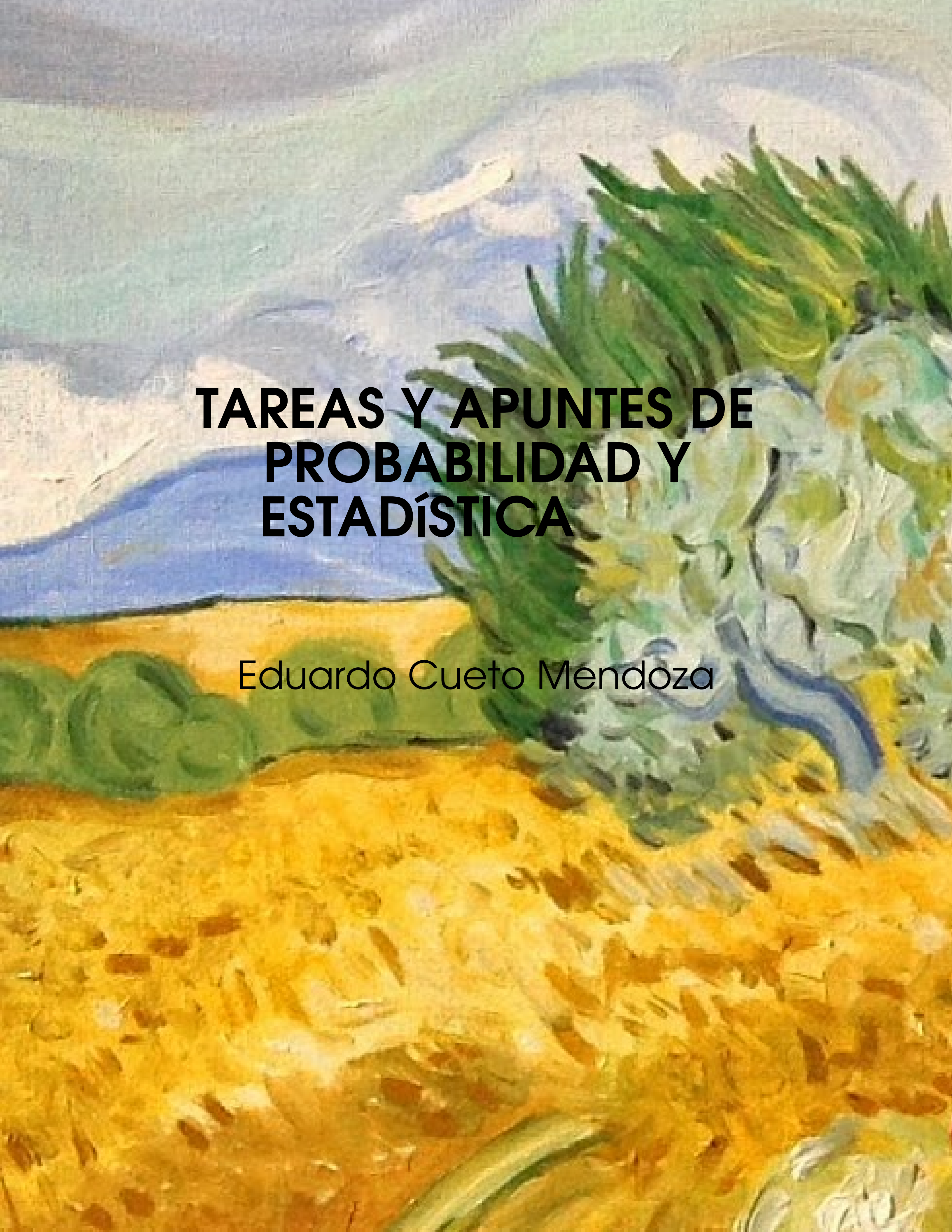


TAREAS Y APUNTES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Eduardo Cueto Mendoza

Centro de Investigación en Computación

15 de agosto del 2016

Contenido

1. Tarea 1

1.1 Señal Wow!

Esta fue una señal captada por el radiotelescopio “Big Ear” parte del programa SETI, el día 15 de agosto de 1977 y expertos del área consideran que por la intensidad de la señal esta fue producto de inteligencia extraterrestre. En la actualidad se han creado varios grupos que contribuyen con tiempo de computo con la finalidad de detectar señales del espacio exterior.

1.2 Efecto Peltier

Es un fenómeno natural que trata sobre la conversión directa de la diferencia de temperatura a voltaje eléctrico y viceversa. Un dispositivo termoeléctrico crea un voltaje cuando hay una diferencia de temperatura a cada lado. Por el contrario cuando se le aplica un voltaje, crea una diferencia de temperatura. en portadores de carga, un gradiente de temperatura aplicado provoca portadores cargados en el material, si hay electrones o huecos, para difundir desde el lado caliente al lado frío, similar a un gas clásico que se expande cuando se calienta; por consiguiente, la corriente es inducida termalmente. [**3**]

1.3 Refrigerador de Peltier

Un refrigerador Peltier es un refrigerador que utiliza un elemento Peltier. Un elemento Peltier se puede describir como “una bomba de calor” que bombeará el calor de una cara a la otra del elemento. Esto significa que un elemento Peltier tiene una cara fría y otra de caliente. Para realizar esto el elemento Peltier utiliza la electricidad bastante cantidad por cierto. Esto indica también que en adición al bombeo de calor, el elemento Peltier actualmente produce calor en conjunto, el sistema trabajará caliente, pero el elemento Peltier refrigerará donde sea necesario. [**3**]

1.4 Efecto Seebeck

Entre los años 1821 - 1823 Thomas Johann Seebeck descubrió que un circuito hecho de dos metales no similares, con una diferencia de temperatura entre ellos desviaba la aguja de una brújula. Seebeck considero que esos cambios se debían a magnetismo inducido por la diferencia de temperaturas y posteriormente descubrió que una fuerza termoeléctrica inducia una corriente eléctrica la cual por la ley de Ampere desviaba la aguja. De manera específica la diferencia de temperaturas produce un potencial eléctrico que puede mantener una corriente eléctrica en un circuito cerrado. [**2**]

2. Tarea 2

2.1 Definición de probabilidad

Es una técnica lógico-matemática que se utiliza para medir la incertidumbre o aleatoriedad de un fenómeno o evento.

2.2 Tipos de Probabilidad

Existen diversos tipos de probabilidad haremos mención de algunos de ellos, en este capítulo.

2.2.1 Probabilidad uniforme

Es la probabilidad comúnmente usada para modelar eventos que ocurren de forma igual esto es los resultados ocurren ccon igual probabilidad.

$$\text{probabilidad de que ocurra el evento} = \frac{\text{No. de casos favorables}}{\text{No. de casos posibles}} \tag{2.1}$$

2.2.2 Probabilidad geométrica

La probabilidad de un evento A se calcula suponiendo igualdad en el resultado del fenómeno sino mediante el tamaño de su volumen en el espacio de eventos.

2.2.3 Probabilidad frecuentista

Consiste de el conjunto de técnicas que se utilizan para medir el resultado de un experimento aleatorio, dependiendo de la frecuencia con que se realiza, esto es se apoya en las leyes de los grandes números.

2.2.4 Probabilidad subjetiva

Son valores que las personas asignan basado en los niveles de certidumbre que se tiene respecto a un evento.

2.2.5 Probabilidad Axiomática

Esta probabilidad trata los axiomas que permiten generar teoremas y definiciones para generar todo un sistema lógico probabilístico. En donde entiéndase axioma como la unidad más simple, la cual es verdadera por ser evidente. El matemático A. Kolmogorov creo este sistema y propuso los siguientes axiomas en los que se basa la teoría de la probabilidad moderna:

Sea A un conjunto que pertenece a una sigma algebra, con $A \subseteq \Omega$ entonces los siguientes axiomas se cumplen:

1. $P(A) \leq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty}$

2.3 Fenómenos deterministas

Estos fenómenos o eventos, ocurren de tal manera que es sencillo, ya sea usando la intuición o modelos matemáticos, determinar su comportamiento a futuro así como el comportamiento pasado del fenómeno.

2.3.1 Ejemplos de fenómenos deterministas

- La distancia recorrida en un tiempo t y una velocidad v, sin considerar la resistencia del viento.
- La muerte, es un fenómeno predecible para todo ser vivo.
- La “caída” de un objeto cercano a otro de masa mucho mayor.
- Objetos que se calientan debido a la radiación de una estrella.
- Que un objeto no se detenga sin que una fuerza externa a el áctue sobre el.
- El paso del tiempo, sin considerar los efectos de la gravedad.

- La gasolina es un liquido inflamable, al aplicar calor a el.
- El llenado de cualquier recipiente fínito.
- La energía que produce un mol de dinámita.
- El comporamiento de la función $f(x) = x^2$.

2.3.2 Ejemplos de fenómenos no deterministas

- El resultado de tirar un dado.
- El comportamiento del clíma.
- La posición y la velocidad de un electrón en un tiempo determinado.
- El movimiento del polvo, al soplar sobre el.
- El comportamiento de las personas durante una catástrofe natural.
- Conocer el momento cuando ocurre dicha catástrofe.
- Los métodos de aprendizaje de máquina.
- El valor de las acciones de una empresa.
- El comportamiento de la turbulencia.

2.4 triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1
\end{array}
$$

3. tarea 3

3.1 10 ejemplos de permutaciones

- Escoger al capitán, el pitcher y el short stop de un equipo.
- Escoger tus dos colores favoritos en orden de una revista.
- Un arreglo ordenado de objetos.
- Todas las posibles formas de ordenar componentes electronicos en una tablilla.
- Las posibles formas en que se pueden ordenar 5 niñas y 5 niños de tal manera que todos los niños y niñas esten juntos en una hilera de 10 sillas.
- Todas las posiciones en las que pueden estar ordenados los átomos de un mol de agua.
- Las formas en que pueden estar orenados los jugetes de un bebe en un estante.
- Todas las formas de ordenar los productos de una tienda.
- Todas las posibles formas de llenar una matriz de $n \times n$ con números naturales.
- Todas las forma de ordenar bits en un medio de almacenamiento.

3.2 10 ejemplos de combinaciones

- Todas las posibles palabras de longitud 5 que se pueden formar del alfábeto latino.
- Todas las maneras de sacar un full de unas cartas americanas.
- Todas las posibles formas de sacar caras repetidas al lazar dos monedas.
- Todas las maneras de sacar un número par al lanzar un dado.
- Los equipos de voleibol que se pueden formar a partir de 9 jugadores disponibles.
- Los comités de 1 presidente y 3 vocales que se pueden formar a partir de un grupo de 8 personas, las cuales pueden ocupar todas cualquier puesto.
- Todas las manos de poker que hay en una baraja de 52 cartas.
- Todas las formas que hay de servir 3 veces a la semana un platillo en un restaurant.
- Las cadenas de ocho bits que tienen exactamente 4 ceros.
- Todas las maneras de sacar 10 cubos númerados de una bolsa con 100.

3.3 Telómeros y envejecimiento

Los telómeros son cubiertas, de ADN, que los cromosomas poseen al final de sus extremos y estos sirven como una protección en contra de los daños que pueden ocurrir en los mismos cromosomas. El tamaño de los telómeros ha sido ligado con la capacidad de envejecer de los seres vivos que poseen cromosomas no circulares.

3.4 Oveja Dolly

La oveja Dolly fue el primer mamífero clonado a partir de una célula adulta el 5 de julio de 1996. Sus creadores fueron los científicos del Instituto Roslin de Edimburgo, Ian Wilmut y Keith Campbell. Su nacimiento no fue anunciado hasta siete meses después, el 23 de febrero de 1997. Dolly fue el resultado de una transferencia nuclear desde una célula donante diferenciada a un óvulo no fecundado y sin núcleo, implantado después en una hembra portadora. Como un dato curioso la oveja Dolly envejecio a un ritmo acelerado por daño en sus telomeros.

3.5 Tensor de Levy - Civita

Cuando el símbolo de permutación es considerado como un tensor se conoce como tensor de Levy-Civita. El tensor permutación de rango tres $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ es importante en el área de la relatividad general y está definido de la siguiente manera:

$$(\varepsilon)^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\delta\gamma \text{ es una permutación par de 123} \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\delta\gamma \text{ es una permutación impar de 123} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

para obtener los casos se deben calcular las permutaciones y así obtenemos:

$$(\varepsilon)^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ es } (1,2,3),(2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ es } (3,2,1),(1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{si } j=k \text{ o } k=i \text{ o } i=j \end{cases}$$

3.6 Demostración de 5

Se va a demostrar la siguiente proposición: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Comencemos tomando el lado derecho de la igualdad y apliquemos la definición de combinación:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k))!}+\frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{(n-1)!k!((n-1)-k)!\ +\ (n-1)!(k-1)!(n-k))!}{(k-1)!(n-k)!k!((n-1)-k)!}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{(n-1)!k(k-1)!(n-k-1)!\ +\ (n-1)!(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k))!k!((n-1)-k)!}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{(n-1)!\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k-1)!}[k+(n-k)]}{\cancel{(k-1)!}(n-k))!k!\cancel{(n-k-1)!}}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\quad\square$$

3.7 Demostración de 7

Continuamos demostrando la proposición 7 que se vio en clase $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Usamos de nuevo la definición de combinacion aplicada a el lado derecho de la igualdad:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\cdots$$

$$\cdots=\binom{n}{k}\quad\square$$

3.8 Cardinalidad del conjunto potencia

Comentemos un poco sobre el teorema de Cantor, pero primero observemos, la idea fundamental sobre la cardinalidad de un conjunto

3.8.1 Definición de cardinalidad de un conjunto

Sea un conjunto A que contiene n elementos denotamos su cardinalidad o número de elementos como $|A|=n$.

3.8.2 Conjunto potencia

Sea A un conjunto, el conjunto potencia de A, se define como el conjunto que contiene todos los posibles conjuntos de A y lo denotamos $\mathscr{P}(A)$. Un ejemplo de esto es el conjunto potencia de $\{1,2,3\}$ el cual es

3.8.3 Teorema de Cantor

El teorema de Cantor es obvio para conjuntos finitos: si un conjunto finito tiene n elementos entonces el conjunto de partes de ese conjunto tiene 2^n elementos. El hecho de que sea válido para todo conjunto infinito no es del todo intuitivo, pero permite establecer varios resultados interesantes:

- Existe una infinidad de cardinales transfinitos (números que establecen el tamaño de los conjuntos infinitos), lo cual significa que en realidad existen muchos tipos de infinito (de hecho una infinidad) cada uno mayor que el anterior. Este resultado a priori es muy poco intuitivo, pero tremendamente importante en la fundamentación de las matemáticas.
- No existe ninguna manera de enumerar todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

3.8.4 Cardinalidad del conjunto potencia y su relación con el teorema de binomio

Enumerar los subconjuntos de un conjunto S, es equivalente a contar todas las maneras de seleccionar k de n elementos que contiene S con $k = 0,1,2,\ldots,n$. Entonces por la cardinalidad del conjunto de los subconjuntos de S tenemos que el número que buscamos es:

$$|\mathscr{P}(S)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Pero esto es consecuencia directa del teorema del binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

cuando $x = y = 1$ se sigue

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |\mathscr{P}(S)|$$

por lo tanto la cardinalidad del conjunto potencia es 2^n.

4. Tarea 4

4.1 Explicar el ¿por qué? de la formula $P\binom{n}{r} = n(n-1)\dots(n-r+1)$

La explicación esta directamente dada por nuestra definición de permutación tomando un subconjunto con r elementos de otro con n, donde $n \geq r$.

Si recordamos un poco la definición de permutación, con las restricciones planteadas anteriormente tenemos:

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Observemos con atención el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 321}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 321}. \tag{4.1}$$

Ahora expandamos un poco más el numerador de la fracción:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 321}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 321} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 321}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 321}.$$

Donde lo anterior es posible por la hipótesis $n \geq r$, ya solo es necesario simplificar los terminos necesarios:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cancel{(n-r)}\cancel{(n-r-1)}\cancel{(n-r-2)}\cdots\cancel{3}\cancel{2}\cancel{1}}{\cancel{(n-r)}\cancel{(n-r-1)}\cancel{(n-r-2)}\cdots\cancel{3}\cancel{2}\cancel{1}} = n(n-1)\dots(n-r+1) \quad \square$$

4.2 Matrices y el tensor de Levi - Civita

Una formula para calcular el producto cruz de una matriz A por otra B usando Levi - Civita es la siguiente:

$$(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{4.2}$$

Ahora vamos a hacer el caso para una matriz de 3×3, comenzando cuando $i = 1$:

$$(\bar{A} \times \bar{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k$$

Primero expandemos con respecto a la variable $j = 1, 2$ y 3

$$= \varepsilon_{11k} A_1 B_k + \varepsilon_{12k} A_2 B_k + \varepsilon_{13k} A_3 B_k$$

Ahora expandemos con respecto a la variable $k = 1, 2$ y 3

$$= \varepsilon_{111} A_1 B_1 + \varepsilon_{112} A_1 B_2 + \varepsilon_{113} A_1 B_3$$

$$= \varepsilon_{121} A_2 B_1 + \varepsilon_{122} A_2 B_2 + \varepsilon_{123} A_2 B_3$$

$$= \varepsilon_{131} A_3 B_1 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 + \varepsilon_{133} A_3 B_3$$

Basta cancelar términos iguales

$$= \cancel{\varepsilon_{111} A_1 B_1} + \cancel{\varepsilon_{112} A_1 B_2} + \cancel{\varepsilon_{113} A_1 B_3}$$

$$= \cancel{\varepsilon_{121} A_2 B_1} + \cancel{\varepsilon_{122} A_2 B_2} + \varepsilon_{123} A_2 B_3$$

$$= \cancel{\varepsilon_{131} A_3 B_1} + \varepsilon_{132} A_3 B_2 + \cancel{\varepsilon_{133} A_3 B_3}$$

$$(\bar{A} \times \bar{B})_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

Ahora vamos a hacer el caso para una matriz de 3×3, ahora cuando $i = 2$:

$$(\bar{A} \times \bar{B})_2 = \varepsilon_{2jk} A_j B_k$$

Primero expandemos con respecto a la variable $j = 1, 2$ y 3

$$= \varepsilon_{21k} A_1 B_k + \varepsilon_{22k} A_2 B_k + \varepsilon_{23k} A_3 B_k$$

Ahora expandemos con respecto a la variable $k = 1, 2$ y 3

$$= \varepsilon_{211} A_1 B_1 + \varepsilon_{212} A_1 B_2 + \varepsilon_{213} A_1 B_3$$

$$= \varepsilon_{221} A_2 B_1 + \varepsilon_{222} A_2 B_2 + \varepsilon_{223} A_2 B_3$$

$$= \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{232} A_3 B_2 + \varepsilon_{233} A_3 B_3$$

Basta cancelar términos iguales

$$= \cancel{\varepsilon_{211} A_1 B_1} + \cancel{\varepsilon_{212} A_1 B_2} + \varepsilon_{213} A_1 B_3$$

$$= \cancel{\varepsilon_{221} A_2 B_1} + \cancel{\varepsilon_{222} A_2 B_2} + \cancel{\varepsilon_{223} A_2 B_3}$$

$$= \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \cancel{\varepsilon_{232} A_3 B_2} + \cancel{\varepsilon_{233} A_3 B_3}$$

$(\bar{A} \times \bar{B})_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$

Ahora vamos a hacer el caso para una matriz de 3×3, ahora cuando $i = 3$:

$(\bar{A} \times \bar{B})_3 = \varepsilon_{3jk} A_j B_k$

Primero expandemos con respecto a la variable $j = 1, 2$ y 3

$= \varepsilon_{31k} A_1 B_k + \varepsilon_{32k} A_2 B_k + \varepsilon_{33k} A_3 B_k$

Ahora expandemos con respecto a la variable $k = 1, 2$ y 3

$= \varepsilon_{311} A_1 B_1 + \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{313} A_1 B_3$

$= \varepsilon_{321} A_2 B_1 + \varepsilon_{322} A_2 B_2 + \varepsilon_{323} A_2 B_3$

$= \varepsilon_{331} A_3 B_1 + \varepsilon_{332} A_3 B_2 + \varepsilon_{333} A_3 B_3$

Basta cancelar términos iguales

$= \cancel{\varepsilon_{311} A_1 B_1} + \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \cancel{\varepsilon_{313} A_1 B_3}$

$= \varepsilon_{321} A_2 B_1 + \cancel{\varepsilon_{322} A_2 B_2} + \cancel{\varepsilon_{323} A_2 B_3}$

$= \cancel{\varepsilon_{331} A_3 B_1} + \cancel{\varepsilon_{332} A_3 B_2} + \cancel{\varepsilon_{333} A_3 B_3}$

$(\bar{A} \times \bar{B})_2 = A_1 B_2 - A_2 B_1$

5. Tarea 5

5.1 Maquina Enigma

La maquina Enigma es un aparato analógico que mediante el uso de rotores y conectores puede realizar el proceso de encriptar un texto de tal manera que este, durante la segunda guerra mundial, fuera imposible de descifrar. La forma en que funcionaba este sistema puso en jaque durante mucho tiempo al bando aliado ya que se requería conocer una cantidad enorme de permutaciones (aproximadamente 158 millones de millones de millones) de letras del alfabeto, que en esas épocas eran difíciles de procesar, por que no existían computadoras o artefactos capaces de manejar tanta información.

Por esto era poco factible que usando métodos de fuerza bruta se pudiera descifrar el texto encriptado por la maquina Enigma. El funcionamiento de la misma es similar a una maquina de escribir ordinaria, con la diferencia que al presionar una tecla esta activaba un conjunto, de tres o en algunos casos mas rotores, que mapeaban una letra a otra y esta a su vez a otra, la cual a su vez es mapeada a otra letra. Los rotores se pueden iniciar en cualquier posición que el usuario desee, junto a este sistema de rotores Enigma, tiene un tablero que mediante enchufes permite asignar dos letras de tal manera que se crea una configuración extra en los rotores, esto es si se mapeaba un letra a_1 a otra a_2, el primer rotor comenzaba mandando la primer ocurrencia de la letra a_1 directamente a a_2 del primer rotor, “inicializando” el primer rotor automáticamente, creando una nueva configuración de rotores.

Ahora cada operador de la maquina Enigma era dotado de 5 rotores distintos esto significaba que el operador podía colocar de los 5 rotores 3 en los huecos de la maquina Enigma. Esto es tenia $5 \times 4 \times 3 = 60$, formas de permutar los rotores. Después de sto se deben considerar las posiciones en que se pueden colocar los rotores considerando 26 letras del alfabeto se tenían,

$426 \times 26 \times 26 = 17,576$ formas de colocar los rotores. Aparte de estas configuraciones la maquina tenia unos anillos los cuales cambian la posición en la que el primer rotor hacia mover al segundo y análogamente un anillo que fijaba cuando se movía el tercer rotor. Las posibles combinaciones de esto son $26 \times 26 = 676$. y ?cuantas formas hay de crear parejas de dos letras en el tablero de la maquina Enigma? Estas son aproximadamente 15,000,000,000,000.

Ya que consideramos todas las permutaciones de esta maquina multiplicamos todos los resultados y obtenemos el gigantesco número del que hablamos al principio.

5.2 Permutaciones cíclicas

Un ciclo es un tipo especial de permutación que fija cierto número de elementos, posiblemente ninguno, mientras que mueve cíclicamente el resto. En caso de no fijar ningún elemento lo denominaríamos permutación cíclica.
Más concretamente, si un ciclo afecta a un elemento x cualquiera del conjunto, al aplicar dicho ciclo reiteradamente todos los elementos afectados por el reordenamiento pasarán por la posición de x en algún momento. Y de forma recíproca, el elemento x pasará por todas las posiciones de todos los elementos afectados por la permutación.
Los ciclos son tipos de permutación especialmente importantes, pues pueden usarse como piezas básicas para construir cualquier otra permutación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (146837)(2)(5)$$

5.3 Permutación con repeticion de objetos

Ya que cabe la posibilidad de que en nuestro conjunto que deseamos realizar permutaciones, existan elementos repetidos, eliminamos estas repeticiones dividiendo entre el factorial de la cantidad de cada elemento repetido, de esto obtenemos la formula:

$$\text{Permutación de } n \text{ con } k \text{ elementos repetidos } = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!\cdots(n_k)!} \text{ donde } k \leq n.$$

5.4 Medidad de dispersión central

5.4.1 Media

La media aritmética es el promedio de un conjunto de valores, o su distribución. La cual está dada por la siguiente formula:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

5.4.2 Varianza

Es una medida de dispersión im portante ya que determina que tan dispersos son ciertos datos de la media, esto es nos índica mediante un valor, cuan alejados están los datos de la media. Se calcula mediante la formula:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

5.4.3 Desviación estandar

Una medida de dispersión comúnmente usada en estadística que nos dice cuánto tienden a alejarse los valores concretos del promedio en una distribución de datos. De hecho, específicamente, el cuadrado de la desviación estándar es "el promedio del cuadrado de la distancia de cada punto respecto del promedio". Se suele representar por una S o con la letra sigma σ .La desviación estándar de un conjunto de datos es una medida de cuánto se desvían los datos de su media. Su formula es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

6. Tarea 6

6.1 Problema 2.7 Schaum

Theorem 6.1.1

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_r}$$

Proof. Para demostrar el teorema anterior usaremos inducción y el teorema del binomio comenzamos realizando inducción cuando $r = 1$, ambos lados de la igualdad son iguales a a_1^n ya que solo hay un término $n_1 = n$, ahora supongamos que la igualdad se cumple para r e intentaremos demostrar que se cumple para $r+1$.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r + a_{r+1})^n = (a_1 + a_2 + \cdots + (a_r + a_{r+1}))^n$$

$$= \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+N=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}, N} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_{r-1}} (a_r + a_{r+1})^N$$

Por la hipótesis de inducción y aplicando el teorema del binomio al ultimo termino obtenemos:

$$= \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+N=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}, N} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_{r-1}} \sum_{n_r+n_{r+1}=N} \binom{N}{n_r, n_{r+1}} a_r^{n_r} a_{r+1}^{n_{r+1}}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+n_r+n_{r+1}=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}, n_r, n_{r+1}} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_{r-1}} a_r^{n_r} a_{r+1}^{n_{r+1}}.$$

La combinación que se presenta es sencilla de inferir, basta ver su expresión como factoriales de donde obtenemos:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_{r-1}! N!} \frac{N!}{n_r! n_{r+1}!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_{r+1}!}.$$

Con esto finalizamos el proceso de inducción. ∎

6.2 Coeficiente multinomial

El coeficiente multinomial,

$$(n_1, n_2, \cdots, n_k)! = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1!, n_2!, \cdots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots n_k} \quad \text{con } n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Aparece en la expansión de la serie multinomial donde este representa el distinto número de permutaciones en un multiconjunto, con k distintos elementos de multiplicidad n_i $1 \leq i \leq k$. Un multiconjunto es un conjunto donde el orden no importa, pero las repeticiones son tomadas en cuenta por ejemplo $\{1,2,3\}$ y $\{3,1,2\}$ son el mismo conjunto, pero $\{1,2,3\}$ y $\{1,1,2,3\}$ son considerados distintos.

6.3 Explicación de la wiki

Observemos la siguente imagen:

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	**2**	3	4
1	**2**	3	4
1	2	**3**	4
1	2	3	**4**
1	**2**	3	4
1	**2**	3	4
1	**2**	3	4
1	**2**	3	4
1	2	**3**	4
1	2	**3**	4
1	2	**3**	4
1	2	**3**	4
1	2	**3**	4
1	2	3	**4**
1	2	3	**4**
1	2	3	**4**
1	2	3	**4**
1	2	3	**4**

que relación existe entre la imagen anterior y la permutación

$$_4P_3 = \frac{4!}{1!3!}$$

de una simple inspección vemos que estamos observando realizaciones de las formas en que se pueden ordenar tres elementos de un conjunto de cuatro. esto es observemos las casillas grises, es claro que existen cuatro formas de hacerlo y eso es evidente al contar las casillas grises de la tabla. Si olvidamos momentaneamente las etiquetas de cada casilla.

x	x	x	x
x	x	x	x
x	x	x	x
x	x	x	x

se observa con claridad que cada una de las casillas anteriores representa un posible movimiento del rojo en cada casilla. Y ya que no es de importancia para nosotros la etiqueta, podemos relacionar cada movimiento rojo con un movimiento sin etiqueta.

7. Tarea 7

7.1 Ley de distributividad 1

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece mantienen el mismo valor aun cuando este es modificado.

Theorem 7.1.1

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{7.1}$$

Proof. Proponemos $x \in A \cup (B \cap C)$. si $x \in A \cup (B \cap C)$ entonces x es incluso en A ó en $(B \text{ y } C)$.

$$x \in A \text{ ó } x \in (B \text{ y } C)$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\}$$
$$\{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cap C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Por lo tanto

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{7.2}$$

Proponemos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces x esta en $(A$ ó $B)$ y x esta en $(A$ ó $C)$.

$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$

$$\{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ ó } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in (B \text{ y } C)\}$$
$$x \in A \cup \{x \in (B \cap C)\}$$
$$x \in A \cup (B \cap C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \tag{7.3}$$

De la ecuación (**??**) y (7.3):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{7.4}$$

■

Ley de distributividad 2

Theorem 7.1.2 La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{7.5}$$

Proof. Proponemos $x \in A \cap (B \cup C)$. si $x \in A \cap (B \cup C)$ entonces $x \in A$ y $x \in (B \text{ ó } C)$.

$$x \in A \text{ y } x \in (B \text{ ó } C)$$
$$x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ y } x \in C\}$$
$$\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$
$$x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$$
$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \tag{7.6}$$

Proponemos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ entonces $x \in (A \cap B)$ ó $x \in (A \cap C)$.

$$x \in (A \text{ y } B) \text{ ó } x \in (A \text{ y } C)$$
$$\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ ó } x \in C\}$$

$$x \in A \text{ y } \{x \in (B \text{ ó } C)\}$$
$$x \in A \cap \{x \in (B \cup C)\}$$
$$x \in A \cup (B \cap C)$$
$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \tag{7.7}$$

De la ecuación (7.6) y (7.7):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{7.8}$$

■

7.2 Dualidad en conjuntos

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

Traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, a menudo por medio de una operación de involución, esto es: Si la dualidad de A es B, entonces de forma análoga, dualidad de B es A, cumpliéndose una relacion uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de A es a veces A (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es amplia mente usado en diversos representaciones matemáticas, tales como lógica, lógica boleana, teoría de conjuntos.

1. Unión por Intersección $\cup \to \cap$
2. Intersección por Unión $\cap \to \cup$
3. Conjunto universo por vacío $\mathrm{U} \to \oslash$
4. Conjunto vacío por universo $\oslash \to \mathrm{U}$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$

Aplicando la dualidad:

$$(\oslash \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

7.3 Criterio de divisibilidad por 11

Se dice que un número es divisible entre 11, cuando la diferencia de la suma de las cifras de posición par y la suma de las cifras de posición impar es igual a cero u once, un ejemplo sencillo de esto es:

$$121 \text{ de donde tomamos } \rightarrow 1+1 \text{ las posiciones impares y las pares } \rightarrow 2, \text{tomando su diferencia } \rightarrow 2-2=0$$

Entonces por el criterio de divisibilidad asumimos que el número es es divisible por 11.

7.4 Número de Erdös

Este es un número que pretende cuantificar el grado de separacion entre las personas que han publicado un artículo de investigación, en este caso particular el mateático Paul Erdös.

¿Cómo se calcula?

Esto es muy sencillo, se considera que Erdös tiene un número 0.

Si se ha colaborado con el, directamente en la publicacion de un artículo se tiene número de Erdös 1.

Si se ha colaborado con alguien que colabóro directamente con Erdös se tiene número 2 y así sucesivamente.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuan separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama.
Se asegura que Paul Erdös es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producción de Erdös es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos están aún por publicarse después su muerte. Erdös utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, "el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas". Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: "Habrá mucho tiempo para descansar en la tumba". Erdös viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas.
Erdös seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta años. Erdös, sin duda, tenía el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todos las especialidades.

7.5 Aproximaci/'on de Stirling

$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})$
De acuerdo a la función Gama podemos describir el factorial de cualquier número como:

$\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$ con $n \geq 0$
si integramos cuando n=10 obtenemos:

$f(x) = x^n \cdot e^{-x}$
Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando

n=0:

$f(x) = \frac{10}{e}^{10*} \cdot e^{\frac{-x^2}{20}}$
Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemo que definimos las variables de la integral como:
$u = x + n$ y $du = dx$ y sustituyendo
$I = \int_{u=-n}^{\infty} (u+n)^n \cdot e^{u+n} du$ factorizando $(u+n)^n$ la integral es:
$I = \int_{u=-n}^{\infty} (n)^n \cdot (1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du$,
tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:
$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty} (1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du \quad (1)$
Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expander el logaritmo:
$ln(1+\frac{u}{n})^n = n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \quad (2)$

$\implies \quad ln(1+\frac{u}{n} = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2})$
Finalmente sustituyendo 2 tenemos:
$n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \approx u - \frac{u^2}{2n}$

Sustituyendo en 1 tenemos:
$I_2 = (\frac{n}{e})^n \cdot \int_{u=-n}^{n} e^{\frac{u^2}{2n}} du$, notemos que regresamos a la integral Gaussiana:

$\int_{\infty}^{\infty} e^{\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n}$
Por lo tanto decimos que n tiende al infinito y el factorial de n tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

$n! \sim (\frac{n}{2})^n \cdot \sqrt{2\pi n}$

7.6 Complejidad de sistemas

Un sistema complejo, a diferencia de uno simple es visto como una entidad cuyo comportamiento global es más que la suma de las operaciones de sus partes. Usualmente se le define como una red de muchos componentes cuyo comportamiento de agregados da lugar a estructuras en varias escalas y patrones de manifestación, cuya dinámica no es posible de inferir de una descripción simplificada del sistema. El campo es altamente multidisciplinario, juntando expertos en varias ramas para su estudio que van desde economía, ciencias sociales, biología, física, meteorología, etc., Las bases teóricas de los sistemas complejos han sido enfocadas principalmente en su organización; considerándolos como el conjunto de relaciones que determinan las clases de interacciones y transformaciones dentro de un sistema y en los arreglos que contribuyen al desarrollo y persistencia de ciertas características dentro de la organización. Son las relaciones entre los componentes, más que los componentes y sus propiedades las que son más significativas, donde al dar un mayor énfasis a la estructura y relaciones en lugar de su composición es lo que hace que muchos de los diferentes tipos de sistemas puedan ser caracterizados con herramientas analíticas similares.

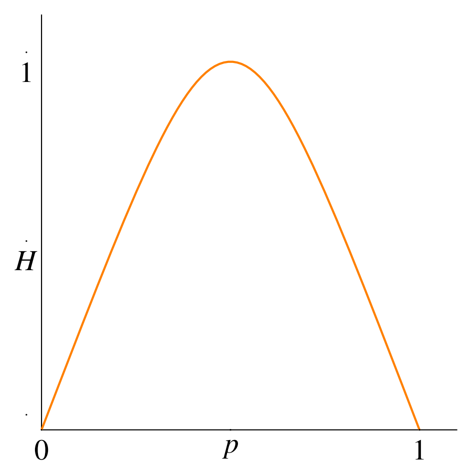
La búqueda de medidas de complejidad toca muchos temas interesantes de la teorí de sistemas dinámicos y ha dado lugar a una serie de potentes herramientas, aunque el objetivo original de desarrollar una medida que valga para medir la complejidad de cualquier sistema no parece realista y se ha eliminado de los objetivos científicos. Los sistemas dinámicos complejos muestran una gran variedad de comportamientos cualitativamente diferentes, y no parece apropiado intentar meter todos los sistemas complejos en una sola bolsa para medir su grado de complejidad siguiendo un único criterio.

La tarea de desarrollar una medida matemáticamente bien definida para la complejidad se ve obstaculizada por la falta de un objetivo claramente definido. Vamos a presentar algunos requisitos previos y algunas de las restricciones que deben postularse para obtener una medida de complejidad válida. Al final, sin embargo, es algo que depende de nuestra intuición el decidir si estos requisitos son apropiados o no para ello.

Una propuesta habitual para medir la complejidad en la información es la *entropía de Shannon:*

$$H(p) = -\sum_{x_i} p(x_i) log(p(x_i))$$

Esta concuerda con nuestra intuición de que la complejidad es baja cuando el sistema es estable, y sin embargo, es máxima para un sistema que se comporta azarósamente.



Realmente, es una cuestión de punto de vista el que se considere que los sistemas aleatorios son complejos. Para algunas consideraciones, por ejemplo, cuando se trata de la “complejidad algorítmica” tiene sentido atribuir un grado de complejidad máximo a conjuntos completamente aleatorios de objetos. En general, sin embargo, se considera que las medidas de complejidad deben ser funciones cóncavas que alcanzan sus mínimos tanto para comportamientos regulares

7.7 Leyes de Morgan

Dados dos conjuntos A y B en y el conjunto universo U , se verifica:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{7.9}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{7.10}$$

Continuamos enunciando la demostración de (7.11)

$$1(A \cup B)' = A' \cap B'$$

En efecto, sea x un elemento arbitrario del conjunto universo U . Entonces, $x \in (A \cup B)'$ si y solo si $x \notin (A \cup B)$
De lo cual sigue, usando las operaciones basicas de la lógica:
$\neg[x \in (A \cup B)]$
$\neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$ $\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$ $(x \in A') \wedge (x \in B')$ $x \in (A' \cap B')$ y al ser x un elemento arbitrario o cualquiera de U, se obtiene $\forall x[x \in (A \cup B)' \iff x \in (A' \cap B')]$ Concluimos entonces con:

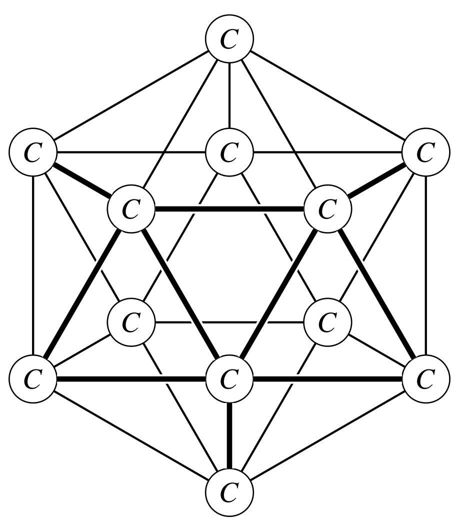
$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{7.11}$$

Analogamente se demuestra (7.10).

8. Tarea 8

8.1 Fulerenos

Un fullereno es una molécula compuesta por carbono que puede adoptar una forma geométrica que recuerda a una esfera, un elipsoide, un nanotubo o un anillo. Los fullerenos son similares al grafito, compuesto de hojas de anillos hexagonales enlazadas, pero conteniendo anillos pentagonales y a veces heptagonales, lo que impide que la hoja sea plana. Los fullerenos son la tercera forma molecular estable conocida de carbono, tras el grafito y el diamante. Para encontrar un polihedro que corresponda a un Fullereno C_n se deben usar las siguientes ecuaciones, el número de vertices es $v = n$, las aristas estan dadas por $e = \frac{3n}{2}$ y la cantidad de caras es $f = \frac{n}{2} + 2$.



8.2 Cuantificadores lógicos

Los cuantificadores lógicos son operadores que permiten aplicar una propiedad a los elementos de la clase, sobre la cual se esta tratando. Existen dos de ellos el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

8.2.1 Cuantiicador universal

En lógica, se usa el símbolo $\forall$, denominado cuantificador universal, antes de una variable $\forall x \in \mathbb{R}$ para decir que "para todo" elemento de un cierto conjunto en este caso los reales se cumple la proposición dada a continuación por ejemplo $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, $x+y \in \mathbb{R}$.

8.3 Cuantificador existencial

En la lógica matemática de primer orden, se usa el símbolo: $\exists x$, antepuesto a una variable para decir que "existe" al menos un elemento del conjunto al que hace referencia la variable, por ejemplo $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$, a este elemento se le conoce como inverso multiplicativo.

9. Tarea 9

9.1 Teorema del límite central

Comenzamos enunciando el teorema tal como se presenta comúnmente en los textos de probabilidad formal.

Theorem 9.1.1 Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con media fínita m e igualmente varianza fínita v. Definamos $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces cuando $n \to \infty$,

$$\mathscr{L}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{vn}}\right) \implies \mu_N, \tag{9.1}$$

donde $\mu_N = N(0,1)$ es la distribución normal estándar , esto es la distribución con densidad $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, donde $\mathscr{L}$ es la medida de Lebesgue.

Ya que la demostración de este teorema requiere al menos el teorema de la continuidad, asi como diversos lemas, el entender las funciones simples, la medida de Lebesgue; se va a obviar la demostración de este.
Pero esto no significa que no podamos exponer la idea importante detrás de este teorema, esto es entre mas muestras se tomen de un conjunto de variables aleatorias, si estas llegaran a un numero lo suficientemente grande, estas muestras empiezan a mostrar un comportamiento distinto al de su distribución. Ellas se empiezan a comportar de manera normal estándar.

9.2 Primos palíndromos

Los primos palíndromos, son números que son simultáneamente primos y palíndromos, esto es se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda y su único divisor son el mismo o el uno. Los primeros primos palíndromos en base 10 son: $2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, \ldots$ Estos comúnmente se encuentran enlistados en la On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, la cual se encarga de almacenar listas de enteros notables como los números vampiros los cuales son números que con una cantidad par de dígitos tienen una factorización $n = i * j$ donde la $longitud(j) = longitud(i) = longitud(n)/2$ y el multiconjunto de n coincide con el multiconjunto de los digitos de i y j.

10. Tarea 10

10.1 Problemas de inducción

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} (3i-1) = \frac{n}{2}(3n+1).$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{3n-1}{2}.$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$
7. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$
8. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1+(n-1)2^n.$
9. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$
10. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$

11. Tarea 11

11.1 Mi examen

1. Supongamos que veintiséis estudiantes desean realizar una carne asada, luego de comprar carne, aguacates, cebollas y papas, su presupuesto alcanza para comprar siete cartones de cerveza. ¿Cuantos estudiantes pueden tomar caguamas extras, esto es considere a cada estudiante como un recipiente y que al menos uno de ellos va a tener un excedente de caguamas, siempre considerando que el cartón tiene doce cervezas?
2. Una vez que se ha terminado la carne asada, los veintiséis estudiantes se deben transportar, ya que la ciudad es jodidamente insegura deciden transportarse en grupos de cuatro ¿de cuántas formas se pueden transportar seguramente por la ciudad?
3. Al siguiente día los siempre responsables alumnos tienen clase con el profesor Chuyito, y los alumnos asisten crudos a clase, el profesor que ya estaba informado de esto decide jugarles una broma y solo deja diez sillas en el aula. ¿de cuántas formas pueden sentarse los alumnos del profe Chuyito?
4. Ese mismo día el profe Chuyito aplica un examen sorpresa a sus alumnos ya que los alumnos son excesivamente responsables todos contestan su examen de probabilidad. Al siguiente dá regresa los exámenes y les indica que sus calificaciones forman un conjunto bien ordenando de 26 calificaciones, esto es no hay una calificación repetida entre diez y cero. El profe Chuyito que es bien filosófico les pregunta ¿Cuántos conjuntos de 5 personas puedo formar donde el orden en las calificaciones importa? ¿Cuántos puedo formar si el orden no me importa?
5. Uno de los problemas del examen del profe Chuyito, el cual sabia que sus alumnos son bien chingones, decía los siguiente: cuente los divisores propios de un entero N el cual tiene la siguiente factorización en primos $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}$. Esto es cuantos números aparte de 1 y N, dividen a N.
6. Mas tarde en ese mismo día en la tarde el profesor Chuyito que es muy sociable asistio a una fiesta junto con su esposa, a la cual solo asistieron unicamente n parejas. Entre todos los

asistentes se saludaroón excepto a sus respectivas parejas. ¿Cuántos saludos se realizaron? En la misma fiesta a la que asistieron muchas personas doctas en las artes matemáticas, se propusieron los siguientes problemas:

7. Demuestre: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
8. Demuestre: $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
9. Demuestre: $\sum\limits_{k\ par}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k\ impar}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.
10. Sea $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Demuestre que si S es un subconjunto de X con siete elementos, entonces existen dos elementos de S cuya suma es igual a diez.
11. Y así luego de que pasaron algunas semanas después del examen se realizo un torneo entre los n alumnos del profe Chuyito. Estos alumnos compitieron entre ellos y cada jugador gano al menos una vez. Demuestre que existen dos jugadores con la misma cantidad de juegos ganados.
12. Cuando termino el torneo los alumnos se notaron que si toman cinco puntos aleatoriamente en una cancha cuadrada con lados de dos metros, ¿Cómo pueden demostrar que la distancia entre ellos es siempre menor a $\sqrt{2}$ metros?
13. Una vez terminadas las divagaciones posttorneo los n estudiantes decidieron ir con un amigo/a a un bar donde como acababan de abrir tenían disponibles exactamente una hilera de $2n$ sillas por lo que se preguntaron de ¿cuántas formas posibles podian sentarse de manera alternada un hombre y una mujer?
14. Saliendo del bar los estudiantes se enteraron de que le habían robado su carro al profesor Chuyito y para ayudarlo en su exhaustiva búsqueda de su carro calcularon, ya que el profesor Chuyito solo recordaba unas cuantas cosas sobre las placas de su carro, estas tenían 3 letras y tres números de tal manera que no contienen ninguna letra ni numero dos veces. ¿cuántas placas como esas existen?
15. Una vez que el profe Chuyito recordó que en realidad solo había olvidado su carro ya que andaba de peda, una vez que llego a impartir clase les pidió a los alumnos que le recordaran ¿cuál es la formula de las r permutaciones circulares rotando n elementos de estas?
16. Como el profe andaba todavía muy crudo decidió dejarles un problema, en lo que el iba por jugito de naranja, el problema decía lo siguiente: en una carrera entre seis competidores de ¿cuántas maneras se pueden otorgar las tres medallas si se permiten los empates?
17. Ya mas aliviado de la cruda el profe Chuyito les dijo a sus alumnos demuestren la identidad de Pascal: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
    después de eso el profe Chuy que se puso un poco mas serio quería que le contestaran:
18. ¿Cuál es el coeficiente de x^7 en $(1+x)^{11}$?
19. ¿Cuál es el coeficiente de x^9 en $(2-x)^{19}$?
20. En eso llego a interrumpir Cthulhu "señor del caos y la destrucción" y dijo demuestren (identidad del hexagóno):

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

21. **pregunta extra por +1:** ¿Quién escribio "The Call of Cthulhu"?

11.2 Mis respuestas

1. 26 alumnos $7\times 12 = 84$ caguamas. Aplicamos la formula para m pichones y n pichoneras. $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor = p$ aplicando la formula $\lfloor \frac{83}{26} \rfloor = 3$, como al menos un alumno tiene $p+1$ caguamas entonces, a un suertudo le tocaran 4 birrias.
2. $\binom{26}{4} = \frac{26!}{4!(26-4)!} = \frac{26!}{4!22!} = \frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13\cdot 25\cdot 2\cdot 23 = 14,950.$
3. $\binom{26}{10} = \frac{26!}{10!(26-10)!} = \frac{26!}{10!16!} = 5,311,735.$
4. (a) ${}_{26}P_5 = 7,893,600.$
   (b) $\binom{26}{5} = 65,780.$
5. Como cada primo p_j que compone el número N puede estar a lo mucho $0\leq n\leq j$ veces y como consideramos que el 1 ni el número N no estan entre los divisores, entonces N esta dado de la siguiente forma:

$$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)-2.$$

6. Se calcula la cantidad de parejas que se forman entre todas la $2n$ personas: $\binom{2n}{2} = \frac{2n!}{2!(2n-2)!} = n(2n-1)$, pero hay n saludos demás ya que entre las parejas no se saludan entonces $n(2n-1)-n = 2n(n-1)$.
7. Por el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

Cuando $x=y=1$,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

8. Del teorema del binomio, cuando $x=-1$, $y=1$

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

9. (a) Cuando k es par:

$$2^n+0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2,$$

esto implica que:

$$2^n 2^{-1} = 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

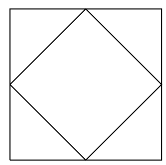
(b) Cuando k es impar:

$$2^n-0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-(-1)^k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2,$$

esto implica que:

$$2^n 2^{-1} = 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

10. Los conjuntos con dos elementos cuya suma es cinco son: $\{0,10\},\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\},\{5\} = \{5,5\}$. Ahora, ya que tenemos únicamente sies conjuntos de dos elementos que suman diez, entonces por el principio del pichonero todo subconjunto con siete elementos tiene un elemento extra en cualquiera de los subconjuntos anteiores.
11. Ya que los jugadores no pueden competir con ellos mismos y como mínimo han ganado un juego entonces el máximo posible de guejos ganados es $n-1$, aplicando el principio del pichonero hay $n-1$ lugares en donde acomodar n jugadores, entonces existe un jugador con al menos dos juegos ganados.
12. Se construye el siguiente cuadrado: El cuadrado incrito cumple que sus lados miden $\sqrt{2}$ y ya



que los 5 puntos estan ya sea fuera del cuadro inscrito, pero dentro del cuadrado externo, o totalmente dentro del cuadrado inscrito entonces ninguna de sus istancias es mayor a $\sqrt{2}$.
13. Ya que buscamos todas las posibles formas de acomodar las parejas, se usa el principio multiplicativo, ya auqe hay $2m$ personas y cada una de ellas puede permutar de $n!$ formas una vez que se fija cualquier persona entonces existen $2\cdot n!\cdot n! = 2(n!)^2$ formas de acomodar las parejas.
14. Veintiséis letras del alfabeto latino y diez digitos, entonces por el principio multiplicativo: $26\cdot 25\cdot 24\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = 11,236,000$.
15. La formula cuando se rota un subconjunto de r elementos dentro de otro con n elementos con $r \leq n$ es:

$$\left(\frac{1}{r}\right) {}_nP_r = \left(\frac{1}{r}\right)\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

16. (a) Si hay ganadores únicos de las medallas de oro y plata entonces podemos elegirlos de $6\cdot 5 = 30$ maneras. Cualquier otro conjunto no vacío de corredores puede obtener el bronce, por lo tanto tenemos $2^4-1 = 15$ ganadores del bronce, por lo anterior $30\cdot 15 = 450$ formas de que esto ocurra.
    (b) Si hay empate entre dos primeros lugares entonces existen $\binom{6}{2}$ maneras de elegirlos oros. Ahora para cualquier subconjunto no vacío de de los restantes cuatro corredores puede ganar el bronce por lo tanto hay $2^4-1 = 15$ formas de elegir los restantes lugares, por el principio multiplicativo $15\cdot 15 = 225$.
    (c) Si existen k-empates por el oro, con $k\ geq 3$ entonces existen $\binom{6}{k}$ formas de escoger ganadores de oro. por lo tanto $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6} = 20+15+6+1 = 42$.
    (d) Este cas es cuando existe un solo oro y un k-empate por el segundo lugar con $k\ geq 2$, el oro puede otorgarse de 6 maneras y las platas en $2^5-\binom{5}{1}-\binom{5}{0} = 32-5-1 = 26$ de esto $6\cdot 26 = 156$. Usando la información de cada caso $450+225+42+156 = 873$.

17.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n!k!(n-k)! \; + \; n!(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n!k(k-1)!(n-k)! \; + \; n!(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n!\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k)!}[k \; + \; n-k+1]}{k!\cancel{(n-k)!}\cancel{(k-1)!}((n+1)-k)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{(n+1)n!}{k!((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

18.

$$(1+x)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} x^{11-i} y^i \quad \Longrightarrow \quad \binom{11}{4}.$$

Es el coeficiente del termino que tiene x^7.

19.

$$(2-x)^{19} = \sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i} (-x)^{19-i} y^i \quad \Longrightarrow \quad \binom{19}{10}.$$

Es el coeficiente del termino que tiene x^9.

20.

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!n!(n-1)!}{(k+1)!k!(k-1)!(n-1-k+1)!(n-k-1)!(n+1-k)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{(n+1)!n!(n-1)!}{(k+1)!k!(k-1)!(n-k)!(n-k-1)!(n+1-k)!} = A$$
$$\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!n!(n-1)!}{(k+1)!k!(k-1)!(n-1-k+1)!(n-k-1)!(n+1-k)!} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{(n+1)!n!(n-1)!}{(k+1)!k!(k-1)!(n-k)!(n-k-1)!(n+1-k)!} = B$$

Ya que A y B son iguales la identidad del hexagóno es verdadera.

11.3 Examen que resolví

1.-Demostrar el siguiente Teorema de orden sin remplazamiento (Permutación):

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} 0 \leq k \leq n \tag{11.1}$$

2.- Demuestre el teorema Binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n} (a)^k (b)^{n-k} \tag{11.2}$$

y desarrolle la expresión:

$$(a+b)^7 \tag{11.3}$$

3.- El Licenciado ?Memo? realizará un proyecto de Chat y pretende crear un sistema de login para asignar un nombre de usuario en un Chat, el nombre de usuario debe de ser único para cada miembro del chat. La cadena de usuario consta de 4 letras y 2 números específicamente en ese orden. De cuantas maneras se pueden formar las cadenas de usuarios dado que no se puedan repetir las letras y los dígitos, tomando en cuenta que el Licenciado es muy egocéntrico quiere que todas las cadenas de usuario empiecen con la inicial de su nombre: Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el rango es de 0-9 Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z.

4.- Siguiendo las mismas reglas que el problema 3. También el Licenciado sufrió un trauma con los números impares, desarrolle la cantidad nombres de usuario que sólo acepte números pares.

5. Cuantas distintas permutaciones de cada palabra se forman en total a partir del palíndromo ?Son esos ojos océanos?

6.- Habrá una reunión con mesas circulares y butacas en fila; cada fila o mesa tiene 5 asientos, un grupo de compañeros asistieron juntos: Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina, pero como Regina y Lorenzo son novios quieren saber si es mejor sentarse en grupo en las mesas circulares o butacas de tal forma que siempre estén juntos. ¿Cuál es la mejor opción y Por qué? Demuestre las probabilidades.

7.-Simplifique la siguiente función

$$\frac{(n+2)!}{n!} \tag{11.4}$$

8.- Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \tag{11.5}$$

9.- En una clase de 25 Alumnos se requiere elegir un comité formado por un Presidente, un Secretario, Vocal y un Escrutador ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

10.-Debido a una campaña escolar se busca tener tratos igualitarios y se le exige al profesor obtener las diferentes maneras de escoger un comité compuesto por 2 mujeres y 2 hombres. En el grupo del problema número 9, existen 15 hombres y 10 mujeres.

11.- En una biblioteca se encuentran 7 libros diferentes de probabilidad ¿De cuantas formas se pueden elegir 5 libros?

12.- ¿De cuántas formas se pueden agrupar los números 0, 2, 4, 6, 8 cada agrupación por 2 y 4 elementos sin repetirse? Escriba las parejas de combinaciones para 2 elementos y para 4 elementos.

13.-Desarrolle el siguiente binomio:

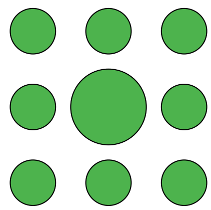
$$(a+2b)^5 \tag{11.6}$$

14.- En una carrera de 200 metros planos se encuentran 4 mexicanos, 3 haitiano 2 ingleses, 2 jamaiquinos y 1 estadounidense. ¿Cuántos distintos pódiums se pueden dar al finalizar la carrera, tomando en cuenta como premios Oro, Plata y Bronce?

15.- En la cafetería de ESCOM se ofrece el siguiente menú para los trabajadores y estudiantes: a) Sopa b) Arroz, Espagueti c) Filete de pescado, pizza, enchiladas de mole. d) Flan ¿Cuantas combinaciones es posible tener, Grafique el diagrama de árbol?

16.- $A = \{a, b, c, d, e\}$ Dado el conjunto de cuantas formas se pueden elegir 3 elementos:

17.- De cuantas maneras se pueden ubicar las cifras del 1 al 9 en el siguiente diagrama:



18.- Si una prueba de selección múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales sólo 1 es correcta.

a) ¿En cuántas formas diferentes puede un estudiante escoger una respuesta para cada preguntar?

b) ¿En cuántas formas puede un estudiante escoger una alternativa para cada pregunta y tener todas las respuestas incorrectas?

19.- Un alumno decide presentar 3 de las 5 evaluaciones (Ingles (I), Certificación(C), Probabilidad (P), Teoría de la Computación (T), Algoritmos(A), Matemáticas (M) y Seminario(S)) que tiene pendiente. ¿De cuantas maneras diferentes puede elegir esas evaluaciones?

20.- En una universidad egresaron 8 estudiantes y 3 empresas ofrece 1 contrato a firmar, determine las formas en que pueden firmar contrato los egresados.

11.4 Respuestas

1.-

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

Obtenida dicha expresión,ésta se multiplica por
$\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n\cancel{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)*(n-r)!}}{(n-r)!}$$

Por tanto se obtiene:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2.-Dado

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n}(a)^k(b)^{n-k}$$

Desarrollando se tiene:

$$(a+b)^n = (a)^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1*2}a^{n-2}b^1 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

Por otro lado resolviendo:

$$(a+b)^7 = (a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7)$$

3.- Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el rango es de 0-9
Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z.
Se tiene que:$1x26x25x24x10x9 = 1,404,000$ cadenas de usuario
También se tiene que:

$$1x\frac{26!}{(26-3)!}x\frac{10!}{(10-2)!} = 1,404,000 cadenasdeusuario$$

4.- Se tiene que:$1x26x25x24x5x4 = 312,000 cadenasdeusuario$
También se tiene que:

$$1x\frac{26!}{(26-3)!}x\frac{5!}{(5-2)!} = 312,000 cadenasdeusuario$$

5.-
1) $3! = 6$; Existen 3 letras en total que no se repiten.
2) $\frac{4!}{2!} = 12$; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 's'.
3) $\frac{4!}{2!} = 12$; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 'o'.
4) $\frac{7!}{2!} = 2520$; Existen 7 letras pero 2 repetidas que es 'o'.

6.-Se determinan los casos posibles para las butacas en fila se tiene:

$$P(n) = n! = 5! = 120 \text{ casos posibles.}$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto { Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina} Por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$P(cn) = n! = 4! = 24 \text{ casos favorables.}$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad}= \frac{Casosfavorables}{Casosposibles} = \frac{24}{120} = .20$$

Probabilidad = .20 = 20 % de probabilidad
Se determinan los casos posibles para las mesas circulares:

$$PCn = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 24casosposibles$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$PCn = (n-1)! = (4-1)! = 3! = 6casosfavorables$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad}= \frac{Casosfavorables}{Casosposibles} = \frac{6}{24} = .25$$

Probabilidad = .25 = 25 % de probabilidad
Conclusión:
(P(Butacas)=.20)-Es menos que-(P(Mesas Circulares)=.25) Comparando las probabilidades, se tiene que en es mejor opción sentarse en mesas circulares.

7. primeramente se tiene:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n+1)(n+2)...}{n(n-1)(n-2)...}$$

eliminando terminos de tiene:

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{n(n+1)(n+2)...}}{\cancel{n(n-1)(n-2)...}} = (n+2)(n+1)$$

Resolviendo la ecucación

$$(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

8. Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Para obtener el mismo denominador se tiene:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{r*n!}{r*(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)*n!}{r!(n-r+1)*(n-r)!}$$

$$=\frac{r*n!}{r!*(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!}$$

$$=\frac{r*n!+(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!}=\frac{[r+(n-r+1)]*n!}{r!*(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)*n!}{r!*(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!*(n-r+1)!}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$

9.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(25,4)=\frac{25!}{4!(25-4)!}=\frac{25!}{4!21!}=\frac{25*24*23*22}{4*3*2*1}=12,650 \text{ grupos}$$

10.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Esto para cada conjunto de género de alumnos:

$$C(h,r)*C(m,r)=C(15,2)*C(10,2)=\frac{15!}{2!(15-2)!}*\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{15!}{2!13!}*\frac{10!}{2!8!}=4,725 \text{ grupos}$$

11.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(7,5)=\frac{7!}{5!(7-5)!}=21 \text{ formas de escoger}$$

12.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Sustituyendo para 2 elementos se tiene:

$$C(5,2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

Sustituyendo para 4 elementos se tiene:

$$C(5,4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$

Finalmente

$$C(5,2) * C(5,4) = 10 * 5 = 50 \text{ agrupaciones}$$

13.- Desarrollando se tiene:

$$(a+2b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4 2b + \binom{5}{2}a^3(2b)^2 + \binom{5}{3}a^2(2b)^3 + \binom{5}{4}a(2b)^4 + \binom{5}{5}(2b)^5$$

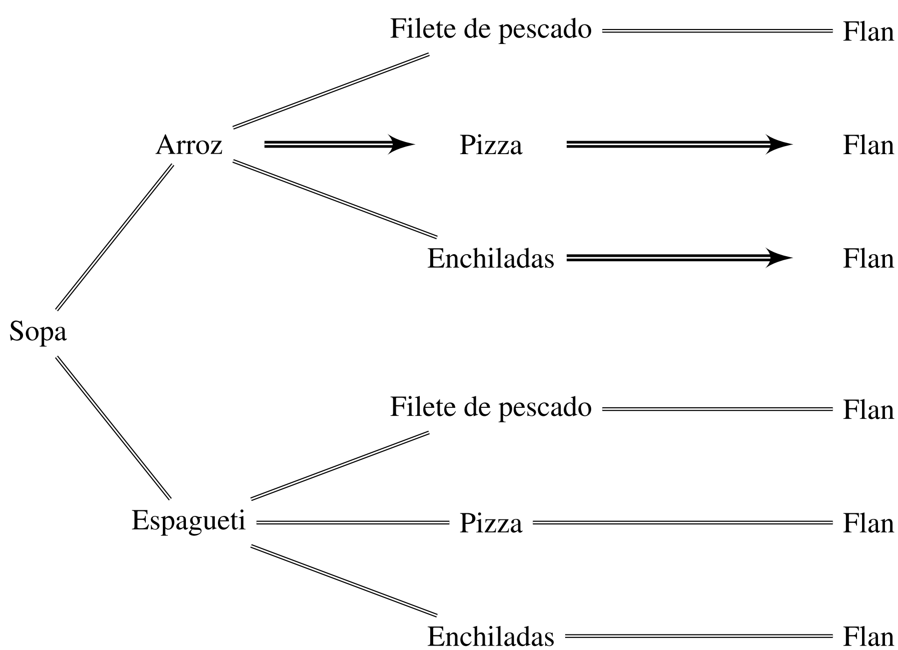
Como el segundo término de la suma contiene un coeficiente igual a 2, entonces primero se eleva ese término (2b) y después se multiplica por el coeficiente de la función del binomio:

$$(a+2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32^5$$

14.- Primero se cuentan los corredores:
$4+3+2+2+1 = 12$ Y como el pódium tiene 3 ganadores (Oro, Plata y Bronce), por tanto se tiene:

$$P(12,3) = \frac{12!}{(12-3)! = \frac{12!}{9!} = 12*11*10} = 1,320 \text{ distintos podiums}$$

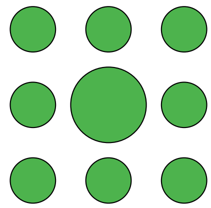
15.-Gráficando el diagrama de árbol se tiene:



16.-Desarrollando las operaciones se tienen:

$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ $C(5,3) = C_5^3 = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35$ formas de elegir

17.- Observemos el siguiente diagrama



Dado que es un diagrama circular:

$$Pcn(n-1)! = (8-1)! = 7! = 5,040 \text{ casos}$$

Ahora dado que en el círculo central (CC) se pueden colocar los 9 dígitos se tiene:

$$Pcn * circulocentral = 7! * 9 = 5,040 * 9 = 45,360 \text{ casos}$$

18.- Para a) Dado que son 5 preguntas, se realizan las posibles respuestas para cada pregunta:

$$nPr = 4*4*4*4*4 = 1024 onPr = 4^5 = 1024 \text{ posibles respuestas}$$

Para b) Se elimina la respuesta correcta y sólo queda 3 posibles respuestas incorrectas para cada pregunta:

$$nPr = 3*3*3*3*3 = 3^5 onPr = 3^5 = 243 \text{ posibles respuestas incorrectas}$$

19.-
n=5 Número de evaluaciones a escoger r= 3Número de evaluaciones a combinar

$$C(n,r) = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 \text{ maneras diferentes}$$

20.- Dado que se requiere un estudiante en cada empresa

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \; P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!=336} \text{ formas de firmar contratos}$$

11.5 Examen que revisé

Combinatoria

Nombre:Miguel de Jesús Martínez Felipe

Instrucciones: Resuelva cada ejercicio/pregunta según lo que se pide.

1. Sea n y r dos números enteros positivos tal que $r < n$, demuestre que:
   ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$
   Sea:
   ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ con $r < n$

   y se sabe que:
   $$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$
   entonces
   $$ {}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1} $$
   $$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\left(\cancel{\frac{(n-r)(n-r-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}}\right) $$
   $$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) $$

2. Demuestre que:
   $$ \binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} $$
   $$ \binom{k+1}{r} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!\frac{(k-r+1)!}{k-r+1}} $$
   $$ \binom{k+1}{r} = \frac{rk!}{r!(k-r+1)!} + \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!} $$
   $$ \binom{k+1}{r} = \frac{k!(r+(k-r+1))}{r!(k-r+1)!} = \frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!} $$
   $$ \binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!} $$

3. Demuestre que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!} + \frac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{kn!}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!(k+(n-k))}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. ¿ Cuántas señales diferentes, cada una consiste de 8 banderas, se pueden formar de un grupo de 4 banderas indistinguibles rojas, 3 banderas indistinguibles blancas y una bandera azul?
   Sea:

$$_nP_r = \frac{8!}{4!3!1!} = \frac{8*7*\cancel{6}*5}{\cancel{(6)(1)}} = 280-$$

   señales diferentes
5. Un código de seguridad consiste de dos letras del alfabeto (considere el alfabeto de 26 letras), y 4 números (0-9). Si se sabe que el código empieza por una letra y termina con otra letra, encentre el número total de códigos posibles si a) se sabe que ningún carácter puede ser repetido, b)si se permite la repetición de símbolos.
   Se tiene dos letras del alfabeto (26 símbolos) y 4 números (10 símbolos).

   a)
$$R = (26)(25)(10)(9)(8)(7) = 3,276,000 - decodigos$$

   b)
$$R = (26)(26)(10)(10)(10)(10) = 6,760,000 - decodigos$$

6. Un estudiante del CIC esta por hacer un examen de probabilidad que consta de 21 preguntas, de las cuales solo tiene que resolver 20 (todas las preguntas tiene el mismo peso en puntaje). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas a resolver?

   Se puede resolver de $\binom{21}{20} = \dfrac{21!}{20!(21-20)!} = \frac{21!}{20!} = \frac{21*\cancel{20!}}{\cancel{20!}} = 21$ maneras.

7. Si en el examen anterior un alumno copió las respuestas de las preguntas (1,3,8,13 y 21). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas que le restan?

   Sea:
   $p = 5$ preguntas resueltas.

$n = 21 - 5 = 16$ Preguntas restantes
$r = 20 - 5 = 15$ Preguntas a elegir.

$$\binom{16}{15} = \frac{16!}{15!(16-15)!} = \frac{16!}{15!} = \frac{16 * \cancel{15!}}{\cancel{15!}} = 16 - formasdeelegirlapregunta$$

8. Un viernes cualquier en un seminario de innovación, después de una sesión aburrida, 8 alumnos deciden intercambiar lugares cada 10 minutos, para hacer más ameno el rato, ¿Cuánto tiempo tomará para que los estudiantes intercambien lugares de todas las formas posibles?

   Permutación: $P = n! = 8!$
   entonces

   $8! * 10min * \frac{1hrs}{60min} * \frac{1dia}{24hrs} = \frac{40,320x10}{60x24} = \frac{403,200}{60x24} = 280-$días

9. Después del seminario tedioso, los 8 jóvenes deciden ir a comer, al llegar a un puesto de tacos concurrido, notan que hay 5 sillas y de inmediato deciden que dos de esas sillas será para las únicas dos mujeres que integran en grupo. ¿De cuantas maneras se pueden sentar los hombres en las sillas restantes si no tomamos en cuenta el orden en que se sienten?

   Sea $C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, entonces $C\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(3!)} = 20 - formas$

10. En una entrevista de trabajo donde participan cinco candidatos, estos son invitados a sentarse al rededor de una mesa circular, ¿de cuantas maneras se pueden sentar estos candidatos?

    Dado que es una permutación circular se tiene:
    $Pcr = (n-1)! = (5-1)! = (4)! = 24$ maneras .

11. ¿De cuantas maneras se pueden reordenar las letras de la palabra Eichhörnchen (ardilla en alemán)? considere solo aquellas combinaciones diferentes.
    La palabra "Eichhörnchen", cuenta con un total de 12 letras, de hay letras repetidas (e-2,c-2,n-2,h-3), entonces:
    $$P = \frac{12!}{2!2!2!3!} = 9,979,200$$

12. Claude Shannon perdió su código de seguridad para ingresas a su correo electrónico, sabe que su pass contiene 8 caracteres, además recuerda los primeros cuatro caracteres, y también que contiene almeno un número en las posiciones desconocidas, pero no recuerda cual, si los caracteres que restan pueden ser un número del 0 al 9 ó una letra de las 26 existes. Determine la cantidad de códigos que se pueden formar a)con repetición caracteres y b) sin repetición de caracteres.
    $n = 36$
    a) $P = (36)(36)(36)(10) = 466,560 - cantidaddecodigos$
    b)$P = (36)(35)(34)(10) = 428,400 - cantidaddecoigos$

13. Expanda $(x+y)^5$ haciendo uso del teorema del binomio.

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

14. El laboratorio de neumática cuenta con 5 plc's y 10 actuadores y 15 compuertas, ¿de cuantas maneras un estudiante puede seleccionar 1 plc, 3 actuadores?
En este ejercicio no importa el orden, por lo que se utiliza la ecuación de combinación y el principio multiplicativo

$$Plc = C\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 - formas$$

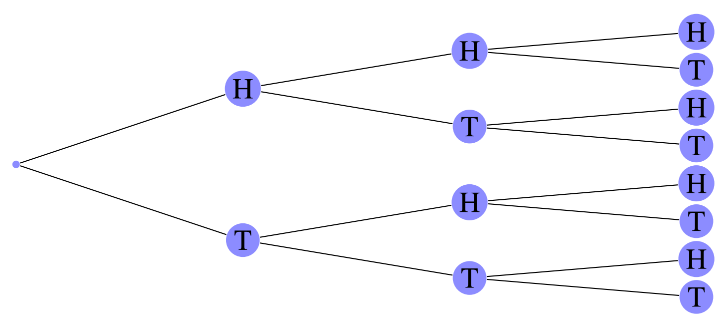
$$Pla = C\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 - formas$$

Entonces:$5 * 120 = 600 combincaciones$

15. El profesor de probabilidad despues de aplicar ocho exámenes los arroja sobre escritorio, de los cuales 5 de ellos quedan sobre el escritorio, si el profesor decide exentar a los examines que cayeron sobre el escritorio, ¿de cuantas maneras se seleccionarían los alumnos afortunados?
Los casos posibles son 8 mientras que los favorables 5 y el orden de los elementos no importa, estocen:

$$C\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(3!)} = 56$$

16. Un conductor infractor hace un trato con un policía, el conductor dice "si tiro una moneda 3 veces y cae cruz(T), cara(H), cara(H), me dejas libre, en caso contrario la multa es doble", el policía acepta gustoso. Muestre el experimento gráficamente por medio de un diagrama de árbol y remarque la ruta que muestre al conductor como vencedor. Considere a) que el orden importa, b) que el orden no importa.
El diagrama de árbol se representa a continuación.



a) Si el orden importa se toma la rama T, H, H

b) Si el orden no importase toman las ramas T, H, H, H, H, T y H, T, H

17. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?
Las permutaciones se dan por $P = 5! \cdot 4! = 2880$ maneras.

18. Se quiere construir un equipo de 2 matemáticos y 3 físicos, aparir de una candidaturas de 5 matemáticos y 7 físicos. ¿De cuantas formas podrá hacerse el equipo?
    Se puede formar un equipo de $T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350$ formas diferentes
19. Del problema anterior, De el número de formas para hacer el equipo si hay un físico en particular que debe estar en el equipo.
    Considerando que hay un físico que debe estar en el equipo, entonces hay:
    $T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$ formas diferentes.
20. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?
    Dado que no cuenta el origen y destino se tiene:
    $B = 25 \cdot 24 = 600$ billetes.

12. Tarea 12

12.1 Teorema de Bayes

12.1.1 Thomas Bayes

Thomas Bayes, matemático, nació en Londres, Inglaterra en 1702 y murió en Tunbridge Wells, Kent, Inglaterra el 17 de Abril de 1761. Su padre Joshua Bayes, fue uno de los seis primeros ministros no conformistas (presbiterianos) que fueron ordenados en Inglaterra. Su familia se trasladó a Londres cuando su padre Joshua fue nombrado asistente en St Thomas. Fue el mayor de 7 hermanos. Posiblemente De Moivre, autor del afamado libro La doctrina de las probabilidades, fue su maestro particular, pues se sabe que por ese entonces ejercía como profesor en Londres. En 1719, se matriculó en la universidad Edinburgo donde estudió lógica y teología. En Oxford o Cambridge no se permitían alumnos conformistas. Bayes fue ordenado, al igual que su padre, como ministro disidente, y en 1731 se convirtió en reverendo de la iglesia presbiteriana en Tunbridge Wells; aparentemente trató de retirarse en 1749, pero continuó ejerciendo hasta 1752, y permaneció en ese lugar hasta su muerte.

Estudió el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. El teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Más específicamente, con su teorema se resuelve el problema conocido como "de la probabilidad inversa". Esto es, valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Se trata de probabilidad "inversa" en el sentido de que la "directa" sería la probabilidad de observar algo supuesto que rigen ciertas condiciones. Los defensores de la inferencia bayesiana (basada en dicho teorema) afirman que la trascendencia de la probabilidad inversa reside en que es ella la que realmente interesa a la ciencia, dado que procura sacar conclusiones generales (enunciar leyes) a partir de lo objetivamente observado, y no viceversa.

Los restos de Bayes descansan en el cementerio londinense de Bunhill Fields. La traducción de la inscripción en su tumba es "Reverendo Thomas Bayes. Hijo de los conocidos Joshua y Ann Bayes.

7 de abril de 1761. En reconocimiento al importante trabajo que realizó Thomas Bayes en materia de probabilidades", su tumba fue restaurada en 1969 con donativos realizados por estadísticos de todo el mundo.
Miembro de la Royal Society desde 1742, Bayes fue uno de los primeros en utilizar la probabilidad inductivamente y establecer una base matemática para la inferencia probabilística.
Actualmente, con base en su obra, se ha ha desarrollado una poderosa teoría que ha conseguido notables aplicaciones en las más diversas áreas del conocimiento. Especial connotación han tenido los sistemas para detección de spam en el ambiente de Internet. En el campo sanitario, el enfoque de la inferencia bayesiana experimenta un desarrollo sostenido, especialmente en lo que concierne al análisis de ensayos clínicos, donde dicho enfoque ha venido interesando de manera creciente a las agencias reguladoras de los medicamentos, tales como la norteamericana FDA (Food and Drug Agency).
Se sabe que Thomas Bayes nació en Londres, Inglaterra, en 1702, pero no se ha encontrado registro de la fecha exacta de su nacimiento. Su padre fue uno de los primeros seis ministros presbiterianos que fueron ordenados en Inglaterra.
La educación de Thomas fue privada, un hecho que se antoja necesario para el hijo de un ministro presbiteriano de aquellos tiempos. Parece ser que de Moivre fue su maestro particular, pues se sabe que por ese entonces ejercía como profesor en Londres.
Bayes fue ordenado ministro presbiteriano y asistió a su padre en Holborn. Al final de la década iniciada en 1720 fue nombrado pastor en Turnbridge Wells (Kent, Inglaterra). Aunque trato de retirarse de su puesto eclesiástico en 1749, permanecio en el hasta 1752; una vez retirado siguió viviendo en Turnbridge Wells hasta el día de su muerte, el 17 de abril de 1761. Sus restos descansan en el cementerio londinense de Bunhill Fields. La traducción de la inscripción en su tumba puede leerse como sigue: reverendo Thomas Bayes. Hijo de los conocidos Joshua y Ann Bayes. 7 de abril de 1761. En reconocimiento al importante trabajo que realizo Thomas Bayes en probabilidad. Su tumba fue restaurada en 1969 con donativos de estadísticos de alrededor de todo el mundo.
Teólogo, matemático y miembro de la Royal Society desde 1742, Bayes fue el primero en utilizar la probabilidad inductivamente y establecer una base matemática para la inferencia probabilística (la manera de calcular, a partir de la frecuencia con la que un acontecimiento ocurrió, la probabilidad de que ocurrirá en el futuro). Los únicos trabajos que se sabe que Thomas Bayes publico en vida son:

- Divine Providence and Government Is the Happiness of His Creatures (1731).
- An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of The Analyst (1736).
- Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances.

Los cuales fueron blanco de críticas por parte del obispo Berkeley, quien sustentaba sus ideas en los fundamentos lógicos del cálculo de Newton.
En 1763 se publicó póstumamente el tercer artículo de la lista, donde el reverendo Bayes abordó el problema de las causas a través de los efectos observados, y donde se enuncia el teorema que lleva su nombre. Este trabajo fue entregado a la Royal Society por Richard Price y resulta ser la base para la técnica estadística conocida como estadística bayesiana, que se utiliza para calcular la probabilidad de la validez de una proposición tomando como bases la estimación de la probabilidad previa y las evidencias relevantes mas recientes. Las desventajas de este método señaladas por estadísticos posteriores a Bayes incluyen las diferentes maneras de asignar las distribuciones de parámetros previas y la posible sensibilidad en las conclusiones según se escojan las distribuciones.

El teorema de Bayes es válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y el hecho de permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia empírica es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Una aplicación de esto son los clasificadores bayesianos que son frecuentemente usados en implementaciones de filtros de correo basura o spam, que se adaptan con el uso. Otra aplicación se encuentra en la fusión de datos, combinando información expresada en términos de densidad de probabilidad proveniente de distintos sensores.

12.1.2 Teorema de la probabilidad total

Theorem 12.1.1 Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición sobre el espacio muestral y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

12.1.3 Formula relacionada con el teorema de Bayes

Theorem 12.1.2 Sean A y B dos eventos, con $P(B) \neq 0$, entonces

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{12.1}$$

12.1.4 Formula generalizada del teorema de Bayes

Theorem 12.1.3 Sean $\{A_i\}$ particiones del espacio de eventonces, entonces tenemos:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Proof. Por definición de probabilidad condicionada

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) = P(B)P(A_i|B)$$

despejando $P(A_i|B)$, se tiene:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

del teorema de la probabilidad total se sigue que la probabilidad de $P(B)$ es

$$P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

■

12.1.5 Algunos problemas de aplicación del teorema de Bayes

Ejemplo 1

En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

1. Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.
2. Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

Solución

Se definen los sucesos:
Suceso H: seleccionar una niña.
Suceso V: seleccionar un niño.
Suceso M: infante menor de 24 meses.
En los ejercicios de probabilidad total y teorema de bayes, es importante identificar los sucesos que forman la población y cuál es la característica que tienen en común dichos sucesos. Estos serán los sucesos condicionados.

1. En este caso, la población es de los infantes. Y la característica en común es que sean menores de 24 meses. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$$P(M) = P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(M|V) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35 = 0.26$$

2. Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña una infante menor de 24 meses será:

$$P(H|M) = \frac{P(H) \cdot P(M|H)}{P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(V|H)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35} = \frac{0.12}{0.26} = 0.46$$

Ejemplo 2

Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de genero masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

1. Determine la probabilidad de que sea de género masculino
2. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

Se definen los sucesos:
Suceso F: pacientes que se realizan cirugías faciales
Suceso M: pacientes que se realizan implantes mamarios
Suceso O: pacientes que se realizan otras cirugías correctivas
Suceso H: pacientes de género masculino
1. La probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes. Dicho valor será:
Solución:

$$P(H) = P(F)\cdot P(H|F) + P(M)\cdot P(H|M) + P(O)\cdot P(H|O) = 0.2\cdot 0.25 + 0.35\cdot 0.15 + 0.45\cdot 0.40 \approx 0.28$$

2. Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de bayes, luego, el valor de la probabilidad será:

$$\begin{aligned} P(M|H) &= \frac{P(M)\cdot P(H|M)}{P(M)\cdot P(H|M) + P(F)\cdot P(H|F) + P(O)\cdot P(H|O)} = \cdots \\ \cdots &= \frac{0.35\cdot 0.15}{0.2\cdot 0.25 + 0.35\cdot 0.15 + 0.45\cdot 0.40} = \frac{0.0525}{0.2825} \approx 0.19 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.
Solución:
Se definen los sucesos:
Suceso P: seleccionar el primer aparato
Suceso S: seleccionar el segundo aparato
Suceso T: seleccionar el tercer aparato
Suceso E: seleccionar un resultado con error
Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos

produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
P(P|E) &= \frac{P(P)\cdot P(E|P)}{P(P)\cdot P(E|P)+P(S)\cdot P(E|S)+P(T)\cdot P(E|T)} = \cdots \\
&= \frac{0.25\cdot 0.01}{0.25\cdot 0.01+0.35\cdot 0.02+0.4\cdot 0.03} = \frac{0.0025}{0.0215} = .116 \approx 0.12
\end{aligned}
$$

12.1.6 Problemas por resolver

Ejercicio 1
En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

1. por alguna de las dos instalaciones,
2. solamente por una de las dos.

Ejercicio 2
Hay una epidemia de gripe. Un síntoma muy común es el dolor de cabeza, pero este síntoma también se presenta en personas que tienen un catarro común y en personas que no tienen ningún trastorno serio. La probabilidad de tener dolor de cabeza, padeciendo gripe, catarro y no teniendo nada serio es 0.99, 0.5 y 0.004 respectivamente. Por otra parte, se sabe que el 10% de la población tiene gripe, el 15% catarro y el resto nada serio. Se desea saber:

1. Elegida al azar una persona, ¿qué probabilidad hay de que tenga dolor de cabeza?
2. Se sabe que una determinada persona tiene dolor de cabeza, ¿cuál es la probabilidad de que tenga gripe?

Ejercicio 3
En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

1. por alguna de las dos instalaciones,
2. solamente por una de las dos.

Ejercicio 4
Un moderno edificio tiene dos ascensores para uso de los vecinos. El primero de los ascensores es usado el 45% de las ocasiones, mientras que el segundo es usado el resto de las ocasiones. El uso continuado de los ascensores provoca un 5% de fallos en el primero de los ascensores y un 8% en el segundo. Un día suena la alarma de uno de los ascensores porque ha fallado. Calcula la probabilidad de que haya sido el primero de los ascensores.

12.1.7 El teorema de Bayes y el ébola

En 1763 se descubrió una de las vacunas más eficaces contra la mayoría de las enfermedades infecciosas. La cura del miedo no es otra que el teorema más famoso del matemático inglés Thomas Bayes, el cual lleva su nombre. Desde entonces, la inferencia bayesiana se ha aplicado a la bioestadística, y en espacial al diseño de políticas relacionadas con enfermedades infecciosas e incluso para trazar su origen.

La epidemia de ébola es un asunto serio y preocupante. Tanto, que deberíamos aplicar todo nuestro razonamiento para tratar de paliar la epidemia que se cobra miles de vidas en áfrica. Por ejemplo, ¿es razonable poner en cuarentena a todo aquel pasajero que desembarque de un vuelo procedente de un país afectado por el contagio?

La alarma suscitada por el primer caso de ébola en Nueva York ha propiciado que varios estados Norteamericanos (Nueva York , Nueva Jersey e Illinois) decidieran poner en cuarentena obligatoria a todos los médicos el personal sanitario proveniente de áfrica, con sus consiguientes críticas. Esta reacción solo es comparable a la de Corea del Norte, que ha decidido cerrar sus fronteras a todos los vuelos de áfrica, y de paso a los de EEUU. Parece que algunos países necesitarían también la ayudas de los estadísticos sin fronteras.

Sin embargo, una enfermera americana tenía unas décimas de fiebre cuando aterrizó de un vuelo de áfrica ha decido huir de su confinamiento obligatorio. Han saltado todas las alarmas posibles. En cambio Kaci Hickox, se pasea con su bicicleta feliz y sonriente. Es la sonrisa de quien conoce el teorema de Bayes: “No voy a quedarme aquí y dejar que se violen mis derechos civiles porque no hay base científica”

Realicemos algunas sencillas operaciones matemáticas y entenderemos mejor la sonrisa de la enfermera. Pongámonos en el supuesto más restrictivo y que los aeropuertos tuvieran acceso al test PCR para detectar el ébola. El test para detectar el ébola (PCR) acierta (da positivo) en el 99.6% de los pacientes que tienen ébola (positivo). El test también acierta en (da negativo) en el 99.7% de los pacientes que no tienen ébola. Digamos que un 0.2% de los pasajeros provenientes de áfrica viajan infectados con el virus. Por tanto, ¿cuál es la probabilidad de tener ébela para una persona que ha dado positivo?

Visto lo visto, si fuéramos médicos (o incluso políticos) seguramente diríamos que más del 99% (22/24 de médicos fallaron la respuesta a una pregunta muy similar relacionada con el cáncer). Pero la enfermera Hickox no se saltó la clase de estadística el día que explicaron que la probabilidad a priori no es la misma que la conjunta. Es decir que no es lo mismo tener ébola y dar positivo que tener ébola cuando he dado positivo.

Si queremos averiguar qué porcentaje de viajeros tendrán ébola cuando den positivo utilizaremos la fórmula de Bayes:

$$P(Ebola|Positivo) = \frac{P(Ebola)P(Positivo|Ebola)}{P(positivo)}$$

donde $P(Ebola|Positivo)$ es la probabilidad de estar realmente enfermo dado que he dado positivo, $P(Positivo|Ebola)$ es la probabilidad de dar positivo cuando realmente se tiene ébola y $P(Positivo)$

es la probabilidad de dar positivo.

La probabilidad de dar positivo es la suma de todos los que dan positivo, contando los “falsos positivos”, aquellos que sin tener ébola dan positivo:

$P(Positivo) = P(Ebola|Positivo) + P(NoEbola|Positivo)$,
y la probabilidad buscada es:
$P(Ebola|Positivo) = \frac{0.002*0.996}{0.002*0.996+0.998*0.003} = 0.40$.
Por lo tanto, tan solo un 40% de los viajeros que den positivo por ébola en los aeropuertos tendrán realmente la enfermedad. Este porcentaje es muy distinto al 99%. Si en vez del test PCR se toma la temperatura, este porcentaje se reduce drásticamente. Además también habrá un número reducido de viajeros que darán negativo aun con el virus inoculado. Por tanto no tienen ningún sentido la cuarentena discrecional de todos los viajeros.

Afortunadamente un juez de Maine ha recuperado el sentido de la proporción y ha dado la razón a la enfermera Hickox apoyándose en razonamientos científicos. Desafortunadamente, el teorema de Bayes no ha conseguido prevenir otras patologías contagiosas. La cuarentena “Gangnam Style” Norcoreana tan solo puede ocasionar más confusión y privar de atención médica a los países necesitados sin ninguna base razonada. Esperemos que los responsables de salud pública de nuestro país (incluso aquellos con la vida resuelta) se decanten más por Bayes que por los bailes coreanos.

12.1.8 Discertaciones sobre el teorema de Bayes

¿En qué consiste el problema de las 3 puertas? Supongamos que vamos a un concurso de televisión, en el que un presentador nos da a elegir entre 3 puertas. Una de ellas contiene un premio, y las otras dos están vacías. Tras elegir una puerta, el presentador abrirá una de las otras dos, para mostrarnos que no está premiada, y a continuación nos ofrece la posibilidad de cambiar nuestra elección. ¿Tiene sentido en este caso cambiar la puerta elegida? La respuesta es SI. Es más, las probabilidades de ganar siguiendo esta estrategia son mayores que si únicamente hubiera 2 puertas, es decir, superiores al 50%.
La teoría es aplicación directa del Teorema de Bayés, que nos dice la probabilidad a posteriori, es decir, sabiendo que ha ocurrido un suceso. Para entenderlo con detalle, vamos a desglosar todos los casos posibles.
Vamos a suponer primero que elegimos una estrategia de cambiar siempre nuestra elección inicial: Hay un 1/3 de probabilidad de elegir inicialmente la puerta con el premio. Las otras dos puertas estarán vacías, y por tanto al abrir una y cambiar nuestra elección, perdemos. Sin embargo, hay 2/3 de probabilidad de elegir una puerta vacía. El presentador abrirá la otra puerta vacía con el 100% de probabilidad, y al cambiar la elección, ganaremos.

Como se ve claramente, las probabilidades de ganar con esta estrategia son de 2/3 (un 66% aproximadamente).

Sin embargo, si elegimos la estrategia de no cambiar nuestra elección inicial:

Hay 1/3 de probabilidades de elegir inicialmente la puerta premiada. Como no vamos a cambiar nuestra elección, ganaremos con 1/3 de probabilidad.
Hay 2/3 de probabilidades de elegir una puerta vacía. Como no vamos a cambiar, perderemos con 2/3 de probabilidad.
Con esta estrategia, las posibilidades de acierto son de 1/3, es decir, aproximadamente un 33%.

Otra forma de simplificar el problema y verlo más claro: realmente es como si eligiéramos 2 puertas, y no una. Al elegir una puerta y luego poder cambiar, lo que estamos haciendo es descartarla y quedarnos con las otras dos puertas. De estas dos puertas, una es seguro que no tiene premio, y el presentador se encargará de eliminarla. Por tanto, si cualquiera de estas 2 puertas tenía el premio, habremos ganado.
La cosa varía si cambiamos el planteamiento. Supongamos ahora que tras elegir una puerta, el presentador simplemente abre al azar una de las otras dos puertas. Si la puerta no es la que contiene el premio, nos da posibilidad de cambiar. En otro caso hemos perdido. ¿Qué ocurre aquí con la estrategia de cambiar nuestra elección?:
Hay un 1/3 de probabilidad de elegir inicialmente la puerta con el premio. Abra la que abra el presentador, resultará vacía. Al elegir la otra, también vacía, perderemos.
Sin embargo, hay 2/3 de probabilidad de elegir una puerta vacía. Pero...
Hay un 50% de probabilidad de que el presentador abra directamente la puerta con el premio, por lo que hemos perdido...
Y hay otro 50% de probabilidad de que el presentador abra la puerta vacía... cambiamos la elección, y hemos ganado.

En este caso, al haber dos posibilidades de 50% (azar puro) cuando elijamos inicialmente la puerta vacía, al final seguimos teniendo 1/3 de probabilidad de ganar. En este caso, no existe el condicionante de que el presentador va a abrir una puerta que sabe que está vacía, y por tanto nada cambia. Igual daría que el presentador elija la segunda puerta a abrir, o que la elijamos nosotros. Sería también equivalente a descartar una puerta cualquiera, y luego descartar otra también al azar. Al final tenemos 1/3 de probabilidades de llevarnos el premio.

¿Es este problema comparable al de la lotería? No tienen nada que ver. Probabilísticamente sería comparable al siguiente caso, llevado el extremo:
Sale un número del bombo de la lotería, y sólo una persona lo sabe. Lo anota en un papel, y vuelve a meter la bola en el bombo (el presentador sabe qué puerta es la buena, pero se guarda la información). Elegimos un número entre los 80.000 posibles, y se lo decimos a esa persona. Ahora esa persona saca del bombo todos los números menos el elegido por nosotros, y el que sabe que está premiado (el presentador abre la puerta no premiada). Finalmente nos deja elegir entre quedarnos con el número elegido, o con la otra bola del bombo. Si el número que elegimos es el que se había escrito en el papel, ganamos la lotería.

En este caso, ¿qué es más probable?

Que casualmente hayamos elegido el número que la persona había sacado al azar (1/80.000)
Que hayamos elegido un número que no está en el papel, pero que no se ha quitado del bombo por el

hecho de ser nuestro elegido (79.999/80.000).
Como decía, es el caso llevado al extremo. En el caso de las puertas, tenemos 1/3 y 2/3, y en este otro caso con los números, tenemos 1/80.000 y 79.999/80.000. Da qué pensar...

12.2 Paradojas

12.2.1 ¿Qué es una paradoja?

Es una idea extraña opuesta a lo que se considera verdadero a la opinión general.2 También se considera paradoja a una proposición en apariencia falsa o que infringe el sentido común, pero no conlleva una contradicción lógica, en contraposición a un sofisma que solo aparenta ser un razonamiento verdadero.3 En retórica, es una figura de pensamiento que consiste en emplear expresiones o frases que implican contradicción.
La paradoja es estímulo para la reflexión. A menudo los filósofos se sirven de las paradojas para revelar la complejidad de la realidad. La paradoja también permite demostrar las limitaciones de las herramientas de la mente humana. Así, la identificación de paradojas basadas en conceptos que a simple vista parecen simples y razonables ha impulsado importantes avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas.

12.2.2 Algunas paradojas

Paradoja 1

- multiplicando por 2 a: $a2 = a \cdot b$
- restando b2: $a2 - b2 = a \cdot b - b$
- factorizando a la izquierda: $(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot b - b2$
- factorizando a la derecha: (a + b) (a - b) = b (a - b)
- simplificando: a + b = b
- como a = b, sustituyendo: b + b = b, es decir: 2b = b
- simplificando: 2 = 1

Paradoja 2
Se dice que $a = 2$, $b = 3$. Esto significa, claro está, que: $a = b - 1$
Si multiplicamos por $(a-b)$, obtenemos esta expresión: $(a-b)a = (a-b)(b-1)$
Resolvemos los productos (en la izquierda, se multiplica cada término de la resta por a, y en la derecha, se tiene que multiplicar cada sumando por los otros dos, así): $a^2 - ab = ab - a - b^2 + b$
Pasando al otro lado, nos queda: $a + a^2 - ab = b + ab - b^2$
Tomamos factor común a cada lado respecto a y b: $a(1+a-b) = b(1+a-b)$

Como tenemos el mismo factor a los dos lados, los cancelamos, y: $a = b$
Es decir, $2 = 3$

La paradoja del mentiroso

Se atribuye a Epiménides haber afirmado: ”Todos los cretenses son mentirosos”. Sabiendo que él mismo era cretense, decía Epiménides la verdad?

Un enunciado y su contrario

“Esta frase consta de siete palabras.” Está claro que su enunciado es falso, ya que consta de seis. Por tanto, su contrario debería ser verdadero. Es esto correcto?

Los tres enunciados falsos

Tenemos aquí tres enunciados falsos. Cuáles lo son?

1. 2+2=4
2. 3x6=17
3. 8/4=2
4. 13-6=5
5. 5+4=9

Aprobará el examen

El siguiente relato ocurrió en un examen oral.
PROFESOR: De las siete preguntas de que consta el examen, ya te has equivocado en tres preguntas, y sólo nos queda una. Tu aprobado o suspenso depende completamente de si aciertas o no la próxima pregunta. Te das cuenta?
ALUMNO: Sí. Me doy cuenta.
PROFESOR: El estar nervioso no te ayudará.
ALUMNO: Ya lo sé. Trataré de tranquilizarme.
PROFESOR: Y esta es la pregunta. Recuerda: todo depende de si contestas esto bien o mal.
ALUMNO: Sí, sí, ya lo sé!
PROFESOR: La pregunta es ésta: Aprobarás este examen?
ALUMNO: Cómo voy a saberlo?
PROFESOR: Eso no es una respuesta. Debes darme una respuesta clara, sí o no. Si contestas bien, aprobarás; si no, suspenderás. Así de simple!

La cuestión no le parecía nada simple al alumno. La verdad es que cuanto más pensaba en ello más confuso se sentía. Y de repente cayó en la cuenta de algo muy interesante. Si contestaba una cosa, el profesor tendría la posibilidad de aprobarle o suspenderle, como más le complaciera. Si contestaba lo otro, sería imposible que el profesor le aprobara o le suspendiera sin contradecir sus propias reglas. Como el alumno tenía más interés en no suspender que en aprobar, eligió la segunda alternativa, y contestó de una manera que confundió por completo al profesor. Qué respuesta dio?

Una de las dos
He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. Cuál?

Errores
En éste parrafó se cometen tres errores.
París es la capital de Francia.
Dos más dos es igual a cinco.
América fue descubierta en 1.492.
Cuáles son los errores?
Horrores

En éste parrafó se cometen dos errores.
Roma es la capital de Italia.
Dos por dos es igual a cinco.
Hillary escalé el Everest.
Cuáles son los errores?

Paradoja mecánica
Por qué los camiones que transportan leche de vaca son una paradoja mecánica?

Paradoja temporal
Un español en 1.987 llamó por teléfono a otro que se encontraba en 1.986, y le dijo:

- Mañana te telefonearé de nuevo.
- De acuerdo. Hasta mañana!

Podría darse esta situación un tanto paradójica en la vida real?.

El Problema de Monty Hall
Está inspirado por el concurso televisivo estadounidense Lets Make a Deal. Su nombre proviene del nombre del presentador, Monty Hall. El enunciado del problema es el siguiente:
Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la n1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: No prefieres escoger la n2?. Es mejor para tí cambiar tu elección? Esa pregunta ha generado un intenso debate y han sido muchas las publicaciones al respecto. La respuesta se basa en suposiciones que no son obvias y que no se encuentran expresadas en el planteamiento del problema. La respuesta correcta parece contradecir conceptos básicos de probabilidad, se puede considerar

como una paradoja. Pero, veamos la solución, la misma se basa en tres suposiciones básicas:

- que el presentador siempre abre una puerta,
- que la escoge entre las restantes después de que el concursante escoja la suya,
- y que tras ella siempre hay una cabra.

Como podemos ver, estas suposiciones no se encuentran explícitamente en el enunciado. La discusión del problema nos lleva a siguiente solución: si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3), mientras que si cambia, gana si escogió originalmente una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3). Por lo tanto, el concursante debe cambiar siempre su elección.

El pleito sobre los honorarios

La paradoja lógica que se le planteó al filósofo griego Protágoras hace unos 2.400 años aproximadamente. Protágoras fue uno de los precursores del movimiento sofista. Según algunos de sus contemporáneos fue el primero que sostuvo que sobre una misma cuestión existen dos discursos mutuamente opuestos.

Durante años enseñó sus conocimientos a los hijos de las familias pudientes griegas, por los que cobró grandes sumas de dinero. Los cursos eran rápidos y eficaces, y entre las enseñanzas transmitidas gran parte la ocupaban tanto la retórica como la argumentación. Para que os hagáis una idea, las escuelas sofistas eran, en aquél entonces, lo que hoy pueden ser las universidades privadas. Las enseñanzas de los sofistas eran muy valiosas para aquellos que quisieran hacer carrera política o judicial.

El pleito de los honorarios se plantea entre el maestro Protágoras y su discípulo Evatlo al que acoge en su academia con la condición de que le pagara los honorarios del curso cuando ganase su primer pleito. Terminado el curso Evatlo no tuvo ningún cliente y Protágoras, que era sofista pero no estoico, demandó a su discípulo.

Los argumentos expuestos fueron los siguientes:

Evatlo: Tanto si gano como si pierdo, en ningún caso tendré obligación de pagar a Protagoras. Si yo gano el pleito no tendré que pagar ya que el Juez habrá desestimado la demanda. Si lo pierdo, entonces, no habré ganado mi primer pleito y por lo tanto no se habrá cumplido la condición que hacía exigible la obligación de pago de los honorarios.

Protágoras: Tanto si gano como si pierdo este pleito, Evatlo siempre tendrá obligación de pagarme. Si yo gano la demanda, por definición tendrá que pagarme pues esta es la cuestión que se ventila en este pleito. Y si la pierdo, también tendrá que pagarme porque significará que ha ganado su primer pleito; es decir se habrá cumplido la condición de nuestro acuerdo.

Quién creéis que tenía razón?

Paradoja de Grelling

Los adjetivos se pueden clasificar en autodescriptivos (los que se pueden aplicar a sí mismo) y no-autodescriptivos. Polisilábico, corto, castellano son autodescriptivos (el adjetivo polisilábico tiene más de dos sílabas, luego es polisilábico), mientras que monosilábico, largo y alemán son no-autodescriptivos.

Consideremos el adjetivo no-autodescriptivo: es autodescriptivo o no-autodescriptivo?

Paradoja de Russell
Los conjuntos parecen ser de dos tipos: los que se contienen a sí mismos como miembros y los que no. Un ejemplo de los primeros sería el conjunto de las cosas pensables, pues a su vez es una cosa pensable. Un ejemplo de los segundos sería el conjunto de los matemáticos, pues el conjunto en sí no es un matemático y, por tanto, no pertenece al conjunto como miembro.
Consideremos ahora el conjunto todos los conjuntos que no se contiene a sí mismos como miembro. Llamémosle T. está T contenido en sí mismo como miembro? Si lo está, por definición no se contiene a sí mismo, luego no lo está. Pero si no lo está, por definición, debe estar.

El Juicio de protágoras
El origen de la paradoja reside en el hecho de que tanto Protágoras como su alumno primero aceptan la autoridad del tribunal pero después, si el veredicto no les favorece, deciden no someterse. Dicho de otra manera: más que una paradoja este es un caso de mala fe por parte de maestro y alumno. La finalidad del pleito es resolver el conflicto entre las partes. Pero deja de tener sentido si dichas partes condicionan su acatamiento al resultado.
Conclusión: Si no van a jucicio, pues no hay paradoja. Si van a jucicio, tendrán que acatar lo que decida el tribunal y listo.

Paradoja de los alcaldes
érase una vez un reino donde había muchas ciudades y por tanto muchos alcaldes. Algunos alcaldes vivían en la ciudad que gobernaban y otros no. El rey, a fin de tener controlados a los alcaldes, decidió que eso se terminaría, y que los alcaldes no podrían vivir donde les pareciera. Lo que hizo fue construir una ciudad que llamó ZAD (Zona de Alcaldes Desplazados) y decretó que en ella vivirían únicamente los alcaldes que no viveran en la ciudad que governaban. Pronto surgió un problema. Dónde debería el rey mandar a vivir al alcalde de la nueva ciudad?

Paradoja del barbero
Propuesta por Bertrand Russell, dice:
El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos.
Pregunta: quién afeitará al barbero? Si no se afeita a sí mismo será una de las personas de la ciudad que no se afeitan a sí mismas, con lo cual debería de afeitarse, siendo por tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas, no debiendo por tanto afeitarse.

Paradoja de la tarjeta

El matemático P.E.B. Jourdain, en 1913, propuso la siguiente paradoja: en uno de los lados de una tarjeta se podía leer:
”La oración del otro lado de esta tarjeta es VERDADERA.”
En la otra cara estaba escrito:
”La oración del otro lado de esta tarjeta es FALSA.”

Copos microscópicos (0 = 1)
Luis Scoccola propone la siguiente variación en la construcción del Copo de nive de Koch: para que el perímetro del copo no se dispare al infinito (como se ve que ocurre en midiendo fractales), como en cada uno de dichos pasos, al añadir los ”picos” del copo, el perímetro aumenta 4/3, basta contraer en cada ocasión la figura a 3/4 de su tamaño para compensar el aumento y obtener así una sucesión de figuras de igual perímetro que el triángulo inicial.
Ahora cabe hacerse algunas preguntas: la figura obtenida en el límite, qué dimensión tiene?, cuánto mide su perímetro?, es cero igual a uno?

La moda de la originalidad
En los años que vivimos la busca de la originalidad se ha convertido, entre los escritores, los artistas y sus adláteres, en un auténtico movimiento de masas, o dicho simplemente, en una moda, que es la negación de la originalidad.

La paradoja del tesoro
Le dijo el estafador a su víctima que podría recoger el tesoro prometido en un cierto lugar en la noche de San Juan a condición de que mientras cavase no pensase en un cocodrilo blanco, porque en tal caso el tesoro desaparecería.

Clases de personas
Hay tres clases de personas:
las que saben contar y las que no.
Hay dos grupos de personas en el mundo;
aquellos que creen que el mundo puede ser
dividido en dos grupos de personas,
y aquellos que no lo creen.
Hay dos grupos de personas en el mundo:
Aquellos que pueden ser categorizados en uno de dos
grupos de personas, y aquellos que no.

La paradoja de Galileo
Es una demostración de una de las sorprendentes propiedades de los conjuntos infinitos. El carácter paradójico se da por poner en entredicho el principio de que el todo es mayor que sus partes.
En su último trabajo científico, Dos nuevas ciencias, Galileo Galilei hizo dos afirmaciones aparentemente contradictorias acerca de los números enteros positivos. Primero, algunos números tienen la propiedad de ser un cuadrado perfecto (esto es, el cuadrado de un entero, desde ahora llamado simplemente cuadrado), mientras que otros no la tienen. Por ello, el conjunto de todos los números, incluyendo tanto a los cuadrados como a los no cuadrados, tiene que ser mayor que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, por cada cuadrado hay exactamente un número que es su raíz cuadrada, y por cada número hay exactamente un cuadrado. Por lo tanto, no puede haber más de un tipo que de otro. Este es uno de los primeros usos, aunque no el primero, de demostración a través de una función biyectiva.
En sus célebres ”Diálogos” Galileo llegó a la conclusión de que los conceptos de menor, igual y mayor sólo se aplicaban a conjuntos finitos, y no tenían sentido aplicados a conjuntos infinitos. En el siglo XIX, Cantor, usando los mismos métodos, demostró que a pesar de que el resultado de Galileo era correcto si se aplicaba a los números enteros, o incluso a los racionales, la conclusión general no era cierta: algunos conjuntos infinitos son mayores que otros, en el sentido de que no se pueden relacionar en una correspondencia biunívoca. No obstante, es notable que Galileo haya demostrado que el número de puntos en un segmento es el mismo que en un segmento algo mayor, pero, por cierto, no llegó a la demostración de Cantor sobre la existencia de varios infinitos ni a su concepto de número transfinito. Galileo tenía en mente en ese momento otros asuntos: estaba anotando las contradicciones en las paradojas de Zenón para abrir camino a su teoría matemática del movimiento.

Hotel de Hilbert
En un hotel de infinitas habitaciones no todo es color de rosa. Tan pronto se abrieron las puertas de este hotel la gente comenzó a abarrotarlo y pronto se encontraron con que el hotel de habitaciones infinitas se encontraba lleno de infinitos huéspedes, lo cual es un inconveniente muy grave. En este momento surgió la primera paradoja, así que se tomó como medida que los huéspedes siempre tendrían habitación asegurada pero con el acuerdo previo de que tendrían que cambiar de habitación cada vez que se les pidiera.
Fue entonces cuando llegó un hombre al hotel pero éste se encontraba lleno, por supuesto esto no preocupó al cliente pues en el Hotel Infinito se aseguraba que todos tendrían habitación. El hombre pidió su habitación y el recepcionista, consciente de que no habría ningún problema, tomó un micrófono por el que avisó a todos los huéspedes que por favor revisaran el número de su habitación, le sumaran uno y se cambiaran a ese número de habitación, de esta manera el nuevo huésped pudo dormir tranquilamente en la habitación número 1. Pero, qué pasó entonces con el huésped que se encontraba en la última habitación? Sencillamente no hay última habitación.

El conjunto de Cantor
Llamado así por ser aporte de Georg Cantor en 1883, es un destacado subconjunto fractal del intervalo real $[0,1]$, que admite dos definiciones equivalentes:

la definición numérica: es el conjunto de todos los puntos del intervalo real $[0,1]$ que admiten una expresión en base 3 que no utilice el dígito 1.
La definición geométrica, de carácter recursivo, que elimina en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo.
Además de una curiosidad matemática, contradice una intuición relativa al tamaño de objetos geométricos: es un conjunto de medida nula, pero no es vacío ni numerable.
Lo que Cantor no sabía era que este conjunto ya había sido estudiado en 1875 por un matemático dublinés, Henry John Stephen Smith (1826-1883). Pero como Smith falleció y su descubrimiento era prácticamente desconocido, fue Cantor el que quedó asociado a este conjunto.

Se construye de modo recursivo dando los siguientes pasos:

- El primer paso es tomar el intervalo $[0,1]$.
- El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto $(1/3;2/3)$.
- El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos (1/9; 2/9) y (7/9; 8/9).

Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

Paradoja de San Petersburgo
El jugador tiene que pagar una apuesta para participar en el juego. A continuación éste realiza lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, y el jugador obtiene 2n monedas (euros por ejemplo). Si sale cruz la primera vez el jugador gana $2^1 = 2$ euros; si la cruz sale en el segundo lanzamiento gana $2^2 = 4$ euros; si sale en el tercero $2^3 = 8$; si en el cuarto $2^4 = 16, \ldots$ Cuánto estaría el lector dispuesto a pagar para jugar a este juego? cinco?, diez?, quince euros?

Dentro de los primeros se encuentran las consideraciones sobre la diferencia crucial entre ganancia monetaria y utilidad de esa ganancia, ya apuntadas en el primer análisis de Daniel Bernoulli (”cualquier incremento en riqueza, no importa cuan insignificante, siempre resultará en un incremento en utilidad que es inversamente proporcional a la cantidad de bienes ya poseídos). La idea es que aunque la ganancia monetaria pueda incrementarse indefinidamente, la utilidad de esa ganancia no se incrementa de modo paralelo. Además de ese hecho básico, hay autores que defienden que muchas personas no están dispuestas a hacer apuestas elevadas porque tienen aversión al riesgo.
Otros intentos de solución se centran en la propia estructura del juego, argumentando por una parte que en la práctica habría jugadas que nunca se llevarían a cabo, por ejemplo que no es concebible una jugada donde no aparezca la primera cruz hasta el 300 lanzamiento, y por otra que para que haya un juego de apuestas fiable se necesita una banca con dinero suficiente para cubrir el premio máximo, y en este mundo no hay bancas capaces de afrontar el pago de una baza donde saliese la cruz por primera vez en un número tan pequeño como el 50 lanzamiento (premio de 250 ¿ 300 billones de euros).
Recientemente se ha propuesto un análisis de la paradoja (Luis Cañas, 2008) que parece un avance en el camino hacía la solución de este problema. La idea es descomponer el juego de la paradoja en un conjunto de juegos ordenados SP, tal que

SP1: al lanzar una moneda el jugador gana 21 monedas si sale cruz, y gana 0 si no sale cruz; se acaba el juego (esperanza matemática: 1/2 2 = 1).

SP2: el jugador gana 21 monedas si sale cruz la primera vez, y se acaba el juego. Si no, se lanza otra vez y gana 22 monedas si sale cruz y 0 si no sale cruz; se acaba el juego (EM: 1/2 2 + 1/4 4 = 1 + 1 = 2).

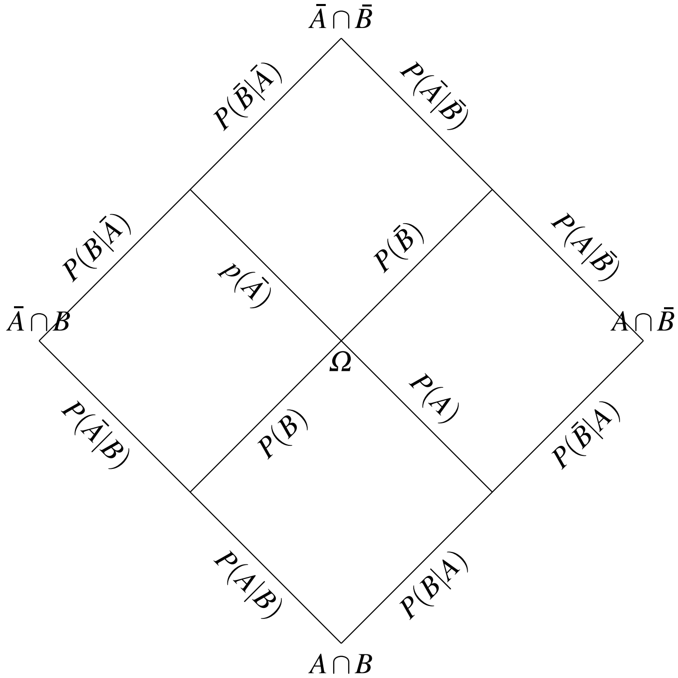
SPn: el jugador lanza una moneda todas las veces que sean necesarias para que salga cruz por primera vez, hasta un máximo de n lanzamientos. Cuando sale una cruz o se han hecho n lanzamientos se termina el juego. Se cuenta el número de lanzamientos, j, que se han necesitado para que salga cruz y el jugador gana 2j monedas; si no ha salido ninguna cruz el jugador gana 0 monedas (EM: 1/2 21 + 1/22 22 + 1/23 23 +.....+ 1/2j 2j +......1/2n 2n = 1 + 1 + 1 +........= n).

Paradoja de Banach-Tarski
Dada una bola en el espacio tridimensional, existe una descomposición de la bola en un número finito de piezas no solapadas (es decir, subconjuntos disjuntos), que pueden juntarse de nuevo de manera diferente para dar dos copias idénticas de la bola original. Todavía más, el proceso de reensamblaje requiere únicamente remover las piezas y rotarlas, sin cambiar su forma. Sin embargo, las mismas piezas no son “sólida” en el sentido habitual, sino dispersiones de infinitos puntos.
La razón por la que se considera una paradoja a este teorema es porque contradice la intuición geométrica básica.“Doblar la bola” dividiéndola en partes y removiéndolas por rotaciones, sin ningún estiramiento, curvatura, o adición de nuevos puntos, parece ser imposible, ya que todas estas operaciones conservan el volumen.
Al contrario de la mayoría de teoremas de geometría, este resultado depende de forma crítica de la elección de los axiomas de la teoría de conjuntos. únicamente puede demostrarse usando el axioma de elección, que permite la construcción de conjuntos no medibles, es decir, colecciones de puntos que no tienen un volumen en el sentido ordinario y que para su construcción requerirían un número infinito de elecciones.

12.3 Mis cinco paradojas favoritas

- **La paradoja de Banach-Tarski**
- **El hotel de Hilbert**
- **La paradoja del barbero**
- **La Paradoja de Russell**
- **Conjunto de Cantor**

12.4 La imagen de Wikipedia



13. Tarea 13

13.1 Probabilidad subjetiva

13.1.1 Definición de probabilidad subjetiva

El concepto de probabilidad subjetiva, llamada también personal por algunos autores, abandona el criterio del grado de confirmación como grado de creencia objetivo y racional, expresando, por contra, el grado de confirmación como grado de creencia real de una persona, tal y como lo manifestaría en una apuesta de juego.

13.1.2 Dos ejemplos de probabilidad subjetiva

- La probabilidad que asignamos cuando observamos un objeto en la noche sea una estrella (considerando que puede ser un planeta, un cometa u otro objeto reflejante en el espacio).
- La probabilidad que asignamos a que ocurra un suceso cuando lo hemos observado en repetidas ocasiones, por ejemplo si esta nublado entonces fijamos una probabilidad de que llueva.

13.2 Modelo de Ising

El modelo de Ising es un modelo físico propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. Se trata de un modelo paradigmático de la Mecánica Estadística, en parte porque fue uno de los primeros en aparecer, pero sobre todo porque es de los pocos modelos útiles que tiene solución analítica exacta. Esto lo hace muy útil para ensayar nuevos tipos de aproximaciones y luego comparar con el resultado real.

El modelo de Ising fue inventado por el físico Wilhelm Lenz, que lo concibió como un problema para su alumno Ernst Ising para demostrar que el sistema presentaba una transición de fase. Ising demostró que en una dimensión no existía tal transición de fase, resolviéndolo en su tesis de 1924, aunque le provocó una profunda desmoralización e hizo que renunciara a la física estadística. El modelo bidimensional de Ising de retícula cuadrada es mucho más difícil, y solamente se le dio una descripción analítica mucho más tarde, por Lars Onsager (1944), que demostró que la física estadística era capaz de describir transiciones de fase (pues como se verá, éste modelo presenta una) lo que terminó de consolidar definitivamente la mecánica estadística. Por lo general, se resuelve mediante un método de transferencia de matriz, aunque existen diferentes enfoques, más relacionados con la teoría cuántica de campos.

13.3 Puentes de Köningsberg

El problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado.

Esta ciudad es atravesada por el río Pregel, en ruso Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel. El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio.

Leonhard Euler llegó a Prusia en 1741, a la edad de 34 años, donde vivió hasta 1766 para luego regresar a San Petersburgo. Durante esos años trabajó en la Academia Prusiana de las Ciencias, donde desarrolló una prolífica carrera como investigador.5 Euler fue contemporáneo de varios otros famosos matemáticos y pensadores procedentes de aquella ciudad, tales como Immanuel Kant, Johann Georg Hamann y Christian Goldbach, por lo que Königsberg fue en ese tiempo un importante epicentro científico.

Es en este ambiente y por estos años en que surge la formulación del problema de los puentes de Königsberg, propagándose a modo de juego y de trivia matemática entre los intelectuales de la época.

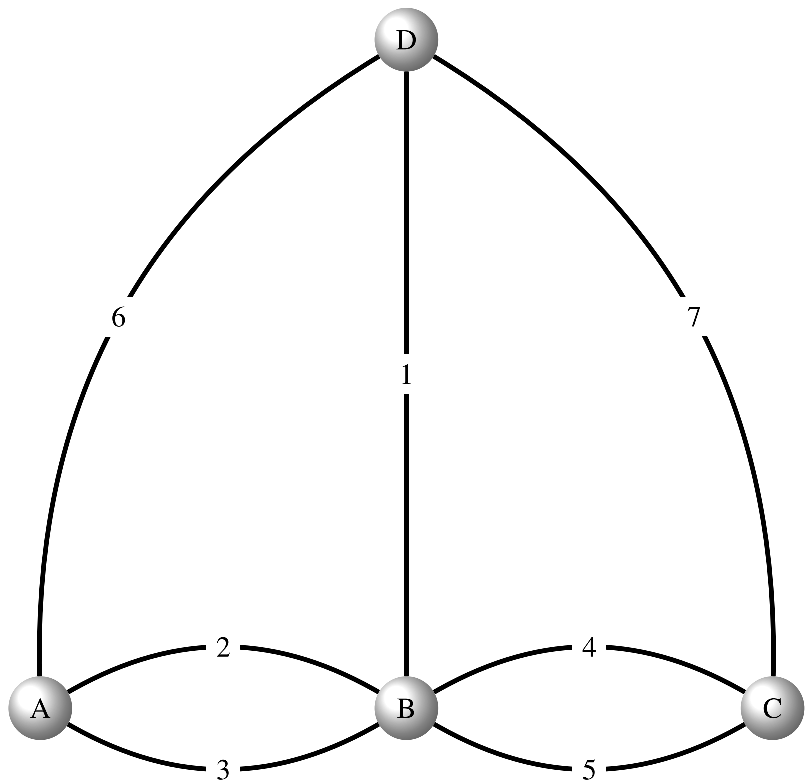


Figure 13.1: Grafo propuesto por Euler que solucionó el problema de los puentes de Köningsberg

13.4 Resumen del articulo “Evolution in the Everyday”

El articulo tiene por temática la aplicación de las distintas mutaciones del ADN desde los perfiles genéticos como forma de identificación de una persona, como una manera efectiva de diagnosticar enfermedades, también trata como el temor de algunas personas de ser excluidos de oportunidades de trabajo, primas económicas en los seguros o de hospitales unicamente por su genética.

Trata como los perfiles genéticos ayudan a identificar nuevas especies animales o la manera en que las mutaciones genéticas generan de manera aleatoria nuevas especies. Menciona también como esto puede ser problemático y nos pone de ejemplo la forma en que a pesar de que nuestro cerebro ha evolucionado para ser mas grande, la pelvis de la mujer no, y esto causa complicaciones en el nacimiento. Explica como la diarrea y el vomito son adaptaciones evolutivas que nos separan de otros primates.

Nos muestra la razón por la cual es un tanto difícil encontrar el ancestro común entre nosotros y los otros primates, usando como analogía las lenguas indoeuropeas, también menciona la relación que existen entre colonias de bacterias buenas y malas entre los humanos, mencionando que la variación genética entre ambas es un indicador de cierto tipo de enfermedades, así como la importancia de estas colonias no solo para el humano, sino para todos los ecosistemas de los cuales esta compuesto el planeta.

14. Tarea 14

14.1 Los ejercicios de la presentación

14.1.1 Formula 6

La formula se presenta como:

$$ppp\cdots pqqq\cdots q = p^{n_1}q^{n_2} \tag{14.1}$$

donde n_1 y n_2 son las posibles direcciones que puede tomar el objeto en movimiento, en este caso dos. Ahora surge la pregunta por que se multiplican las probabilidades, este como un modelo de la realidad nos indica que entre mas pasos ocurran en una dirección esta se vuelve menos probable, ya que seguir una única dirección es un fenómeno determinista. En cambio entre mas eventos de ir hacia un lado ocurran este debe cambiar sino la sucesión de numeros que se forma tiende a cero.

14.1.2 Formula 7

Como habíamos considerado anteriormente, si el numero total de pasos dados es N y de este queremos contar unicamente la cantidad de formas en las que se pueden permutar ciertos subconjuntos con n_1 y n_2 elementos en este caso. Entonces se aplica la formula:

$$\frac{N!}{(n_1)!(n_2)!} \tag{14.2}$$

donde tienes todas las posibles permutaciones $N!$ y solo eliminas las de los elementos n_1 y n_2 multiplicando por su respectivo factorial.

14.1.3 Explicación de (11)

Ahora ya que buscamos la probabilidad de que una partícula se encuentre en la posición m para una cantidad N de pasos, usamos $P_N(m) = W_N(n_1)$. Ya que buscamos la probabilidad de una posición

$m \leq N$, entonces una manera para calcular su probabilidad es calcular la distancia estadística entre este valor y el final y usamos la distancia estadística común el promedio:

$$n_1 = \frac{N+m}{2}, \quad \text{y} \quad n_2 = \frac{N-m}{2} \tag{14.3}$$

Lo cual nos garantiza que vamos a buscar una probabilidad en un intervalo cercano a m.

14.1.4 De (22) a (26)

Ahora analizamos ciertas medidas de dispersión comenzando con el simple momento de orden uno:

$$\Delta u := u - \bar{u}, \tag{14.4}$$

pasando por el de segundo orden:

$$\overline{\Delta u} := \overline{u - \overline{u}}, \tag{14.5}$$

Después definimos:

$$\overline{\Delta u^2} := \sum_{i=1}^{M} P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0, \tag{14.6}$$

de esto se obtiene que:

$$\overline{(u-\overline{u})^2} = \overline{u^2 - 2u\overline{u} + \overline{u}^2}$$

si consideramos lo anterior, obtenemos:

$$\overline{u^2 - 2u\overline{u} + \overline{u}^2} = \overline{u^2} - \overline{2u\overline{u}} + \overline{\overline{u}^2} = \overline{u^2} - 2\overline{u}\overline{u} + \overline{u}^2 = \overline{u^2} - 2\overline{u}^2 + \overline{u}^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2.$$

Ahora analizamos porque la desigualdad **(26)** se cumple, esto es muy sencillo ya que tenemos que $\overline{u^2}$ es mayor, esto es porque de todos los valores que puede asumir la variable aleatoria u, los que pueden ser negativos al estar esta elevada al cuadrado todos son positivos y al calcular su media todos son mayores que cero, pero en cambio si la misma variable tiene al menos un valor negativo, y a este se calcula la media tendra al menos un elemento que se resta y esto vuelve este valor mas pequeño en magnitud, por lo tanto:

$$\overline{u^2} \geq \overline{u}^2 \tag{14.7}$$

14.2 Asimetría en una distribución

Las medidas de asimetría son indicadores que permiten establecer el grado de simetría (o asimetría) que presenta una distribución de probabilidad de una variable aleatoria sin tener que hacer su representación gráfica. Como eje de simetría consideramos una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por la media de la distribución.

Si una distribución es simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo. Decimos que hay asimetría positiva (o a la derecha) si la "cola" a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si hay valores más separados de la media a la derecha. Diremos que hay asimetría negativa (o a la izquierda) si la "cola" a la izquierda de la media es más larga que la de la derecha, es decir, si hay valores más separados de la media a la izquierda.

De lo anterior podemos concluir que cuando la media = mediana la distribución es simétrica, si = media = mediana = moda esta es una distribuón unimodal. Cuando el sesgo esta hacia la izquierda o derecha, la moda sigue a la "cima" de la distribución en cambio la media sigue a la "cola" mas delgada de la distribución y la mediana se queda en el centro de la distribución.

15. Tarea 15

15.1 El número de Dios según MICHAEL SHERMER

El autor del articulo considera la siguiente formula:

$$P_{after} = \frac{P_{before} \times D}{P_{before} \times D + 100\% - P_{before}}. \quad (15.1)$$

Para intentar calcular la probabilidad de que Dios exista. Al comienzo del articulo aplica probabilidades dadas por el reverendo Thomas Bayes basadas en sus experiencias religiosas. Posteriormente realiza el calculo remplazando los valores del Rev. Bayes y obtiene el valor de 67% de probabilidad de que Dios exista. El autor menciona una cita de Bayes “Este numero posee un elemento subjetivo ya que refleja mi análisis particular sobre la evidencia.

El autor hace énfasis sobre sus creencias y da otros valores basados en su visión sobre la evolución y al sustituir estos valores obtiene la probabilidad de 2%.

16. Tarea 16

16.1 Curva “ROC” Receiver Operator Characteristic

Esta curva proporciona la fiabilidad de un sistema clasificador binario, con respecto a la variación de su criterio de discriminación. Esto es mide cuan efectivo es un clasificador para discernir entre dos objetos. Se comenzó a usar para la detección de objetos por un radar y después paso a las áreas de medicina, biologia y recientemente en la investigación académica de machine learning y data mining.

16.1.1 Verdadero positivo

Mide los éxitos de un sistema clasificador o de un experimento que implica aleatoriedad.

16.1.2 Falso positivo (error de tipo I)

Se presenta en las ocasiones en las que el experimento o sistema se equivoca al clasificar un evento como positivo, esto es, dice que hubo un exito en experimento cuando realmente el experimento fallo. Se relaciona con el nivel de significancia estadística.

16.1.3 Verdadero negativo

Mide las ocasiones en las que nuestro experimento o sistema rechaza correctamente un objeto.

16.1.4 Falso negativo (error de tipo II)

En este caso el clasificador no rechaza un evento que es falso, en otras palabras, el experimento claramente fue exitoso pero se declara como un fallo.

16.2 Matriz de confusión del problema de Ursula

Primero observemos como se calcula la matriz de confusión para después sustituir por los valores del problema, no sin antes analizarlos correctamente para evitar errores al identificar los valores.

Positive predictive value (PPV) $PPV = \frac{TP}{TP+FP}$	False omission rate (FOR) $FOR = \frac{FN}{TN+FN}$
False discovery rate (FDR) $FDR = \frac{FP}{TP+FP}$	Negative predictive value (NPV) $NPV = \frac{TN}{TN+FN}$

Ahora solo realicemos la sustitución de los valores para obtener la matriz.

Positive predictive value (PPV) $PPV = \frac{49}{49+199} = 0.197$	False omission rate (FOR) $FOR = \frac{1}{1+1} = 0.5$
False discovery rate (FDR) $FDR = \frac{199}{49+199} = 0.802$	Negative predictive value (NPV) $NPV = \frac{1}{1+1} = 0.5$

17. Tarea 17

17.1 Resumen libro de Ian Stewart

17.1.1 Paradoja del cumpleaños

Según el libro de Ian Stewart una forma muy eficiente de enfrentar el problema es usando el teorema de probabilidad $P(A^c) = 1 - A$, para ello usa la formula:

$$P(k) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \cdots \times \frac{365-k+1}{365}, \tag{17.1}$$

donde k es la cantidad de personas dentro de un campo de fútbol, las cuales son 23, usando la formula (17.1) obtenemos 0.492703, restándolo de 1 tenemos: 0.507297.

Posterior a esto el libro nos muestra una primera aproximación debida a *Frank Mathis* a la cantidad de entidades para que dos de ellas tengan el mismo cumpleaños y aplica la aproximación a la tierra:

$$k \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{n}. \tag{17.2}$$

Pero el matemático hindú *Srinivasa Ramanujan*, presento una mejor aproximación;

$$\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} \tag{17.3}$$

17.1.2 Códigos secretos

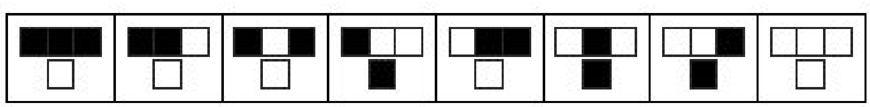
Esta sección trata algunas formas de cifrado simples, al principio, como el cifrado Cesar. Donde solo se desplaza una cantidad constante de símbolos el alfabeto, por esta razón en el alfabeto latino solo existen 26 posibles cifrados; lo que lo convierte en un algoritmo pésimo de cifrado.
Posterior mente presenta el método de reemplazo donde se cambia una letra y se desplaza el alfabeto, aquí la cantidad de posibles cifrados asciende a 26! pero usando análisis estadístico de textos es posible vencerlo.
Explica brevemente el funcionamiento de la maquina enigma y presenta los conjuntos necesarios para realizar un cifrado:

- Texto plano - mensaje a codificar.
- Texto cifrado - mensaje ya codificado.
- Algoritmo de encripción - metodo usado para cifrar el texto plano.
- Algoritmo de desencriptado - metodo usado para descifrar el texto plano.
- Llave - información secreta necesaria para encriptar y desencriptar el texto plano.

Al final presenta el algoritmo RSA, el cual se basa en la complejidad de factorización de números primos y álgebra modular.

17.2 Triangulo de Sierpinski

Para graficar este triangulo utilice el método de autómatas celulares y el programa GNU golly, el cual permite implementar toda clase de reglas para autómatas celulares. En este caso aplique la regla numero 22 de un autómata de Wolfram. La cual esta dada por: Donde cada tres celdas se procesan y



generan una nueva celda blanca o negra dependiendo la configuración inicial del autómata.

18. Tarea 18

18.1 Multiplicadores de Lagrange

Este un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de n + k variables, donde k es igual al número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. Estas nuevas variables escalares desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange.

Para una función de dos variables $f(x,y)$, sujeta a la restricción $g(x,y) = c$. Suponiendo que los gradientes de f y g son paralelos en el máximo o mínimo, creamos un nuevo vector introduciendo λ que denotamos de la siguiente forma:

$$F(x,y,\lambda) = [f(x,y-\lambda(g(x,y)-c))] = 0 \qquad \lambda \neq 0. \tag{18.1}$$

Para esta nueva función aplicamos los métodos conocidos de optimización obteniendo así la solución al problema original.

18.2 Función de densidad de probabilidad

Una función de densidad de probabilidad caracteriza el comportamiento probable de una población en tanto especifica la posibilidad relativa de que una variable aleatoria continua X tome un valor cercano a x.

Una variable aleatoria X tiene densidad f, siendo f una función no-negativa integrable de Lebesgue, si:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18.2}$$

18.3 Función de densidad acumulativa

Una función de distribución acumulada describe la probabilidad de que una variable aleatoria real X sujeta a cierta distribución de probabilidad se sitúe en la zona de valores menores o iguales a x.
La función de distribución acumulada en el caso de una variable aleatoria X discreta, puede establecerse como:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \tag{18.3}$$

o en el caso continuo:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{18.4}$$

donde f es la función de densidad de probabilidad.

19. Tarea 19

19.1 Eigenvalores y eigenvectores

Aquí realizamos diez problemas para encontrar eigenvalores y eigenvectores.

1. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(I_2 - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 1$, esto es I_2 tiene un único eigenvector de multiplicidad 2. Para esto basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix}\right]x = \begin{pmatrix}00\end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1 & 00 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1 x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}00\end{pmatrix}$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este sistema tiene dos posibles soluciones tomando $x_1 = c$ y $x_2 = 0$ o $x_2 = c$ y $x_1 = 0$ con lo que obtenemos dos vectores

$$\left(x_1 x_2\right) = c\left(10\right)$$

y

$$\left(x_1 x_2\right) = c\left(01\right)$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

2. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 2 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix} 1 & 20 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 20 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right]x = \left(00\right)$$

ahora tomando $\lambda = 2$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 20 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \left(x_1 x_2\right) = \left(00\right)$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0 0 \cdot x_1 + -1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = c$ por lo tanto $x_1 = 2c$ con lo que obtenemos un vector

$$\left(x_1 x_2\right) = c\left(21\right)$$

ahora tomando $\lambda = 1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 20 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \left(x_1 x_2\right) = \left(00\right)$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 00 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = c0$ por lo tanto $x_1 = c$ con lo que obtenemos un vector

$$(x_1 x_2) = c\,(10)$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

3. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 7$ y $\lambda = 0$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] x = (00)$$

ahora tomando $\lambda = 7$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \,(x_1 x_2) = (00)$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{-2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 05 \cdot x_1 + -5 \cdot x_2 = 0$$

este sistema tiene las posibles solución tomando $x_2 = x_1$ por lo tanto $x_1 = x_2$ con lo que obtenemos un vector

$$(x_1 x_2) = c\,(11)$$

ahora tomando $\lambda = 1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \,(x_1 x_2) = (00)$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 05 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0 \right.$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = -2c$ por lo tanto $x_1 = 5c$ con lo que obtenemos un vector

$$\left(x_1 x_2 \right) = c \left(-25 \right)$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

4. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 03 & 4 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det \left[\begin{pmatrix} 1 & 03 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 03 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix} \right] x = \left(00 \right)$$

ahora tomando $\lambda = 4$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 03 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix} \right] \left(x_1 x_2 \right) = \left(00 \right)$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ -3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 03 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \right.$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\left(x_1 x_2 \right) = c \left(01 \right)$$

ahora tomando $\lambda = 1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 25 & 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix} \right] \left(x_1 x_2 \right) = \left(00 \right)$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\left\{ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 03 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0 \right.$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = -2c$ por lo tanto $x_1 = 5c$ con lo que obtenemos un vector

$$\left(x_1 x_2 \right) = c \left(-11 \right)$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

5. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 22 & 2 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix} 2 & 22 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 4$ y $\lambda = 0$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 22 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] x = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 4$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 22 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 02\cdot x_1 + -2\cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{pmatrix} x_1x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 0$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 22 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 02\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = -2c$ por lo tanto $x_1 = 5c$ con lo que obtenemos un vector

$$\begin{pmatrix} x_1x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

6. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix} 0 & 22 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = 2(1+\sqrt{2})$ y $\lambda = 2(1-\sqrt{2})$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 22 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] x = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 2(1+\sqrt{2})$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 22 & 4 \end{pmatrix} - 2(1+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2(1+\sqrt{2}) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 02 \cdot x_1 + 4 - 2(1+\sqrt{2}) \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2}1 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 2(1-\sqrt{2})$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 22 & 4 \end{pmatrix} - 2(1-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{cases} 2(1-\sqrt{2}) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 02 \cdot x_1 + 4 - 2(1-\sqrt{2}) \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = -2c$ por lo tanto $x_1 = 5c$ con lo que obtenemos un vector

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2}1 \end{pmatrix}$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

7. Calcule eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordamos que para calcular los eigenvalores de una matriz usamos:

$$det(A - \lambda I_2) = 0,$$

$$det\left[\begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Esta operacion nos da el polinomio caracteristico de I_2.

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

por lo tanto $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$. Para obtener sus eigenvectores basta resolver el sistema

$$(I_2 - \lambda I_2)x = 0$$

Sustituyendo

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] x = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = -1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

Esto nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 01 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}$$

ahora tomando $\lambda = 1$, donde x es un vector $x = (x_1, x_2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 00 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones dan el vector

$$\begin{cases} -1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 01 \cdot x_1 + -1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este sistema tiene las posibles soluciones tomando $x_2 = -2c$ por lo tanto $x_1 = 5c$ con lo que obtenemos un vector

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

los cuales generan un plano ya que no son linealmente dependientes.

19.1.1 Algunos problemas de aplicación del teorema de Bayes

Ejemplo 1

En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

1. Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.
2. Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

Solución

Se definen los sucesos:
Suceso H: seleccionar una niña.
Suceso V: seleccionar un niño.
Suceso M: infante menor de 24 meses.
En los ejercicios de probabilidad total y teorema de bayes, es importante identificar los sucesos que forman la población y cuál es la característica que tienen en común dichos sucesos. Estos serán los sucesos condicionados.

1. En este caso, la población es de los infantes. Y la característica en común es que sean menores de 24 meses. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$$P(M) = P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(M|V) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35 = 0.26$$

2. Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña una infante menor de 24 meses será:

$$P(H|M) = \frac{P(H) \cdot P(M|H)}{P(H) \cdot P(M|H) + P(V) \cdot P(V|H)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.35} = \frac{0.12}{0.26} = 0.46$$

Ejemplo 2

Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de genero masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

1. Determine la probabilidad de que sea de género masculino
2. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

Se definen los sucesos:
Suceso F: pacientes que se realizan cirugías faciales
Suceso M: pacientes que se realizan implantes mamarios
Suceso O: pacientes que se realizan otras cirugías correctivas
Suceso H: pacientes de género masculino

1. La probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes. Dicho valor será:

Solución:

$$P(H) = P(F)\cdot P(H|F) + P(M)\cdot P(H|M) + P(O)\cdot P(H|O) = 0.2\cdot 0.25 + 0.35\cdot 0.15 + 0.45\cdot 0.40 \approx 0.28$$

2. Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de bayes, luego, el valor de la probabilidad será:

$$P(M|H) = \frac{P(M)\cdot P(H|M)}{P(M)\cdot P(H|M) + P(F)\cdot P(H|F) + P(O)\cdot P(H|O)} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{0.35\cdot 0.15}{0.2\cdot 0.25 + 0.35\cdot 0.15 + 0.45\cdot 0.40} = \frac{0.0525}{0.2825} \approx 0.19$$

Ejemplo 3

Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

Solución:

Se definen los sucesos:

Suceso P: seleccionar el primer aparato

Suceso S: seleccionar el segundo aparato

Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P|E) = \frac{P(P)\cdot P(E|P)}{P(P)\cdot P(E|P) + P(S)\cdot P(E|S) + P(T)\cdot P(E|T)} = \cdots$$

$$= \frac{0.25\cdot 0.01}{0.25\cdot 0.01 + 0.35\cdot 0.02 + 0.4\cdot 0.03} = \frac{0.0025}{0.0215} = .116 \approx 0.12$$

20. Tarea 20

20.1 Cadena de Markov

En matemática se define como un proceso estocástico discreto que cumple con la propiedad de Markov, es decir, si se conoce la historia del sistema hasta su instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su estado futuro.
Una cadena de Markov es una secuencia $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de variables aleatorias. El dominio de estas variables es llamado espacio estado; el valor de Xn es el estado del proceso en el tiempo n. Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por sí sola, entonces:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (20.1)$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante i. La identidad mostrada es la propiedad de Markov.

21. Tarea 21

21.1 ¿Lateralidad del cerebro?

Rigal en su libro de Motricidad humana afirma que el cuerpo humano está construido según su eje vertical en forma simétrica y contralateral. Pero en el caso de una falta o vacío en el proceso de las vias piramidales o en el córtex motor los centros correspondientes a diversas partes no se desarrollan como dominantes, siempre en un mismo hemisferio; así es que se encuentran zurdos de mano que juegan mejor con la pierna derecha (lateralidad incompleta).

22. Tarea 22

22.1 ¿Qué plano da mayor información?

Según Marín-Franch y Foster la información de una imagen a color depende de manera crucial de la elección del sensor. Esto es si consideramos el ojo humano como nuestro sensor entonces la cantidad de información dependería de la cantidad de receptores que existen en los ojos. Ahora si consideramos la longitud de onda como una medida de la cantidad de información que tiene un color, entonces el color que tiene mayor información es es rojo ya que tiene mas ondas por longitud de tiempo.

23. Tarea 23

23.1 Máxima verosimilitud (MV)

La estimación por Máxima Verosimilitud es un método de optimización que supone que la distribución de probabilidad de las observaciones es conocida. Dado el supuesto sobre la distribución de las Y_i, construimos la verosimilitud (probabilidad conjunta) de observar la muestra que tenemos. Esa función de probabilidad conjunta es una función de una serie de parámetros desconocidos.
Elegimos como estimadores de MV aquellos valores de los parámetros desconocidos que hacen máxima esa verosimilitud. Se trata de construir la función de probabilidad conjunta (o función de verosimilitud) de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Suponemos que las observaciones son independientes y están idénticamente distribuidas (i.i.d.)

$$Y_i \sim f(Y_i; \theta),$$

donde por independencia:

$$L(\theta) = f(Y_1 \cdots Y_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i; \theta)$$

Si, para un determinado valor de θ, la verosimilitud es **pequeña**, es poco probable que ese θ sea el valor correcto que ha generado los datos que observamos. En cambio si, para un determinado valor de θ, la verosimilitud es **grande**, es bastante probable que ese θ sea el valor correcto que ha generado los datos que observamos.
Por tanto tenemos que elegir el θ que maximize $L(\theta)$. Es decir, el estimador MV será el que satisfaga la condición de primer orden:

$$\left.\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \tag{23.1}$$

23.2 Desviación estándar poblacional y muestral diferencia

la desviación estándar poblacional es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \text{donde} \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \tag{23.2}$$

y la desviación estándar muestral es:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - \bar{x})^2}. \tag{23.3}$$

Esto se debe a la corrección de Bessel. Esta corrección es tan común, que el término “desviación estandar poblacional” y “desvación estándar muestral” se refieren frecuentemente al estimador corregido, usando $n-1$. Una propiedad importante en un estimador es el valor esperado del mismo. Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre dicho valor y el verdadero valor del parámetro a estimar. Es deseable que un estimador sea insesgado, es decir, que su sesgo sea nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.

23.3 Diferencia entre análisis de componenetes principales y análisis de componenetes independientes

El análisis de componenetes independientes (ICA) proporciona una independencia de órdenes superiores, no presupone la ortogonalidad de las fuentes y el análisis de componenetes principales (ACP) es una técnica que no necesita que se especifique un modelo concreto para explicar el error, en particular, no se hace ninguna suposición sobre la distribución de probabilidad de las variables originales, aunque si se supone que es normal multivariante es posible obtener algunos resultados inferenciales adicionales.

24. Código

24.1 Código simulación bolsas

```
#include ¡cstdlib¿
#include ¡math.h¿
#include ¡iostream¿ // for cout cin
#include ¡stdlib.h¿ /* srand, rand */
#include ¡time.h¿ /* time */

using namespace std;

    int main()

int sss;
cout<< ”Capture the size of the sample space: \n”;
cin>> sss;

/*double X[4999];
for(int t = 0; t ¡= 4999; t++)*/
/*START CODE*/
int firstBag[sss];
int secondBag[sss];


/* initialize random seed 1st bag: */
srand(time(NULL));
```

```
for(int w=0; w ¡ sss;w++)
firstBag[w] = rand() % 10 + 1;




/*Output random numbers for DEBUG*/
/*for(int y=0;y ¡ sss;y++)
cout¡¡ secondBag[y] ¡¡ ", ";
*/

/*Now lets count the samples to see what do they converge to*/
double counterRed = 0;
double resultRed = 0;
double counterRed2 = 0;
double resultRed2 = 0;

for(int z=0;z ¡ sss;z++)
if(firstBag[z] ¡ 8)
counterRed++;




resultRed = counterRed / sss;

//cout<<"\n" << resultRed << "\n"; DEBUG

if(resultRed ¡ 0.7)

/* initialize random seed 2nd bag: */
srand (time(NULL) + 1);

int sampleOneper = 0;

sampleOneper = sss * 0.1;

//cout<< "\n" << sampleOneper << "\n";

for(int c = 0; c ¡ sampleOneper;c++)
secondBag[c] = 1;


for(int v=sampleOneper; v ¡ sss;v++)
```

```
secondBag[v] = rand() % 10 + 1;

/*Now lets count the samples to see what do they converge to*/
//double counterRed2 = 0;
//int counterBlack = 0;
//double resultRed2 = 0;

for(int r=0;r ¡ sss;r++)
if(secondBag[r] ¡ 5)
counterRed2++;

//cout<<”\n”<< counterRed2 <<”\n”;
resultRed2 = counterRed2 / sss;
cout<< ”Probability of getting a red ball after ” << sss << ” attempts is ” << resultRed2 << ”\n”;

double sqrtError = 0;
sqrtError = (0.37 - resultRed2) * (0.37 - resultRed2);

cout<< ”The square error is: ” << sqrtError << ”\n”;

if(sqrtError ¿ 0.01)
cout<< ”The sample size was to small or the number generator sux balls”;

else

/* initialize random seed 2nd bag: */
srand (time(NULL) + 1);

int sampleOneper = 0;

sampleOneper = sss * 0.1;

//cout<< ”\n” << sampleOneper << ”\n”;

for(int c = 0; c ¡ sampleOneper;c++)
secondBag[c] = 10;
```

```
for(int v= sampleOneper; v ¡ sss;v++)
secondBag[v] = rand() % 10 + 1;


/*Now lets count the samples to see what do they converge to*/
//double counterRed2 = 0;
//int counterBlack = 0;
//double resultRed2 = 0;

for(int r=0;r ¡ sss;r++)
if(secondBag[r] ¡ 4)
counterRed2++;




//cout<<"\n"<< counterRed2 <<"\n";
resultRed2 = counterRed2 / sss;
cout<< "Probability of getting a red ball after " << sss << " attempts is " << resultRed2 << "\n";

double sqrtError = 0;
sqrtError = (0.37 - resultRed2) * (0.37 - resultRed2);

cout<< "The square error is: " << sqrtError << " \n";

if(sqrtError ¿ 0.01)
cout<< "The sample size was to small or the number generator sux balls";



//X[t] = resultRed2;

//

/*END CODE*/
/*double sum = 0;
for(int d = 0; d ¡= 4999; d++)

sum += X[d];


sum = sum /5000;
```

```
cout<< "\n" << sum << "\n";*/

/*resultRed = counterRed / sss;
cout<< "Probability of getting a red ball after " << sss << " attempts " <<
resultRed << "\n";

double sqrtError = 0;
sqrtError = (0.7 - resultRed) * (0.7 - resultRed);

cout<< "The square error is: " << sqrtError << "\n";

if(sqrtError ¿ 0.001)
cout¡¡ "The sample size was to small or the number generator sux balls";
*/

return 0;
```

24.2 Código poligónos

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches

    def poligono(lados):
circuloPoli = patches.CirclePolygon((0,0),radius = 0.75,resolution = lados,fill = False)
plt.gca().add_patch(circuloPoli)
plt.axis(('scaled'))
plt.show()

interact(poligono, lados=(3,30,1))

HTML('''¡script¿
code_show=true;
function code_toggle()
if (code_show)
$('div.input').hide();
else
$('div.input').show();

code_show = !code_show

$( document ).ready(code_toggle);
¡/script¿
¡form action="javascript:code_toggle()"¿¡input type="submit"
value="Mostrar codigo"
style="color: transparent; background-color: transparent;
border-color: transparent; cursor: default;¿¡/form¿''')
```

24.3 Código pseudo juego de la vida

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

"""
import pygame
import random as rn
import time as tm
# Set a seed to repeat the experiment
#rn.seed(112497)
# Define some colors
BLACK = (0, 0, 0)
WHITE = (255, 255, 255)
GREEN = (0, 255, 0)
RED = (255, 0, 0)
GRAY = (192, 192, 192)

# This sets the WIDTH and HEIGHT of each grid location
WIDTH = 20
HEIGHT = 20

# This sets the margin between each cell
MARGIN = 5

# Create a 2 dimensional array. A two dimensional
# array is simply a list of lists.
grid = []
for row in range(40):
# Add an empty array that will hold each cell
# in this row
grid.append([])
for column in range(40):
grid[row].append(0) # Append a cell

# Set row 1, cell 5 to one. (Remember rows and
# column numbers start at zero.)
#grid[1][5] = 1

# Initialize pygame
pygame.init()

# Set the HEIGHT and WIDTH of the screen
WINDOW_SIZE = [(255*4)-WIDTH, (255*4)- HEIGHT]
screen = pygame.display.set_mode(WINDOW_SIZE)
```

```
# Set title of screen
pygame.display.set_caption("PseudoJuego de la vida")

# Loop until the user clicks the close button.
done = False

# Used to manage how fast the screen updates
clock = pygame.time.Clock()

# ——— Main Program Loop ————
while not done:
for event in pygame.event.get(): # User did something
if event.type == pygame.QUIT: # If user clicked close
done = True # Flag that we are done so we exit this loop
elif event.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
for a in range(1, 400):
x = rn.randint(0, 39)
y = rn.randint(0, 39)
grid[x][y] = 1
# Draw the grid
for row in range(40):
for column in range(40):
color = WHITE
if grid[row][column] == 1:
color = RED
pygame.draw.rect(screen,
color,
[(MARGIN + WIDTH) * column + MARGIN,
(MARGIN + HEIGHT) * row + MARGIN,
WIDTH,
HEIGHT])
tm.sleep(.005)
clock.tick(60)
pygame.display.flip()

counton = 0
for r in range(0, 39):
for c in range(0, 39):
if grid[r][c] == 1:
counton += 1
print "Casillas iniciales encendidas: "
print counton
print "\n"
print "Casillas iniciales apagadas: "
print 1600 - counton
```

```
tm.sleep(3)
# After filling the grid randomly we can use this cycle to propose the
rules for the cellular automata
for r in range(1, 10000):
if bool(rn.getrandbits(1)) == True:
x = rn.randint(0, 39)
y = rn.randint(0, 39)
grid[x][y] = 1
# Draw the grid
for row in range(40):
for column in range(40):
color = WHITE
if grid[row][column] == 1:
color = RED
pygame.draw.rect(screen,
color,
[(MARGIN + WIDTH) * column + MARGIN,
(MARGIN + HEIGHT) * row + MARGIN,
WIDTH,
HEIGHT])
tm.sleep(.005)
clock.tick(60)
pygame.display.flip()

elif bool(rn.getrandbits(1)) == False:
x = rn.randint(0, 39)
y = rn.randint(0, 39)
grid[x][y] = 0
# Draw the grid
for row in range(40):
for column in range(40):
color = WHITE
if grid[row][column] == 1:
color = RED
pygame.draw.rect(screen,
color,
[(MARGIN + WIDTH) * column + MARGIN,
(MARGIN + HEIGHT) * row + MARGIN,
WIDTH,
HEIGHT])
tm.sleep(.005)
clock.tick(60)
pygame.display.flip()
```

```
# Set the screen background
screen.fill(BLACK)

# Draw the grid
for row in range(40):
for column in range(40):
color = WHITE
if grid[row][column] == 1:
color = RED
pygame.draw.rect(screen,
color, [(MARGIN + WIDTH) * column + MARGIN,
(MARGIN + HEIGHT) * row + MARGIN,
WIDTH,
HEIGHT])

# Limit to 60 frames per second
clock.tick(60)

# Go ahead and update the screen with what we've drawn.
pygame.display.flip()

counton = 0
for r in range(0, 39):
for c in range(0, 39):
if grid[r][c] == 1:
counton += 1
print "Casillas finales encendidas: "
print counton
print "\n"
print "Casillas finales apagadas: "
print 1600 - counton

pygame.quit()
```

24.4 Código triángulo de Sierpinski

```
@RULE sierpinski

@TREE

num_states=4
num_neighbors=8
num_nodes=36
1 0 2 3 0
2 0 0 0 0
1 1 2 3 0
2 0 2 0 0
3 1 3 1 1
1 0 1 3 0
2 2 5 2 2
3 3 6 3 3
4 4 7 4 4
2 5 5 5 5
3 6 9 6 6
4 7 10 7 7
5 8 11 8 8
3 9 9 9 9
4 10 13 10 10
5 11 14 11 11
6 12 15 12 12
2 5 0 5 5
3 9 17 9 9
4 13 18 13 13
5 14 19 14 14
6 15 20 15 15
7 16 21 16 16
3 17 1 17 17
4 18 23 18 18
5 19 24 19 19
6 20 25 20 20
7 21 26 21 21
8 22 27 22 22
3 1 1 1 1
4 23 29 23 23
5 24 30 24 24
6 25 31 25 25
7 26 32 26 26
8 27 33 27 27
9 28 34 28 28
```

Bibliografía

[1] Joseph K. Blitzstein, *Introduction to Probability*. CHAPMAN & HALL/CRC, 1-21, 2015.

[2] California Institue of technology *Brief History of Thermoelectrics*. http://thermoelectrics.caltech.edu/thermoelectrics/history.html.

[3] D. K. C. MacDonald, *Thermoelectricity: An Introduction to the Principles*. Dover Books on Physics, 963-974, 2006.

[4] Herstein I.N., *Abstract algebra*. Wiley & sons, 3rd, Ed, 1999.

[5] *Alan Turing Srapbook* . http://www.turing.org.uk/scrapbook/ww2.html.

[6] Enigma Machine Emulator http://enigma.louisedade.co.uk/howitworks.html.

[7] Rosenthal Jeffrey.S., *A First Look at Rigourous Probability Theory*. World Scientific, 2nd, Ed, 2006.