Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia

Apuntes

Erick Daniel Téllez Sánchez

CIC-IPN

Contents

1 Tarea 1

1.1 Probabilidad Clásica

Es la probabilidad que se aplica a eventos equiposibles, la cual está definida por el número de resultados favorables o buscados del experimento sobre el número total de resultados.

$$P(A) = \frac{\text{No. de casos favorables}}{\text{No. de casos posibles}}$$

1.1.1 Probabilidad Geométrica

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región.

1.1.2 Probabilidad Frecuentista

Consiste en llevar un registro de frecuencias de los resultados obtenidos en un experimento.
Por ejemplo, registrar los resultados obtenidos de lanzar un dado 50 veces.

1.1.3 Probabilidad Subjetiva

Valor que se emplea para denotar la posibilidad de un evento que no es posible de medir, se desarrolla con la experiencia previa e información disponible. Se vasa el valor en la probabilidad del suceso en base a la creencia de que pueda ocurrir.

1.1.4 Probabilidad Axiomática

Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos. La probabilidad P de un suceso E, denotada por P(E), se define con respecto a un "universo" o espacio muestral , conjunto de todos los posibles sucesos elementales, tal que P verifique los Axiomas de Kolmogoróv, enunciados por el matemático ruso de este nombre en 1933. En este sentido, el suceso E es, en términos matemáticos, un subconjunto de Ω.

1.2 Ejemplos de experimentos deterministas y aleatorios

1.2.1 Deterministas

- Costo de la gasolina
- Consumo energético de las lamparas
- Valor del dolar
- Asistencia a la escuela de lunes a viernes
- Calificación de un examen

- Tiempo para el próximo examen
- Duración de un semaforo
- Longitud de los lapices fabricados
- Vuelos que llegan a EUA
- Tiempo de gestación de un beb

1.2.2 Aleatorios

- Lanzar un dado
- Lanzar una moneda
- Cantidad de autos verdes en la calle
- Artículos defectuosos fabricados
- Compañero de asiento en el transporte público
- Imágen al encender la televisión
- Premio en caja sorpresa
- Resultado del tratamiento del cancer
- Estatura de un ni no al crecer
- Personas llamadas Juan por país

2 Tarea 3

2.1 Ejemplos

- Cuántas combinaciones se puede formar con 10 objetos? $(10-1)! = 9! = 362,880$
- Cuántos arreglos de asientos son posibles con 8 personas alrededor de una mesa redonda? $(8-1)! = 7! = 5,040$
- De cuántas maneras pueden cuatro niños y dos niñas se sentarán en una mesa redonda? $(6-1)! = 5! = 120$
- De cuántas maneras pueden cinco personas A, B, C, D y E se sentarán alrededor de una mesa circular si A y B deben estar juntos? $(4-1)! = 3!$
- Cuántos collares de 12 cuentas cada uno se pueden hacer a partir de 18 cuentas de diferentes colores? $18P12 = \frac{18!}{(6 \cdot 24)}$
- Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra "Peligro" que tenga la i enmedio ? 6!
- Cantidad de formas que se pueden colocar los digitos 2,5,7,4 alrededor de un circulo $(4-1)! = 3! = 6$

- Número de maneras de arreglar n objetos en un circuito.
- Combinaniones alrededor de círculos.
- Maneras de acomodar conjuntos de objetos en círculo.

2.2 Números de catalan

Los números de catalan forman una secuencia de números naturales que aparecen en problemas de conteo habitualmente recursivos.

Formas de representarlos:

1. $$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}; n \geq 0$$

2. $$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}; n \geq 1$$

3. $$C_0 = 1 \ y \ C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1}; n \geq 0$$

4. $$C_0 \ y \ C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

5. $$C_n = \left\{ \begin{array}{c} n = 0 \Rightarrow 1 \\ n > 0 \Rightarrow \frac{2(2n+1)}{n+2} C_{n-1} \end{array} \right\}$$

6. $$C_n \ \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

Ejemplos de donde surgen

Encuentre el número de maneras T_n en que el interior de un polígono convexo de n lados, puede ser fividido en triángulos, dibujando diagonales que no se crucen, para $n \geq 3$.

Ejemplos de donde surgen

Maneras de triangular un polígono.

- Hay exactamente una manera de triangular un triángulo $T_3 = C_1 = 1$
- Hay exactamente dos manera de triangular un cuadrado $T_4 = C_2 = 2$

- Hay 5 diferentes maneras de triangular un pentágono $T_5 = C_3 = 5$

El número de triángulos que se forman en un polígono regular es el número de lados menos 2. Para el caso del pentágono, se pueden formar 3 triángulos, con la referencia a los números de catalan podemos saber que hay 5 maneras de colocarlos.

$$C_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3+1)!3!} = 5$$

Figure 1: Tringular un pentágono.

Formas de calcular C_n

Una de las maneras en las que pueden ser leídos los valores son del triángulo de Pascal. La manera más obvia para calcular C_n es usando la fórmula explícita.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Esta es dividiendo el coeficiente central binomial por la mitad del número del renglón más uno, es decir por n+1.

Otra forma para calcularlo

Dado que:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

C_n, puede también ser calculado dividiendo el término inmediatamente a la izquierda ó a la derecha del coeficiente central binomial por la mitad del número de renglón.

Otra forma para calcularlo

Dado que:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

C_n puede ser calculado restando al coeficiente central binomial el nmero inmediato a su izquierda o a su derecha.

3 Tarea 4

3.1 Histograma

Los histogramas son utilizados siempre por la ciencia estadística. Su función es exponer gráficamente números, variables y cifras de modo que los resultados se visualicen más clara y ordenadamente. El histograma es siempre una representación en barras y por eso es importante no confundirlo con otro tipo de gráficos como las tortas. Se estima que por el tipo de información brindada y por la manera en que ésta es dispuesta, los histogramas son de especial utilidad y eficacia para las ciencias sociales ya que permiten comparar datos sociales como los resultados de un censo, la cantidad de mujeres y/o hombres en una comunidad, el nivel de analfabetismo o mortandad infantil, etc.

3.1.1 Tipos

- Diagrama de barras simples
- Diagrama de barras agrupadas
- Polígono de frecuencias
- Ojiva porcentual

3.2 Aproximación de Stirling

La fórmula de Stirling nos permite calcular el valor aproximado de $lnN!$, cuando N es muy grande, mediante la expresión:

$$lnN! \approx NlnN - N$$

Para demostrar la fórmula de Stirling, se comienza desarrollado la función lnN! del siguiente modo:

$$lnN! = ln\prod_{i=1}^{N}(N-i-1) = \sum_{i=1}^{N} ln(N-i-1) = lnN + ln(N-1) + ... + ln2$$

La suma de los términos del último miembro de esta expresión corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos indicados en la figura,todos ellos de base unitaria, cuyas alturas respectivas son $ln2, ln3, ln4, ...lnN$. En el caso de que N sea muy grande, esta área es aproximadamente igual a la comprendida entre la la curva $y = lnx$ y las ordenadas extremas en los puntos $x = 1$ y $x = N + 1$, ya que enestas condiciones el área no considerada es despreciable en comparación con el área delimitada debajo de la curva. Así pues, se obtiene:

$$lnN! \approx \int_{1}^{N} lnxdx$$

Al integrar por partes se tiene:

$$lnN! \approx NlnN - N + 1$$

puesto que estamos considerando valores de $N >> 1$, puede despreciarse 1 frente a N en la expresión anterior, resultando:

$$lnN! \approx NlnN - N$$

3.3 Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Matemático indio muy enigmático, de familia humilde. En 1912 fue animado a comunicar sus resultados a tres distinguidos matemáticos. Dos de ellos no le respondieron, pero sí lo hizo Godfrey Harold Hardy, de Cambridge. Hardy estuvo a punto de tirar la carta, pero la misma noche que la recibió se sentó con su amigo John Edensor Littlewood (v.) a descifrar la lista de 120 fórmulas y teoremas de Ramanujan. Horas más tarde creían estar ante la obra de un genio. Hardy tenía su propia escala de valoración para el genio matemático: 100 para Ramanujan, 80 para David Hilbert, 30 para Littlewood y 25 para sí mismo. Algunas de las fórmulas de Ramanujan le desbordaron, pero escribió ...forzoso es que fueran verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas. Invitado por Hardy, Ramanujan partió para Inglaterra en 1914 y comenzaron a trabajar juntos. En 1917 Ramanujan fue admitido en la Royal Society de Londres y en el Trinity College, siendo el primer indio que lograba tal honor. De salud muy débil, moría tres años después.

Ejemplo de "Conjetura de Ramanujan":

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+\frac{4}{1+\frac{5}{1+\cdots}}}}}} = \sqrt{\frac{e\cdot\pi}{2}}$$

Número de Ramanujan

Se denomina número de Hardy-Ramanujan a todo entero natural que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos maneras diferentes.
Hardy comenta la historia detras de estos numeros.

> Recuerdo que fui a verle una vez, cuando él ya estaba muy enfermo, en Putney. Había tomado yo un taxi que llevaba el número 1729 y señalé que tal número me parecía poco interesante, y yo esperaba que él no hiciera sino un signo desdeñoso. - "No"- me respondió- este es un número muy interesante; es el número más pequeño que podemos descomponer de dos maneras diferentes como suma de dos cubos.

Se tiene:

$$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 = 1729$$

Otros números que poseen esta propiedad habían sido descubiertos por el matemático francés Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675):

$$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 = 4104$$

$$10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3 = 20683$$

$$2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3 = 39312$$

$$9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3 = 40033$$

El más pequeño de los números descomponibles de dos maneras diferentes en suma de dos potencias a la cuarta es 635,318,657, y fue descubierto por Euler (1707-1763):

$$158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657$$

3.4 Google

El término gúgol es el nombre de un número acuñado en 1938 por Milton Sirotta, un niño de 9 años, sobrino del matemático estadounidense Edward Kasner. Kasner anunció el concepto en su libro Las matemáticas y la imaginación. Isaac Asimov dijo en una ocasión al respecto: "Tendremos que padecer eternamente un número inventado por un bebé". Un gúgol es un uno seguido de cien ceros, o lo que es lo mismo, en notación científica, uno por diez a la cien:

$$10^{100}$$

Un gúgol es aproximadamente igual al factorial de 70 y sus únicos factores primos son 2 y 5 (cien veces cada uno). Escrito en el sistema binario ocupa 333 bits.

El gúgol no es de particular importancia en las matemáticas y tampoco tiene usos prácticos. Kasner lo creó para ilustrar la diferencia entre un número inimaginablemente grande y el infinito, y a veces es usado de esta manera en la enseñanza de las matemáticas.

3.5 Número más grande

Gúgolplex: 1 gúgolplex= $10^{\text{gúgol}} = 10^{10^{100}}$
Gúgolduplex: 1 gúgolduplex= $10^{\text{gúgolplex}} = 10^{10^{10^{100}}}$

4 Tarea 5

4.1 Tipos de Infinito

Infinito Numerable (llamado a veces discreto):

El conjunto de los Naturales (N) ES Infinito y es Infinito Numerable. También es infinito el conjunto de los números Pares (o impares), pues se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los Naturales y los Pares. De esto sucede que el Todo (Los naturales) puede ser igual a una de sus partes (Los Números Pares). Esto es anti intuitivo, no sucede así para los conjuntos finitos. También es infinito y de esta forma, el conjunto de los números Racionales (Q). Ellos están en correspondencia biunívoca con los Naturales.

Infinito NO Numerable:

Los Números Reales (R), llamado "el continuo", poseen una potencia infinita mayor que la de los conjuntos infinitos numerables (o enumerables). No es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los Naturales (N) y los Reales, es decir, hay infinitamente más puntos en la recta numérica que los Naturales. Pero otra paradoja maravillosa: NO hay más puntos en toda la recta numérica que en el intervalo (0,1).

Conjuntos Transfinitos:

El conjunto de las partes P(A) de un conjunto A tiene una potencia superior a A: Un conjunto siempre tiene más partes que elementos. Muy exactamente, un conjunto con "n" elementos tendrá (2 elevado a "n") partes. Así, en el conjunto A= a,b,c las partes serán:

$$P(A) = a, b, c; a; b; c; a, b; a, c; b, c; \emptyset$$

es decir, 8 partes. A estos nuevos números, Cantor los llamará transfinitos y para anotarlos elige la primera letra del alfabeto hebreo, el Aleph ($\aleph$)

A finales del siglo XIX el original matemático Georg Cantor propuso una teoría sobre los números finitos o transfinitos, según la cual el número total de fracciones, números enteros y números naturales son el mismo número transfinito al que llamó Aleph sub-cero.

La clave está en las extrañas propiedades de los números infinitos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Para objetos finitos de dos conjuntos diferentes si podemos establecer una "correspondencia uno-a-uno", entre ambos, se puede deducir que tienen el mismo número de elementos. Para un número finito de números naturales ocurre lo mismo, pero lo que es evidente para números finitos deja de serlo para infinitos.

Se puede establecer una correspondencia uno-a-uno entre los números naturales y los números enteros de la siguiente forma:
$0(entero)->0(natural); -1(entero)->1(natural); +1(entero)->2(natural)$
y así seguimos indefinidamente con la siguiente tabla:

-2	.	.	3
2	.	.	4
.	.	.	.
.	.	.	.
n	.	.	2n-1
n+1	.	.	2n
.	.	.	.
.	.	.	.

Cada entero y cada número natural aparecen una y sólo una vez en la tabla. Esta correspondencia entre cada par de números entero-natural es lo que establece en la teoría de Cantor que el número de elementos de la columna de enteros es igual al número de elementos en la columna de naturales. Por consiguiente, el número de enteros es el mismo que el de naturales. De forma similar, se puede probar que el conjunto de fracciones (racionales) tiene el mismo número de elementos que el conjunto de enteros. El número es infinito, es el mismo número.

4.2 mp3

Consideremos por ejemplo una suite de Bach. Cuando él la escribió, probablemente usó lo que se denomina notaciónmusical.Es evidente que de esta escritura,no se obtiene toda la información de una pieza: depende de quién laejecuta, cómo la interpreta, etc.Matemáticamente, esto no es muy preciso.

¿Cómo digitalizamos a Bach?

- En primer lugar registramos el sonido con intervalos de tiempomuy pequeños. (muestreo - samplingde la señal analógica.)
- Cada medición se cuantifica asignándole en forma proporcional un número entero positivo en un cierto rango, por ejemplo (de0 a 512).
- Cada uno de estos números es ahora convertido a notación binaria (ceros y unos).

- Estos números binarios agrupados consecutivamente formanuna sucesión de ceros y unos, que es lo que llamamos, la señal sonora digital en contraposición a la señal analógica.En este proceso de digitalización sólo se registró información end eterminados instantes de tiempo equiespaciados. El resto de la señal aparentemente se ha perdido.

Teorema del Muestreo ¿Cómo hacemos para entonces escuchartodala música? El Teorema de muestreo de Shannon, dice que para conocer el valor de una función o señal f(cuyo rango de frecuencias está limitado) basta con conocerla en algunos instantes equi-distribuidos. O sea, si conozco

$$..., f\left(\frac{-1}{B}\right), f\left(\frac{0}{B}\right), f\left(\frac{1}{B}\right), f\left(\frac{2}{B}\right), ...$$

entonces puedo averiguar cuánto vale f en cualquier valor. Lo que probó C.E. Shannon es que usando la función seno, puede calcular f en cualquier valor:

$$\begin{aligned} f(x) = ... + f\left(\frac{-1}{B}\right) \frac{\sin(\pi(Bx-(-1)))}{\pi(Bx-(-1))} &+ \\ f\left(\frac{0}{B}\right) \frac{\sin(\pi(Bx-(0)))}{\pi(Bx-(1))} &+ \\ f\left(\frac{1}{B}\right) \frac{\sin(\pi(Bx-(1)))}{\pi(Bx-(1))} & \end{aligned} \tag{1}$$

C.E. Shannon en realidad redescubrió este teorema en 1949 que había sido descubierto por Whittaker en 1935. Pero Shannon se dio cuenta de la utilidad de este resultado en la teoría de la transmisión de la información.Este teorema sólamente se aplica a señales cuyo rango de frecuencias está limitado a un intervalo finito. Pero esto es siempre el caso en las señal es que aparecen en la práctica (por ejemplo, la frecuencia máxima trasmitida por una línea telefónica está alrededor de 4.000 ciclos por segundo). Este teorema se prueba (demuestra) utilizando la Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier es un procedimiento matemático que descompone una señal en cada una de las frecuencias que la componen.Se puede pensar en una analogía con un prisma que descompone la luz en colores. La idea es que cada función se puede escribir como una suma de múltiplos de senos y cosenos. Si consideramos para cada número entero k(positivo y negativo) las funciones $\cos(kx)$ y $\sin(kx)$ obtenemos un sistema (o familia) infinito de funciones, conocido como el sistema trigonométrico.

Toda función f, de duración finita (por ejemplo dura 2horas), puede ser escrita, de manera única, como sumas de múltiplos de estas funciones:

$$f(x) = ... + a_{-2}\cos(-2x) + a_{-1}\cos(-x) + a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + ...$$

Está claro, que conociendo los números $..., a_{-2}, a_{-1}, a0, a_1, a_2, ...$ se vuelve a obtener la función original. El procedimiento que a una función le asigna la sucesión de números $..., a_{-2}, a_{-1}, a0, a_1, a_2, ...$, es lo que se llama transformada de Fourier.

4.3 AM, FM

Las frecuencias de las portadoras de amplitud modulada (radio AM), están en el rango de frecuencias de 535-1605 kHz. Las frecuencias de las portadoras de 540 a 1600 kHz están asignadas a intervalos de 10 kHz.

La banda de radio FM va desde 88 a 108 MHz -entre los canales de televisión VHF 6 y 7-. Las estaciones de FM tienen asignadas frecuencias centrales empezando en 88,1 MHz, con una separación de 200 khz, y un máximo de 100 estaciones. Estas estaciones de FM tienen una desviación máxima de su frecuencia central de 75 kHz, lo cual deja unas "bandas guardas" superior e inferior de 25 kHz, para minimizar la interacción con las bandas de frecuencias adyacentes.

FM Estéreo

El ancho de banda asignado a cada estación de radio FM, es suficientemente amplio para la difusión de señales en estéreo de alta fidelidad. La frecuencia de la portadora está modulada directamente, con la suma de las señales de sonido de los canales izquierdo y derecho. Una subportadora de 38 kHz, tambien modula la portadora y esa subportadora, está modulada con la diferencia de las señales de audio de los canales izquierdo y derecho. El sintonizador de FM decodifica luego esta señal y la separa en los canales de audio izquierdo y derecho.

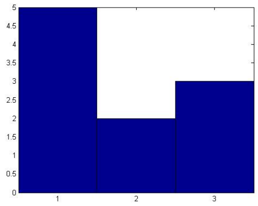
4.4 Dado de 3 caras

Se realizó el programa con Matlab debido a las dificultados con el programa ROOT CERN

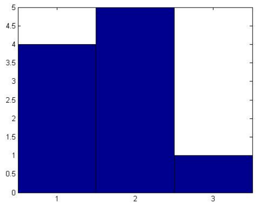
```
clear all
clc
g=zeros(1,10000);
for a=1:10000
g(a)=randi([1,3]);
end
b=[1 2 3];
hist(g,b)
```

En el programa se crea un arreglo de N números dependiendo de cuantas muestras se quieres obtener, se ilustra en el código para 10,000 elementos. Con un ciclo For guardamos en el arreglo los valores aleatorios arrohjados por la función "randi", la cual está delimitada de 1 a 3. Posteriormente se especifican los valores que se desean que sean desplegados en el histograma.

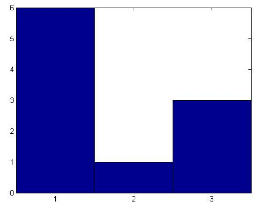
4.5 Histogramas



(a) Prueba 1

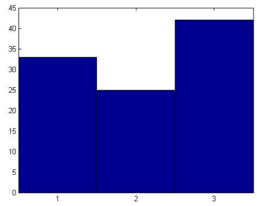


(b) Prueba 2

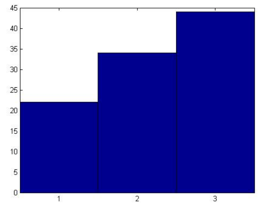


(c) Prueba 3

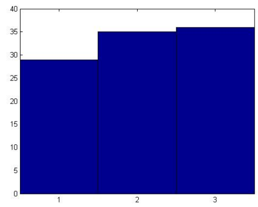
Figure 2: 10 tiradas de dado de 3 caras



(a) Prueba 1

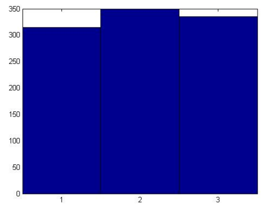


(b) Prueba 2

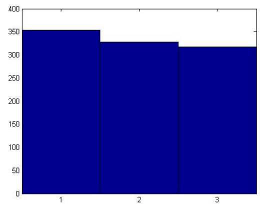


(c) Prueba 3

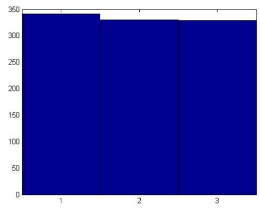
Figure 3: 100 tiradas de dado de 3 caras



(a) Prueba 1

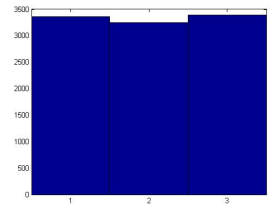


(b) Prueba 2

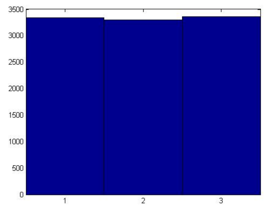


(c) Prueba 3

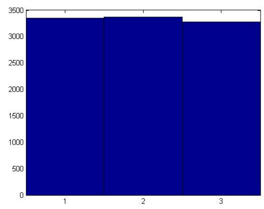
Figure 4: 1000 tiradas de dado de 3 caras



(a) Prueba 1



(b) Prueba 2



(c) Prueba 3

Figure 5: 10,000 tiradas de dado de 3 caras

En donde se puede comprobar que a medida que se incrementa el número de tiradas del dado se va volviendo más uniforme el resultado.

4.6 Challenger

Siete astronautas perecieron a bordo del transbordador espacial Challenger de la NASA el 28 de enero de 1986. Un cuarto de siglo después, el accidente ocurrido a escasos 73 segundos del despegue, a más de 15 kilómetros sobre el Océano Atlántico, sigue siendo el fracaso más recordado de la historia de la exploración espacial.

Fue la primera catástrofe aeronáutica que se desarrolló a la vista de todos durante una transmisión en directo por televisión. Tras una espectacular explosión, el compartimento donde viajaba la tripulación salió disparado intacto en una bola de fuego y continuó subiendo otros cinco kilómetros antes de caer. La caída duró más de dos minutos. No hubo paracaídas para frenar el descenso, ningún sistema de escape. Para colmo, a bordo del Challenger se encontraba Christa McAuliffe, una profesora de New Hampshire que había ganado el concurso nacional "Un Profesor en el Espacio", convirtiéndose en la primera civil que volaba en una misión espacial.

La causa se determinó rápidamente: las temperaturas inusualmente bajas la noche previa al lanzamiento causaron porosidad en los aros de goma que sellaban una junta entre segmentos del cohete impulsor. El accidente produjo la paralización de los vuelos durante 32 meses. El siguiente lanzamiento de un transbordador (STS-26R Discovery) no se produciría hasta el 29 de septiembre de 1988.

5 Tarea 6

5.1 Distribución normal

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales.

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

5.2 Densidad de probabilidad

En la teoría de la probabilidad, la función de densidad de probabilidad, función de densidad, o, simplemente, densidad de una variable aleatoria continua describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable aleatoria tomará determinado valor.

La probabilidad de que la variable aleatoria caiga en una región específica del espacio de posibilidades estará dada por la integral de la densidad de esta variable entre uno y otro límite de dicha región.

La función de densidad de probabilidad (FDP o PDF en inglés) es no-negativa a lo largo de todo su dominio y su integral sobre todo el espacio es de valor unitario.

`Figuras/normal.JPG`

Figure 6: Función normal.

5.3 Distribución de Poisson

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

Concretamente, se especializa en la probabilidad de ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, o sucesos "raros".

5.4 Distribución uniforme

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución uniforme continua es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros, a y b, que son sus valores mínimo y máximo. La distribución es a menudo escrita en forma abreviada como U(a,b).

5.5 Varianza y Desviación estandar

La desviación típica o desviación estándar (σ) es una medida de dispersión para variables de razón (variables cuantitativas o cantidades racionales) y de intervalo. Se define como la raíz cuadrada de la varianza de la variable.

En teoría de probabilidad, la varianza (que suele representarse como σ^2) de una variable aleatoria es una medida de dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media.

5.6 Ecuación cuadratica

```
// hello.c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main() {
  double a,b,c,x1,x2;
  printf("Coeficiente de a:\n");
  scanf("%lf", &a);
  printf("Coeficiente de b:\n");
  scanf("%lf", &b);
  printf("Coeficiente de c:\n");
  scanf("%lf", &c);

  x1=(-b+(sqrt(b*b-4*a*c)))/2*a;
  x2=(-b-(sqrt(b*b-4*a*c)))/2*a;

  printf("Soluciones: %lf y %lf\n",x1,x2);

  printf("Hola!\n");
  return 0;
}
```

Compilado con los comandos gcc archivo.C, agregandole el comando -lm para utilizar la libreria math.h.
Para generar el ejecutable se ocupa la instrucción gcc -o archivo.exe archivo.c

5.7 Histograma 1.2.3

Figuras/histo.JPG

Figure 7: Histograma.

6 Tarea 7

6.1 Exponencial

El volumen de ventas mensuales (y) en miles de dólares y los años de experiencia 6 vendedores de la una empresa procesadora de alimentos, se dan en la tabla

x	1	2	3	4	5	6
y	10	40	120	300	800	500

Solución

Estimando la ecuación de regresión exponencial:

$$\begin{aligned} Y &= Ae^{Bx} \\ ln(Y) &= ln(Ae^{Bx}) \\ ln(Y) &= Y' \\ ln(A) &= A' \\ Y' &= A' + Bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{n\sum xY' - (\sum x)(\sum Y')}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \\ A' &= \overline{Y'} - B\overline{x} \end{aligned}$$

	x	Y	$Y' = ln(Y)$	xY'	x^2
	1	10	2.303	2.303	1
	2	40	3.689	7.378	4
	3	120	4.787	14.362	9
	4	300	5.704	22.815	16
	5	800	6.685	33.423	25
	6	500	6.215	37.288	36
$\sum$	21		29.382	117.569	91

$$\begin{aligned} B &= \frac{6 \cdot 117.569 - 21 \cdot 29.382}{6 \cdot 91 - 21^2} \\ B &= 0.84 \\ A' &= \frac{29.382}{6} - 0.84 \cdot \frac{21}{6} \\ A' &= 1.95 = ln(A) \rightarrow A = e^1.95 \\ A &= 7.03 \end{aligned}$$

$$Y = 7.03 \cdot e^{0.84x}$$

Figuras/exp.JPG

Figure 8: Comparación.

7 Función cúbica

De la tabla:

x	1	0	1	1.3
y	0	0	0.1	1

Se usa el polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Sustituyendo los valores de la tabla en un polinomio grado 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
0 &= a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 \\
0 &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 \\
0.1 &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 \\
1 &= a_0 + a_1(1.3) + a_2(1.3)^2 + a_3(1.3)^3
\end{aligned}$$

Obteniendo:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= -0.898 \\
a_2 &= 0.05 \\
a_3 &= 0.948
\end{aligned}
$$

Obteniendo como resultado el polinomio:

$$p(x) = -0.898x + 0.05x^2 + 0.948x^3$$

Figuras/cubi.JPG

Figure 9: Comparación.

7.1 Lineales

Mes	Costo(y)	Horas(x)
Enero	400	10
Febrero	500	12.5
Marzo	500	17.5
Abril	600	20
Mayo	1500	50
Junio	900	30
Total	4400	140

Mes	Costo(y)	Horas(x)	xy	x^2
Enero	400	10	4000	100
Febrero	400	10	6250	156
Marzo	400	10	8750	306
Abril	400	10	12000	400
Mayo	400	10	75000	2500
Junio	400	10	27000	900
Total	4400	140	133000	4363

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \\
a &= \frac{(\sum Y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}
\end{aligned}
$$

$$b = \frac{6(133000) - (140)(4400)}{6(4363) - (140)^2} = \frac{182000}{6578} = 27.67$$

$$a = \frac{(4400)(4363) - (140)(133000)}{6(4363) - (140)^2} = \frac{577200}{6578} = 87.75$$

$$y = a + bx$$

$$y = 87.75 + 27.67x$$

Figuras/lin1.JPG

Figure 10: Comparación.

	Años(x)	Ventas(y)	x^2	xy
	1	11000	1	11000
	2	16000	4	32000
	3	18000	9	54000
	4	19000	16	76000
	5	13000	25	65000
	6	15000	36	90000
	7	12000	49	84000
	8	18000	64	144000
	9	26000	81	234000
	10	23000	100	230000
Total	55	171000	385	1020000

De las formulas anterios:

$$b = 11800; m = 963.64$$

Onteniendo:

$$y = 963.64x + 11800$$

Figuras/lin2.JPG

Figure 11: Comparación.

8 Análisis de componentes principales

En estadística, el análisis de componentes principales (en español ACP, en inglés, PCA) es una técnica utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos. Intuitivamente la técnica sirve para hallar las causas de la variabilidad de un conjunto de datos y ordenarlas por importancia.

Análisis de la matriz de correlaciones:

Un análisis de componentes principales tiene sentido si existen altas correlaciones entre las variables, ya que esto es indicativo de que existe información redundante y, por tanto, pocos factores explicarán gran parte de la variabilidad total.

Selección de los factores:

La elección de los factores se realiza de tal forma que el primero recoja la mayor proporción posible de la variabilidad original; el segundo factor debe recoger la máxima variabilidad posible no recogida por el primero, y así sucesivamente. Del total de factores se elegirán aquéllos que recojan el porcentaje de variabilidad que se considere suficiente. A éstos se les denominará componentes principales.

Análisis de la matriz factorial:
Una vez seleccionados los componentes principales, se representan en forma de matriz. Cada elemento de ésta representa los coeficientes factoriales de las variables (las correlaciones entre las variables y los componentes principales). La matriz tendrá tantas columnas como componentes principales y tantas filas como variables.

8.1 Valores propios

Valores y vectores propios

En álgebra lineal, los vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio, eigenespacio o subespacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.
Los valores propios o raices caracteristicas de una matriz cuadrado A, cumplen con :

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtendremos un polinomio de grado n en terminos de λ. Las raices de ese polinomio son los valores propios de la matriz A. Una vez obtenidos esos valores propios, se requiere encontrar el vector propio X que corresponde a la solución de resolver el sistema homogeneo : $AX = \lambda X$ Donde $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$
Ejemplo. Determine los valores y vectores propios de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para los valores propios se tiene que:

$$PA(\lambda) = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$PA(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$$

Para los vectores propios:

$$(A_1 - \lambda_n I)x = 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) x = 0$$

Desarrollando mediante Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Convirtiendo en ecuacion y poniendo en notacion vectorial:

$$x - y = 0 \to x = y \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que cualquier vector con la forma $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 3$. Si y =1, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = -1$

$$(A_1 - \lambda_n I)x = 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) x = 0$$

Desarrollando mediante Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Convirtiendo en ecuacion y poniendo en notacion vectorial:

$$x + y = 0 \to x = -y \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que cualquier vector con la forma $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$. Si y =1, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9 Tarea 8

Teorema de Cayley-Hamilton

Resumen

El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica: Si $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces p(A) es la matriz nula.
El interés de la demostración radica en la utilidad que puede tener para nuestros alumnos de primer curso, la exposición de un desarrollo lógico basado en sus conocimientos básicos de cálculo matricial. También es inmediato y puede ser igualmente útil calcular, a partir del teorema, la inversa de A, cuando A sea no singular.

9.1 Teorema

Sea $p(X) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ el polinomio característico de una matriz A de orden n. Entonces

El teorema de Cayley-Hamilton asegura que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo cualquiera anula su propio polinomio característico.
En términos matriciales, eso significa que :
si A es una matriz cuadrada de orden n y si

$$p(X) = \det(XIn - A) = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \ldots + p_1X + p_0$$

es su polinomio característico (polinomio de indeterminada X), entonces al sustituir formalmente X por la matriz A en el polinomio, el resultado es la matriz nula:

$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \ldots + p_1A + p_0I_n = 0_n.$$

El teorema de Cayley-Hamilton se aplica también a matrices cuadradas de coeficientes en un anillo conmutativo cualquiera.
Un corolario importante del teorema de Cayley-Hamilton afirma que el polinomio mínimo de una matriz dada es un divisor de su polinomio característico, y no solo eso, el polinomio mínimo tiene los mismos factores irreducibles que el polinomio característico.
Consideremos por ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico se escribe

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} = (x-1)(x-4) - (-2)(-3) = x^2 - 5x - 2$$

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que

$$A^2 - 5A - 2I_2 = 0$$

y esta relación puede verificarse inmediatamente en ese caso. Además el teorema de Cayley-Hamilton permite calcular las potencias de una matriz de modo más sencillo que por un cálculo directo. Tomemos la relación anterior

$$A^2 - 5A - 2I_2 = 0$$

$$A^2 = 5A + 2I_2$$

Así, por ejemplo, para calcular A^4, podemos escribir

$$A^3 = (5A + 2I_2)A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2$$

y llegamos a

$$A^4 = A^3A = (27A + 10I_2)A = 27A^2 + 10A = 27(5A + 2I_2) + 10A$$

$$A^4 = 145A + 54I_2$$

Podemos utilizar también la relación polinomial inicial $A^2 - 5A - 2I_2 = 0$ para probar la inversibilidad de A y calcular su inverso. En efecto, basta con factorizar una potencia de A donde sea posible y $A(A - 5I) = 2I_2$ lo que demuestra que A admite como inverso

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$$

10 Tarea 9

Teorema de Cayley-Hamilton

Resumen

El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica: Si $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A)$ es la matriz nula.

El interés de la demostración radica en la utilidad que puede tener para nuestros alumnos de primer curso, la exposición de un desarrollo lógico basado en sus conocimientos básicos de cálculo matricial. También es inmediato y puede ser igualmente útil calcular, a partir del teorema, la inversa de A, cuando A sea no singular.

10.1 Teorema

Sea $p(X) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ el polinomio característico de una matriz A de orden n. Entonces $p(A) = (-1)^nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1A + c_0I$ es la matriz nula. Es decir, cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica $p(A) = 0$

11 Tarea 10

11.1 R-matrices

Definición de la matriz

```
> B = matrix(
+    c(2, 4, 3, 1, 5, 7),
+    nrow=3,
+    ncol=2)

> B              # B has 3 rows and 2 columns
     [,1] [,2]
[1,]    2    1
[2,]    4    5
[3,]    3    7
```

11.2 Transpuesta

```
> t(B)           # transpose of B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    4    3
[2,]    1    5    7
```

11.3 Combinación

Combinación de columnas

```
> C = matrix(
+    c(7, 4, 2),
+    nrow=3,
+    ncol=1)

> C              # C has 3 rows
     [,1]
[1,]    7
[2,]    4
[3,]    2
```

```
> cbind(B, C)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    1    7
[2,]    4    5    4
[3,]    3    7    2
```

Combinación de filas

```
> D = matrix(
+    c(6, 2),
+    nrow=1,
+    ncol=2)

> D              # D has 2 columns
     [,1] [,2]
[1,]    6    2

> rbind(B, D)
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    1
[2,]    4    5
[3,]    3    7
[4,]    6    2
```

11.4 Descomposición de la matriz

```
> c(B)
[1] 2 4 3 1 5 7
```

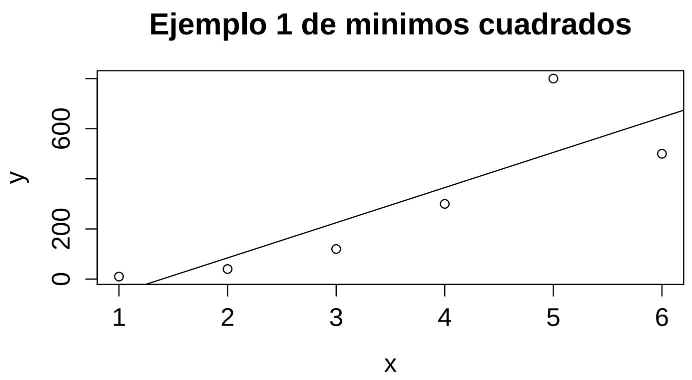
11.5 Función lm

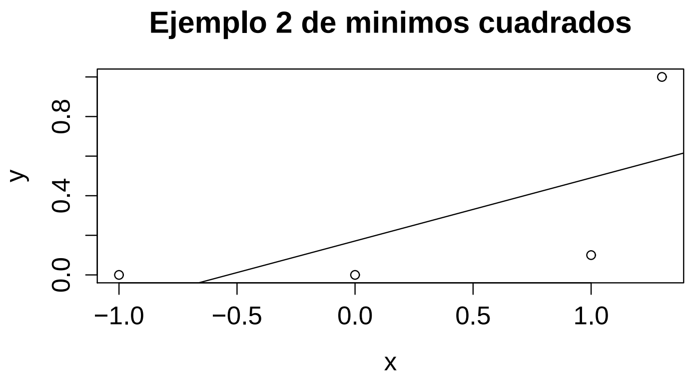
Para ajustar un modelo lineal por cuadrados mínimos a un conjunto de datos se utiliza la función lm(). Esta función se puede utilizar para regresión lineal simple, regresión lineal múltiple y regresiones polinomiales.

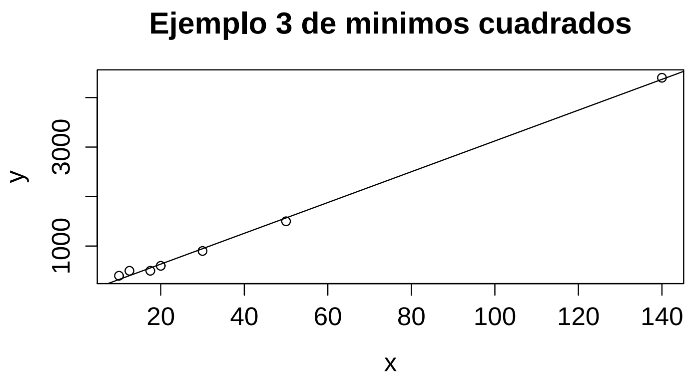
11.6 Ejemplos

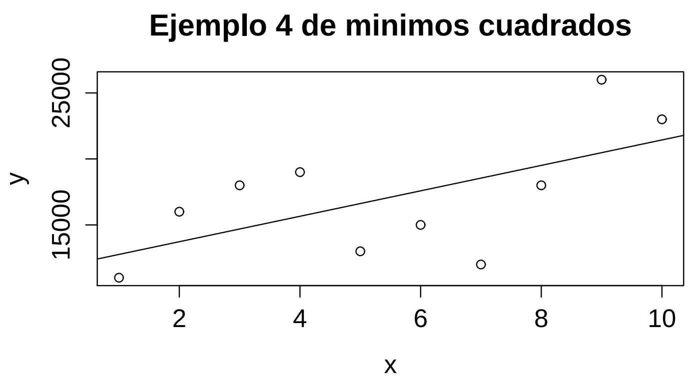
```
> lm(y ~ x)                          # regresion lineal simple (RLS)
> lm(y ~ x1 + x2)                    # ajuste de un plano
> lm(y ~ x + I(x^2))                 # modelo cuadratico
> lm(y ~ x + I(x^2) + I(x^3))        # modelo cubico
> lm(y ~ x - 1)                      # RLS por el origen
```

11.7 Mínimos Cuadrados en R




Ejemplo 2 de minimos cuadrados
y
0.0
0.4
0.8
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x


Ejemplo 3 de minimos cuadrados
y
1000
3000
20
40
60
80
100
120
140
x


Ejemplo 4 de minimos cuadrados
y
15000
25000
2
4
6
8
10
x

12 Tarea 11

Coeficiente de correlación de Pearson.
Usando una función implementada en el software que realiza el calculo directamente con el comando "cor".

```
x1 <- sample(1:10,50)
x2 <- sample(1:10,50)

x=cor(x1,x2)
```

13 Tarea 12

En matemáticas, una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x-a)^n$ llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto a suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Si esta serie está centrada sobre el punto cero, a=0, se le denomina serie de McLaurin.

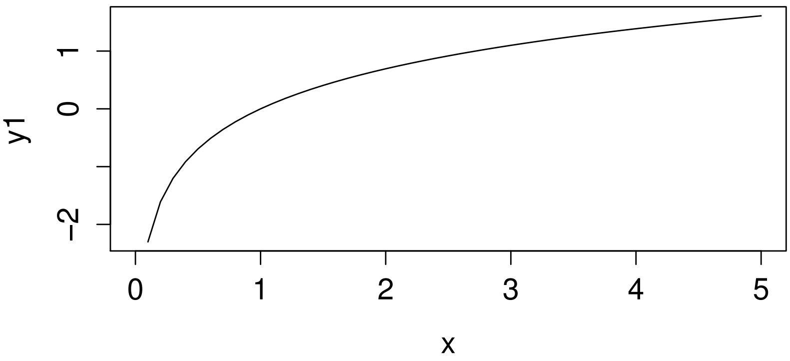
Esta aproximación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones
- Es posible calcular la optimidad de la aproximación.

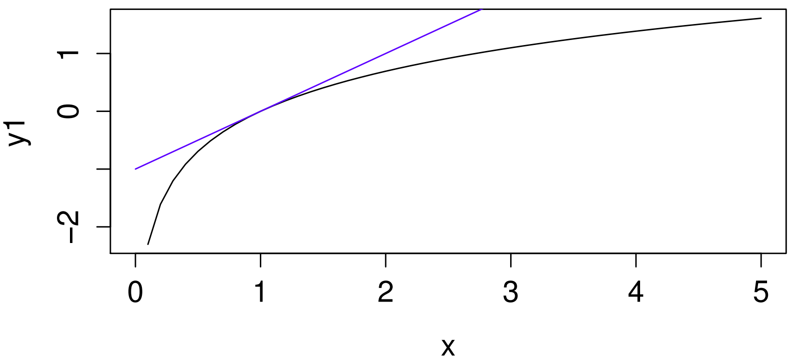
13.1 Grafica en R

Para apreciar la aproximación que se va generando con la serie de Taylor del $\log x$

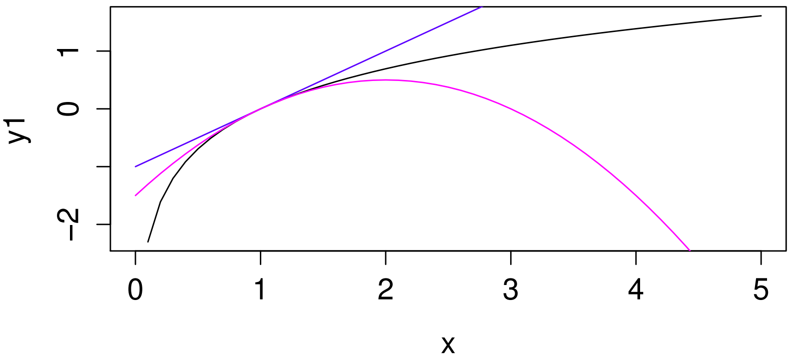
$\log x$



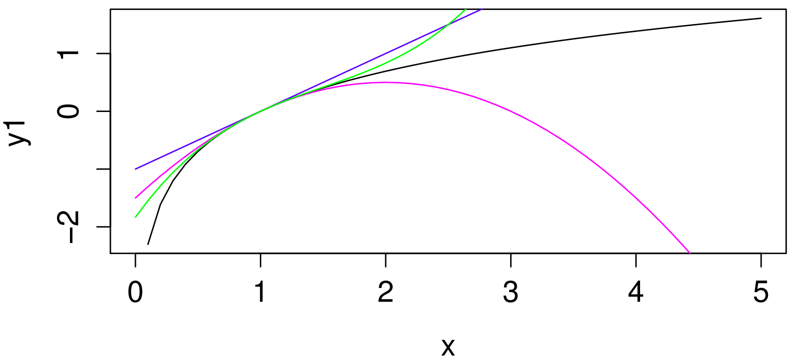
$(x-1)$



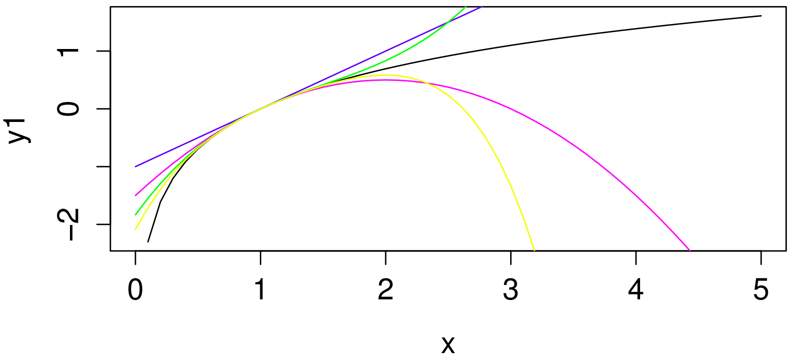
$(x-1)+(-1/2)\cdot(x-1)^2$



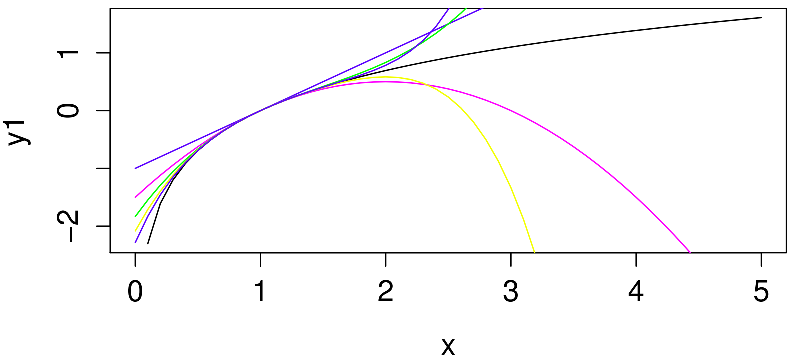
$(x-1)+(-1/2)\cdot(x-1)^2+(1/3)\cdot(x-1)^3$



$(x-1)+(-1/2)\cdot(x-1)^2+(1/3)\cdot(x-1)^3-(1/4)\cdot(x-1)^4$



$(x-1)+(-1/2)\cdot(x-1)^2+(1/3)\cdot(x-1)^3-(1/4)\cdot(x-1)^4+(1/5)\cdot(x-1)^5$



14 Tarea 14

14.1 Ecuación 46

De la Serie de Taylor

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots. \tag{2}$$

Para el caso del $f(n_1)=\ln W(n_1)$, cerca de su máximo

$$n_1 \equiv \tilde{n}_1+\eta \tag{3}$$
$$\eta = n_1-\tilde{n}_1 \tag{4}$$

Entonces usando la expansión en series de Taylor para $\ln W(n_1)$ alrededor del punto $\tilde{n_1}$:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + \frac{d\ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1}\frac{(n_1-\tilde{n}_1)}{1!} + \frac{d^2\ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^2}\frac{(n_1-\tilde{n}_1)^2}{2!} + \frac{d^3\ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^3}\frac{(n_1-\tilde{n}_1)^3}{3!} + \cdots \tag{5}$$

Por último , sustituyendo η y haciendo $B_k = \frac{d^k \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1{}^k}$ la k-ésima derivada evaluada en $\tilde{n_1}$, donde $k \geq 1$ se tiene la expresión:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n_1}) + B_1\eta + \frac{1}{4}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \cdots \tag{6}$$

14.2 Ecuación 54

Ecuación 54

$$lnW(n_1) = lnN! - lnn_1! - ln(N-n_1) + n_1 lnp + (N-n_1)lnq$$

$$f(x) = ln(x)$$

De las derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = \frac{-1}{x^2}, f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}, ..., f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^n}$$

De la formula

$$ln(x) = ln(a) + \frac{1}{a}\frac{(x-a)}{1} + \frac{-1}{a^2}\frac{(x-a)^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n}\frac{(x-a)^n}{n}...$$

Entonces

$$ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)}$$

14.3 Ecuación 55

Partiendo de la ecuación 54, se observa que para cuando n es un entero grande de forma que $n >> 1$, entonces $\ln(n!)$ se puede considerar casi una función continua de n, de forma que se puede aproximar la derivada de la función para la condición anterior con la consideración de que la función solo cambia una pequeña fracción de si misma en cada paso. Si consideramos como $\ln(n+1!)$ como ese ligero cambio entre $ln(n!)$ y el siguiente paso, entonces:

$$\frac{d\ln(n!)}{dn} \approx \ln(n+1)! - \ln(n)!$$

Por leyes de logaritmos:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Entonces:

$$\ln(n+1)! - \ln(n!) = \ln\frac{(n+1)!}{n!}$$

Ya que se hizo la consideración de q n es un entero muy grande de forma que $n >> 1$ entonces:

$$\ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1)$$

Por lo que:

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} \approx \ln(n+1)$$

14.4 Ecuación 56

Ya que se considera n como un entero muy grande de forma que $n \gg 1$, entonces. mediante la fórmula de Stirling se tiene:

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

Derivando ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{d(n \ln n - n)}{dn} \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{n}{n} + \ln n - 1 \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \ln n \end{aligned} \tag{7}$$

14.5 Ecuación 57

De $\ln W(n1) = \ln N! - \ln(n1!) - \ln(N - n1)! + n_1 \ln(p) + (N - n1)\ln(q)$ y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d\ \ln\ n!}{dn} \approx \frac{\ln(n+1)! - \ln(n)!}{n!} = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1)$$

$$\frac{d\ \ln\ n!}{dn} = \ln(n)$$

Al derivar $\ln W(n1)$ con respecto de n_1 se tiene que:

$$\frac{d\ \ln\ W}{dn} = \cancel{\ln N!} - \ln(n_1) + \ln(N - n_1) + \ln(p) - \ln(q)$$

Esto debido a que el termino $\ln N!$ es constante con respecto a la variable independiente. De la propiedad anterior del logaritmo, $\frac{d\ -\ln(n_1)!}{dn} = -\ln(n_1)$, junto con el termino $-\ln(N - n1)!$. El termino $\ln(p)$ se obtiene ya que se anula el n_1 por la variable independiente, para el ultimo termino al desarrollar el paracentesis se obtiene $N\ \ln(q) - n_1\ \ln(q)$, $N\ \ln(q)$ es constante y de $-n_1\ \ln(q)$, n_1 se elimina y deja el signo negativo.

14.6 Ecuación 58

Igualando [57] a 0, se encuentra el valor $n_1 = \tilde{n}_1$, donde W es el máximo, entonces, se obtiene:

$$\frac{d\ \ln\ W}{dn} = -\ln(n_1) + \ln(N - n_1) + \ln(p) - \ln(q) = 0$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$[\ln(N-n_1)-\ln(n_1)]+[\ln(p)-\ln(q)]=0$$

$$\ln\left(\frac{N-n_1}{n_1}\right)+\ln\left(pq\right)=0$$

$$\ln\left(\frac{N-n_1}{n_1}\frac{p}{q}\right)=0$$

$n_1 =$ñ$_1$

14.7 Ecuación 59

Reorganizando la ecuacion 58:

$$ln\left(\frac{N-\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1}\frac{p}{q}\right)=0 \tag{8}$$

$$e^{ln\left(\frac{N-\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1}\frac{p}{q}\right)}=e^0 \tag{9}$$

$$\frac{N-\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1}\frac{p}{q}=1 \tag{10}$$

$$(N-\tilde{n}_1)p=\tilde{n}_1 q \tag{11}$$

14.8 Ecuación 60

$$\begin{aligned}(N-\tilde{n_1})p&=\tilde{n_1}q\\ Np-\tilde{n_1}p&=\tilde{n_1}q\\ Np&=\tilde{n_1}q+\tilde{n_1}p\\ Np&=\tilde{n_1}(q+p)\\ Np&=\tilde{n_1}\end{aligned}$$

Recordando que:

$$p+q=1$$

14.9 Ecuación 61

$$\frac{d^2\ln W(n_1)}{dn_1^2}=-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{N-n_1}$$

Partiendo la primera derivada

$$\begin{aligned}\frac{d\ln W(n_1)}{dn_1}&=-\ln n_1+\ln N-n_1+\ln p-\ln q\\ \frac{d}{dn_1}\left(\frac{d\ln W(n_1)}{dn_1}\right)&=\frac{d}{dn_1}\left(-\ln n_1+\ln N-n_1+\ln p-\ln q\right)\\ \frac{d^2\ln W(n_1)}{dn_1^2}&=-\frac{d(\ln n_1)}{dn_1}+\frac{d\ln\left(N-n_1\right)}{dn_1}+\frac{d(\ln p)}{dn_1}-\frac{(\ln q)}{dn_1}\end{aligned}$$

Resolviendo las derivadas se tiene que:

$$\begin{aligned}
-\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} &= -\frac{1}{n_1} \\
\frac{d\ln(N-n_1)}{dn_1} &= \frac{d\ln(N-n_1)}{dn_1}\frac{d(N-n_1)}{dn_1} \\
&= \frac{1}{N-n_1}(-1) = -\frac{1}{N-n_1} \\
\frac{d\ln p}{dn_1} &= 0 \\
\frac{d\ln q}{dn_1} &= 0
\end{aligned}$$

Sumando los terminos obtenidos, comprobamos que:

$$\frac{d^2\ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N-n_1}$$

14.10 Ecuación 62

Evaluando la ecuación 61 con lo obtenido en la ecuación 60 se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N-Np}$$

Desarrolando se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \frac{1}{N(1-p)}$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{(1-p)}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{q+p}{pq}$$

Dado que $p+q=1$

$$b_2 = -\frac{1}{Npq}$$

15 Tarea 15

15.1 Congruencia Zeller

Codigo generado en Mathematica que regresa el dia de la semana al que pertenece una fecha especifica definida por el usuario.

InputField[Dynamic[dia], Number]

InputField[Dynamic[mes], String]

InputField[Dynamic[ano], Number]

InputField[Dynamic[res]]

Dia $\boxed{1}$;

Mes $\boxed{\text{enero}}$;

Año $\boxed{1991}$;

Eldíafue $\boxed{\text{“martes”}}$;

$\text{Dynamic}[j = \text{Switch}[\text{mes}, \text{“enero”}, 1, \text{“febrero”}, 2, \text{“marzo”}, 3, \text{“abril”}, 4, \text{“mayo”}, 5,$

$\text{“junio”}, 6, \text{“julio”}, 7, \text{“agosto”}, 8, \text{“septiembre”}, 9,$

$\text{“octubre”}, 10, \text{“noviembre”}, 11, \text{“diciembre”}, 12]]$

1

$\text{Dynamic}[j]$

1

$\text{Dynamic}[a = (14 - j)/12]$

$\text{Dynamic}[a = \text{Floor}[a]]$

$\frac{13}{12}$

1

$\text{Dynamic}[y = \text{ano} - a]$

1990

$\text{Dynamic}[m = j + 12 * a - 2]$

11

$\textbf{Dynamic}[c = \textbf{dia} + y + \textbf{Floor}[y/4] - \textbf{Floor}[y/100] + \textbf{Floor}[y/400] + (31 * m)/12]$

$\textbf{Dynamic}[c = \textbf{Floor}[c]]$

$\frac{30017}{12}$

2501

$\textbf{Dynamic}[d = \textbf{Mod}[c, 7]]$

2

Dynamic[dia]

Dynamic[mes]

Dynamic[ano]

$\textbf{Dynamic}[d]$

1

enero

1991

2

Dynamic[res = Switch[d, 0, "domingo", 1, "lunes", 2, "martes", 3,

"miercoles", 4, jueves, 5, "viernes", 6, "sabado"]]

"martes"

martes

16 Tarea 16

16.1 Función de Distribución de Energía

La función de distribución $f(E)$, es la probabilidad de que una partícula se encuentre en el estado de energía E. La función de distribución es una generalización de las ideas de probabilidad discreta, para el caso donde la energía puede ser tratada como una variable continua. En la naturaleza se encuentran tres funciones de distribución claramente diferentes. El término A en el denominador de cada distribución es un término de normalización, que puede cambiar con la temperatura.

16.2 Distribución Maxwell-Boltzmann

La distribución de Maxwell-Boltzmann es la función de distribución clásica, para la distribución de una cantidad de energía entre partículas idénticas pero distinguibles.

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}} \tag{12}$$

Además de la presunción de distinguibilidad, la física estadística clásica postula que:

- No hay ninguna restricción sobre el número de partículas que pueden ocupar un estado dado.
- En el equilibrio térmico, la distribución de partículas entre los estados de energía disponibles, se llevará a cabo con la distribución más probable, la cual es consistente con la energía total disponible y el número total de partículas.
- Cada estado específico del sistema tiene la misma probabilidad.

16.3 Distribución Bose-Einstein

La distribución de Bose-Einstein describe el comportamiento estadístico de las partículas de *espín* entero(bosones). A bajas temperaturas, los bosones se comportan de manera muy diferente a los fermiones, debido a que un número ilimitado de ellos pueden captar el mismo estado de energía, un fenómeno llamado *condensación*

$$f(E) = \frac{1}{A\mathrm{e}^{\mathrm{E/kT}} - 1} \tag{13}$$

Donde:

- $f(E)$: La probabilidad de que una particula tenga energia E
- A : Constante de Normalización, para fotones $A = 1$ asi, la ocupacion de estados de muy poca energía se incrementan sin limite
- k : Constante de Boltzmann
- T : Temperatura absoluta

16.4 Distribución Fermi-Dirac

La distribución de Fermi-Dirac se aplica a los fermiones, partículas con espín semientero, que obedece el principio de exclusión de Pauli. Cada tipo de función de distribución tiene un término de normalización multiplicando el denominador del exponente, que puede ser dependiente de la temperatura. Para el caso de Fermi-Dirac, ese término se suele escribir:

$$e^{-E_F/kT} \tag{14}$$

Donde E_F = Energía Fermi
La importancia de la energía de Fermi se ve más claramente estableciendo $T = 0$. En el cero absoluto, la probabilidad es igual a 1 para energías menores que la energía de Fermi y cero para energías mayores que la energía de Fermi. Se puede imaginar todos los niveles hasta la energía de Fermi llenos, pero ninguna partícula tiene una energía mayor. Esto es totalmente coherente con el principio de exclusión de Pauli, donde cada estado cuántico no puede tener más que una sola partícula.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \tag{15}$$

17 Tarea 17

17.1 Series geométricas

La noción de progresión puede asociarse a una sucesión, un progreso, un desarrollo o un avance de algo. Geométrico, por su parte, es un adjetivo vinculado a la geometría (la rama de la matemática orientada al análisis de las características de las figuras en un espacio o en un plano).

Estas definiciones nos ayudan a comprender a qué se refiere la idea de progresión geométrica. Se trata de una secuencia formada por elementos sucesivos, obtenidos mediante la multiplicación del elemento previo por un valor constante. Dicha constante recibe el nombre de factor o razón.

Lo habitual es que una progresión geométrica refiera a una secuencia que dispone de un número finito de términos. En cambio, si la secuencia se extiende hasta el infinito, suele hablarse de sucesión geométrica.

Es importante tener en cuenta que el factor constante de una progresión geométrica puede un número negativo o incluso un número fraccionario. Cuando la razón es un número negativo, los elementos de la progresión geométrica alternarán entre valores positivos y negativos:
Progresión geométrica con factor -3: 8; -24; 72; -216.
Progresión geométrica con factor 1,5: 2; 3; 4,5; 6,75.
Cabe destacar, por último, que si el factor es 1, la progresión geométrica será constante:
Progresión geométrica con factor 1: 5, 5, 5, 5, 5 (ya que 5 x 1 = 5; 5 x 1 = 5, etc.)

17.2 Ejemplos

- 5, 10, 20, 40, ... Factor=2
- -11, 22, -44, 88, ... Factor=-2
- 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{27}$, $\frac{64}{81}$, ... Factor=$\frac{2}{3}$
- 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ... Factor=$-\frac{1}{2}$
- 2, 6, 18, 54, ... Factor=3