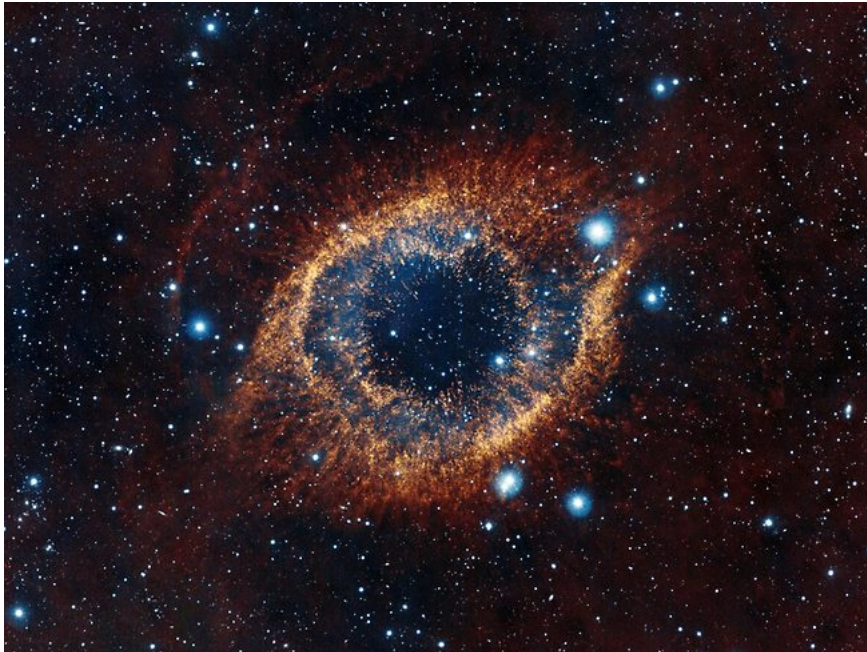


---

# Probabilidad, Procesos Aleatorios e Inferencia

CIC

Miguel de Jesús Martínez Felipe



*“Everybody is a genius. But if you judge a fish by its ability to climb a tree, it will live its whole life believing that it is stupid.” Albert Einstein*

# Índice

<b>1. Probabilidad</b>	<b>4</b>
1.1. Tipos de probabilidad . . . . .	4
1.2. probabilidad clásica . . . . .	4
1.3. probabilidad condicional . . . . .	4
1.4. probabilidad experimental o empirica . . . . .	5
1.5. Probabilidad Subjetiva . . . . .	5
1.6. Experimento Determinista . . . . .	6
1.7. Experimento aleatorio . . . . .	6
1.8. Función Factorial . . . . .	7
1.9. Función Gamma . . . . .	7
1.10. Probabilidad geometrica . . . . .	7
<b>2. Teorema del binomio</b>	<b>9</b>
2.1. 10 demostraciones del teorema del binomio . . . . .	10
2.2. Demostración del teorema del binomio . . . . .	11
2.3. Teorema 2.7 Schaum's . . . . .	11
<b>3. Permutación</b>	<b>12</b>
3.1. Ejercicios de Permutaciones . . . . .	12
3.2. Teorema de Levi-Civita . . . . .	14
3.3. Máquina Enigma . . . . .	15
3.4. Permutación de Multiconjuntos . . . . .	17
<b>4. Permutaciones Circulares</b>	<b>19</b>
<b>5. Permutaciones con repetición</b>	<b>19</b>
<b>6. Desviación Estandar</b>	<b>19</b>
<b>7. Sistemas Complejos</b>	<b>21</b>
7.1. ¿Que es un sistema complejo? . . . . .	21
7.2. ¿Como se puede medir la complejidad de un sistema? . . . . .	21
7.2.1. Complejidad frente Aleatoriedad . . . . .	22
7.3. Demostración por Inducción de $\sum_{n=1}^k n^3$ . . . . .	22
<b>8. Teorema Central del límite</b>	<b>23</b>
<b>9. Teorema de Bayes</b>	<b>24</b>
9.1. Problemas de Bayes . . . . .	34

<b>10.EigenValores y EigenVectores</b>	<b>37</b>
<b>11.Arg Max y Arg Min</b>	<b>38</b>
11.1. Optimización Matemática . . . . .	39
11.2. Prior y Posterior . . . . .	39
11.3. Máximo A Posteriori . . . . .	40
<b>12.Tareas a fin</b>	<b>43</b>
12.1. Telomeros . . . . .	43
12.2. Cuadro Mágico de Benjamin Franklin . . . . .	44
12.3. Criterio de Divisibilidad entre 11 . . . . .	45
12.4. Primera ley de distributividad . . . . .	46
12.5. Segunda ley de distributividad . . . . .	47
12.6. Principio De La Dualidad . . . . .	48
12.7. Demostración de Leyes de De Morgan . . . . .	49
12.8. Número de Erdős . . . . .	50
12.9. Aproximación de Stirling . . . . .	51
12.10Fullerenos . . . . .	52
12.11Poemas Palindromicos . . . . .	53
12.12Tipos de paradojas . . . . .	53
12.13Modelo Ising . . . . .	61
12.14Los puentes de Königsberg . . . . .	62
12.15Paradoja . . . . .	63
12.16Teorema de los cuatro colores . . . . .	65
12.17Econofísica . . . . .	67
<b>13.Exámenes</b>	<b>67</b>
13.1. Examen 1 Técnicas de Conteo . . . . .	67
13.2. Examen que resolví Víctor Rangel . . . . .	76
13.3. Examen a calificar . . . . .	82
13.4. Examen 2 . . . . .	87

## 1. Probabilidad

La definición que más se puede acercar es la división de los posibles casos favorables de un evento aleatorio entre todos los posibles casos en el evento.

$$P(\text{suceso}) = \text{casos favorables} / \text{casos posibles}$$

Dicho de otro modo y en terminos de frecuencia de ocurrencia, como un porcentaje de exitos en un moderadamente extensos números de situaciones similares

Por ejemplo la probabilidad de lanzar un dado y que salga el número 2; en este ejemplo nuestro caso favorable es uno , ya que sólo tenemos 6 casos en nuestro posible espacio y buscamos la posibilidad de que se obtenga el número 2.

$$U=1,2,3,4,5,6$$

Por lo tanto y con base a la fórmula de probabilidad sustituimos datos y obtenemos que:

$$P(\text{suceso}) = f/n = 1/6 = 0.1666 \text{ (de igual forma se puede ver como el porcentaje 1.66)}$$

**Posibilidad** A diferencia de Probabilidad la Posibilidad es un remitente del ámbito probable, de lo cual es aquello que puede ocurrir o que puede no suceder. Las leyes científicas no se basan en posibilidades sino en datos generales a modo de causa y efecto. [0enumiv]

### 1.1. Tipos de probabilidad

#### 1.2. probabilidad clásica

Ees el número de resultados favorables entre el número total de resultados posibles

$$P(A) = \text{numero de casos vavorables} / \text{numero de casos totales}$$

#### 1.3. probabilidad condicional

Son aquellos eventos cuya ocurrencia esta condicionada a la ocurrencia de otro evento. en cierta parte un conjunto depende de que haya ocurrido otro evento.

(La probabilidad de que suceda A dado que sucedió B)  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$  si  $p(B)$  diferente de 0

ejemplo: se realizó una encuesta sobre hábitos de lectura que se reusme:  
Le gusta leer No le gusta leer Total hombre 40 20 60 mujer 50 10 60 total 90 30 120  
 $P(M) = 60/120 = .50$   $P(L \cap M) = 50/120 = .42$   $P(L|M) = P(L$

$n(M)/P(M) = .42/.50 = .84$  La probabilidad de una persona que le gusta leer, dado que sea una mujer.

Cuando ocurre un suceso cambia el espacio muestral, por ello cambia la probabilidad.

#### 1.4. probabilidad experimental o empirica

Es la probabilidad que ocurre en un suceso mediante el cálculo de la frecuencia relativa del mismo al repetir el experimento muchas veces. Cuantas veces sea mayor el número de pruebas realizadas, entonces más certero será el valor obtenido al valor de esta probabilidad. Y esto dependerá del  $n$  de posibles resultados.

#### 1.5. Probabilidad Subjetiva

Refleja creencias personales las cuales envuelve en juicio, información, intuición, entre otras. Por ejemplo, cuál es la probabilidad de que obtengas un 10 en cierto curso? Cada estudiante quizá tenga una diferente respuesta a esta pregunta.

##### Proceso Estocástico

Un proceso estocástico es un modelo matemático de un probabilístico experimento que envuelve en tiempo y genera una secuencia numérica de valores. Por ejemplo un proceso estocástico puede ser usado para modelar:

(a) la secuencia de precios diarios de un valor. (b) la secuencia de marcadores en un partido de football. (c) la secuencia de veces fallidas de una máquina. (d) la secuencia de mediciones de un radar de la posición de un avión.

Cada valor numérico en la secuencia es modelado por una variable aleatoria, entonces un proceso estocástico es simplemente una finita o infinita secuencia de variables aleatorias y que no representan una conceptual desviación importante de nuestra estructura básica. -Introduction to probability, Dimitri P. Bertsekas-

**Riesgo** : Combinación de la probabilidad de que se produzca un evento y sus consecuencias sean negativas, se puede componer por amenaza.

Riesgo = Amenaza \* Vulnerabilidad

**Peligrosidad** Probabilidad de que ocurra un peligro o daño

**Vulnerabilidad** Grado de destrucción, función de Magnitud del evento y tipo de elementos bajo

**Amenaza** Probabilidad de un evento con una cierta magnitud; también es un fenómeno o condición peligrosa que puede ocasionar daños, la pérdida

de medios, sustentos, trastornos sociales y económicos, esta se define en función de la intensidad y la frecuencia

## 1.6. Experimento Determinista

Se puede definir o predecir los resultados antes de que ocurran, siendo que estén las mismas condiciones, o se hayan tenido resultados similares.

1. Si un número es par, el siguiente será impar.
2. Saber qué día de la semana es mañana.
3. Una piedra al soltarla siempre caerá hacia abajo por la gravedad.
4. Tiempo que tarda en recorrer un automóvil un cierto espacio a velocidad constante en condiciones fijadas.
5. Un hielo se funde cuando la temperatura sube de  $0^{\circ}\text{C}$
6. El tiempo de caída libre de un Objeto. Si se conoce la altura y no existe fuerzas externas el tiempo de caída se puede predecir por medio de la fórmula:  

$$h = -1/2gt^2$$
7. La mezcla de la sustancia química para la obtención de algún compuesto.
8. Se hace actuar sobre un cuerpo de un kg. De masa una fuerza de Newton, se obtiene una aceleración de un metro/segundo
9. Juegos de estrategia
10. Si un coche circula a 200 km/h y tarda en hacer un trayecto de 3 horas, habrá recorrido 600km.

## 1.7. Experimento aleatorio

Cuando no se puede predecir o definir los resultados incluso cuando se realiza en las mismas condiciones

1. Lanzar un dado y esperar el número 4 como resultado
2. Sorteo para un boleto de lotería
3. Sacar un Ace de un juego de cartas Poker
4. Determinar el número de accidentes en un día
5. Girar una ruleta de dos colores y determinar un color.
6. Hacer una encuesta en hogares y saber si son hogares con 2, 3 o 4 hijos
7. Lanzar una moneda y saber si cae cara o cruz
8. Saber que color sacar de una bolsa con diferentes bolitas de colores.
9. Saber que tipo de examen se presentará si se tiene de opción examen A, B o C
10. Predecir el clima.

## 1.8. Función Factorial

Es el resultado de multiplicar todos los números positivos desde el 1 hasta  $n$  números.

$$N! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$$

por ejemplo:  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

## 1.9. Función Gamma

La función Gamma denotada como  $\Gamma$  Es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos. La notación fue ideada por Adrien Maire Legendre. Si la parte real del número complejo  $z$  es quien converge absolutamente, esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo excepto a los enteros negativos y al cero. Si  $n$  es un entero positivo entonces lo que muestra una relación de esta función con el factorial. La función Gamma generaliza el factorial para cualquier valor complejo de  $n$

## 1.10. Probabilidad geometrica

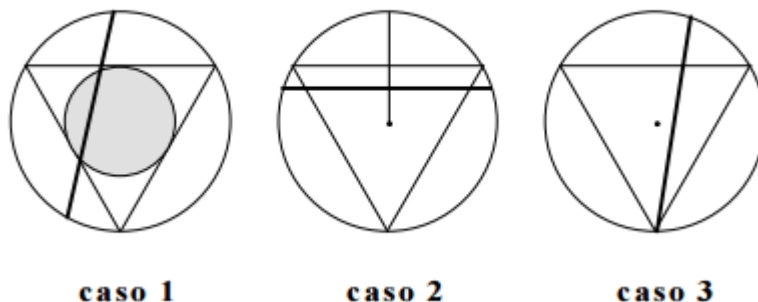
La probabilidad geometrica de un evento puede ser definido como la posibilidad de que ocurra un evento. Suponinedo que nosotros tenemos un terreno de 200 metros cuadrados, y queremos lanzar una bola tal que golpee algun lugar en un área específica de 20 metros cuadrados, entonces ?'Cuál será la probabilidad de que la bola golpee el area deseada?. [?]

$$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)}$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$P(A) = \frac{200}{20} = \frac{1}{10}$$

Un ejemplo clásico en la probabilidad geométrica es el que se conoce como paradoja de Bertrand, este reside en el hecho de existir, varias soluciones al problema que se plantea: Se elige una cuerda al azar en el círculo unidad ¿Cuál es la probabilidad de que su longitud supere la del lado del triangulo equilátero inscrito en el círculo?

**paradoja de Bertrand**

La paradoja estriba en que la respuesta parece no ser única, el valor de la probabilidad que se nos pide depende de la elección al azar. Y esto se calcula a partir de : 1. La distancia al centro de su punto medio 2. La posición de su punto medio sobre un radio cualquiera 3. La posición de uno de sus extremos sobre la circunferencia, supuesto fijo el otro extremo.

1-El espacio muestral es todo el círculo unidad  $C1$  y sólo las cuerdas cuyos puntos medios caen en el círculo inscrito en el triángulo equilátero,  $C1/2$  tienen la longitud mayor que  $\sqrt{3}$ . El radio del círculo es  $1/2$  y si  $A$ =la cuerda tiene longitud mayor que  $\sqrt{3}$

$$P(A) = \frac{\text{area}(C1/2)}{\text{area}(C1)} = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi} = \frac{1}{4}$$

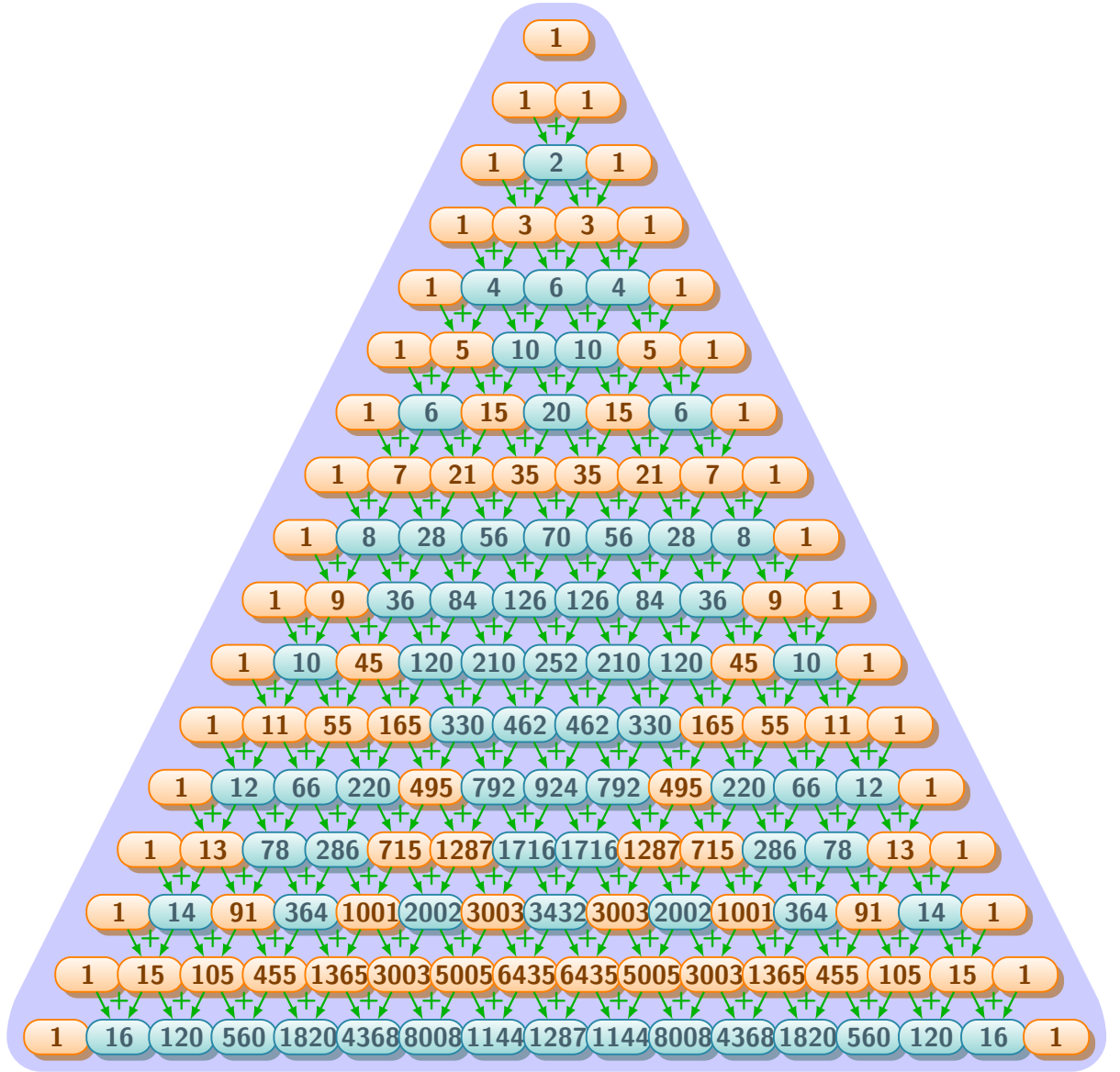
2-El espacio muestral es ahora el segundo (radio)  $[0,1]$  y sólo las cuerdas cuyos puntos medios están en  $[0,1/2]$  cumplen la condición:

$$P(A) = \frac{\text{longitud}([0,1/2])}{\text{longitud}([0,1])} = 1/2$$

3- El espacio muestral es ahora la circunferencia del círculo unidad. Si se fija un extremo de la cuerda y se elige al azar la posición del otro, sólo aquellas cuerdas que tengan este último extremo sobre el tercio de la circunferencia opuesto al extremo fijo cumplen la condición:

$$P(A) = \frac{2\pi/3}{2\pi} = 1/3$$





## 2. Teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Cuando  $\binom{n}{k}$  es un coeficiente binomial, definido como el numero de caminos para elegir  $k$  objetos fuera de  $n$ , sin importancia de orden. Una explicita formula  $\binom{n}{k}$  en terminos de factorial es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## 2.1. 10 demostraciones del teorema del binomio

$$(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$(x + y)^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$(x + y)^4 = (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

$$(x + y)^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5)$$

$$(x + y)^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5)$$

$$(x + y)^6 = (x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6)$$

$$(x + y)^7 = (x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7)$$

$$(x + y)^8 = (x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8)$$

$$(x + y)^9 = (x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9)$$

$$(x + y)^{10} = (x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4 + 252x^5y^5 + 210x^4y^6 + 120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10})$$

## 2.2. Demostración del teorema del binomio

Tenemos el siguiente binomio

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ Entonces } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

Tenemos el siguiente binomio

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1} \text{ Entonces } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

## 2.3. Teorema 2.7 Schaum's

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{n_1}^{nr} = n$$

$$n$$

$$\{n_1, n_2, \dots, n_r\} a_1^{n_1} * a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$$

Combinaciones:

Suponiendo que nosotros tenemos una colección de n objetos. Una combinación de estos n objetos toma r a la vez, o un r combinación, es cualquier subconjunto de r elementos. In otras palabras, una r combinación es una selección de r de n objetos donde el orden no cuenta. [?]

Ejemplo: La combinación de las letras a,b,c,d tomando 3 a la vez son  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$  o simplemente  $\{abc\}, \{abd\}, \{acd\}, \{bcd\}$

Observe que las siguientes combinaciones son iguales:

$$\{abc\}, \{acb\}, \{bac\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$$

Eso es, cada uno denota el mismo conjunto a,b,c

El número de combinaciones de n objetos tomando r una vez será denotado por

$$C(n,r)$$

Antes que de la formula general para C(n,r) se considera un caso especial:

Determinando el número de combinaciones de las 4 letras a,b,c,d, tomando 3 a la vez. Hay que ver que cada combinación consiste de 3 letras determinadas  $3!=6$  permutaciones de las letras en la combinación.

Combinaciones	Permutaciones
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dc b

Este número de combinaciones multiplicado por  $3!$  igual al número de permutaciones:

$$C(4, 3) * 3! = P(4, 3) \text{ o } C(4, 3) = \frac{P(4, 3)}{3!}$$

Ahora  $P(4, 3) = 4 * 3 * 2 = 24$  y  $3! = 6$ ; así que  $C(4, 3) = 4$  como se notó

### 3. Permutación

$${}_nP_r = nx(n-1)x(n-2)x\cdots x(n-r+1) \quad (1)$$

si la expresión anterior es multiplicada por  $(n-r)! / (n-r)!$ , entonces:

$$= nx(n-1)x(n-2)x\cdots x(n-r+1)(n-r)!/(n-r)! = n!/(n-r)! \quad (2)$$

Por tanto, la fórmula de permutaciones para  $r$  objetos tomados de entre  $n$  objetos es:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (3)$$

Esta fórmula nos permitirá obtener todos aquellos arreglos en donde el orden es importante y donde solo se usan parte de los  $n$  objetos con que se cuenta, además hay que hacer notar que no se pueden repetir objetos dentro del arreglo, esto es, los  $n$  objetos son todos diferentes. Entonces, ¿qué fórmula hay que usar para arreglos en donde se utilicen los  $n$  objetos con que se cuenta? Si en la fórmula anterior se sustituye  $n$  en lugar de  $r$ , entonces.

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \quad (4)$$

Como  $0! = 1$  de acuerdo a demostración matemática, entonces  ${}_nP_n = n!$

#### 3.1. Ejercicios de Permutaciones

1. ¿Cuántas maneras hay de asignar las 5 posiciones de juego de un equipo de baloncesto si el equipo consta de 12 integrantes y estos pueden jugar en cualquier posición?

$$P_5^{12} = \frac{(12)!}{(12-5)!} = 95,040 \text{ formas de asignar posiciones}$$

¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar, si debe constar de dos letras, seguidas de cinco dígitos, las letras serán tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9.

2. Considere que se pueden repetir letras y números,

Por el principio multiplicativo se tiene:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 67,600,000 \text{ claves de acceso}$$

3. Considere que no se pueden repetir letras y números,

Por formula:

$$P_2^{26} * P_5^{10} = \frac{(26)!}{(26-2)!} * \frac{10!}{(10-5)!} = 19,656,000 \text{ claves de acceso}$$

4. ¿Cuántas de las claves del inciso 3 empiezan por la letra A y terminan por el número 6?

Por formula:

$$1 * P_1^{25} * P_4^9 = \frac{(25)!}{(25-1)!} * \frac{9!}{(9-4)!} = 75,600 \text{ claves de acceso}$$

5. ¿Cuántas de las claves del inciso 3 tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar?

$$1 * 1 * P_5^9 = 15,120 \text{ claves de acceso}$$

6. Una tarjeta de circuito impresa se puede comprar de entre 5 proveedores. ¿De cuántas maneras puede elegirse 3 proveedores?

$$P_3^5 = \frac{(5)!}{(5-3)!} = 10 \text{ formas de elegir los proveedores}$$

7. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 5 personas en una fila de 5 butacas?

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ formas de sentarse en la fila}$$

8. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra JULIO?

Por el principio multiplicativo:

$$5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \text{ formas distintas}$$

9. ¿Cuántas placas para autos se pueden hacer en nuestro país?

$$P_{26}^{10} = \frac{(26)!}{(26-10)!} = 175,760,000 \text{ se pueden generar}$$

10. Una mano de Póker consta de 5 cartas, si el mazo posee 52 cartas ¿De cuántas formas se puede recibir una mano?

$$P_5^{52} = \frac{(52)!}{(52-5)!} = 311,875,200 \text{ formas de tener una mano}$$

11. Un amigo le quiere regalar a otro 2 libros y los puede elegir de entre 15 opciones diferentes. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

$$P_{15}^2 = \frac{(15)!}{(15-2)!} = 210 \text{ formas de elegir los libros}$$

### 3.2. Teorema de Levi-Civita

.....1

$$\varepsilon_{ijk} = \{-1$$

.....0

Donde:

$$\varepsilon_{ijk} = 1 \text{ Cuando: } \varepsilon_{ijk} = 123, 231, 312$$

$$\text{y: } \varepsilon_{ijk} = -1 \text{ Cuando: } \varepsilon_{ijk} = 321, 132, 213 \text{ Por ejemplo:}$$

$$(Ax B)_i = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$$

$(Ax B)_1 = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$  Sustituyendo valores donde  $i=1$ ,  $j$  incrementa a partir de 1 se tiene:  $= \varepsilon_{11k} * A_1 * B_k + \varepsilon_{12k} * A_2 * B_k + \varepsilon_{13k} * A_3 * B_k$  Se desarrolla el siguiente procedimiento, en cada aumento de  $k=3$ ,  $j$  incrementa en uno.

$$= \varepsilon_{111} * A_1 * B_1 + \varepsilon_{112} * A_1 * B_2 + \varepsilon_{113} * A_1 * B_3 + \varepsilon_{121} * A_2 * B_1 + \varepsilon_{122} * A_2 * B_2 + \varepsilon_{123} * A_2 * B_3 + \varepsilon_{131} * A_3 * B_1 + \varepsilon_{132} * A_3 * B_2 + \varepsilon_{133} * A_3 * B_3$$

De acuerdo con el teorema de Levi-Civita se eliminan los valores diferentes a las combinaciones de sin repetir de 123:  $= \varepsilon_{123} * A_2 * B_3 + \varepsilon_{132} * A_3 * B_2 =$   
 **$A_2 * B_3 - A_3 * B_2$**

Ahora para:

$$(Ax B)_i = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$$

$(Ax B)_2 = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$  Sustituyendo valores donde  $i=2$ ,  $j$  incrementa a partir de 1 se tiene:  $= \varepsilon_{21k} * A_1 * B_k + \varepsilon_{22k} * A_2 * B_k + \varepsilon_{23k} * A_3 * B_k$  Se desarrolla el siguiente procedimiento, en cada aumento de  $k=3$ ,  $j$  incrementa en uno.

$$= \varepsilon_{211} * A_1 * B_1 + \varepsilon_{212} * A_1 * B_2 + \varepsilon_{213} * A_1 * B_3 + \varepsilon_{221} * A_2 * B_1 + \varepsilon_{222} * A_2 * B_2 + \varepsilon_{223} * A_2 * B_3 + \varepsilon_{231} * A_3 * B_1 + \varepsilon_{232} * A_3 * B_2 + \varepsilon_{233} * A_3 * B_3$$

De acuerdo con el teorema de Levi-Civita se eliminan los valores diferentes a las combinaciones de sin repetir de 123:  $= \varepsilon_{213} * A_1 * B_3 + \varepsilon_{231} * A_3 * B_1 =$

**A3 \* B1 - A1 \* B3**

En el caso de :

$$(AxB)_i = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$$

$(AxB)_3 = \varepsilon_{ijk} * A_j * B_k$  Sustituyendo valores donde  $i=3$ ,  $j$  incrementa a partir de 1 se tiene:  $= \varepsilon_{31k} * A_1 * B_k + \varepsilon_{32k} * A_2 * B_k + \varepsilon_{33k} * A_3 * B_k$  Se desarrolla el siguiente procedimiento, en cada aumento de  $k=3$ ,  $j$  incrementa en uno.

$$= \varepsilon_{311} * A_1 * B_1 + \varepsilon_{312} * A_1 * B_2 + \varepsilon_{313} * A_1 * B_3 + \varepsilon_{321} * A_2 * B_1 + \varepsilon_{322} * A_2 * B_2 + \varepsilon_{323} * A_2 * B_3 + \varepsilon_{331} * A_3 * B_1 + \varepsilon_{332} * A_3 * B_2 + \varepsilon_{333} * A_3 * B_3$$

De acuerdo con el teorema de Levi-Civita se eliminan los valores diferentes a las combinaciones de sin repetir de 123:  $= \varepsilon_{312} * A_1 * B_2 + \varepsilon_{321} * A_2 * B_1 =$

**A1 \* B2 - A2 \* B1**

Otra forma de resolver el procedimiento es con matrices:

$$\begin{bmatrix} I & J & K \\ A1 & A2 & A3 \\ B1 & B2 & B3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando la matriz se tiene:

$$I \langle A2 * B3 - A3 * B2 \rangle - J \langle A1 * B3 - A3 * B1 \rangle + K \langle A1 * B2 - A2 * B1 \rangle$$

**3.3. Máquina Enigma**

La criptografía, palabra que procede del griego krypto (oculto) y graphos (escritura), es la disciplina científica que se encarga del cifrado y descifrado de mensajes, es decir, enmascarar mensajes mediante un algoritmo de ofuscación que, además, debe permitir devolver el mensaje a su estado original. La criptografía, históricamente, ha estado vinculada a las campañas militares y los secretos de los gobiernos.

La máquina Enigma fue inventada por un ingeniero alemán, Arthur Scherbius, un experto en electromecánica que, tras la Primera Guerra Mundial, quiso aplicar la tecnología existente para mejorar los sistemas de criptografía de los ejércitos. Su idea, patentada en febrero de 1918, consistía en aplicar el Cifrado de Vigen. O, dicho de otra forma, se aplicaba un algoritmo de sustitución de unas letras por otras.

La máquina Enigma era un dispositivo electromecánico, es decir, tenía una parte eléctrica y otra mecánica. El mecanismo consistía en una serie de teclas, con las letras del alfabeto, al igual que una máquina de escribir, que

en realidad eran interruptores que accionaban los dispositivos eléctricos y hacían mover unos cilindros rotatorios. El funcionamiento, cara al usuario, era bastante sencillo. El operador tenía que teclear las letras de su mensaje y anotar las letras que devolvía la máquina (a través de un alfabeto que se iba iluminando). El código a usar se fijaba con las posiciones de los cilindros que constaban, cada uno, de 26 cables que se conectaban al teclado pero, con la particularidad, que el primer cilindro giraba un veintiseisavo de vuelta después de cada pulsación, de tal manera que la posición de las conexiones iba cambiando con cada entrada del teclado, obteniendo un cifrado polialfabético. Además, para dar mayor robustez, el segundo cilindro sólo daba un giro cuando el primero había completado 26 giros y el tercero cuando el segundo había dado sus correspondientes 26 y añadió la posibilidad de que los rodillos pudiesen ser intercambiados de posición, de manera que el número de posibilidades aumentase hasta tener 105.456 alfabetos. [0enumiv]



## 3.4. Permutación de Multiconjuntos

matrices	permutations				
	No.	inversion vectors	inversion sets	digit sums	
	0	1 2 3 4 0 0 0 0		0	
	1	2 1 3 4 1 0 0 0		1	
	2	1 3 2 4 0 1 0 0		1	
	3	3 1 2 4 0 1 1 0		2	
	4	2 3 1 4 0 0 2 0		2	
	5	3 2 1 4 0 1 2 0		3	
	6	1 2 4 3 0 0 0 1		1	
	7	2 1 4 3 1 0 1 1		2	
	8	1 4 2 3 0 0 1 1		2	
	9	4 1 2 3 0 1 1 1		3	
	10	2 4 1 3 0 0 2 1		3	
	11	4 2 1 3 0 1 2 1		4	
	12	1 3 4 2 0 0 0 2		2	
	13	3 1 4 2 1 1 0 2		3	
	14	1 4 3 2 0 0 1 2		3	
	15	4 1 3 2 1 1 1 2		4	
	16	3 4 1 2 0 0 2 2		4	
	17	4 3 1 2 1 1 2 2		5	
	18	2 3 4 1 0 0 0 3		3	
	19	3 2 4 1 1 0 1 3		4	
	20	2 4 3 1 0 0 1 3		4	
	21	4 2 3 1 1 1 1 3		5	
	22	3 4 2 1 0 0 2 3		5	
	23	4 3 2 1 1 1 2 3		6	

Si  $M$  es un conjunto múltiple finito, a continuación, una permutación multiconjunto es una disposición ordenada de elementos de  $M$  en la que aparece exactamente tan a menudo como cada elemento es su multiplicidad en  $M$ . Un anagrama de una palabra que tiene algunas letras repetidas es

un ejemplo de una permutación multiconjunto. Si las multiplicidades de los elementos de  $M$  (tomadas en algún orden) son  $m_1, m_2, \dots, m_i$  y su suma (es decir, el tamaño de  $M$ ) es  $N$ , entonces el número de permutaciones multiconjuntos de  $M$  es dada por el coeficiente multinomial.

$$n$$

$$\{n_1, n_2, \dots, n_r\} a_1^{n_1} * a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$$

Por ejemplo, el número de anagramas distintos de la palabra Mississippi es :

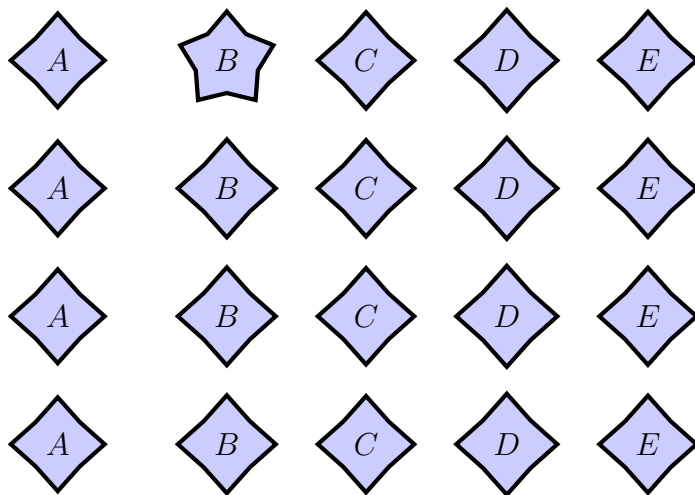
$$P = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34,650 \text{ permutaciones}$$

. A  $k$ -permutación de un conjunto múltiple  $M$  es una secuencia de longitud  $k$  de elementos de  $M$  en el que cada elemento aparece en la mayoría de su multiplicidad en  $M$  veces ( número de repetición de un elemento ) .

De las 5 letras sólo tomando 5 se tiene:  $5x4x3x2x1 = 120$  De las 5 letras sólo tomando 4 se tiene:  $P = \frac{(5!)}{(5-4)!} = 120$  De las 5 letras sólo tomando 3 se

tiene:  $P = \frac{(5!)}{(5-3)!} = 60$  De las 5 letras sólo tomando 2 se tiene:  $P = \frac{(5!)}{(5-2)!} = 20$

De las 5 letras sólo tomando 1 se tiene:  $P = \frac{(5!)}{(5-1)!} = 60$



Star

De las 5 letras sólo tomando 5 se tiene:  $P = 5x5x5x5x5 = 3,125$  De las 5 letras sólo tomando 4 se tiene:  $P = 5X5X5X5 = 625$  De las 5 letras sólo

tomando 3 se tiene:  $P = 5X5X5 = 125$  De las 5 letras sólo tomando 2 se tiene:  $P = 5X5 = 25$  De las 5 letras sólo tomando 1 se tiene:  $P = 5 = 5$

## 4. Permutaciones Circulares

Las permutaciones circulares son un caso particular de las permutaciones. Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar ".<sup>en</sup> círculo", (por ejemplo, los comensales en una mesa), de modo que el primer elemento que "se sitúe.<sup>en</sup> la muestra determina el principio y el final de muestra. [?]

$$PCn = Pn - 1 = (n - 1)!$$

Ejemplo:

¿De cuantas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$PC8 = P8 - 1 = (8 - 1)! = 7 = 5040$$

## 5. Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercero c veces, ...

$$n = a + b + c + \dots$$

Son los distintos grupos que pueden formarse con esos n elementos de forma que :

Entran todos los elementos. Importa el orden. Se repiten los elementos.

$$P_n^{a,b,c,\dots} = \frac{Pn}{a!*b!*c!}$$

Ejemplo:

Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

$$m = 9 \quad a = 3 \quad b = 4 \quad c = 2 \quad a + b + c = 9$$

$$P_9^{3,4,2} = \frac{9!}{3!*4!*2!} = 1260$$

[0enumiv]

## 6. Desviación Estandar

¿Qué es la desviación estándar?

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. Es una de las medidas de dispersión, una medida que es indicativa de como los valores individuales pueden diferir de la media.

Fórmulas para calcular la desviación estándar

Esta calculadora utiliza las fórmulas siguientes para calcular la desviación estándar:

La fórmula para la desviación estándar muestral es:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

donde n es el tamaño de la muestra y x-bar es la media aritmética de la muestra.

La fórmula para la desviación estándar poblacional es:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

donde N es el tamaño de la población y ? es la media aritmética de la población.

Que es desviación estándar?

Justamente la desviación Estándar, en un conjunto de datos (precios en el caso del mercado de valores) es una medida de dispersión, que nos indica cuánto pueden alejarse los valores respecto al promedio (media), por lo tanto es útil para buscar probabilidades de que un evento ocurra, o en el caso del mercado bursátil, determinar entre que rango de precios puede moverse un determinado activo, y determinar que tipo de activos pueden ser mas volátiles que otros.

1.Hallar la desviación media, la varianza y la desviación típica de la series de números siguientes:

12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5.

Media

$$X = \frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8} = \frac{76}{8} = 9,5$$

$$\text{desviación típica } \sigma = \sqrt{\frac{12^2+6^2+7^2+3^2+15^2+10^2+18^2+5^2}{8} - 9,5^2} = 3,35$$

[0enumiv]

## 7. Sistemas Complejos

### 7.1. ¿Que es un sistema complejo?

Un sistema complejo, a diferencia de uno simple es visto como una entidad cuyo comportamiento global es más que la suma de las operaciones de sus partes. Usualmente se le define como una red de muchos componentes cuyo comportamiento de agregados da lugar a estructuras en varias escalas y patrones de manifestación, cuya dinámica no es posible de inferir de una descripción simplificada del sistema. El campo es altamente multidisciplinario, juntando expertos en varias ramas para su estudio que van desde economía, ciencias sociales, biología, física, meteorología, etc., Las bases teóricas de los sistemas complejos han sido enfocadas principalmente en su organización; considerándolos como el conjunto de relaciones que determinan las clases de interacciones y transformaciones dentro de un sistema y en los arreglos que contribuyen al desarrollo y persistencia de ciertas características dentro de la organización. Son las relaciones entre los componentes, más que los componentes y sus propiedades las que son más significativas, donde al dar un mayor énfasis a la estructura y relaciones en lugar de su composición es lo que hace que muchos de los diferentes tipos de sistemas puedan ser caracterizados con herramientas analíticas similares. (1)

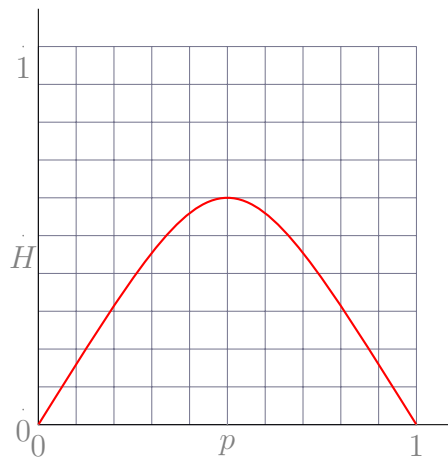
### 7.2. ¿Como se puede medir la complejidad de un sistema?

La búsqueda de medidas de complejidad toca muchos temas interesantes de la teoría de sistemas dinámicos y ha dado lugar a una serie de potentes herramientas, aunque el objetivo original de desarrollar una medida que valga para medir la complejidad de cualquier sistema no parece realista y se ha eliminado de los objetivos científicos. Los sistemas dinámicos complejos muestran una gran variedad de comportamientos cualitativamente diferentes, y no parece apropiado intentar meter todos los sistemas complejos en una sola bolsa para medir su grado de complejidad siguiendo un único criterio.

La tarea de desarrollar una medida matemáticamente bien definida para la complejidad se ve obstaculizada por la falta de un objetivo claramente definido. Vamos a presentar algunos requisitos previos y algunas de las restricciones que deben postularse para obtener una medida de complejidad válida. Al final, sin embargo, es algo que depende de nuestra intuición el decidir si estos requisitos son apropiados o no para ello. (2)

### 7.2.1. Complejidad frente Aleatoriedad

Una propuesta habitual para medir la complejidad es la **entropía informativa de Shannon**:  $H[p] = -\sum x_i p(x_i) \log(p(x_i))$ . Esta medida se anula cuando el sistema es regular (es decir, hay un solo evento probable), lo que concuerda con nuestra intuición de que la complejidad es baja cuando no pasa nada, y sin embargo, es máxima para una dinámica completamente al azar.



Realmente, es una cuestión de punto de vista el que se considere que los sistemas aleatorios son complejos. Para algunas consideraciones, por ejemplo, cuando se trata de la "**complejidad algorítmica**" tiene sentido atribuir un grado de complejidad máximo a conjuntos completamente aleatorios de objetos. En general, sin embargo, se considera que las medidas de complejidad deben ser funciones cóncavas que alcanzan sus mínimos tanto para comportamientos regulares como para secuencias puramente aleatorias. (2)

### 7.3. Demostración por Inducción de $\sum_{n=1}^k n^3$

Se tiene que:

$$\sum_{n=1}^k n^3 = 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 \quad (5)$$

Visto de otro modo: Cuando n es 1:

$$1 = 1^3 = 1 \quad (6)$$

Cuando n es 2:

$$2 = 1^3 + 2^3 = 9 \tag{7}$$

Cuando n es 3:

$$3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27 \tag{8}$$

Iterativamente

Entonces cuando para n número la formula es:

$$k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{2n} \tag{9}$$

## 8.    Teorema Central del límite

Definición 2 Supongamos que se realizan n ensayos independientes, y que en cada uno se tienen dos resultados posibles: éxito y fracaso. Supongamos también que p es la probabilidad de éxito de cada ensayo. Si X representa el número de éxitos que ocurren en los n ensayos, entonces X se dice una variable aleatoria binomial (o que tiene distribución binomial) con parámetros (n; p)  
 Obs. 1: una variable aleatoria Bernoulli es simplemente una binomial de parámetros (1; p)

Obs. 2: una v.a. binomial de parámetros (n; p) es la suma de n variables aleatorias Bernoulli con probabilidad p = P(X= 1)  
 Obs. 3: si X es una variable aleatoria binomial con parámetros (n; p) notaremos

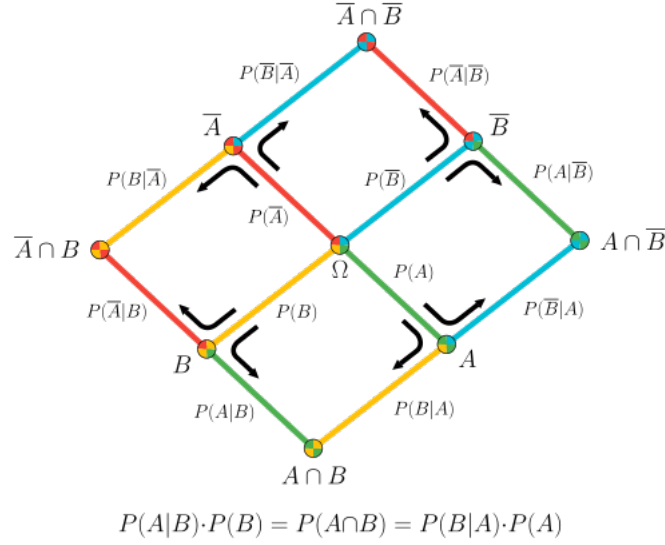
Se llama función de densidad normal a

Definición 4 La función de distribución normal es

Definición 5 Sea X una v.a., se llama función característica de X a

El momento de orden n es E(X<sup>n</sup>)

El momento absoluto de orden n es



## 9. Teorema de Bayes

Introducción:

El objeto del tema es la cuantificación de la incertidumbre, lo cual tiene mucho que ver con la previsibilidad del comportamiento. Hemos visto que el Análisis de Regresión es una técnica para obtener predicciones, y que, excepto en el caso de covariación perfecta, las predicciones son más o menos erróneas. En consecuencia, hay incertidumbre en las predicciones, y esta es la situación habitual. La imprevisibilidad genera incertidumbre. [?]

Los matemáticos vienen estudiando esta cuestión ya hace muchos años, y han facilitado herramientas precisas que dan resultados exactos en situaciones relativamente sencillas y fácilmente formalizables. Cuando se estudia el comportamiento, sin embargo, las cosas son diferentes porque el comportamiento se caracteriza por la complejidad, y su estudio requiere frecuentemente técnicas complejas. Los conceptos básicos de la probabilidad son de interés porque son el fundamento de procedimientos más sofisticados que sirven para cuantificar la incertidumbre.

Los matemáticos no son los únicos que miden la incertidumbre: Todo el mundo lo hace cada día. Por ejemplo: Un conocido nos pide un préstamo por una cantidad importante, y de una manera intuitiva evaluamos la probabilidad de que nos devuelva el préstamo y decidimos en consecuencia. Otro ejemplo: Tenemos un trabajo seguro en una empresa, y nos ofrecen un trabajo mejor pagado en otra; generalmente evaluamos la incertidumbre de la nueva



situación antes de tomar una decisión. Estas evaluaciones son más o menos intuitivas, y no suponen una cuantificación precisa de la incertidumbre, pero el fundamento de como suelen hacerse se asemeja a algunas aproximaciones formales a la probabilidad, que la definen como la frecuencia en que ocurre el acontecimiento.

Los matemáticos definen la probabilidad de ocurrencia de un acontecimiento  $A$  (hay también otras definiciones) como la razón entre la frecuencia de  $A$  (número de veces que es observado) y el número de veces en que podría ocurrir:

$$P(A) = \frac{A}{N} \quad (10)$$

Desarrollo:

El teorema de Bayes es un procedimiento para obtener probabilidades condicionales (la probabilidad de que ocurra n acontecimiento dado otro acontecimiento). La expresión del teorema de Bayes para dos variables directas es:

$$P(A|B) = \frac{(B|A)(P(A))}{P(B)} \quad (11)$$

ó

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (12)$$

Para variable que toman más de dos valores, la expresión se tiene aplicando en el numerador la Regla de Multiplicación  $P(A_i | B) = P(A_i)P(B|A_i)$  y en el denominador el Teorema de Probabilidad Total  $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_n)P(B|A_n)$  obtendremos la ecuación

$$P(A_i|B) = \frac{(A_i)(P(B|A_i))}{\sum_{i=1}^n P(A_i) * P(B|A_i)} \quad (13)$$

El teorema de Bayes da respuesta a cuestiones de tipo causal, predictivas y de diagnóstico. En las cuestiones causales queremos saber cuál es la probabilidad de acontecimientos que son la consecuencia de otros acontecimientos. En las cuestiones predictivas queremos saber cuál es la probabilidad de acontecimientos dada información de la ocurrencia de los acontecimientos predictores. En las cuestiones de tipo diagnóstico queremos saber cuál es la probabilidad del acontecimiento (o acontecimientos) causales o predictivos dado que tenemos información de las consecuencias. Para resumir, en las situaciones causales o predictivas desconocemos las consecuencias y tenemos evidencia de las causas. Por el contrario, en las situaciones de diagnóstico desconocemos las causas y tenemos evidencia de las consecuencias.

Ejemplo:

Unos psicólogos especializados en el tratamiento de trastornos de personalidad están interesados en diagnosticar el trastorno que afecta un paciente, en el que observan un conjunto de síntomas que indican que el paciente podría sufrir el trastorno A o el trastorno B. Además saben que los porcentajes de individuos afectados por los trastornos A, B o ningún trastorno son 10, 30 y 70. También saben que el porcentaje de individuos afectados por el trastorno A y que muestran el síntoma X es igual al 60 %, el porcentaje de individuos que sufren el trastorno B y muestran el síntoma X es el 30 % y el porcentaje de individuos no afectados que muestran los síntomas de trastorno es el 10 %.

Transtorno	$P(A_i)$	Síntoma	$P(B   A_i)$
A	.1	sí	.6
B	.3	sí	.3
C	.7	sí	.1

Sustituyendo en el teorema de bayes se tiene:

$$P(A_1|B) = \frac{(.6)(.1)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .27 \quad (14)$$

la probabilidad de que el individuo padezca el trastorno A es 0.27. Las probabilidades de que esté afectado por el trastorno B o el C son:

$$P(A_2|B) = \frac{(.3)(.3)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .41 \quad (15)$$

$$P(A_3|B) = \frac{(.1)(.7)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .32 \quad (16)$$

La conclusión es que lo más probable es que el individuo padezca el trastorno B, pero es un valor moderado y los psicólogos piensan que hay que obtener más evidencia.

El teorema de Bayes es especialmente adecuado para actualizar las conclusiones a medida que disponemos de nueva información. Pasado un tiempo observan que el paciente muestra un nuevo síntoma (Y), y saben que presentan Y el 70 % de los individuos que sufren el trastorno A, el 20 % de los individuos que sufren B y el 10 % de los individuos que padecen el trastorno C. Para obtener las probabilidades incorporando la nueva información hacemos que las probabilidades posteriores pasen a ser las probabilidades previas:

$$P(A_1|Y) = \frac{(.27)(.7)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .62 \quad (17)$$

$$P(A_2|Y) = \frac{(.2)(.41)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .27 \quad (18)$$

$$P(A_3|Y) = \frac{(.1)(.32)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .11 \quad (19)$$

Una vez hechos los cálculos la probabilidad de que el individuo esté afectado por el trastorno A ha pasado de 0.27 a 0.62.

Por otra parte:

Un caso particular de estudio y de investigación se centra en la resolución de un problema por duplas de alumnos como es el siguiente caso:

Los dos estudiantes trabajaron cada tarea por separado y se comunicaron por Internet. Más tarde se juntaron para dar forma definitiva a sus respuestas. Sonia y Carlos han planteado un problema con un enunciado largo y complejo. Según comentan en la entrevista, cada uno elaboró un problema distinto y al reunirse eligieron el de Carlos y lo trabajaron juntos. El problema que enunciaron es el siguiente: **Enunciado del problema**

Te encanta un programa de radio, y siempre lo escuchas a todas horas en casa y en el coche. Durante las cinco horas que van a emitir el programa, van a sortear un premio. Para optar por el premio has de llamar y concentrarte lo suficiente para poder responder a una pregunta. Y tienes cinco minutos para responder. Tú eres muy listo y tu probabilidad de responder bien desde un teléfono en la tranquilidad de tu casa es  $= 6/8$ . Pero si estás en el coche tu probabilidad de hacerlo bien mientras conduces y hablas por el móvil (tienes un manos libres) es menor, ya que tienes una probabilidad de acertar  $= 3/9$ . Vas a estar de viaje en el coche una hora de las cinco del programa de radio. Si aciertas, los del programa tiran un dado y si sale un 1, 2, 3 o 6 recibes dos invitaciones para el MUA. Si sale 4, 5 o 6 recibes dos invitaciones para el MARQ.

a)  $P(A)$  = Probabilidad de acertar. Probabilidad total de acertar b) Probabilidad de fallar  $P(A^c)$  c) Has ganado sólo ir a MARQ d) Has ganado ir a ambos

En el enunciado del problema, Sonia y Carlos no realizan preguntas, sólo indican las probabilidades que van a calcular y hechos: probabilidad de acertar, has ganado sólo ir a MARQ? y asignan directamente unas probabilidades condicionadas y las probabilidades iniciales o a priori del problema las indican en función del tiempo de duración del programa de radio y el tiempo que permanecen en casa o en el coche. Además, proponen un experimento adicional, lanzar un dado, para determinar las probabilidades de ir a un museo o al otro, e incluso, sin referirlo directamente, la probabilidad de ir a los dos museos. Dan también un dato, cinco minutos para responder, irrelevante para el problema que de alguna forma explica también que no utilizan un razonamiento lineal. Hay que resaltar el valor que asignan a las verosimilitudes ( $6/8$ ,  $3/9$ ) que son probabilidades subjetivas y las expresan con fracciones no irreducibles.

La resolución que realizan al problema planteado se recoge:

a)  $P(A)$  = Probabilidad de caer.  $((4/5)*(6/8)) + ((1/5)*(3/9)) = 24/40 + 3/45 = (1.080/1.800) + (120/1.800) = 1.200/1.800 = 0,6667$  Probabilidad Total

b) Probabilidad de fallar

$$P(A_c)P(A_c) = 1 - P(A) = 1 - 0,6667 = 0,3333 \quad (20)$$

c) Hasganado sólo ir a MARQ  $P(U) = \text{Ganas ir a MUA}$   $P(M) = \text{Ganas ir a MARQ}$   $P(U \cap M) = \text{Ganas ir a ambos}$   $P(M) - P(U \cap M) = 3/6 - 1/6 = 2/6$   $P(A)$  sólo ir a MARQ  $= (1/3) * (1,200/1,00) = 0,2222$

d) Has ganado ir a ambos  $= 1/6 * (1.200/1.800) = 0,1111$  entonces, ¿cuál es la probabilidad de estar en el coche? Teorema de Bayes.  $(1/5 * 3/9) / 0,1111 = 0,6$

Lo primero que llama la atención es lo extenso del enunciado frente a lo conciso de la resolución. Aunque se les indicó que debían explicar y justificar sus decisiones, la resolución planteada carece de cualquier tipo de explicación. Sonia y Carlos, al formular su problema, parece que han querido dejar abiertas las posibilidades de plantear diversas cuestiones. De hecho en el enunciado del apartado d) sólo pone has ganado ir a ambos y aquí añaden ¿cuál es la probabilidad de estar en el coche?

Dado que nuestro interés es mostrar el proceso de abstracción de estos estudiantes, vamos a detenernos en la secuencia de cómo llevan a cabo el enunciado de esta tarea. Durante la entrevista, el entrevistador fue leyendo el enunciado que habían propuesto y haciendo algunos comentarios sobre los significados implicados y sobre lo que parecía asumirse de manera implícita en el texto, a los que contestaba fundamentalmente Carlos. Una de las características de estos estudiantes es la de dejar cosas sobrentendidas o implícitas: En ningún momento dicen en el enunciado que exista la posibilidad de ganar un premio para ir a los dos museos. Definen el suceso  $M$   $\hat{=}$  ir a los dos museos  $\hat{=}$  cuando en el enunciado dicen: Si aciertas... recibes dos invitaciones para el MARQ.

Carlos en la entrevista ante el comentario del entrevistador: ...si se acierta se lanza un dado y el resultado nos da entradas para ir a un museo o a otro o a los dos, recalca enseguida: O a los dos. Sí, sí, hemos puesto un valor que está en los dos que es el seis.

Los datos iniciales del enunciado que formulan los exponemos a continuación. Hemos añadido letras para simbolizar los sucesos y hacer inteligible la exposición ya que estos estudiantes, añadiendo una nueva característica a su compleja forma de abstraer los conceptos, apenas representan los sucesos que utilizan en algún momento del problema. Llamamos  $H$ :  $\hat{=}$  contestar desde

casa y C: contestar desde el coche. De la misma forma que han hecho los estudiantes, llamamos A: acertar la pregunta. Según esto, los datos de su enunciado son:

$$P(A/H) = 6/8 \quad P(A/C) = 3/9 \quad P(H) = 4/5 \quad P(C) = 1/5 \quad P(H) + P(C) = 1$$

1)

Desde los datos del enunciado propuesto también obtienen las siguientes probabilidades:

$$P(U/A) = 4/6 \quad P(M/A) = 3/6 \quad P((U \cap M)/A) = 1/6 \quad (\text{dato implícito al que hemos hecho referencia}).$$

De la manera en la que Sonia y Carlos han enunciado el problema, se infiere que han reconocido previamente las condiciones que deben darse para poder aplicar el teorema de la probabilidad total y han expresado dos sucesos, contestar desde casa y contestar desde el coche, que según el enunciado son incompatibles y sus probabilidades suman uno. Este hecho es corroborado durante la entrevista en relación con el teorema de la probabilidad total, que ponen en evidencia en primer lugar:

1. E (haciendo mención a la manera en la que han resuelto el apartado a): En el apartado a) preguntáis la probabilidad de acertar y ponéis unas operaciones sin explicar qué es cada uno de los valores que aparecen. 2.

Carlos: Pero yo ponía las probabilidades, las tenía todas en una hoja y? 3.

E: Ya, pero me entregáis a mí esta tarea y yo la tengo que entender. [Risas].

4. E: ¿Y por qué no lo habéis expresado aquí? 5. Carlos: No los quise poner,

iba, iba haciendo? 6. E: ¿Por qué es una probabilidad total? 7. Carlos: De

acertar, porque ahí están todas las posibilidades de acertar? 8. Sonia: Puedes

acertar estando en el coche o estando en tu casa, ¿no? 9. E: Sí. 10. Carlos:

Esta probabilidad es estando en casa y la otra será en el coche porque es menor. Luego sumas y ya está.

### Aplicaciones

El teorema de Bayes es válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y el hecho de permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia empírica es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Una aplicación de esto son los clasificadores bayesianos que son frecuentemente usados en implementaciones de filtros de correo basura o spam, que se adaptan con el uso. Otra aplicación se encuentra en la fusión de datos, combinando información expresada en términos de densidad de probabilidad proveniente de distintos sensores.

Como observación se tiene

$$\sum_{i=1}^n P(A_i|B) = 1 \quad (21)$$

y su demostración resulta trivial. Como aplicaciones puntuales:

El diagnóstico de cáncer. Evaluación de probabilidades durante el desarrollo de un juego de bridge por Dan F. Waugh y Frederick V. Waugh. Probabilidades a priori y a posteriori. Un uso controvertido en la Ley de sucesión de Laplace.<sup>4</sup> En el testeo de hipótesis en Ciencia Política cuando se usa metodología process tracing.

[0enumiv]

### Inferencia bayesiana

Las diferentes metodologías de inferencia se pueden ver como un conjunto de fórmulas que resultan aplicables en determinados casos y bajo ciertas condiciones. La metodología bayesiana está basada en la interpretación subjetiva

de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes. Dentro de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido enunciar el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en conocimientos intrínsecos. La metodología bayesiana especifica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se condiciona al modelo de probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos.

El fin de la estadística, específicamente de la estadística Bayesiana, es suministrar una metodología para estudiar adecuadamente la información mediante análisis de datos y decidir de manera acertada sobre la mejor forma de actuar. Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística. La estadística bayesiana provee cantidades tanto conocidas como desconocidas lo que permite incorporar los datos conocidos dentro de la estimación de los parámetros dados inicialmente, logrando así un proceso de estimación más rico en información haciendo inferencias sobre las cantidades desconocidas

La inferencia bayesiana es un tipo de inferencia estadística en la que las evidencias u observaciones se emplean para actualizar o inferir la probabilidad de que una hipótesis pueda ser cierta. El nombre *inferencia bayesiana* proviene del uso frecuente que se hace del teorema de Bayes durante el proceso de inferencia. El teorema de Bayes se ha derivado del trabajo realizado por el matemático Thomas Bayes. Hoy en día, uno de los campos de aplicación es en la teoría de la decisión, visión artificial (simulación de la percepción en general) y reconocimiento de patrones por ordenador.

La inferencia bayesiana utiliza aspectos del método científico, que implica recolectar evidencia que se considera consistente o inconsistente con una hipótesis dada. A medida que la evidencia se acumula, el grado de creencia en una hipótesis se va modificando. Con evidencia suficiente, a menudo podrá hacerse muy alto o muy bajo. Así, los que sostienen la inferencia bayesiana dicen que puede ser utilizada para discriminar entre hipótesis en conflicto: las hipótesis con un grado de creencia muy alto deben ser aceptadas como verdaderas y las que tienen un grado de creencia muy bajo deben ser rechazadas como falsas. Sin embargo, los detractores dicen que este método de inferencia puede estar afectado por un sesgo debido a las creencias iniciales que se deben sostener antes de comenzar a recolectar cualquier evidencia.



i) Construcción axiomática ii) Una sola regla de decisión iii) La única que ofrece solución para ciertos problemas

Un ejemplo de inferencia bayesiana es el siguiente:

Durante miles de millones de años, el sol ha salido después de haberse puesto. El sol se ha puesto esta noche. Hay una probabilidad muy alta de (o 'Yo creo firmemente' o 'es verdad') que el sol va a volver a salir mañana. Existe una probabilidad muy baja de (o 'yo no creo de ningún modo' o 'es falso') que el sol no salga mañana. La inferencia bayesiana usa un estimador numérico del grado de creencia en una hipótesis aún antes de observar la evidencia y calcula un estimador numérico del grado de creencia en la hipótesis después de haber observado la evidencia. La inferencia bayesiana generalmente se basa en grados de creencia, o probabilidades subjetivas, en el proceso de inducción y no necesariamente declara proveer un método objetivo de inducción.

En el año 1763, dos años después de la muerte de Thomas Bayes (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de Teorema de Bayes. En la teoría de la probabilidad el Teorema de Bayes es un resultado enunciado por Thomas Bayes en el que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

El origen del concepto de la obtención de probabilidades posteriores con información limitada se atribuye al respetable Thomas Bayes. La fórmula básica para la probabilidad condicional en circunstancias de dependencia se conoce como Teorema de Bayes

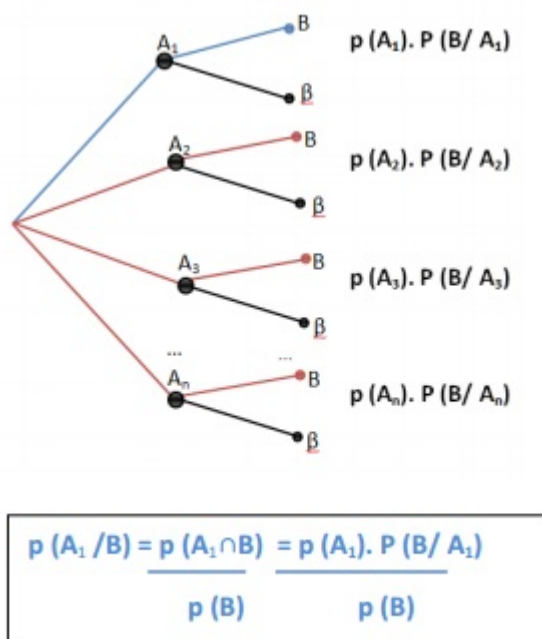
Partiendo del fundamento anterior, a continuación se muestra un ejemplo sencillo y básico del funcionamiento del teorema de Bayes y sus diferentes ecuaciones: Se debe tener presente que se denomina probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A.

$$P(B|A) = P(B \cap A) / P(A), \text{ si } P(A) \neq 0 \quad (22)$$

Del mismo modo se denota para  $p(A|B)$

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ si } P(B) \neq 0 \quad (23)$$

Como se ha planteado anteriormente, el Teorema de Bayes es la concordancia entre probabilidades de que algún suceso ocurra partiendo de un suceso producido



### 9.1. Problemas de Bayes

- Problema 1: En la sala de pediatría de un hospital, el 60 % de los pacientes son niñas. De los niños el 35 % son menores de 24 meses. El 20 % de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar. a. Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses. b. Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña. Solución: Suceso H: seleccionar una niña. Suceso V: seleccionar un niño.

Suceso M: infante menor de 24 meses. a. En este caso, la población es de los infantes. Y la característica en común es que sean menores de 24

meses. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$$P(M) = P(H) * P(M|H) + P(V) * P(M|V) = ,6 * ,20 + ,4 * ,35 = ,26 \text{ o } 26 \% \quad (24)$$

b. Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de bayes, hay que partir de reconocer esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña una infante menor de 24 meses será:

$$P(H|M) = \frac{P(H) * P(M|H)}{P(H) * P(M|H) + P(V) * P(MV)} = \quad (25)$$

$$\frac{,6 * ,2}{,6 * ,2 + ,4 * ,35} = \frac{,12}{,26} = ,46 \text{ o } 46 \% \quad (26)$$

- Problema 2: Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20 % se realizan correcciones faciales, un 35 % implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25 % de los que se realizan correcciones faciales, 15 % implantes mamarios y 40 % otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine: a. Determine la probabilidad de que sea de género masculino b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios. Solución: Se definen los sucesos:

Suceso F: pacientes que se realizan cirugías faciales Suceso M: pacientes

que se realizan implantes mamarios Suceso O: pacientes que se realizan

otras cirugías correctivas Suceso H: pacientes de género masculino a. La

probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes. Dicho valor será:

$$P(H) = P(F) * P(H|F) + P(M) * P(H|M) + P(O) * P(H|O) \quad (27)$$

b. Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de bayes, luego, el valor de la probabilidad será:

$$P(M|H) = \frac{P(M) * P(H|M)}{P(F) * P(H|F) + P(M) * P(H|M) + P(O) * P(H|O)} \quad (28)$$

$$P(M|H) = \frac{0,35 * 0,15}{0,2 * 0,25 + 0,35 * 0,15 + 0,45 * 0,40} = \frac{0,0525}{0,2825} = 0,19019 \% \quad (29)$$

- Problema 3: Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25 % al primero, 35 % el segundo en y 40 % el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1 %, 2 % y 3 % respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato. solución: Se

definen los sucesos: Suceso P: seleccionar el primer aparato Suceso S:

seleccionar el segundo aparato Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error Se puede observar que la

pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P|E) = \frac{P(P) * P(E|P)}{P(P) * P(E|P) + P(S) * P(E|S) + P(T) * P(E|T)} \quad (30)$$

$$P(P|E) = \frac{0,25 * 0,01}{0,25 * 0,01 + 0,35 * 0,02 + 0,40 * 0,03} = \frac{0,0025}{0,0215} = 0,12012 \quad (31)$$

## 10. EigenValores y EigenVectores

En álgebra lineal, los vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar  $\lambda$  recibe el nombre valor propio, autovector, valor característico o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio, eigenespacio o subespacio fundamental asociado al valor propio  $\lambda$  es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

Fórmula del determinante:  $(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -12 & 2 & -12 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -12 & 2 & -12 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad (32)$$

$$(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -12 & 2 - \lambda & -12 & 2 & 0 \\ 3 - \lambda & 1 & -12 & 2 - \lambda & -12 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$(A - \lambda I) = \{ (3 - \lambda)(2 - \lambda)(-\lambda) + (1 \cdot -1 \cdot 2) + (-1 \cdot 2 \cdot 2) \} - \{ (2 \cdot 2 - \lambda \cdot -1) + (2 \cdot -1 \cdot 3 - \lambda) + (-\lambda \cdot 2) \}$$

$$(A - \lambda I) = (-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda - 6) - (-10 + 2\lambda)$$

$$(A - \lambda I) = (-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4)$$

$$(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

**Eigenvalores:**  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$

$$(\lambda = 1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - 1 & 1 & -12 & 2 - 1 & -12 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -12 & 1 & -12 & 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -12 & 1 & -12 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (34)$$

Segundo renglon por  $(-1R1) + (R2)$  Tercer renglon por  $(-1R1) + (R3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (35)$$

Ahora se tiene:

$$V_1 = \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 \quad V_2 = S \quad V_3 = Z$$

**Eigenvector con  $\lambda = 1$**

$$\begin{vmatrix} v_1 v_2 v_3 \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} \frac{1}{2} 0 1 \end{vmatrix} + S \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} 1 0 \end{vmatrix} \quad (36)$$

$$(\lambda = 2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-2 & 1 & -12 & 2-2 & -12 & 2 & 0-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -12 & 0 & -12 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (37)$$

Segundo renglon por  $(-2R1) + (R2)$  Tercer renglon por  $(2R1) + (R3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -10 & -2 & 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -10 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Ahora se tiene:

$$V_1 = V_3 - V_2 = \frac{1}{2}V_3 \quad V_2 = \frac{1}{2}V_3 \quad V_3 = A$$

**Eigenvector con  $\lambda = 2$**

$$\begin{vmatrix} v_1 v_2 v_3 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 1 \frac{1}{2} 1 \end{vmatrix} \quad (39)$$

## 11. Arg Max y Arg Min

Para una función con valor real  $f$  con dominio  $S$ ,  $\text{argmin } x \in S : f(x)$  es el conjunto de los elementos en  $S$  que logra el mínimo global en  $S$ ,

$$\text{argmin } f(x) = x \in S : f(x) = \min_{x,y \in S} f(y)$$

$\text{argmax } x \in S : f(x)$  es el conjunto de los elementos en  $S$  que logra el máximo global en  $S$ ,

$$\text{argmax } f(x) = x \in S : f(x) = \max_{x,y \in S} f(y) \quad \text{Por ejemplo:}$$

$\max (4x^2 - x^4) := 4$  porque la función alcanza el mismo valor en cada elemento de  $\text{argmax}$ . De manera equivalente, si  $M$  es el máximo de  $f$ , entonces el  $\text{argmax}$  es el nivel establecido del máximo. Si el máximo se alcanza en un

sólo punto, entonces este punto se refiere a menudo como  $\text{argmax}$ , es decir, se define el  $\text{argmax}$  como un punto, no un conjunto de puntos por ejemplo:  $\text{argmax } (x(10 - x)) = 5$  ya que el valor máximo de  $x(10 - x)$  es 25, que

produce para  $x = 5$ . Pero si alcanza el máximo en muchos puntos,  $\text{argmax}$

es un conjunto de puntos por ejemplo:  $\text{argmax } \cos(x) = 0, 2\pi, 4\pi \quad x \in [0, 4\pi]$

puesto que el valor máximo de  $\cos(x)$  es 1 que se produce en este intervalo

para  $x = \{0, 2\pi, 4\pi\}$  en toda la línea real el  $\text{argmax}$  es:  $\{0, 2\pi, -2\pi, 4\pi\}$

### 11.1. Optimización Matemática

En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función. La generalización de la teoría de la optimización y técnicas para otras formulaciones comprende un área grande de las matemáticas aplicadas. De forma general, la optimización incluye el descubrimiento de los mejores valores de alguna función objetivo dado un dominio definido, incluyendo una variedad de diferentes tipos de funciones objetivo y diferentes tipos de dominios.

Un problema de optimización puede ser representado de la siguiente forma: Dada una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  Buscar un elemento  $x_0$  en  $A$  tal que  $f(x_0)$

$\leq f(x)$  para todo  $x$  en  $A$  (minimización) o tal que  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x$  en  $A$  (maximización)

Tal formulación es llamada un problema de optimización o un problema de programación matemática. Muchos problemas teóricos y del mundo real pueden ser modelados mediante este esquema general. Problemas formulados usando esta técnica en los campos de física y visión por computadora se refieren a la técnica como minimización de la energía, hablando del valor de la función  $f$  representando la energía del sistema que está siendo modelado.

### 11.2. Prior y Posterior

Dejemos que  $X$  sea la variable aleatoria cuyo valor tratamos de estimar. Dejemos que  $Y$  sea la variable aleatoria observada. Entonces hemos observado que  $Y=y$  y nos gustaría estimar  $X$ . Asumiendo que ambos  $X$  y  $Y$  son discretas, se puede escribir:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Y = y)}. \quad (40)$$

Usando esta notación para Funcion de Probabilidad PMF, se puede reescribir:

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{Y|X}(y|x)P_X(x)}{P_Y(y)}. \quad (41)$$

La ecuación anterior, como hemos visto antes, es sólo una forma de escribir la regla de Bayes. Si  $X$  o  $Y$  son variables aleatorias continuas, podemos reemplazar el PMF correspondiente con PDF en la fórmula anterior. Por

ejemplo, si  $X$  es una variable aleatoria continua, mientras que  $Y$  es discreta podemos escribir:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{P_Y(y)} \quad (42)$$

Para encontrar el denominador ( $P_Y(y)$  o  $f_Y(y)$ ), a menudo usamos la ley de probabilidad total. Ejemplo:

Dejemos que  $X \sim \text{Uniformemente}(0,1)$ . Suponiendo que:  $Y|X = x \sim \text{Geometric}(x)$ . Encontrar la posterior densidad de  $X$  dado  $Y=2$ ,  $f_{X|Y}(x|2)$ .

Usando la regla de Bayes se tiene:

$$f_{X|Y}(x|2) = \frac{P_{Y|X}(2|x)f_X(x)}{P_Y(2)}. \quad (43)$$

Se sabe que  $Y|X = x \sim \text{Geometric}(x)$ ., así que:

$$P_{Y|X}(y|x) = x(1-x)^{y-1}, \quad \text{for } y = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Por tanto:

$$P_{Y|X}(2|x) = x(1-x). \quad (45)$$

Para encontrar  $P_Y(2)$ , podemos usar la ley de probabilidad:

$$P_Y(2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{Y|X}(2|x)f_X(x) \, dx = \int_0^1 x(1-x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{6} \quad (46)$$

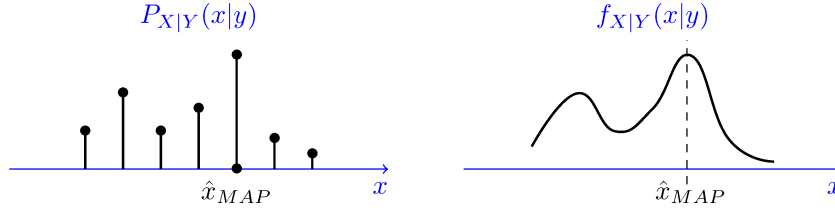
Entonces obtenemos:

$$f_{X|Y}(x|2) = \frac{x(1-x) \cdot 1}{\frac{1}{6}} = 6x(1-x), \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1. \quad (47)$$

### 11.3. Máximo A Posteriori

La distribución posterior,  $f_{X|Y}(x|y)$  (o  $P_{X|Y}(x|y)$ ), contiene todo el conocimiento sobre la cantidad desconocida  $X$ . Por lo tanto, podemos usar la distribución posterior para hallar estimaciones de  $X$ . Una forma de obtener una estimación puntual es elegir el valor de  $x$  que maximice el PDF posterior (o PMF). Esto se denomina estimación máxima a posteriori (MAP).





La estimación máxima a posteriori (MAP) de  $X$  dada  $Y = y$  es el valor de  $x$  que maximiza el PDF o PMF posterior. La estimación MAP de  $X$  es usualmente mostrada por  $\hat{x}_{MAP}$

Estimación Máxima A Posteriori (MAP)

La estimación MAP de la variable aleatoria  $X$ , dado que hemos observado  $Y = y$ , viene dada por el valor de  $x$  que maximiza

$f_{X|Y}(x|y)$  si  $X$  es una variable aleatoria continua,  $P_{X|Y}(x|y)$  si  $X$  es una variable aleatoria discreta.

El MAP estimado es mostrado como  $\hat{x}_{MAP}$

Para encontrar el MAP estimado, necesitamos encontrar el valor de  $x$  que maximiza

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}. \quad (48)$$

Hay que notar que  $f_Y(y)$  no depende del valor de  $x$ , entonces se puede equivalentemente encontrar el valor de  $x$  que maximice.

$$f_{Y|X}(y|x)f_X(x). \quad (49)$$

Esto puede simplificar la búsqueda de la estimación MAP significativamente, porque encontrar  $f_Y(y)$  podría ser complicado. Más específicamente, encontrar  $f_Y(y)$  usualmente se hace usando la ley de probabilidad total, la cual implica integración o suma

Para encontrar el MAP estimado de  $X$  dado que hemos observado  $Y = y$ , encontramos el valor de  $x$  :

$$f_{Y|X}(y|x)f_X(x). \quad (50)$$

Si  $X$  o  $Y$  es discreta, reemplazamos su PDF en la expresión anterior por el PMF correspondiente.

Ejemplo: Dejemos que  $X$  sea una variable aleatoria continua con el siguiente

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (51)$$

también supongamos que:

$$Y|X = x \sim \text{Geometric}(x). \quad (52)$$

Encontrar el MAP estimado de X dado Y=3

Se sabe que  $Y|X = x \sim \text{Geometric}(x)$

$$P_{Y|X}(y|x) = x(1-x)^{y-1}, \quad \text{for } y = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Entonces:

$$P_{Y|X}(3|x) = x(1-x)^2. \quad (54)$$

Necesitamos encontrar el valor de  $x \in [0, 1]$  que maximiza:

$$P_{Y|X}(y|x)f_X(x) = x(1-x)^2 \cdot 2x = 2x^2(1-x)^2. \quad (55)$$

Se puede contrar el valor maximizado por diferenciación, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left[ x^2(1-x)^2 \right] = 2x(1-x)^2 - 2(1-x)x^2 = 0 \quad (56)$$

Resolviendo para x, se obtiene la estimación de MAP como

$$\hat{x}_{MAP} = \frac{1}{2}. \quad (57)$$

## 12. Tareas a fin

### 12.1. Telómeros

Los telómeros son estructuras cromatínicas especializadas que se encuentran localizadas en los extremos de los cromosomas eucariontes. Tanto el ADN como las proteínas que los constituyen presentan características singulares que los diferencian del resto de los cromosomas. Parecen estar implicados en numerosas funciones celulares, especialmente las relacionadas con el control de la duración de la vida de diferentes estirpes celulares. Estas estructuras se replican durante el ciclo celular gracias a la acción de enzimas denominadas telomerasas que están formadas por proteínas y ARN y presentan un mecanismo peculiar. Recientemente se ha estudiado el comportamiento de las telomerasas en las células cancerosas y sus posibles aplicaciones diagnósticas y terapéuticas.

[0enumiv]

Cada célula en el cuerpo tiene propiamente un reloj biológico, este reloj toma la forma de un casquillo en los extremos de cada cromosoma, llamados telómeros; el problema de los Telómeros, es cuando una célula se divide en dos células hijas, tiene que copiar su ADN, pero la maquinaria de replicación de ADN no puede llegar a los extremos de los cromosomas, así que de 25 a 200 cartas en las puntas son perdidas cada vez. Tener telómeros en los extremos de los cromosomas significa que no importa, los genes se cortan y los telómeros también previenen cromosomas se peguen entre sí. Si los telómeros y la telomerasa no hacen su trabajo propiamente, se pueden desarrollar enfermedades. por ejemplo Jan Karlseder del instituto de La Jolla en California ha encontrado que la gente con síndrome de Werner algunas veces han perdido telómeros o parte de un cromosoma. Cuando Karlseder les dio extra telómeros a las células a las personas con Werner, ellos sufren menos daños en ADN que las células sin extra telómeros.

Lo que ha sucedido con la oveja Dolly es que ella se clonó a partir de una célula de una oveja adulta, cuyas células ya se habían dividido un cierto número de veces, y por lo tanto sus telómeros se habían acortado en igual proporción. Al clonarse las células adultas de la madre retrocedió su reloj biológico volviendo a ser pluripotencial, pero en el proceso sus telómeros persistieron cortos. Lo probable es entonces que Dolly viva el tiempo que le queda de telómeros para que las células continúen dividiéndose. Pero como ésta lo recibió más corto, posiblemente sus células continúen con el restante número de divisiones, que son las mismas divisiones que le quedaron a las células de su madre.

Envejecemos completamente y en diferentes maneras dice "Derrick Ros-

si” de la universidad de Harvard. Nosotros estamos programados para morir.

En los últimos años, los investigadores han demostrado que los telómeros son blancos del daño en el ADN incluido por el estrés.

[0enumiv]

n (Nivel)	Número Triangular(Base)	Número Tetraédrico
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56
7	28	84
8	36	120
9	45	165
10	55	220

## 12.2. Cuadro Mágico de Benjamin Franklin

Benjamin Franklin, uno de los grandes próceres del proceso de Independencia de los Estados Unidos y uno de los autores de la Constitución Norteamericana, recordado político e inventor norteamericano del pararrayos y de un tipo de lentes bifocales, se divertía con un pasatiempo matemático similar al moderno Sudoku, retando a sus amigos a que descubrieran cómo lo había elaborado, algo que era tan difícil, que su creador escribió con orgullo a su amigo John Winthrop, profesor de matemáticas de la Universidad de Harvard, ¿que había dejado perplejas a las mentes más agudas del Imperio Británico?. El cuadrado en cuestión es:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Aunque el propio autor reconoce que empezó a elaborar "cuadrados mágicos" inspirado por un libro francés, con el fin de superar a los matemáticos galos en este arte, pero después en su diario se lamentaba de haber perdido el tiempo en una ocupación "que no sería de utilidad ni para sí mismo ni para los demás." El cuadrado mágico en cuestión, cumple con la regla de las sumas de las filas y de las columnas, siendo la constante del cuadrado 260; pero no cumple con la regla de la suma de las diagonales principales.

Pero tiene otras propiedades, si se divide el cuadrado en cuatro partes iguales, cada una de las filas y columnas de cada subcuadrado suman 130.

Los cuatro números de una diagonal que sube más los cuatro números de la diagonal respectiva que baja suman 260

La suma de los cuatro números de cualquier cuadrado de  $2 \times 2$  es 130.

Los cuatro números de las esquinas más los cuatro números del centro suman 260

[0enumiv]

### 12.3. Criterio de Divisibilidad entre 11

Se dice que un número es divisible entre 11, cuando la diferencia de la suma de las cifras de posición par y la suma de las cifras de posición impar es igual a cero u once:

$$4,158 = 4+5 - 1+8 = 0$$

Entonces 4,158 es divisible entre 11 Por tanto  $\frac{4,158}{11} = 378$

$$28,765 = 2+7+5 - 8+6 = 14-14 = 0$$

Entonces 28,765 es divisible entre 11 Por tanto  $\frac{28,765}{11} = 2,615$

$$979 = 9+9 - 7 = 11$$

Entonces 979 es divisible entre 11 Por tanto  $\frac{979}{11} = 89$

$$63,679 = 6+6+9 - 3+7 = 11$$

Entonces 63,679 es divisible entre 11 Por tanto  $\frac{63,679}{11} = 5,789$

$$5,147 = 5+4 - 1+7 = 1$$

Entonces 5147 no es divisible entre 11 Por tanto  $\frac{5,147}{11} = 467,909091$   
[0enumiv]

## 12.4. Primera ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (58)$$

Demostración

Proponemos  $x \in A \cup (B \cap C)$ . si  $x \in A \cup (B \cap C)$  entonces  $x$  es incluso en  $A$  ó en  $(B \cap C)$ .  $x \in A$  ó  $x \in (B \cap C)$   $x \in A$  ó  $\{x \in B \text{ y } x \in C\}$   $\{x \in A$

$$\text{ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \quad x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C)$$

$$x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cap C) \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Por lo tanto

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (59)$$

Proponemos  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . si  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  entonces  $x$  esta en  $(A \text{ ó } B)$  y  $x$  esta en  $(A \text{ ó } C)$ .  $x \in (A \text{ ó } B)$  y  $x \in (A \text{ ó } C)$   $\{x \in A$

$$\begin{aligned} \text{ó } x \in B\} \text{ y } \{x \in A \text{ ó } x \in C\} \text{ } x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \text{ } x \in A \text{ ó } \{x \in (B \text{ y } \\ C)\} \text{ } x \in A \cup \{x \in (B \cap C)\} \text{ } x \in A \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad (60)$$

De la ecuación 3 y 4:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (61)$$

## 12.5. Segunda ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (62)$$

Demostración

Proponemos  $x \in A \cap (B \cup C)$ . si  $x \in A \cap (B \cup C)$  entonces  $x \in A$  y  $x \in (B \text{ ó } C)$ .  $x \in A$  y  $x \in (B \text{ ó } C)$   $x \in A$  y  $\{x \in B \text{ y } x \in C\}$   $\{x \in A \text{ y } x \in B\}$

$$\text{ó } \{x \in A \text{ y } x \in C\} \text{ } x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \text{ } x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ } x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (63)$$

Proponemos  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . si  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  entonces  $x \in (A \cap B)$  ó  $x \in (A \cap C)$ .  $x \in (A \text{ y } B)$  ó  $x \in (A \text{ y } C)$   $\{x \in A \text{ y } x \in B\}$

ó  $\{x \in A \text{ y } x \in C\}$   $x \in A \text{ y } \{x \in B \text{ ó } x \in C\}$   $x \in A \text{ y } \{x \in (B \text{ ó } C)\}$

$$x \in A \cap \{x \in (B \cup C)\} \quad x \in A \cup (B \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (64)$$

De la ecuación 7 y 8:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (65)$$

## 12.6. Principio De La Dualidad

Traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, a menudo por medio de una operación de involución, esto es: Si la dualidad de  $A$  es  $B$ , entonces de forma análoga, dualidad de  $B$  es  $A$ , cumpliéndose una relación uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de  $A$  es a veces  $A$  (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es ampliamente usado en diversas representaciones matemáticas, tales como lógica, lógica booleana, teoría de conjuntos.

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

- Unión por Intersección  $\cup \rightarrow \cap$
- Intersección por Unión  $\cap \rightarrow \cup$
- Conjunto universo por vacío  $U \rightarrow \emptyset$



- Conjunto vacío por universo  $\emptyset \rightarrow U$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

Aplicando la dualidad:

$$(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Ahora bien, como se enuncia anteriormente, la dualidad es un principio que se puede aplicar en una gran variedad de áreas del conocimiento, a continuación se muestra la dualidad en lógica booleana. Se realiza lo homólogo a la teoría de conjuntos, se reemplazan las operaciones de suma por multiplicación, los 1 por 0 y viceversa.

Sea:  $x(y + 0)$  y  $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$  Aplicando el principio de la dualidad de las ecuaciones correspondientes.

$$\begin{aligned} x + (y \cdot 1) \\ (\bar{x} + 1) \cdot (\bar{y} \cdot z) \end{aligned}$$

## 12.7. Demostración de Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  en un universal  $\mathcal{U}$ , se verifica:

$$1. (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (66)$$

$$2. (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (67)$$

Demostración de 69

$$1. (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (68)$$

En efecto, sea  $x$  un elemento arbitrario del conjunto universal  $\mathcal{U}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\leftrightarrow x \notin (A \cup B) \text{ Definición de complementario} \\ &\leftrightarrow \neg[x \in (A \cup B)] \text{ Negación} \\ &\leftrightarrow \neg[(x \in A) \vee (x \in B)] \text{ Definición de unión} \\ &\leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \text{ De Morgan para ?} \\ &\leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \text{ Negación} \\ &\leftrightarrow (x \in A') \wedge (x \in B') \text{ Definición de complementario} \\ &\leftrightarrow x \in (A' \cap B') \text{ Definición de intersección} \end{aligned}$$

y al ser  $x$  un elemento arbitrario de  $\mathcal{V}$ , se sigue que

$$\forall x[x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$$

luego tenemos que:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (69)$$

y con esto se prueba análogamente la ley Morgan.

## 12.8. Número de Erdős

Este es un número que pretende cuantificar el grado de separación entre las personas que han publicado un artículo de investigación, en este caso particular el matemático Paul Erdős.

¿Cómo se calcula? Esto es muy sencillo, se considera que Erdős tiene un número 0. Si se ha colaborado con él, directamente en la publicación de un artículo se tiene número de Erdős 1. Si se ha colaborado con alguien que colaboró directamente con Erdős se tiene número 2 y así sucesivamente.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuán separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama. Se asegura que Paul Erdős es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producción de Erdős es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos están aún por publicarse después su muerte. Erdős utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, ¿el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas?. Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: ¿Habría mucho tiempo para descansar en la tumba?. Erdős viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas. Erdős seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta años. Erdős, sin duda, tenía el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todas las especialidades.

## 12.9. Aproximación de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

De acuerdo a la función Gamma de Euler podemos describir el factorial de cualquier número como:  $\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$

Donde  $n \geq 0$ , cuando  $n=10$  e integrar obtenemos:  $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$

Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando  $n=0$ :  $f(x) = \frac{10^{10}}{e} \cdot e^{-\frac{x^2}{20}}$

Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemos que definimos las variables de la integral como:

$u = x + n$  y  $du = dx$  y sustituyendo

$I = \int_{u=-n}^{\infty} (u+n)^n \cdot e^{u+n} du$  factorizando  $(u+n)^n$  la integral es:

$I = \int_{u=-n}^{\infty} (n)^n \cdot \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \cdot e^{-u} \cdot e^n du$ , tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:

$$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \cdot e^{-u} \cdot e^n du \quad (1)$$

Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expandir el logaritmo:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \quad (2) \implies \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2}$$

Finalmente sustituyendo 2 tenemos:  $n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \approx u - \frac{u^2}{2n}$

Sustituyendo en 1 tenemos:  $I_2 = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \int_{u=-n}^n e^{\frac{u^2}{2n}} du$ , notemos que regresamos a la integral Gaussiana:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n}$  Por lo tanto decimos que

$n$  tiende al infinito y el factorial de  $n$  tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

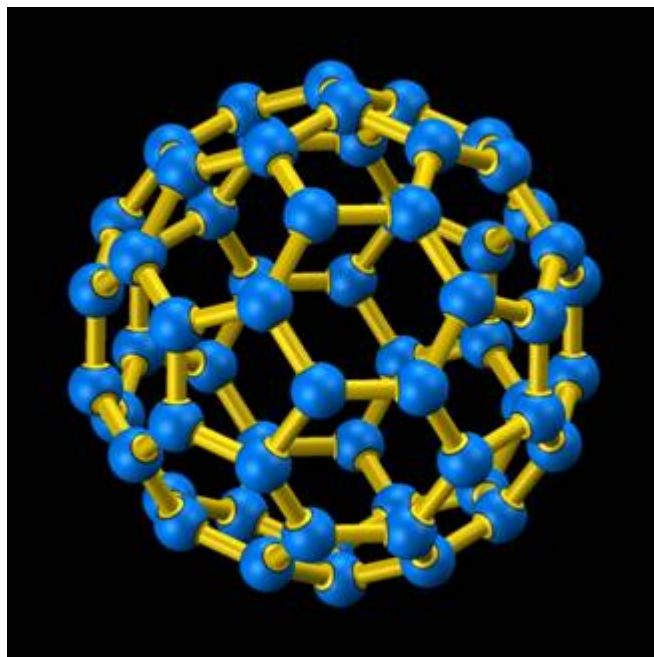
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

### 12.10. Fullerenos

En los diamantes los átomos de carbón están en un arreglo muy especial, que sólo se consigue bajo presiones muy altas. En el grafito los átomos de carbono forman capas en las que cada átomo está rodeado por otros tres átomos idénticos, formando una estructura hexagonal. En el diamante cada átomo de carbono está enlazado a cuatro vecinos iguales dispuestos en forma de tetraedro. La estructura de cada uno de éstos materiales, es decir el orden interno de sus átomos, es lo que determina sus propiedades. Los enlaces en tres dimensiones de los átomos de carbono en el diamante dan lugar a una estructura más robusta y por tanto a cristales más duros que en el caso del grafito. El enlace está limitado a las dos dimensiones de las paredes, las cuales pueden deslizarse fácilmente entre sí, lo cual da lugar a un material blando que se usa como lubricante sólido. Se encontró una tercera forma del carbono  $C_{60}$  la cual se conoce como fullereno, los fullerenos se han encontrado en el espacio interestelar y en formaciones geológicas en la Tierra. Los investigadores estadounidenses, describieron que el meteorito que cayó alrededor de la localidad de Allende, en México, 8 de febrero de 1969 contiene las moléculas más sencillas (formadas por sesenta átomos) abundantes en fullerenos y que tienen desde cien hasta cuatrocientos átomos de carbono. Los fullerenos presentes en los meteoritos fueron formados a partir de estrellas, que los expulsaron al espacio al extinguirse.

El fullereno es una molécula que consta de 60 átomos de carbono de los cuales forman 12 pentágonos y 20 hexágonos, la forma es la misma que la de una pelota de fútbol. La propiedad más importante de la molécula  $C_{60}$  es su alta simetría. En ella hay 120 operaciones de simetría, tales como rotaciones de eje o reflexiones en el plano. Ello hace que la molécula  $C_{60}$  sea la molécula más simétrica.

Los Fullerenos pueden tener aplicaciones como lubricantes (las esferas hacen más fácil el deslizamiento entre superficies), para ello los fullerenos deben ser modificados químicamente para que contengan otros átomos fuera de la esfera. También pueden tener aplicaciones ópticas, ya que cambian sus propiedades bajo la acción de la luz ultravioleta. Esta propiedad puede ser utilizada en fotolitografía. También tienen propiedades de superconducción eléctrica a temperaturas de 10 a 40K.



[0enumiv] El plomo es un elemento químico de la tabla periódica, cuyo símbolo es Pb y su número atómico es 82 según la tabla actual, ya que no formaba parte en la tabla periódica de Mendeléyev. Símbolo: Pb Masa atómica: 207, 2u  $\pm$  0, 1 u Configuración electrónica:  $[Xe]4f^{14}5d^{10}6s^26p^2$  Electronegatividad: 2, 33 Número atómico: 82 Punto de fusión: 327, 5 ° C Electrones por nivel: 2, 8, 18, 32, 18, 4

### 12.11. Poemas Palindromicos

Yo soy esa piel arañada, ese dolor. épocas, olor a polillas, a rama seca, holograma amargo. ¿Lo haces? ¿Amarás? Allí lo paró, lo sacó? Pero lo desea. ¿Dañará? Leí? pasé? Yo soy?

Otra herida y otra pena soy. Otro César: Rey ya seco, nadie? Soporto otra: parodiar tu trama no caló su trago. Himnos solos son mi hogar. Tú sola, con amar tu traidor, apartó otro. Poseída no cesa y yerra? Se cortó. Yo sané? ¡Parto ya! diré hartó.

### 12.12. Tipos de paradojas

Dependiendo de la veracidad o de las condiciones que las conforman, las paradojas pueden ser verídicas, aquellas que solo parece que lo son aunque en realidad lo que sostienen puede ser verdadero o falso. Dentro de estas,

la más representativa resulta ser la del cumpleaños que propone: ¿qué probabilidad hay que dos personas que se encuentran en una reunión cumplan años el mismo día? Luego están aquellas que se las denominan como verdaderas paradojas, porque lisa y llanamente se contradicen, un ejemplo claro y categórico resulta ser la paradoja de la suerte, que sostiene que es de mala suerte ser supersticioso.

Y por último están aquellas que dependerán en mucho de la interpretación que se les de para terminar siendo o no paradojas.

Es importante establecer que existen muchos tipos de paradojas. Así, en concreto, se determinan dos grandes grupos para poder llevar a cabo la clasificación de las mismas. De esta manera, por un lado están las paradojas en función de su veracidad y por otro las que se ordenan en base al área de conocimiento en el que se utilizan o desarrollan.

- Según su veracidad y las condiciones que las forman.

Dependiendo de la veracidad o de las condiciones que las conforman, las paradojas pueden ser verídicas, aquellas que solo parece que lo son aunque en realidad lo que sostienen puede ser verdadero o falso.

Algunas paradojas sólo parecen serlo, ya que lo que afirman es realmente cierto o falso, otras se contradicen a sí mismas, por lo que se consideran verdaderas paradojas, mientras que otras dependen de su interpretación para ser o no paradójica.

#### 1. Paradojas verídicas:

- Paradoja del cumpleaños: ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Paradoja de Galileo: A pesar de que no todos los números son cuadrados perfectos, no hay más números que cuadrados perfectos.
- Paradoja del hotel infinito: Un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno.
- Paradoja de la banda esférica: No es una paradoja en sentido estricto, pero choca con nuestro sentido común debido a que tiene una solución que parece imposible.

2. Antinomias Son paradojas que alcanzan un resultado que se auto-contradice, aplicando correctamente modos aceptados de razonamiento. Muestran fallos en un modo de razón, axioma o definición previamente aceptados. Por ejemplo:

- la Paradoja de Grelling-Nelson señala problemas genuinos en nuestro modo de entender las ideas de verdad y descripción. Muchos de ellos son casos específicos, o adaptaciones, de la Paradoja de Russell.
- Paradoja de Russell: ¿Existe un conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos?
- Paradoja de Curry: "Si no me equivoco, el mundo se acabará en diez días".
- Paradoja del mentiroso: "Esta oración es falsa".
- Paradoja de Grelling-Nelson: ¿Es la palabra "heterológico", que significa "que no describe a sí mismo", heterológica?
- Paradoja de Berry: "El menor entero positivo que no se puede definir con menos de quince palabras". Paradoja de la suerte:
- Es de mala suerte ser supersticioso.
- Paradoja de los números interesantes: Todo número entero presenta alguna propiedad interesante específica, y por tanto el conjunto de los números no-interesantes es vacío.

3. Antinomias de definición Estas paradojas se basan en definiciones

ambiguas, sin las cuales no alcanzan una contradicción. Este tipo de paradojas constituye un recurso literario, en cuyo empleo se ha destacado el escritor inglés G. K. Chesterton, a quién se llamó el "príncipe de las paradojas". Sirviéndose de los múltiples sentidos de las palabras, buscaba marcar contrastes que llamaran la atención sobre alguna cuestión comúnmente poco considerada. Estas paradojas, como en su libro "Las paradojas de Mr. Pond" (1936), se resuelven en el transcurso de los relatos al clarificar un sentido o añadir alguna información clave.

- Paradoja sorites: ¿En qué momento un montón deja de serlo cuando se quitan granos de arena?
- Paradoja de Teseo: Cuando se han reemplazado todas las partes de un barco, ¿sigue siendo el mismo barco?
- Paradoja de Boixnet: Pienso, luego existo, mas cuando no pienso, ¿no existo? Ejemplos de Paradoja en Chesterton: .<sup>Er</sup>a

un extranjero muy deseable, y a pesar de eso, no lo deportaron”. Una vez conocí a dos hombres que estaban tan completamente de acuerdo que, lógicamente, uno mató al otro”.

4. Paradojas condicionales Sólo son paradójicas si se hacen ciertas suposiciones. Algunas de ellas muestran que esas suposiciones son falsas o incompletas.

- El huevo o la gallina: Esta trae a colación el antiguo dilema sobre quien fue primero, ¿el huevo o la gallina?
- Paradoja de Newcomb: Cómo jugar contra un oponente omnisciente.
- Paradoja de San Petersburgo: La gente solo arriesgará una pequeña cantidad para obtener una recompensa de valor infinito.
- Paradoja del viaje en el tiempo: ¿Qué pasaría si viajas en el tiempo y matas a tu abuelo antes de que conozca a tu abuela?
- Paradoja de la serpiente: Si una serpiente se empieza a comer su cola, acaba comiéndose absolutamente todo su cuerpo, ¿dónde estaría la serpiente, si está dentro de su estómago que, a su vez, está dentro de ella?
- Paradoja de Pinocho : ¿Qué pasaría si Pinocho dijera: .Ahora mi nariz crecerá. Crecería porque estaría mintiendo, a su vez al crecer su nariz se expresa la validez de la frase propiamente dicha anteriormente como resultado de esto estaría diciendo la verdad ya que pasó lo que predijo, entonces al ser verdad lo que dijo no tendría que haberle crecido la nariz.

- Según el área del conocimiento al que pertenecen.

Todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, que antiguamente se consideraba parte de la filosofía, pero que ahora se ha formalizado y se ha incluido como una parte importante de la matemática. A pesar de ello, muchas paradojas han ayudado a entender y a avanzar en algunas áreas concretas del conocimiento.

1. Paradojas en Matemática /Lógica

- Paradoja de Banach-Tarski La paradoja de Banach-Tarski es un teorema en geometría teórica de conjuntos



- Paradoja de Frege

## 2. Paradojas sobre la probabilidad y la estadística

- Paradoja del cumpleaños: ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Paradoja de Simpson: Al agregar datos, podemos encontrar relaciones engañosas.
- Paradoja de Arrow: No puedes tener todas las ventajas de un sistema de votación ideal al mismo tiempo.
- Problema de Monty Hall: Y tras la puerta número dos... (¿Por qué la probabilidad no es intuitiva?)
- Paradoja de San Petersburgo: Cómo no merece la pena arriesgar mucho para ganar un premio infinito.
- Fenómeno Will Rogers: Sobre el concepto matemático de la media, trata sobre la media o mediana de dos conjuntos cuando uno de sus valores es intercambiado entre ellos, dando lugar a un resultado aparentemente paradójico.
- Paradoja de los dos sobres: Uno de los sobres contiene el doble de dinero que el otro. Sin importar cuál de los dos sobres esté en mi poder, las probabilidades siempre indican que es favorable cambiarlo por el sobre restante.

## 3. Paradojas sobre lógica

A pesar de que todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, hay algunas que afectan directamente a su bases y postulados tradicionales.

Las paradojas más importantes relacionadas directamente con el área de la lógica son las antinomias, como:

- la paradoja de Russell, que muestran la inconsistencia de las matemáticas tradicionales. A pesar de ello, existen paradojas que no se autocontradicen y que han ayudado a avanzar en conceptos como demostración y verdad.
- Paradoja del actual rey de Francia: ¿Es cierta una afirmación sobre algo que no existe?
- Paradoja del cuervo (o cuervos de Hempel): Una manzana roja incrementa la probabilidad de que todos los cuervos sean negros.

- Regresión infinita del presupuesto: "Todo nombre que designa un objeto puede convertirse a su vez en objeto de un nuevo nombre que designe su sentido".

#### 4. Paradojas sobre el infinito

El concepto matemático de infinito, al ser contrario a la intuición, ha generado muchas paradojas desde que fue formulado. Es importante resaltar que estos casos muestran una paradoja pero no en el sentido de una contradicción lógica, sino en el sentido de que muestran un resultado contrario a la intuición, pero demostrablemente cierto.

- Paradoja de Galileo: A pesar de que no todos los números son números cuadrados, no hay más números que números cuadrados.
- Paradoja del hotel infinito: Un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno. Conjunto de Cantor: Cómo quitar elementos de un conjunto y que siga teniendo el mismo tamaño. Cuerno de Gabriel (o Trompeta de Torricelli): ¿Cómo puede ser necesaria una superficie infinita para contener un volumen finito?
- Paradojas de Zenón. Mediante el concepto de división al infinito, Zenón trató de demostrar que el movimiento no puede existir, confirmando así la filosofía de su maestro, Parménides. Las más conocidas son la *dicotomía* y la paradoja de *Aquiles y la tortuga*.

#### 5. Paradojas geométricas

- Ilusiones ópticas
- La serie de Fibonacci
- Disposición de hojas en un tallo
- División áurea
- Espiral logarítmica
- ¿Interior o exterior?
- Problema de los puentes de Königsberg
- Botella de Klein
- Banda de Möbius
- Problema de los cuatro colores

#### 6. Paradojas en Física

Richard Feynman en sus *Lectures on Physics*, aclara que en la Física realmente no existen las paradojas, sino que en las paradojas físicas hay siempre una mala interpretación de alguno o ambos razonamientos que componen la paradoja. Esto no es necesariamente válido en otras disciplinas donde las paradojas reales pueden existir.

- Paradoja de Bell: Plantea un problema clásico de relatividad especial.
- Paradoja de Olbers: ¿Por qué, si hay infinitas estrellas, el cielo es negro? Olberts calculó que la luminosidad del cielo correspondería a una temperatura del orden de los  $5.500^{\circ}\text{C}$ , que, de hecho, no se observa. Actualmente se sabe que la luminosidad calculada por Olberts no llega a ser tal por el importante corrimiento al rojo de las fuentes de luz más alejadas, hecho que la teoría más aceptada atribuye al alejamiento de las galaxias o expansión del universo. Además se oponen la edad finita del universo, sus cambios notables durante su historia y que la cantidad de galaxias no es infinita. La paradoja proviene de un tiempo en el que no se conocían las galaxias y tendía a creerse que el universo era infinito y estático, por lo que también era plausible que hubiera infinitas estrellas.<sup>6</sup>
- Paradoja de Maxwell o Demonio de Maxwell: Una aparente paradoja clásica de la termodinámica.
- Paradoja de los gemelos: Cuando uno de los hermanos regresa de un viaje a velocidades cercanas a las de la luz descubre que es mucho más joven que su hermano.
- Paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen: Una paradoja sobre la naturaleza de la mecánica cuántica propuesta por estos tres físicos.
- Paradoja de Fermi: Si el Universo estuviera poblado por civilizaciones avanzadas tecnológicamente, ¿dónde están?
- El experimento de Young. Una paradoja cuántica en su versión electrón a electrón. En el experimento de Young se pueden hacer pasar electrones por una doble rendija uno a uno de manera corpuscular, como si fueran partículas, obteniéndose sin embargo una figura de interferencias.
- Paradoja de Schrödinger: La paradoja por excelencia de la mecánica cuántica.

- Paradoja de D'Alembert: Relacionada con la resistencia de los cuerpos ante fluidos viscosos y no viscosos, en Mecánica de Fluidos.

#### 7. Paradojas en Economía

- Paradoja de Abilene: Un grupo de personas frecuentemente toman decisiones contra sus propios intereses.
- Paradoja del ahorro: Si todo el mundo trata de ahorrar durante una recesión, la demanda agregada caerá y los ahorros totales de la población serán más bajos, esta paradoja es similar a la paradoja de Kalecki.
- Paradoja de Allais: En cierto tipo de apuestas, aun cuando la gente prefiere la certeza a la incertidumbre, si se plantea de manera diferente el problema, preferirán la incertidumbre que antes rechazaban.
- Paradoja de Bertrand: Dos jugadores que alcanzan el mismo equilibrio de Nash se encuentran cada uno sin ningún beneficio.
- Paradoja del pájaro en el arbusto: ¿Por qué las personas evitan el riesgo?
- Paradoja del valor (o paradoja del diamante y el agua): ¿Por qué es más barata el agua que los diamantes, siendo que los humanos necesitan agua, y no diamantes, para sobrevivir?
- Paradoja de Edgeworth: Con restricciones de capacidad, no puede haber ningún equilibrio.
- Paradoja de Ellsberg: En cierto tipo de apuestas, aun cuando sean lógicamente equivalentes las personas apostar por algo que contra algo, es decir, obtienen mayor utilidad apostando a favor.
- Paradoja de Gibson: ¿Por qué están los tipos de interés y los precios positivamente correlacionados?
- Paradoja de Giffen: ¿Puede ser que los pobres coman más pan aunque suba su precio?
- Paradoja de Jevons: Un incremento en la eficiencia conlleva un mayor incremento en la demanda.
- Paradoja de Kalecki de los costes: Un descenso generalizado de los salarios (reducción de costes) y precios fijos lejos en lugar de aumentar los beneficios reducen las ventas por una caída de la demanda agregada.

- Paradoja de Leontief: Algunos países exportan bienes intensivos en trabajo e importan bienes intensivos en capital, en contradicción con la teoría de Heckscher-Ohlin.
- Paradoja de Parrondo: Es posible jugar en dos juegos que ocasionan pérdidas alternativamente para acabar ganando.
- Paradoja de San Petersburgo: Cómo no merece la pena arriesgar mucho para ganar un premio infinito
- Paradoja del votante: Cuantas más personas participen en una elección por votación, menor será el beneficio de ir a votar, al ser cada votante menos decisivo.

#### 8. Las paradojas y la abstracción

Es imprescindible un correcto uso de las capacidades de abstracción de la mente para lograr una adecuada comprensión de las paradojas antes mencionadas. Como tales, su objetivo no es lograr que el individuo aporte ideas imaginativas y fabulosas para su resolución. Dentro del ámbito general de las personas, sin pretensiones científicas o filosóficas, una adecuada interpretación de las paradojas y sus explicaciones contribuye al desarrollo del análisis, el procesamiento de información abstracta y ocasionalmente el aumento del cociente intelectual Paradoja

del valor (o paradoja del diamante y el agua): ¿Por qué es más barata el agua que los diamantes, siendo que los humanos necesitan agua, y no diamantes, para sobrevivir Paradoja del mentiroso: „Esta oración es

falsa”. Paradoja de los gemelos: Cuando uno de los hermanos regresa de

un viaje a velocidades cercanas a las de la luz descubre que es mucho más joven que su hermano Paradoja del ahorro: Si todo el mundo trata

de ahorrar durante una recesión, la demanda agregada caerá y los ahorros totales de la población serán más bajos, esta paradoja es similar a la paradoja de Kalecki. Paradojas de Zenón. Mediante el concepto

de división al infinito, Zenón trató de demostrar que el movimiento no puede existir, confirmando así la filosofía de su maestro, Parménides. Las más conocidas son la y la paradoja de Aquiles y la tortuga.

### 12.13. Modelo Ising

El modelo de Ising es un modelo físico propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. Se trata de un modelo paradigmáti-

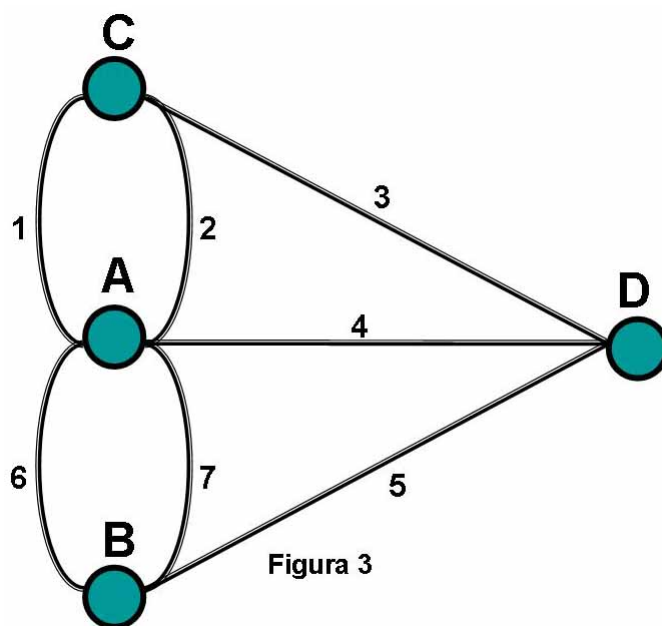
co de la Mecánica Estadística, en parte porque fue uno de los primeros en aparecer, pero sobre todo porque es de los pocos modelos útiles (no sólo pedagógicamente) que tiene solución analítica exacta (esto es, sin cálculos aproximados). Esto lo hace muy útil para ensayar nuevos tipos de aproximaciones y luego comparar con el resultado real.

El modelo de Ising fue inventado por el físico Wilhelm Lenz (1920), que lo concibió como un problema para su alumno Ernst Ising para demostrar que el sistema presentaba una transición de fase. Ising (1925) demostró que en una dimensión no existía tal transición de fase, resolviéndolo en su tesis de 1924,<sup>1</sup> aunque le provocó una profunda desmoralización e hizo que renunciara a la física estadística. El modelo bidimensional de Ising de retícula cuadrada es mucho más difícil, y solamente se le dio una descripción analítica mucho más tarde, por Lars Onsager (1944), que demostró que la física estadística era capaz de describir transiciones de fase (pues como se verá, éste modelo presenta una) lo que terminó de consolidar definitivamente la mecánica estadística. Por lo general, se resuelve mediante un método de transferencia de matriz, aunque existen diferentes enfoques, más relacionados con la teoría cuántica de campos.

## 12.14. Los puentes de Königsberg

El problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado.

Esta ciudad es atravesada por el río Pregel, en ruso Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel. El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio. Solución de Euler



Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.

En particular, como en este diagrama los cuatro puntos poseen un número impar de líneas incidentes (tres de ellos inciden en tres líneas, y el restante incide en cinco), entonces se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas que son los 7 puentes de Königsberg.

### 12.15. Paradoja

Una paradoja (del latín *paradoxa*, plural de *paradoxon*, 'lo contrario a la opinión común?', y este del griego [parádoxa], plural de [parádoxon]) o antilogía es una idea extraña opuesta a lo que se considera verdadero a la opinión general. También se considera paradoja a una proposición en apariencia falsa o que infringe el sentido común, pero no conlleva una contradicción lógica, en contraposición a un sofisma que solo aparenta ser un razonamiento verdadero.

Las paradojas también son ideas opuestas a la opinión y al sentir habitual de las personas. Las aserciones absurdas que se presentan con apariencias de

verdaderas pueden recibir la denominación de paradoja.

La paradoja es estímulo para la reflexión. A menudo los filósofos se sirven de las paradojas para revelar la complejidad de la realidad. La paradoja también permite demostrar las limitaciones de las herramientas de la mente humana. Así, la identificación de paradojas basadas en conceptos que a simple vista parecen simples y razonables ha impulsado importantes avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas.

Una paradoja en la literatura se refiere a la utilización de conceptos o ideas que son contradictorias entre sí, pero que sin embargo, cuando se colocan juntas poseen un valor significativo a varios niveles. La singularidad de las paradojas reside en el hecho de que un nivel más profundo de sentido y significado no se revela a primera vista, pero cuando lo hace, cala, y proporciona una visión asombrosa. A su vez, la Paradoja se incluye en el grupo de las figuras literaria lógicas por evoca a la contradicción de tipo artístico.

Algunos autores consideran a la paradoja como una figura retórica. Helena Beristáin la define así:

*Figura de pensamiento que altera la lógica de la expresión pues aproxima dos ideas opuestas y en apariencia irreconciliables, razón por la cual manifestarían un absurdo si se tomaran al pie de la letra, pero que contienen una profunda y sorprendente coherencia en su sentido figurado.*

La paradoja llama la atención por su forma aparentemente ilógica y absurda, sorprende y alerta por su aspecto de oposición irreductible, aunque la contradicción es aparente porque se resuelve en un sentido más amplio del literalmente enunciado. (1998: 387) No todas las paradojas son iguales. Por ejemplo, la paradoja del cumpleaños puede ser definida mejor como una sorpresa que como una contradicción lógica, mientras que la resolución de la paradoja de Curry es aún un tema importante de debate.

He aquí pues, que la paradoja se define como una contradicción aparente. La paradoja puede ciertamente considerarse una ?figura retórica? porque se puede expresar en palabras y como tal afecta al lenguaje; Sin embargo, creemos que va más allá de la retórica; es un problema que también a la lógica, puesto que su esencia reside en la aparente falta de ella. Al afectar a la lógica se acerca a la filosofía. Puede decirse que su verdadera razón de ser es filosófica.

En filosofía moral una paradoja juega un rol particularmente importante en debates sobre ética. Por ejemplo, una admonición ética a .amar a tu ve-



cino”no solamente se encuentra en contraste, sino también en contradicción, con un vecino armado que intenta asesinarte: de ser exitoso, entonces, uno no es capaz de amarlo. Sin embargo, atacar o reprimir al vecino agresor no es generalmente considerado amar. Esto puede ser llamado un dilema ético. Otro ejemplo es el conflicto entre el mandato de no robar y la responsabilidad personal de alimentar a la familia, la cual, bajo determinadas circunstancias, no puede ser mantenida sin dinero robado.

### 12.16. Teorema de los cuatro colores

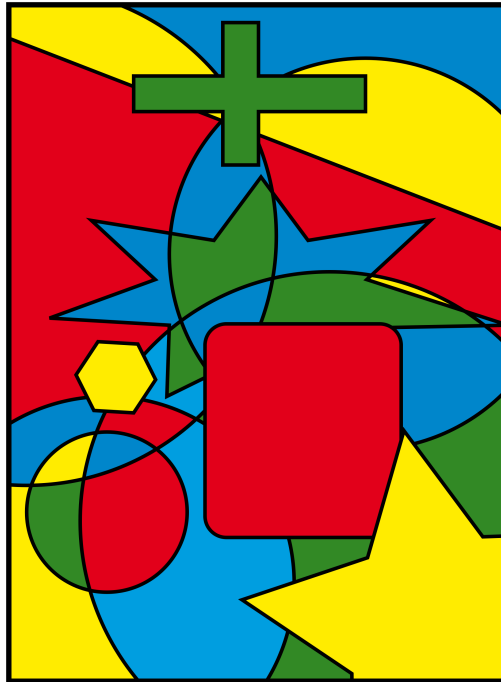
En teoría de grafos, el teorema de los cuatro colores (o teorema de la minimalidad cromática) es un teorema sobre la coloración de grafos que establece lo siguiente:

Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

Todo mapa plano puede colorearse con, como máximo, cuatro colores con la condición de que regiones con frontera común tengan colores distintos.

El años siguiente, 1879, es una fecha importante en relación con este problema. Ese año Alfred Kempe publica una demostración del mismo. En efecto parece ser que con cuatro colores era suficiente y el problema estaba resuelto?

Así fue hasta 1890, año en el que Percy Heawood encontró un error insalvable en la demostración de Kempe, por lo que el problema volvía a estar abierto. A partir de aquí muchos matemáticos (entre ellos el propio Heawood) atacaron el problema, pero ninguno de ellos consiguió dar con la tecla?y nunca mejor dicho.



### 12.17. Econofísica

Los físicos se han acercado a la economía por dos vías. La primera, laboral. Tradicionalmente, los analistas cuantitativos en bancos y otros negocios financieros llamados en la jerga quants han sido matemáticos. Sin embargo, en las dos últimas décadas el mundo financiero ha empezado a contratar para estos menesteres también físicos. Las instituciones financieras se han percatado de que la sólida formación matemática y la habilidad en el uso de los ordenadores de los físicos, los convierte en excelentes diseñadores de nuevos y sofisticados productos financieros, y desarrolladores de técnicas de análisis de grandes masas de datos. Y los físicos, que sufren un precario mercado de trabajo académico e investigador endémico, han sentido el canto de las sirenas: apetecibles salarios. De hecho, el éxito obtenido en estas tareas ha llevado a algunos de ellos a fundar sus propias firmas, ofreciendo servicios en el área de las finanzas.

## 13. Exámenes

### 13.1. Examen 1 Técnicas de Conteo

1.- Demostrar el siguiente Teorema de orden sin remplazamiento (Permutación):

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad 0 \leq r \leq n \quad (70)$$

2.- Demuestre el teorema Binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^n \binom{n}{K} a^K b^{n-K} \quad (71)$$

y desarrolle la expresión:

$$(a+b)^7 \quad (72)$$

3.- El Licenciado ?Memo? realizará un proyecto de Chat y pretende crear un sistema de login para asignar un nombre de usuario en un Chat, el nombre de usuario debe de ser único para cada miembro del chat. La cadena de usuario consta de 4 letras y 2 números específicamente en ese orden. De cuantas maneras se pueden formar las cadenas de usuarios dado que no se puedan repetir las letras y los dígitos, tomando en cuenta que el Licenciado es muy egocéntrico quiere que todas las cadenas de usuario empiecen con la inicial de su nombre: Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el

rango es de 0-9 Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z.

4.- Siguiendo las mismas reglas que el problema 3. También el Licenciado sufrió un trauma con los números impares, desarrolle la cantidad nombres de usuario que sólo acepte números pares.

5. Cuantas distintas permutaciones de cada palabra se forman en total a partir del palíndromo ?Son esos ojos océanos?

6.- Habrá una reunión con mesas circulares y butacas en fila; cada fila o mesa tiene 5 asientos, un grupo de compañeros asistieron juntos: Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina, pero como Regina y Lorenzo son novios quieren saber si es mejor sentarse en grupo en las mesas circulares o butacas de tal forma que siempre estén juntos. ¿Cuál es la mejor opción y Por qué? Demuestre las probabilidades.

7.-Simplifique la siguiente función

$$\frac{(n+2)!}{n!} \quad (73)$$

8.- Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad (74)$$

9.- En una clase de 25 Alumnos se requiere elegir un comité formado por un Presidente, un Secretario, Vocal y un Escrutador ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

10.-Debido a una campaña escolar se busca tener tratos igualitarios y se le exige al profesor obtener las diferentes maneras de escoger un comité compuesto por 2 mujeres y 2 hombres. En el grupo del problema número 9, existen 15 hombres y 10 mujeres.

11.- En una biblioteca se encuentran 7 libros diferentes de probabilidad ¿De cuantas formas se pueden elegir 5 libros?

12.- ¿De cuántas formas se pueden agrupar los números 0, 2, 4, 6, 8 cada agrupación por 2 y 4 elementos sin repetirse? Escriba las parejas de combinaciones para 2 elementos y para 4 elementos.

13.-Desarrolle el siguiente binomio:

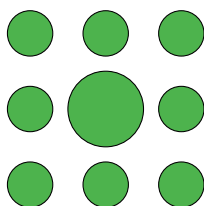
$$(a+2b)^5 \quad (75)$$

14.- En una carrera de 200 metros planos se encuentran 4 mexicanos, 3 haitiano 2 ingleses, 2 jamaquinos y 1 estadounidense. ¿Cuántos distintos pódiums se pueden dar al finalizar la carrera, tomando en cuenta como premios Oro, Plata y Bronce?

15.- En la cafetería de ESCOM se ofrece el siguiente menú para los trabajadores y estudiantes: a) Sopa b) Arroz, Espagueti c) Filete de pescado, pizza, enchiladas de mole. d) Flan ¿Cuántas combinaciones es posible tener, Grafique el diagrama de árbol?

16.-  $A = \{a, b, c, d, e\}$  Dado el conjunto de cuantas formas se pueden elegir 3 elementos:

17.- De cuantas maneras se pueden ubicar las cifras del 1 al 9 en el siguiente diagrama:



18.- Si una prueba de selección múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales sólo 1 es correcta.

a) ¿En cuántas formas diferentes puede un estudiante escoger una respuesta para cada pregunta?

b) ¿En cuántas formas puede un estudiante escoger una alternativa para cada pregunta y tener todas las respuestas incorrectas?

19.- Un alumno decide presentar 3 de las 5 evaluaciones (Ingles (I), Certificación(C), Probabilidad (P), Teoría de la Computación (T), Algoritmos(A), Matemáticas (M) y Seminario(S)) que tiene pendiente. ¿De cuantas maneras diferentes puede elegir esas evaluaciones?

20.- En una universidad egresaron 8 estudiantes y 3 empresas ofrece 1 contrato a firmar, determine las formas en que pueden firmar contrato los egresados.

**Respuestas**

1.-

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Obtenida dicha expresión, ésta se multiplica por  $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \cancel{(n-r)!}}{(n-r)!}$$

Por tanto se obtiene:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2.-Dado

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n (a)^k (b)^{n-k}$$

Desarrollando se tiene:

$$(a+b)^n = (a)^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1*2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

Por otro lado resolviendo:

$$(a+b)^7 = (a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7)$$

3.- Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el rango es de 0-9  
Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z.

Se tiene que:  $1x26x25x24x10x9 = 1,404,000$  *cadena de usuario* También

Se tiene que:

$$1x \frac{26!}{(26-3)!} x \frac{10!}{(10-2)!} = 1,404,000 \text{ cadena de usuario}$$

4.- Se tiene que:  $1x26x25x24x5x4 = 312,000$  *cadena de usuario* También

Se tiene que:

$$1x \frac{26!}{(26-3)!} x \frac{5!}{(5-2)!} = 312,000 \text{ cadenas de usuario}$$

5.-

1)  $3! = 6$ ; Existen 3 letras en total que no se repiten. 2)  $\frac{4!}{2!} = 12$ ; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 's'. 3)  $\frac{4!}{2!} = 12$ ; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 'o'. 4)  $\frac{7!}{2!} = 2520$ ; Existen 7 letras pero 2 repetidas que es 'o'.

6.-Se determinan los casos posibles para las butacas en fila se tiene:

$$P(cn) = n! = 5! = 120 \text{ casos posibles.}$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina Por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$P(cn) = n! = 4! = 24 \text{ casos favorables.}$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{24}{120} = ,20$$

Probabilidad = .20 = 20 % de probabilidad

Se determinan los casos posibles para las mesas circulares:

$$PCn = (n - 1)! = (5 - 1)! = 4! = 24 \text{ casos posibles}$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$PCn = (n - 1)! = (4 - 1)! = 3! = 6 \text{ casos favorables}$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{6}{24} = ,25$$

Probabilidad = .25 = 25 % de probabilidad

Conclusión:

(P(Butacas)=.20)-Es menos que-(P(Mesas Circulares)=.25)

Comparando las probabilidades, se tiene que en es mejor opción sentarse en mesas circulares.

7. primeramente se tiene:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n+1)(n+2)\dots}{n(n-1)(n-2)\dots}$$

eliminando terminos de tiene:

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{n(n+1)(n+2)\dots}}{\cancel{n(n-1)(n-2)\dots}} = (n+2)(n+1)$$

Resolviendo la ecuación

$$(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

8. Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Para obtener el mismo denominador se tiene:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{r*n!}{r*(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)*n!}{r!(n-r+1)*(n-r)!} \\ &= \frac{r*n!}{r!*(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} \\ &= \frac{r*n!+(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} = \frac{[r+(n-r+1)]*n!}{r!*(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!*(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r-1} + \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

9.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:



$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(25, 4) = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4!21!} = \frac{25*24*23*22}{4*3*2*1} = 12,650 \text{ grupos}$$

10.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Esto para cada conjunto de género de alumnos:

$$C(h, r) * C(m, r) = \\ C(15, 2) * C(10, 2) = \frac{15!}{2!(15-2)!} * \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{15!}{2!13!} * \frac{10!}{2!8!} = 4,725 \text{ grupos}$$

11.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(7, 5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \text{ formas de escoger}$$

12.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Sustituyendo para 2 elementos se tiene:

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Sustituyendo para 4 elementos se tiene:

$$C(5, 4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$

Finalmente

$$C(5, 2) * C(5, 4) = 10 * 5 = 50 \text{ agrupaciones}$$

13.- Desarrollando se tiene:

$$(a + 2b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4(2b) + \binom{5}{2}a^3(2b)^2 + \binom{5}{3}a^2(2b)^3 + \binom{5}{4}a(2b)^4 + \binom{5}{5}(2b)^5$$

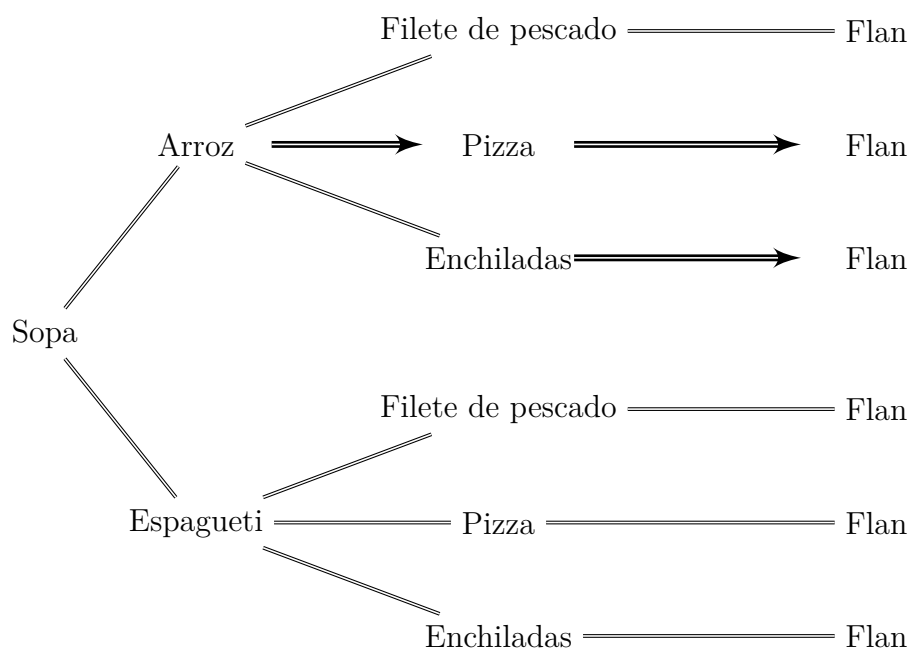
Como el segundo término de la suma contiene un coeficiente igual a 2, entonces primero se eleva ese término  $(2b)$  y después se multiplica por el coeficiente de la función del binomio:

$$(a + 2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$$

14.- Primero se cuentan los corredores:  $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12$  Y como el pódium tiene 3 ganadores (Oro, Plata y Bronce), por tanto se tiene:

$$P(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1,320 \text{ distintos podiums}$$

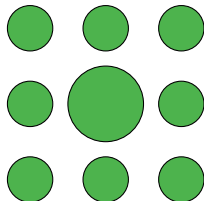
15.-Gráficamente el diagrama de árbol se tiene:



16.-Desarrollando las operaciones se tienen:

$$C(5, 3) = C_5^3 = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35 \text{ formas de elegir}$$

17.- Observemos el siguiente diagrama



Dado que es un diagrama circular:

$$P_{cn}(n-1)! = (8-1)! = 7! = 5,040 \text{ casos}$$

Ahora dado que en el círculo central (CC) se pueden colocar los 9 dígitos se tiene:

$$P_{cn} * \text{circulocentral} = 7! * 9 = 5,040 * 9 = 45,360 \text{ casos}$$

18.- Para a) Dado que son 5 preguntas, se realizan las posibles respuestas para cada pregunta:

$$nPr = 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 1024 \text{ on } Pr = 4^5 = 1024 \text{ posibles respuestas}$$

Para b) Se elimina la respuesta correcta y sólo queda 3 posibles respuestas incorrectas para cada pregunta:

$$nPr = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^5 \text{ on } Pr = 3^5 = 243 \text{ posibles respuestas incorrectas}$$

19.-  $n=5$  Número de evaluaciones a escoger  $r=3$  Número de evaluaciones a combinar

$$C(n, r) = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 \text{ maneras diferentes}$$

20.- Dado que se requiere un estudiante en cada empresa

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 336 \text{ formas de firmar contratos}$$

## 13.2. Examen que resolví Víctor Rangel

### Combinatoria

Nombre: Miguel de Jesús Martínez Felipe

Instrucciones: Resuelva cada ejercicio/pregunta según lo que se pide.

1. Sea  $n$  y  $r$  dos números enteros positivos tal que  $r < n$ , demuestre que:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

Sea:  ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$  con  $r < n$

y se sabe que:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

entonces

$${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \left( \frac{(n-r)(n-r-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \right)$$

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

2. Demuestre que:

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!}{\frac{r!}{r}(k-r+1)!} + \frac{k!}{r! \frac{(k-r+1)!}{k-r+1}}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{rk!}{r!(k-r+1)!} + \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{k!(r+(k-r+1))}{r!(k-r+1)!} = \frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

3. Demuestre que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{k!}{k}(n-k)!} + \frac{\frac{n!}{n}}{k!\frac{(n-k)!}{n-k}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{kn!}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!(k+(n-k))}{nk!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. ¿ Cuántas señales diferentes, cada una consiste de 8 banderas, se pueden formar de un grupo de 4 banderas indistinguibles rojas, 3 banderas indistinguibles blancas y una bandera azul?

Sea:

$${}_nP_r = \frac{8!}{4!3!1!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5}{(6)(1)} = 280 \text{señales diferentes}$$

5. Un código de seguridad consiste de dos letras del alfabeto (considere el alfabeto de 26 letras), y 4 números (0-9). Si se sabe que el código empieza por una letra y termina con otra letra, encuentre el número total de códigos posibles si a) se sabe que ningún carácter puede ser repetido, b) si se permite la repetición de símbolos.

Se tiene dos letras del alfabeto (26 símbolos) y 4 números (10 símbolos).

a)

$$R = (26)(25)(10)(9)(8)(7) = 3,276,000 - \text{decodigos}$$

b)

$$R = (26)(26)(10)(10)(10)(10) = 6,760,000 - \text{decodigos}$$

6. Un estudiante del CIC esta por hacer un examen de probabilidad que consta de 21 preguntas, de las cuales solo tiene que resolver 20 (todas las preguntas tiene el mismo peso en puntaje). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas a resolver?

Se puede resolver de  $\binom{21}{20} = \frac{21!}{20!(21-20)!} = \frac{21!}{20!} = \frac{21 \cdot 20!}{20!} = 21$  maneras.

7. Si en el examen anterior un alumno copió las respuestas de las preguntas (1,3,8,13 y 21). ¿De cuantas maneras puede elegir las preguntas que le restan?

Sea:  $p = 5$  preguntas resueltas.  $n = 21 - 5 = 16$  Preguntas restantes

$r = 20 - 5 = 15$  Preguntas a elegir.

$$\binom{16}{15} = \frac{16!}{15!(16-15)!} = \frac{16!}{15!} = \frac{16 \cdot 15!}{15!} = 16 - \text{formas de elegir la pregunta}$$

8. Un viernes cualquier en un seminario de innovación, después de una sesión aburrida, 8 alumnos deciden intercambiar lugares cada 10 minutos, para hacer más ameno el rato, ¿Cuánto tiempo tomará para que los estudiantes intercambien lugares de todas las formas posibles?

Permutación:  $P = n! = 8!$  entonces

$$8! \cdot 10 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ hrs}}{60 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ hrs}} = \frac{40,320 \times 10}{60 \times 24} = \frac{403,200}{60 \times 24} = 280 - \text{días}$$

9. Después del seminario tedioso, los 8 jóvenes deciden ir a comer, al llegar a un puesto de tacos concurrido, notan que hay 5 sillas y de inmediato deciden que dos de esas sillas será para las únicas dos mujeres que integran en grupo. ¿De cuantas maneras se pueden sentar los hombres en las sillas restantes si no tomamos en cuenta el orden en que se sienten?

$$\text{Sea } C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \text{ entonces } C\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(3!)} = 20 - \text{formas}$$

10. En una entrevista de trabajo donde participan cinco candidatos, estos son invitados a sentarse al rededor de una mesa circular, ¿de cuantas maneras se pueden sentar estos candidatos?

Dado que es una permutación circular se tiene:  $Pcr = (n - 1)! = (5 - 1)! = (4)! = 24$  maneras .

11. ¿De cuantas maneras se pueden reordenar las letras de la palabra Eichhörnchen (ardilla en alemán)? considere solo aquellas combinaciones diferentes.

La palabra “Eichhörnchen”, cuenta con un total de 12 letras, de hay letras repetidas (e-2,c-2,n-2,h-3), entonces:

$$P = \frac{12!}{2!2!2!3!} = 9,979,200$$

12. Claude Shannon perdió su código de seguridad para ingresar a su correo electrónico, sabe que su pass contiene 8 caracteres, además recuerda los primeros cuatro caracteres, y también que contiene al menos un número en las posiciones desconocidas, pero no recuerda cual, si los caracteres que restan pueden ser un número del 0 al 9 ó una letra de las 26 existentes. Determine la cantidad de códigos que se pueden formar a) con repetición de caracteres y b) sin repetición de caracteres.

$$n = 36 \text{ a) } P = (36)(36)(36)(10) = 466,560 - \text{cantidad de códigos} \text{ b) } P = (36)(35)(34)(10) = 428,400 - \text{cantidad de códigos}$$

13. Expanda  $(x + y)^5$  haciendo uso del teorema del binomio.

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

14. El laboratorio de neumática cuenta con 5 plc's y 10 actuadores y 15 compuertas, ¿de cuantas maneras un estudiante puede seleccionar 1 plc, 3 actuadores?

En este ejercicio no importa el orden, por lo que se utiliza la ecuación de combinación y el principio multiplicativo

$$Plc = C\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 - \text{formas}$$

$$Pla = C\left(\begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix}\right) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 - formas$$

Entonces:  $5 * 120 = 600$  combinaciones

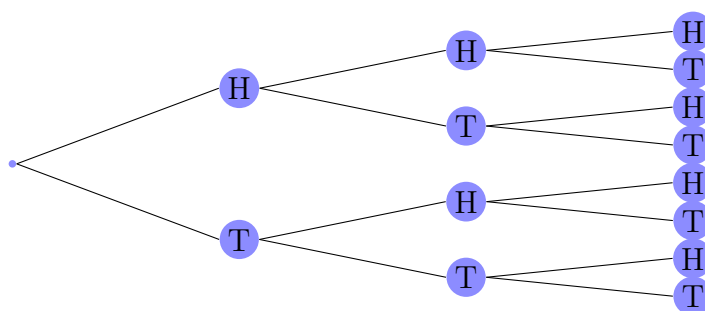
15. El profesor de probabilidad después de aplicar ocho exámenes los arroja sobre escritorio, de los cuales 5 de ellos quedan sobre el escritorio, si el profesor decide exentar a los exámenes que cayeron sobre el escritorio, ¿de cuántas maneras se seleccionarían los alumnos afortunados?

Los casos posibles son 8 mientras que los favorables 5 y el orden de los elementos no importa, entonces:

$$C\left(\begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix}\right) = \frac{8!}{5!(3!)} = 56$$

16. Un conductor infractor hace un trato con un policía, el conductor dice “si tiro una moneda 3 veces y cae cruz(T), cara(H), cara(H), me dejas libre, en caso contrario la multa es doble”, el policía acepta gustoso. Muestre el experimento gráficamente por medio de un diagrama de árbol y remarque la ruta que muestre al conductor como vencedor. Considere a) que el orden importa, b) que el orden no importa.

El diagrama de árbol se representa a continuación.



- a) Si el orden importa se toma la rama  $T, H, H$
- b) Si el orden no importase toman las ramas  $T, H, H, H, H, T$  y  $H, T, H$



17. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Las permutaciones se dan por  $P = 5! \cdot 4! = 2880$  maneras.

18. Se quiere construir un equipo de 2 matemáticos y 3 físicos, apartir de una candidaturas de 5 matemáticos y 7 físicos. ¿De cuantas formas podrá hacerse el equipo?

Se puede formar un equipo de  $T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350$  formas diferentes

19. Del problema anterior, De el número de formas para hacer el equipo si hay un físico en particular que debe estar en el equipo.

Considerando que hay un físico que debe estar en el equipo, entonces hay:  $T = C\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$  formas diferentes.

20. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

Dado que no cuenta el origen y destino se tiene:  $B = 25 \cdot 24 = 600$  billetes.

**13.3. Examen a calificar**

Nombre: *Neiel Israel Leyva Santes*  
del 2016

Fecha: *18 de septiembre*

1.- Demuestre que:  $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)! * (n-r+1)!} + \frac{n!}{r! * (n-r)!} \quad (76)$$

Para obtener un mismo denominador se multiplica la primera fracción por  $\frac{r}{r}$  y la segunda por  $\frac{n-r+1}{n-r+1}$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{r * n!}{r * (r-1)! * (n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) * n!}{r! * (n-r+1) * (n-r)!} = \frac{r * n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) * n!}{r!(n-r+1)!} \quad (77)$$

$$= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r} \quad (78)$$

2.- ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres cartas en la sucesión de una baraja de 52 cartas con reemplazo?

Tenemos: 3 Elecciones 52 Cartas Se permiten repeticiones

Por lo tanto  $(52)(52)(52) = 140608$  maneras.

3.- ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres cartas en la sucesión de una baraja de 52 cartas sin reemplazo?

Tenemos: 3 Elecciones 52 Cartas No se permiten repeticiones

Por lo tanto  $(52)(51)(50) = 132600$  maneras.

4.- ¿Si para fijar una placa de cuenta con 7 tornillos: 2 son de acero al carbon, 3 son de acero inoxidable y 2 son de bronce. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar tales tornillos si se distingue el material del que están

hechos?

$$P_{2,3,2}^7 = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{5040}{(2)(6)(2)} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ maneras} \quad (79)$$

5.- Se disponen de 3 vías para viajar de Acapulco a la Ciudad de México y de 4 vías para viajar de la Ciudad de México para Acapulco. ¿De cuántas maneras posibles se puede organizar el viaje de ida y vuelta de Acapulco a la Ciudad de México?

$$(3)(4) = 12 \text{ maneras} \quad (80)$$

6.- Se requiere sentar a 5 hombres y a 4 mujeres en una fila de tal modo que las mujeres ocupen los lugares pares del arreglo de sillas. ¿Cuántas maneras de sentar tanto a hombres como a mujeres son posibles?

$$({}_5P_5)({}_4P_4) = (5!)(4!)(120)(24) = 2880 \text{ maneras} \quad (81)$$

7.- ¿De cuántas maneras posibles se pueden permutar las letras en la palabra LALALAAA?

$$({}_8P_5) = ({}_8P_3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 \text{ permutaciones} \quad (82)$$

8.- ¿De cuántas maneras posibles se pueden dividir 9 juguetes entre 4 niños si el niño más pequeño deberá recibir 3 juguetes y cada uno de los niños restantes deberán recibir sólo 2 juguetes?

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560 \text{ maneras} \quad (83)$$

9.- ¿De cuántas maneras posibles se puede formar un comité de 3 hombres y 2 mujeres quienes pueden ser seleccionados de un total de 7 hombres y 5 mujeres participantes?

Los tres hombres de los 7 en total pueden ser seleccionados en  $\binom{7}{3}$  maneras, y las dos mujeres de las 5 en total pueden ser seleccionadas en  $\binom{5}{2}$  maneras, de modo que el comité puede ser formado en  $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 350$  maneras.

10.- Si las repeticiones no son permitidas, ¿Cuántos números de 3 dígitos pueden ser formados de los siguientes 6 dígitos: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9?

(6)(5)(4) = 120 números de 3 dígitos.

11.- Simplifique  $\frac{n!}{(n-1)!}$

$$\frac{(n!)}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}{(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)} = \frac{\cancel{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}}{\cancel{(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}} = n \quad (84)$$

12.- Simplifique  $\frac{(n+2)!}{n!}$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\dots}{n(n-1)(n-2)\dots} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2 \quad (85)$$

13.- Suponga que una placa de automóvil contiene dos letras distintas seguidas de tres dígitos siempre y cuando el primer dígito sea distinto de cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden ser impresas?

(26)(25)(9)(10)(10) = 585000 placas.

14.- Enuncie el principio fundamental de conteo:

Si un procedimiento puede ser realizado en  $n_1$  diferentes maneras, y si, siguiendo este procedimiento, un segundo procedimiento puede ser realizado en  $n_2$  diferentes maneras, y si, siguiendo este segundo procedimiento, un tercero puede ser realizado en  $n_3$  diferentes maneras, y así un cuarto; entonces el número de formas en que un procedimiento puede ser realizado en orden es indicado por el producto de  $(n_1)(n_2)(n_3)\dots$

15.- Hallar los términos de la siguiente fórmula:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$  para cada iteración con  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  y 10

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$n = 1$$

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$n = 2$$

$$(a + b)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$n = 3$$

$$(a + b)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$n = 4$$

$$(a + b)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad n = 5$$

$$(a + b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$n = 6$$

$$(a + b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^{6-k} b^k$$

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$n = 7$$

$$(a + b)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} a^{7-k} b^k$$

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$n = 8$$

$$(a + b)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} a^{8-k} b^k$$

$$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$n = 9$$

$$(a + b)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} a^{9-k} b^k$$

$$a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{10-k} b^k \\
 &= a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + \\
 &\quad 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}
 \end{aligned}$$

16.- Demuestre la fórmula de Pascal:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Si  $n$  y  $k$  son valores enteros positivos tales que  $1 \leq k \leq n-1$ , entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Para obtener la fórmula de Pascal, basta con sustituir  $n-k$  en la igualdad anterior

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k}$$

17.- En una fiesta donde existe un arreglo de 7 sillas, ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar 7 personas si el arreglo es una fila de sillas?

$$n! = 7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040 \text{ maneras.}$$

18.- En una fiesta donde existe un arreglo de 7 sillas, ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar 7 personas si el arreglo de sillas se encuentra situado alrededor de una mesa circular?

$$(n-1)! = (7-1)! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720 \text{ maneras.}$$

19.- Encuentre  $n$ , si  $P(n, 2) = 72$

$$P(n, 2) = n(n - 1) = n^2 - n$$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n - 9)(n + 8) = 0$$

como  $n$  tiene que ser positiva.  $n = 9$

20.- Expandir y simplificar  $(x^2 - 2y)^6$

$$\begin{aligned} (x^2 - 2y)^6 &= (x^2)^6 + \frac{1}{6}(x^2)^5(-2y) + \frac{(6)(5)}{(1)(2)}(x^2)(-2y)^2 + \frac{(6)(5)(4)}{(1)(2)(3)}(x^2)^3(-2y)^3 + \\ &\frac{(6)(5)}{(1)(2)}(x^2)^2(-2y)^4 + \frac{6}{1}(x^2)(-2y)^5 + (-2y)^6 \\ &= x^{12} - 12x^{10}y + 60x^8y^2 - 160x^6y^3 + 240x^4y^4 - 192x^2y^5 + 64y^6 \end{aligned}$$

### 13.4. Examen 2

Recomendación: Asegúrese de comprender cada reactivo antes de proceder a responder. Anote debajo de cada pregunta, únicamente la solución a la pregunta o problema, puede apoyarse de anotar todo el procedimiento realizado para llegar a su resultado en una hoja en blanco.

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

- Una familia tiene dos niños. Encuentra la probabilidad que los dos niños sean mujeres, dado que al menos uno de los dos niños nació en invierno. Considera que las cuatro estaciones son igualmente probables, que el género es independiente de la estación y que los dos géneros son igualmente probables. (1 punto)

#### Solución:

Sea:

$A$  = dos mujeres

$B$  = al menos una mujer en invierno

$A \cap B$  = dos mujeres y al menos una mujer en invierno

por la de finición de probabilidad condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de que el niño sea mujer es  $\frac{1}{2}$  y la probabilidad de que el niño nazca en invierno es  $\frac{1}{4}$ , por lo que la probabilidad de que un niño sea mujer y que nazca en invierno es:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ , ahora la probabilidad de que el otro niño sea mujer es:  $\frac{1}{2}$  y que nazca en cualquier estación  $\frac{1}{4}$ . Entonces la probabilidad de que sean dos mujeres y la primera haya nacido en invierno es:  $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ .

Utilizando la analogía anterior se pueden obtener las probabilidades, se puede hacer un diagrama de árbol de cuatro niveles donde el primer nivel consta de 4 elementos ( $P = 1/4$ ) que representan las estaciones del año, el segundo nivel (de 8 elementos, dos por cada estación) representa al género (hombre o mujer) con  $P = 1/2$ , hasta este nivel representa solo un niño, ahora para representar al segundo niño, en el tercer nivel se representan las estaciones del año ( $P = 1/4$ ) y el último nivel representa el género.

Ahora para obtener la  $P(B)$  se toma en cuenta solo las ramas donde al menos un niño de género mujer nació en invierno lo que genera las siguientes expresiones:

$$P(B) = 7\left(\frac{1}{64}\right) + \frac{1}{8} = \frac{7}{64} + \frac{8}{64} = \frac{15}{64}$$

Ahora se recorre el árbol buscando esta vez solo las ramas donde nacieron dos mujeres y al menos una mujer nació en invierno, generando la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{64} \cdot \frac{4}{64} = \frac{7}{64}$$

entonces:

$$P(A | B) = \frac{7/64}{15/64} = \frac{7}{15}$$

2. Se cuentan con dos monedas, una moneda normal, y otra moneda preparada que cae cara con una probabilidad de  $3/4$ . Se escoge una moneda al azar y se lanzas 3 veces. Esta cae cara las 3 veces. Con esta información ¿cuál es la probabilidad de que la moneda escogida sea la moneda normal? (1 punto)

### Solución:

Sea:

$A$ = el evento de que la moneda escogida cae cara 3 veces

$B$ = el evento de escoger la moneda normal



$C$  = el evento de escoger la moneda preparada  
 Entonces, el evento de elegir una moneda al azar es:

$$P(B) = P(C) = 1/2$$

Si consideramos de obtener cara con la moneda normal es  $1/2$ , y la probabilidad condicional de que caiga tres veces cara dado que fue la moneda normal:

$$P(A | B) = (1/2) \cdot (1/2)^3$$

donde el primer término representa la probabilidad de escoger la moneda normal, y el segundo la probabilidad de que al lanzar 3 veces la moneda, obtengamos 3 caras.

Ahora bien para obtener la probabilidad de que salgan 3 caras en el evento de lanzar la moneda ( $P(A)$ ), se hace uso del teorema de la probabilidad total, entonces:

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | C)P(C)$$

Se sabe que la probabilidad de que la moneda preparada caiga cara es  $3/4$ , por lo que:

$$P(A) = (1/2)^3 \cdot (1/2) + (3/4)^3 \cdot (1/2)$$

Usando el teorema de Bayes, entonces:

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|C)P(C)} \\ &= \frac{(1/2)^3 \cdot 1/2}{(1/2)^3 \cdot 1/2 + (3/4)^3 \cdot 1/2} \\ &\approx 0.23 \end{aligned}$$

3. Una amiba vive en un estanque. Pasado un minuto, la amiba morirá, se dividirá en dos o permanecerá igual, los tres eventos son igualmente probables, y en los minutos consecuentes las amibas resultantes tendrán el mismo comportamiento, de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad que la población de amibas eventualmente muera? (1 punto)

**Solución:**

Sea:

$M$  = el evento de que todas las amibas mueran.

$A_i$  = el evento de que la amiba inicial se divida en  $i$  amibas, considerando el caso mas sencillo, para el primer minutos se pueden tener las siguientes amibas  $i = 0, 1, 2$

Entonces, para el primer minuto hay 3 opciones:

$$P(M) = P(M | A_0) \cdot \frac{1}{3} + P(M | A_1) \cdot \frac{1}{3} + P(M | A_2) \cdot \frac{1}{3}$$

La  $P(M | A_0) = 1$  ya que mure la amiba pasado el primer minuto,

La  $P(M | A_1) = P(M)$  ya que la amiba no cambia, (no muere ni se divide), por lo que regresamos al caso inicial.

La  $P(M | A_2) = P(M)^2$ , se generan dos amibas y estas cuentan con las mismas características que la amiba inicial; entonces:

$$P(M) = \frac{1}{3} + \frac{P(M)}{3} + \frac{P(M)^2}{3}$$

$$\frac{1}{3}P(M)^2 - \frac{2}{3}P(M) + \frac{1}{3} = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$P(M) = 1$$

Por lo que la población de amibas morirá con el paso del tiempo.

4. Es posible tener eventos  $A, B, C$  tal que  $P(A | C) < P(B | C)$  y  $P(A | C^c) < P(B | C^c)$ , entonces ¿ $P(A) > P(B)$ ? Muestra que esto es posible. (1 punto)

**Solución:**

No es posible, usando la ley total de la probabilidad se tiene:

$$P(A) = P(A | C)P(C) + P(A | C^c)P(C^c) < P(B | C)P(C) + P(B | C^c)P(C^c) = P(B)$$

$$P(A) < P(B)$$

5. Sean tres urnas con las siguientes composiciones de bolas blancas y negras:

$U_1 : (3 \text{ blancas y } 2 \text{ negras})$

$U_2 : (4 \text{ blancas y } 2 \text{ negras})$

$U_3 : (1 \text{ blancas y } 4 \text{ negras})$

Calcúlese:

- Probabilidad de extraer bola blanca.
- Probabilidad de que una bola negra que se ha extraído procesa de la segunda urna.

(1 punto)

### Solución

- Suponemos inicialmente, puesto que nada indica lo contrario, que las tres urnas son equiprobables:

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{blanca}) = P(\text{blanca}|U_1)P(U_1) + P(\text{blanca}|U_2)P(U_2) + P(\text{blanca}|U_3)P(U_3)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{1}{3} = \frac{22}{45}$$

- Por el teorema de Bayes:

$$P(U_2|\text{negra}) = \frac{P(\text{negra}|U_2)P(U_2)}{P(\text{negra})}$$

donde  $P(\text{negra})$  se puede determinar, como antes en el caso de la bola blanca, por el teorema de la probabilidad total y, por tanto.

$$P(U_2|\text{negra}) = \frac{P(\text{negra}|U_2)P(U_2)}{P(\text{negra}|U_1)P(U_1) + P(\text{negra}|U_2)P(U_2) + P(\text{negra}|U_3)P(U_3)}$$

$$P(U_2|\text{negra}) = \frac{\frac{2}{5} \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \frac{1}{3}} = \frac{5}{23}$$

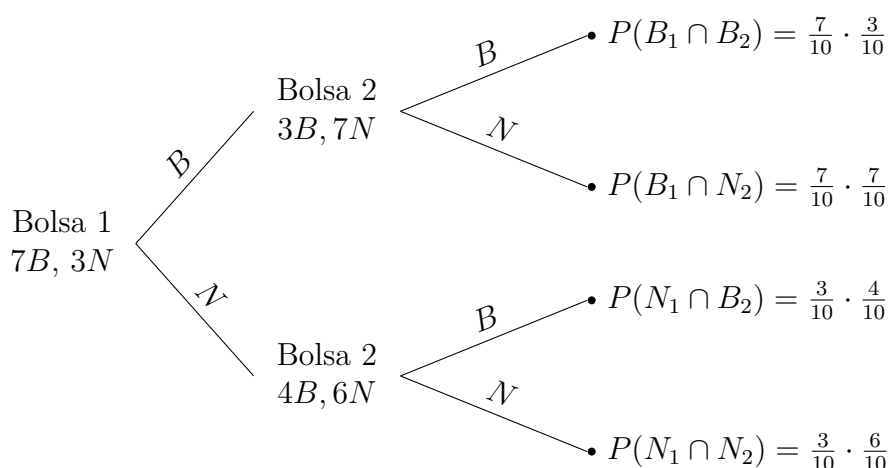
6. Tenemos dos bolsas, la primera con 10 bolas, 7 blancas y 3 negras, y la segunda con 9 bolas, 3 blancas y 6 negras.

Se extrae al azar una bola de la primera bolsa y se pasa a la segunda. De esta bolsa, también al azar, se saca una bola, calcúlese la probabilidad que esta bola sea blanca.

(1 punto)

**Solución:**

En el diagrama siguiente tenemos las distintas maneras de llegar a la extracción de la segunda bola:



En el diagrama se aprecia que hay dos caminos para obtener bola blanca en la segunda extracción. caminos que hay que tomar en cuenta a la hora de calcular la probabilidad, pues al final del experimento se puede llegar por uno u por otro, sin saber de antemano cual tendrá lugar.

El diagrama en términos de sucesos, adopta la forma anterior, siendo  $B_1$  la extracción de bola blanca en la  $i$ -ésima extracción, y análogamente para  $N_1$  como bola negra.

EL suceso de bola blanca es la segunda extracción sin establecer condición alguna (camino seguido),  $(B_2)$ , es igual a

$$(B_2) = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Se puede llegar a  $B_2$  a través de dos sucesos disjuntos, los del segundo miembro de la igualdad, siendo su probabilidad

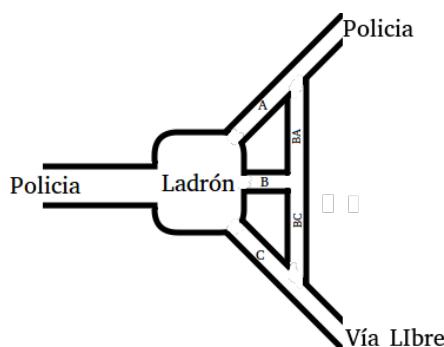
$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1)P(B_2|B_1) \\ P(N_1 \cap B_2) &= P(N_1)P(B_2|N_1) \end{aligned}$$

por lo cual la probabilidad de extraer bola blanca,  $P(B_2)$ , es:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2|N_1) \\ P(B_2) &= \frac{7}{10} \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \frac{3}{10} = \frac{37}{100} \end{aligned}$$

7. En el centro de Ecatepec, un ladrón es perseguido por un coche de policía y al llegar a un determinado cruce en San Agustín se encuentra tres posibles calles por las que huir  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de tal manera que las dos últimas son tan estrechas que por ellas no cabe el coche de la policía, si bien el ladrón va tan nervioso que no es consciente de ello.

Si huye por la calle  $A$  le atrapan seguro puesto que el final de la misma está cortado por otra patrulla de la policía. Si huye por la calle  $C$  escapa seguro puesto que no está vigilada. Si huye por la calle  $B$  se encuentra con que está cortada y que se bifurca en dos callejuelas: la  $BA$ , que conduce a la calle  $A$  y la  $BC$  que lleva a la calle  $C$ .



¿Cuál es la probabilidad de que el ladrón sea atrapado?

(1 punto)

**Solución:**

$$P(\text{atraparle}) = P(A) P(\text{atraparle} | A) + \\ P(B) P(\text{atraparle} | B) + \\ P(C) P(\text{atraparle} | C)$$

$$P(\text{atraparle} | B) = P(BA)P(\text{atraparle} | BA) + \\ P(BC)P(\text{atraparle} | BC)$$

$$P(\text{atraparle}) = P(A) P(\text{atraparle} | A) + \\ P(B) (P(BA) P(\text{atraparle} | BA) + \\ P(BC) P(\text{atraparle} | BC)) + \\ P(C) P(\text{atraparle} | C) = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0\right) + \frac{1}{3}0 = \frac{1}{2}$$

8. Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una fiabilidad del 98 por ciento; es decir, si uno tiene cáncer el análisis dará positivo el 98 por ciento de las veces, y si no lo tiene, dará negativo el 98 por ciento de las veces. Supongamos además que el 0,5 por ciento de la población, una de cada doscientas personas, padece verdaderamente cáncer. Imaginemos que uno se ha sometido al análisis y que su médico le informa con tono pesimista que ha dado positivo. ¿Hasta qué punto ha de deprimirse esa persona? Lo sorprendente del caso es que dicho paciente ha de mantenerse prudentemente optimista. El por qué de este optimismo lo encontraremos al determinar la probabilidad condicional de que uno tenga un cáncer sabiendo que el análisis ha dado positivo. Supongamos que se hacen 10.000 pruebas de cáncer. ¿Cuántas de ellas darán positivo? (1 punto)

**Solución:**

**En promedio, 50 de estas 10.000 personas (el 0,5 por ciento de 10.000) tendrán cáncer, y como el 98 por ciento de ellas darán**

positivo, tendremos 49 análisis positivos. Por otra parte, el 2 por ciento de las 9.950 personas restantes, que no padecen cáncer, también darán positivo, con un total de 199 análisis positivos  $(0,02)(9,950) = 199$ ). Así, del total de 248 positivos  $(199 + 49 = 248)$ , la mayoría (199) son falsos positivos, y la probabilidad condicional de padecer el cáncer sabiendo que se ha dado positivo es sólo  $\frac{49}{248}$

9. Dos jugadores  $A$  y  $B$  compiten en un test que incluye una serie de preguntas. Para cada una de las preguntas, las probabilidades de que  $A$  y  $B$  den la respuesta correcta son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, para todas las preguntas. Se consideran todas las preguntas eventos independientes. El juego termina cuando un jugador responde una pregunta correctamente.

Defina la probabilidad de que el jugador  $A$  gane si:

- a) El jugador  $A$  responda la primera pregunta.
- b) El jugador  $B$  responda la primera pregunta:

(1 punto)

### Solución:

Primer definimos las condiciones:

- $\Omega$  consiste en el espacio de muestreo que son todas las posibles secuencias infinitas de respuestas
- Evento  $A$  determina que el jugador  $A$  responda la primera pregunta correctamente
- Evento  $F$  el juego termina despues de la primera pregunta
- Evento  $W$  el jugador  $A$  gana
- Evento  $A^c$  determina que el jugador  $B$  responda la primera pregunta correctamente

Se quiere obtener  $P(W|A)$  y  $P(W|A^c)$

Usando el teorema de la probabilidad total y la particion dada por  $\{F, F^c\}$

$$P(W|A) = P(W|A \cap F)P(F|A) + P(W|A \cap F^c)P(F^c|A)$$

Ahora tenemos:

$P(F|A) = P[A \text{ responde correctamente la primera pregunta}] = \alpha$

$P(F^c|A) = 1 - \alpha$ ,

$P(W|A \cap F) = 1$

pero  $P(W|A \cup F^c) = P(W|A^c)$

entonces tenemos que

$$P(W|A) = (1 \times \alpha) + (P(W|A^c) \times (1 - \alpha)) = \alpha + P(W|A^c)(1 - \alpha) \quad (86)$$

de forma similar:

$$P(W|A^c) = P(W|A^c \cap F)P(F|A^c) + P(W|A^c \cap F^c)P(F^c|A^c) \quad (87)$$

entonces definimos:

$P(F|A^c) = P[B \text{ responde la primera pregunta correctamente}] = \beta$

$P(F^c|A^c) = 1 - \beta$

pero  $P(W|A^c \cap F) = 0$ , finalmente  $P(W|A^c \cap F^c) = P(W|A)$ , entonces tenemos:

$$P(W|A^c) = (0 \times \beta) + (P(W|A) \times (1 - \beta)) = P(W|A)(1 - \beta) \quad (88)$$

Resolviendo la ecuación 1 y 3 tenemos que :

$$P(W|A) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (89)$$

$$P(W|A^c) = \frac{(1 - \beta)\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (90)$$

10. La información de un dispositivo es transmitida como una secuencia de números binarios(bits), sin embargo el ruido en el canal interrumpe la señal, en el que un dígito transmitido como 0 es recibido como 1 con



una probabilidad  $1 - \alpha$ , con una interrupción similar cuando el dígito 1 es transmitido, se ha observado que en un gran número de señales transmitidas, los 0s y 1s son transmitidos en el ratio 3:4.

Dado que la secuencia 101 es recibida, ¿cuál es la distribución de probabilidad sobre las señales transmitidas?, asume que la transmisión y recepción son procesos independientes.

(1 punto)

**Solución:**

-El espacio de muestreo  $\Omega$  consiste en todas las posibles secuencias de longitud 3 que es:

$\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

A conjunto correspondiente a eventos de señales

$\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$  y eventos de recepción

$\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

Hemos observado el evento  $R_5$  que 101 fue recibido, deseamos obtener  $P(S_i|R_5)$  para  $i=0,1,\dots,7$ . Sin embargo en la información dada solo tenemos  $P(R_5|S_i)$ , primero usando el teorema de la probabilidad total calculamos  $P(R_5)$

$$P(R_5) = \sum_{i=0}^7 P(R_5|S_i)P(S_i) \quad (91)$$

Si consideramos  $P(R_5|S_0)$ , si 000 es transmitido, la probabilidad de que 101 sea recibido es  $(1 - \alpha) \times \alpha \times (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)^2$ , completando la evaluación tenemos:

$$P(R_5|S_0) = \alpha(1 - \alpha)^2$$

$$P(R_5|S_1) = \alpha^1(1 - \alpha)$$

$$P(R_5|S_2) = (1 - \alpha)^3$$

$$P(R_5|S_3) = \alpha(1 - \alpha)^2$$

$$P(R_5|S_4) = \alpha^2(1 - \alpha)$$

$$P(R_5|S_5) = \alpha^3$$

$$P(R_5|S_6) = \alpha(1 - \alpha)^2$$

$$P(R_5|S_7) = \alpha^2(1 - \alpha)$$

La información de los dígitos transmitidos es la probabilidad de transmitir 1 que es  $4/7$ , entonces tenemos:

$$P(S_0) = \left(\frac{3}{7}\right)^3$$

$$P(S_1) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$P(S_2) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$P(S_3) = \left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$P(S_4) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$P(S_5) = \left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$P(S_6) = \left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$P(S_7) = \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

De esta forma tenemos:

$$P(R_5) = \frac{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1 - \alpha) + 123\alpha(1 - \alpha)^2 + 36(1 - \alpha)^3}{343} \quad (92)$$

Finalmente usando el teorema de Bayes tenemos que la probabilidad de distribución sobre:

$$\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$$

$$P(S_i|R_5) = \frac{P(R_5|S_i)P(S_i)}{P(R_5)} \quad (93)$$

La probabilidad de recepción de  $S_5$  es:

$$P(S_5|R_5) = \frac{P(R_5|S_5)P(S_5)}{P(R_5)} = \frac{48\alpha^3}{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1 - \alpha) + 123\alpha(1 - \alpha)^2 + 36(1 - \alpha)^3} \quad (94)$$

11. En una ciudad hay 51 % son hombres y 49 % mujeres, un adulto es seleccionado aleatoriamente para una encuesta, encuentra las siguientes dos probabilidades:

a) La encuesta es acerca de las personas que fuman, 9,5 % de los hombres fuman mientras que el 1,7 % de las mujeres también fuman, encuentra la probabilidad de que una persona entrevistada al azar sea fumador y hombre.

(1 punto)

**Solución:**

Definimos:

M=hombres

$M^c$ =mujeres

C=fumadores

$C^c$ =no fumadores

Basados en la información definimos:

$$P(M) = 0,51$$

$$P(M^c) = 0,49$$

$P(C|M) = 0,095$  probabilidad de que un hombre tomado al azar sea fumador

$P(C|M^c) = 0,017$  probabilidad de que una mujer seleccionada al azar sea fumadora

Aplicando teorema de Bayes queremos obtener la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea fumador.

$$\frac{P(M)P(C|M)}{(P(M)P(C|M) + (P(M^c)P(C|M^c))} \quad (95)$$

$$\frac{0,51 \times 0,095}{(0,51 \times 0,095) + (0,49 \times 0,017)} = 0,85329341 \quad (96)$$

12. Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43 %, 26 % y 31 % de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8 %, 2 % y 1,6 % del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso, a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cual es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B?

(1 punto)

**Solución:**

Se definen los eventos:

D = evento de que el producto seleccionado sea defectuoso

A = evento de que el producto sea fabricado en la máquina A

B = evento de que el producto sea fabricado por la máquina B

C = evento de que el producto sea fabricado por la máquina C

$$P(B|D) = \frac{p(B)p(D|B)}{p(A)p(D|A) + p(B)p(D|B) + p(C)p(D|C)} \quad (97)$$

$$P(B|D) = \frac{(0,26 * 0,02)}{(0,43 * 0,08 + 0,26 * 0,02 + 0,31 * 0,016)} \quad (98)$$

$$= \frac{0,0052}{0,04456} \quad (99)$$

$$= 0,116697 \quad (100)$$

13. A un paciente de un hospital se le aplica una prueba para la detección de una enfermedad, dicha enfermedad solo afecta al 1 % de la población. El resultado es positivo indicando que el paciente tiene la enfermedad. Siendo  $D$  el evento que el paciente tenga la enfermedad y  $T$  de que el la prueba resulte positiva.

Suponiendo que la prueba tiene una precisión del 95 %, existen diferentes medidas para calcular la precisión, pero en este problema se considera  $P(T|D)$  Y  $P(T^c|D^c)$ . La probabilidad  $P(T|D)$  es conocida como la sensibilidad o verdaderos positivos y  $P(T^c|D^c)$  son los falsos negativos.

Encuentra la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad dada la evidencia proporcionada por el test.

(1 punto)

**Solución:**

Aplicando el teorema de bayes y el teorema de probabilidad completa:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} \quad (101)$$

$$= \frac{P(T|D)P(D)}{P(D|T)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} \quad (102)$$

$$= \frac{0,95 \times 0,01}{0,95 \times 0,01 + 0,05 \times 0,99} \quad (103)$$

$$= 0,16 \quad (104)$$

14. Servicios de telecomunicaciones. Suponga que es de interés conocer la probabilidad de que un usuario de Telex, que tiene señal de televisión satelital, tenga servicio ilimitado de larga distancia de cobertura nacional. El espacio muestral se reduce automáticamente, se condiciona a la ocurrencia de un evento, se restringe a los usuarios que tienen televisión satelital. Ahora bien, 1 de cada 5 usuarios tiene señal de televisión y 3 de cada 25 tiene tanto señal de televisión como larga distancia nacional, por lo que, por cada 25 usuarios, habrá 5 que tengan señal de televisión y 3 de ellos también tendrán servicio de larga distancia nacional; es decir, por cada 5 usuarios con televisión satelital, habrá 3 con servicio de larga distancia nacional. Entonces, la probabilidad de que un usuario tenga servicio de larga distancia nacional, dado que tiene señal de televisión satelital, es  $3/5$ . Calcule las siguientes probabilidades de que un usuario de Telex:

- a) Tenga señal de televisión satelital, dado que tiene Internet de banda ancha.
- b) Tenga Internet de banda ancha, dado que tiene señal de televisión satelital.
- c) No tenga Internet, dado que tiene señal de televisión satelital.
- d) Tenga señal de televisión satelital, dado que no tiene servicio de larga distancia.
- e) Tenga servicio de larga distancia, dado que tiene señal de televisión.
- f) Tenga larga distancia o señal de televisión, dado que tiene Internet.

(1 punto)

**Solución:**

- a) Tenga señal de televisión satelital, dado que tiene Internet de banda ancha:

$$P(T|I) = \frac{P(I \cap T)}{P(I)} = \frac{0,10}{0,30} = \frac{1}{3}$$

- b) Tenga Internet de banda ancha, dado que tiene señal de televisión satelital:

$$P(I|T) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,10}{0,20} = \frac{1}{2}$$

- c) No tenga Internet, dado que tiene señal de televisión satelital:

$$P(\bar{I}|T) = \frac{P(\bar{I} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,10}{0,20} = \frac{1}{2}$$

- d) Tenga señal de televisión satelital, dado que no tiene servicio de larga distancia:

$$P(T|\bar{L}) = \frac{P(T \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,00}{0,30} = 0$$

- e) Tenga servicio de larga distancia, dado que tiene señal de televisión:

$$P(L|T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{0,20}{0,20} = 1$$

f) Tenga larga distancia o señal de televisión, dado que tiene Internet:

$$\begin{aligned}
 P(L \cup U|I) &= P(L|I) + P(T|I) - P(L \cap U|I) \\
 &= \frac{P(L \cap I)}{P(I)} + \frac{P(T \cap I)}{P(I)} - \frac{P(L \cap T \cap I)}{P(I)} \\
 &= \frac{0,23}{0,30} + \frac{0,10}{0,30} - \frac{0,10}{0,30} \\
 &= \frac{0,23}{0,30}
 \end{aligned}$$

15. Dado. Considere el experimento consistente en lanzar un dado y observar la cara que queda hacia arriba. Sean los eventos: A = cae par, B = cae 2 o 4 y C = cae 1 o 2; las probabilidades correspondientes son:  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/3$  y  $P(C) = 1/3$ . Calcularemos las siguientes probabilidades condicionales, utilizando la interpretación clásica o a priori: (1 punto)

**Solución:**

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(\text{cae 2 o 4})}{N(\text{cae 2 o 4})} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{N(\text{cae 2 o 4})}{N(\text{cae par})} = \frac{2}{3}$$

$$P(A|C) = \frac{N(A \cap C)}{N(C)} = \frac{N(\text{cae 2})}{N(\text{cae 1 o 2})} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{N(A \cap C)}{N(A)} = \frac{N(\text{cae 2})}{N(\text{cae par})} = \frac{1}{3}$$

16. Considere una urna que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules, de la que se extraen sucesivamente de la urna tres bolas, con reemplazo. Sean los eventos:

- A = {sale bola azul}
- B = {sale bola blanca}
- R = {sale bola roja}

Calcule las siguientes probabilidades:

- a) Que salgan en el orden roja, azul, blanca.
- b) Que salgan en el orden azul, roja azul.
- c) Que salgan tres bolas blancas.
- d) Que salgan una roja, una azul y una blanca, sin importar el orden.
- e) Que salgan dos azules y una roja.

(1 punto)

**Solución:**

- a) Que salgan en el orden roja, azul, blanca:

$$\begin{aligned}P(R \cap A \cap B) &= P(R) * P(A|R) * P(B|R \cap A) \\&= \frac{6}{15} * \frac{5}{15} * \frac{4}{15} = \frac{120}{3375} = \frac{8}{225}\end{aligned}$$

- b) Que salgan en el orden azul, roja azul:

$$\begin{aligned}P(A \cap R \cap A) &= P(A) * P(R|A) * P(A|A \cap R) \\&= \frac{5}{15} * \frac{6}{15} * \frac{5}{15} = \frac{150}{3375} = \frac{2}{45}\end{aligned}$$

- c) Que salgan tres bolas blancas:

$$\begin{aligned}P(B \cap B \cap B) &= P(B) * P(B|B) * P(B|B \cap B) \\&= \frac{4}{15} * \frac{4}{15} * \frac{4}{15} = \frac{64}{3375}\end{aligned}$$

- d) Que salgan una roja, una azul y una blanca, sin importar el orden:

$$\begin{aligned}P(1 \text{ roja, } 1 \text{ azul y } 1 \text{ blanca}) &= 6 * P(R \cap A \cap B) \\&= 6 \left( \frac{8}{225} \right) = \frac{16}{75}\end{aligned}$$



e) Que salgan dos azules y una roja:

$$P(2 \text{ azules y } 1 \text{ roja}) = 3 \left( \frac{2}{45} \right) = \frac{2}{15}$$

17. Tetraedro. Si en lugar de lanzar un dado, se lanza un tetraedro, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, definimos los eventos:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ ,  $C = \{1, 4\}$ , las probabilidades correspondientes son:  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/2$ ,  $P(C) = 1/2$ . Ahora, utilizando el criterio de Laplace, calculamos las siguientes probabilidades conjuntas: (1 punto)

**Solución:**

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = \frac{N(A \cap C)}{N} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = \frac{N(B \cap C)}{N} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{N(A \cap B \cap C)}{N} = \frac{1}{4}$$

Vemos que los eventos A, B y C son independientes por pares, pues:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{N(A \cap B \cap C)}{N} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, A, B y C no son mutuamente independientes, ya que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

18. A y B juegan 12 partidas de ajedrez. A gana seis, B gana cuatro y en dos quedan en tablas. Otro día acuerdan jugar un torneo de 3 partidas. Hallar la probabilidad de que:

- a) A gane las tres;
- b) En dos partidas queden en tablas;
- c) A y B ganen alternadamente;
- d) B gane al menos una partida.

(1 punto)

**Solución:**

Espacio muestral:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{A, B, X\}, i = 1, 2, 3\} \quad (105)$$

Donde: cada  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$  representa el resultado de la  $i$ -ésima partida del torneo  
resultado:

- A si gana el jugador A
- B si gana el jugador B
- X si quedan tablas

los resultados de las partidas son independientes.  
También sabemos:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(X) = \frac{1}{6}$$

- a) Sea M el suceso “A gana las tres partidas”. Luego,  $M = (A, A, A)$  y la probabilidad es  $P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ .
- b) Definimos el suceso N = “En dos partidas del torneo A y B quedan en tablas”. Se tiene entonces que

$$N = N1 \cup N2 \cup N3,$$

Siendo

$$N_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{A, B\}; \omega_j = X, \text{ para todo } j = 1, 2, 3, j \neq i\}, i = 1, 2, 3$$

Nótese que los sucesos elementales que son permutaciones de un mismo conjunto de resultados individuales, tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(N) &= 3 \cdot P(A, X, X) + 3 \cdot P(B, X, X) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- c) Sea el suceso  $S$  = “A y B ganan alternadamente”. Así, como cada torneo consta de 3 partidas, se obtiene que:

$$P(S) = P(A, B, A) + P(B, A, B) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

- d) Representemos por  $T$  el suceso “B gana al menos una partida”. La probabilidad deseada es:

$$\begin{aligned} P(T) &= 1 - P(T^c) = 1 - P((A, A, A)) - C_{3,1} \cdot P((A, X, X)) - C_{3,1} \cdot P(A, A, X) - P(X, X, X) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{72} + 3 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{216}\right) = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

19. Se dispone de tres cajas idénticas y cada caja contiene dos cajones. Una caja contiene una moneda de oro en cada cajón, otra contiene una moneda de plata en cada cajón, y la tercera una moneda de oro en un cajón, y una moneda de plata en el otro cajón.

- a) Se selecciona aleatoriamente una caja, ¿cuál es la probabilidad de que la caja seleccionada contenga monedas de diferentes metales?
- b) Se selecciona aleatoriamente una caja, y al abrir aleatoriamente un cajón, nos encontramos con una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro cajón contenga una moneda de plata?

(1 punto)

**Solución:**

Numeremos las cajas: la caja 1 es aquella caja con 2 monedas de oro, la 2 es la que tiene 2 monedas de plata y, finalmente, las monedas de

diferente metal (una de oro y otra de plata) se encuentran en la caja 3. Sea entonces el espacio muestral

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{1, 2, 3\}; \omega_2 \in \{O, P\}\}$$

donde  $\omega_1$  representa la caja escogida y  $\omega_2$  el metal de la moneda que contiene un cajón de esa caja escogido de forma aleatoria.  $P(\{(1, P)\}) = 0$ , pero  $P(\{(1, O)\}) = \frac{1}{3}$

- a) Sea el suceso  $A_i = \text{"Se selecciona la caja } i\text{"}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En nuestro caso,  $i = 3$ , por lo que el suceso  $A_3$  es equivalente a "La caja seleccionada tiene monedas de diferentes metales". Sean también los sucesos  $B_o = \text{"La moneda en el cajón escogido de forma aleatoria en la caja seleccionada es de oro"}$  y  $B_p$  el correspondiente a una moneda de plata. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\{(3, O)\}) + P(\{(3, P)\}) \\ &= P(B_o|A_3) \cdot P(A_3) + P(B_p|A_3) \cdot P(A_3) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- b) Si uno de los cajones contiene una moneda de oro y el otro una de plata, la caja en la que se encuentran es la  $B$ . Por lo tanto, la probabilidad pedida, es:

$$P(A_3|B_o) = \frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B_o)} =$$

$$\frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{\sum_{i=1}^3 P(B_o|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

20. Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25 % al primero, 35 % el segundo y 40 % el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1 %, 2 % y 3 % respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato. (1 punto)

**Solución:**

Se definen los sucesos:

Suceso P: seleccionar el primer aparato

Suceso S: seleccionar el segundo aparato

Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de Bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P|E) = \frac{P(P) \cdot P(E|P)}{P(P) \cdot P(E|P) + P(S) \cdot P(E|S) + P(T) \cdot P(E|T)}$$

$$P(P|E) = \frac{0,25 \cdot 0,01}{0,25 \cdot 0,001 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,03} = 0,116 \cong 12 = 12\%$$

21. Se sabe que el 65 % de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25 % se deben a la imprudencia del conductor (sobrio) y el resto a otras causas, (fallo mecánico...etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30 % de las veces en el primer caso, el 20 % en el segundo y el 5 % en el tercero.

Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes tenga resultado nefasto.

(1 punto)

**Solución:**

$A_1$  al suceso “tener un accidente por circular con una ingesta excesiva de alcohol”  $A_2$  al suceso “tener un accidente por imprudencia del conductor” y  $A_3$  al suceso “tener un accidente por otras causas”. Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, por lo que se verifican las hipótesis del teorema de la probabilidad total. Sea  $N$  el suceso “tener resultado nefasto”

$$P(N) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{N}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{N}{A_2}\right) + P(A_3) \cdot P\left(\frac{N}{A_3}\right) = 0,65 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,05 = 0,25$$

22. Se tienen tres monedas cargadas, donde se conoce que la primera tiene una probabilidad de 0.3 de obtenerse cara, la segunda una probabilidad

de 0.4 de ocurrir sello y la tercera una probabilidad de 0.4 de salir cara. Un jugador escoge al azar una de las monedas y la lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

(1 punto)

**RESPUESTA:**

Experimento aleatorio 1: Escoger al azar de una moneda

Propósito: Determinar cuál de las monedas fue escogida

Experimento aleatorio 2: Lanzamiento por primera vez de la moneda

Propósito: Determinar lo ocurrido en la parte superior de la moneda

Experimento aleatorio 3: Lanzamiento por segunda vez de la moneda

Propósito: Determinar lo ocurrido en la parte superior de la moneda

*Definición de los eventos:*

$M_i$  : se seleccionó la moneda  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$

$C_j$  : ocurrió cara en el primer lanzamiento  $j$ ,  $j = 1, 2$

Por el teorema de la probabilidad total tenemos:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= P(M_1)P(C_1 \cap C_2)/M_1 + P(M_2)P(C_1 \cap C_2)/M_2 + P(M_3)P(C_1 \cap C_2)/M_3 \\ &= (1/3) \times (0,3)^2 + (1/3) \times (0,6)^2 + (1/3) \times (0,4)^2 \approx 0,203 \end{aligned}$$

23. De los eventos A, B, C y D se tiene la siguiente información:

- A y B son independientes, B y C son independientes también A y C son independientes
- De A, B y C pueden ocurrir a lo sumo 2 de ellos
- $A \cup B \cup C$  y D son mutuamente excluyentes
- A, B y C ocurren cada uno con una probabilidad de  $r$
- El evento D tiene una probabilidad igual a  $1/5$

Encuentre el valor de  $r$  para el cual la probabilidad de que ocurra al menos uno de los cuatro eventos anteriores sea máxima.

(1 punto)

**RESPUESTA:**

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \dots \\ &\dots - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= r + r + r - r^2 - r^2 - r^2 - 0 = 3r - 3r^2 \end{aligned}$$

de lo cual se sigue

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A \cup B \cup C) + P(D) = 3r - 3r^2 + \frac{1}{5}$$

De esto calcular la probabilidad máxima es sencillo:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= f(r) = 3r - 3r^2 + \frac{1}{5} \\ \implies f'(r) &= 3 - 6r = 0 \implies r = \frac{1}{2} \\ \implies f''(r) &= -6 \implies f''\left(\frac{1}{2}\right) = -6 < 0 \end{aligned}$$

por lo tanto para  $r = \frac{1}{2}$  la probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos es máxima.

24. La probabilidad de que una persona que se detiene en una gasolinera solicite revisión de neumáticos es 0.12, la probabilidad de que pida revisión de aceite es 0.29 y la probabilidad de que pida ambas cosas es 0.07. ¿Cuál es la probabilidad de que no solicite la revisión de neumáticos ni de aceite?  
(1 punto)

**RESPUESTA:**

Sea “A” el evento de pedir revisión de aceite y “N” el evento de pedir revisión de neumáticos. Como ambos eventos son compatibles, tenemos:

$$P(N \cup A) = P(N) + P(A) - P(N \cap A) = 0,12 + 0,29 - 0,07 = 0,34$$

La probabilidad de no pedir revisión de neumáticos ni de aceite, es el complemento de pedir cualquiera de estos servicios o ambos. Por lo que tenemos:

$$P(N \cup A)^c = 1 - P(N \cup A) = 1 - 0,34 = 0,66$$

25. El capataz de un grupo de 20 obreros, pide la opinión de dos de ellos seleccionados aleatoriamente sobre las nuevas disposiciones de seguridad en la construcción. Si 12 están a favor y 8 están en contra, ¿cuál es la probabilidad de que los dos obreros elegidos por el capataz estén en contra?  
(1 punto)

**RESPUESTA:**

Llamemos “ $R_c$ ” el evento de que el primer obrero seleccionado esté en

contra y “ $S_c$ ” el evento de que el segundo obrero seleccionado esté en contra. Se trata de eventos condicionales, puesto que lo que realmente se pide es hallar la probabilidad de que el segundo obrero esté en contra, previo cumplimiento de que el primer seleccionado estuvo en contra, es decir, se pide  $P(R_c \cap S_c)$ . Aplicando el principio de la multiplicación en la probabilidad condicional y teniendo en cuenta que el evento condición es que el primer obrero estuvo en contra, tenemos:

$$P(R_c \cap S_c) = P(R_c) * P(S_c | R_c) = 8/20 * 7/19 = 56/380$$

26. Se sabe por experiencia que de cada 100 clientes que entran a un supermercado, 18 pagan con tarjeta débito. Si se seleccionan 12 clientes aleatoriamente uno tras otro, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno pagará con tarjeta débito?

(1 punto)

**RESPUESTA:**

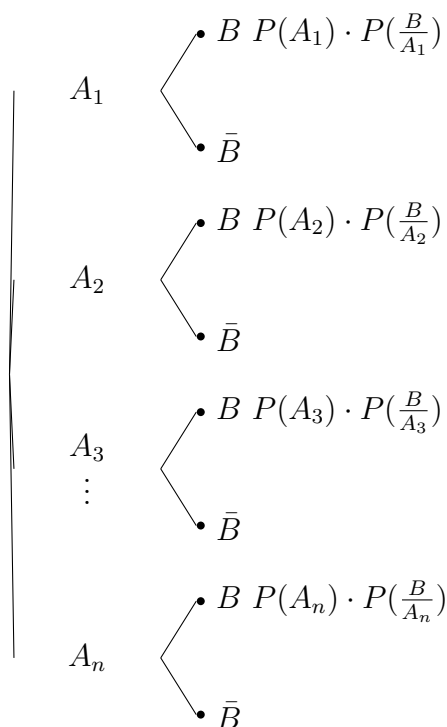
Si de cada 100 clientes 18 pagan con tarjeta débito, entonces la probabilidad de pagar con tarjeta débito es 0.18 y la probabilidad de no pagar con éste documento será el complemento, es decir 0.82. Los ensayos entre cliente y cliente son independientes.

De los 12 clientes, pagaré con tarjeta débito: 0, 1, 2, 3, ... o 12 clientes y éstos 13 resultados constituyen el espacio muestral, cuya probabilidad es igual a uno, según el segundo axioma de probabilidad. Como se pide calcular la probabilidad de que mínimo uno de los doce pague con tarjeta débito, ya que la probabilidad del espacio muestral es “1”, le debemos restar la probabilidad de que “0” (cero) paguen con tarjeta débito. La probabilidad pedida será entonces:

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - \underbrace{0,82 \times 0,82 \times \cdots \times 0,82}_{\text{Doce veces}} = 0,9076$$

27. Demuestre que se puede obtener  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)$  la probabilidad total del suceso B (la probabilidad de B) en el siguiente árbol (1 punto)



**Solución:**

Primero se toman las ramas que nos llevan a B y por definición se sabe que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$  (con probabilidades positivas), por tanto se tiene:

$$A_1 \rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) \quad (106)$$

$$A_2 \rightarrow P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B | A_2) \quad (107)$$

$$A_3 \rightarrow P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B | A_3) \quad (108)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (109)$$

$$A_n \rightarrow P(A_n \cap B) = P(A_n) \cdot P(B | A_n) \quad (110)$$

$$(111)$$

Ahora sumando las ecuaciones previas y dado que se requiere la probabilidad de B se tiene:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \quad (112)$$

Por último y reduciendo la sumatoria de la ecuación previa, se tiene:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i) \quad (113)$$

28. Se tienen 3 lotes de lápices dados por A,B,C; y su siguiente margen de defecto esta dado respectivamente por:  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{5}{100}$  y  $\frac{15}{100}$ . La cantidad de cada lote ésta dada por  $\frac{36}{100}$ ,  $\frac{60}{100}$  y  $\frac{4}{100}$  respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un lápiz de cualquiera de los lotes, éste se encuentre defectuoso? (1 punto)

**Solución:**

Se definen los sucesos:

Suceso A: seleccionar el lote A

Suceso B: seleccionar el lote B

Suceso C: seleccionar el lote C

Suceso D: seleccionar un resultado con defecto

Se sabe que:

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D | A_i) \cdot P(A_i) \quad (114)$$

Por tanto se tiene:

$$P(D) = P(D | A_1) \cdot P(A_1) + P(D | A_2) \cdot P(A_2) + P(D | A_3) \cdot P(A_3) \quad (115)$$

Ahora representando los sucesos se tiene:

$$P(D) = P(D | A) \cdot P(A) + P(D | B) \cdot P(B) + P(D | C) \cdot P(C) \quad (116)$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P(D) = \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{15}{100} \cdot \frac{4}{100} \quad (117)$$

$$P(D) = \frac{36}{1000} + \frac{300}{10000} + \frac{60}{10000} = \frac{36}{1000} + \frac{36}{1000} = \frac{72}{1000} = 0.072 \quad (118)$$

29. Demuestre que:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j)} \quad (119)$$

(1 punto)

**Solución:**

Por definición se sabe que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$  por tanto:

Utilizando solamente a  $P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P(A_i | B)$  se despeja  $P(A_i | B)$  y se obtiene:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad (120)$$

Ahora para la parte del numerador de la ecuación 15 se tiene que:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B | A_i) \quad (121)$$

Para la parte del denominador de la ecuación 15 se tiene que:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \quad (122)$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j) \quad (123)$$

Por último uniendo el resultado de las ecuaciones anteriores se concluye que:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j)} \quad (124)$$

30. Un paciente tiene una prueba para una enfermedad llamada condicionitis, una condición médica que afecta al 1 % de la población. La prueba resultante es positiva, la prueba muestra que el paciente tiene la enfermedad, Dejemos que  $D$  sea el evento de que el paciente tenga la enfermedad y  $T$  el evento de que la prueba sea positiva.

Suponiendo que la prueba tiene 95 % de precisión; hay diferentes mediciones de la precisión de una prueba, pero en este problema se asume que  $P(T|D) = 0.95$  y que  $P(T^c|D^c) = 0.95$ . La cantidad  $P(T|D)$  es conocida como la sensibilidad o tasa de verdadero positivo de la prueba y  $P(T^c|D^c)$  es conocida como la especificidad o tasa de verdadero negativo.

Encontrar la probabilidad condicional de que el paciente tiene condicionitis, dada la evidencia probada por el resultado de la prueba (1 punto)

### Solución:

Aplicando el teorema de Bayes y la ley de la probabilidad total se tiene:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)} \quad (125)$$

$$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T|D) \cdot P(D) + P(T|D^c) \cdot P(D^c)} \quad (126)$$

$$P(D|T) = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} \quad (127)$$

$$P(D|T) \approx 0.16 \quad (128)$$

Existe un 16 % de oportunidad de que el paciente tenga condicionitis, dado que su prueba es positiva

## Referencias

- [1] *Introducción a la Probabilidad.*
- [2] ARCIDIACONO, G. Calculadora estadística: Desviación estándar, 2015.

- 
- [3] BIOMÉD, R. C. I. Telomeros y telomerasas. *Revista Cubana de Investigaciones Biomédicas* (1999).
  - [4] CRONIDAS, A. Los cuadrados mágicos. el cuadrado de benjamin franklin, 2009.
  - [5] DE NUEVO LEÓN, C. U. U. A. La estructura del fullereno c60 y sus aplicaciones. ? (2002).
  - [6] DÍAZ, C., AND DE LA FUENTE, I. Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de bayes un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. *Educación Matemática* 18, 2 (2006).
  - [7] IRIBERRI, A. A por el cáncer a través de los telómeros, 2015.
  - [8] PLUS, T. Criterio de divisibilidad por 11, 2016.
  - [9] VELASCO, J. La máquina enigma, el sistema de cifrado que puso en jaque a europa, 2011.
  - [10] VITUTOR. Permutaciones con repetición, 2014.