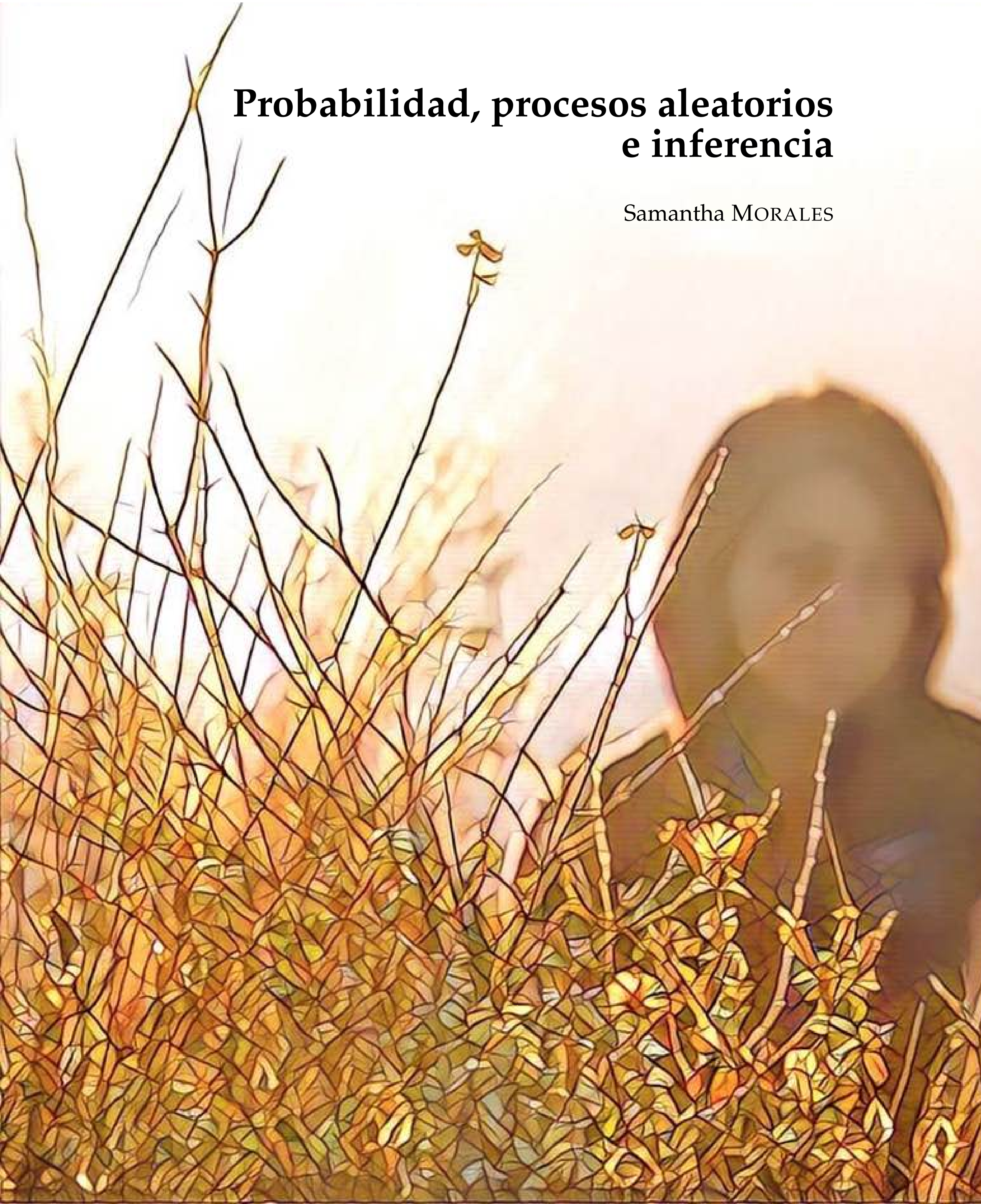
Probabilidad, procesos aleatorios e inferencia

Samantha MORALES



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

PROBABILIDAD, PROCESOS ALEATORIOS E INFERENCIA

TAREAS

Alumna:
Samantha MORALES

Profesor:
Dr. Jesus MARTINEZ

Diciembre 20, 2016

Índice

1. Señal wow!

1.1. Definición

La señal wow! es el nombre, en circulos astronómicos, que se le dio a una emision de radio que se sospecha podria tener un origen extraterrestre. Fué recibida el 15 de agosto de 1977, a las 23:16 horas, por el radiotelescopio Big Ear.

1.2. Historia

Sucedió la noche del 15 de agosto de 1977. El investigador Jerry Ehman hacía su monótona y solitaria guardia en el Observatorio Big Ear de la Universidad Estatal de Ohio (EE.UU.) cuando algo le sobresaltó. Había detectado una extraña frecuencia de radio que no podía haber sido emitida desde la Tierra y cuya procedencia aún hoy se desconoce.

Perplejo, el científico marcó la señal con un círculo en un papel y escribió a su lado Wow!. Era la primera vez que alguien se encontraba con lo que podía ser un saludo de una civilización extraterrestre.

La señal de radio Wow! duró 72 segundos y parecía proceder de un grupo de estrellas llamado Chi Sagitarii a 220 años luz de la Tierra.

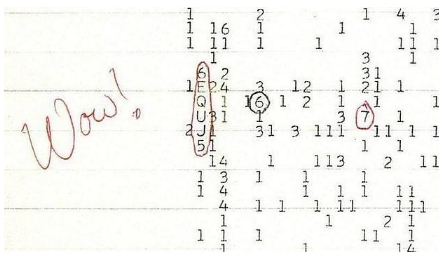


Figura 1: Señal wow! obtenida

Sin embargo, por más que el programa SETI dedicado a la búsqueda de vida inteligente en el espacio agudizara sus oídos, jamás volvió a repetirse. Ese mutismo de cuarenta años ha llevado a Antonio Paris, profesor de Astronomía en el St Petersburg College, en Florida, a plantear una teoría que podría explicar la señal.

1.3. Hipótesis

El radiotelescopio Big Ear "escuchaba" el cosmos en la frecuencia de los 1420,4056 MHz. La razón de elegir esa banda y no otra es precisamente porque se trata de la frecuencia natural de emisión del hidrógeno neutro. Al ser el elemento más abundante del universo proporciona un canal óptimo para la emisión y recepción de señales y un buen balance para diferenciar el ruido de otras señales. Si hubiera algo ahí fuera, y fuera un algo inteligente, probablemente emitiría en esa misma frecuencia.

La última hipótesis sobre el origen de esa señal la ha puesto sobre la mesa Antonio Paris, astrónomo en el Colegio St. Petersburg de Florida. Según Paris, la Señal Wow! tiene su origen en alguno de los dos cometas denominados 266P/Christensen y P/2008 Y2 (Gibbs).

Cuando se registró la señal, ambos cometas estaban en esa región del espacio, y ambos son conocidos por liberar grandes nubes de hidrógeno cuando entran en nuestro Sistema Solar y reciben el impacto de la radiación solar. Esas estelas de hidrógeno hubieran bastado por sí solas para generar una lectura anómala y muy intensa en las mediciones. Ninguno de estos dos cometas se conocía en 1977 ya que se han descubierto en la última década.

Por supuesto, la hipótesis de Paris es solo eso, una teoría.Afortunadamente, es una que puede ser comprobada. El próximo 27 de enero el cometa 266P/Christensen regresa al sistema solar. P/2008 Y2 (Gibbs) hará lo propio en enero de 2018. Si los radiotelescopios detectan una señal similar a la de 1977 en alguno de los dos, una de las teorías sobre la existencia de civilizaciones extraterrestres más persistentes de las últimas décadas será finalmente descartada.

2. Efecto Peltier

2.1. Definición

El efecto Peltier consiste en hacer pasar una corriente por un circuito compuesto de materiales diferentes cuyas uniones están a la misma temperatura, se produce el efecto inverso al Seebeck (efecto termoeléctrico). En este caso, se absorbe calor en una unión y se desprende en la otra.

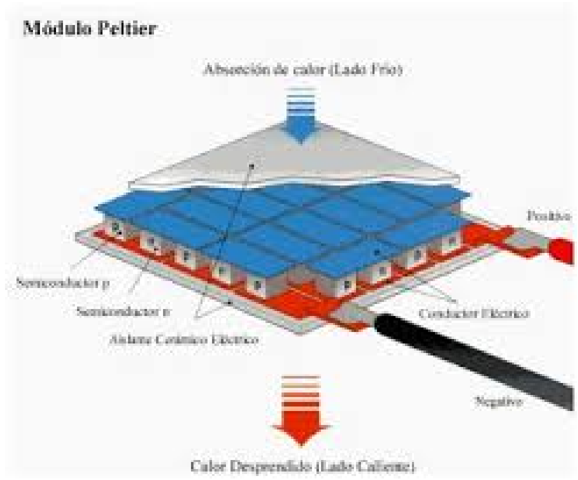


Figura 2: Estructura interna de una celda peltier.

2.1.1. Efecto Termoeléctrico de Peltier

Internamente la celda Peltier posee elementos semiconductores altamente impurificados y dispuestos eléctricamente en serie mediante conductores de cobre. Para aislar los conductores de cobre del disipador se agrega entre ellos una placa de cerámica que funciona como aislante, figura 3

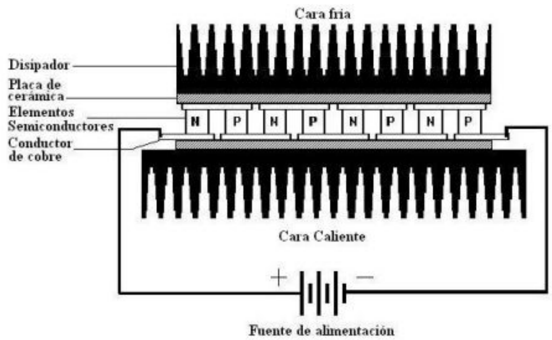


Figura 3: Corte transversal una celda peltier.

Una polarización, se distribuye a lo largo de cada elemento semiconductor de la celda, es decir, cada elemento semiconductor posee una diferencia de potencial proporcional a la polarización de entrada. Por esta razón, los portadores mayoritarios, electrones débilmente ligados, emigran hacia el lado positivo de cada uno de sus extremos en los elementos semiconductores tipo N, debido a la atracción de cargas de diferente signo. Mientras que los portadores mayoritarios, huecos de los elementos semiconductores P, emigran hacia la terminal negativa que se encuentra en cada uno de sus extremos. Esta ausencia de cargas en cada elemento semiconductor cerca de la unión metal - semiconductor provoca un enrarecimiento de cargas y el consecuente descenso de temperatura en el área circundante. Por otro lado, la compresión o acumulación de portadores cerca de la unión metal semiconductor en la parte baja de los elementos semiconductores, provoca un ascenso de temperatura. Este comportamiento nos permite afirmar que si invertimos la polaridad de la fuente de alimentación, la cara fría ahora calentará y la cara caliente sufrirá un descenso de temperatura.

2.1.2. Refrigeración termoeléctrica

La refrigeración termoeléctrica utiliza el efecto Peltier para crear un flujo térmico a través de la unión de dos materiales diferentes, como metales o semiconductores tipo P y N. Un refrigerador o calentador Peltier o una bomba de calor termoeléctrica es una bomba de calor activa en estado sólido que transfiere calor de un lado del dispositivo a otro oponiéndose al gradiente de temperatura, consumiendo para ello energía eléctrica. Un instrumento de este tipo también es conocido como dispositivo Peltier, diodo Peltier, bomba de calor Peltier, refrigerador de estado sólido o refrigerador termoeléctrico. Ya que el calentamiento se puede conseguir de manera más fácil y económica por otros muchos métodos, los dispositivos Peltier se usan principalmente para refrigeración. En cualquier caso, cuando se debe usar un único dispositivo tanto para enfriar como para calentar, puede ser aconsejable el uso de un dispositivo Peltier. Simplemente conectándolo con una fuente de tensión continua causa el enfriamiento de una de las partes, mientras que la otra se calienta. La efectividad de la bomba para mover el calor lejos del lado frío es totalmente dependiente de la cantidad de corriente proporcionada y de cómo se extraiga el calor de la otra parte, para lo que se pueden usar disipadores.

3. Efecto seebeck

3.1. Definición

El efecto Seebeck consiste en generar corriente eléctrica sometiendo la unión de 2 metales diferentes a una diferencia de temperaturas; al contrario el efecto Peltier nos dice que, si se aplica una corriente eléctrica a la unión de 2 metales diferentes se apreciara una diferencia de temperaturas en las uniones.

3.2. Historia

El efecto Seebeck fue descubierto por el Físico estonio de origen alemán. Thomas Johan Seebeck. Realizó notables investigaciones en varios campos de la física, intentando establecer la conexión entre calor y electricidad. Llegó así a descubrir, en 1821, que uniendo una lámina de cobre con otra de bismuto, en un circuito cerrado, al calentar una de las uniones se genera una corriente eléctrica que fluye por el circuito en tanto persista la diferencia de temperatura, fenómeno que se utiliza aún para el diseño de dispositivos que permiten realizar mediciones de temperatura con una gran sensibilidad y precisión (termopar), así como para generar energía eléctrica para aplicaciones especiales.

En 1834, el señor Jean C. A. Peltier descubrió el "efecto Peltier". El cual consiste en la manifestación de una variación térmica en la unión de 2 metales diferentes, cuando se establece una corriente eléctrica entre ellos. El concepto rudimentario de Peltier fue paulatinamente perfeccionado para que fuera un solo bloque con las uniones semiconductoras, conectadas por pistas de cobre y dispuestas de tal manera, que transportara el calor desde una de sus caras hacia la otra, haciendo del mecanismo una "bomba de calor" ya que es capaz de extraer el calor de una determinada superficie y llevarlo hacia su otra cara para disiparlo, este dispositivo es denominado Celda Peltier o Dispositivo Termoelectrico Peltier (TEC) el cual se utiliza principalmente en los sistemas de refrigeración.

Estos sistemas de refrigeración que se ocupan en todo ámbito (generalmente industrial), son bastante versátiles, basta con invertir la polaridad para invertir el efecto (cambiar el lado que se calienta por el frío y viceversa), la potencia con que enfría es fácilmente modificable dependiendo del voltaje que se le aplique y es bastante amable con el medio ambiente ya que no necesita de gases nocivos como los usados en los refrigeradores industriales para realizar su labor.

El uso de refrigeración termoeléctrica por lo general se circunscribe al ámbito industrial, pero tanto los fanáticos como algunos fabricantes han desarrollado productos que incorporan el elemento Peltier como método para enfriar el procesador de un PC

4. Probabilidad

4.1. Definición

4.1.1. Definición General

Probabilidad de un suceso es el número al que tiende la frecuencia relativa asociada al suceso a medida que el número de veces que se realiza el experimento crece.

4.1.2. Definición de Laplace

En el caso de que todos los sucesos elementales del espacio muestral E sean equiprobables, Laplace define la probabilidad del suceso A como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso A en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{No. Casos\, Favorables\, a\, A}{No, Casos\, Posibles} = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1}$$

4.1.3. Definición Frecuencial

Un experimento aleatorio se caracteriza porque repetido muchas veces y en idénticas condiciones el cociente entre el número de veces que aparece un resultado (suceso) y el número total de veces que se realiza el experimento tiende a un número fijo. Esta propiedad es conocida como ley de los grandes números, establecida por Jakob Bernouilli. Tiene el inconveniente de variar la sucesión de las frecuencias relativas de unas series de realizaciones a otras, si bien el valor al que se aproximan a medida que el número de realizaciones aumenta se mantiene estable.

La frecuencia relativa del suceso A:

$$f_r(A) = \frac{No.\, de\, veces\, que\, aparece\, A}{numero\, de\, veces\, que\, se\, realiza\, el\, experimento} = \frac{nA}{n} \tag{2}$$

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_r \tag{3}$$

4.1.4. Definición Axiomática

La definición axiomática de probabilidad se debe a Kolmogorov, quien consideró la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad cuando el número de veces que se realiza el experimento es muy grande.

Sea E el espacio muestral de cierto experimento aleatorio. La Probabilidad de cada suceso es un número que verifica:

- Cualquiera que sea el suceso $A, P(A) \geq 0$
- Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- La probabilidad total es 1. $P(E) = 1$

5. Tipos de Enfoque en la Probabilidad

5.1. Enfoque Clásico

Los resultados de un experimento son igualmente viables, es decir, tienen teóricamente las mismas posibilidades de ocurrir. En este caso la probabilidad de ocurrencia de un evento será:

$$\frac{No.\, de\, resultados\, en\, los\, que\, se\, presenta\, el\, evento}{No.\, total\, de\, resultados\, posibles}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que en una baraja francesa de 52 cartas salga el cinco de trébol es de $\frac{1}{52}$.

5.2. Enfoque Empírico

La probabilidad de que un evento suceda se determina observando eventos similares en el pasado. Este método utiliza la frecuencia relativa de las presentaciones pasadas de un evento como una probabilidad. Determinamos qué tan frecuente ha sucedido algo en el pasado y usamos esa cifra para predecir la probabilidad de que suceda de nuevo en el futuro. En este caso la probabilidad de ocurrencia de un evento será:

$$\frac{No.\, de\, resultados\, esperados\, ocurridos\, en\, el\, pasado}{No.\, total\, de\, experimentos\, adelantados}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que Brasil gané el mundial de Suráfrica 2010 es de

$$\frac{5\, mundiales\, ganados\, anteriormente}{18\, mundiales\, que\, se\, han\, celebrado\, en\, total}.$$

5.3. Enfoque Subjetivo

Se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

6. Artículos sobre telomerós relacionados con la muerte y la oveja Dolly

6.1. Cell death during crisis is mediated by mitotic telomere deprotection.

El articulo habla sobre la formación del tumor está bloqueado por dos barreras: la senescencia replicativa y la crisis. La senescencia se desencadena por telómeros cortos y se omite por interrupción de las vías de tumor supresor. Después de la derivación la senescencia, las células se someten a crisis, durante el cual casi todas las células en la población mueren. Aquí nos muestran que las células humanas en crisis someten a la detención mitótica espontánea, lo que resulta en la muerte o durante la mitosis en el ciclo celular siguiente.

La clave de la longevidad está en los telómeros.

Investigadores de la Universidad de East Anglia (Reino Unido) encontraron que la edad biológica y la esperanza de vida se pueden predecir mediante la medición del ADN de un individuo. Los científicos llegan a esta conclusión estudiando la longitud de los telómeros en una población silvestre de un ave de una pequeña isla del archipiélago de las Seychelles.

Publicada en Molecular Ecology, donde demuestran que los individuos difieren radicalmente según lo rápido que se acortan sus telómeros con la edad y que tener telómeros más cortos a cualquier edad se asocia con un mayor riesgo de muerte, por lo que la longitud de los telómeros es un buen indicador del futuro de la esperanza de vida. Este proyecto de investigación de 20 años es, según sus autores, el primero de su tipo en medir los telómeros - extremos de los cromosomas que velan por su estabilidad- a través de toda la vida de los individuos en una población silvestre.

6.2. Telomere lengths predict life expectancy in the wild, research shows.

Una investigación de la Universidad de East Anglia encontró que la esperanza de vida en la edad biológica puede predecirse midiendo el ADN individual.
Estudiaron la longitud de las tapas de los cromosomas –conocidas como telómeros—en una población fuerte de 320 pájaros carriceros (Seychelles Warblers) de una pequeña isla desierta.
Su investigación fue publicada en Noviembre 20 en Molecular Ecology, y muestra que los individuos son muy diferentes en qué tan rápido los telómeros se acortan con la edad, y que tener telómeros cortos a cualquier edad está asociado con un incremento en el riesgo de muerte. La longitud de los telómeros es el mejor indicador de la expectativa futura de vida que la edad actual, por tanto, puede ser un indicador de la edad biológica.
El proyecto de investigación de 20 años de duración es el primero en su tipo en medir los telómeros a través de toda la vida de individuos en una población salvaje.

6.3. Los telómeros de Dolly

CADA VEZ QUE LA CÉLULA SE REPLICA,LOS TELÓMEROS SE ACORTAN UN POCO, Y LLEGADOS A CIERTA MÍNIMA LONGITUD LA CÉLULA PIERDE LA CAPACIDAD DE REPRODUCIRSE

Figura 4: Oveja Dolly clonada.

La clonación es una tecnología de moda, y no porque se utilice ya con profusión, sino por las repercusiones que cada pequeña noticia que produce alcanza en los grandes medios de comunicación, y también por las sombrías predicciones que algunos realizan sobre sus consecuencias. En los últimos meses se han sucedido las noticias sobre el tema, el anuncio de la secta de los raelianos de haber llevado a término clonaciones humanas, la utilización de esta técnica con células que llevaban casi un cuarto de siglo congeladas, con el objetivo de recuperar una especie en vías de extinción y, sobre todo, la muerte, el día de San Valentín, de Dolly, la famosa oveja que abrió esta peculiar caja de Pandora hace seis años.

Más allá de las interpretaciones éticas que suscita, la clonación es un poderoso instrumento para conocer mejor algunos procesos biológicos básicos, como la ontogénesis (la formación de un nuevo ser) y el envejecimiento. Dado que su información genética procedía de una oveja de seis años, los investigadores del Instituto Roslin de Edimburgo que la crearon, liderados por Ian Wilmut, plantearon, ya en su presentación, realizada medio año después de su nacimiento, una cuestión crucial: "No sabemos si Dolly tiene seis meses o seis años". Su prematura muerte ha suscitado especulaciones de todo tipo sobre la influencia de la edad en el desenlace, que los científicos no han sabido atajar, a pesar de proclamar que ha muerto de un cáncer de pulmón de origen infeccioso muy común entre los individuos de su especie.

Y es que Dolly tampoco gozaba de un excelente estado de salud, ya que sufría una extraña artritis en sus patas posteriores. Además, en el interior de sus células los científicos encontraron, hace ya tiempo, un preocupante síntoma de envejecimiento prematuro: sus telómeros eran anormalmente cortos. Y este fenómeno no es solo un argumento poderoso contra la utilización indiscriminada de la clonación; su estudio podría desvelarnos muchos misterios que atañen a nuestro propio envejecimiento.

El deterioro que introduce la edad no se produce sólo a la escala del organismo completo sino también a nivel sistémico y a nivel celular. Los científicos han incrementado en los últimos años sus esfuerzos para descubrir en qué consiste el proceso de envejecimiento y han dirigido sus investigaciones principalmente al entorno de la célula. Desde hace medio siglo, los científicos se han mostrado intrigados por el hecho de que a partir de cierto punto las células empiezan a perder capacidad reproductiva y dejan de dividirse. Todo parece indicar que disponemos de una especie de calendario celular que está íntimamente ligado al envejecimiento.

Experimentos de laboratorio mostraron, ya en los años sesenta, que las células humanas puestas en un cultivo no se dividían eternamente (salvo las tumorales), sino que a partir de un cierto punto entraban en una especie de vejez en la que no morían pero perdían actividad.

Desde principios de los noventa disponemos de una hipótesis de explicación del fenómeno, en la que están trabajando numerosos laboratorios de todo el mundo: los telómeros. El término procede del griego y significa "parte final", designando las zonas terminales de los cromosomas. Se trata pues de un apéndice de la cadena de ADN con el que se cierra cada cromosoma, y parece jugar el papel de ese calendario. Cada vez que la célula se replica, los telómeros se acortan un poco, y llegados a cierta mínima longitud la célula pierde la capacidad de reproducirse. El proceso varía de unos tipos de células a otros, calculándose que en la mayoría de los casos no se producen más de 50 replicaciones antes de que los telómeros alcancen su límite.

Para contrarrestar la progresiva pérdida de los extremos cromosómicos, el organismo dispone de un enzima, llamado telomerasa, que repara los desperfectos y vuelve a alargar los telómeros recortados, aunque no se sabe muy bien aún en qué condiciones el cuerpo decide poner en marcha este proceso de reparación. Sí se ha comprobado, lo cual parece corroborar la teoría, que las células tumorales producen telomerasa en grandes cantidades, lo que podría explicar su afición a reproducirse de forma continua y descontrolada. Algunos incluso piensan en este enzima como el medio de conseguir, algún día, alargar la vida y mejorar el estado del cuerpo en la vejez.

La paradoja que Ian Wilmut planteaba hace seis años, al hablar de la edad de Dolly, resulta no tener aún contestación, aunque todo parece indicar que había una disfunción biológica en el primer animal clonado. Y mientras su cuerpo disecado se ha convertido en una de las atracciones más llamativas del Royal Museum de Edimburgo, sus tejidos siguen atrayendo el interés de los científicos, que están realizando análisis comparados con los de otras ovejas para intentar comprobar la hipótesis: Dolly era una oveja de mediana edad hecha de células ancianas.

7. Experimentos

7.1. Experimentos aleatorios

Experimento aleatorio y determinista, un experimento aleatorio es aquel del que no podemos predecir su resultado,es decir, que depende de la suerte o azar. En la teoría de probabilidades se llama espacio muestral o espacio demuestreo al conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio

7.1.1. Ejemplos

A continuación se enlistan una serie de ejemplos:

- Tirar un dados, dos dados, tres dados (la punuación que sale es aleatoria)
- Tirar una moneda, dos monedas, tres monedas...(caras y cruces)
- Sacar cartas de una baraja (es aleatorio el valor y el palo)
- Ver pasar gente (a ver si son hombres o mujeres)
- ver pasar gentes (anotar por tramos de edades)
- Construir una canaleta con una bifurcacion. Lanzar algo esferico a traves y ver a que lado se va.
- Echar al aire una pluma, observar e identificar donde caera.
- Arrojar algo esferico a una rampa muy ancha, desde un lado. Observar si se va de lado hasta el otro borde o si se detiene. No siempre sucede lo mismo.
- Darle velocidad a una patineta (o cualquier otra cosa con ruedas)
- Usar imanes para mover un objeto especifico.

7.1.2. Espacio Muestral

El espacio muestral del que se toma una muestra concreta está formado por elconjunto de todas las posibles muestras que se pueden extraer de unapoblación mediante una determinada técnica de muestreo.

7.2. Experimentos deterministas

Cuando conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo, decimos que es un experimento determinista.

7.2.1. Ejemplos

A continuación se enlistan una serie de ejemplos:

- Tiras piedras hacia arriba (todas caen)
- Poner ollas al fuego (todas se calientan)
- Helar recipientes con agua (al helarse aumenta el volumen)
- Calentar barras de hierro (se dilatan)
- Mojar un poco una servilleta o una hoja de papel de bano. Echarle peso para que se rompa, y comprobar la resistencia en peso que posee.
- Empujar una caja y luego jalarla. Parece cosa de nada, pero es para darse cuenta de que hay diferencia en ambos y uno es mas sencillo en unos escenarios. Intentarlos de nuevo, pero ahora en una rampa, avanzando hacia arriba; despues avanzando hacia abajo.
- Un prisma a un rayo de luz en la oscuridad.
- Usar un atomizador de agua afuera, mientras el sol esta en el cenit para ver el arcoiris.
- A un ventilador, arrojar desde arriba una pluma u hoja de papel. Es obvio que la arrastrara hacia el ventilador o fuera de si.

8. Definiciones

8.1. ¿Qué es un proceso estocástico?

Suponga que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con una cierta ley de movimiento, y sea Xt el estado del sistema al tiempo t. Si se considera que la forma en la que el sistema evoluciona no es determinista, sino provocada por algún mecanismo azaroso, entonces puede considerarse que Xt es una variable aleatoria para cada valor del indice t. Esta colección de variables aleatorias es la definición de proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. En general, las variables aleatorias que conforman un proceso no son independientes entre sí, sino que están relacionadas unas con otras de alguna manera particular.

Se entiende que un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias tXt: t P T u parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

8.2. Riesgo

- Contingencia o proximidad de un daño.
- Cada una de las contingencias que pueden ser objeto de un contrato de seguro.

8.3. Vulnerabilidad

- Cualidad de vulnerable.

8.4. Peligrosidad

- Cualidad de peligroso.

8.5. Amenaza

- Acción de amenazar.
- Dicho o hecho con que se amenaza.
- Delito consistente en intimidar a alguien con el anuncio de la provocación de un mal grave para él o su familia.

9. Maquina Enigma

Los militares desde tiempos muy remotos han tenido la necesidad de utilizar métodos enviar mensajes sin que puedan ser interceptados por el enemigo. La criptografía es uno de los métodos más usados para ocultar o mimetizar estos mensajes. En época de guerra para los militares es indispensable que en el caso de que el enemigo intercepte nuestros mensajes, no tenga manera de saber qué significan. Durante la segunda guerra mundial la maquina alemana Enigma fue la encriptadora oficial de Alemania.

Figura 5: Maquina Enigma.

La mayor parte de los mensajes transmitidos durante la segunda guerra mundial se realizaban por radio. Los alemanes utilizaron la que ahora se denomina la máquina de encriptar más famosa de la historia: La maquina Enigma.

El diseño de la maquina Enigma tubo como base el trabajo de Arthur Scherbius, quien creo una máquina encriptadora comercial, basada en una serie de rotores que cambiaban una letra por otra. Scherbius se asocio a Willie Korn, dueño de la compañía Enigma Chiffiermaschinen AG, de Berlín. Scherbius y Korn mejoraron el diseño de la máquina de encriptadora, agregándole rotores intercambiables. En 1923 surge la nueva máquina prácticamente inviolable.

Enigma era tan inviolable que no tardo en ser “encriptadora oficial” de las fuerzas militares alemanas. En 1926, la empresa quedo directamente bajo el control del Estado Alemán y la máquina fue retirada del mercado comercial. Enigma fue modificada por la marina para incorporar un cuarto rotor, a esta máquina se llamó

“Eins” (Modelo Uno) o “Wermarcht Enigma “ (Modelo W) entrando en servicio el 01 de Junio de 1930. “Wermarcht Enigma “ (Modelo W) tenia la capacidad de “mezclar” el texto de los mensajes de 200 quintillones de formas diferentes.

Inglaterra basándose en las maquinas Enigma comerciales aun existente pudo descifrar algunos mensajes encriptados por el ejercito usando el modelo comercial, y se dieron cuenta que no podrían descifrar los códigos de las Enigmas 1 y W. Fue asta 1939 cuando un grupo de matemáticos polacos descifraron el código, con la ayuda de matemáticos de la Universidad de Poznam, y una maquina Enigma comercial, sentaron las bases para quebrar el código. Este suceso fue mantenido en gran secreto, para evitar que el ejército alemán modificar su sistema.

En setiembre de 1938, los alemanes modificaron el método utilizado para generar códigos, entonces los polacos fabricaron el primer “computador mecánico” de la historia, llamado “bomba kryptologiczna"(Bomba Criptológica), que junto con otro aparato denominado Çiclómetro"los ayudaba a establecer patrones en los mensajes interceptados.

El método utilizado para descifrar los códigos consistía en el uso de juegos de 26 hojas de papel perforado con 2601 agujeros, agrupados en 51 líneas de agujeros de 51 columnas. Esto permitía hallar la forma en que se ajustaban los rotores para formar las claves. Para esto se utilizaban 60 bombas criptológicas.

10. Medidas de dispersión

Los estudios estadísticos permiten hacer inferencias de una característica de una población a partir de la información contenida en una muestra. Los métodos numéricos que describen a los conjuntos de observaciones tienen como objetivo dar una imagen mental de la distribución de frecuencias. Una vez localizado el centro de la distribución de un conjunto de datos, lo que procede es buscar una medida de dispersión de los datos. La dispersión o variación es una característica importante de un conjunto de datos porque intenta dar una idea de cuán esparcidos se encuentran éstos.

10.1. DESVIACIÓN MEDIA

La desviación media o desviación promedio es abreviada por MD. Mide la desviación promedio de valores con respecto a la media del grupo, sin tomar en cuenta el signo de la desviación.

Datos no agrupados.

$\bar{X}$ es la media aritmética de los números y $\left|X_j - \bar{X}\right|$ es el valor absoluto de la desviación de X_j con respecto a $\bar{X}$ (El valor absoluto de un número es el número sin signo y se denota con dos barras verticales).

$$MD = \frac{\sum_{J=1}^{n} \left|X_j - \bar{X}\right|}{n} \tag{4}$$

Datos agrupados.

Si $X_1, X_2, ...X_k$ ocurren con frecuencias $f_1, f_2, ...f_k$ respectivamente, la desviación media es:

$$MD = \frac{\sum_{J=1}^{n} f_{j|X_j - \bar{X}|}}{n} \tag{5}$$

Donde:

n= $\sum_{J=1}^{n} f_j$

X_j = los puntos medios de las clases

f_j = correspondientes frecuencias de clase

10.2. DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La desviación estándar se denota por s.

Datos no agrupados

Se define como

$$S = \sqrt{\sum_{J=1}^{n} (|X_j - \bar{X}|)^2} \tag{6}$$

Datos agrupados

Si $X_1, X_2, ...X_k$ ocurren con frecuencias $f_1, f_2, ...f_k$ respectivamente, la desviación típica se expresa como:

$$S = \sqrt{\sum_{J=1}^{n} f_j(|X_j - \bar{X}|)^2} \tag{7}$$

Donde:

$$n = \sum_{J=1}^{n} f_j$$

10.3. COEFICIENTE DE VARIACIÓN

La variación o dispersión real, tal como se determina de la desviación estándar u otra medida de dispersión, se llama dispersión absoluta. La dispersión relativa es:

$$Dispersionrelativa = \frac{dispersionabsoluta}{promedio} \tag{8}$$

A la dispersión relativa se le llama coeficiente de variación o coeficiente de dispersión si la dispersión absoluta es la desviación estándar s y el promedio es la media $\bar{X}$ Se define como:

$$Coeficientedevariacion(V) = \frac{S}{X} \tag{9}$$

y se expresa en general como porcentaje.

11. Permutaciones circulares

Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar .en círculo", de modo que el primer elemento que "se sitúe.en la muestra determina el principio y el final de muestra. El número de arreglos circulares de n elementos está dado por

$$PCn = (n-1)! \tag{10}$$

Ejemplo:

Si siete personas se reunen para cenar

a. **¿Cuántas maneras hay de que se sienten a la mesa?**

   Se aplica la fórmula de permutaciones circulares

$$PC7 = (7-1)! = 6! = 720 \tag{11}$$

b **¿Cuántas maneras hay de que se sienten a la mesa si dos insisten en sentarse juntas?**

   Formamos un bloque con los dos que se quieren sentar juntos, considerándolo como un solo elemento y calculamos el número de permutaciones PC6, internamente en el bloque calculamos el número de permutaciones entre los dos que se sientan juntos mediante P2. Aplicamos el pricipio multiplicativo.

$$P2PC6 = 2!(6-1)! = 2!5! = 240 \tag{12}$$

12. Teorema del binomio

Hallar los términos para cada iteracion con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k)$$

$$n = 1$$

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$n = 2$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$n = 3$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$n = 4$$

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \; n = 5$$

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$n = 6$$

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^{6-k} b^k$$

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$n = 7$$
$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} b^k$$
$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$n = 8$$
$$(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} a^{8-k} b^k$$
$$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$n = 9$$
$$(a+b)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^{9-k} b^k$$
$$a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

$$n = 10$$
$$(a+b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{10-k} b^k$$
$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 +$$
$$45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

13. Triángulo de Pascal

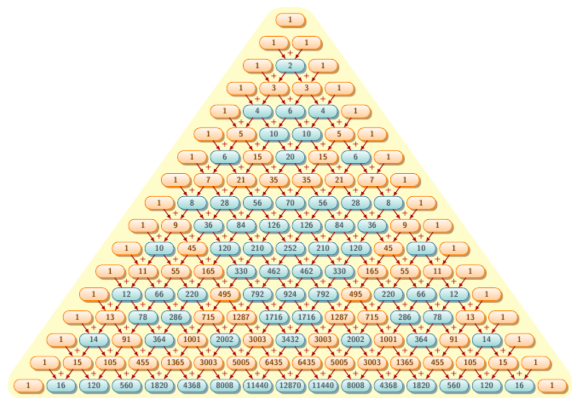
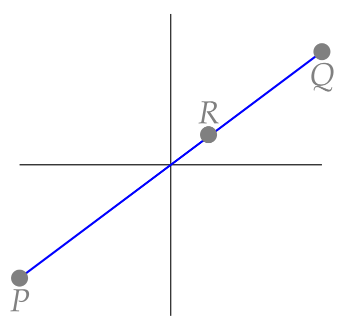


Figura 6: Triángulo de pascal

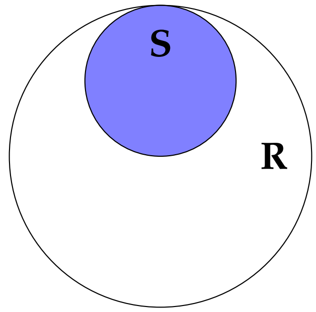
14. Probabilidad Geométrica

La probabilidad de un evento representa la posibilidad de que ese evento ocurrirá. La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región. Considere el segmento de línea $\bar{PQ}$. Suponga que un punto X es escogido al azar.



Entonces, la probabilidad de que X esté en $\bar{PQ} = \frac{Longitud\ de\ \bar{PR}}{Longitud\ de\ \bar{PQ}}$

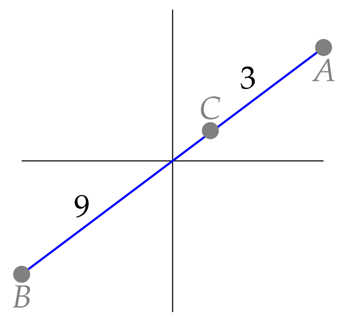
Considere la región R y la región S. Suponga que un punto P es escogido al azar.



Entonces, la probabilidad de que P esté en $S = \frac{Area\ de\ S}{Area\ de\ R}$

Ejemplo 1-D :

Encuentre la probabilidad de que un punto escogido al azar esté en $\bar{AC}$.



Probabilidad de que el punto esté en $\bar{AC} = \frac{\bar{AC}}{\bar{AB}} = \frac{3}{12}$

Ejemplo 3D:

Un átomo esta dentro de una esfera y es igualmente probable que este en cualquier lugar dentro de la esfera. ¿Cuál es la probabilidad de que aterrice más cerca del centro de la esfera que en el exterior ? El conjunto de los resultados son todos los puntos de la esfera , que representan un volumen de $\frac{4\pi}{3}r^3$ donde r es el radio de la esfera. Los puntos que están más cerca del centro que en el borde son aquellos que se encuentran dentro de la esfera de radio $\frac{r}{2}$ alrededor del centro.

Por lo que el volumen de los resultados de "éxito.^{es} $\frac{4\pi}{3}(\frac{r}{2}) = \frac{\pi}{6}r^3$, entonces:

$P(mas\ cercano\ al\ centro\ que\ al\ exterior) = \frac{Volumen\ de\ los\ resultados\ deseados}{Volumen\ de\ los\ resultados\ totales}$

$P(mas\ cercano\ al\ centro\ que\ al\ exterior) = \frac{\frac{\pi}{6}r^3}{\frac{4\pi}{3}r^3} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$

15. Formula de Pascal

Si n y k son valores enteros positivos tales que $1 \leq k \leq n-1$, entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Para obtener la fórmula de Pascal, basta con sustituir $n-e$ en la igualdad anterior

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k}$$

16. Permutaciones

16.1. Definición

Una permutación de objetos es un arreglo de éstos en el que orden sí importa. Para encontrar el número de permutaciones de n objetos diferentes en grupos de r, se usan las siguientes fórmulas:

$n\,\mathrm{Pr} = \frac{n!}{(n-r)!}$, cuando no se permite repeticion.

$n\,\mathrm{Pr} = n^r$, cuando se permite repeticion

16.2. Demostracion de Fórmula

El resultado de nPr es igual al numero total de formas que pueden llenarse r lugares con n elementos diferentes: el primer lugar puede llenarse de n formas diferentes ya que en este punto todos los elementos estan disponibles. El segundo lugar puede llenarse de $n-1$ formas diferentes con los $n-1$ elementos restantes.

Análogamente el tercer lugar puede llenarse de $n-2$ formas diferentes, y asi sucesivamente.

Continuando con este proceso, observamos que el lugar r puede llenarse con $n(r-1) = n-r+1$ formas diferentes.

De donde, el numero total de formas esta dado por la fórmula:

$nPr = n-(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ donde r menor igual que n.

Si se multiplica el segundo miembro de esta igualdad por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

$nPr = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$ obtenemos la formula

$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$, si los n elementos son diferentes.

Para obtener el numero total de permutaciones de n objetos tomamos de n en n elementos, en la formula anterior hacemos r=n de donde:

$nPn = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = 1$ por definicion, tenemos: nPn = n!

16.3. Ejemplos

- ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5.?
- ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
- ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
- Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?
- Con las letras de la palabra libro, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?
- ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?
- En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?
- ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería?
- Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

- Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:
  - Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.
  - Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos.

17. Combinaciones

17.1. Definición

Una combinación de objetos es un arreglo de éstos en el que el orden no importa. Para encontrar el número de combinaciones de n objetos en grupos de r, se usa la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{k} = nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

17.2. Ejemplos

- En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
- ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?
- A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?
- En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?
- ¿Cuántas apuestas de Lotería Primitiva de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los seis resultados, de 49?
- ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se puede informar con sus vértices?

- Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 5 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:
    - Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.
    - Una mujer determinada debe pertenecer al comité.
    - Dos hombres determinados no pueden estar en el comité.
- Una persona tiene cinco monedas de distintos valores. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero puede formar con las cinco monedas?

18. Diagrama de Árbol

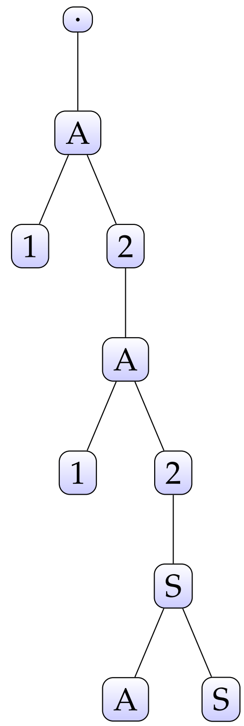
Un diagrama de árbol es una representación gráfica que muestra los resultados posibles de una serie de experimentos y sus respectivas probabilidades; consta de r pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final). Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Los diagramas en árbol son muy útiles para "fabricarçualquier tipo de agrupación, ya sean variaciones, permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

Experimento: Se lanza una moneda, si sale águila se lanza un dado y si sale sol se lanza la moneda de nuevo.



19. Tensor de Lev Civita

En matemáticas, y en particular en cálculo tensorial, se define el símbolo de Levi-Civita, también llamado el símbolo de permutación, como sigue:

$$E_{i,jk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (1{,}2{,}3),(2{,}3{,}1),(3{,}1{,}2) \\ -1 & \text{si } (i.j.k) \text{ es } (3{,}2{,}1),(1{,}3{,}2),(2{,}1{,}3) \\ 0 & \text{de otro modo i=j, j=k, k=i} \end{cases}$$

nombrado así por Tullio Levi-Civita. Se utiliza en muchas áreas de las matemáticas y en física. Por ejemplo, en álgebra lineal, el producto cruzado de dos vectores

El tensor cuyas componentes son dadas por el símbolo de Levi-Civita a veces se llama el tensor de permutación.

El símbolo de Levi-Civita se puede generalizar a dimensiones más altas:

$$E_{i,j,k,l,...} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k,l,...) \text{ es una permutacion par de (1,2,4,...)} \\ -1 & \text{si } (i.j.k,l,...) \text{ es una permutacion impar de (1,2,4,...)} \\ 0 & \text{de otro modo si dos indices son los mismo} \end{cases}$$

19.1. Producto Cruz

Resolveremos la siguiente multiplicación de vectores utilizando la conexión Levi-Civita, por lo tanto tenemos que:

$$(\bar{A}X\bar{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{i}[A_2B_3 - A_3B_2] - \hat{j}[A_1B_3 - A_3B_1] + \hat{k}[A_1B_2 - A_2B_1] \tag{13}$$

Iniciamos igualando la multiplicación de vectores con la conexión de Levi-Civita

$$(\bar{A}X\bar{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{14}$$

Iniciamos con i=1

$$(\bar{A}X\bar{B})_1 = \varepsilon_{1jk}A_jB_k \tag{15}$$

Iniciamos la sumatoria dando valores a j=1,2,3

$$(\bar{A}X\bar{B})_1 = \varepsilon_{11k}A_1B_k + \varepsilon_{12k}A_2B_k + \varepsilon_{13k}A_3B_k \tag{16}$$

Ahora realizamos la sumatoria con valores k=1,2,3

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_1 = {} & \varepsilon_{111}A_1B_1 + \varepsilon_{112}A_1B_2 + \varepsilon_{113}A_1B_3 \\ & +\varepsilon_{121}A_2B_1 + \varepsilon_{122}A_2B_2 + \varepsilon_{123}A_2B_3 \\ & +\varepsilon_{131}A_3B_1 + \varepsilon_{132}A_3B_2 + \varepsilon_{133}A_3B_3\end{aligned} \tag{17}$$

Cancelamos valores pares

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_1 = {} & \cancel{\varepsilon_{111}A_1B_1} + \cancel{\varepsilon_{112}A_1B_2} + \cancel{\varepsilon_{113}A_1B_3} \\ & + \cancel{\varepsilon_{121}A_2B_1} + \cancel{\varepsilon_{122}A_2B_2} + \varepsilon_{123}A_2B_3 \\ & + \cancel{\varepsilon_{131}A_3B_1} + \varepsilon_{132}A_3B_2 + \cancel{\varepsilon_{133}A_3B_3}\end{aligned} \tag{18}$$

Con la cancelación de valores pares obtenemos lo siguiente

$$(\bar{A}X\bar{B})_1 = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 \tag{19}$$

Sustituimos valores

$$(\bar{A}X\bar{B})_1 = (1)(A_2B_3) + (-1)(A_3B_2) \tag{20}$$

Y como resultado podemos ver y comparar con 13 que resolvimos la primera parte del resultado del vector.

$$(\bar{A}X\bar{B})_1 = A_2B_3 - A_3B_2 \tag{21}$$

Ahora para resolver la segunda parte del resultado del vector, realizamos la misma secuencia de pasos pero ahora dando valor de i=2.

$$(\bar{A}X\bar{B})_2 = \varepsilon_{2jk}A_jB_k \tag{22}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_2 = \varepsilon_{21k}A_1B_k + \varepsilon_{22k}A_2B_k + \varepsilon_{23k}A_3B_k \tag{23}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_2 = {} & \varepsilon_{211}A_1B_1 + \varepsilon_{212}A_1B_2 + \varepsilon_{213}A_1B_3 \\ & + \varepsilon_{221}A_2B_1 + \varepsilon_{222}A_2B_2 + \varepsilon_{223}A_2B_3 \\ & + \varepsilon_{231}A_3B_1 + \varepsilon_{232}A_3B_2 + \varepsilon_{233}A_3B_3\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_2 = {} & \cancel{\varepsilon_{211}A_1B_1} + \cancel{\varepsilon_{212}A_1B_2} + \varepsilon_{213}A_1B_3 \\ & + \cancel{\varepsilon_{221}A_2B_1} + \cancel{\varepsilon_{222}A_2B_2} + \cancel{\varepsilon_{223}A_2B_3} \\ & + \varepsilon_{231}A_3B_1 + \cancel{\varepsilon_{232}A_3B_2} + \cancel{\varepsilon_{233}A_3B_3}\end{aligned} \tag{25}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_2 = \varepsilon_{213}A_1B_3 + \varepsilon_{231}A_3B_1 \tag{26}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_2 = -A_1B_3 + A_3B_1 \tag{27}$$

Ahora para resolver la tercera parte del resultado del vector, realizamos la misma secuencia de pasos pero ahora dando valor de i=3.

$$(\bar{A}X\bar{B})_3 = \varepsilon_{3jk}A_jB_k \tag{28}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_3 = \varepsilon_{31k}A_1B_k + \varepsilon_{32k}A_2B_k + \varepsilon_{33k}A_3B_k \tag{29}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_3 = {} & \varepsilon_{311}A_1B_1 + \varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{313}A_1B_3 \\ & +\varepsilon_{321}A_2B_1 + \varepsilon_{322}A_2B_2 + \varepsilon_{323}A_2B_3 \\ & +\varepsilon_{331}A_3B_1 + \varepsilon_{332}A_3B_2 + \varepsilon_{333}A_3B_3\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}X\bar{B})_3 = {} & \cancel{\varepsilon_{311}A_1B_1} + \varepsilon_{312}A_1B_2 + \cancel{\varepsilon_{313}A_1B_3} \\ & +\varepsilon_{321}A_2B_1 + \cancel{\varepsilon_{322}A_2B_2} + \cancel{\varepsilon_{323}A_2B_3} \\ & +\cancel{\varepsilon_{331}A_3B_1} + \cancel{\varepsilon_{332}A_3B_2} + \cancel{\varepsilon_{333}A_3B_3}\end{aligned} \tag{31}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_3 = \varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{321}A_2B_1 \tag{32}$$

$$(\bar{A}X\bar{B})_3 = A_1B_2 - A_2B_1 \tag{33}$$

20. Permutaciones

20.1. Permutaciones 1

$$n = 4 \quad r = 1$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{6} = 4$$

a bcd	c abd
a bdc	c adb
a cbd	c bad
a cdb	c bda
a dbc	c dab
a dcb	c dba
b acd	d abc
b adc	d acb
b cad	d bac
b cda	d bca
b dac	d cab
b dca	d cba

20.2. Permutaciones 2

$$n = 4 \quad r = 2$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{2} = 12$$

ab *cd*	ca *bd*
ab *dc*	ca *db*
ac *bd*	cb *ad*
ac *db*	cb *da*
ad *bc*	cd *ab*
ad *cb*	cd *ba*
ba *cd*	da *bc*
ba *dc*	da *cb*
bc *ad*	db *ac*
bc *da*	db *ca*
bd *ac*	dc *ab*
bd *ca*	dc *ba*

20.3. Permutaciones 3

$$n = 4 \quad r = 3$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{24}{1} = 24$$

abc d	cab d
abd c	cad b
acb d	cba d
acd b	cbd a
adb c	cda b
adc b	cdb a
bac d	dab c
bad c	dac b
bca d	dba c
bcd a	dbc a
bda c	dca b
bdc a	dcb a

20.4. Permutaciones 4

$$n = 4 \quad r = 4$$

$$P\binom{n}{r} = n! = 24$$

abcd	cabd
abdc	cadb
acbd	cbad
acdb	cbda
adbc	cdab
adcb	cdba
bacd	dabc
badc	dacb
bcad	dbac
bcda	dbca
bdac	dcab
bdca	dcba

20.5. Permutaciones 5

$$n = 5 \quad r = 1$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{120}{24} = 5$$

a *bcde*	b *caed*	c *deab*	d *eabc*	e *abcd*
a *bced*	b *cade*	c *deba*	d *eacb*	e *abdc*
a *bdce*	b *cdae*	c *dabe*	d *ebca*	e *acbd*
a *bdec*	b *cdea*	c *daeb*	d *ebac*	e *acdb*
a *bedc*	b *ceda*	c *dbea*	d *ecab*	e *adbc*
a *becd*	b *cead*	c *dbae*	d *acba*	e *adcb*
a *cbde*	b *daec*	c *eabd*	d *abce*	e *bcda*
a *cbed*	b *dace*	c *eadb*	d *abec*	e *bcad*
a *cdbe*	b *dcae*	c *ebad*	d *acbe*	e *bdac*
a *cdeb*	b *dcea*	c *ebda*	d *aceb*	e *bdca*
a *cedb*	b *deca*	c *edab*	d *aebc*	e *bacd*
a *cebd*	b *deac*	c *edba*	d *aecb*	e *badc*
a *dceb*	b *eadc*	c *abde*	d *bcae*	e *cdab*
a *dcbe*	b *eacd*	c *abed*	d *bcea*	e *cdba*
a *dbce*	b *ecad*	c *adeb*	d *beca*	e *cadb*
a *dbec*	b *ecda*	c *adbe*	d *beac*	e *cabd*
a *debc*	b *edca*	c *aebd*	d *baec*	e *cbad*
a *decb*	b *edac*	c *aedb*	d *bace*	e *cbda*
a *edcb*	b *acde*	c *bdae*	d *ceab*	e *dacb*
a *edbc*	b *aced*	c *bdea*	d *ceba*	e *dabc*
a *ebcd*	b *adce*	c *beda*	d *cabe*	e *dbca*
a *ebdc*	b *adec*	c *bead*	d *caeb*	e *dbac*
a *ecbd*	b *aedc*	c *bade*	d *cbea*	e *dcab*
a *ecdb*	b *aecd*	c *baed*	d *cbae*	e *dcba*

20.6. Permutaciones 6

$$n = 5 \quad r = 2$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{120}{6} = 20$$

ab *cde*	bc *aed*	cd *eab*	de *abc*	ea *bcd*
ab *ced*	bc *ade*	cd *eba*	de *acb*	ea *bdc*
ab *dce*	bc *dae*	cd *abe*	de *bca*	ea *cbd*
ab *dec*	bc *dea*	cd *aeb*	de *bac*	ea *cdb*
ab *edc*	bc *eda*	cd *bea*	de *cab*	ea *dbc*
ab *ecd*	bc *ead*	cd *bae*	da *cba*	ea *dcb*
ac *bde*	bd *aec*	ce *abd*	da *bce*	eb *cda*
ac *bed*	bd *ace*	ce *adb*	da *bec*	eb *cad*
ac *dbe*	bd *cae*	ce *bad*	da *cbe*	eb *dac*
ac *deb*	bd *cea*	ce *bda*	da *ceb*	eb *dca*
ac *edb*	bd *eca*	ce *dab*	da *ebc*	eb *acd*
ac *ebd*	bd *eac*	ce *dba*	da *ecb*	eb *adc*
ad *ceb*	be *adc*	ca *bde*	db *cae*	ec *dab*
ad *cbe*	be *acd*	ca *bed*	db *cea*	ec *dba*
ad *bce*	be *cad*	ca *deb*	db *eca*	ec *adb*
ad *bec*	be *cda*	ca *dbe*	db *eac*	ec *abd*
ad *ebc*	be *dca*	ca *ebd*	db *aec*	ec *bad*
ad *ecb*	be *dac*	ca *edb*	db *ace*	ec *bda*
ae *dcb*	ba *cde*	cb *dae*	dc *eab*	ed *acb*
ae *dbc*	ba *ced*	cb *dea*	dc *eba*	ed *abc*
ae *bcd*	ba *dce*	cb *eda*	dc *abe*	ed *bca*
ae *bdc*	ba *dec*	cb *ead*	dc *aeb*	ed *bac*
ae *cbd*	ba *edc*	cb *ade*	dc *bea*	ed *cab*
ae *cdb*	ba *ecd*	cb *aed*	dc *bae*	ed *cba*

20.7. Permutaciones 7

$$n = 5 \quad r = 3$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{120}{2} = 60$$

abc *de* abc *ed*	bca *ed* bca *de*	cde *ab* cde *ba*	dea *bc* dea *cb*	eab *cd* eab *dc*
abd *ce* abd *ec*	bcd *ae* bcd *ea*	cda *be* cda *eb*	deb *ca* deb *ac*	eac *bd* eac *db*
abe *dc* abe *cd*	bce *da* bce *ad*	cdb *ea* cdb *ae*	dec *ab* dac *ba*	ead *bc* ead *cb*
acb *de* acb *ed*	bda *ec* bda *ce*	cea *bd* cea *db*	dab *ce* dab *ec*	ebc *da* ebc *ad*
acd *be* acd *eb*	bdc *ae* bdc *ea*	ceb *ad* ceb *da*	dac *be* dac *eb*	ebd *ac* ebd *ca*
ace *db* ace *bd*	bde *ca* bde *ac*	ced *ab* ced *ba*	dae *bc* dae *cb*	eba *cd* eba *dc*
adc *eb* adc *be*	bea *dc* bea *cd*	cab *de* cab *ed*	dbc *ae* dbc *ea*	ecd *ab* ecd *ba*
adb *ce* adb *ec*	bec *ad* bec *da*	cad *eb* cad *be*	dbe *ca* dbe *ac*	eca *db* eca *bd*
ade *bc* ade *cb*	bed *ca* bed *ac*	cae *bd* cae *db*	dba *ec* dba *ce*	ecb *ad* ecb *da*
aed *cb* aed *bc*	bac *de* bac *ed*	cbd *ae* cbd *ea*	dce *ab* dce *ba*	eda *cb* eda *bc*
aeb *cd* aeb *dc*	bad *ce* bad *ec*	cbe *da* cbe *ad*	dca *be* dca *eb*	edb *ca* edb *ac*
aec *bd* aec *db*	bae *dc* bae *cd*	cba *de* cba *ed*	dcb *ea* dcb *ae*	edc *ab* edc *ba*

20.8. Permutaciones 8

$$n = 5 \quad r = 4$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{120}{1} = 120$$

abcd e	bcae d	cdea b	deab c	eabc d
abce d	bcad e	cdeb a	deac b	eabd c
abdc e	bcda e	cdab e	debc a	eacb d
abde c	bcde a	cdae b	deba c	eacd b
abed c	bced a	cdbe a	deca b	eadb c
abec d	bcea d	cdba e	dacb a	eadc b
acbd e	bdae c	ceab d	dabc e	ebcd a
acbe d	bdac e	cead b	dabe c	ebca d
acdb e	bdca e	ceba d	dacb e	ebda c
acde b	bdce a	ceb da	dace b	ebdc a
aced b	bdec a	ceda b	daeb c	ebac d
aceb d	bdea c	cedb a	daec b	ebad c
adce b	bead c	cabd e	dbca e	ecda b
adcb e	beac d	cabe d	dbce a	ecdb a
adbc e	beca d	cade b	dbec a	ecad b
adbe c	becd a	cadb e	dbea c	ecab d
adeb c	bedc a	caeb d	dbae c	ecba d
adec b	beda c	caed b	dbac e	ecbd a
aedc b	bacd e	cbda e	dcea b	edac b
aedb c	bace d	cbde a	dceb a	edab c
aebc d	badc e	cbed a	dcab e	edbc a
aebd c	bade c	cbea d	dcae b	edba c
aecb d	baed c	cbad e	dcbe a	edca b
aecd b	baec d	cbae d	dcba e	edcb a

21. Teoria de Conjuntos

21.1. Primera ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{34}$$

Demostración

Proponemos $x \in A \cup (B \cap C)$. si $x \in A \cup (B \cap C)$ entonces x es incluso en A ó en $(B \text{ y } C)$.

$$x \in A \text{ ó } x \in (B \text{ y } C)$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\}$$
$$\{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cap C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Por lo tanto

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{35}$$

Proponemos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces x esta en $(A \text{ ó } B)$ y x esta en $(A \text{ ó } C)$.

$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$
$$\{x \in A \text{ ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ ó } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ ó } \{x \in (B \text{ y } C)\}$$
$$x \in A \cup \{x \in (B \cap C)\}$$
$$x \in A \cup (B \cap C)$$
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \tag{36}$$

De la ecuación 3 y 4:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{37}$$

21.2. Segunda ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{38}$$

Demostración

$$\begin{gathered}
\text{Proponemos } x \in A \cap (B \cup C). \text{ si } x \in A \cap (B \cup C) \text{ entonces } x \in A \text{ y } x \in (B \text{ ó } C). \\
x \in A \text{ y } x \in (B \text{ ó } C) \\
x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \\
\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \\
x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \\
x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C) \\
x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \tag{39}$$

$$\begin{gathered}
\text{Proponemos } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \text{ si } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ entonces} \\
x \in (A \cap B) \text{ ó } x \in (A \cap C).
\end{gathered}$$

$$x \in (A \text{ y } B) \text{ ó } x \in (A \text{ y } C)$$
$$\{x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ ó } x \in C\}$$
$$x \in A \text{ y } \{x \in (B \text{ ó } C)\}$$
$$x \in A \cap \{x \in (B \cup C)\}$$
$$x \in A \cup (B \cap C)$$
$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \tag{40}$$

De la ecuación 7 y 8:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{41}$$

21.3. Demostracion de Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un universal ϑ , se verifica:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{42}$$
$$2.(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{43}$$

Demostración de 47

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{44}$$

En efecto, sea x un elemento arbitrario del conjunto universal ϑ . Entonces,
$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin (A \cup B)$ Definición de complementario
$\leftrightarrow \neg[x \in (A \cup B)]$ Negación
$\leftrightarrow \neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$ Definición de unión
$\leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ De Morgan
$\leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ Negación
$\leftrightarrow (x \in A') \wedge (x \in B')$ Definición de complementario
$\leftrightarrow x \in (A' \cap B')$ Definición de intersección
y al ser x un elemento arbitrario de ϑ, se sigue que

$\forall x[x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$
luego tenemos que:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{45}$$

y con esto se prueba analogamente la ley Morgan.

22. Principio De La Dualidad

Traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, a menudo por medio de una operación de involución, esto es: Si la dualidad de A es B, entonces de forma análoga, dualidad de B es A, cumpliéndose una relacion uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de A es a veces A (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es amplia mente usado en diversos representaciones matemáticas, tales como lógica, lógica boleana, teoría de conjuntos.

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

- Unión por Intersección $\cup \rightarrow \cap$
- Intersección por Unión $\cap \rightarrow \cup$
- Conjunto universo por vacío $U \rightarrow \oslash$
- Conjunto vacío por universo $\oslash \rightarrow U$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$

Aplicando la dualidad:

$$(\oslash \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Ahora bien, como se enuncia anteriormente, la dualidad en un principio que se puede aplicar en una gran variedad de áreas del conocimiento, a continuación se muestra la dualidad en lógica boleana. Se realiza lo homólogo a la teoría de conjuntos, se reemplazan las operaciones de suma por multiplicación, los 1 por 0 y viceversa.

Sea:

$x(y+0)$ y $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$

Aplicando el principio de la dualidad de las ecuaciones correspondientes.

$$x + (y \cdot 1)$$
$$(\bar{x} + 1) \cdot (\bar{y} \cdot z)$$

23. Fullereno C_{60}

El carbono se presenta en formas y colores diversos, lo más común es encontrarlo en la forma de sólido negro, también se encuentra como el cristalino y duro diamante. La estructura de cada atomo de carbono en de estos materiales, dicho de otro modo el orden interno de sus átomos, es lo que determina sus propiedades.

Recientemente se encontró una tercera forma del carbono (C_{60}), la cual se conoce como fullereno. Los fullerenos se han encontrado en el espacio interestelar y en formaciones geológicas en la Tierra. Los investigadores estadounidentes (Luann Becker y otros) descubrieron que el meteorito que cayó alrededor de la localidad de Allende, en México, el 8 de febrero de 1969, contiene moléculas sencillas (formadas por sesenta átomos) abundantes en fullerenos y que tienen desde cien hasta cuatrocientos átomos de carbono. Los fullerenos presentes en los meteoritos fueron formados a partir de estrellas, que los expulsaron al espacio al extinguirse. Los fullerenos son moléculas grandes esféricas. La más común es la molécula C_{60} las demás son C_{70}, C_{76} , C_{84} y otras.

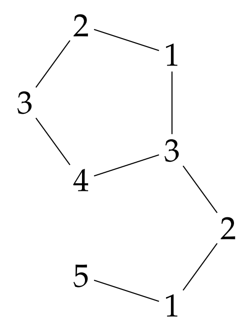


Fig. Fullereno C-60

El fullereno C 60 es una molécula que consta de 60 átomos de carbono los cuales forman 12 pentágonos y 20 hexágonos. 9 La forma es la misma que la de una pelota de fútbol. La propiedad más importante de la molécula C 60 es su alta simetría. En ésta hay 120 operaciones de simetría, tales como rotaciones de eje o reflexiones en el plano. Ello hace que la molécula C 60 sea la molécula más simétrica, pues tiene el número más grande de operaciones de simetría.

Como hay 12 pentágonos, se tienen seis diferentes ejes 5 (cada eje pasa a través de dos pentágonos). Además, hay 20 hexágonos con 10 diferentes ejes 3, así como 30 bordes entre los hexágonos con 15 diferentes ejes 2, pues los planos espejo tienen dos bordes.

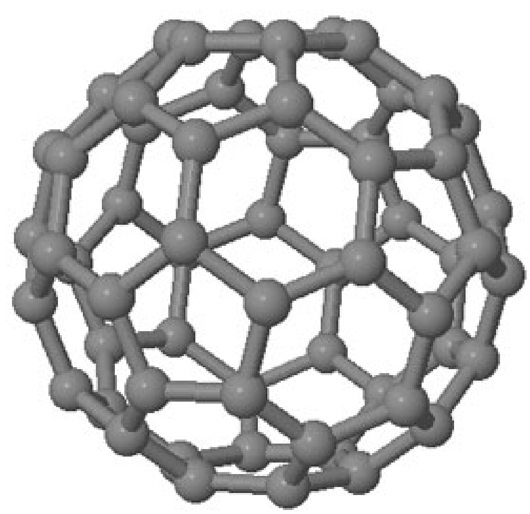


Figura 7: Fullereno C-60

Finalmente, la molécula C 60 tiene un centro de inversión. Al combinar todas estas transformaciones, se pueden encontrar las 120 diferentes operaciones de simetría. Éstas forman el grupo icosedral, que es el grupo puntual con el mayor número de elementos.

Sobre p base del teorema de Euler se puede mostrar que una superficie esférica, construida de pentágonos y hexágonos, debe tener exactamente 12 pentágonos. Las moléculas de tamaño diferente se han obtenido dependiendo del número de hexágonos y se conocen como fullerenos, en honor al arquitecto americano Richard Buckminster Fuller, quien construía casas geodésicas basadas en hexágonos y pentágonos.

Buckmister Fuller no fue el primero en combinar hexágonos y pentágonos para formar una esfera. Esta forma simétrica ya era conocida en la antigüedad, incluso por Arquímedes, que la llamaba icosaedro truncado. El dibujo más antiguo de esta "pelota de fútbol" ha sido encontrado en la biblioteca del Vaticano. Es una imagen pintada en el libro del pintor matemático Piero della Francesca (1420-1492), con fecha de 1480.

24. Teorema de Euclides sobre los numeros primos

Euclides, que trabajó trabajo en Alejandría alrededor del año 300 a. C., fue el primer matemático que probó que existía una infinidad de números primos. Demostro su teoria empleando una técnica conocida como «reducción al absurdo». Si queremos seguir a Euclides para resolver este problema, podemos empezar con:

Supongamos que el número de primos es finito, y que todos esos números primos se han recopilado en una lista:

$$p_1, p_2, p_3, ..., p_n \tag{46}$$

Podemos explorar las consecuencias de esa afirmación multiplicando todos los primos de la lista y añadiendo 1, con lo cual crearemos un nuevo número.

$$N = p_1, p_2, p_3, ..., p_n + 1 \tag{47}$$

Este nuevo número N es o bien un número primo o un número no primo, pero en cualquier caso, contradice la afirmación de Euclides:

a) Si N es un número primo, entonces no está en la lista original. Por tanto, la afirmación de que hay una lista completa es falsa, eso está claro.

b) Si N no es un número primo,entonces debe tener divisores. Esos divisores tienen que ser primos, porque los primos de la lista original dejarán un resto de 1 cuando se dividan por N. Por tanto, de nuevo la afirmación de que hay una lista completa es falsa.

la afirmación de Euclides es falsa... su lista finita no contiene todos los números primos, almenos siempre existira un numero que no se encuentre en la lista.

25. Sistemas Complejos

25.1. ¿Que es un sistema complejo?

Un sistema complejo, a diferencia de uno simple es visto como una entidad cuyo comportamiento global es más que la suma de las operaciones de sus partes. Usualmente se le define como una red de muchos componentes cuyo comportamiento de agregados da lugar a estructuras en varias escalas y patrones de manifestación, cuya dinámica no es posible de inferir de una descripción simplificada del sistema. El campo es altamente multidisciplinario, juntando expertos en varias ramas para su estudio que van desde economía, ciencias sociales, biología, física, meteorología, etc., Las bases teóricas de los sistemas complejos han sido enfocadas principalmente en su organización; considerándolos como el conjunto de relaciones que determinan las clases de interacciones y transformaciones dentro de un sistema y en los arreglos que contribuyen al desarrollo y persistencia de ciertas características dentro de la organización. Son las relaciones entre los componentes, más que los componentes y sus propiedades las que son más significativas, donde al dar un mayor énfasis a la estructura y relaciones en lugar de su composición es lo que hace que muchos de los diferentes tipos de sistemas puedan ser caracterizados con herramientas analíticas similares. (1)

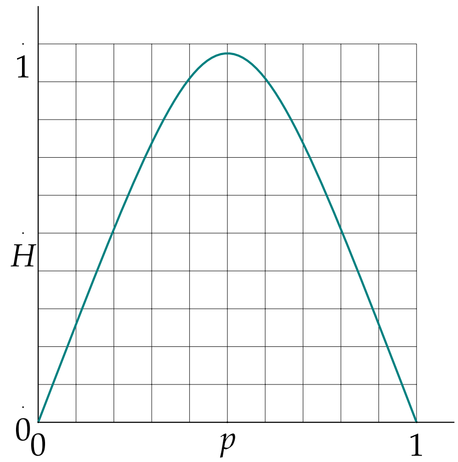
25.2. ¿Como se puede medir la complejidad de un sistema?

La búqueda de medidas de complejidad toca muchos temas interesantes de la teorí de sistemas dinámicos y ha dado lugar a una serie de potentes herramientas, aunque el objetivo original de desarrollar una medida que valga para medir la complejidad de cualquier sistema no parece realista y se ha eliminado de los objetivos científicos. Los sistemas dinámicos complejos muestran una gran variedad de comportamientos cualitativamente diferentes, y no parece apropiado intentar meter todos los sistemas complejos en una sola bolsa para medir su grado de complejidad siguiendo un único criterio.

La tarea de desarrollar una medida matemáticamente bien definida para la complejidad se ve obstaculizada por la falta de un objetivo claramente definido. Vamos a presentar algunos requisitos previos y algunas de las restricciones que deben postularse para obtener una medida de complejidad válida. Al final, sin embargo, es algo que depende de nuestra intuición el decidir si estos requisitos son apropiados o no para ello.

25.2.1. Complejidad frente Aleatoriedad

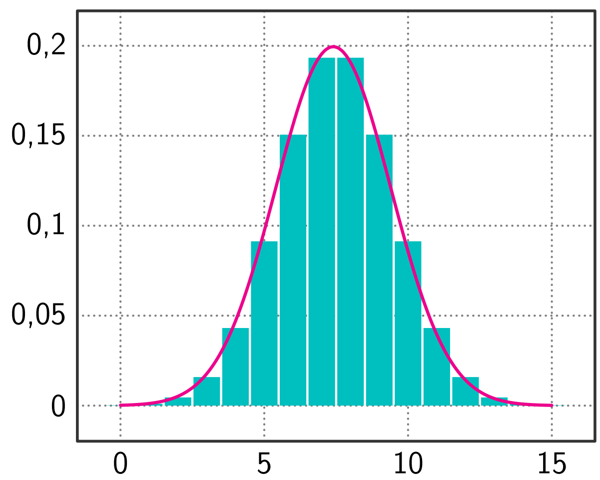
Una propuesta habitual para medir la complejidad es la **entropía informativa de Shannon:** $H[p] = -\sum_{x_i} p(x_i) log(p(x_i))$ .Esta medida se anula cuando el sistema es regular (es decir, hay un solo evento probable), lo que concuerda con nuestra intuición de que la complejidad es baja cuando no pasa nada, y sin embargo, es máxima para una dinámica completamente al azar.



Realmente, es una cuestión de punto de vista el que se considere que los sistemas aleatorios son complejos. Para algunas consideraciones, por ejemplo, cuando se trata de la "**complejidad algorítmica**" tiene sentido atribuir un grado de complejidad máximo a conjuntos completamente aleatorios de objetos. En general, sin embargo, se considera que las medidas de complejidad deben ser funciones cóncavas que alcanzan sus mínimos tanto para comportamientos regulares como para secuencias puramente aleatorias.

26. Histogramas

Un histograma es una representación gráfica de una variable en forma de barras. Se utilizan para variables continuas o para variables discretas, con un gran número de datos, y que se han agrupado en clases. En el eje abscisas se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo, y por altura, la frecuencia absoluta de cada intervalo. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados.



27. Aproximacion de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})$$

De acuerdo a la función Gamma de Euler podemos describir el factorial de cualquier número como:

$$\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Donde $n \geq 0$, cuando n=10 e integrar obtenemos:

$$f(x) = x^n \cdot e^{-x}$$

Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando n=0:

$$f(x) = \frac{10}{e}^{10*} \cdot e^{\frac{-x^2}{20}}$$

Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemo que definimos las variables de la integral como:

$u = x + n$ y $du = dx$ y sustituyendo

$I = \int_{u=-n}^{\infty}(u+n)^n \cdot e^{u+n} du$ factorizando $(u+n)^n$ la integral es:

$I = \int_{u=-n}^{\infty}(n)^n \cdot (1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du$, tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:

$$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty}(1+\frac{u}{n})^n \cdot e^{-u} \cdot^n du \quad (1)$$

Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expander el logaritmo:

$$ln(1+\frac{u}{n})^n = n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \quad (2)$$

$$\implies \quad ln(1+\frac{u}{n} = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2})$$

Finalmente sustituyendo 2 tenemos:

$$n \cdot ln(1+\frac{u}{n}) \approx u - \frac{u^2}{2n}$$

Sustituyendo en 1 tenemos:

$I_2 = (\frac{n}{e})^n \cdot \int_{u=-n}^{n} e^{\frac{u^2}{2n}} du$, notemos que regresamos a la

integral Gaussiana:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n}$$

Por lo tanto decimos que n tiende al infinito y el factorial de n tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

$$n! \sim (\frac{n}{2})^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

28. Número de Erdös

Este es un número que pretende cuantificar el grado de separacion entre las personas que han publicado un artículo de investigación, en este caso particular el mateático Paul Erdös.

¿Cómo se calcula?

Esto es muy sencillo, se considera que Erdös tiene un número 0.

Si se ha colaborado con el, directamente en la publicacion de un artículo se tiene número de Erdös 1.

Si se ha colaborado con alguien que colabóro directamente con Erdös se tiene número 2 y así sucesivamente.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuan separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama.
Se asegura que Paul Erdös es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producción de Erdös es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos están aún por publicarse después su muerte.
Erdös utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, "el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas". Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: "Habrá mucho tiempo para descansar en la tumba". Erdös viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas.
Erdös seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta años. Erdös, sin duda, tenía el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todos las especialidades.

29. The Interrogator's Fallacy

A future civiliztion might attemp to quantify guilty, in a courtroom, by replacing the jury with a court computer(weighs the evidence and calculate a probability of guilty). THe science of DNA profiling es relatively new, so the interpretation of DNA evidence relies on assessign probabilities. Robert Matthews has pointed out that a far more traditional source of evidence in court cases ought to be analyzed usign probability theory, even if the confession was ectracted under duress, he calls this the Interrogator's falacy, that said that there are circumstances under which a confession adds weight to the view that the accsed es innocent rather than guilty. The main mathematical iea required to explain Matthew's conclucion is that of the conditional probability.

Suppose Mr. and Mrs. SMith tell you they have two children, one of whom is girl. WHts is the probability that the other es a girl?. What is the probability that the youngest is a girl, too?. Probabilitues of this tyoe are said to be conditional, the probability of some event ocurring given thaht some other event has definitely occured. The interpretation of stadistical data requires an understanding of the mathematics of probability and the context in which it is being applied. VNTR sequences are belived to identify individuals uniquely. FOr use in courts, scientist use standard techniques from molecular biology to look for matches between different VNTR region in two samples.

The prosecutor's fallacy refers to a confusion of two different probabilities. THe "match probability.ªnswer the question: WHts is the probability that an individual DNA will match the crime sample, given thaht he or she is innocent? we can check thaht the individual is conceptually being placed in a large population chosen for scientific convencience. BUt the question that should concern the court: What is the probability thaht the suspect is innocent, given a DNA match? In this second case, he or she is being placed in a less well defined but moere relevant population. THe use of conditional probabilities in such circumstances is governed by a theorem credited to Thomas Bayes.

For application to confession evidence, Matthews designates the next formula:

Derivation of Matthews's Formula

By Bayes's theorem we have

$$P(A|C) = P(A\&C)/P(C)$$

and similarly

$$P(C|A) = P(C\&A)/P(A).$$

But $C\&A = A\&C$, so we can combine the two equations to get

$$P(A|C) = P(C|A)P(A)/P(C).$$

Moreover,

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|A')P(A')$$

because either A or A' must happen, but not both. Finally, $P(A') = 1 - P(A)$.
Putting all this together, we get

$$P(A|C) = P(A)/[P(A) + P(C|A')P(A')/P(C|A)].$$

If we replace $P(A)$ by p and

$$P(C|A')/P(C|A) \text{ by } r,$$

we get

$$P(A|C) = p/[p + r(1-p)].$$

Figura 8: Matthews Formula

Where he consider thaht the existence of a confession increases the probability of guilt if and only if an innocent person is less likely to confess than a guilty one and viceverse. Psycological profiles indicate that individuals who are more suggestible or more compliant, are more likely to confess under interrogation.

ANother case of study is the"BOdy-finder's fallacy"which say that it is hard to argue that an innocent person is more likely to confess than a guilty one just because they know thaht a body has been descovered. It would be silly to suggest that every potential juror should take (and pass) a course of bayesian inference, but it seems entirely feasible thaht a judge could direct them on some simple principle.

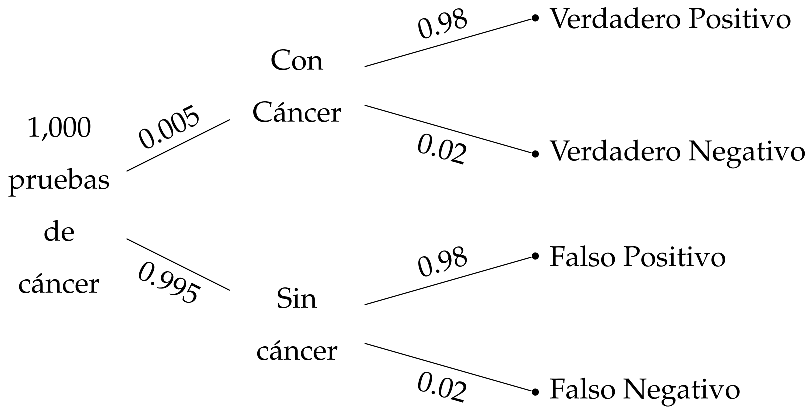
30. Análisis de la curva ROC

En la Teoría de detección de señales una curva ROC (acrónimo de Receiver Operating Characteristic, o Característica Operativa del Receptor) es una representación gráfica de la sensibilidad frente a la especificidad para un sistema clasificador binario según se varía el umbral de discriminación.

El análisis de la curva ROC, o simplemente análisis ROC, proporciona herramientas para seleccionar los modelos posiblemente óptimos y descartar modelos subóptimos independientemente de (y antes de especificar) el coste de la distribución de las dos clases sobre las que se decide. La curva ROC es también independiente de la distribución de las clases en la población (en diagnóstico, la prevalencia de una enfermedad en la población). El análisis ROC se relaciona de forma directa y natural con el análisis de coste/beneficio en toma de decisiones diagnósticas.

30.1. Problema propuesto

Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una fiabilidad del 98 por ciento; es decir, si uno tiene cáncer el análisis dará positivo el 98 por ciento de las veces, y si no lo tiene, dará negativo el 98 por ciento de las veces. Supongamos además que el 0,5 por ciento de la población, una de cada doscientas personas, padece verdaderamente cáncer. Imaginemos que uno se ha sometido al análisis y que su médico le informa con tono pesimista que ha dado positivo. ¿Hasta qué punto ha de deprimirse esa persona? Lo sorprendente del caso es que dicho paciente ha de mantenerse prudentemente optimista. El por qué de este optimismo lo encontraremos al determinar la probabilidad condicional de que uno tenga un cáncer sabiendo que el análisis ha dado positivo.



Terminología y sus derivados a partir de una matriz de confusión ladeada.

$$Verdaderos\ Positivos(VP) = (10000)(0{,}005)(0{,}98) = 49 \qquad analisis$$

$$Verdaderos\ Negativos(VN) = (10000)(0{,}995)(0{,}98) = 9751 \qquad analisis$$

$$Falsos\ Positivos(FP) = (10000)(0{,}005)(0{,}02) = 1 \qquad analisis$$

$$Falsos\ Negativos(FN) = (10000)(0{,}995)(0{,}02) = 199 \qquad analisis$$

Sensibilidad o Razón de Verdaderos Positivos (VPR)

$$\begin{aligned} VPR = \frac{VP}{P} &= \frac{VP}{(VP+FN)} \\ &= \frac{49}{(49+199)} = 0{,}19758 \end{aligned}$$

Ratio o Razón de Falsos Positivos (FPR)

$$\begin{aligned} FPR = \frac{FP}{N} &= \frac{FP}{(FP+VN)} \\ &= \frac{1}{(1+9751)} = 0{,}0001 \end{aligned}$$

Exactitud (accuracy) (ACC)

$$\begin{aligned} ACC &= \frac{(VP+VN)}{(P+N)} \\ ACC &= \frac{(49+9751)}{((49+199)+(1+9751))} = \frac{9800}{10000} = 0{,}98 \end{aligned}$$

Especificidad (SPC) o Razón de Verdaderos Negativos

$$\begin{aligned} SPC &= \frac{VN}{N} = \frac{VN}{(FP+VN)} = 1 - FPR \\ SPC &= \frac{VN}{N} = \frac{1951}{(1+1951)} = 1 - FPR = 0{,}9999 \end{aligned}$$

Valor Predictivo Positivo (PPV)

$$PPV = \frac{VP}{(VP + FP)}$$
$$PPV = \frac{49}{(49 + 1)} = 0{,}98$$

$$PPV = \frac{P * VPR}{P * VPR + (1 - P) * (1 - SPC)}$$
$$PPV = \frac{50 * 0{,}19758}{50 * 0{,}19758 + (1 - 50) * (1 - 0{,}9999)} = 0{,}9995$$

Valor Predictivo Negativo (NPV)

$$NPV = \frac{VN}{(VN + FN)}$$
$$NPV = \frac{1951}{(1951 + 1)} = 0{,}99949$$

$$NPV = \frac{(1 - P)SPC}{(1 - P)SPC + P(1 - VPR)}$$
$$NPV = \frac{(1 - 50)0{,}9999}{(1 - 50)0{,}9999 + 50(1 - 0{,}19758)} = 0{,}99949$$

Ratio o Razón de Falsos Descubrimientos (FDR)

$$FDR = \frac{FP}{(FP + VP)}$$
$$FDR = \frac{1}{(1 + 49)} = 0{,}02$$

31. Magic Numbers by Ian Stewart

31.1. Cap. 23: Birthday Paradox.

Comenzando con el planteamiento de un problema, el cual se enuncia a continuacion: Durante un partido de soccer, normalmente hay 23 persona en el area de juego, dos equipos de 11 integrantes y el arbitro. ¿Cual es la probabilidad de que dos o mas de estas 23 personas cumpla años el mismo dia? Para poder resolver este problema, es decir, estimar una cifra numérica, se considera que cada integrante que se encuentra dentro del area de juego va ingresando a dicha área de uno en uno, al ingresar la primera persona al area de juego, ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona cumpla años el mismo dia que otra persona dentro del area de juego?, considerando que la probabilidad de que un evento no suceda es uno menos la probabilidad de que el evento suceda, por lo tanto la respuesta a la pregunta anterior es igual a 1. De mismo modo, una segunda persona ingresa al area de juego, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta persona cumpla años el mismo dia que otra persona dentro del area de juego?, como la probabilidad de que un evento no suceda es uno menos la probabilidad de que el evento suceda, la respuesta a la pregunta anterior viene descrita como $(1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365})$. Cuando una tercera persona ingresa al campo de juego, el cumpleaños tiene que ser distinto de las otras persona que ya se encuentran dentro del campo, asi que hay 363 opciones de 365, la probabilidad de que la tercera persona ingresada al campo cumpla años el mismo dia que cualquiera de las otras dos persona que ya se encuentran dentro del campo se decribe por regla multiplicativa $(\frac{365}{365})(\frac{364}{365})(\frac{363}{365})$, y cada que va ingresando una persona al area de juego se sigue el patro anterior. Como conclusion, se llega a intuir que la probabilidad de que una persona cumpla años igual que otra dentro de un lugar determinado, depende de la cantidad de personas dentro de ese espacio, pues mientras menos personas dentro del espacio, menor es la probabilidad, mientras mas sean las personas dentro de ese espacio mayor sera la probabilidad de que cumplan años el mismo dia, pero no es asi Como respuesta al problema planteado inicialmente, se llega al resutado de una probabilidad aproximada al 0,5 siguiendo el patron descrito previamente. La intuicion es errónea, pues mientras mas personas son intoducidad al campo de juego, una secuencia decreciente de oportunidades posibles son multiplicadas, por lo que el resultado decrese mas rapido que lo esperado.

Dentro de este capitulo, se presentan otras tres problemas relacionados con el tipo de cuetionamiento anteriorcon titulos como el mismo dia de cumpleaños que uno, el cumpleaños en Júpiter y Números esperados.

31.2. Cap. 26: Secret Codes.

En un principio, el capitulo comienza haciendo mención acerca de la importancia del encriptado de los datos, se hace referencia a las 26 letras del alfabeto inglés utilizado para códigos de encriptamiento, y como claro ejemplo mencionan a la máquina enigma. A continuación, se enlistan 3 subtemas de cifrado a tratar:

- **El cifrado Caesar.**

  Esta parte del capítulo menciona cómo Julio César hace 1900 años antes de Cristo empleo una técnica de encriptado para poder enviar mensajes muy importantes para que no fueran descubiertos, la técnica que él implementaba era sumamente básica y comprensible hoy en día. EL encriptado era básico, cada letra del alfabeto que el utilizaba lo cambiaba por una letra del alfabeto ordenado cuatro posiciones adelante, es decir, en el alfabeto que comunmente utilizamos, podremos deducir que si Julio César quería escribir una letra A, cambiaba la letra A por la letra F, o sea, 4 posiciones adelante y asi consecutivamente, para poder encriptar la letra Z, bastaba con repetir el alfabeto despues de la Z, y de este modo, la Z encriptada seria igual a la letra D. Con este fundamento básico se expresan 5 ideas comunes para todos los encriptados: un texto plano, un texto cifrado, un algoritmo de encriptado, un algoritmo de desencriptado y una llave.

  Éste cápitulo habla acerca de cómo el cifrado Caesar, puede ser interpretado matematicamente, utilizando el némero total del alfabeto como el módulo de un número. Tmabién hace mencion de la debilidad de ”este tipo de cifrado y cómo fácilmente puede ser decifrado.

- **La máquina Enigma.**

  Durante esta parte del caápitulo, se habla acerca del funcionamiento de la máquina Enigma, de cómo fue descubierta la información encriptada que la máquina elaboraba, asi como de la colaboración que se realizo para el desencriptado de los mensajes emitidos por los alemánes durante la segunda guerra mundial.

- **Códigos con llaves asimétricas.**

  Se hace mención de c"omo una de las mas grandes idea en la Criptografía es la posilibilidad de la existencia de llaves asimétricas, donde las llaves de encriptado y desencrptado son diferentes mencionando un posible código para pensar en la posibilidad de implementación.

32. Análisis de componentes principales

32.1. Problema 1

La Tabla siguiente contiene información sobre chalets construidos por diez promotoras que operan a lo largo de la costa española:

Promotora	X_1 =Duración media hipoteca (años)	X_2 =Precio medio (millones euros)	X_3 =Superficie media (m^2) de cocina
1	8.7	0.3	3.1
2	14.3	0.9	7.4
3	18.9	1.8	9.0
4	19.0	0.8	9.4
5	20.5	0.9	8.3
6	14.7	1.1	7.6
7	18.8	2.5	12.6
8	37.3	2.7	18.1
9	12.6	1.3	5.9
10	25.7	3.4	15.9

Considerando solamente las variables X_1 y X_2 realizar un análisis de componentes principales.

El vector de medias y la matriz de covarianzas son:

$$x = (19{,}05, 1{,}57)', S = \begin{pmatrix} 56{,}9685 & 5{,}1705 \\ 5{,}1705 & 0{,}8941 \end{pmatrix}$$

Los autovalores y autovectores de S son:

$$\Lambda = diag(57{,}4413, 0{,}4213), T = \begin{pmatrix} 0{,}9958 & -0{,}0911 \\ 0{,}0911 & 0{,}9958 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las componentes principales serían:

$$Y_1 = 0{,}9958X_1 + 0{,}0911X_2, \quad Y_2 = -0{,}0911X_1 + 0{,}9958X_2$$

y los porcentajes de variabilidad explicados por cada componente son:

$$(\tfrac{57{,}4413}{57{,}8626})(100) = 99{,}27\,\%$$

La correclación entre Y_1 y las variables originales son:

$$corr(Y_1, X_1) = t_{11}\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{s_{11}}} = 0{,}9958\sqrt{\tfrac{57{,}4413}{56{,}9685}} = 0{,}9999$$
$$corr(Y_1, X_2) = t_{21}\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{s_{22}}} = 0{,}0911\sqrt{\tfrac{57{,}4413}{0{,}8941}} = 0{,}7302$$

Las correlaciones entre Y_2 y las variables originales son:

$$corr(Y_2, X_1) = t_{12}\sqrt{\tfrac{\lambda_2}{s_{11}}} = -0{,}0911\sqrt{\tfrac{0{,}4213}{56{,}9685}} = -0{,}0078$$
$$corr(Y_2, X_2) = t_{22}\sqrt{\tfrac{\lambda_2}{s_{22}}} = 0{,}9958\sqrt{\tfrac{0{,}4213}{0{,}8941}} = 0{,}6836$$

Observemos la primera componente con más detalle:

$$Y_1 = 0{,}9958X_1 + 0{,}0911X_2$$

Esta componente es escencialmente X_1. Esto es debido a que la varianza de X_1 ($s_{11} = 56{,}9685$) es mucho mayor que la varianza de X_2 ($s_{22} = 0{,}8941$) y, por tanto, gran parte de la variabilidad del sistema queda explicada por X_1.

En este caso conviene estandarizar los datos y realizar un nuevo análisis de componentes principales. Esto es equivalente a realizar el análisis a partir de la matriz de correlaciones R.

La matriz de correlaciones R es:

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & 0{,}7245 \\ 0{,}7245 & 1{,}0000 \end{pmatrix}$$

y sus autovalores y autovectores son:

$$\Lambda = diag(1{,}7245,\ 0{,}2755), \quad T = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & -0{,}7071 \\ 0{,}7171 & 0{,}7071 \end{pmatrix}$$

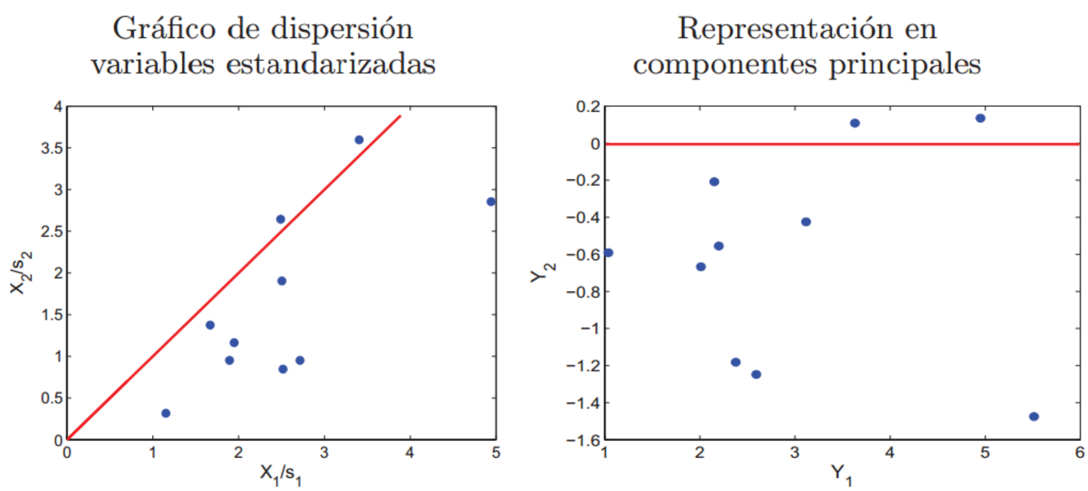
Por tanto, los componentes principales son:

$$y_1 = 0{,}7071X_1 + 0{,}7071X_2, \ Y_2 = -0{,}7071X_1 + 0{,}7071X_2$$

y los porcentajes de variabilidad explicados por cada componente:

$$(\tfrac{1{,}7245}{2})(100) = 86{,}22\,\%, \ (\tfrac{0{,}2755}{2})(100) = 13{,}78\,\%$$

Rotación de los ejes



Referencias

[Figueredo and Wolf, 2009] Figueredo, A. J. and Wolf, P. S. A. (2009). Assortative pairing and life history strategy - a cross-cultural study. *Human Nature*, 20:317–330.