial Débil.

También se conoce como Inteligencia Artificial Estrecha. Es la que se enfoca en tareas específicas.

Todas las aplicaciones actuales de inteligencia artificial son de este tipo en el mejor de los casos.

22.1.2 Inteligencia Artificial Fuerte.

También se conoce como Inteligencia Artificial General o Completa. Busca generar una máquina capaz de realizar cualquier habilidad intelectual que pueda realizar un ser humano.

Algunas de las tareas que debe poder realizar una inteligencia artificial de este tipo son las siguientes:

- Razonar, usar estrategia, realizar juicios bajo incertidumbre.
- Representar el conocimiento, incluyendo el sentido común.
- Planear.
- Aprender.
- Comunicarse utilizando lenguaje natural.
- Integrar todas estas habilidades hacia una meta común.

[25]

22.2 Problema de 4 colores.

Este problema está relacionado con el problema de los colores necesarios para colorear un mapa, sin que dos regiones adyacentes tengan el mismo color.

En 1879 Alfred Kempe publica un artículo en el cual resolvía el problema de coloración de grafos para 4 colores.

Posteriormente, en 1890, Heawood descubrió que el argumento de Kempe era erróneo, y propuso el teorema de los 5 colores basándose en el trabajo de Kempe.

Después, en 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken prueban el teorema de los 4 colores, el cual dice que *Si G es un grafo planar, entonces:*

$$X(G) \leq 4$$

Decidir la distribución de los colores en un grafo de manera que cumplan con el teorema de los 4 colores es un problema NP-difícil.

[3,27]

22.3 Leyes de Mendel.

Las leyes de Mendel son el conjunto de reglas básicas sobre la transmisión por herencia genética de las características de los organismos padres a sus hijos. Estas reglas básicas de herencia constituyen el fundamento de la genética. Las leyes se derivan del trabajo realizado por Gregor Mendel publicado en el año 1865 y en 1866.

Las leyes son las siguientes:

- 1. Principio de la uniformidad de los heterocigotos de la primera generación filial.
- 2. Ley de la segregación de los caracteres en la segunda generación filial.
- 3. Ley de la independencia de los caracteres hereditarios.

En una cruza genética, la probabilidad de que se manifieste el gen dominante depende de su frecuencia. En el caso mostrado en la figura, ambos padres poseen un gen dominante y uno recesivo para la característica de color. El gen dominante se manifiesta en 3/4 de los descendientes y el gen recesivo se manifiesta en 1/4 de los descendientes.

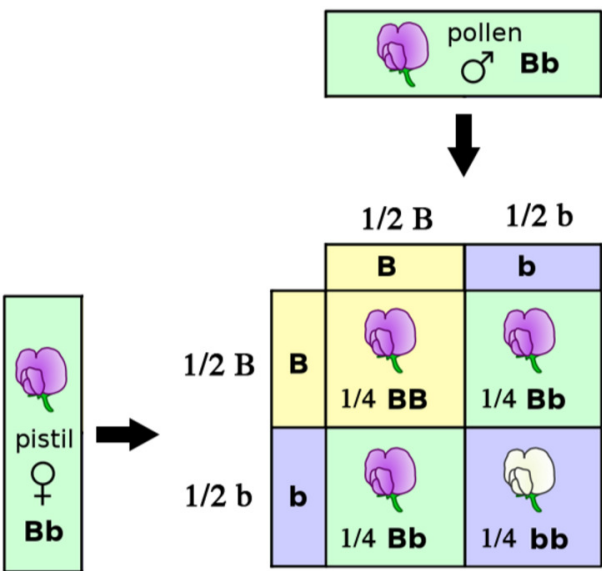


Figure 22.1: Problema 2 - Cadenas de Markov

[20]

Bibliography

- [1] Baskin engineering. <https://classes.soe.ucsc.edu/ams005/Summer07/Notes/Class2/class2-2.pdf>. Accessed: 2016-06-17.
- [2] Biografías y vidas. <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/ciceron.htm>. Accessed: 2016-06-17.
- [3] Coloreo de grafos. http://www.dc.uba.ar/materias/aed3/2013/1c/teorica/algo3_teo_coloreo.pdf. Accessed: 2016-06-17.
- [4] Computing pi with chudnovsky and gmp. Beej's Bit Bucket. <http://beej.us/blog/data/pi-chudnovsky-gmp/>.
- [5] Critique of bayesiansim. http://www.pitt.edu/~jdnorton/homepage/research/ind_crit_Bayes.html. Accessed: 2016-06-17.
- [6] Descripciones de distribución de probabilidad. http://www.crystalballservices.com/Portals/0/CB_Material/CrystalBallUser. Accessed: 2016-06-17.
- [7] Eigenvalores y eigenvectores. <http://galia.fc.uaslp.mx/~rmariela/algebra/L5.pdf>. Accessed: 2016-06-17.
- [8] Frecuencia estadística. <http://www.escolares.net/matematicas/frecuencia-estadistica/>. Accessed: 2016-06-17.
- [9] Hothmath.com. http://catchupmath.com/hotmath_help/spanish/topics/geometric-probability.html. Accessed: 2016-06-17.
- [10] Matemática. <http://matematica.50webs.com/principio-del-palomar.html>. Accessed: 2016-06-17.
- [11] Math - stackexchange. <http://math.stackexchange.com/questions/413296/how-does-the-divisibility-graphs-work>. Accessed: 2016-06-17.
- [12] Math beyond school. <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Probability/rocket.html>. Accessed: 2016-06-17.
- [13] Matrices poco densas. <http://metodosdeprogra1.blogspot.mx/2012/09/22-matrices-poco-densas.html>. Accessed: 2016-06-17.
- [14] Matrices similares. http://esfm.egormaximenko.com/linalg/similar_matrices_es.pdf. Accessed: 2016-06-17.
- [15] Medida de dispersión. http://www.cca.org.mx/cca/cursos/estadistica_2/html/m11/desviacion_estandar.htm. Accessed: 2016-06-17.
- [16] Notación de einstein. http://mttmllr.com/geoTS_files/Notacion_de_Einstein.pdf. Accessed: 2016-06-17.
- [17] Probabilidad. <https://sites.google.com/site/623probabilidad/probabilidad-clasica-empirica-y-subjetiva>. Accessed: 2016-06-17.
- [18] Probabilidad axiomática. http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/07Procesos%20estocasticos.htm. Accessed: 2016-06-17.

- [19] Procesos estocásticos. <http://probabilidadaxiomaticae3.blogspot.mx/2009/12/probabilidad-axiomatica.html>. Accessed: 2016-06-17.
- [20] Rules of probability for mendelian inheritance. <https://www.boundless.com/biology/textbooks/boundless-biology-textbook/mendel-s-experiments-and-heredity-12/mendel-s-experiments-and-the-laws-of-probability-94/rules-of-probability-for-mendelian-inheritance-413-11640/>. Accessed: 2016-06-17.
- [21] Significado de matrices poco densas. <https://www.quora.com/What-is-the-significance-of-sparse-matrices-What-are-some-common-applications-in-computer-science>. Accessed: 2016-06-17.
- [22] Space safety magazine. <http://www.spacesafetymagazine.com/space-disasters/challenger-disaster/>. Accessed: 2016-06-17.
- [23] Understanding the house edge. <http://casinogambling.about.com/od/oddsandends/a/houseedge.htm>. Accessed: 2016-06-17.
- [24] Vitutor. http://www.vitutor.com/di/di/a_3.html. Accessed: 2016-06-17.
- [25] Wiki - artificial general intelligence. https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_general_intelligence. Accessed: 2016-06-17.
- [26] Wiki - brownian model of financial markets. https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_model_of_financial_markets. Accessed: 2016-06-17.
- [27] Wiki - coloración de grafos. https://es.wikipedia.org/wiki/Coloraci%C3%B3n_de_grafos. Accessed: 2016-06-17.
- [28] Wiki - diagrama de árbol. https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_%C3%A1rbol. Accessed: 2016-06-17.
- [29] Wiki - dirac delta. https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function. Accessed: 2016-06-17.
- [30] Wiki - distribución binomial. https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_binomial. Accessed: 2016-06-17.
- [31] Wiki - distribución de bernoulli. https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_de_Bernoulli. Accessed: 2016-06-17.
- [32] Wiki - distribución exponencial. https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_exponencial. Accessed: 2016-06-17.
- [33] Wiki - distribución uniforme. https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_uniforme_continua. Accessed: 2016-06-17.
- [34] Wiki - espacio muestral. https://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_muestral. Accessed: 2016-06-17.
- [35] Wiki - función gamma. https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_gamma. Accessed: 2016-06-17.
- [36] Wiki - gambler's fallacy. https://en.wikipedia.org/wiki/Gambler's_fallacy. Accessed: 2016-06-17.
- [37] Wiki - heaviside. https://en.wikipedia.org/wiki/Heaviside_step_function. Accessed: 2016-06-17.
- [38] Wiki - house advantage. https://en.wikipedia.org/wiki/Casino_game#House_advantage. Accessed: 2016-06-17.
- [39] Wiki - inverse gambler's fallacy. https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_gambler's_fallacy. Accessed: 2016-06-17.
- [40] Wiki - matrices poco densas. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/APUNTES.pdf>. Accessed: 2016-06-17.
- [41] Wiki - matrices similares. https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_semejante. Accessed: 2016-06-17.
- [42] Wiki - risk. <https://en.wikipedia.org/wiki/Risk>. Accessed: 2016-06-17.
- [43] Wiki - roc. https://en.wikipedia.org/wiki/Receiver_operating_characteristic. Accessed: 2016-06-17.

- [44] Wiki - teorema del límite central. https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_l%C3%ADmite_central. Accessed: 2016-06-17.
- [45] Wiki-frecuencia estadística. https://es.wikipedia.org/wiki/Frecuencia_estad%C3%ADstica. Accessed: 2016-06-17.
- [46] Wiki-peligrosidad. <https://es.wikipedia.org/wiki/Peligrosidad>. Accessed: 2016-06-17.
- [47] Wiki-riesgo. <https://es.wikipedia.org/wiki/Riesgo>. Accessed: 2016-06-17.
- [48] William m. briggs. <http://wmbriggs.com/post/4468/>. Accessed: 2016-06-17.
- [49] Wolfram alpha - brownian motion. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=brownian+motion>. Accessed: 2016-06-17.
- [50] Wolfram alpha - distribución binomial. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=binomial+distribution>. Accessed: 2016-06-17.
- [51] Wolfram alpha - distribución de bernoulli. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=bernoulli+distribution>. Accessed: 2016-06-17.
- [52] Wolfram alpha - distribución exponencial. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=exponential+distribution>. Accessed: 2016-06-17.
- [53] Wolfram alpha - distribución uniforme. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=uniform+distribution>. Accessed: 2016-06-17.
- [54] Wolfram alpha - factorial. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=factorial>. Accessed: 2016-06-17.
- [55] Wolfram alpha - fixed point theorem. <http://mathworld.wolfram.com/FixedPointTheorem.html>. Accessed: 2016-06-17.
- [56] Wolfram alpha - risk. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=risk>. Accessed: 2016-06-17.
- [57] Zhu, j. et al. three-dimensional magnetic cloak working from d.c. to 250khz. *nat. commun.* 6:8931 doi: 10.1038/ncomms9931 (2015).
- [58] BLITZSTEIN, J. K., AND HWANG, J. *Introduction to Probability*. CRC Press, -.
- [59] BOGOMOLNY, A. Calculation of the digits of pi by the spigot algorithm of rabinowitz and wagon. from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algorithms/SpigotForPi.shtml>, Accessed 03 April 2016.
- [60] J.B.PENDRY, D.SCHURIG, AND D.R.SMITH. Controlling electromagnetic fields. *Science* 312, 5781 (6 2006), 1780–1782.
- [61] RESEARCH, W. Pi. series representations. Wolfram Research. <http://functions.wolfram.com/Constants/Pi/06/ShowAll.html>
- [62] ROSADO, F. B. Una primera lección de combinatoria. *Seminario de Problemas* (2012).
- [63] WEISSTEIN, E. W. Kurtosis. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Kurtosis.html>.
- [64] WEISSTEIN, E. W. Skewness. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Skewness.html>.