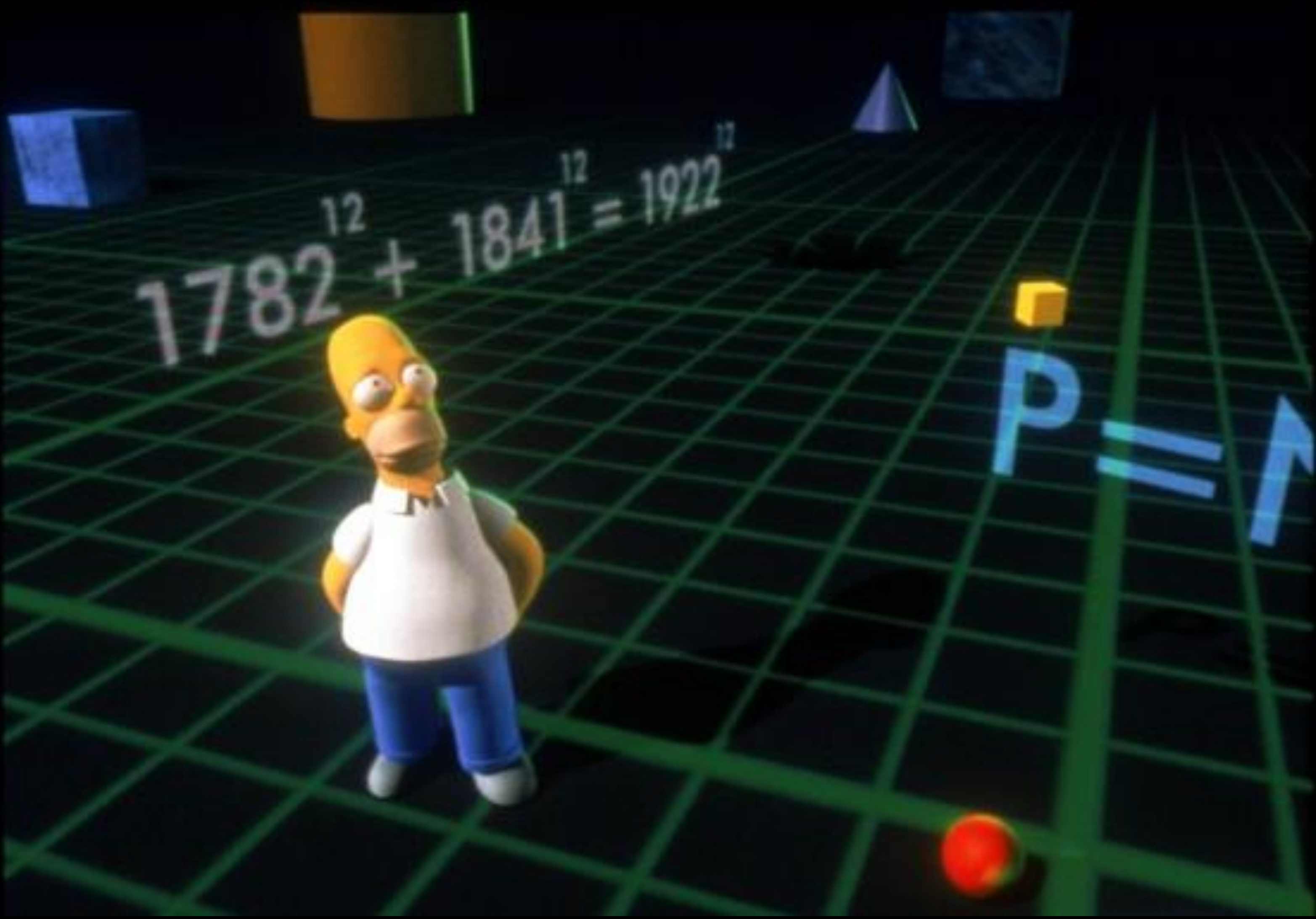
Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia



Romero Ruíz Diana Belem.

Dr. Martínez Castro Jesús Alberto.

Contents

Chapter 1

Introducción

El presente trabajo comprende el estudio sobre el curso de Probabilidad, Procesos Aleatorios e Inferencia, con el material obtenido durante semestre. Se consideraron varios temas en especifico y ejemplos en clase.

La probabilidad es una herramienta de ayuda para la toma de decisiones, ya que proporsiona una forma más exacta de medir, analizar y expresar las incertidumbres asociadas con eventos futuros de razones entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. Es por eso que se utilizaron varios programas y libros para el complemento de dichos temas, así como también para efectos en clase.

El texto esta dirigido a alumnos de carreras del área de ingeniería, ciencias de la computación, y otras carreras similares, ya que se utilizan programas que se contemplan como introducción a temas.

Chapter 2

Tarea 1

2.1 Ejemplos de Experimentos Determinísticos y Experimentos Aleatorios

2.2 Conceptos: Espacio Muestral, Probabilidad Clásica, Probabilidad Geométrica, Probabilidad Frecuencial, Probabilidad Subjetiva, Probabilidad Axiomática

Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

10 de Septiembre del 2015

Tarea 1

Experimentos Deterministicos

1. Después de miércoles sigue jueves.
2. H + H + O produce agua.
3. Deja caer algún objeto en el aire (Leyes de la gravedad).
4. Después de las 6:00 son las 7:00.
5. Que encienda la luz al apretar el interruptor.
6. La medida en centímetros de diferentes juegos geométricos.
7. Saber que día del mes es mañana.
8. Tirar un dado y anotar el color de la cara resultante.
9. Estirar un cable hasta su ruptura.
10. Contabilizar el número de laborales.

Experimentos Aleatorios

1. Ganar el premio de la lotería.
2. Medir la altura de un individuo.
3. Sacar cartas de una baraja.
4. Que la selección Mexicana gané el próximo Mundial de Fútbol.
5. Pronosticar un terremoto en día y hora exacta.
6. El tiempo que tardarás en llegar hoy al trabajo, si vas en metro.
7. La calificación que se obtendrá en el próximo examen de Probabilidad.
8. El efecto de un tratamiento anticancerígeno en un paciente.
9. El tiempo de vida de una persona.
10.Tirar un dado y anotar el número de la cara resultante.

Espacio Muestral

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles. Se simboliza con la letra E. Los elementos que lo forman se escriben entre llaves: $\{\}$.

Si consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda, los resultados posibles son cara y cruz:
$E = \{cara, cruz\} = C, X$.

Probabilidad Clásica

Si un suceso puede ocurrir de N maneras mutuamente excluyentes e igualmente probables, y m de ellas poseen una característica A.

$$P(A) = m \div N = \text{Núm. de casos favorables a } A \div \text{ Núm. de casos posibles}$$

Ejemplo 1: P(de que salgan dos caras al tirar 2 monedas)

$$P(A) = 1 \div 4$$

P(de que salga una cara al tirar 2 monedas)

$$P(A) = 2 \div 4 = 1 \div 2$$

Probabilidad Geométrica

La distribución Geométrica también está relacionada con una secuencia de ensayos de Bernoulli, excepto que el número de ensayos no es fijo. En consecuencia, la distribución geométrica hereda las características de la distribución binomial, a excepción del concepto del cual se quiere calcular la probabilidad. En este caso la variable aleatoria de interés, denotada mediante X, se define como el número de ensayos requeridos para lograr el primer éxito. Es obvio que para obtener el primer éxito se debe realizar el experimento cuando menos una vez, por lo que los valores que puede tomar la variable aleatoria X son $1, 2, 3, ..., n$, esto es, no puede tomar el valor cero. En este caso se cumple que $(X = x)$ si y sólo si los primeros $(x?1)$ ensayos son fracasos (q) y el x-ésimo ensayo es éxito (p), por lo que:

$$P(X = x) = qk - 1p.$$

Probabilidad Frecuentista (Frecuencial)

La probabilidad frecuencial es una medida obtenida de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro un comportamiento. Sin embargo, no es definitiva, por lo que es importante saber interpretar los resultados que se obtienen.
La probabilidad frecuencial de un evento A, que se denotará $P(A)$, se obtiene dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$P(A)$ = Núm. de veces que ocurre el evento ÷ Núm. total de veces que realiza el evento.

Probabilidad Subjetiva

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda ocurrir.

Ejemplo 1
E: Tirar un dado
A = que salga el núm. 3
S = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
P(A) = $1 \setminus 6$.

Probabilidad Axiomática

Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos.
La probabilidad P de un suceso E, denotada por $P(E)$, se define con respecto a un "universo" o espacio muestral, conjunto de todos los posibles sucesos elementales, tal que P verifique los Axiomas de Kolmogoróv, enunciados por el matemático ruso de este nombre en 1933. En este sentido, el suceso E es, en términos matemáticos, un subconjunto de Ω.

Ejemplo.
La probabilidad de un suceso A es un número real mayor o igual que 0.
La probabilidad de un suceso es un número positivo o nulo.

Chapter 3

Tarea 2

3.1 Ejemplos Combinación y Permutación

3.2 Pirámide de Pascal

Tarea 2. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

15 Septiembre 2015

Ejemplos Combinaciones

1. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
   No entran todos los elementos.
   No importa el orden: Pepe, Rosa.
   No se repiten los elementos.
   6545 posibles combianciones.

2. Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas. (No importa el orden de las frutas mencionadas, es la misma ensalada).

3. 10,4 son las combinaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:
   Es decir, podríamos formar 210 subgrupos diferentes de 4 elementos, a partir de los 10 elementos.

4. De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres...

5. La mezcla de los colores verde y amarillo dan como resultado el color azul.

6. Una persona desea invitar a 5 de sus amigos entre un grupo de 8 amistades. ¿De cuántas maneras puede hacerlo:
   a) en total;
   b) si las personas A y B no deben ir juntas;
   c) si las personas A y B no pueden ir por separado;
   d) si debe estar forzosamente la persona C?

7. José tiene 9 amigos y desea invitarlos a cenar, pero sólo puede invitar a 6. ¿Cuántos grupos distintos de invitados puede tener?
   Queremos saber cuantos grupos distintos podemos formar independientemente del orden en que se elija los invitados. hay 84 grupos distintos de invitados.

8. El juego de la Primitiva consiste en acertar 6 números naturales a elegir entre el 1 y el 49. ¿Cuántas posibles combinaciones hay? Si cada combinación nos cuesta 1? ¿Cuánto nos tendremos que gastar para asegurar que vamos a acertar seguro los 6 números?
   Queremos acertar 6 nḿeros de 49 posibles, independientemente del orden en que los elijamos.
   Coste de acertar seguro 13.983.816

9. La suma de los números $8 + 1 + 5$ da el resultado de 14.

10. La lotería de ohio emplea selección aleatoria de seis números de un grupo de 47 para determinar al ganador semanal. Se puede aplicar la regla de conteo. para combinaciones, para calcular la cantidad de maneras en que se pueden seleccionar seis números distintos de entre un grupo de 47 números.? La regla de conteo para combinaciones indica que hay mas de 10 millones de resultados experimentales para determinar al ganador de la lotería. Una persona se compra un boleto de lotería tiene una posibilidad de ganar 10737573 .

Ejemplos Permutaciones

1. ¿Cuántas cadenas de 8 bits contiene exactamente 4 unos?
   La respuesta son 70 formas o cadenas diferentes.

2. ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF?
   Para garantizar la presencia del patráon DEF en la subcadena, estas 3 letras deben estar juntas y en ese orden. Las letras A, B y C pueden colocarse de manera arbitraria. Así es como tener 4 elementos diferentes, por lo que la respuesta es $P(4, 4) = 4!$.

3. Se tienen 3 libros: uno de aritmética (A), uno de biología(B) y otro de cálculo(C), y se quiere ver de cuántas maneras se pueden ordenar en un estante.
   En principio se puede elegir cualquiera de los 3 para colocar en primer lugar:
   Una vez elegido uno de ellos, para ocupar el primer lugar, quedan 2 posibles para ubicar.

4. Calcular las permutaciones de 6 elementos.
   $P6 = 6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

5. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
   Síentran todos los elementos. Tienen que sentarse las 8 personas. Sí importa el orden. No se repiten los elementos. Una persona no se puede repetir.

6. La combinación de la cerradura es 472. (Ahora sí importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247". Tiene que ser exactamente 4-7-2.)

7. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5.
   m = 5 n = 5
   Sí entran todos los elementos. De 5 dígitos entran sólo 3.
   Sí importa el orden. Son números distintos el 123, 231, 321.
   No se repiten los elementos. El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes.
   $P5 = 5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

8. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
   Sí entran todos los elementos. Tienen que sentarse las 8 personas.
   Sí importa el orden.
   No se repiten los elementos. Una persona no se puede repetir.
   $P5 = 8! = 40320$

9. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
   $PC8 = P8 - 1 = (8 - 1)! = 7! = 5040$

10. P10 son las permutaciones de 10 elementos:
    Es decir, tendríamos 3.628.800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

Pirámide de Pascal

El Triángulo de Pascal es una disposición de números con forma de triángulo, construida de tal manera que cada elemento es la suma de los dos inmediatamente superiores a él, y donde inicialmente se coloca el número 1 en los lados exteriores.

Cada uno de los valores de un triángulo de Pascal escritos en forma de tabla corresponden a un coeficiente de la expansión de una potencia de sumas. Concretamente, el número en la línea n y la columna p corresponde a $\binom{n}{p}$, o también denotado como $\mathbf{C}_n^p$ (**C** por "combinación") y se dice n sobre p, combinación de n en p ó coeficiente binomial n, p. Las casillas vacías corresponden a valores nulos.

En vez de considerar las potencias de $a+b$, se puede considerar las del trinomio $a+b+c$. De esta manera, $(a+b+c)$n es una suma de monomios de la forma $\lambda_{p,q,r}a^pb^qc^r$, con p, qyr positivos, $p+q+r=n$, y $\lambda_{p,q,r}$ un número natural que se llama coeficiente trinomial. Los cálculos son similares a los del coeficiente binomial, y se dan mediante la siguiente expresión:

$\lambda_{p,q,r} = \binom{n}{p,q,r} = \frac{n!}{p!q!r!}$, en subconjuntos de p, q y r elementos.

Chapter 4

Tarea 3

4.1 Ejemplos Permutación Circular

4.2 Números de Catalán

Tarea 3. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

17 Septiembre 2015

10 Ejemplos Permutaciones Circulares

1. ¿De cuátas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
   $PC_8 = P_{8-1} = (8-1)! = 7! = 5040.$
2. Calcular las permutaciones circulares de 7 elementos.
   $PC_7 = (7-1)! = 6! = 720$
3. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?
   $PC_{3,3} = (2)!(3)! = (2)(6) = 12$
4. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse nueve personas alrededor de una mesa redonda?
   $PC_9 = P_{9-1} = (9-1)! = 8! = 40320$
5. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?
   $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$
6. ¿De cuántos modos distintos podemos ubicar las cifras del 1 al 7 en un circulo?
   $PC_{7,5} = (7)(5)! = (7)(120) = 840$
7. ¿Cuál de las siguientes opciones es equivalente a la expresión PC_12?
   $PC_12 = (12-1)! = 11! = 39916800$
8. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a una permutación circular de 4 elementos?
   $PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$
9. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 5 personas alrededor de una mesa redonda?
   $PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$

10. La directiva de deportes consta de 10 integrantes, en cada reunión se sientan en forma circular, si tres de los integrantes siempre conservan el lugar, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?
    En este caso, sólo tienes que ubicar a 7 miembros en 7 lugares, que pueden ir de 7! formas. Como 3 miembros van fijos, ya no importa si estan en una mesa redonda o es un arreglo lineal. $PC_8 = P_{8-1} = (8-1)! = 7! = 5040$

Números de Catalan

Estos números, los cuales son la solución de varios problemas en diferentes áreas de las matemáticas, deben su nombre al matemático Belga Eugéne Charles Catalan, (1814-1894), quien los descubrió en 1838 mientras estudiaba el problema de las sucesiones bien formadas de paréntesis. Aunque éstos números fueron nombrados en honor a Catalan, ya se conocían antes de él; alrededor de 1751 Leonhard Euler, (1707-1783), los descubrió mientras estudiaba el problema de la triangulación de polígonos convexos, sin embargo de acuerdo a un artículo de 1988 escrito por el matemático chino J. J. Luo, éstos números ya eran conocidos por el matemático chino Antu Ming, (1692? - 1763?), quien hace referencia a ellos en algunos trabajos de 1730 sobre modelos eométricos; el trabajo de Ming fue publicado en chino, es ésta la razón por la cual no se conoció en Occidente.

Una de las diferentes formas de definir los números de Catalan es:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n}, \; n \geq 0$$

1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430
9	4862
10	16796
11	58786
12	208012
13	742900
14	2674440
15	9694845
...	

Figura 1. Números de Catalan

Chapter 5

Tarea 4

5.1 Aproximación de Stirling

5.2 Histogramas

Tarea 4. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

22 Septiembre 2015

Aproximación de Stirling

Una sucesión es una función de los números naturales N a los números reales R, es decir, una función que asocia a cada número natural un número real. Se suelen representar como a_n. Se dice que una sucesión a_n es convergente si conforme aumentamos el valor de n el valor de a_n se acerca cada vez más a un cierto número, al que llamaremos límite de la sucesión. El cálculo de límites de sucesiones es un tema que suele estar presente en todos los temario de cálculo de carreras de ciencias (Ingenierías, Matemáticas, Físicas, Químicas) y existen bastantes métodos para realizar ese cálculo dependiendo de la estructura de la propia sucesión. En este post vamos a ver una equivalencia bastante inesperada que podemos usar para calcular un límite en el que aparece el término $n!$: la fórmula de Stirling.

La fórmula de Stirling nos dice lo siguiente:

$$Lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n!}{(n^n)(e^{-n})(\sqrt(2)(n)(\pi))} \tag{1}$$

O lo que es lo mismo:
$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt(2)(\pi)(n)$

Es decir, $n!$ es equivalente a esa expresión. Eso significa que para calcular un límite en el que $n!$ es un factor del numerador o del denominador de la sucesión podermos sustituirlo por ella. Esta sustitución suele ser muy útil en los casos en los que la presencia de $n!$ como factor nos dificulta operar dentro de la sucesión. Vamos a ver una demostración de esta equivalencia para la que usaremos la función gamma de Euler:

$$\mathsf{T}(n+1) = n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \tag{2}$$

En la imagen anterior se ha incluido la siguiente propiedad de esta función: el valor de la función gamma en $n+1$ es $n!$. Realizamos el cambio de variable
$x = n\Delta t$
$t = 1 + \frac{s}{\sqrt{n}}$

Una acotación de la fórmula es:

$$\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \tag{3}$$

Por ejemplo:
$29! = 8841761993739701954543616000000$
$e^{\frac{1}{12\ 29+1}} = 1,002869438...$
$e^{\frac{1}{12\ 29}} = 1,002877696...$
$29! = \sqrt{2\pi 29}\ \left(\frac{29}{e}\right)^{29} 1,002877577...$

Histogramas

Un histograma es una representación gráfica de una variable en forma de barras. Se utilizan para variables continuas o para variables discretas, con un gran número de datos, y que se han agrupado en clases.
En el eje abscisas se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo, y por altura, la frecuencia absoluta de cada intervalo. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados.

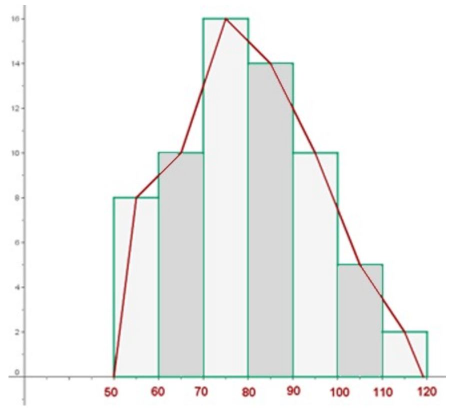
Ejemplos

Ejemplo 1

El peso de 65 personas adultas viene dado por la siguiente tabla:

	c_i	f_i	F_i
(50,60)	55	8	8
(60,70)	65	10	18
(70,80)	75	16	34
(80,90)	85	14	48
(90,100)	95	10	58
(100,110)	105	5	63
(110,120)	115	2	65
		65	

Tabla ejemplo 1.



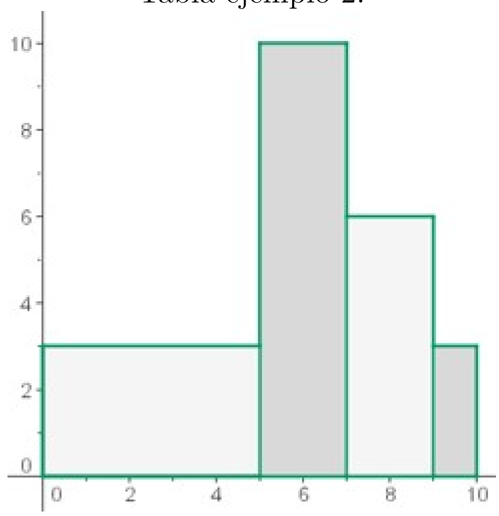
Histograma ejemplo 1.

Ejemplo 2

En la siguiente tabla se muestra las calificaciones (suspenso, aprobado, notable y sobresaliente) obtenidas por un grupo de 50 alumnos.

	f_i
(0,5)	15
(5,7)	20
(7,9)	12
(9,10)	3
	50

Tabla ejemplo 2.



Histograma ejemplo 2.

Chapter 6

Tarea 5

6.1 Tipos de Infinito

6.2 Frecuencias

6.3 Explosión del Challenger

Tarea 5. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

29 Septiembre 2015

Tipos de Infinito

1. Infinito numerable

   El conjunto de los Naturales (N) es Infinito y es Infinito Numerable. También es infinito el conjunto de los números pares (o impares), pues se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los Naturales y los pares. De esto sucede que el todo puede ser igual a una de sus partes. Esto es anti intuitivo, no sucede así para los conjuntos finitos. También es infinito y de esta forma, el conjunto de los números Racionales (Q). Ellos están en correspondencia biunívoca con los Naturales.

2. Infinito no numerable

   Los Números Reales (R), llamado "el continuo", poseen una potencia infinita mayor que la de los conjuntos infinitos numerables (o enumerables). No es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los Naturales (N) y los Reales, es decir, hay infinitamente más puntos en la recta numérica que los Naturales. Pero otra paradoja maravillosa: no hay más puntos en toda la recta numérica que en el intervalo (0,1).

3. Conjuntos transfinitos

   El conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A tiene una potencia superior a A: Un conjunto siempre tiene más partes que elementos. Muy exactamente, un conjunto con "n" elementos tendrá (2 elevado a "n") partes. Así, en el conjunto $A = a, b, c$ las partes serán:

$$P(A) = (a, b, c), (a), (b), (c), (a, b), (b, c), \emptyset = 2^3 pares. \tag{1}$$

A estos nuevos números, se les llaman transfinitos y para anotarlos elige la primera letra del alfabeto hebreo, el Aleph ($\aleph$).

3.1. Alef 0 ($\aleph_0$)

El más pequeño de todos los números transfinitos (cardinales), y el más simple de entender conceptualmente es $\aleph_0$ (alef cero), este cardinal es el número de elementos del conjunto de los números naturales. Puede definirse de manera sencilla e intuitiva la clase de conjuntos numerables (conjuntos cuyo cardinal es $\aleph_0$). Cualquier conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales es un conjunto numerable. En términos prácticos, esto significa que los elementos de un conjunto numerable pueden "etiquetarse" como $1, 2, 3...$ de tal manera que a cada elemento de dicho conjunto le corresponda un número natural.

3.2. Alef 1 ($\aleph_1$)

Se define $\aleph_1$ como el menor cardinal mayor que $\aleph_0$, es decir, el menor cardinal mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales. Es decir, $\aleph_1$ es el sucesor de $\aleph_0$, lo cual se escribe $\aleph_1 = \aleph_0^+$.

Se interpreta usualmente al cardinal $\aleph_1$ como la cantidad de números reales, asumiendo como cierta hipótesis del continuo.

3.3. Alef 2 ($\aleph_2$)

El cardinal alef 2 ($\aleph_2$) designa el cardinal transfinito del conjunto potencia de los números reales, y por tanto podría adoptarse como definición también $\aleph_2 = 2^{\aleph_2}$, por tanto, la cantidad de posibles subconjuntos de números reales sería $\aleph_2$. Igualmente aceptando la hipótesis del continuo generalizada, puede demostrarse que $\aleph_2$ también es el cardinal del conjunto de todas las funciones reales ya que:
$\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

3.4. Alef ω

Se define $\aleph_\omega$ como el cardinal singular (cardinal no regular) más pequeño de todos. A diferencia de $\aleph_\omega$, los primeros cardinales transfinitos como

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ...$ son todos ellos cardinales regulares. Otra propiedad notoria de $\aleph_\omega$ es que es un cardinal que no es sucesor ningún otro (a diferencia de lo que pasa con $\aleph_n, n \epsilon N, n \geq 1$), ya que su índice ω es un ordinal límite. El hecho de que $\aleph_\omega$ sea el cardinal singular más pequeño posible significa que es el cardinal más pequeño tal que su cofinalidad es menor que el propio cardinal.

Dado que el ordinal ω coincide con el cardinal $\aleph_0$, técnicamente se podría escribir el cardinal $\aleph_\omega$ como una aplicación reiterada de la función alef, es decir:
$\aleph_\omega = \aleph_{\aleph_0}$.

Frecuencias

Las frecuencias de las portadoras de amplitud modulada (radio AM), están en el rango de frecuencias de 535-1605 kHz. Las frecuencias de las portadoras de 540 a 1600 kHz están asignadas a intervalos de 10 kHz.

La banda de radio FM va desde 88 a 108 MHz, entre los canales de televisión VHF 6 y 7. Las estaciones de FM tienen asignadas frecuencias centrales empezando en 88,1 MHz, con una separación de 200 khz, y un máximo de 100 estaciones. Estas estaciones de FM tienen una desviación máxima de su frecuencia central de 75 kHz, lo cual deja unas "bandas guardas" superior e inferior de 25 kHz, para minimizar la interacción con las bandas de frecuencias adyacentes.

Si la FM supera con creces a la AM en lo que a calidad se refiere, en cuanto al alcance de la señal es lo contrario. La clave está en las diferentes formas que tienen las ondas al desplazarse. Las radios que transmiten en FM trabajan en frecuencias entre 88 y 108 Megahercios. Si echamos una ojeada a la tabla que divide el espectro radioeléctrico, veremos que estas frecuencias están dentro del rango de las Muy Altas Frecuencias (VHF).

Las ondas electromagnéticas de este rango tienen longitudes bastante pequeñas y se desplazan por el espacio en línea recta. Esto significa que, como no tienen lugar para ?apoyarse? y rebotar llegando más lejos, se atenúan rápidamente y las distancias que cubren no son muy grandes. Al contrario, las AM son de frecuencias más bajas, por lo que tienen longitudes de onda más largas. Eso les otorga una doble ventaja respecto a la FM en cuando a la cobertura:

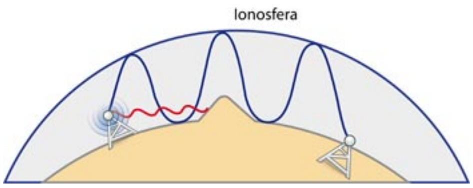
Ondas Gigantes

Las ondas de FM serían como cualquier persona que, caminando la ciudad y topando con un alto muro, no puede saltarlo y ahí queda detenida. Las ondas de AM, por el contrario, serían como un gigante de piernas largas. Por su altura, puede caminar sin problemas sobre los edificios y saltar obstáculos, sin que nada lo detenga. La diferencia entre la longitud de onda de la FM y la AM es muy grande. Mientras que las ondas medias, dentro de las que se encuentra la AM miden entre 100 metros (3.000 Khz) a 1.000 m (300 Khz), las ondas de VHF, entre las que se encuentran las de FM, están entre 1 metro (300 Mhz) y 10 metros (30 Mhz).

Propagación Ionosférica

Estas ondas gigantes de AM, se desplazan rebotando en la ionosfera. Este tipo de propagación les permite alcanzar mayor cobertura, especialmente durante la noche, debido a los cambios que sufre esta capa de la atmósfera.

Tomando en cuenta estas diferencias, el tamaño de las ondas y la forma de propagación, una emisora AM es conveniente en zonas con montañas y valles, mientras que la FM servirá más en zonas planas donde no hay muchas barreras para las ondas.



Imágen de la Ionosfera.

Explosión Challenger

El Challenger, después del Columbia, fue el segundo transbordador espacial norteamericano del tipo orbitador en volar al espacio. Su primer vuelo lo había realizado el 4 de abril de 1983 y hasta principios de 1986 había cumplido exitosamente nueve misiones. El Challenger, al igual que los orbitadores construidos después de éste, tenía menos losetas en su sistema de protección térmica que el Columbia, lo que le permitió transportar 1100 kg más de carga útil que esta última nave. Gracias a esa modificación, el Challenger se convirtió en la bestia de carga espacial oficial de la flota de transbordadores de la NASA, volando en más misiones por año que su predecesor.

Caída del challenger

El 28 de enero de 1986 estaba programado un nuevo despegue del Challenger para que emprendiera la misión STS-51-L, la décima operación del orbitador. Como siempre, todos los ojos del mundo científico estaban puestos en Estados Unidos para presenciar el vistoso lanzamiento que, pese ser ya casi rutinario, no dejaba de ser espectacular. Sin embargo, las cosas comenzaron mal desde el principio. A los pocos segundos del despegue, el cohete impulsor comenzó a fallar, abriendo algunas juntas del estanque de combustible, dejando escapar un humo negro y haciendo que la nave cabeceara antes de impulsarse.

A los 58 segundos de vuelo, el Challenger pasó por un momento de inestabilidad (o momento Q) cuando cruzó por una fuerte corriente de viento. Las juntas abiertas, que se habían cerrado momentáneamente por las volutas de aluminio contenidas en el combustible, volvieron a abrirse. Una columna de fuego entonces se escapó y comenzó a quemar el hidrógeno líquido del tanque de combustible externo. Con el fuego propagándose rápidamente, la nave quedó expuesta a fuerzas aerodinámicas incontroladas.

A los 73 segundos del momento del despegue, cuando el Challenger ya estaba convertido en una gigantesca bola de fuego, la nave se desintegró casi en su totalidad, matando de paso a sus siete tripulantes, entre ellos la maestra de primaria Christa McAuliffe, quien iba a viajar al espacio gracias a una iniciativa del presidente Ronald Reagan, que permitía la incorporación de civiles a los programas espaciales.

La noticia, que fue transmitida por televisión a todos los rincones del orbe, causó consternación en todo el mundo. El accidente, el más impactante del Programa del Transbordador Espacial, perjudicó además seriamente la reputación de la NASA como agencia espacial. La misma NASA, que había estimado las probabilidades de un accidente catastrófico durante el lanzamiento (el momento más crucial y peligroso del viaje espacial) en una proporción de 1 a 438, debió de hecho suspender temporalmente sus vuelos espaciales hasta 1988.

Una investigación posterior concluyó que el accidente había sido causado por una suma de elementos, entre los que se contaban factores técnicos, climáticos y humanos. Si la misión STS-51-L hubiese sido exitosa, la siguiente misión del transbordador habría sido el despliegue de la sonda Ulises con el Centaur, para el estudio de las regiones polares del Sol.

El transbordador Challenger, el primero que hizo despegues y aterrizajes nocturnos, fue señero porque marcó varios hitos en el vuelo espacial. Llev'o al espacio en 1983 a la primera mujer estadounidense (Sally Ride) y el primer afroamericano (Guion Bluford), además de desarrollar tres misiones Spacelaby el primer paseo autónomo en el espacio. Desgraciadamente, también fue pionero al convertirse en el primer transbordador en ser destruido en un accidente durante el desarrollo de una misión.

Chapter 7

Tarea 6

7.1 Mínimos cuadrados

7.2 Densidad de Probabilidad

7.3 Gráficas Gauss (ROOT)

Tarea 7. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

06 Octubre 2015

Ejemplos Mínimos Cuadrados

Una recta que mejor se ajusta es una l?́nea recta que es la mejor aproximación del conjunto de datos dado.

Es usada para estudiar la naturaleza de la relación entre dos variables.

Una recta que mejor se ajusta puede ser determinada aproximadamente usando el método visual al dibujar una línea recta en una grá?ca de dispersión para que tanto el n"umero de puntos arriba de la recta y debajo de la recta sean casi iguales (y la línea pasa a tráves de tantos puntos como sea posible).

Una forma más precisa de encontrar la recta que mejor se ajusta es el método de mínimos cuadrados.

Use los pasos siguientes para encontrar la ecuación de la recta que mejor se ajusta para un conjunto de parejas ordenadas.

Paso 1: Calcule la media de los valores de x y la media de los valores de y.

Paso 2: Realice la suma de los cuadrados de los valores de x.

Paso 3: Realice la suma de cada valor de x multiplicado por su valor correspondiente y.

Paso 4: Calcule la pendiente de la recta usando la fórmula:

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \tag{1}$$

donde n es el número total de puntos de los datos.

Paso 5: Calcule la intercepción en y de la recta usando la fórmula:

$$b = \overline{y}?m\overline{x} \tag{2}$$

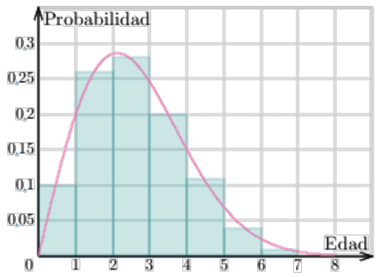
Donde $\overline{y}y\overline{x}$ son las medias de las coordenadas de x y y de los puntos de datos respectivamente.

Paso 6: Use la pendiente y la intercepción en y para formar la ecuación de la recta.

Densidad de Probabilidad

Un histograma es una manera conveniente de visualizar la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria X, entonces la probabilidad $P(c \leq x \leq d)$ se calcula como la área bajo el histograma entre $X = c$ y $X = d$. Por otro lado, hemos también visto que puede ser difícil calcular probabilidades para rangos de X que no son un número entero de subdivisiones. Para introducir la solución de este problema, vamos a ver el siguiente ejemplo:

proba.png



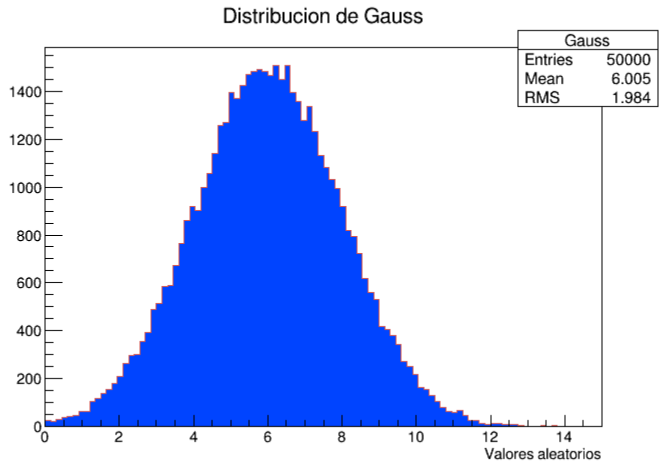
Ejemplo densidad de probabilidad.

Gráficas Gauss en ROOT

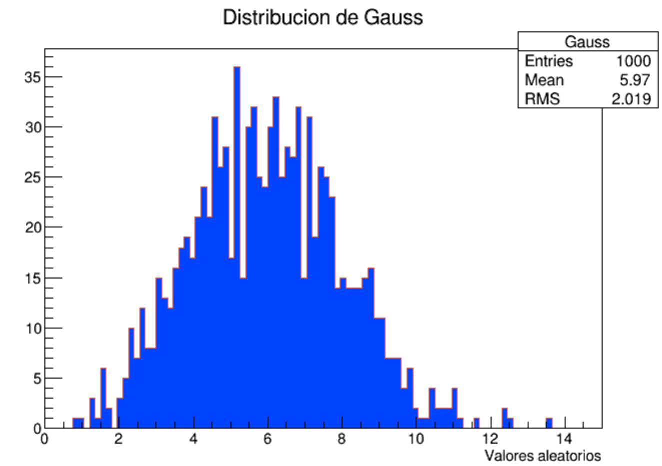
Código

void gauss ()
TCanvas $*$ c1 = new TCanvas(”c1” ,”Gauss” ,600 ,400);
TH1F $*$ h1 = new TH1F(”h1” ,”Gauss” ,500 ,?20 ,20);
TF1 $*$ f1 = new TF1(”f1” ,”gaus”);
f1 $\rightarrow$ SetParameter (0 , 1);
f1 $\rightarrow$ SetParameter (1 , 0);
f1 $\rightarrow$ SetParameter (2 , 6);
h1 $\rightarrow$ SetMinimum (0);
h1 $\rightarrow$ FillRandom(”f1”);
h1 $\rightarrow$ Draw();
h1 $\rightarrow$ SetLineColor (2);

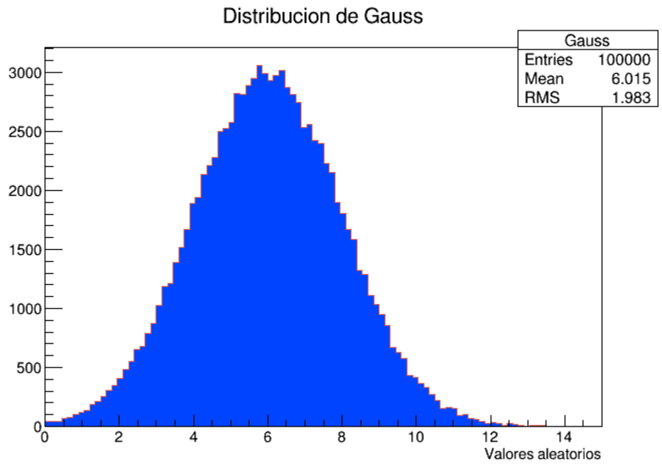
h1 → SetLineWidth (1);
h1 → SetTitle ("Distribucion de Gauss");
h1 → GetXaxis() → SetTitle ("Valores aleatorios");
c1 → Update ();
c1 → GetFrame() → SetFillColor (0);
c1 → Modified ();



1.png



2.png



3.png

Distribución de Gauss.

Chapter 8

Tarea 7

8.1 Ejemplo Mínimos cuadrados

8.2 Valores proios y Vectores propios (Eigenvalores y Eigenvectores)

8.3 Seno Hiperbólico

8.4 Coseno Hiperbólico

Tarea 7. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

06 Octubre 2015

Ejemplos Mínimos Cuadrados

La regresión examina la relación entre dos variables, pero restringiendo una de ellas con el objeto de estudiar las variaciones de una variable cuando la otra permanece constante. En otras palabras, la regresión es un método que se emplea para predecir el valor de una variable en función de valores dados a la otra variable.

En todos los casos de regresión existe una dependencia funcional entre las variables. En el caso de dos variables, siendo una de ellas X variable independiente y la otra Y la dependiente, se habla de regresión de Y sobre X. Por ejemplo, los ingenieros forestales utilizan la regresión de la altura de los árboles sobre su diámetro, lo cual significa que midiendo el diámetro (variable independiente) y reemplazando su valor en una relación definida según la clase de árbol se obtiene la altura, y aun sin necesidad de cálculos aprecian la altura utilizando gráficas de la función de dependencia, altura = función del diámetro.

La regresión potencial tiene por ecuación predictora:

$$Y = \alpha X^{\beta} \tag{1}$$

y la regresión recíproca es:

$$Y = \frac{1}{\alpha + \beta log(X)}. \tag{2}$$

Para el primer caso los valores siguen una ley potencial. Si la ecuación predictora está dada por: tomando logaritmos en ambos miembros, queda:

$$logY = log\alpha + \beta log(X) \tag{3}$$

Donde las constantes α y β quedan fijadas al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{gathered}\sum logY = log\alpha(N) + (\beta)\sum logX \\ (\sum logX)(\sum logY) = log\alpha\sum logX + (\beta)\sum(logX)^2.\end{gathered} \tag{4}$$

Para el segundo caso, si la ecuación predictora está dada por $Y = 1/(\alpha+\beta(X))$ entonces invirtiendo, la misma expresión se puede escribir $1/Y = (\alpha+\beta(X))/1$ osea:

$$Y = \frac{1}{(\alpha + \beta(X))} \Rightarrow \frac{1}{Y} = \alpha + \beta(X) \tag{5}$$

Donde las constantes α y β quedan fijadas al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\sum \frac{1}{Y} = \alpha(N) + \beta \sum X \tag{6}$$

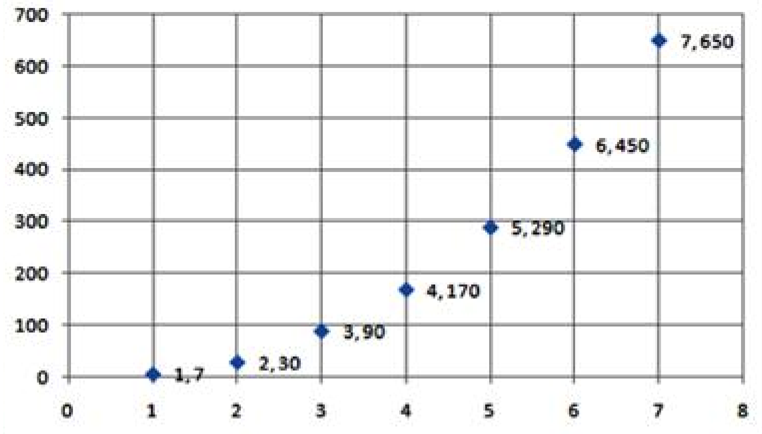
$$\sum X\frac{1}{Y} = \alpha(N) + \beta \sum X^2. \tag{7}$$

Ejemplo

Sea el siguiente conjunto de valores, las lecturas de un experimento donde X es el volumen (variable independiente), Y es la presión de una masa dada de gas (variable resultante).

X	Y
1	7
2	30
3	90
4	170
5	290
6	450
7	650

Tabla 1. Lectura de valores.



Gráfica 1.

Para ajustar una curva exponencial aplicando el método de mínimos cuadrados se llena la siguiente tabla:

X	Y	logX	logY	(logX)(logY)	$(logX)^2$
1	7	0	0.8451	0	0
2	30	0,3010	1,4771	0,4447	0,0906
3	90	0,477	1,9542	0,9324	0,2276
4	170	0,6021	2,2304	1,3429	0,3625
5	290	0,6990	2,4624	1,7211	0,4886
6	450	0,7782	2,6532	2,0646	0,6055
7	650	0,8451	2,8129	2,3772	0,7142
S X=28		S logX=3,7024	S logY=14,4354	S (logX)(log Y)=8,8829	S(log X)2= 2,4890

Tabla 2. Curva exponencial.

Reemplazando valores en el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\sum logY = log\alpha(N) + \beta \sum logX \tag{8}$$

$$(\sum logX)(\sum logY) = log\alpha(\sum logX) + \beta \sum (logX)^2 \tag{9}$$

$$14,4354 = log\alpha(7) + \beta(3,7024) \Rightarrow 7log\alpha + 3,7024\beta = 14,4354 \tag{10}$$

$$8,8829 = log\alpha(3,7024) + \beta(2,4890) \Rightarrow 3,7024log\alpha + 2,4890\beta = 8,8829. \tag{11}$$

Al resolver el sistema se obtiene: log $\alpha = 0,819$; $\beta = 2,351$.

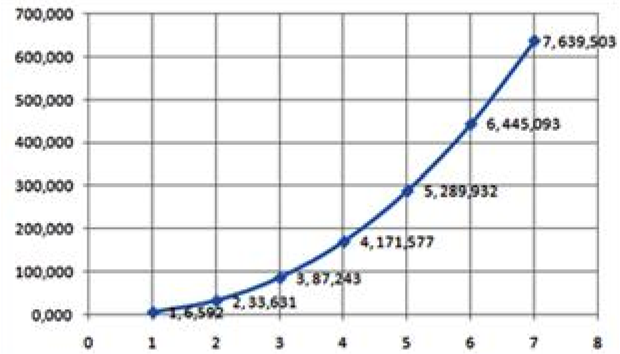
Reemplazando valores en la ecuación predictora expresada en logaritmos se tiene:

$$\log Y = \log\alpha + (\beta)\log X$$
$$\mathit{log}\ \mathrm{Y} = 0{,}819 \Rightarrow \alpha = \mathrm{e}^{0{,}819} = 6,592.(12)$$

Reemplazando en la ecuacion predictora se obtiene:

$$Y = \alpha X^{\beta}$$

$$\mathrm{Y} = 6{,}592\ \mathrm{X}^{2{,}351}.(13)$$



Gráfica 2.

Valores propios y Vectores propios (Eigenvalores y Eigenvectores)

Los vectores propios o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio o eigenespacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

Es decir, los vectores propios son vectores que, o no se ven afectados por la transformación o se ven multiplicados por un escalar, y por tanto no varían su dirección.
Y el valor propio de un vector propio es el factor de escala por el que ha sido multiplicado.

El vector propio $\overrightarrow{v}$ de la matriz A de nxn es una matriz de nxl talque $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$, donde λ es un valor escalar real que recibe el nombre de valor propio.

La alternativa más obvia sería el vector característico cero. Este último se descarta ya que la condición $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ se cumpliría para cualquier valor de λ teniendo un número infinito de soluciones para λ.

Con la finalidad de encontrar el valor de λ, se analiza la expresión $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ de la cual $\lambda\overrightarrow{v}$ se puede escribir como $(\lambda l)\overrightarrow{v}$, por lo tanto:

$$\lambda\overrightarrow{v} = A\overrightarrow{v}$$

$$\begin{gathered}\lambda\overrightarrow{v} - A\overrightarrow{v} = 0\\ (\lambda l)\overrightarrow{v} - A\overrightarrow{v} = 0\\ (\lambda l - A)\overrightarrow{v} = 0\end{gathered}$$

(14)

Esta última representa un sistema homogéneo de n ecuaciones que tiene al menos la solución trivial. La única manera de que tenga soluciones no triviales es que:

$$det(\lambda l - A) = 0. \tag{15}$$

Ejemplo

Sea una matriz A

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinar sus valores y vectores propios.La matriz identidad l multiplicada por λ para matrices 2x2 queda:

$$\lambda \text{ l} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

la diferencia

$$(\lambda \text{ l - A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 6 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante se puede escribir

$$\det(\lambda l - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 6 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 3) + 6 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 12 + 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

que es el polinomio característico. Mediante factorización o por la fórmula general obtenemos sus raíces, o valores característicos,

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$$

Para encontrar los vectores propios o eigenvectores de la matriz A se utiliza $(\lambda l - A)\overrightarrow{v} = 0$ donde $\overrightarrow{v}$ es el vector propio:

$$(\lambda l - A)\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 6 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo λ_1 se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 - 4 & -1 \\ 6 & 3 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que representa el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$-x - y = 0$$
$$6x + 6y = 0$$

cuya solución evidentemente es

$$x = -y$$

Y y es variable libre. De modo que el vector propio que corresponde a $_1$ es:

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si $y = 1$

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A manera de comprobación se puede verificar que $A\overrightarrow{v}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1$

El segundo vector propio se obtiene, de la misma manera, sustituyendo λ_2, y queda:

$$\begin{bmatrix} -2-4 & -1 \\ 6 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde el vector $\overrightarrow{v}_2 es$

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $y = 6$

$\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

Se puede verificar que $A\overrightarrow{v}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{v}_2$.

Seno Hiperbólico

El seno hiperbólico de un número real x, que se designa con $\sinh(x)$ está definido mediante la siguiente ecuación:

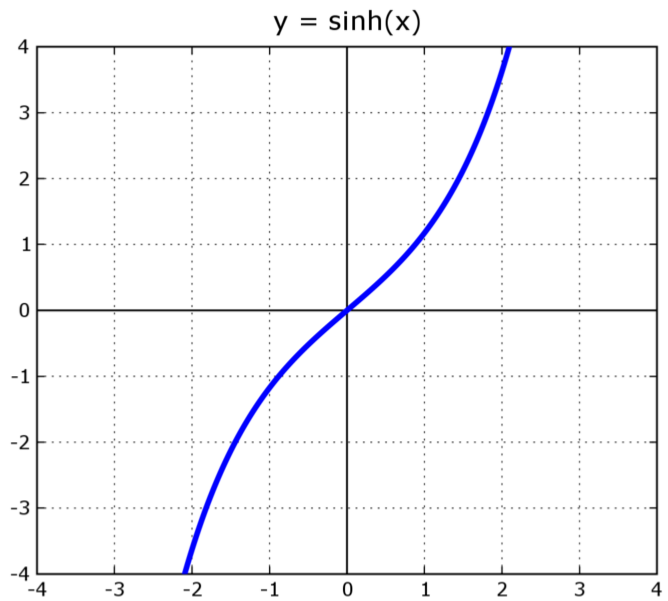
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{16}$$

donde e^x es la función exponencial.

Esta función, junto con el coseno hiperbólico y la tangente hiperbólica, conforman unas reglas como las trigonométricas tradicionales, pero con algunas excepciones. Entre ellas:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{17}$$

La función $\sinh(x)$ es una función impar, ya que para todo valor de x, se cumple que $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.



hip.png

Gráfica Seno Hiperbólico.

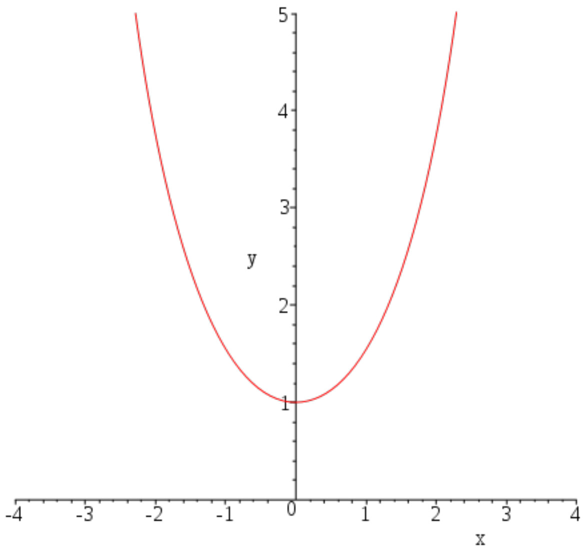
Coseno Hiperbólico

El coseno hiperbólico de un número real x, que se designa mediante $\cosh(x)$ está definido mediante la fórmula:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{18}$$

donde $e^x = \exp(x)$, siendo $\exp(x)$ la función exponencial, es decir, la potencia de base irracional e y exponente x.

Su inversa es el Argumento Coseno Hiperbólico de x, esto se denota por $\cosh^{-1}(x)$ o bien $\arg\cosh(x)$.



hip.png

Gráfica Coseno Hiperbólico.

Chapter 9

Tarea 8

9.1 Ejemplo Valores proios y Vectores propios (Eigenvalores y Eigenvectores)

9.2 Teorema de Cayley-Hamilton

Tarea 8. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana Belem Romero Ruiz

08 Octubre 2015

Ejemplos Eigenvalores y Eigenvectores

Un vector columna diferente de cero X es un eigenvector de una matriz cuadrada A si existen un escalar λ de tal manera que

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

Después λ es un eigenvector de A. Eigenvalores pueden ser cero, un eigenvector no puede ser el vector cero.

Ejemplo 7.1

$[1, -1]$ es un eigenvector correspondiente al eigenvalor $\lambda = -2$ para la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

porque

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de una matriz A de nxn es la ecuación polinomial de enésimo-grado

$$det(A - \lambda l) = 0 \tag{2}$$

Resolviendo la ecuación característica para λ da el eigenvalor de A, que puede ser real, complejo o multiples el uno del otro.

Eigenvectores linealmente independientes

Los eigenvectores correspondientes a un eigenvalor particular contienen uno o más escalares. El número de escalares es el número de eigenvectores linealmente independientes asociados con ese eigenvalor.

El teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 7.1: Cada matriz cuadrada satisface en su propia ecuación característica. Eso es sí

$$det(A - \lambda l) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} ... + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 \tag{3}$$

entonces

$$b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + ... + b_2A^2 + b_1A + B_0I = 0 \tag{4}$$

Problemas Resueltos
7.1 Determinar el eigenvalor y eigenvector de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-4 - \lambda) - 5(-2) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

La ecuacuión característica de A es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; cuando se reculeva para λ, nos da los eigenvalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Como revisión, utilizamos la Propiedad 7.1: La traza de A es $3 + (-4) = 1$, que es la suma de los eigenvalores.

Los eigenvectores correspondientes de $\lambda = 1$ son obtenidas por la resolución de la Ec.(1) para $X = [x_1, x_2]^7$ con el valor de λ. Después tenemos:

$$(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ó

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 = 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = \wr x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda - 1$ son:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \wr x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuando $\lambda = -2$ puede ser

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ó}$$
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 = 0 \end{gathered}$$

La solución a este sistema es $x_1 = -x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = -2$ es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Determinar los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 6 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

El determinante de esta ultima matriz puede ser obtenida con la expresión de cofactores, que es:

$$-\lambda^3 + 20\lambda^2 - 93\lambda + 126 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 14) \tag{5}$$

La ecuación característica de A es $-(\lambda - 3)^2(\lambda - 14) = 0$, que tiene como su solución el eigenvalor $\lambda = 3$ de la multiplicación de dos y el eigenvalor $\lambda = 14$ de la multiplicación de uno. Equivale a la Propiedad 7.1.

Los eigenvectores corresponden a $\lambda = 3$ se obtienen resolviendo por $X = [x_1, x_2, x_3]^7$ que es el valor de λ:

$$
\left(\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\\ 6 & 6 & 9\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\\
3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0\\
6x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0
\end{gathered}
$$

La solución a este sistema es $x_1 = -x_2 - x_3$ con x_2 y x_3 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = 3$ son:

$$
X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_2 - x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}
$$

Cuando $\lambda = 14$ se convierte

$$
\left(\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\\ 6 & 6 & 9\end{bmatrix} - 14\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \text{ ó}
$$
$$
\begin{bmatrix}-9 & 2 & 2\\ 3 & -8 & 3\\ 6 & 6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
-9x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\\
3x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0\\
6x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0
\end{gathered}
$$

La solución a este sistema es $x_1 = \wr x_3$ y $x_2 = \wr x_3$ con x_3 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = 14$ es

$$
X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\wr x_3\\ \wr x_3\\ x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1/3\\ 1/2\\ 1\end{bmatrix}
$$

7.3 Determinar los eigenvalores y eigenvectores de

$$
A = \begin{bmatrix}3 & 4\\ -5 & -5\end{bmatrix}
$$

Para esta matriz

$$
A - \lambda I = \begin{bmatrix}3 & 4\\ -5 & -5\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-\lambda & 4\\ -5 & -5-\lambda\end{bmatrix}
$$

Por lo tanto

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-5-\lambda) - 4(-5) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

La ecuación característica de A es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, cuando resolviendo para λ, da dos eigenvalores complejos $\lambda = -1 + i2$ y $\lambda = -1 - i2$.

Los eigenvectores corresponden a $\lambda = 1$ se obtienen resolviendo por $X = [x_1, x_2]^7$ que es el valor de λ:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} - (-1 + i2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\text{ó}$$
$$\begin{bmatrix} 4 - i2 & 4 \\ -5 & -4 - i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$(4 - i2)x_1 + 4x_2 = 0$$
$$-5x_1 + (-4 - i2)x_2 = 0$$

La solución a este sistema es $x_1 = (-4/5 - i2/5)x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = -1 + i2$ son

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4/5 - i2/5)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4/5 - i2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda = -1 - i2$, los eigenvalores correspondientes son encontrados en una manera similar

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4/5 + i2/5)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4/5 + i2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chapter 10

Tarea 9

10.1 Matriz singular

10.2 Multiplicidad algebraica

10.3 Matriz transpuesta

10.4 Traza matriz

Tarea 9. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

13 Octubre 2015

Matriz singular

Matriz cuadrada cuyo determinante es igual a cero. Una matriz singular no tiene matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinante de $A = (3 * 4) - (2 * 6) = 0$

Multiplicidad Algebraica

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ de A es el orden de λ como cero del polinomio caracteristico de A, en otras palabras, si λ es una de las raices del polinomio, es el número de factores $(t - \lambda)$ en el polinomio caracteristico tras la factorización. Una matriz $n * n$ tiene n valores propios, contados de acuerdo con su multiplicidad algebraica, ya que su polinomio caracteristico tiene grado n.

Un valor propio de multiplicidad algebraica 1 recibe el nombre de "valor propio simple".

Por ejemplo, se pueden encontrar exposiciones como la siguiente en articulos de teoría de matrices:

"Los valores propios de una matriz A son 4,4,3,3,3,2,2,1,".

Lo que significa que la multiplicidad algebraica de 4 es dos, la de 3 es tres, la de 2 es dos y la de 1 es uno. Se emplea este estilo porque la multiplicidad algebraica es la clave de muchas demostraciones matematicas en teoría de matrices.

Anteriormente se ha definido la multiplicidad geométrica de un valor propio como la dimensión del espacio propio asociado, o el nucleo (espacio propio de los vectores propios del valor propio nulo) de $\lambda I - A$.

Por ejemplo:

La multiplicidad algebraica también puede entenderse como una dimensión: es la dimensión del espacio propio generalizado (1.er sentido) asociado, que es el nucleo de la matriz $(\lambda I - A)k$ para k suficientemente grande. Es decir, es el espacio de los vectores propios generalizados, donde un vector propio generalizado es cualquier vector que toma valor 0 sí $\lambda I - A$ se aplica suficientes veces en sucesión.

Cualquier vector propio es un vector propio generalizado, así que cualquier espacio propio esta contenido en el espacio propio generalizado asociado. Esto proporciona una demostración simple de que la multiplicidad geométrica es siempre menor o igual a la algebraica. El primer sentido no debe de confundirse con el problema de valores propios generalizados tal y como se muestra mas adelante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo tiene un valor propio $\lambda = 1$. El polinomio caracteristico es $(\lambda - 1)^2$, así que este valor propio tiene multiplicidad algebraica 2. Sin embargo, el espacio propio asociado es el eje, que normalmente recibe el nombre de eje x, generado por el vector unitario.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así que la multiplicidad geométrica es 1.

Los vectores propios generalizados pueden usarse para calcular la forma normal de Jordan de una matriz (comentado mas adelante). El hecho de que los bloques de Jordan en general no son diagonales sino nilpotentes esta directamente relacionado con la distinción entre vectores propios y vectores propios generalizados.

Matriz Transpuesta

Sea A una matriz con m filas y n columnas. La matriz transpuesta, denota con A^t

Esta dado por:

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$$

En donde el elemento a_{ji} de la matriz original A se convertira en el elemento a_{ij} de la matriz transpuesta A^t

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Traza Matriz

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se define la traza de la matriz A y se denota por $tr(A)$ al valor obtenido al sumar todos los elementos de la diagonal principal, es decir

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Veamos algunos ejemplos considerando las siguientes matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Es sencillo obtener la traza, ya que basta sumar $1 + 1 + 0 = 2$

La traza de B $1 + 4 - 5 = 0$

La traza de C $2 + 3 - 5 = 0$

Chapter 11

Tarea 10

11.1 Función lm usando el programa R (graficas)

11.2 Gráfica regresión (logarítmica)

11.3 Gráfica mínimos cuadrados

Tarea 10. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

15 Octubre 2015

Gráficas en R

Función lm

Lm se utiliza para ajustar modelos lineales. Se puede utilizar para llevar a cabo la regresión , el análisis de estrato único de varianza y análisis de covarianza (aunque puede proporcionar una interfaz más conveniente para estos).

Uso

lm(formula, data, subset, weights, na.action,
method = "qr", model = TRUE, x = FALSE, y = FALSE, qr = TRUE,
singular.ok = TRUE, contrasts = NULL, offset, ...)

Modelos para lm se especifican simbólicamente. Un modelo típico tiene la respuesta forma ∼ términos donde la respuesta es la (numérico) y los términos vector de respuesta es una serie de términos que especifica un predictor lineal para la respuesta . Una especificación de los términos de la forma primera + segunda indica todos los términos en la primera junto con todos los términos en el segundo lugar con duplicados eliminados. Una especificación de la forma primero: segundo indica el conjunto de términos obtenidos mediante la adopción de las interacciones de todos los términos en el primer lugar con todos los términos de segundo. La especificación primero * segundo indica la cruz de primera y de segunda. Este es el mismo que el primero + segundo + primera : segunda.

Si la formula incluye un offset, este es evaluado y substraido desde la respuesta.

Si la respuesta es una matriz lineal es fitted separadamente por least-squares para alcanzar la columna de la matriz.

lm llama a las funciones de nivel inferior lm.fit, etc. Todos los weights, subset y offset son evaluados en la misma manera que las variables en formula, eso es la primera en data y el ambiente de formula.

Valor

lm regresa un objeto de class "lm" o para multiples respuestas de class c("mlm", "lm").

Las funciones summary y anova son usadas para obtener e imprimir una sumatoria y analisis de tabla de varianza de los resultados. Las funciones de acceso generico coefficients, effects, fitted.values y residuals extraer varias características útiles de el valor devuelto por lm.

Un objetos de class "lm" es una lista que contiene al menos los siguientes componentes:

coefficients, residuals, fitted.values, rank, weights, df.residual, call, terms, contrasts, xlevels, offset, x, y, model, na.action

Ejemplo

```
ctl ¡- c(4.17,5.58,5.18,6.11,4.50,4.61,5.17,4.53,5.33,5.14)
trt ¡- c(4.81,4.17,4.41,3.59,5.87,3.83,6.03,4.89,4.32,4.69)
group ¡- gl(2, 10, 20, labels = c("Ctl","Trt"))
weight ¡- c(ctl, trt)
lm.D9 ¡- lm(weight   group)
lm.D90 ¡- lm(weight   group - 1)  omitting intercept
anova(lm.D9)
summary(lm.D90)
opar ¡- par(mfrow = c(2,2), oma = c(0, 0, 1.1, 0))
plot(lm.D9, las = 1)  Residuals, Fitted, ...
par(opar)
```

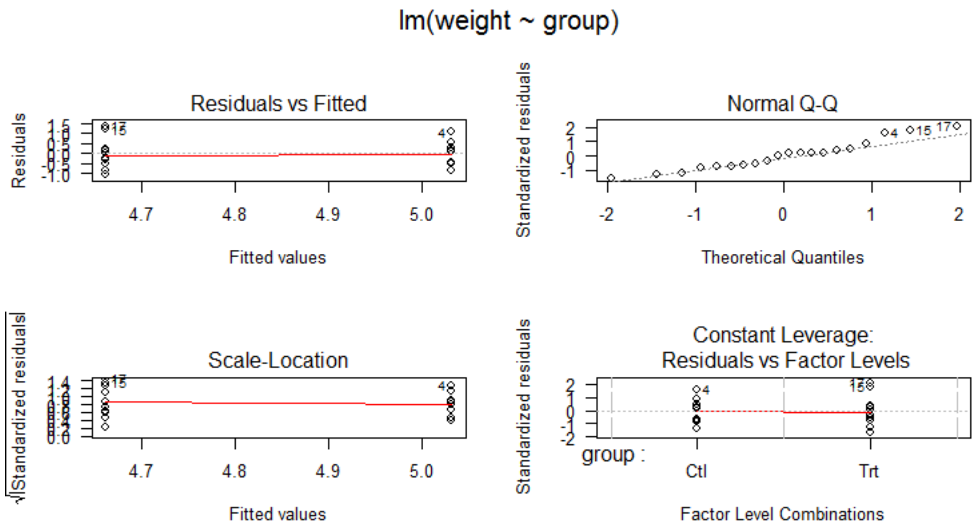


Figura 1. Gráficas con lm

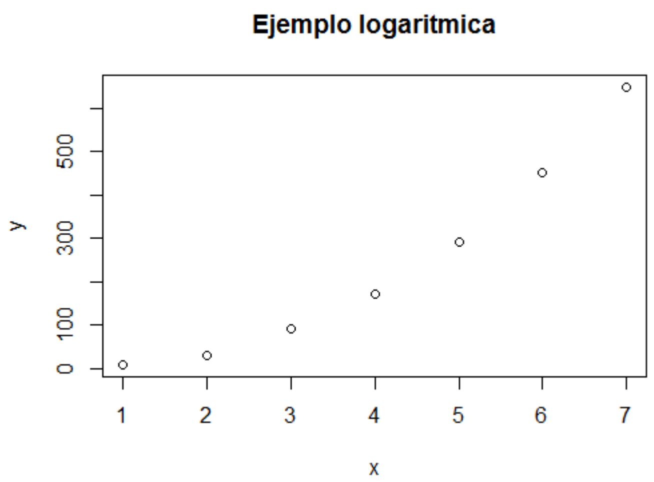
Gráficas Ejemplos Minimos Cuadrados

Regresión (Logaritmica)

Sea el siguiente conjunto de valores, las lecturas de un experimento donde X es el volumen (variable independiente), y Y es la presión de una masa dada de gas (variable resultante).

x	y
1	7
2	30
3	90
4	170
5	290
6	450
7	650

Tabla 1. Lectura valores.

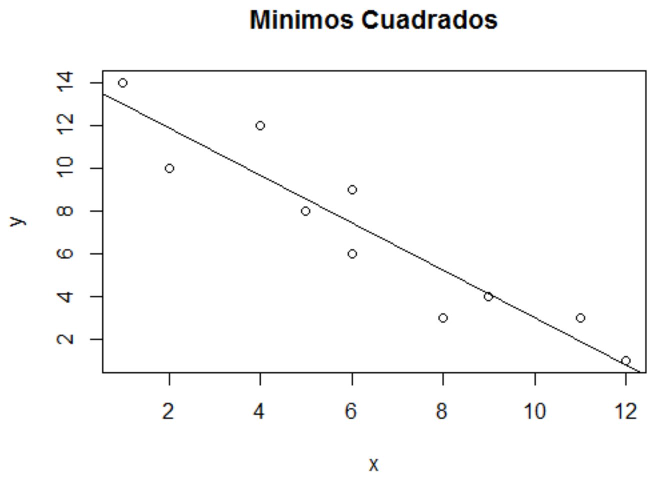


Gráfica logaritmica.

Segundo Ejemplo

x	y
8	3
2	10
11	3
6	6
5	8
4	12
12	1
9	4
6	9
1	14

Tabla 2. Lectura de valores.



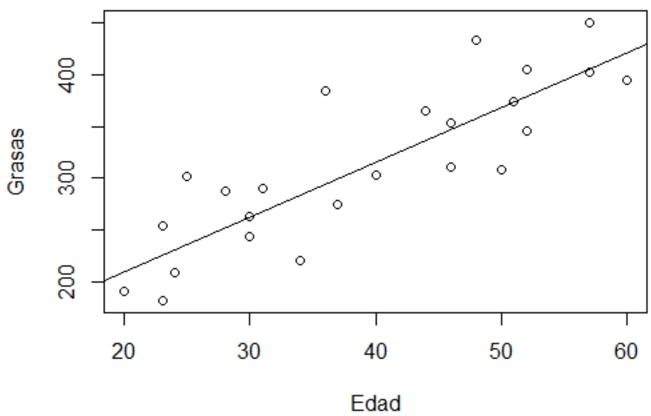
Gráfica mínimos cuadrados.

Tercer Ejemplo

Para cuantificar el grado de relación lineal, calculamos la matriz de coeficientes de correlación:

	peso	edad	grasas
peso	1.0000	0.2400	0.2653
edad	0.2400	1.0000	0.8374
grasas	0.2653	0.8374	1.0000

Tabla 3. Lectura de valores.



Gráfica edad vs grasa.

Chapter 12

Tarea 11

12.1 Cocientes de correlación de Pearson

Tarea 11. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

Octubre 2015

Coeficientes de correlación de Pearson

En estadística, el coeficiente de correlación de Pearson es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, la correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables. En el caso de que se esté estudiando dos variables aleatorias x y y sobre una población; el coeficiente de correlación de Pearson se simboliza con la letra $\rho_{x,y}$, siendo la expresión que nos permite calcularlo:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \tag{1}$$

Donde:

σ_{xy} es la covarianza de (X, Y)
σ_x es la desviación típica de la variable X
σ_y es la desviación títpica de la variable Y

Ejemplo

Con los datos sobre las temperaturas en dos días diferentes en una ciudad, determinar el tipo de correlación que existe entre ellas mediante el coeficiente de Pearson.

X	18	17	15	16	14	12	9	15	16	14	16	18	$S_x = 180$
Y	13	15	14	13	9	10	8	13	12	13	10	8	$S_y = 138$

Se calcula la media para X

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{180}{12} = 15$$

Se calcula la media para Y

$$\overline{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{138}{12} = 11.5$$

Obtenemos los siguientes datos:

X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	x^2	xy	y^2
18	13	3	1.5	9	4.5	2.25
17	15	2	3.5	4	7	12.25
15	14	0	2.5	0	0	6.25
16	13	1	1.5	1	1.5	2.25
14	9	-1	-2.5	1	2.5	6.25
12	10	-3	-1.5	9	4.5	2.25
9	8	-6	-3.5	36	21	12.25
15	13	0	1.5	0	0	2.25
16	12	1	0.5	1	0.5	0.25
14	13	-1	1.5	1	-1.5	2.25
16	10	1	-1.5	1	-1.5	2.25
18	8	3	3.5	9	-10.5	12.25
$\Sigma = 180$	$\Sigma = 138$	-	-	$\Sigma = 72$	$\Sigma = 28$	$\Sigma = 63$

Tabla 1. Temperaturas.

Para calcular la correlación:

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{28}{\sqrt{(72)(63)}} = 0.416$$

Lo que quiere decir que existe una correlacón moderada entre las variables X y Y.

Chapter 13

Tarea 12

13.1 Series de Taylor

Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana Belem Romero Ruíz
22 Octubre 2015

Series de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x-a)^n$ llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto a suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Si esta serie está centrada sobre el punto cero, $a = 0$, se le denomina serie de McLaurin.

Esta aproximación tiene tres ventajas importantes:

La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.

Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones.

Es posible calcular la optimidad de la aproximación.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad. La serie de Taylor de una función f real o compleja $f(x)$ infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como la siguiente suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,,$$

donde:

$n!$ es el factorial de n

$f(n)(a)$ denota la n-ésima derivada de f para el valor a de la variable respecto de la cual se deriva.

Para el calculo de la serie de Taylor de la función $ln(x)$ centrada en $a = 1$ se procede por calcular las derivadas y a evaluar las funciones en $a = 1$.

A continuacion se observan

$$
\begin{array}{c|c}
f(x) = ln(x) & f(1) = ln(1) = 0 \\
f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(1) = 1 \\
f''(x) = -x^{-2} & f''(1) = -1^{-2} = -1 \\
f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(1) = 2(1)^{-3} = 2 \\
f^{v}(x) = -6x^{-4} & f^{v}(1) = -6(1)^{-4} = -6 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Sustituyendo en la formula general se obtiene:

$$
\begin{gathered}
f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-6}{24}(x-1)^4 + \cdots \\
(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots
\end{gathered}
$$

O en su forma de sumatoria queda :

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}
$$

Chapter 14

Tarea 13

14.1 Experimento hormigas y los efectos en sus patas

Tarea 13. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

27 Octubre 2015

Experimento Hormigas y los efectos en sus patas

Los científicos, de la Universidad de Sussex, han mostrado con precisión cómo funciona la estrategia de navegación visual de las hormigas.

En su primer viaje a un emplazamiento de alimentos, ésta sigue un sendero químico dejado por compañeras anteriores. Una forma lenta de viajar, puesto que la hormiga necesita caminar con sus antenas dirigidas hacia el suelo.

Sin embargo, esta ruta inicial le permite conocer una estrategia eficaz. En ese primer viaje, las hormigas se aprenden las imágenes de la ruta a medida que avanzan. Y en los viajes posteriores al lugar, se orientan valiéndose de rasgos específicos del paisaje y sus recuerdos sobre los mismos.

En el estudio, los científicos constataron que las hormigas empleaban juegos diferentes para recordar marcas específicas del terreno, dependiendo de si avanzaban hacia la comida, o si ya se habían abastecido y se dirigían de regreso al hormiguero. Las hormigas conservan muchos recuerdos y cuentan con mecanismos para activar los correctos.

Para analizar la capacidad de memorización de las hormigas, los investigadores prepararon una situación que resultase visualmente ambigua para ellas. Se las habituó a encontrar comida en un punto concreto ubicado entre dos cilindros de diferentes tamaños. Entonces, los cilindros fueron reemplazados por dos del mismo tamaño. En esta situación, las hormigas sólo eran capaces de orientarse hasta el lugar correcto cuando algún rasgo adicional era introducido en el entorno a modo de punto de referencia.

Los investigadores refinaron sus experimento en como las hormigas selección solo los recuerdo que le son útiles en ese momento. Según explicó el investigador principal, Tom Collett, (Centro de Neurociencias de la Universidad de Sussexde) Para demostrar que usan memoria visual para navegar, entrenaron hormigas para encontrar comida colocada a 10 centímetros de un cilindro. Para eso duplicaron el tamaño del cilindro, y las hormigas buscaron la comida a 20 centímetros, donde el tamaño relativo en la retina de ese rasgo del terreno (el cilindro) era el mismo.

Conocer mejor la estrategia de orientación visual de las hormigas podría ayudar al desarrollo de robots autónomos. La conducta de los insectos es mucho más similar a la de las máquinas que la de los mamíferos, y las hormigas son mucho menos flexibles en su uso de estrategias de navegación. Esto hace más fácil entender cómo operan tales estrategias, y posibilita diseñar robots que circulen siguiendo principios similares.

Sin duda es impresionante la manera en que las hormigas se dirigen, y la capacidad que tienen de recordar.

Esta información fue obtenida de la página web:
$http : //www.planetacurioso.com/2006/11/30/C2BFcomo - encuentran - su - camino - las - hormigas/.$

Chapter 15

Tare 14

15.1 Demostración de ecuaciones

Tarea. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

10 Noviembre 2015

Demostración Ecuaciones

Ecuación 46

$$lnW(n_1) = lnW(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \frac{1}{2}B_{2_\eta}^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + ... \tag{1}$$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots . \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

Para el caso del $\ln W(n_1)$, cerca de su máximo

$$n_1 \equiv \tilde{n}_1 + \eta \tag{4}$$

Entonces, podemos reescribir como sigue:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \frac{1}{2}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + ... \tag{5}$$

Donde:

$$B_k = \frac{d^k \ln W}{d{n_1}^k} \tag{6}$$

Ecuación 54

$$lnW(n_1) = lnN! - lnn_1! - ln(N-n_1) + n_1 lnp + (N-n_1)lnq \tag{7}$$

$$f(x) = ln(x) \tag{8}$$

De las derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = \frac{-1}{x^2}, f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}, ..., f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^n} \tag{9}$$

De la formula

$$ln(x) = ln(a) + \frac{1}{a}\frac{(x-a)}{1} + \frac{-1}{a^2}\frac{(x-a)^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n}\frac{(x-a)^n}{n}... \tag{10}$$

Entonces

$$ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)} \tag{11}$$

Ecuación 55

$$\frac{dlnn!}{dn} \approx \frac{ln(n+1)! - lnn!}{1} = ln\frac{(n+1)!}{n!} = ln(n+1) \tag{12}$$

$$n \gg 1 \tag{13}$$

$$\frac{dlnn!}{dn} \approx \frac{ln(n+1)! - lnn!}{1} = ln\frac{(n+1)!}{n!} = ln(n+1) \tag{14}$$

para $n1$,

$$\frac{dlnn!}{dn} \approx ln \quad n \tag{15}$$

Ecuación 56

$$\frac{dlnn!}{dn} \approx lnn \tag{16}$$

Conociendo que en la sarie de Taylor para$\frac{1}{x}$ $c = 1$

$$\frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+2)^2 - .....$$

Dado que $\int \frac{1}{x} = ln(x) + c$ se obtiene que:

$$ln(x) + c = x - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - .....$$

Sustituyendo el valor de X=1 para encontrar el valor de c tenemos que:

$$ln(x)+c=1-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^3}{3}-.....$$

donde $c=1$

Podemos decir que:

$$ln(x)=(x-1)-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^3}{3}-....==\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n}$$

$$=ln\frac{(n+1)!}{n!}=ln(n+1)$$

para $n>1$

$$\frac{dlnn!}{dn}\approx lnn$$

Ecuación 57

$$\frac{dlnW}{dn_1}=-lnn_1+ln(N-n_1)+lnp-lnq \tag{17}$$

De $lnW(n1)=lnN!-ln(n1!)-ln(N-n1)!+n_1ln(p)+(N-n1)ln(q)$ y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d\ ln\ n!}{dn}\approx\frac{ln(n+1)!-ln(n)!}{n!}=ln\frac{(n+1)!}{n!}=ln(n+1)$$

$$\frac{d\ ln\ n!}{dn}=ln(n)$$

Al derivar $lnW(n1)$ con respecto de n_1 se tiene que:

$$\frac{d\ ln\ W}{dn}=lnN!-ln(n_1)+ln(N-n_1)+ln(p)-ln(q)$$

Esto debido a que el termino $lnN!$ es constante con respecto a la variable independiente. De la propiedad anterior del logaritmo, $\frac{d\ -ln(n_1)!}{dn}=-ln(n_1)$, junto con el termino $-ln(N-n1)!$. El termino $ln(p)$ se obtiene ya que se anula el n_1 por la variable independiente, para el ultimo termino al desarrollar el paracentesis se obtiene $N\ ln(q)-n_1\ ln(q)$, $N\ ln(q)$ es constante y de $-n_1\ ln(q)$, n_1 se elimina y deja el signo negativo.

Ecuación 58

$$ln[\frac{(N-\tilde{n}_1)}{\tilde{n}_1}\frac{p}{q}] = 0 \tag{18}$$

Igualando [57] a 0, se encuentra el valor $n_1 = \tilde{n}_1$, donde W es el máximo, entonces, se obtiene:

$$\frac{d\ ln\ W}{dn} = -ln(n_1) + ln(N-n_1) + ln(p) - ln(q) = 0 \tag{19}$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$[ln(N-n_1) - ln(n_1)] + [ln(p) - ln(q)] = 0 \tag{20}$$

$$ln\left(\tfrac{N-n_1}{n_1}\right) + ln\left(pq\right) = 0 \tag{21}$$

$$ln\left(\tfrac{N-n_1}{n_1}\tfrac{p}{q}\right) = 0 \tag{22}$$

$n_1 = \tilde{n}_1$

Ecuación 59

$$(N-\tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1 q \tag{23}$$

$$(N-\tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1 q \tag{24}$$

Despejando N y p de lado derecho

$$-\tilde{n}_1 = \tilde{n}_1\frac{q}{p} - N \tag{25}$$

Invirtiendo los signos

$$\tilde{n}_1 = N - \tilde{n}_1\frac{q}{p} \tag{26}$$

Multiplicando por p de ambos lados

$$\tilde{n}_1 p = Np - \tilde{n}_1 q \tag{27}$$

Sumando $\tilde{n}_1$p de ambos lados y factorizando

$$\tilde{n}_1(p+q) = Np \tag{28}$$

Para nuestro caso de interés $(p+q) = 1$

$$\tilde{n}_1 = Np \tag{29}$$

Ecuación 60

$$\tilde{n}_1 = Np \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
(N-\tilde{n}_1)p &= \tilde{n}_1 q \\
Np - \tilde{n}_1 p &= \tilde{n}_1 q \\
Np &= \tilde{n}_1 q + \tilde{n}_1 p \\
Np &= \tilde{n}_1 (q+p) \\
Np &= \tilde{n}_1
\end{aligned} \tag{31}
$$

Recordando que:

$$
p+q=1 \tag{32}
$$

Ecuación 61

$$
\frac{d^2 lnW}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{(N-n_1)} \tag{33}
$$

Ecuación 61

$$
\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N-n_1} \tag{34}
$$

Partiendo la primera derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= -\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q \\
\frac{d}{dn_1}\left(\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1}\right) &= \frac{d}{dn_1}\left(-\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q\right) \\
\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} &= -\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} + \frac{d \ln{(N-n_1)}}{dn_1} + \frac{d(\ln p)}{dn_1} - \frac{(\ln q)}{dn_1}
\end{aligned}
$$

Resolviendo las derivadas se tiene que:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} &= -\frac{1}{n_1} \\
\frac{d \ln(N-n_1)}{dn_1} &= \frac{d \ln(N-n_1)}{dn_1}\frac{d(N-n_1)}{dn_1} \\
&= \frac{1}{N-n_1}(-1) = -\frac{1}{N-n_1} \\
\frac{d \ln p}{dn_1} &= 0 \\
\frac{d \ln q}{dn_1} &= 0
\end{aligned}
$$

Sumando los terminos obtenidos, comprobamos que:

$$
\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N-n_1}
$$

Ecuación 62

$$B_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - N_p} = -\frac{1}{N}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = -\frac{1}{Npq} \tag{35}$$

$$b_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np}$$

Desarrolando se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \frac{1}{N(1-p)}$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{(1-p)}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{q+p}{pq}$$

Dado que $p + q = 1$

$$b_2 = -\frac{1}{Npq}$$

Evaluando la ecuación 61 con lo obtenido en la ecuación 60 se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np}$$

Desarrolando se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \frac{1}{N(1-p)}$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{(1-p)}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N}\frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$b_2 = -\frac{1}{N}\frac{q+p}{pq}$$

Dado que $p + q = 1$

$$b_2 = -\frac{1}{Npq}$$

Chapter 16

Tarea 16

16.1 Ecuaciones de distribución: Maxwell-Boltzman, Bose-Einstein, Fermi-Dirac

Tarea 16. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

19 Noviembre 2015

Ecuaciones de distribución

Maxwell-Boltzmann

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}} \tag{1}$$

Esta función de distribución se aplica cuando las partículas se encuentran separadas a distancias considerables y son distinguibles.Rige la distribución de un conjunto de partículas en función de los posibles valores de energía de los estados que éstas pueden ocupar.

$$f(\epsilon_i) = A(N;T)e^{(-\epsilon_i)/kT} \tag{2}$$

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{e^{(\epsilon_i-\mu)/kT}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/kT}}{Z} \tag{3}$$

Donde el número de particulas se divide entre el total de particulas.

$$N = \sum_i N_i \tag{4}$$

Y el numero de estados con energía Ei se divide entre la energía del estado i-esimo y la constante Boltzmann.

Bose-Einstein

Partículas identicas e indistinguibles con espin entero.

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1} \tag{5}$$

Donde el número de particulas en un estado de energia i es:

$$n_i\left(\varepsilon_i, T\right) = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_B T} - 1} \tag{6}$$

Se reduce a las estadistica de Maxwell-Boltzmann para energias.

Fermi-Dirac

Se aplica a las partículas con espín semientero. Cada tipo de función de distribución tiene un término de normalización multiplicando el denominador del exponente, que puede ser dependiente de la temperatura.

$$n_i\left(\varepsilon_i,\, T\right) = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T}\ + 1} \tag{7}$$

Donde se da por el numero promedio de las particulas del estado de energia, la energia del i-esimo y la temperatura.

Chapter 17

Tarea 17

17.1 Serie Geométrica

Tarea 17. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

03 Diciembre 2015

Serie Geométrica

A partir de ella podemos obtener otra sucesión, formada por las sucesivas sumas parciales de sus términos, es decir:

$$S_1 = x_1 S_2 = x_1 + x_2 ... S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n ... \tag{1}$$

En matemática, una serie geométrica es una serie en la cual la razón entre los términos sucesivos de la serie permanece constante.
Por ejemplo la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

es geométrica, pues cada término sucesivo se obtiene al multiplicar el anterior por $\frac{1}{2}$.

1 Razón común

Los términos de una serie geométrica forman una progresión geométrica, es decir que la razón entre términos sucesivos permanece constante.

El comportamiento de los términos depende de la razón común r:

- Si $|r| < 1$ los términos decrecen y se acercan a cero en el límite. En tal caso, la serie converge.
- Si $|r| > 1$ los términos de la serie se incrementan en magnitud. La suma de los términos también aumenta y la serie no tiene suma. La serie diverge.

2 Suma

La suma de una serie geométrica será finita siempre y cuando los términos se aproximen a cero; a medida que se acercan al cero, las cantidades se vuelven insignificantemente peque´ as, permitiendo calcular la suma sin importar el hecho que la serie sea infinita. La suma puede ser obtenida utilizando las propiedades autosimilares de la serie.

sectionFórmula Para $r \neq 1$, la suma de los primeros n términos de una serie geométrica es:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\,\frac{1-r^n}{1-r} \tag{3}$$

donde a es el primer término de la serie y r la razón común.

3 Demostración

Sea $s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$.
Entonces $rs = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n$.
Entonces $s - rs = s(1-r) = a - ar^n$, luego $s = a\frac{1-r^n}{1-r}$.

Ejemplo: Dada la suma de la serie geométrica:

$$s \;=\; 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots \tag{4}$$

La razón común de esta serie es 2/3. Multiplicando por 2/3 cada término, se obtiene:

$$\frac{2}{3}s \;=\; \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots \tag{5}$$

Esta nueva serie es como la original excepto por el primer término que falta. Restándolas, se obtiene:

$$s \;-\; \tfrac{2}{3}s \;=\; 1 \tag{6}$$

, por lo que $s = 3$. Una técnica similar puede utilizarse al evaluar cualquier expresión autosimilar.

4 Convergencia

La serie geométrica real de término inicial $a \in \Re$ no nulo y de razón $r \in \Re$ es convergente si y solamente si $|r| < 1$. En tal caso, su suma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \tag{7}$$

5 Ejemplos

5.1

Secuencia geométrica finita:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{32768} \tag{8}$$

Escrita en notación sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{2^k} \tag{9}$$

5.2

Secuencia geométrica infinita:

$$2 + 6 + 18 + 54 + \cdots \tag{10}$$

Escrita en notación sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 * 3^{n-1}) \tag{11}$$

Chapter 18

Anexos

18.1 Ecuaciones

18.2 Exámenes

18.3 Funciones de Distribución de Probabilidad

18.4 Presentación "Mínimos Cuadrados, Valores y Vectores Propios"

18.5 Problema "Ovejas"

1.4.1

$$W(n_1) = \frac{N!}{n!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \tag{1}$$

1.4.2

$$\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^N = 1^N = 1, q \equiv 1-p \tag{3}$$

1.4.3

$$\tilde{n}_1 \equiv \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) n_1 = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1 \tag{4}$$

$$n_1 p^{n_1} = p \frac{\delta}{\delta p}(p^{n_1})$$

$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1 = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} [p \frac{\delta}{\delta p}(p^{n_1})] q^{N-n_1}$

= p $\frac{\delta}{\delta p}$ $[\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}]$

= p $\frac{\delta}{\delta p}$ (p+q)^N

= pN (p+q)$^{N-1}$(5)
1.4.4

$$\tilde{n}_1 = Np \tag{6}$$

1.4.5

$$\tilde{n}_2 = Nq$$

ñ$_1$ + $\tilde{n}_2 = N(p+q) = N(7)$
1.4.6

$$\overline{m} = \overline{n_1 - n_2} = \tilde{n}_1 - \tilde{n}_2 = N(p-q) \tag{8}$$

1.4.7

$$\overline{(\triangle\ n_1)^2} \equiv \overline{(n_1 - \tilde{n}_1)^2} = \overline{n_1^2} - \tilde{n}_1^2 \tag{9}$$

1.4.8

$$\begin{aligned} \overline{n_1^2} &\equiv \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) n_1^2 \\ &= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1 \end{aligned} \tag{10}$$

$$n_1^2 p^{n_1} = n_1(p$$

$\delta_{\overline{\delta p}})$ $(\mathrm{p}^{n_1}) = (p\delta_{\overline{\delta p}})^2(p^{n_1})$

$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}(p\delta_{\overline{\delta p}})^2 p^{n_1} q^{N-n_1}$

$= (\mathrm{p}\frac{\delta}{\delta p})^2 \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}$

$= (\mathrm{p}\frac{\delta}{\delta p})^2 (p+q)^N$

$= (\mathrm{p}\frac{\delta}{\delta p})$ $[\mathrm{pN}\ (\mathrm{p+q})^{N-1}]$

$= \mathrm{p}[\mathrm{N}\ (\mathrm{p+q})^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}]$

$\overline{n_1^2} = p[N + pN(N-1)]$

$= \mathrm{Np}[1\mathrm{+pN\text{-}p}]$

$= (\mathrm{Np})^2 + Npq, 1 - p = q$

$= \tilde{\mathrm{n}}_1^2 + Npq(11)$

Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

24 Septiembre 2015

Examen

1. Dar 3 ejemplos de experimentos deterministas.

2. Dar un ejemplo de probabilidad subjetiva.

3. ¿Para que se utilizan los histogramas?

4. ¿De cuántos modos diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular una madre y sus 5 hijos?

5. ¿De cuantas maneras pueden acomodarse 10 en un banco si hay 4 sitios disponibles?

6. ¿Cuántas cantidades de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 si no se permite la repetición?

7. De entre 8 personas debemos formar un comité de cinco miembros. ¿Cuántas diferentes posibilidades existen para formar el comité?

8. ¿Cuantas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de Presidente, Secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal?, sí esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa.

9. En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles?. Nota: Si nos gusta un pastel lo podemos

pedir hasta cuatro veces. Estamos en el caso en el que no nos importa el orden en que elijamos los pasteles y podemos repetir, son combinaciones con repetición.

10. ¿Cuántos puntos de tres coordenadas (x, y, z), será posible generar con los dígitos 0, 1, 2, 4, 6 y 9?, Si, a. No es posible repetir dígitos, b. Es posible repetir dígitos.

1. Respuesta:
   Después de viernes sigue sabado.
   H + H + O produce agua.
   Deja caer algún objeto en el aire (Leyes de la gravedad).

2. Respuesta:
   Tirar un dado A = que salga el num. 3
   S = 1,2,3,4,5,6
   $P(A) = \frac{1}{6}$

3. Respuesta:
   Un histograma es una representación grá?ca de una variable en forma de barras. Se utilizan para variables continuas o para variables discretas, con un gran número de datos, y que se han agrupado en clases.

4. Respuesta:
   $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$

5. Respuesta:
   ${}_{10}V_4 = \frac{10!}{6!} = (10)(9)(8)(7) = 5040$

6. Respuesta:
   ${}_5P_3 = \frac{5!}{2!} = 60$

7. Respuesta:
   Esta es una combinación porque el orden no importa.
   ${}_8C_5 = \frac{8!}{(5!)(3!)} = 56$

8. Respuesta:
   ${}_{25}P_5 = \frac{25!}{(25?5)!} = \frac{25!}{20!} = 6,375,600 manerasdeformarlarepresentación$

9. Respuesta:
   $CR_{6,4} = \frac{9!}{(4!)(5!)} = 126$

10. Respuesta:
   ${}_6P_3 = \frac{6!}{(6?3)!} = 120 puntosposibles$

Función de distribución Acumulada

La función de distribución acumulada F_X de una variable aleatoria X es definida para cada número real x como

$$F_X(X) = P(X \leq x) \tag{1}$$

Propiedad 1

La función de distribución acumulada únicamente puede tomar valores entre cero y uno.

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \epsilon R \tag{2}$$

Propiedad 2

La función de distribución acumulada es no decreciente en x.

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), x_1 < x_2 \tag{3}$$

Propiedad 3

$$lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \tag{4}$$

$$lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{5}$$

Ejemplo

Experimento aleatorio: lanzar un dado y observar el resultado.
Variable aleatoria X: indica el resultado obtenido al lanzar el dado.

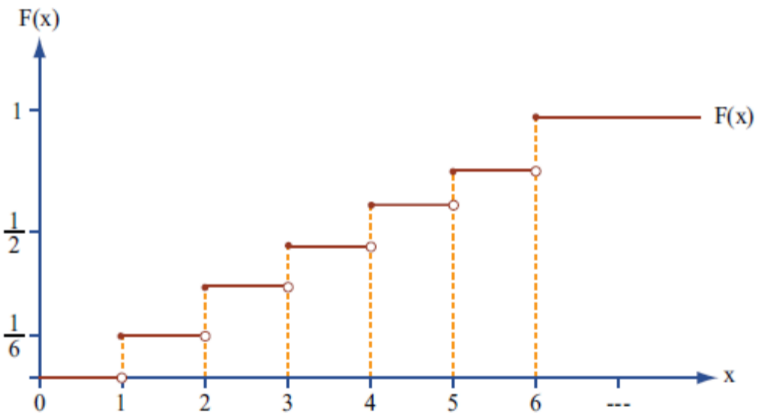
Función de probabilidad

x	P(X = x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 1/6, 1 \leq x < 2 \\ ...... \\ 5/6, 5 \leq x < 6 \\ 1, x \geq 6 \end{cases}$$

Gráfica FDA



Proposición 1

Para cualquier x dado,

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) \tag{6}$$

Prueba.

Dadas las propiedades de las probabilidades,

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) \tag{7}$$

Proposición 2

Para dos números reales x_1 y x_2, talque $x_1 < x_2$,

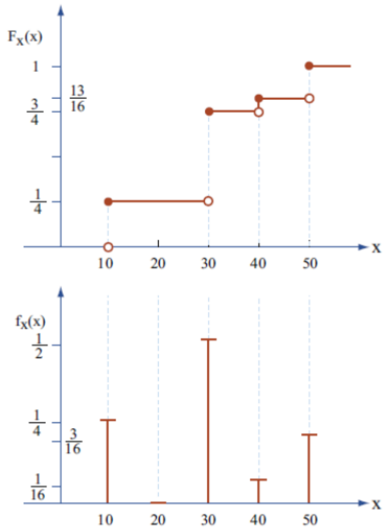
$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \tag{8}$$

Relación entre la función de probablidad y la función de distribución acumulada en variables aleatorias discretas.

Ejemplo.

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

x	P(X = x)
10	1/4
20	0
30	1/2
40	1/16
50	3/16



Relación entre la función de densidad y la función de distribución acumulada en variables aleatorias continuas.

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$, entonces

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{9}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{10}$$

Ejemplos Minimos Cuadrados, Vectores y Valores Propios

Diana Belem Romero Ruiz

8 de Octubre del 2015

Ejemplos Minimos Cuadrados

La regresión es un método que se emplea para predecir el valor de una variable en función de valores dados a la otra variable.
En todos los casos de regresión existe una dependencia funcional entre las variables. En el caso de dos variables, siendo una de ellas x variable independiente y la otra y la dependiente, se habla de regresión de y sobre x.
Por ejemplo, ingenieros forestales utilizan la regresión de la altura de los árboles sobre su diámetro, lo cual significa que midiendo el diámetro (variable independiente) y reemplazando su valor en una relación definida según la clase de árbol se obtiene la altura, y aun sin necesidad de cálculos aprecian la altura utilizando gráficas de la función de dependencia, altura $=$ función del diámetro.

La regresión potencial tiene por ecuacíń predictora:

$$Y = \alpha X^{\beta} \tag{1}$$

Y la regresión recíproca es:

$$Y = \frac{1}{\alpha + \beta log(X)} \tag{2}$$

Para el primer caso los valores siguen una ley potencial. Si la ecuación predictora está dada por logaritmos en ambos miembros, queda:

$$logY = log\alpha + \beta log(X) \tag{3}$$

Donde las constantes α y β quedan fijadas al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\sum logY = log\alpha N + \beta \sum logX$$
$$\sum logX \sum logY = log\alpha \sum logX + \beta \sum (logX)^2$$

Para el segundo caso, si la ecuación predictora está dada por $Y = 1/(\alpha + \beta(X))$ entonces invirtiendo, la misma expresión se puede escribir $1/Y = (\alpha + \beta(X))/1$ osea:

$$Y = \frac{1}{(\alpha + \beta(X))} \Rightarrow \frac{1}{Y} = \alpha + \beta(X) \tag{4}$$

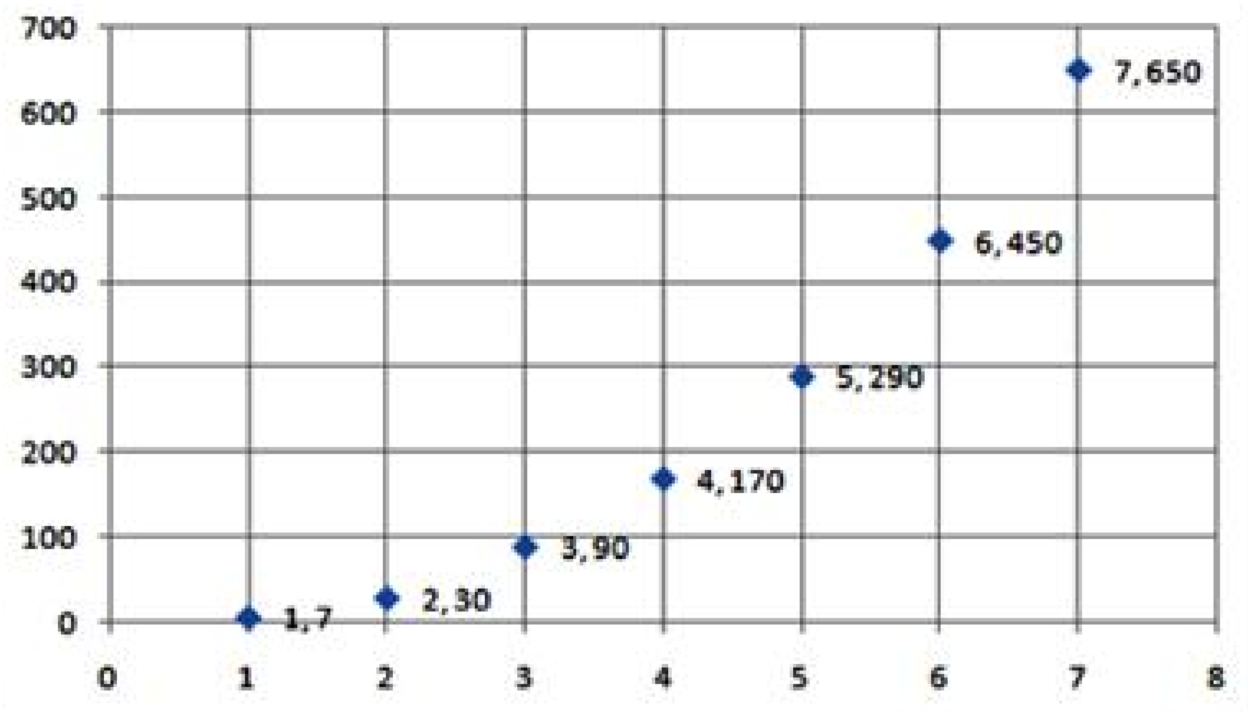
Donde las constantes α y β quedan fijadas al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\sum \frac{1}{Y} = \alpha(N) + \beta \sum X \tag{5}$$
$$\sum X \frac{1}{Y} = \alpha(N) + \beta \sum X^2 \tag{6}$$

Ejemplo

Sea el siguiente conjunto de valores, las lecturas de un experimento donde X es el volumen (variable independiente) e Y es la presión de una masa dada de gas (variable resultante).

X	Y
1	7
2	30
3	90
4	170
5	290
6	450
7	650


700
600
500
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
1, 7
2, 30
3, 90
4, 170
5, 290
6, 450
7, 650

Para ajustar una curva exponencial aplicando el método de mínimos cuadrados se llena la siguiente tabla:

X	Y	logX	logY	(logX)(logY)	$(logX)^2$
1	7	0	0.8451	0	0
2	30	0,3010	1,4771	0,4447	0,0906
3	90	0,477	1,9542	0,9324	0,2276
4	170	0,6021	2,2304	1,3429	0,3625
5	290	0,6990	2,4624	1,7211	0,4886
6	450	0,7782	2,6532	2,0646	0,6055
7	650	0,8451	2,8129	2,3772	0,7142
S X= 28		S logX= 3,7024	S logY= 14,4354	S (logX)(log Y)= 8,8829	S(log X)2= 2,4890

Reemplazando valores en el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\sum logY = log\alpha(N) + \beta \sum logX \tag{7}$$

$$(\sum logX)(\sum logY) = log\alpha(\sum logX) + \beta \sum (logX)^2 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 14,4354 &= log\alpha(7) + \beta(3,7024) \\ &\Rightarrow 7log\alpha + 3,7024\beta = 14,4354 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8,8829 &= log\alpha(3,7024) + \beta(2,4890) \\ &\Rightarrow 3,7024log\alpha + 2,4890\beta = 8,8829 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene: $log\alpha = 0,819$; $\beta = 2,351$
Reemplazando valores en la ecuación predictora expresada en logaritmos se tiene:

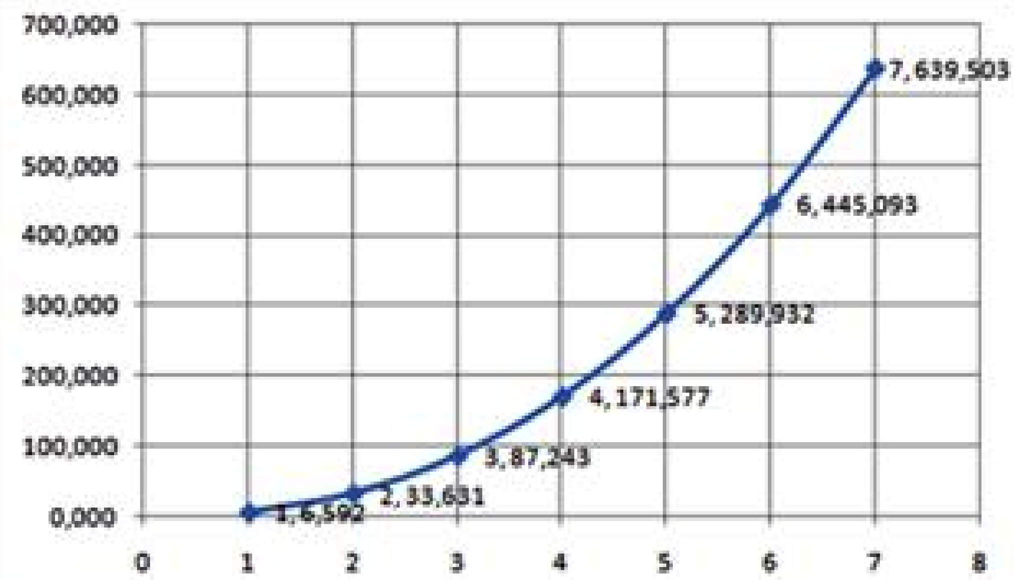
$$logy = log\alpha + \beta logx$$

$$logy = 0,819 \Rightarrow \alpha = antilog 0,819 = 6,592$$

Reemplazando en la ecuación predictora se obtiene:

$$y = \alpha X^{\beta}$$

$$y = 6,592X^{2,351}$$


700,000
600,000
500,000
400,000
300,000
200,000
100,000
0,000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
7, 639,503
6, 445,093
5, 289,932
4, 171,577
3, 87,243
2, 33,631
1, 6,592

Vectores y Valores propios

Un vector columna diferente de cero X es un eigenvector de una matriz cuadrada A si existen un escalar λ de tal manera que

$$AX = \lambda X \tag{9}$$

Después λ es un eigenvector de A. Eigenvalores pueden ser cero; un eigenvector no puede ser el vector cero.

Ejemplo 7.1

$[1, -1]$ es un eigenvector correspondiente al eigenvalor $\lambda = -2$ para la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ porque

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de una matriz A de nxn es la ecuación polinomial de enésimo-grado

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{10}$$

Resolviendo la ecuación característica para λ da el eigenvalor de A, que puede ser real, complejo o multiples el uno del otro.

Propiedades de los eigenvalores y eigenvectores

1. La suma de los eigenvalores de una matriz es igual a su traza, que es la suma de los elementos de su diagonal principal.
2. Eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son linealmente independientes.
3. Una matriz es singular sí y solo sí tiene un eigenvalor cero.
4. Si X es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor λ y A es invertible, entonces X es un eigenvector de A^{-1} correspondiente a su eigenvalor $1/\lambda$.
5. Si X es un eigenvector de una matriz, entonces también es kX para cualquier constante k diferente de cero, y ambos X y kX corresponden a el mismo eigenvalor.
6. Una matriz y su transpuesta tienen el mismo eigenvalor.
7. Los eigenvalores de una matriz triangular superior o inferior son los elementos en su diagonal principal.
8. El producto de los eigenvalores de una matriz es igual a la determinante de la matriz.
9. Si X es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor λ,

Eigenvectores linealmente independientes

Los eigenvectores correspondientes a un eigenvalor particular contienen uno o más escalares. El número de escalares es el número de eigenvectores linealmente independientes asociados con ese eigenvalor.

El teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 7.1: Cada matriz cuadrada satisface en su propia ecuación característica. Eso es sí

$$det(A - \lambda I) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1}... + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 \tag{11}$$

entonces

$$b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + ... + b_2A^2 + b_1A + B_0I = 0 \tag{12}$$

Problemas Resueltos

7.1 Determinar el eigenvalor y eigenvector de $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Para esta matriz

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}$

Por lo tanto

$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-4-\lambda) - 5(-2) = \lambda^2 + \lambda - 2$

La ecuacuión característica de A es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; cuando se reculeva para λ, nos da los eigenvalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Como revisión, utilizamos la Propiedad 7.1: La traza de A es $3 + (-4) = 1$, que es la suma de los eigenvalores.

Los eigenvectores correspondientes de $\lambda = 1$ son obtenidas por la resolución de la Ec.(1) para $X = [x_1, x_2]^7$ con el valor de λ.
Después tenemos

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ó

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = \wr x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda - 1$ son

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \wr x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuando $\lambda = -2$ puede ser

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ó}$$
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = -x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = -2$ es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Determinar los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 6 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

El determinante de esta ultima matriz puede ser obtenida con la expresión de cofactores, que es

$$-\lambda^3 + 20\lambda^2 - 93\lambda + 126 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 14) \qquad (13)$$

La ecuación característica de A es $-(\lambda-3)^2(\lambda-14)=0$, que tiene como su solución el eigenvalor $\lambda=3$ de la multiplicación de dos y el eigenvalor $\lambda=14$ de la multiplicación de uno. Equivale a la Propiedad 7.1.
Los eigenvectores corresponden a $\lambda=3$ se obtienen resolviendo por $X=[x_1,x_2,x_3]^7$ que es el valor de λ:

$$(\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\\ 6 & 6 & 9\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix})\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2+2x_3&=0\\ 3x_1+3x_2+3x_3&=0\\ 6x_1+6x_2+6x_3&=0\end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = -x_2 - x_3$ con x_2 y x_3 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = 3$ son

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuando $\lambda = 14$ se convierte

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - 14 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ó}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \\ 6 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -9x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = \wr x_3$ y $x_2 = \wr x_3$ con x_3 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = 14$ es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \wr x_3 \\ \wr x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.3 Determinar los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -5 & -5-\lambda \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-5-\lambda) - 4(-5) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

La ecuación característica de A es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, cuando resolviendo para λ, da dos eigenvalores complejos $\lambda = -1 + i2$ y $\lambda = -1 - i2$.
Los eigenvectores corresponden a $\lambda = 1$ se obtienen resolviendo por $X = [x_1, x_2]^7$ que es el valor de λ:

$$(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} - (-1 + i2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ó

$$\begin{bmatrix} 4 - i2 & 4 \\ -5 & -4 - i2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} (4 - i2)x_1 + 4x_2 &= 0 \\ -5x_1 + (-4 - i2)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $x_1 = (-4/5 - i2/5)x_2$ con x_2 arbitrariamente, los eigenvectores corresponden a $\lambda = -1 + i2$ son

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4/5 - i2/5)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4/5 - i2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda = -1 - i2$, los eigenvalores correspondientes son encontrados en una manera similar

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4/5 + i2/5)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4/5 + i2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tarea. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

26 Noviembre 2015

Problema

There are 100 equally spaced points around a circle. At 99 of the points, there are sheep, and at 1 point, there is a wolf. At each time step, the wolf randomly moves either clockwise or counterclockwise by 1 point. If there is a sheep at that point, he eats it. The sheep don?t move. What is the probability that the sheep who is initially opposite the wolf is the last one remaining?

Respuesta

Call the sheep initially oppose the wolf Dolly. If Dolly is the last sheep surviving, then both of Dolly?s neighbors get eaten before Dolly. But the converse is also true: if both of Dolly?s neighbors get eaten before Dolly, then the wolf must have gone all the way around the long way after eating the ?rst neighbor to get to the other neighbor. Now consider the moment just after the wolf has eaten the ?rst of Dolly?s neighbors. The question then becomes whether the wolf will reach Dolly ?rst or the other neighbor ?rst. This is the same as the gambler?s ruin problem, viewed as a random warl started at 1 and ending when it raches either 0 or 99 (reaching 0 corresponds to eating Dolly). Thus, the probability that Dolly is the last sheep surviving is 1/99. (Similarly, it can be shown that the sheep are all equally likely to be the lst sheep surviving!)

Chapter 19

Conclusión

Como resultado de la investigación realizada durante el curso de Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia, se tiene que la probabilidad siempre está presente en la vida cotidiana, ya que se tiene a partir de sucesos o acontecimientos de los cuales se requiere obtener conclusiones, para después tomar una decisión correcta. La probabilidad se especializa en la medición de ocurrencia de eventos, partiendo de varios resultados, acontecimientos sin certeza bajo condiciones estables, y probar algo.

Por otro lado, tenemos que la probabilidad por parte del área de la computación, es una rama de las matemáticas que apoya el desarrollo de algoritmos a resolver problemas computables. Se usan también extensamente áreas como la estadísticas, física, ciencias y filosofía.

Chapter 20

Bibliografía

20.1 Material utilizado

Bibliografía. Probabilidad Procesos Aleatorios e Inferencia

Diana B. Romero Ruíz

Diciembre 2015

Material Utilizado

Durante el curso se utilizaron varios software, para la implementación y demostración de temas.

Latex

Latex es un sistema de composición de textos, orientado a la creación de documentos escritos que presenten una alta calidad tipográfica. Por sus características y posibilidades, es usado de forma especialmente intensa en la generación de artículos y libros científicos que incluyen, entre otros elementos, expresiones matemáticas.

http://www.latex-project.org/

R (The R Project for Statistical Computing)

R es un lenguaje y entorno para computación y gráficos estadísticos. Es un proyecto GNU, que es similar al lenguaje S y el medio ambiente que se ha desarrollado en los Laboratorios Bell. R puede ser considerado como una implementación diferente de S. Hay algunas diferencias importantes, pero mucho código escrito para S se ejecuta inalterada bajo R. Ofrece una amplia variedad de técnicas gráficas estadísticas (análisis de series de tiempo lineal y no lineal de modelado, pruebas estadísticas clásicas,, clasificación, agrupación, ...) y es altamente extensible.

http://www.r-project.org/

Root-Cern (ROOT Data Analysis Framework)

ROOT es un marco de software científico modular. Proporciona todas las funcionalidades necesarias para hacer frente a grandes de procesamiento de datos, análisis estadístico, visualización y almacenamiento. Está escrito principalmente en C ++, pero integrado con otros lenguajes como Python y R.

http://root.cern.ch/

Mathematica (WOLFRAM Computation Meets Knowledge)

Proporciona un único sistema integrado, en continua expansión, que cubre a cabalidad todos los ámbitos de la computación técnica.

http://www.wolfram.com/mathematica/

Telegram

Telegram es una aplicación de mensajería enfocada en la velocidad y la seguridad. Es súper áápida, simple y gratuita. Con Telegram, puedes crear grupos de chat con hasta 200 personas, así puedes conectarte con todos al mismo tiempo. Además, puedes compartir vídeos de hasta 1 GB, enviar imágenes y reenviar cualquier archivo multimedia que recibas al instante. Todos tus mensajes están en la nube, así que puedes acceder a ellos desde cualquiera de tus dispositivos.

http://telegram.org/