



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

PROBABILIDAD, PROCESOS ALEATORIOS E INFERENCIA

# Apuntes

*Sandra Lizeth Sánchez González*

supervisado por  
Dr Jesús Alberto Martínez Castro

January 5, 2017



# Contents

<b>1</b>	<b>Tareas</b>	<b>5</b>
1.1	Tarea 0 . . . . .	5
1.1.1	Efecto Peltier . . . . .	5
1.2	Tarea 1 . . . . .	7
1.2.1	Espacio Muestral . . . . .	7
1.2.2	Suceso . . . . .	7
1.2.3	Muestra . . . . .	7
1.2.4	Probabilidad Clásica . . . . .	8
1.2.5	Probabilidad Geométrica . . . . .	8
1.2.6	Probabilidad Frecuentista . . . . .	8
1.2.7	Probabilidad Subjetiva . . . . .	9
1.2.8	Probabilidad Axiomática . . . . .	9
1.2.9	Conceptos . . . . .	9
1.2.10	Riesgo . . . . .	9
1.2.11	Peligrosidad . . . . .	10
1.2.12	Vulnerabilidad . . . . .	10
1.2.13	Amenaza . . . . .	10
1.2.14	Teorema del Binomio . . . . .	10
1.2.15	Triangulo de Pascal . . . . .	10
1.2.16	Problemas aleatorios . . . . .	11
1.3	Tarea 2 . . . . .	13
1.3.1	Ejemplos Permutaciones . . . . .	13
1.3.2	Ejemplos de Combinaciones . . . . .	13
1.3.3	Técnicas de conteo Para el cuadrado . . . . .	14
1.3.4	Ecuaciones . . . . .	15
1.3.5	Piramide de Pascal . . . . .	16
1.4	Tarea 3 . . . . .	17
1.4.1	Desarrollo de levi . . . . .	17
1.4.2	Ecuaciones de permutaciones . . . . .	19
1.4.3	Telómeros . . . . .	19
1.5	Tarea 4 . . . . .	20
1.5.1	Permutaciones con repetición . . . . .	20
1.5.2	Medidas de dispersión . . . . .	20
1.5.3	Desviación media para datos agrupados . . . . .	21
1.5.4	Varianza . . . . .	21
1.5.5	Maquina Enigma . . . . .	21
1.6	Tarea 5 . . . . .	23
1.6.1	Permutaciones . . . . .	23
1.7	Tarea 6 . . . . .	26
1.7.1	leyes de distributividad . . . . .	26

1.7.2	Demostracion de Leyes de De Morgan . . . . .	28
1.7.3	Divisibilidad 11 . . . . .	28
1.7.4	Principio De La Dualidad . . . . .	29
1.7.5	Ejemplo de histograma . . . . .	30
1.7.6	Numero de Erdős . . . . .	30
1.7.7	Aproximación de Stirling . . . . .	31
1.8	Tarea 7 . . . . .	33
1.8.1	Fullerenos . . . . .	33
1.9	Tarea 8 . . . . .	34
1.9.1	Teorema del límite central . . . . .	34
1.9.2	Simpson . . . . .	34
1.10	Tarea 9 . . . . .	36
1.10.1	Ejercicios por inducción . . . . .	36
1.11	Tarea 10 . . . . .	37
1.11.1	Paradoja . . . . .	37
1.11.2	Teorema de Bayes . . . . .	45
1.12	Tarea 11 . . . . .	54
1.12.1	Probabilidad Subjetiva . . . . .	54
1.12.2	Los puentes de Königsberg . . . . .	54
1.13	Tarea 12 . . . . .	57
1.13.1	Justificaciones Formulas Caminata al Azar . . . . .	59
1.14	Tarea 13 . . . . .	61
1.14.1	Curvas ROC . . . . .	61
1.14.2	Matriz de confusión . . . . .	62
1.14.3	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE . . . . .	63
1.15	Tarea 14 . . . . .	65
1.15.1	Eigenvalores y eigenvectores . . . . .	65
1.16	Tarea 15 . . . . .	66
1.16.1	Plano Colores Humano . . . . .	66
1.16.2	Análisis de componentes principales . . . . .	66
1.17	Tarea 16 . . . . .	68
1.17.1	Principal Component Analysis vs. Independent Component Analysis for Damage Detection . . . . .	68
1.18	Tarea 17 . . . . .	69
1.18.1	Radiación del cuerpo negro . . . . .	69
1.18.2	Ley del desplazamiento de Wien . . . . .	69
1.19	Histograma de bolitas . . . . .	70
<b>2</b>	<b>Exámenes</b>	<b>71</b>
2.1	Primer examen . . . . .	71
2.1.1	Mi examen . . . . .	71
2.1.2	Examen a resolver . . . . .	78
2.1.3	Examen a revisar . . . . .	82
2.2	Segundo examen . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Programas</b>	<b>113</b>
3.1	Cuadro Mgico . . . . .	113
3.2	Permutaciones . . . . .	115
3.3	Polgonos . . . . .	117
3.4	Fractal Triangulo . . . . .	119

3.5	Cuadrado Flor . . . . .	120
3.6	Bolitas . . . . .	121



# Chapter 1

## Tareas

“La conciencia de la  
inconsciencia de la vida es el  
más antiguo impuesto que recae  
sobre la inteligencia.”

---

Fernando Pessoa

### 1.1 Tarea 0

#### 1.1.1 Efecto Peltier

El efecto Peltier consiste en hacer pasar una corriente por un circuito compuesto de materiales diferentes cuyas uniones están a la misma temperatura, se absorbe calor en una unión y se desprende en la otra. La parte que se enfría suele estar cerca de los 10 C aprx., mientras que la parte que absorbe calor puede alcanzar rápidamente los 80 C.

La parte a) de la Figura 1 muestra un esquema de la heladera portátil utilizada para este trabajo, consistente en una bomba de calor (celda Peltier de 45 W de potencia máxima, con ventilador para enfriamiento del lado caliente) que extrae la energía térmica de una caja de polipropileno, aislada mediante poliestireno expandido y alimentada por medio de paneles fotovoltaicos (3/4 m<sup>2</sup> para la potencia máxima de alrededor de 60 W del sistema). La parte b) es una fotografía del interior de la heladera (de 1/5 m<sup>3</sup> de capacidad), que permite observar el lado frío que va unido a la celda Peltier, mediante cuatro tornillos y el aseguramiento de una buena transferencia térmica mediante grasa de silicona, para mejorar la conducción del calor.

La evolución de la temperatura del aire de la heladera portátil es similar al medido para una heladera convencional, salvo en lo que respecta a la rapidez de enfriamiento cuando se introduce una misma masa de agua en una y otra. La comparación deja en desventaja al enfriador solar, a menos que se tenga en cuenta el mayor volumen de la heladera convencional respecto del enfriador.

La observación de curvas de enfriamiento de las distintas superficies del enfriador vacío permite concluir que existe semejanza entre este dispositivo y un circuito RC con fem constante. Es decir que tiene un comportamiento capacitivo.

No existen mayores diferencias entre el caso en que se alimenta con la batería o el

regulador, salvo cuando la primera se aproxima al límite de descarga, de aproximadamente 5 horas para el caso.

La respuesta del enfriador acompaña el nivel de radiación solar existente, de manera inversa, como era de esperar.

El aire ambiente es el sumidero cuya temperatura es de referencia y hacia ella tienden todas las demás al cesar la incidencia de radiación. Esta consideración permitirá analizar cuantitativamente el enfriador de manera simplificada.

Funcionando con radiación solar, la temperatura del aire en el interior llegó a disminuir hasta los 5 C.

Existen posibilidades de introducir mejoras en el funcionamiento del dispositivo, ya sea a través de una más cuidadosa aislación térmica del mismo, como la de colocar el elemento enfriador en la parte superior del equipo en lugar de hacerlo en un costado. No se observó mayor influencia según cual fuera la orientación del panel fotovoltaico.

Es posible realizar un diseño de cocina-enfriador solar que combine ambos efectos de manera sucesiva para que , una vez realizada la cocción de algún preparado, se pueda comenzar el enfriamiento de lo que reste del mismo.

El efecto Peltier hace referencia a la creación de una diferencia de temperatura debida a un voltaje eléctrico. Sucede cuando una corriente se hace pasar por dos metales o semiconductores conectados por dos 'junturas de Peltier'. La corriente propicia una transferencia de calor de una juntura a la otra: una se enfría en tanto que otra se calienta.



## 1.2 Tarea 1

### 1.2.1 Espacio Muestral

Conjunto formado por todos los posibles sucesos elementales.

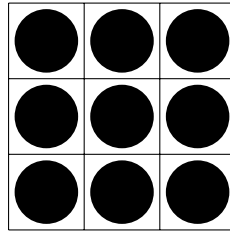


Figure 1.1:

### 1.2.2 Suceso

Conjunto de espacio muestral.

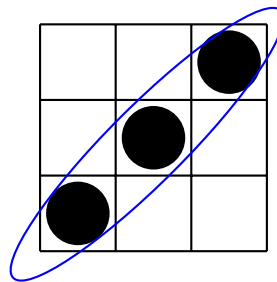


Figure 1.2:

### 1.2.3 Muestra

Conjunto de resultados que se obtienen al repetir un cierto numero de veces  $n$ , un experimento aleatorio.

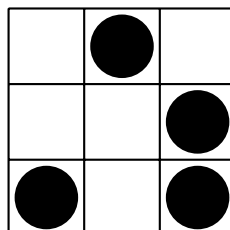


Figure 1.3:

### 1.2.4 Probabilidad Clásica

Probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe tener lugar de preferencia a los demás, lo que hace que todos sean, para nosotros, igualmente posibles.

Laplace define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables, siempre que todos sean igualmente posibles

La probabilidad clásica supone el número de casos totales (posibles) sea finito, lo que implica otra limitación de su campo de aplicabilidad.[Santaló et al., 1970]

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Numeroderesultadosfavorablespara } A}{\text{Numerototalderesultadosen } S} \quad (1.1)$$

### 1.2.5 Probabilidad Geométrica

La probabilidad de un evento representa la posibilidad de que ese evento ocurrirá. La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto esté en una parte de un segmento de línea o en una parte de una región. [Pliego and Pérez, 2006]

Considere el segmento de línea  $\overline{PQ}$  Suponga que un punto  $X$  es escogido al azar.



Figure 1.4:

Entonces,

La probabilidad de que  $|X|$  este en  $|\overline{PQ}| = \frac{\text{Longitudde } PR}{\text{Longitudde } PQ}$  Considere la región  $|R|$  y

la región  $|S|$ . Suponga que un punto  $P$  es escogido al azar.

Entonces,

La probabilidad d que  $P$  este en  $S = \frac{\text{Areade } S}{\text{Areade } R}$

### 1.2.6 Probabilidad Frecuentista

Cuantas más veces se repita el experimento, al final las posibilidades de que ocurra cada uno de los sucesos será regular.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = P(S) \quad (1.2)$$

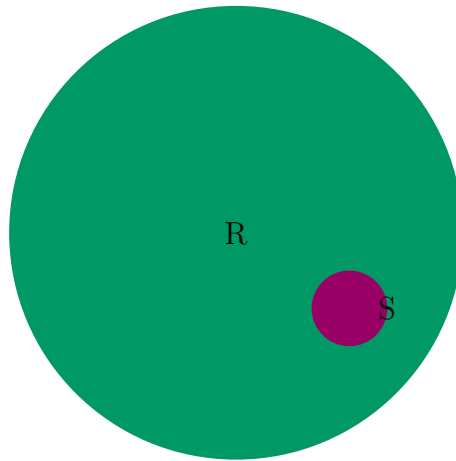


Figure 1.5:

Probabilidad de un suceso como el limite de la frecuencia relativa de aparición de un suceso, al repetirse indefinidamente el experimento aleatorio.

### 1.2.7 Probabilidad Subjetiva

Es una forma de cuantificar por medio de factores de ponderación individuales, la probabilidad de que ocurra cierto evento, cuando no es posible de cuantificar de otra manera más confiable.

### 1.2.8 Probabilidad Axiomática

Dado un experimento con espacio muestral  $S$  y una familia de eventos  $A$ , tal que sus elementos cumplen con las leyes del álgebra de eventos se llama Probabilidad axiomática a la función numérica  $P$ , cuyo dominio es  $A$ , y como rango el intervalo  $[0, 1]$ , siendo tal que los valores  $P(E)$  para cualquier evento  $E$  en  $A$ , cumplen los siguientes tres axiomas:

**Axiomas de Kolmogórov - Para familias finitas:**

- Axioma 1 Para cualquier evento  $E$ , de la familia  $A$ ,  $P(E) \geq 0$
- Axioma 2 Para el espacio muestra  $S$ ,  $P(S) = 1$
- Axioma 3 Para cualquier sucesión finita de eventos mutuamente excluyentes de  $A, E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , se cumple

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = \sum_{k=1}^n P(E_k) \quad (1.3)$$

### 1.2.9 Conceptos

#### 1.2.10 Riesgo

El riesgo se define como la combinación de la probabilidad de que se produzca un evento y sus consecuencias negativas. Los factores que lo componen son la amenaza y la vulnera-

bilidad.

### 1.2.11 Peligrosidad

Probabilidad de ocurrencia de una situación peligrosa.

### 1.2.12 Vulnerabilidad

La probabilidad de unos determinados daños D dado el hecho de que se produce un evento peligroso P en forma de probabilidad condicionada

### 1.2.13 Amenaza

Probabilidad de un evento con una cierta magnitud

### 1.2.14 Teorema del Binomio

Expresa la  $n$ -ésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio

$$(a + b)^n$$

Si a este binomio se le multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$(a + b)^1 = a + b \quad (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) =$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k \quad (1.4)$$

Observando los coeficientes de cada polinomio consiguiente se puede observar el seguimiento de esta secuencia,

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{array}$$

Figure 1.6:

### 1.2.15 Triangulo de Pascal

#### Problemas Deterministas

1. Tirar un lápiz y que caiga al piso

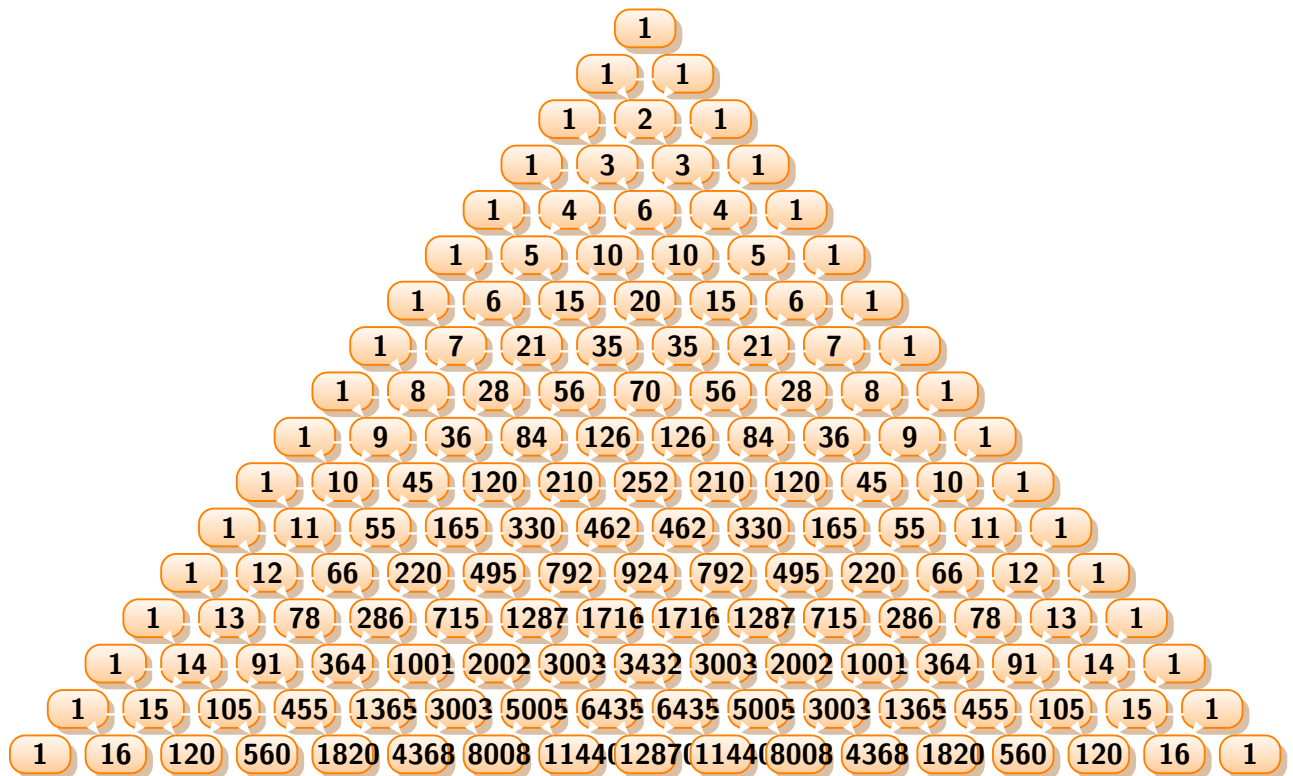


Figure 1.7:

2. Se congele el agua al llegar a una temperatura de 0C
3. Se apague la television si la desconecto
4. Caerme aprendiendo a andar en patineta
5. Reprobar la materia si no paso el examen clase
6. Quemarme si toco una olla caliente
7. Quedarme en la carretera si no le hecho gasolina al carro
8. Me moje si corro por la lluvia
9. obtener una canica verde de una bolsa con todas las canicas verdes
10. Que me peguen al participar en una pelea de box

### 1.2.16 Problemas aleatorios

1. Lanzar un dado y que caiga 5
2. Llueva el miércoles
3. Me saque la lotería
4. Lanzar un dado y obtener un numero par
5. Obtener cara al lanzar una moneda

6. Escoger la F jugando basta
7. Ser el primero en calificar la tarea en un grupo
8. que este ejemplo sea el 8
9. encontrarme 100 pesos hoy
10. Me detenga el alcolimetro

## 1.3 Tarea 2

### 1.3.1 Ejemplos Permutaciones

1. Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5.?
2. De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
3. De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
4. Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; cuántos números de nueve cifras se pueden formar?
5. Con las letras de la palabra libro, cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?
6. Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? Cuántos de ellos son mayores de 70.000?
7. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?
8. De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería?
9. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?
10. Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí, de cuántas formas posibles pueden ordenarse?

### 1.3.2 Ejemplos de Combinaciones

1. Una tarjeta de circuito impresa se puede comprar de entre 5 proveedores. De cuántas maneras puede elegirse 3 proveedores?
2. Un comité de 4 personas va a ser seleccionado de un grupo de 3 estudiantes de 4to. Año, 4 de 3ro. Y 5 de 2do. Si dos estudiantes de tercero no son elegibles. De cuántas maneras puede seleccionarse el comité con 2 estudiantes de 2do., 1 de 3ro. Y 1 de 4to?
3. Una mano de Póker consta de 5 cartas, si el mazo posee 52 cartas De cuántas formas se puede recibir una mano?
4. Un amigo le quiere regalar a otro 2 libros y los puede elegir de entre 15 opciones diferentes. De cuántas formas puede hacerlo?
5. Una mano de Póker consta de 5 cartas. De cuántas maneras posibles se puede obtener un full?
6. Una organización de una escuela tiene 30 miembros. Cuatro miembros serán escogidos al azar para una entrevista con el periódico de la escuela sobre el grupo. Cuántos grupos de 4 personas son posibles?

7. De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?
8. A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. Cuántos saludos se han intercambiado?
9. En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?
10. Cuántas apuestas de Lotería Primitiva de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los seis resultados, de 49?

### 1.3.3 Técnicas de conteo Para el cuadrado

Se tiene un cuadrado y se quiere llegar del punto A al punto B cuantos posibles caminos hay para llegar?

Al recorrer el cuadrado se observan solo dos posibles caminos, los cuales se muestran a continuación.

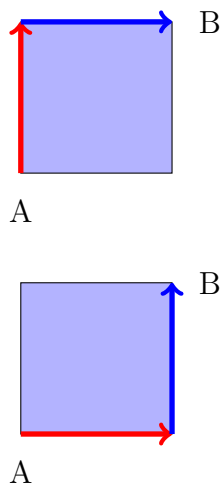


Figure 1.8:

Al llegar hasta el punto  $B$  se requieren todos los caminos posibles a los puntos  $B1$  y  $B2$ , por lo que se puede ver la semejanza con el triangulo de Pascal (en el caso de un cuadrado, si lo giramos 45 resulta el triangulo de Pascal).

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1
 \end{array}$$

Figure 1.9:

Para el caso de un cuadrado de  $2 \times 2$ , se puede decir

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

Figure 1.10:

Con  $n$  = Dimensión del cuadrado Con  $k$  = Mínima cantidad de pasos

$$\binom{n}{k} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Por lo tanto se tienen 6 formas diferentes de llegar del punto A al B

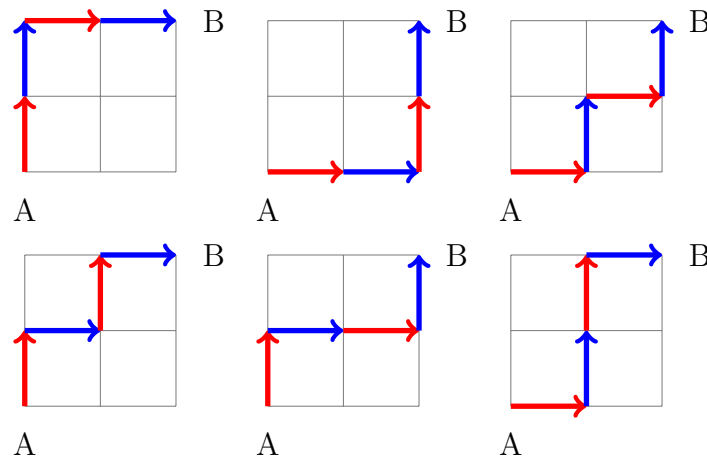


Figure 1.11:

### 1.3.4 Ecuaciones

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x(x-1)! = x! \text{ y } \frac{x!}{(x-1)!} = x!$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = \frac{(n-1)! \frac{r!}{(r-1)!} + (n-1)! \frac{(n-r)!}{(n-1-r)!}}{r!(r-1)!(n-r)!((n-r)-1)!} = \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$= \frac{(n-1)!r + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!(r+n-r)}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (1.6)$$

### 1.3.5 Piramide de Pascal

La solución de una declaración del tipo  $(a + b + c)$  n se puede dibujar como una malla triangular de dos dimensiones ; los componentes de la solución que se está en los nodos de la red.

$$1 (a + b + c)^0$$

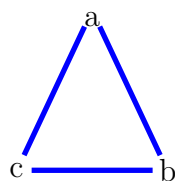


Figure 1.12:

$$(a + b + c)^1$$

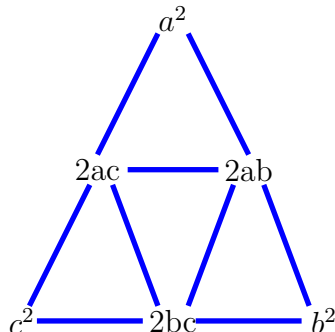


Figure 1.13:

- Los números en los bordes de la pirámide son todos unos .
- Cada una de las caras de la pirámide (pero no la base) son triángulos de Pascal. Es decir, un número en un nodo de superficie (no un nodo en un borde , a menos que se asume que la pirámide está incrustado en un "mar" de ceros ) es la suma de los dos números cara más cercana en la capa de arriba.
- Un número en un nodo interno es la suma de los tres números más cercanas en la capa de arriba.

## 1.4 Tarea 3

### 1.4.1 Desarrollo de levi

$$(\overline{A} \times \overline{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{Permutaciones pares} \\ -1, & \text{Permutaciones impares} \\ 0, & \text{Repite} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 1 \text{ Solo cuando } \{123, 231, 312\} \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \text{ Solo cuando } \{321, 132, 213\} \quad (1.10)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (1.11)$$

Para el caso  $i = 1$

$$(\overline{A} \times \overline{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_{11k} A_1 B_k + \varepsilon_{12k} A_2 B_k + \varepsilon_{13k} A_3 B_k \quad (1.13)$$

$$= \varepsilon_{111} A_1 B_1 + \varepsilon_{112} A_1 B_2 + \varepsilon_{113} A_1 B_3 \dots \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_{121} A_2 B_1 + \varepsilon_{122} A_2 B_2 + \varepsilon_{123} A_2 B_3 \dots \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{131} A_3 B_1 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 + \varepsilon_{133} A_3 B_3 \quad (1.16)$$

$$= \cancel{\varepsilon_{111} A_1 B_1} + \cancel{\varepsilon_{112} A_1 B_2} + \cancel{\varepsilon_{113} A_1 B_3} \dots \quad (1.17)$$

$$\cancel{\varepsilon_{121} A_2 B_1} + \cancel{\varepsilon_{122} A_2 B_2} + \varepsilon_{123} A_2 B_3 \dots \quad (1.18)$$

$$\cancel{\varepsilon_{131} A_3 B_1} + \varepsilon_{132} A_3 B_2 + \cancel{\varepsilon_{133} A_3 B_3} \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 \quad (1.20)$$

$$A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad (1.21)$$

Para el caso  $i = 2$

$$(\overline{A} \times \overline{B})_1 = \varepsilon_{2jk} A_j B_k \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{21k} A_1 B_k + \varepsilon_{22k} A_2 B_k + \varepsilon_{23k} A_3 B_k \quad (1.23)$$

$$= \varepsilon_{211} A_1 B_1 + \varepsilon_{212} A_1 B_2 + \varepsilon_{213} A_1 B_3 \dots \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_{221} A_2 B_1 + \varepsilon_{222} A_2 B_2 + \varepsilon_{223} A_2 B_3 \dots \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{232} A_3 B_2 + \varepsilon_{233} A_3 B_3 \quad (1.26)$$

$$= \cancel{\varepsilon_{211}A_1\overline{B_1}} + \cancel{\varepsilon_{212}A_1\overline{B_2}} + \varepsilon_{213}A_1B_3\ldots \quad (1.27)$$

$$\cancel{\varepsilon_{221}A_2\overline{B_1}} + \cancel{\varepsilon_{222}A_2\overline{B_2}} + \cancel{\varepsilon_{223}A_2\overline{B_3}}\ldots \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_{231}A_3B_1 + \cancel{\varepsilon_{232}A_3\overline{B_2}} + \cancel{\varepsilon_{233}A_3\overline{B_3}} \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{213}A_1B_3 + \varepsilon_{231}A_3B_1 \quad (1.30)$$

$$-A_1B_3 + A_3B_2 \quad (1.31)$$

Para el caso  $i = 3$

$$(\overline{A} \times \overline{B})_3 = \varepsilon_{3jk}A_jB_k \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_{31k}A_1B_k + \varepsilon_{32k}A_2B_k + \varepsilon_{33k}A_3B_k \quad (1.33)$$

$$= \varepsilon_{311}A_1B_1 + \varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{313}A_1B_3\ldots \quad (1.34)$$

$$\varepsilon_{321}A_2B_1 + \varepsilon_{322}A_2B_2 + \varepsilon_{323}A_2B_3\ldots \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{331}A_3B_1 + \varepsilon_{332}A_3B_2 + \varepsilon_{333}A_3B_3 \quad (1.36)$$

$$= \cancel{\varepsilon_{311}A_1\overline{B_1}} + \varepsilon_{312}A_1B_2 + \cancel{\varepsilon_{313}A_1\overline{B_3}}\ldots \quad (1.37)$$

$$\varepsilon_{321}A_2B_1 + \cancel{\varepsilon_{322}A_2\overline{B_2}} + \cancel{\varepsilon_{323}A_2\overline{B_3}}\ldots \quad (1.38)$$

$$\cancel{\varepsilon_{331}A_3\overline{B_1}} + \cancel{\varepsilon_{332}A_3\overline{B_2}} + \cancel{\varepsilon_{333}A_3\overline{B_3}} \quad (1.39)$$

$$\varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{321}A_2B_1 \quad (1.40)$$

$$A_1B_2 - A_2B_1 \quad (1.41)$$

### 1.4.2 Ecuaciones de permutaciones

El argumento presentado para el ejemplo puede generalizarse de la siguiente forma. Si se tiene un conjunto con  $n$  elementos, de los cuales se van a escoger  $r$  de ellos, la elección (ordenada) puede hacerse de:

$$P = \binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-r+1) \quad (1.42)$$

Ya que en el primer paso se tienen  $n$  opciones, en el segundo se tienen  $n-1$ , en el tercero  $n-2$ , y así sucesivamente, terminando en el paso  $r$  que tendrá  $n-r+1$  opciones.

### 1.4.3 Telómeros

El envejecimiento de nuestras células es fuente de enfermedad. Cuando nuestras células son jóvenes hay ausencia de esta, mientras que a medida que se dividen, se producen una serie de procesos moleculares que causan el envejecimiento celular y provocan todo tipo de enfermedades. Un cambio de paradigma en este campo ha llevado al planteamiento de que si queremos disminuir o retrasar la aparición de enfermedades tenemos que atacar directamente el proceso de envejecimiento. En los últimos 20 años, los científicos han descubierto muchos de los procesos moleculares que conducen al envejecimiento. Una de las vías mejor estudiadas está relacionada con el acortamiento de los telómeros, las estructuras de protección situadas al final de nuestros cromosomas y que se pierden a lo largo de la vida. Podría un retraso en este proceso, ralentizar también el envejecimiento y la aparición de la enfermedad?[Fernández-Alonso, 2016]

Teoría de los telómeros y telomerasas. los telómeros son regiones extremo del DNA, que no son codificables y funcionan como estabilidad estructural de los cromosomas, en la divisional celular y el tiempo de vida de algunas células. dichos telómeros se acortan cada que una célula se divide, este acontecimiento hace que reduzca el numero de mitosis según el estirpe celular. cuando existe un telómero corto se presenta el final de la mitosis, algunas estirpes celulares como los fibroblastos no poseen telomerasas y si un numero determinado de mitosis.[González, 2013]

## 1.5 Tarea 4

### 1.5.1 Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de  $n$  elementos donde el primer elemento se repite  $a$  veces , el segundo  $b$  veces , el tercero  $c$  veces, ...

$$n = a + b + c + \dots \quad (1.43)$$

Son los distintos grupos que pueden formarse con esos  $n$  elementos de forma que :

- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{P_n}{a!b!c!\dots} \quad (1.44)$$

### 1.5.2 Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

Las medidas de dispersión son:

- Rango o recorrido

El rango es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una distribución estadística.

- Desviación media

La desviación respecto a la media es la diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

$$D_i = x - \bar{x} \quad (1.45)$$

La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media.

La desviación media se representa por  $D_{\bar{x}}$ [GRAFICAS, ]

$$D_{\bar{x}} = \frac{|X_1 - \bar{x}| + |X_2 - \bar{x}| + \dots + |X_n - \bar{x}|}{N} \quad (1.46)$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{x}|}{N} \quad (1.47)$$

### 1.5.3 Desviación media para datos agrupados

Si los datos vienen agrupados en una tabla de frecuencias, la expresión de la desviación media es:

$$D_{\bar{x}} = \frac{|X_1 - \bar{x}|f_1 + |X_2 - \bar{x}|f_2 + \dots + |X_n - \bar{x}|f_n}{N} \quad (1.48)$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{x}|f_i}{N} \quad (1.49)$$

### 1.5.4 Varianza

La varianza es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media de una distribución estadística.

La varianza se representa por  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{N} \quad (1.50)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{N} \quad (1.51)$$

Para simplificar el cálculo de la varianza vamos a utilizar las siguientes expresiones que son equivalentes a las anteriores.

$$\sigma^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (1.52)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (1.53)$$

#### Propiedades de la varianza

1. La varianza será siempre un valor positivo o cero, en el caso de que las puntuaciones sean iguales.
2. Si a todos los valores de la variable se les suma un número la varianza no varía.
3. Si todos los valores de la variable se multiplican por un número la varianza queda multiplicada por el cuadrado de dicho número.
4. Si tenemos varias distribuciones con la misma media y conocemos sus respectivas varianzas se puede calcular la varianza total.

### 1.5.5 Maquina Enigma

Enigma era el nombre de una máquina que disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio, que permitía usarla tanto para cifrar como para descifrar mensajes.

Su sistema de cifrado fue finalmente descubierto y la lectura de la información que contenían los mensajes supuestamente protegidos es considerado, a veces, como la causa de haber podido concluir la Segunda Guerra Mundial al menos dos años antes de lo que hubiera acaecido sin su descifrado.

La máquina Enigma fue un dispositivo electromecánico. El mecanismo estaba constituido fundamentalmente por un teclado similar al de las máquinas de escribir cuyas teclas eran interruptores eléctricos, un engranaje mecánico y un panel de luces con las letras del alfabeto.

La parte eléctrica consistía en una batería que encendía una lámpara de una serie de ellas, que representan cada una de las diferentes letras del alfabeto. Se puede observar en la parte inferior de la imagen adjunta el teclado, y las lámparas son los circulitos que aparecen encima de éste. El corazón de la máquina Enigma era mecánico y constaba de

varios rotores conectados entre sí. Cada rotor es un disco circular plano con 26 contactos eléctricos en cada cara, uno por cada letra del alfabeto. Cada contacto de una cara está conectado o cableado a un contacto diferente de la cara contraria

**Criptoanálisis básico** En la técnica del análisis de frecuencia, las letras y los patrones de las letras son la pista. Puesto que en cada lengua aparecen ciertas letras con mucha más frecuencia que otras, contar el número de veces que aparece cada letra en el texto cifrado generalmente desvela información sobre probables sustituciones en los cifrados usados de manera frecuente en la sustitución.[Sebag-Montefiore, 2011]



## 1.6 Tarea 5

### 1.6.1 Permutaciones

Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras *abcde*

Permutaciones sin repetición

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1.54)$$

$$P = n! \quad (1.55)$$

Permutaciones con repetición

$$n \cdot n \cdot n = n^r \quad (1.56)$$

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \quad (1.57)$$

**Tomando 1 letra**

Permutaciones sin repetición

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-1)!} = 5 \quad (1.58)$$



Figure 1.14:

**Tomando 2 letras**

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \quad (1.59)$$

$$P = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10 \quad (1.60)$$

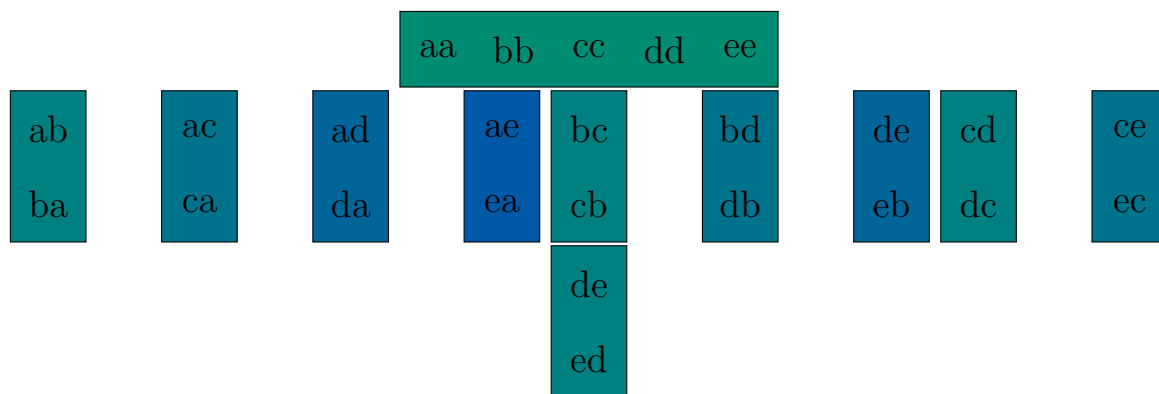


Figure 1.15:

Tomando 3 letras

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \quad (1.61)$$

$$P = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10 \quad (1.62)$$

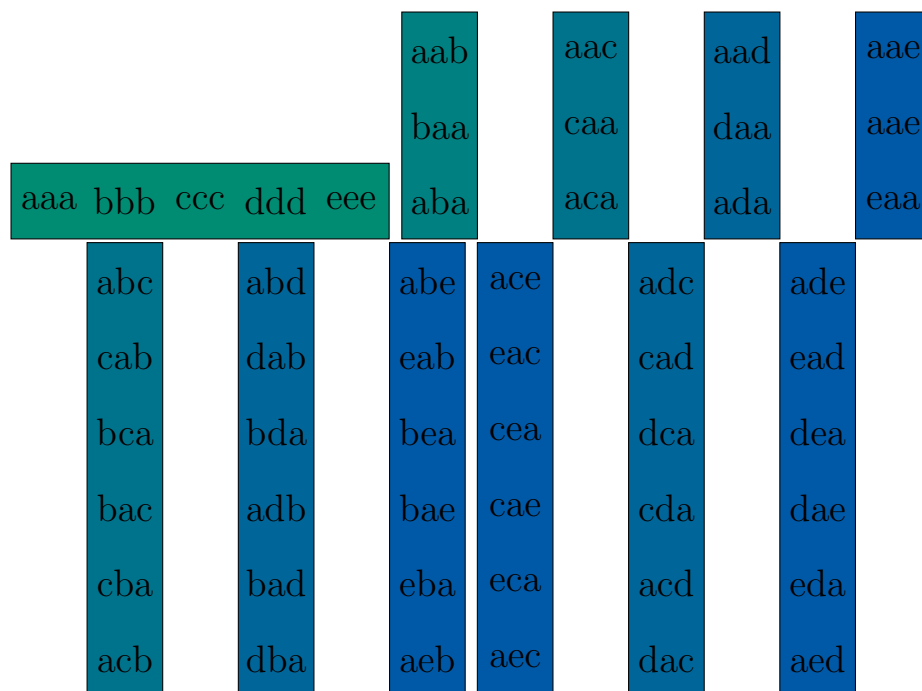


Figure 1.16:

Tomando 4 letras

Teorema 2.7 schaum's

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$$

Decimos que:

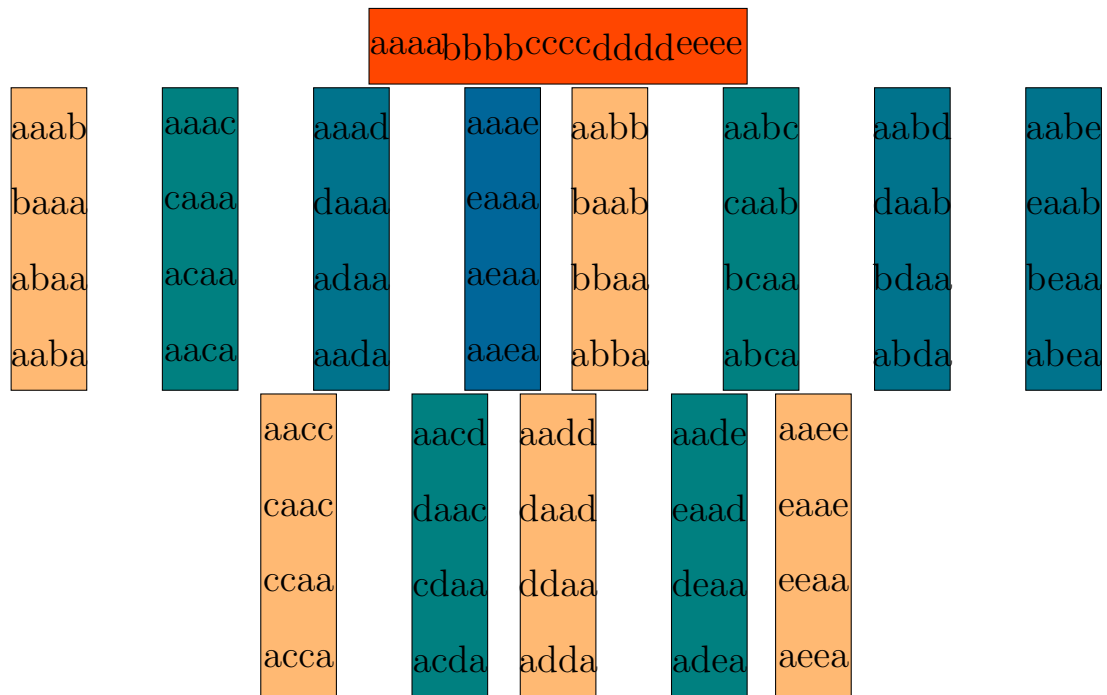


Figure 1.17:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

## 1.7 Tarea 6

### 1.7.1 leyes de distributividad

#### Primera ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado[TRILLAS, 1968]

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.63)$$

Demostración

Proponemos  $x \in A \cup (B \cap C)$ . si  $x \in A \cup (B \cap C)$  entonces  $x$  es incluso en  $A$  ó en  $(B \cap C)$ .  $x \in A$  ó  $x \in (B \cap C)$   $x \in A$  ó  $\{x \in B \text{ y } x \in C\}$   $\{x \in A \text{ ó } x \in B\}$  y  $\{x \in A \text{ y } x \in C\}$

$$x \in (A \text{ ó } B) \text{ y } x \in (A \text{ ó } C) \quad x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cap C) \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Por lo tanto

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.64)$$

Proponemos  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . si  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  entonces  $x$  esta en  $(A \text{ ó } B)$  y  $x$  esta en  $(A \text{ ó } C)$ .  $x \in (A \text{ ó } B)$  y  $x \in (A \text{ ó } C)$   $\{x \in A \text{ ó } x \in B\}$  y  $\{x \in A \text{ ó } x \in C\}$

$$x \in A \text{ ó } \{x \in B \text{ y } x \in C\} \quad x \in A \text{ ó } \{x \in (B \cap C)\} \quad x \in A \cup \{x \in (B \cap C)\}$$

$$x \in A \cup (B \cap C) \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad (1.65)$$

De la ecuación 3 y 4:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.66)$$

### Segunda ley de distributividad

La ley de distributividad establece que la suma y el producto evaluado permanece el mismo valor incluso cuando el valor de los elementos este alterado

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.67)$$

Demostración

Proponemos  $x \in A \cap (B \cup C)$ . si  $x \in A \cap (B \cup C)$  entonces  $x \in A$  y  $x \in (B \text{ ó } C)$ .  $x \in A$  y  $x \in (B \text{ ó } C)$   $x \in A$  y  $\{x \in B \text{ y } x \in C\}$   $\{x \in A \text{ y } x \in B\}$  ó  $\{x \in A \text{ y } x \in C\}$   $x \in (A \text{ ó } B)$  y  $x \in (A \text{ ó } C)$   $x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$   $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (1.68)$$

Proponemos  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . si  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  entonces  $x \in (A \cap B)$  ó  $x \in (A \cap C)$ .  $x \in (A \text{ y } B)$  ó  $x \in (A \text{ y } C)$   $\{x \in A \text{ y } x \in B\}$  ó  $\{x \in A \text{ y } x \in C\}$   $x \in A$  y  $\{x \in B \text{ ó } x \in C\}$   $x \in A$  y  $\{x \in (B \text{ ó } C)\}$   $x \in A \cap \{x \in (B \cup C)\}$   $x \in A \cap (B \cup C)$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (1.69)$$

De la ecuación 7 y 8:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.70)$$

### 1.7.2 Demostracion de Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  en un universal  $\vartheta$ , se verifica:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (1.71)$$

$$2.(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (1.72)$$

Demostración de 1.74 Demostracion de Leyes de De Morgan equation.1.7.74

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (1.73)$$

En efecto, sea  $x$  un elemento arbitrario del conjunto universal  $\vartheta$ . Entonces,

$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin (A \cup B)$  Definición de complementario

$\leftrightarrow \neg[x \in (A \cup B)]$  Negación

$\leftrightarrow \neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$  Definición de unión

$\leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$  De Morgan para ?

$\leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$  Negación

$\leftrightarrow (x \in A') \wedge (x \in B')$  Definición de complementario

$\leftrightarrow x \in (A' \cap B')$  Definición de intersección

y al ser  $x$  un elemento arbitrario de  $\vartheta$ , se sigue que

$\forall x[x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$

luego tenemos que:

$$1.(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (1.74)$$

y con esto se prueba analogamente la ley Morgan.

### 1.7.3 Divisibilidad 11

Se dice que un número es divisible entre 11, cuando la diferencia de la suma de las cifras de posición par y la suma de las cifras de posición impar es igual a cero u once:

Numero es =  $xxxxx...x_n$  Posiciones=impar<sub>1</sub>par<sub>1</sub>impar<sub>2</sub>par<sub>2</sub>... $x_n$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (i_1 + i_2 + \dots + i_n) == (0, 11) \quad (1.75)$$

Ejemplos:

$$28765 = (2 + 7 + 5) - (8 + 6) = 14 - 14 = 0 \quad (1.76)$$

Por lo tanto 28765 es divisible entre 11

$$\frac{28765}{11} = 2615 \quad (1.77)$$

$$979 = (9 + 9) - (7) = 11 \quad (1.78)$$

Por lo tanto 979 es divisible entre 11

$$\frac{979}{11} = 89 \quad (1.79)$$

### 1.7.4 Principio De La Dualidad

Traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, a menudo por medio de una operación de involución, esto es: Si la dualidad de  $A$  es  $B$ , entonces de forma análoga, dualidad de  $B$  es  $A$ , cumpliéndose una relación uno a uno. Como a veces la involución tiene puntos fijos, la dualidad de  $A$  es a veces  $A$  (ella misma). Por ejemplo, el Teorema de Desargues en la geometría proyectiva es Dual a ella misma en este sentido.

El concepto de dualidad es amplia mente usado en diversas representaciones matemáticas, tales como lógica, lógica booleana, teoría de conjuntos.[Spiegel et al., 2000]

La dualidad en el caso exclusivo de teoría de conjuntos, se entiende de la siguiente manera: grupos bajo la operación de de unión, intersección y complemento, satisfacen varias leyes (identidades) y cada una de estas leyes se pueden representar de forma dual, es decir, al construir la dualidad de una expresión, es necesario intercambiar operaciones:

1. Unión por Intersección  $\cup \rightarrow \cap$
2. Intersección por Unión  $\cap \rightarrow \cup$
3. Conjunto universo por vacío  $U \rightarrow \emptyset$
4. Conjunto vacío por universo  $\emptyset \rightarrow U$

Ahora si aplicamos este principio a una identidad, se tiene.

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A \quad (1.80)$$

Aplicando la dualidad:

$$(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A \quad (1.81)$$

Ahora bien, como se enuncia anteriormente, la dualidad en un principio que se puede aplicar en una gran variedad de áreas del conocimiento, a continuación se muestra la dualidad en lógica booleana. Se realiza lo homólogo a la teoría de conjuntos, se reemplazan las operaciones de suma por multiplicación, los 1 por 0 y viceversa.

Sea:

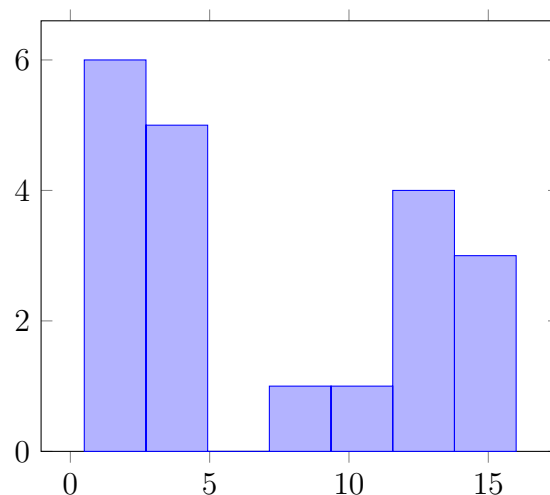
$$x(y + 0) \text{ y } \bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$$

Aplicando el principio de la dualidad de las ecuaciones correspondientes.

$$x + (y \cdot 1) \quad (1.82)$$

$$(\bar{x} + 1) \cdot (\bar{y} \cdot z) \quad (1.83)$$

### 1.7.5 Ejemplo de histograma



### 1.7.6 Numero de Erdős

Este es un numero que pretende cuantificar el grado de separación entre las personas que han publicado un articulo de investigación, en este caso particular el matemático Paul Erdős.

Como se calcula?

Esto es muy sencillo, se considera que Erdős tiene un numero 0.

Si se ha colaborado con el, directamente en la publicación de un articulo se tiene numero de Erdős 1.

Si se ha colaborado con alguien que colaboro directamente con Erdős se tiene numero 2 y así sucesivamente.

Esta métrica pretende darnos una medida de cuan separados estamos de una persona famosa, esto es en un máximo de seis personas puede uno contactar por ejemplo a Barack Obama.

Se asegura que Paul Erds es el segundo más prolífico matemático de todos los tiempos, siendo superado solamente por Leonhard Euler, el gran matemático del siglo XVIII. La producción de Erds es más o menos de 1,500 artículos publicados, y muchos están aún por publicarse después su muerte.

Erds utilizaba café, pastillas de cafeína y Benzedrina para trabajar 19 horas al día, 7 días a la semana. Para él, ¿el café era una sustancia que los matemáticos convertían en teoremas?. Cuando sus amigos le aconsejaban bajar el ritmo y descansar, siempre respondía lo mismo: ¿Habrá mucho tiempo para descansar en la tumba?. Erds viajaba constantemente y vivía enfocado totalmente hacia la matemática evitando la compañía social, el sexo y las grandes comidas.

Erds seguía publicando un artículo a la semana incluso a los setenta años. Erds, sin duda, tenía el mayor número de coautores (alrededor de 500) entre los matemáticos de todos las especialidades.[Alberich and Miró, 2009]



### 1.7.7 Aproximación de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (1.84)$$

De acuerdo a la función Gamma de Euler podemos describir el factorial de cualquier numero como:[Montoro et al., 2016]

$$\Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx \quad (1.85)$$

Donde  $n \geq 0$ , cuando  $n=10$  e integrar obtenemos:

$$f(x) = x^n \cdot e^{-x} \quad (1.86)$$

Esta ecuación puede ser representada por la integral Gaussiana teniendo el máximo punto cuando  $n=0$ :

$$f(x) = \frac{10^{10*}}{e} \cdot e^{\frac{-x^2}{20}} \quad (1.87)$$

Para poder transformar la función Gamma a la integral de Euler tenemos que definimos las variables de la integral como:

$u = x + n$  y  $du = dx$  y sustituyendo

$I = \int_{u=-n}^{\infty} (u+n)^n \cdot e^{u+n} du$  factorizando  $(u+n)^n$  la integral es:

$$I = \int_{u=-n}^{\infty} (n)^n \cdot \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \cdot e^{-u} \cdot e^n du \quad (1.88)$$

tomando las constantes fuera de nuestra integral tenemos:

$$I = (n)^n \cdot \int_{u=-n}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \cdot e^{-u} \cdot du \quad (1) \quad (1.89)$$

Resolviendo la integral y usando Series de Maclaurin para expandir el logaritmo:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \quad (2) \quad (1.90)$$

$$\implies \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) = \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2} \quad (1.91)$$

Finalmente sustituyendo 2 tenemos:

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \approx u - \frac{u^2}{2n} \quad (1.92)$$

Sustituyendo en 1 tenemos:

$$I_2 = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \int_{u=-n}^n e^{\frac{u^2}{2n}} du \quad (1.93)$$

notemos que regresamos a la integral Gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}} du = \sqrt{2\pi n} \quad (1.94)$$

Por lo tanto decimos que  $n$  tiende al infinito y el factorial de  $n$  tiende al valor de abajo que es la aproximación de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (1.95)$$

## 1.8 Tarea 7

### 1.8.1 Fullerenos

Los fullerenos se denominan jaulas cerradas constituidas exclusivamente por un número definido de átomos de carbono con elevada simetría—seguido, en orden cronológico, por los nanotubos de carbono —estructuras constituidas por átomos de carbono con forma cilíndrica—y, más reciente mente, por los grafenos —láminas bidimensionales de átomos de carbono—.Actualmente se conocen un número significativamente superior de “nanofor-mas” de carbono, tales como “fullerenos endoédricos”, “nanocuernos de carbono”, “nanocébollas de carbono”, “nanotorus” (nanotubos de carbono formando un anillo), “nanovaso” (a modo de una serie de vasos apilados) o incluso los “nanocapullos” (formados por un fullereno que emerge de un nanotubo a modo de un capullo sobre un tallo) o los denominados guisantes (formados por un nanotubo de carbono conteniendo moléculas de fullerenos), configurando así un auténtico zoo de nuevas formas de carbono. A este grupo hay que añadir la forma más reciente de carbono conocida como grafenos (una lámina monoatómica de grafito) considerados materiales excepcionales que actualmente están recibiendo la atención de la comunidad científica internacional.[Martín, 2011]

Las numerosas formas en que el elemento carbono puede manifestarse en la actualidad, genera un primer problema taxonómico. Es preciso clasificar las estructuras anteriores como nuevos alótropos diferentes de Fullerenos o, por el contrario, deben de considerarse diferentes manifestaciones de los alótropos conocidos, de forma genérica, como fullerenos.

Estructuras de carbono como nuevos alótropos. Considerar los fullerenos como la tercera forma alotrópica del carbono, en donde los átomos se unen entre sí dando lugar a formaciones esféricas, tubulares o elipsoidales, englobando así a todas estas formaciones en un mismo alótropo, los fullerenos. [García et al., ]

## 1.9 Tarea 8

### 1.9.1 Teorema del límite central

El teorema del límite central o teorema central del límite indica que, en condiciones muy generales, si  $S_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes y de varianza no nula pero finita, entonces la función de distribución de  $S_n$  se aproxima bien a una distribución normal (también llamada distribución gaussiana, curva de Gauss o campana de Gauss). Así pues, el teorema asegura que esto ocurre cuando la suma de estas variables aleatorias e independientes es lo suficientemente grande.

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas de una distribución con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Entonces, si  $n$  es suficientemente grande, la variable aleatoria  $\bar{X}$  [Igual García, 2010]

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.96)$$

tiene aproximadamente una distribución normal con  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  y  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

#### Propiedades

- El teorema del límite central garantiza una distribución normal cuando  $n$  es suficientemente grande.
- Existen diferentes versiones del teorema, en función de las condiciones utilizadas para asegurar la convergencia. Una de las más simples establece que es suficiente que las variables que se suman sean independientes, idénticamente distribuidas, con valor esperado y varianza finitas.
- La aproximación entre las dos distribuciones es, en general, mayor en el centro de las mismas que en sus extremos o colas, motivo por el cual se prefiere el nombre "teorema del límite central" ("central" califica al límite, más que al teorema).
- Este teorema, perteneciente a la teoría de la probabilidad, encuentra aplicación en muchos campos relacionados, tales como la inferencia estadística o la teoría de renovación.

### 1.9.2 Simpson

**Bart, el genio** Bart, el genio. Ese fue el primer episodio genuino de Los Simpson, donde se estrenó la famosa y característica secuencia de inicio y donde debutó la famosa frase de Bart "Multiplícate por cero". Y lo más curioso de todo es que "Bart, el genio" contiene una gran dosis de matemáticas.

Maggie está construyendo una torre con sus cubos alfabéticos.EMCSQU. Maggie pudo

llegar a representar la famosa ecuación científica de Einstein  $E = mc^2$ .

Esa línea (r dr r) no solo es la solución del problema, sino también la supuesta gracia del chiste. Tenemos dos cuestiones: por qué es tan divertido r dr r, y por qué es la respuesta al problema de matemáticas? La clase se ríe porque r dr r suena en inglés como har-de-har-har, una expresión que se ha usado para indicar una risa sarcástica como reacción a un chiste malo.

Los cuadrados palindrómicos son sencillamente cuadrados que son iguales ya se lean desde un lado o desde el otro, como el 121 (112), o 5 221 225 (22852). Aquel niño de ocho años tenía toda la razón, porque hay treinta y cinco números de este tipo en menos de cien mil millones, y solo uno de ellos, el 698 896 (8362) tiene un número de dígitos par. Reiss admitió ante mí de mala gana que aquella carta a Gardner contenía también una pregunta. Le preguntaba si había una cantidad finita o infinita de números primos.

Si queremos seguir a Euclides para resolver este problema, podemos empezar con la siguiente y atrevida afirmación:

Supongamos que el número de primos es finito, y que todos esos números primos se han recopilado en una lista:  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ .

Podemos explorar las consecuencias de esa afirmación multiplicando todos los primos de la lista y añadiendo 1, con lo cual crearemos un nuevo número:  $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ . Este nuevo número  $N$  es o bien un número primo o un número no primo, pero en cualquier caso, contradice la afirmación de Euclides: a) Si  $N$  es un número primo, entonces no está en la lista original. Por tanto, la afirmación de que hay una lista completa es falsa, eso está claro. b) Si  $N$  no es un número primo, entonces debe tener divisores. Esos divisores tienen que ser primos, porque los primos de la lista original dejarán un resto de 1 cuando se dividan por  $N$ . Por tanto, de nuevo la afirmación de que hay una lista completa es falsa. En resumen, la afirmación de Euclides es falsa? su lista finita no contiene todos los números primos. Además, cualquier intento de reparar esa afirmación añadiendo más números primos a la lista está condenado al fracaso, porque todo el argumento se puede repetir, demostrando que la lista con números primos añadidos sigue sin estar completa. Este argumento prueba que cualquier lista de números primos estará siempre incompleta, y significa que debe haber un número infinito de primos.

## 1.10 Tarea 9

### 1.10.1 Ejercicios por inducción

1. Demuestre que la suma de los primeros  $n$  enteros impares positivos es  $n^2$ . **Solución:**

Sea  $S_k = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$  (hipótesis de inducción) Entonces,

hay que demostrar que  $S_1$  es cierta y que  $S_k \Rightarrow S_{k+1}$  es cierta.  $s_1 = 1 = 1^2$

$s_{k+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$  Entonces,  $S_{k+1} = S_k + (k + 1) =$

$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$  Con lo anterior, queda demostrado que la suma de los  $n$

impares positivos es  $n^2$ .

2. Pruebe por inducción que:  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  **Solución:** Sea  $S_k = 1^2 +$

$2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$  (Hipótesis de inducción). Entonces hay que demostrar que

$S_1$  es cierta y que  $S_k \Rightarrow S_{k+1}$  es cierta. En efecto  $S_1 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$  Entonces

$S_{k+1} = s_k + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$  Entonces  $S_{k+1} = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$

De donde  $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$  Con lo anterior, queda demostrado que:  $1^2 +$

$2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Pruebe por inducción que:  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  **Solución:** Sea  $S_k = 1+2+\dots+k =$

$\frac{k(k+1)}{2}$  (Hipótesis de inducción). Entonces, hay que demostrar que  $S_1$  es cierta y que

$S_k \Rightarrow S_{k+1}$  es cierta. En efecto  $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$   $S_{k+1} = 1+2+\dots+k+(k+1)$  Entonces,

$S_{k+1} = S_k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$ . De donde  $S_{k+1} = (k + 1)[\frac{k}{2} + 1] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Con lo anterior queda demostrado que:  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

## 1.11 Tarea 10

### 1.11.1 Paradoja

Una paradoja (del latín *paradoxa*, plural de *paradoxon*, ¿lo contrario a la opinión común?, y este del griego [παράδοξα], plural de [παράδοξον]) o antilogía es una idea extraña opuesta a lo que se considera verdadero a la opinión general. También se considera paradoja a una proposición en apariencia falsa o que infringe el sentido común, pero no conlleva una contradicción lógica, en contraposición a un sofisma que solo aparenta ser un razonamiento verdadero.

Las paradojas también son ideas opuestas a la opinión y al sentir habitual de las personas. Las aserciones absurdas que se presentan con apariencias de verdaderas pueden recibir la denominación de paradoja.

La paradoja es estímulo para la reflexión. A menudo los filósofos se sirven de las paradojas para revelar la complejidad de la realidad. La paradoja también permite demostrar las limitaciones de las herramientas de la mente humana. Así, la identificación de paradojas basadas en conceptos que a simple vista parecen simples y razonables ha impulsado importantes avances en la ciencia, la filosofía y las matemáticas.

Una paradoja en la literatura se refiere a la utilización de conceptos o ideas que son contradictorias entre sí, pero que sin embargo, cuando se colocan juntas poseen un valor significativo a varios niveles. La singularidad de las paradojas reside en el hecho de que un nivel más profundo de sentido y significado no se revela a primera vista, pero cuando lo hace, cala, y proporciona una visión asombrosa. A su vez, la Paradoja se incluye en el grupo de las figuras literaria lógicas por evoca a la contradicción de tipo artístico.

Algunos autores consideran a la paradoja como una figura retórica. Helena Beristáin la define así:

*Figura de pensamiento que altera la lógica de la expresión pues aproxima dos ideas opuestas y en apariencia irreconciliables, razón por la cual manifestarían un absurdo si se tomaran al pie de la letra, pero que contienen una profunda y sorprendente coherencia en su sentido figurado.*

La paradoja llama la atención por su forma aparentemente ilógica y absurda, sorprende y alerta por su aspecto de oposición irreductible, aunque la contradicción es aparente porque se resuelve en un sentido más amplio del literalmente enunciado. (1998: 387) No todas las paradojas son iguales. Por ejemplo, la paradoja del cumpleaños puede ser definida mejor como una sorpresa que como una contradicción lógica, mientras que la resolución de la paradoja de Curry es aún un tema importante de debate.

He aquí pues, que la paradoja se define como una contradicción aparente. La paradoja puede ciertamente considerarse una ¿figura retórica? porque se puede expresar en palabras y como tal afecta al lenguaje; Sin embargo, creemos que va más allá de la retórica; es un problema que también a la lógica, puesto que su esencia reside en la aparente falta de ella. Al afectar a la lógica se acerca a la filosofía. Puede decirse que su verdadera razón de ser es filosófica.

En filosofía moral una paradoja juega un rol particularmente importante en debates

sobre ética. Por ejemplo, una admonición ética a "amar a tu vecino" no solamente se encuentra en contraste, sino también en contradicción, con un vecino armado que intenta asesinarte: de ser exitoso, entonces, uno no es capaz de amarlo. Sin embargo, atacar o reprimir al vecino agresor no es generalmente considerado amar. Esto puede ser llamado un dilema ético. Otro ejemplo es el conflicto entre el mandato de no robar y la responsabilidad personal de alimentar a la familia, la cual, bajo determinadas circunstancias, no puede ser mantenida sin dinero robado.

### Tipos de paradojas

Dependiendo de la veracidad o de las condiciones que las conforman, las paradojas pueden ser verídicas, aquellas que solo parece que lo son aunque en realidad lo que sostienen puede ser verdadero o falso. Dentro de estas, la más representativa resulta ser la del cumpleaños que propone: qué probabilidad hay que dos personas que se encuentran en una reunión cumplan años el mismo día? Luego están aquellas que se las denominan como verdaderas paradojas, porque lisa y llanamente se contradicen, un ejemplo claro y categórico resulta ser la paradoja de la suerte, que sostiene que es de mala suerte ser supersticioso.

Y por último están aquellas que dependerán en mucho de la interpretación que se les de para terminar siendo o no paradojas.

Es importante establecer que existen muchos tipos de paradojas. Así, en concreto, se determinan dos grandes grupos para poder llevar a cabo la clasificación de las mismas. De esta manera, por un lado están las paradojas en función de su veracidad y por otro las que se ordenan en base al área de conocimiento en el que se utilizan o desarrollan.

- Según su veracidad y las condiciones que las forman.

Dependiendo de la veracidad o de las condiciones que las conforman, las paradojas pueden ser verídicas, aquellas que solo parece que lo son aunque en realidad lo que sostienen puede ser verdadero o falso.

Algunas paradojas sólo parecen serlo, ya que lo que afirman es realmente cierto o falso, otras se contradicen a sí mismas, por lo que se consideran verdaderas paradojas, mientras que otras dependen de su interpretación para ser o no paradójica.

#### 1. Paradojas verídicas:

- Paradoja del cumpleaños: Cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Paradoja de Galileo: A pesar de que no todos los números son cuadrados perfectos, no hay más números que cuadrados perfectos.
- Paradoja del hotel infinito: Un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno.
- Paradoja de la banda esférica: No es una paradoja en sentido estricto, pero choca con nuestro sentido común debido a que tiene una solución que parece imposible.



2. Antinomias Son paradojas que alcanzan un resultado que se autocontradice, aplicando correctamente modos aceptados de razonamiento. Muestran fallos en un modo de razón, axioma o definición previamente aceptados. Por ejemplo:

- la Paradoja de Grelling-Nelson señala problemas genuinos en nuestro modo de entender las ideas de verdad y descripción. Muchos de ellos son casos específicos, o adaptaciones, de la Paradoja de Russell.
- Paradoja de Russell: Existe un conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos?
- Paradoja de Curry: "Si no me equivoco, el mundo se acabará en diez días".
- Paradoja del mentiroso: "Esta oración es falsa".
- Paradoja de Grelling-Nelson: Es la palabra "heterológico", que significa "que no describe a sí mismo", heterológica?
- Paradoja de Berry: "El menor entero positivo que no se puede definir con menos de quince palabras". Paradoja de la suerte:
- Es de mala suerte ser supersticioso.
- Paradoja de los números interesantes: Todo número entero presenta alguna propiedad interesante específica, y por tanto el conjunto de los números no-interesantes es vacío.

3. Antinomias de definición Estas paradojas se basan en definiciones ambiguas,

sin las cuales no alcanzan una contradicción. Este tipo de paradojas constituye un recurso literario, en cuyo empleo se ha destacado el escritor inglés G. K. Chesterton, a quién se llamó el "príncipe de las paradojas". Sirviéndose de los múltiples sentidos de las palabras, buscaba marcar contrastes que llamaran la atención sobre alguna cuestión comúnmente poco considerada. Estas paradojas, como en su libro "Las paradojas de Mr. Pond" (1936), se resuelven en el transcurso de los relatos al clarificar un sentido o añadir alguna información clave.

- Paradoja sorites: En qué momento un montón deja de serlo cuando se quitan granos de arena?
- Paradoja de Teseo: Cuando se han reemplazado todas las partes de un barco, sigue siendo el mismo barco?
- Paradoja de Boixnet: Pienso, luego existo, mas cuando no pienso, no existo? Ejemplos de Paradoja en Chesterton: "Era un extranjero muy deseable, y a pesar de eso, no lo deportaron". "Una vez conocí a dos hombres que estaban tan completamente de acuerdo que, lógicamente, uno mató al otro".

4. Paradojas condicionales Sólo son paradójicas si se hacen ciertas suposiciones.

Algunas de ellas muestran que esas suposiciones son falsas o incompletas.

- El huevo o la gallina: Esta trae a colación el antiguo dilema sobre quien fue primero, el huevo o la gallina?
- Paradoja de Newcomb: Cómo jugar contra un oponente omnisciente.
- Paradoja de San Petersburgo: La gente solo arriesgará una pequeña cantidad para obtener una recompensa de valor infinito.

- Paradoja del viaje en el tiempo: Qué pasaría si viajas en el tiempo y matas a tu abuelo antes de que conozca a tu abuela?
  - Paradoja de la serpiente: Si una serpiente se empieza a comer su cola, acaba comiéndose absolutamente todo su cuerpo, dónde estaría la serpiente, si está dentro de su estómago que, a su vez, está dentro de ella?
  - Paradoja de Pinocho : Qué pasaría si Pinocho dijera: "Ahora mi nariz crecerá"? Crecería porque estaría mintiendo, a su vez al crecer su nariz se expresa la validez de la frase propiamente dicha anteriormente como resultado de esto estaría diciendo la verdad ya que pasó lo que predijo, entonces al ser verdad lo que dijo no tendría que haberle crecido la nariz.
- Según el área del conocimiento al que pertenecen.

Todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, que antiguamente se consideraba parte de la filosofía, pero que ahora se ha formalizado y se ha incluido como una parte importante de la matemática. A pesar de ello, muchas paradojas han ayudado a entender y a avanzar en algunas áreas concretas del conocimiento.

### 1. Paradojas en Matemática /Lógica

- Paradoja de Banach-Tarski La paradoja de Banach-Tarski es un teorema en geometría teórica de conjuntos
- Paradoja de Frege

### 2. Paradojas sobre la probabilidad y la estadística

- Paradoja del cumpleaños:Cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Paradoja de Simpson: Al agregar datos, podemos encontrar relaciones engañosas.
- Paradoja de Arrow: No puedes tener todas las ventajas de un sistema de votación ideal al mismo tiempo.
- Problema de Monty Hall: Y tras la puerta número dos... (Por qué la probabilidad no es intuitiva?)
- Paradoja de San Petersburgo: Cómo no merece la pena arriesgar mucho para ganar un premio infinito.
- Fenómeno Will Rogers: Sobre el concepto matemático de la media, trata sobre la media o mediana de dos conjuntos cuando uno de sus valores es intercambiado entre ellos, dando lugar a un resultado aparentemente paradójico.
- Paradoja de los dos sobres: Uno de los sobres contiene el doble de dinero que el otro. Sin importar cuál de los dos sobres esté en mi poder, las probabilidades siempre indican que es favorable cambiarlo por el sobre restante.

### 3. Paradojas sobre lógica

A pesar de que todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, hay algunas que afectan directamente a su bases y postulados tradicionales.

Las paradojas más importantes relacionadas directamente con el área de la lógica son las antinomias, como:

- la paradoja de Russell, que muestran la inconsistencia de las matemáticas tradicionales. A pesar de ello, existen paradojas que no se autocontradicen y que han ayudado a avanzar en conceptos como demostración y verdad.
- Paradoja del actual rey de Francia: Es cierta una afirmación sobre algo que no existe?
- Paradoja del cuervo (o cuervos de Hempel): Una manzana roja incrementa la probabilidad de que todos los cuervos sean negros.
- Regresión infinita del presupuesto: "Todo nombre que designa un objeto puede convertirse a su vez en objeto de un nuevo nombre que designe su sentido".

#### 4. Paradojas sobre el infinito

El concepto matemático de infinito, al ser contrario a la intuición, ha generado muchas paradojas desde que fue formulado. Es importante resaltar que estos casos muestran una paradoja pero no en el sentido de una contradicción lógica, sino en el sentido de que muestran un resultado contrario a la intuición, pero demostrablemente cierto.

- Paradoja de Galileo: A pesar de que no todos los números son números cuadrados, no hay más números que números cuadrados.
- Paradoja del hotel infinito: Un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno. Conjunto de Cantor: Cómo quitar elementos de un conjunto y que siga teniendo el mismo tamaño. Cuerno de Gabriel (o Trompeta de Torricelli): Cómo puede ser necesaria una superficie infinita para contener un volumen finito?
- Paradojas de Zenón. Mediante el concepto de división al infinito, Zenón trató de demostrar que el movimiento no puede existir, confirmando así la filosofía de su maestro, Parménides. Las más conocidas son la *dicotomía* y la paradoja de *Aquiles y la tortuga*.

#### 5. Paradojas geométricas

- Ilusiones ópticas
- La serie de Fibonacci
- Disposición de hojas en un tallo
- División áurea
- Espiral logarítmica
- Interior o exterior?
- Problema de los puentes de Königsberg
- Botella de Klein
- Banda de Möbius
- Problema de los cuatro colores

#### 6. Paradojas en Física

Richard Feynman en sus *Lectures on Physics*, aclara que en la Física realmente no existen las paradojas, sino que en las paradojas físicas hay siempre una mala

interpretación de alguno o ambos razonamientos que componen la paradoja. Esto no es necesariamente válido en otras disciplinas donde las paradojas reales pueden existir.

- Paradoja de Bell: Plantea un problema clásico de relatividad especial.
- Paradoja de Olbers: Por qué, si hay infinitas estrellas, el cielo es negro? Olberts calculó que la luminosidad del cielo correspondería a una temperatura del orden de los 5.500 C, que, de hecho, no se observa. Actualmente se sabe que la luminosidad calculada por Olberts no llega a ser tal por el importante corrimiento al rojo de las fuentes de luz más alejadas, hecho que la teoría más aceptada atribuye al alejamiento de las galaxias o expansión del universo. Además se oponen la edad finita del universo, sus cambios notables durante su historia y que la cantidad de galaxias no es infinita. La paradoja proviene de un tiempo en el que no se conocían las galaxias y tendía a creerse que el universo era infinito y estático, por lo que también era plausible que hubiera infinitas estrellas.<sup>6</sup>
- Paradoja de Maxwell o Demonio de Maxwell: Una aparente paradoja clásica de la termodinámica.
- Paradoja de los gemelos: Cuando uno de los hermanos regresa de un viaje a velocidades cercanas a las de la luz descubre que es mucho más joven que su hermano.
- Paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen: Una paradoja sobre la naturaleza de la mecánica cuántica propuesta por estos tres físicos.
- Paradoja de Fermi: Si el Universo estuviera poblado por civilizaciones avanzadas tecnológicamente, dónde están?
- El experimento de Young. Una paradoja cuántica en su versión electrón a electrón. En el experimento de Young se pueden hacer pasar electrones por una doble rendija uno a uno de manera corpuscular, como si fueran partículas, obteniéndose sin embargo una figura de interferencias.
- Paradoja de Schrdinger: La paradoja por excelencia de la mecánica cuántica.
- Paradoja de D'Alembert: Relacionada con la resistencia de los cuerpos ante fluidos viscosos y no viscosos, en Mecánica de Fluidos.

## 7. Paradojas en Economía

- Paradoja de Abilene: Un grupo de personas frecuentemente toman decisiones contra sus propios intereses.
- Paradoja del ahorro: Si todo el mundo trata de ahorrar durante una recesión, la demanda agregada caerá y los ahorros totales de la población serán más bajos, esta paradoja es similar a la paradoja de Kalecki.
- Paradoja de Allais: En cierto tipo de apuestas, aun cuando la gente prefiere la certeza a la incertidumbre, si se plantea de manera diferente el problema, preferirán la incertidumbre que antes rechazaban.
- Paradoja de Bertrand: Dos jugadores que alcanzan el mismo equilibrio de Nash se encuentran cada uno sin ningún beneficio.
- Paradoja del pájaro en el arbusto: Por qué las personas evitan el riesgo?
- Paradoja del valor (o paradoja del diamante y el agua): Por qué es más barata el agua que los diamantes, siendo que los humanos necesitan agua, y no diamantes, para sobrevivir?

- Paradoja de Edgeworth: Con restricciones de capacidad, no puede haber ningún equilibrio.
- Paradoja de Ellsberg: En cierto tipo de apuestas, aun cuando sean lógicamente equivalentes las personas apostar por algo que contra algo, es decir, obtienen mayor utilidad apostando a favor.
- Paradoja de Gibson: Por qué están los tipos de interés y los precios positivamente correlacionados?
- Paradoja de Giffen: Puede ser que los pobres coman más pan aunque suba su precio?
- Paradoja de Jevons: Un incremento en la eficiencia conlleva un mayor incremento en la demanda.
- Paradoja de Kalecki de los costes: Un descenso generalizado de los salarios (reducción de costes) y precios fijos lejos en lugar de aumentar los beneficios reducen las ventas por una caída de la demanda agregada.
- Paradoja de Leontief: Algunos países exportan bienes intensivos en trabajo e importan bienes intensivos en capital, en contradicción con la teoría de Heckscher-Ohlin.
- Paradoja de Parrondo: Es posible jugar en dos juegos que ocasionan pérdidas alternativamente para acabar ganando.
- Paradoja de San Petersburgo: Cómo no merece la pena arriesgar mucho para ganar un premio infinito
- Paradoja del votante: Cuantas más personas participen en una elección por votación, menor será el beneficio de ir a votar, al ser cada votante menos decisivo.

## 8. Las paradojas y la abstracción

Es imprescindible un correcto uso de las capacidades de abstracción de la mente para lograr una adecuada comprensión de las paradojas antes mencionadas. Como tales, su objetivo no es lograr que el individuo aporte ideas imaginativas y fabulosas para su resolución. Dentro del ámbito general de las personas, sin pretensiones científicas o filosóficas, una adecuada interpretación de las paradojas y sus explicaciones contribuye al desarrollo del análisis, el procesamiento de información abstracta y ocasionalmente el aumento del cociente intelectual

### Paradoja de Curry

Llamada así por Haskell Curry, la paradoja de Curry ocurre en teoría ingenua de conjuntos o en lógicas ingenuas.

Intuitivamente, la paradoja de Curry es: si no me equivoco, Y es verdad, donde Y puede ser cualquier declaración lógica (el negro es blanco,  $1 = 2$ , Godel existe, el mundo terminará en una semana); si se llama esa declaración X, entonces se tiene que X afirma Si X es verdad, entonces Y es verdad.

Considérese la siguiente declaración X: Si esta declaración es verdad, el mundo terminará en una semana, que será abreviada como si X es verdad, entonces Y. Por lo tanto, al asumir X, Y es verdad. La declaración anterior se puede reformular como si X es verdad, entonces Y. Porque esa declaración verdadera es equivalente a X, X es verdad. Por lo tanto, Y es verdad, y el mundo terminará en una semana.

Cualquier cosa se puede probar semejantemente vía la paradoja de Curry. Obsérvese que a diferencia de la paradoja de Russell, esta paradoja no depende de qué modelo de

la negación se utiliza, pues está completamente libre de negación lógica. Así las lógicas paraconsistentes todavía necesitan tener cuidado. La resolución de la paradoja de Curry es un tema contencioso porque las resoluciones no triviales (tales como rechazo de X directamente) son difíciles y no intuitivas. En las teorías de conjuntos que permiten la comprensión sin restricción, podemos probar cualquier declaración lógica Y a partir del conjunto.

## Paradojas 5

1. Para ir a cualquier lugar debe recorrerse primero la mitad de la distancia; luego, la mitad de la distancia restante y luego otra vez la mitad de la que queda y así sucesivamente. Por lo tanto, el movimiento no existe.

La paradoja de la dicotomía se le atribuye al filósofo Zenón, de la Antigua Grecia, y aparentemente se creó como prueba de la singularidad del universo y de que el cambio, incluyendo el movimiento, es imposible (como lo explicaba el maestro de Zenón, Parménides).

Esta paradoja ha sido rechazada de forma intuitiva durante años. Desde la perspectiva matemática, la solución, que se formalizó en el siglo XIX, consiste en aceptar que de la suma de una mitad más un cuarto, más un octavo, más un sexto, etc. el resultado es uno. Esta idea es similar a la que dice que 0,999? es igual a 1. No obstante, esta solución teórica no responde a la pregunta de cómo un objeto alcanza su destino.

La respuesta a esta pregunta reviste más complejidad y aún sigue sin resolverse si se toman como base las teorías del siglo XX que afirman que la materia, el tiempo y el espacio no son infinitamente divisibles.

2. En cualquier instante, un objeto en movimiento es indistinguible de un objeto que no está en movimiento. Por lo tanto, el movimiento no existe.

Esto es lo que se conoce como la paradoja de la flecha y constituye otro de los argumentos de Zenón contra el movimiento. En este caso hace referencia a que en un instante de tiempo pasan cero segundos y por lo tanto no hay movimiento. Zenón argumentaba que si el tiempo está formado por instantes, el hecho de que el movimiento no ocurra en un momento en particular indicaría que no hay movimiento.

Como en la paradoja de la dicotomía, la paradoja de la flecha aportaba un cierto adelanto a la mecánica cuántica tal y como se entiende hoy en día. En su libro *Reflections on Relativity*, Kevin Brown explica que en un contexto de relatividad especial, un objeto en movimiento es diferente de un objeto en reposo.

La relatividad requiere que los objetos que se mueven a diferentes velocidades tengan una apariencia exterior diferente y a su vez estos tendrán percepciones diferentes del mundo que les rodea.

3. Si un barco se reparara sustituyendo cada una de las partes de madera que lo forman, sería aún el mismo barco? Otro clásico de la Antigua Grecia, la paradoja del Barco de Teseo, hace referencia a las contradicciones de la identidad.

Se conoce por la célebre descripción de Plutarco: El barco en el que volvieron desde

Creta Teseo y los jóvenes de Atenas tenía treinta remos y los atenienses lo conservaban desde la época de Demetrio de Falero, ya que retiraban las tablas estropeadas y las reemplazaban por unas nuevas y más resistentes. Por lo tanto, este barco se convirtió en un ejemplo entre los filósofos sobre la identidad de las cosas que crecen; un grupo defendía que el barco continuaba siendo el mismo, mientras el otro aseguraba que no lo era.

4. Puede un ser omnipotente crear una roca que sea demasiado pesada como para que él mismo la pueda levantar? Y ya que estamos, cómo puede el mal existir si Dios es omnipotente? Y? cómo puede existir la libre voluntad si Dios es omnisciente?

Estas son algunas de las paradojas que surgen cuando se aplica la lógica a las definiciones de Dios. Algunas personas se basan en estas paradojas para no creer en Dios. Sin embargo, otros dirán que estas son inconsecuentes o que no son válidas por alguna otra razón.

5. Existe un cuerno infinitamente largo que tiene un volumen finito pero una superficie infinita Si seguimos avanzando en relación a lo que se planteó como un problema en el siglo XVII, nos encontramos con una de las muchas paradojas relacionadas con el infinito y la geometría. El Cuerno de Gabriel se forma utilizando la gráfica  $y = 1/xy$  rotándola alrededor de un eje horizontal, tal y como se muestra en la imagen.

Usando técnicas de cálculo que hacen que sea posible calcular áreas y volúmenes de formas así creadas, es posible que el cuerno infinitamente largo tenga en efecto un volumen finito igual a  $\pi$ , pero una superficie infinita. Como aparece en el artículo sobre el cuerno publicado por MathWorld, esto significaría que el cuerno podría tener un volumen finito de pintura pero se necesitaría una cantidad infinita de pintura para cubrir la superficie entera.

## 1.11.2 Teorema de Bayes

Introducción:

El objeto del tema es la cuantificación de la incertidumbre, lo cual tiene mucho que ver con la previsibilidad del comportamiento. Hemos visto que el Análisis de Regresión es una técnica para obtener predicciones, y que, excepto en el caso de covariación perfecta, las predicciones son mas o menos erróneas. En consecuencia, hay incertidumbre en las predicciones, y esta es la situación habitual. La imprevisibilidad genera incertidumbre.

Los matemáticos vienen estudiando esta cuestión ya hace muchos años, y han facilitado herramientas precisas que dan resultados exactos en situaciones relativamente sencillas y fácilmente formalizables. Cuando se estudia el comportamiento, sin embargo, las cosas son diferentes porque el comportamiento se caracteriza por la complejidad, y su estudio requiere frecuentemente técnicas complejas. Los conceptos básicos de la probabilidad son de interés porque son el fundamento de procedimientos mas sofisticados que sirven para cuantificar la incertidumbre.

Los matemáticos no son los únicos que miden la incertidumbre: Todo el mundo lo hace cada día. Por ejemplo: Un conocido nos pide un préstamo por una cantidad importante, y de una manera intuitiva evaluamos la probabilidad de que nos devuelva el préstamo y

decidimos en consecuencia. Otro ejemplo: Tenemos un trabajo seguro en una empresa, y nos ofrecen un trabajo mejor pagado en otra; generalmente evaluamos la incertidumbre de la nueva situación antes de tomar una decisión. Estas evaluaciones son mas o menos intuitivas, y no suponen una cuantificación precisa de la incertidumbre, pero el fundamento de como suelen hacerse se asemeja a algunas aproximaciones formales a la probabilidad, que la definen como la frecuencia en que ocurre el acontecimiento.

Los matemáticos definen la probabilidad de ocurrencia de un acontecimiento  $A$  (hay también otras definiciones) como la razón entre la frecuencia de  $A$  (numero de veces que es observado) y el numero de veces en que podría ocurrir:

$$P(A) = \frac{A}{N} \quad (1.97)$$

Desarrollo:

El teorema de Bayes es un procedimiento para obtener probabilidades condicionales (la probabilidad de que ocurra n acontecimiento dado otro acontecimiento). La expresión del teorema de Bayes para dos variables directas es:

$$P(A|B) = \frac{(B|A)(P(A))}{P(B)} \quad (1.98)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.99)$$

Para variable que toman mas de dos valores, la expresión se tiene aplicando en el numerador la Regla de Multiplicación

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$$

y en el denominador el Teorema de Probabilidad Total

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_n)P(B|A_n)$$

obtenemos la ecuación

$$P(A_i|B) = \frac{(A_i)(P(B|A_i))}{\sum_{i=1}^n P(A_i) * P(B|A_i)} \quad (1.100)$$

El teorema de Bayes da respuesta a cuestiones de tipo causal, predictivas y de diagnóstico. En las cuestiones causales queremos saber cual es la probabilidad de acontecimientos que son la consecuencia de otros acontecimientos. En las cuestiones predictivas queremos saber cual es la probabilidad de acontecimientos dada información de la ocurrencia de los acontecimientos predictores. En las cuestiones de tipo diagnóstico queremos saber cual es la probabilidad del acontecimiento (o acontecimientos) causales o predictivos dado que tenemos información de las consecuencias. Para resumir, en las situaciones causales o predictivas desconocemos las consecuencias y tenemos evidencia de las causas. Por el



contrario, en las situaciones de diagnostico desconocemos las causas y tenemos evidencia de las consecuencias. Ejemplo: Unos psicólogos especializados en el tratamiento de

trastornos de personalidad están interesados en diagnosticar el trastorno que afecta un paciente, en el que observan un conjunto de síntomas que indican que el paciente podría sufrir el trastorno A o el trastorno B. Además saben que los porcentajes de individuos afectados por los trastornos A, B o ningún trastorno son 10, 30 y 70. También saben que el porcentaje de individuos afectados por el trastorno A y que muestran el síntoma X es igual al 60%, el porcentaje de individuos que sufren el trastorno B y muestran el síntoma X es el 30% y el porcentaje de individuos no afectados que muestran los síntomas de trastorno es el 10%.

Trastorno	$P(A_i)$	Síntoma	$P(B A_i)$
A	.1	si	.6
B	.3	si	.3
C	.7	si	.1

Sustituyendo en el teorema de bayes se tiene:

$$P(A_1|B) = \frac{(.6)(.1)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .27 \quad (1.101)$$

la probabilidad de que el individuo padezca el trastorno A es 0.27. Las probabilidades de que este afectado por el trastorno B o el C son:

$$P(A_2|B) = \frac{(.3)(.3)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .41 \quad (1.102)$$

$$P(A_3|B) = \frac{(.1)(.7)}{(.6)(.1) + (.3)(.3) + (.1)(.7)} = .32 \quad (1.103)$$

La conclusión es que lo mas probable es que el individuo padezca el trastorno B, pero es un valor moderado y los psicólogos piensan que hay que obtener mas evidencia. El

teorema de Bayes es especialmente adecuado para actualizar las conclusiones a medida que disponemos de nueva información. Pasado un tiempo observan que el paciente muestra un nuevo síntoma (Y), y saben que presentan Y el 70% de los individuos que sufren el trastorno A, el 20% de los individuos que sufren B y el 10% de los individuos que padecen el trastorno C. Para obtener las probabilidades incorporando la nueva información hacemos que las probabilidades posteriores pasen a ser las probabilidades previas:

$$P(A_1|Y) = \frac{(.27)(.7)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .62 \quad (1.104)$$

$$P(A_2|Y) = \frac{(.2)(.41)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .27 \quad (1.105)$$

$$P(A_3|Y) = \frac{(.1)(.32)}{(.7)(.27) + (.2)(.41) + (.1)(.32)} = .11 \quad (1.106)$$

Una vez hechos los cálculos la probabilidad de que el individuo esta afectado por el trastorno A ha pasado de 0.27 a 0.62.

Por otra parte:

Un caso particular de estudio y de investigación se centra en la resolución de un problema por duplas de alumnos como es el siguiente caso:

Los dos estudiantes trabajaron cada tarea por separado y se comunicaron por Internet. Mas tarde se juntaron para dar forma definitiva a sus respuestas. Sonia y Carlos han planteado un problema con un enunciado largo y complejo. Según comentan en la entrevista, cada uno elaboró? un problema distinto y al reunirse eligieron el de Carlos y lo trabajaron juntos. El problema que enunciaron es el siguiente:

### Enunciado del problema

Te encanta un programa de radio, y siempre lo escuchas a todas horas en casa y en el coche. Durante las cinco horas que van a emitir el programa, van a sortear un premio. Para optar por el premio has de llamar y concentrarte lo suficiente para poder responder a una pregunta. Y tienes cinco minutos para responder. Tu eres muy listo y tu probabilidad de responder bien desde un teléfono en la tranquilidad de tu casa es  $= 6/8$ . Pero si estas en el coche tu probabilidad de hacerlo bien mientras conduces y hablas por el móvil (tienes un manos libres) es menor, ya que tienes una probabilidad de acertar  $= 3/9$ . Vas a estar de viaje en el coche una hora de las cinco del programa de radio. Si aciertas, los del programa tiran un dado y si sale un 1, 2, 3 o 6 recibes dos invitaciones para el MUA. Si sale 4, 5 o 6 recibes dos invitaciones para el MARQ. a)  $P(A)$  = Probabilidad de acertar.

Probabilidad total de acertar b) Probabilidad de fallar  $P(A(c))$  c) Has ganado solo ir a

MARQ d) Has ganado ir a ambos

En el enunciado del problema, Sonia y Carlos no realizan preguntas, solo indican las probabilidades que van a calcular y hechos: probabilidad de acertar, has ganado solo ir a MARQ? y asignan directamente unas probabilidades condicionadas y las probabilidades iniciales o a priori del problema las indican en función del tiempo de duración del programa de radio y el tiempo que permanecen en casa o en el coche. Además, proponen un experimento adicional, lanzar un dado, para determinar las probabilidades de ir a un museo o al otro, e incluso, sin referir lo directamente, la probabilidad de ir a los dos museos. Dan también un dato, cinco minutos para responder, irrelevante para el problema que de alguna forma explica también que no utilizan un razonamiento lineal. Hay que resaltar el

valor que asignan a las verosimilitudes  $(6/8, 3/9)$  que son probabilidades subjetivas y las expresan con fracciones no irreducibles.

La resolución que realizan al problema planteado se recoge:

$$((4/5)*(6/8))+((1/5)*(3/9)) = 24/40+3/45 = (1.080/1.800)+(120/1.800) = 1.200/1.800 = 0,6667 \quad (1.107)$$

Probabilidad Total

$$b) \text{ Probabilidad de fallar } P(A_c)P(A_c) = 1 - P(A) = 1 - 0,6667 = 0,3333 \quad (1.108)$$

c) Has ganado solo ir a MARQ  $P(U) = \text{Ganas ir a MUA}$   $P(M) = \text{Ganas ir a MARQ}$

$P(U \cap M) = \text{Ganar ir a ambos}$   $P(M) - P(U \cap M) = 3/6 - 1/6 = 2/6$   $P(A)$  solo ir a MARQ

$$= (1/3) * (1.200/1.00) = 0,2222$$

d) Has ganado ir a ambos  $= 1/6 * (1.200/1.800) = 0,1111$  entonces, cual es la probabilidad de estar en el coche? Teorema de Bayes.  $(1/5 * 3/9) / 0,1111 = 0,6$

Lo primero que llama la atención es lo extenso del enunciado frente a lo conciso de la resolución. Aunque se les indice que debían explicar y justificar sus decisiones, la resolución planteada carece de cualquier tipo de explicación. Sonia y Carlos, al formular su problema, parece que han querido dejar abiertas las posibilidades de plantear diversas cuestiones. De hecho en el enunciado del apartado d) solo pone has ganado ir a ambos y aquí añaden cual es la probabilidad de estar en el coche?

Dado que nuestro interés es mostrar el proceso de abstracción de estos estudiantes, vamos a detenernos en la secuencia de como llevan a cabo el enunciado de esta tarea. Durante la entrevista, el entrevistador fue leyendo el enunciado que habían propuesto y haciendo algunos comentarios sobre los significados implicados y sobre lo que parecía asumirse de manera implícita en el texto, a los que contestaba fundamentalmente Carlos. Una de las características de estos estudiantes es la de dejar cosas sobrentendidas o implícitas: En ningún momento dicen en el enunciado que exista la posibilidad de ganar un premio para ir a los dos museos. Definen el suceso M ir a los dos museos cuando en el enunciado dicen: Si aciertas... recibes dos invitaciones para el MARQ.

Carlos en la entrevista ante el comentario del entrevistador: ...si se acierta se lanza un dado y el resultado nos da entradas para ir a un museo o a otro o a los dos, recalca enseguida: O a los dos. Si, si, hemos puesto un valor que esto en los dos que es el seis.

Los datos iniciales del enunciado que formulan los exponemos a continuación. Hemos añadido letras para simbolizar los sucesos y hacer inteligible la exposición ya que es-

tos estudiantes, añadiendo una nueva característica a su compleja forma de abstraer los conceptos, apenas representan los sucesos que utilizan en algún momento del problema. Llamamos H: contestar desde casa y C: contestar desde el coche. De la misma forma que han hecho los estudiantes, llamamos A: acertar la pregunta. Según esto, los datos de su enunciado son:

$$P(A/H) = 6/8 \quad P(A/C) = 3/9 \quad P(H) = 4/5 \quad P(C) = 1/5 \quad P(H), P(C) (\sum = 1)$$

Desde los datos del enunciado propuesto también obtienen las siguientes probabilidades:

$$P(U/A) = 4/6 \quad P(M/A) = 3/6 \quad P((U \cap M)/A) = 1/6 \quad (\text{dato implícito al que hemos}$$

hecho referencia).

De la manera en la que Sonia y Carlos han enunciado el problema, se infiere que han reconocido previamente las condiciones que deben darse para poder aplicar el teorema de la probabilidad total y han expresado dos sucesos, contestar desde casa y contestar desde el coche, que según el enunciado son incompatibles y sus probabilidades suman uno. Este hecho es corroborado durante la entrevista en relación con el teorema de la probabilidad total, que ponen en evidencia en primer lugar:

1. E (haciendo mención a la manera en la que han resuelto el apartado a): En el apartado a) preguntais la probabilidad de acertar y poneis unas operaciones sin explicar que es cada uno de los valores que aparecen.

2. Carlos: Pero yo ponla las probabilidades, las tenia todas en una hoja y?

3. E: Ya, pero me entregais a mi esta tarea y yo la tengo que entender. [Risas].

4. E: Y por qué no lo habeis expresado aquí?

5. Carlos: No los quise poner, iba, iba haciendo?

6. E: Por qué es una probabilidad total?

7. Carlos: De acertar, porque ahí estan todas las posibilidades de acertar?

8. Sonia: Puedes acertar estando en el coche o estando en tu casa, uno?

9. E: Si.

10. Carlos: Esta probabilidad es estando en casa y la otra sera en el coche porque es menor. Luego sumas y ya esta.

## Aplicaciones

El teorema de Bayes es valido en todas las aplicaciones de la teoria de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional solo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar como debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana esta demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y el hecho de permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia empírica es lo que esta abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Una aplicación de esto son los clasificadores bayesianos que son frecuentemente usados en implementaciones de filtros de correo basura o spam, que se adaptan con el uso. Otra aplicación se encuentra en la fusión de datos, combinando información expresada en términos de densidad de probabilidad proveniente de distintos sensores.

Como observación se tiene

$$\sum_{i=1}^n P(A_i|B) = 1 \quad (1.109)$$

y su demostración resulta trivial. Como aplicaciones puntuales: El diagnóstico de cáncer. Evaluación de probabilidades durante el desarrollo de un juego de bridge por

Dan F. Waugh y Frederick V. Waugh. Probabilidades a priori y a posteriori. Un uso

controvertido en la Ley de sucesión de Laplace.<sup>4</sup> En el testeo de hipótesis en Ciencia

Política cuando se usa metodología process tracing. **Inferencia bayesiana**

Las diferentes metodologías de inferencia se pueden ver como un conjunto de fórmulas que resultan aplicables en determinados casos y bajo ciertas condiciones. La metodología bayesiana este basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes. Dentro de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido enunciar el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en conocimientos intrínsecos. La metodología bayesiana especifica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo de conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se acondiciona al modelo de probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos.

El fin de la estadística, específicamente de la estadística Bayesiana, es suministrar una metodología para estudiar adecuadamente la información mediante análisis de datos y decidir de manera acertada sobre la mejor forma de actuar. Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro

de un espacio maestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística. La estadística bayesiana provee cantidades tanto conocidas como desconocidas lo que permite incorporar los datos conocidos dentro de la estimación de los parámetros dados inicialmente, logrando así un proceso de estimación mas rico en información haciendo inferencias sobre las cantidades desconocidas

La inferencia bayesiana es un tipo de inferencia estadística en la que las evidencias u observaciones se emplean para actualizar o inferir la probabilidad de que una hipótesis pueda ser cierta. El nombre *bayesiana* proviene del uso frecuente que se hace del teorema de Bayes durante el proceso de inferencia. El teorema de Bayes se ha derivado del trabajo realizado por el matemático Thomas Bayes. Hoy en día, uno de los campos de aplicación es en la teoría de la decisión, visión artificial (simulación de la percepción en general) y reconocimiento de patrones por ordenador.

La inferencia bayesiana utiliza aspectos del método científico, que implica recolectar evidencia que se considera consistente o inconsistente con una hipótesis dada. A medida que la evidencia se acumula, el grado de creencia en una hipótesis se va modificando. Con evidencia suficiente, a menudo podrá hacerse muy alto o muy bajo. Así, los que sostienen la inferencia bayesiana dicen que puede ser utilizada para discriminar entre hipótesis en conflicto: las hipótesis con un grado de creencia muy alto deben ser aceptadas como verdaderas y las que tienen un grado de creencia muy bajo deben ser rechazadas como falsas. Sin embargo, los detractores dicen que este método de inferencia puede estar afectado por un sesgo debido a las creencias iniciales que se deben sostener antes de comenzar a recolectar cualquier evidencia. i) Construcción axiomática ii) Una sola regla

de decisión iii) La única que ofrece solución para ciertos problemas

Un ejemplo de inferencia bayesiana es el siguiente:

Durante miles de millones de años, el sol ha salido después de haberse puesto. El sol se ha puesto esta noche. Hay una probabilidad muy alta de (o 'Yo creo firmemente' o 'es verdad') que el sol va a volver a salir mañana. Existe una probabilidad muy baja de (o 'yo no creo de ningún modo' o 'es falso') que el sol no salga mañana. La inferencia bayesiana usa un estimador numérico del grado de creencia en una hipótesis aun antes de observar la evidencia y calcula un estimador numérico del grado de creencia en la hipótesis después de haber observado la evidencia. La inferencia bayesiana generalmente se basa en grados de creencia, o probabilidades subjetivas, en el proceso de inducción y no necesariamente declara proveer un método objetivo de inducción.

En el año 1763, dos años después de la muerte de Thomas Bayes (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de Teorema de Bayes. En la teoría de la probabilidad el Teorema de Bayes es un resultado enunciado por Thomas Bayes en el que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de solo A.

El origen del concepto de la obtención de probabilidades posteriores con infor-

maciónon limitada se atribuye al respetable Thomas Bayes. La formula básica para la probabilidad condicional en circunstancias de dependencia se conoce como Teorema de Bayes

Partiendo del fundamento anterior, a continuación se muestra un ejemplo sencillo y básico del funcionamiento del teorema de Bayes y sus diferentes ecuaciones: Se debe tener presente que se denomina probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A), \text{ si } P(A) \neq 0 \quad (1.110)$$

Del mismo modo se denota para  $p(A/B)$

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B), \text{ si } P(B) \neq 0 \quad (1.111)$$

Como se ha planteado anteriormente, el Teorema de Bayes es la concordancia entre probabilidades de que algún suceso ocurra partiendo de un suceso producido

## 1.12 Tarea 11

### 1.12.1 Probabilidad Subjetiva

Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad. La probabilidad subjetiva se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

Las valoraciones subjetivas de la probabilidad permiten una más amplia flexibilidad que los otros dos planteamientos. Los tomadores de decisiones puede hacer uso de cualquier evidencia que tengan a mano y mezclarlas con los sentimientos personales sobre la situación. Las asignaciones de probabilidad subjetiva se dan con más frecuencia cuando los eventos se presentan sólo una vez o un número muy reducido de veces.

Es una forma de cuantificar por medio de factores de ponderación individuales, la probabilidad de que ocurra cierto evento, cuando no es posible de cuantificar de otra manera mas confiable.

**Evento** Un evento es el resultado posible o un grupo de resultados posibles de un experimento o un proceso observado y es la mínima unidad de análisis, para efectos de cálculo de probabilidad.

Tipos de evento:

- Mutuamente excluyente
- Independiente.
- Dependiente
- No excluyente entre si.

### 1.12.2 Los puentes de Königsberg

La ciudad de Kaliningrado, antiguamente llamada Königsberg, es un bonito lugar situado en la desembocadura del río Pregolya, en la antigua Prusia Oriental. Este río atravesaba la ciudad, dividiendo la zona en varias partes. Para no perder la comunicación, ésta estaba llena de un sistema de puentes conectores.

En total, había siete grandes puentes en Kaliningrado: El puente del herrero, el puente conector, el puente verde, el puente del mercado, el puente de madera, el puente alto y, por último, el puente de la miel. Los ciudadanos se sentían muy orgullosos de esta gran red de comunicación, y entre ellos surgió un pequeño juego para entretenerse en los momentos de aburrimiento:

*Se pueden atravesar todos los puentes pasando sólo una vez por cada puente?*



**LA SOLUCIÓN DE LEONARD EULER** Leonard Euler (1707-1783), genio de las Matemáticas natural de Basilea (Suiza), dio al problema una respuesta segura: *No es posible planificar un paseo que recorra todos los puentes una única vez.*

La investigación que realizó Euler para resolver este problema fue presentada en 1736 en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. La obra de Euler puede considerarse como el comienzo de la Teoría de Grafos, que forma parte de la Topología, rama de las Matemáticas que Leibniz llamó “geometría de la posición”.

Euler, para mayor claridad, sustituyó cada uno de los trozos de tierra firme por un punto y cada puente por un trazo, dando lugar a un esquema simplificado. Así, la isla está representada por el punto al cual llegan cinco trazos, pues son cinco los puentes que van a ella. La figura resultante es un grafo (un grafo es un conjunto de puntos llamados “vértices o nodos” del grafo y un conjunto de líneas que los unen que se llaman “aristas o lados” del grafo).

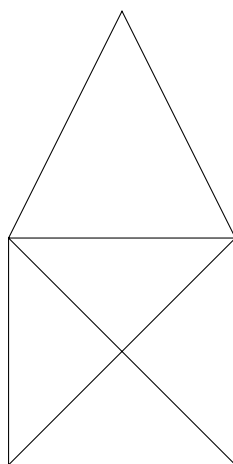


Figure 1.18:

El problema se reduce a dibujar la figura, partiendo de un punto, de un trazo, es decir, sin levantar el lápiz (boli, pluma...) del papel y sin recorrer una misma línea dos veces. A un recorrido de estas características se le llama *camino euleriano*.

Demostraremos que es imposible dibujar nuestra figura de un solo trazo. En efecto, a cada punto nodal hay que llegar por un lado y salir por otro distinto; esta regla sólo tiene dos excepciones que son el punto de salida, al cual no hay que llegar y el punto de llegada, del cual no hay que salir.

Por lo tanto, si un tal recorrido fuera posible, es necesario que en todos los vértices del grafo, salvo a lo más en dos, converjan dos, cuatro... aristas, es decir, converja un número par de ellas. Pero en cada uno de los nodos del grafo correspondiente a los puentes de Königsberg concurre un número impar de aristas (3, 5, 3, 3).

Por lo dicho en el párrafo anterior, si existe un camino euleriano, tenemos dos posibilidades:

El punto de partida y de llegada es el mismo, entonces en todos los vértices concurre un número par de aristas. Los puntos de partida y de llegada son distintos, entonces hay dos vértices con número impar de aristas (el de partida y el de llegada) y todos los demás tienen un número par de aristas.

El recíproco de esta afirmación es también cierto, es decir, si ocurre alguna de las

dos posibilidades anteriores, existe un camino euleriano y podríamos realizar la figura correspondiente sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por una misma arista. Además, si todos los nodos tienen un número par de arista se puede empezar por cualquiera de ellos y se terminará, naturalmente, en el que se empezó; y si hay sólo dos con un número impar de aristas, se empieza en uno de ellos y se termina en el otro. Las demostraciones formales de estas afirmaciones están fuera del alcance de estas notas.

Después de todo lo comentado se comprenderá por qué la "casita" tiene un camino euleriano y el "sobre" no

Una observación final: no es necesario realizar el grafo, éste se hizo por claridad de la exposición. Podríamos haber contado los puentes que partían de cada trozo de tierra firme y luego haber razonado como lo hizo Euler.

## 1.13 Tarea 12

### Asimetría estadística

El objetivo de la medida de la asimetría es, sin necesidad de dibujar la distribución de frecuencias, estudiar la deformación horizontal de los valores de la variable respecto al valor central de la media. Las medidas de forma pretenden estudiar la concentración de la variable hacia uno de sus extremos. Una distribución es simétrica cuando a la derecha y a la izquierda de la media existe el mismo número de valores, equidistantes dos a dos de la media, y además con la misma frecuencia. Una distribución es Simétrica si  $\bar{x} = M_e = M_o$ . En caso contrario, decimos que la distribución es Asimétrica, y entonces puede ser de dos tipos:

#### La media, la varianza y la desviación estándar.

Como sabemos, la media nos da información acerca de la tendencia central de los datos y la varianza describe la dispersión de éstos. A la media de la distribución la denotaremos

por  $\mu$ , y a la desviación estándar por  $\sigma$ . La media es el valor promedio ponderado en

el que los valores posibles de la variable aleatoria se ponderan según las probabilidades correspondientes de ocurrencia, también se denomina valor esperado  $E(X)$ .

Para una variable aleatoria discreta:

$$\mu = E(X) = \sum [xP(x)] \quad (1.112)$$

donde  $P(x)$  es la probabilidad de valores posibles de la variable aleatoria  $x$ . Es decir, se multiplica cada valor de  $x$  por la probabilidad de que ocurra, y luego se suman estos productos.

Para una variable aleatoria continua:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(x)dx \quad (1.113)$$

La varianza describirá la dispersión de la distribución. Para una variable aleatoria discreta:

$$\sigma^2 = \sum [(x - \mu)^2 P(x)] \quad (1.114)$$

Para una variable aleatoria continua:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(X) dx \quad (1.115)$$

Obviamente, la desviación estándar  $\sigma$  la calcularemos al extraer la raíz cuadrada de la varianza.

Asimétrica a la izquierda. Es el caso en que  $M_o \geq M_e \geq \bar{x}$  Curva Asimétrica a la izquierda

Asimétrica a la derecha. Es el caso en que  $M_o \leq M_e \leq \bar{x}$

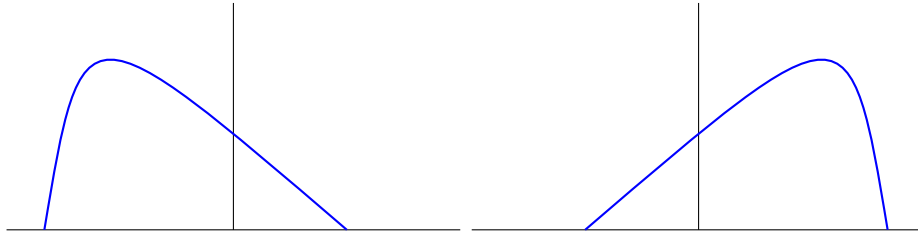


Figure 1.19: Asimétrica a la izquierda. Asimétrica a la derecha.

### Coeficiente de asimetría de Fisher

En una distribución simétrica los valores se sitúan en torno a la media aritmética de forma simétrica. El coeficiente de asimetría de Fisher se basa en la relación entre las distancias a la media y la desviación típica. En una distribución simétrica  $\bar{x} = M_e = M_o$  y  $m_3 = 0$ .

En teoría de la probabilidad y estadística, la medida de asimetría más utilizada parte del uso del tercer momento estándar. La razón de esto es que nos interesa mantener el signo de las desviaciones con respecto a la media, para obtener si son mayores las que ocurren a la derecha de la media que las de la izquierda. Sin embargo, no es buena idea tomar el momento estándar con respecto a la media de orden 1. Debido a que una simple suma de todas las desviaciones siempre es cero. En efecto, si por ejemplo, los datos están agrupados en  $k$  clases, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^k f_i(x_i - \mu) = \sum_{i=1}^k f_i x_i - \mu \sum_{i=1}^k f_i = \mu - \mu = 0 \quad (1.116)$$

en donde  $x_i$  representa la marca de la clase  $i$ -ésima y  $f_i$  denota la frecuencia relativa de dicha clase. Por ello, lo más sencillo es tomar las desviaciones al cubo. El coeficiente

de asimetría de Fisher, representado por  $\gamma_1$ , se define como:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (1.117)$$

donde  $\mu_3$  es el tercer momento en torno a la media y  $\sigma$  es la desviación estándar.

- Si  $\gamma_1 > 0$ , la distribución es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si  $\gamma_1 = 0$ , la distribución es simétrica. El recíproco no es cierto: es un error común asegurar que si  $\gamma_1 = 0$  entonces la distribución es simétrica (lo cual es falso).
- Si  $\gamma_1 < 0$ , la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda.

### Coeficiente de asimetría de Pearson

Se basa en el hecho de que en una distribución simétrica, la media coincide con la moda. A partir de este dato se define el coeficiente de asimetría de Pearson como:

$$A_p = \frac{\mu - moda}{\sigma} \quad (1.118)$$

donde  $\mu$  es el momento central de orden 1, que corresponde a la media aritmética de la variable  $X$ .

Si la distribución es simétrica,  $\mu = moda$  y  $A_p = 0$ . Si la distribución es asimétrica positiva la media se sitúa por encima de la moda y, por tanto,  $A_p > 0$ .

- Si  $A_p < 0$ , la distribución es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si  $A_p = 0$ , la distribución es simétrica.
- Si  $A_p > 0$ , la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda.

Este coeficiente no es muy bueno para medir asimetrías leves.

La asimetría resulta útil en muchos campos. Muchos modelos simplistas asumen una distribución normal, esto es, simétrica en torno a la media. La distribución normal tiene una asimetría cero. Pero en realidad, los valores no son nunca perfectamente simétricos y la asimetría de la distribución proporciona una idea sobre si las desviaciones de la media son positivas o negativas. Una asimetría positiva implica que hay más valores distintos a la derecha de la media.

Las medidas de asimetría, sobre todo el coeficiente de asimetría de Fisher, junto con las medidas de apuntamiento o curtosis se utilizan para contrastar si se puede aceptar que una distribución estadística sigue la distribución normal. Esto es necesario para realizar numerosos contrastes estadísticos en la teoría de inferencia estadística.

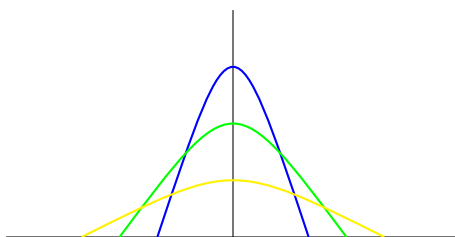


Figure 1.20:

### 1.13.1 Justificaciones Formulas Caminata al Azar

#### Formula 6

Empleando técnicas de conteo se puede obtener la probabilidad de obtener cualquier secuencia de  $n_1$  pasos a la derecha y  $n_2$  pasos a la izquierda al multiplicar sus respectivas probabilidades.

$$pp...pqq...q = p^{n_1} q^{n_2} \quad (1.119)$$

**Demostración** Siendo  $p$  y  $q$  las probabilidades de dar el paso a la izquierda o a la derecha, sabemos que para obtener la probabilidad de un evento por Principio multiplicativo dice:

Si una acción puede realizarse de  $n_1$  maneras diferentes y una segunda acción puede realizarse de  $n_2$  maneras diferentes, entonces ambas acciones pueden realizarse secuencialmente de  $n_1 n_2$  maneras diferentes. Este principio multiplicativo se generaliza para

cualquier número de acciones a realizar, esto es, si una primera acción se puede realizar de  $n_1$  maneras diferentes, una segunda acción se puede realizar de  $n_2$  maneras diferentes,..., y una  $r$ -ésima acción se puede realizar de  $n_r$  maneras diferentes, entonces las  $r$  acciones se pueden realizar de maneras diferentes.

### Ecuación 7

Por otro lado, el número de formas en que se pueden dar  $n$  pasos en total considerando  $n_1$  pasos a la derecha y  $n_2$  pasos a la izquierda es:

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} \quad (1.120)$$

**Demostración** Por permutaciones con grupos de objetos iguales, se dice que como se van a repetir los valores de las probabilidades tanto de ir a la izquierda como de ir a la derecha y la ecuación pasada se obtiene de las diferentes formas que se pueden dar pasos a la izquierda como derecha, se deduce que:

$$P \left( \begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_n \\ n \end{matrix} \right) = \frac{n!}{n_1, n_2, \dots, n_n} \cdot \frac{\text{Total de pasos!}}{\text{Pasos izq!Pasos der!}} \quad (1.121)$$

### Ecuación 12

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left[\frac{(N+m)}{2}\right]!\left[\frac{(N-m)}{2}\right]!} P^{\frac{(N+m)}{2}} (1-p)^{\frac{(N-m)}{2}} \quad (1.122)$$

### Ecuación 22-26

$$\Delta u = u - \bar{u} \quad (1.123)$$

$$\overline{\Delta u} = \overline{u - \bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad (1.124)$$

$$\overline{(\Delta u)^2} = \sum_{i=1}^M P(u_i)(u_i - \bar{u})^2 \geq 0 \quad (1.125)$$

$$\overline{(u - \bar{u})^2} = \bar{u^2} - \bar{u}^2 \quad (1.126)$$

$$\bar{u^2} \geq \bar{u}^2 \quad (1.127)$$

## 1.14 Tarea 13

### 1.14.1 Curvas ROC

En la Teoría de detección de señales una curva ROC (acrónimo de Receiver Operating Characteristic, o Característica Operativa del Receptor) es una representación gráfica de la sensibilidad frente a la especificidad para un sistema clasificador binario según se varía el umbral de discriminación. Otra interpretación de este gráfico es la representación de la razón o ratio de verdaderos positivos (VPR = Razón de Verdaderos Positivos) frente a la razón o ratio de falsos positivos (FPR = Razón de Falsos Positivos) también según se varía el umbral de discriminación (valor a partir del cual decidimos que un caso es un positivo). ROC también puede significar Relative Operating Characteristic (Característica Operativa Relativa) porque es una comparación de dos características operativas (VPR y FPR) según cambiamos el umbral para la decisión.

- Verdaderos Positivos (**VP**) o también éxitos
- Verdaderos Negativos (**VN**) o también rechazos correctos
- Falsos Positivos (**FP**) o también falsas alarmas o Error tipo I
- Falsos Negativos (**FN**) o también, Error de tipo II

La curva ROC es también independiente de la distribución de las clases en la población (en diagnóstico, la prevalencia de una enfermedad en la población). El análisis ROC se relaciona de forma directa y natural con el análisis de coste/beneficio en toma de decisiones diagnósticas.

#### Errores de tipo I y de tipo II

En un estudio de investigación, el error de tipo I también denominado error de tipo alfa ( $\delta$ ) 1 o falso positivo, es el error que se comete cuando el investigador no acepta la hipótesis nula  $H_0$  siendo esta verdadera en la población. Es equivalente a encontrar un resultado falso positivo, porque el investigador llega a la conclusión de que existe una diferencia entre las hipótesis cuando en realidad no existe. Se relaciona con el nivel de significancia estadística.

Representación de los valores posibles de la probabilidad de un error tipo II (rojo) en el ejemplo de un test de significancia estadística para el parámetro  $\mu$ . El error tipo II depende del parámetro  $\mu$ . Mientras más cerca se encuentre este del valor supuesto bajo la hipótesis nula, mayor es la probabilidad de ocurrencia del error tipo II. Debido a que el verdadero valor de  $\mu$  es desconocido al hacer la presunción de la hipótesis alternativa, la probabilidad del error tipo II, en contraste con el error tipo I (azul), no se puede calcular.

La hipótesis de la que se parte  $H_0$  aquí es el supuesto de que la situación experimental presentaría un “estado normal”. Si no se advierte este “estado normal”, aunque en realidad existe, se trata de un error estadístico tipo I.

Dado un estimador para una variable estadística discreta binaria se definen dos valores asociados importantes:

Verdaderos Positivos	Falsos Positivos
Falsos Negativos	Verdaderos Negativos

Figure 1.21:

La sensibilidad nos indica la capacidad de nuestro estimador para dar como casos positivos los casos realmente enfermos; proporción de enfermos correctamente identificados. Es decir, la sensibilidad caracteriza la capacidad de la prueba para detectar la enfermedad en sujetos enfermos.

La especificidad nos indica la capacidad de nuestro estimador para dar como casos negativos los casos realmente sanos; proporción de sanos correctamente identificados. Es decir, la especificidad caracteriza la capacidad de la prueba para detectar la ausencia de la enfermedad en sujetos sanos.

La sensibilidad se define como:

$$Sensibilidad = \frac{VP}{VP+FN}$$

$$Sensibilidad = \frac{VP}{VP+FN}$$

donde VP es verdaderos positivos y FN falsos negativos.

La especificidad de una prueba representa la probabilidad de que un sujeto sano tenga un resultado negativo en la prueba. La especificidad se define como:

$$Especificidad = \frac{VN}{VN+FP}$$

$$Especificidad = \frac{VN}{VN+FP}$$

Donde VN, serían los verdaderos negativos; y FP, los falsos positivos

### 1.14.2 Matriz de confusión

En el campo de la inteligencia artificial una matriz de confusión es una herramienta que permite la visualización del desempeño de un algoritmo que se emplea en aprendizaje supervisado. Cada columna de la matriz representa el número de predicciones de cada clase, mientras que cada fila representa a las instancias en la clase real. Uno de los beneficios de las matrices de confusión es que facilitan ver si el sistema está confundiendo dos clases.



### Problema del cáncer

Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una fiabilidad del 98 por ciento; es decir, si uno tiene cáncer el análisis dará positivo el 98 por ciento de las veces, y si no lo tiene, dará negativo el 98 por ciento de las veces. Supongamos además que el 0,5 por ciento de la población, una de cada doscientas personas, padece verdaderamente cáncer. Imaginemos que uno se ha sometido al análisis y que su médico le informa con tono pesimista que ha dado positivo. Hasta qué punto ha de deprimirse esa persona? Lo sorprendente del caso es que dicho paciente ha de mantenerse prudentemente optimista. El por qué de este optimismo lo encontraremos al determinar la probabilidad condicional de que uno tenga un cáncer sabiendo que el análisis ha dado positivo.

### 1.14.3 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Es el método empleado para resolver problemas de optimización restringida. Consiste en convertir un problema de extremos restringidos en una forma tal que se pueda aplicar las condiciones para extremos libres.

**Planteamiento geométrico.** Supongamos una superficie, definida por la función  $z = f(x, y)$  y sobre esta superficie tracemos una curva, definida por la ecuación  $g(x, y) = 0$ . Se trata de encontrar los máximos y mínimos de esta curva espacial.

**Planteamiento analítico** Se trata de hacer máxima o mínima una función  $f(x, y)$  sujeta a una restricción  $g(x, y) = 0$ .

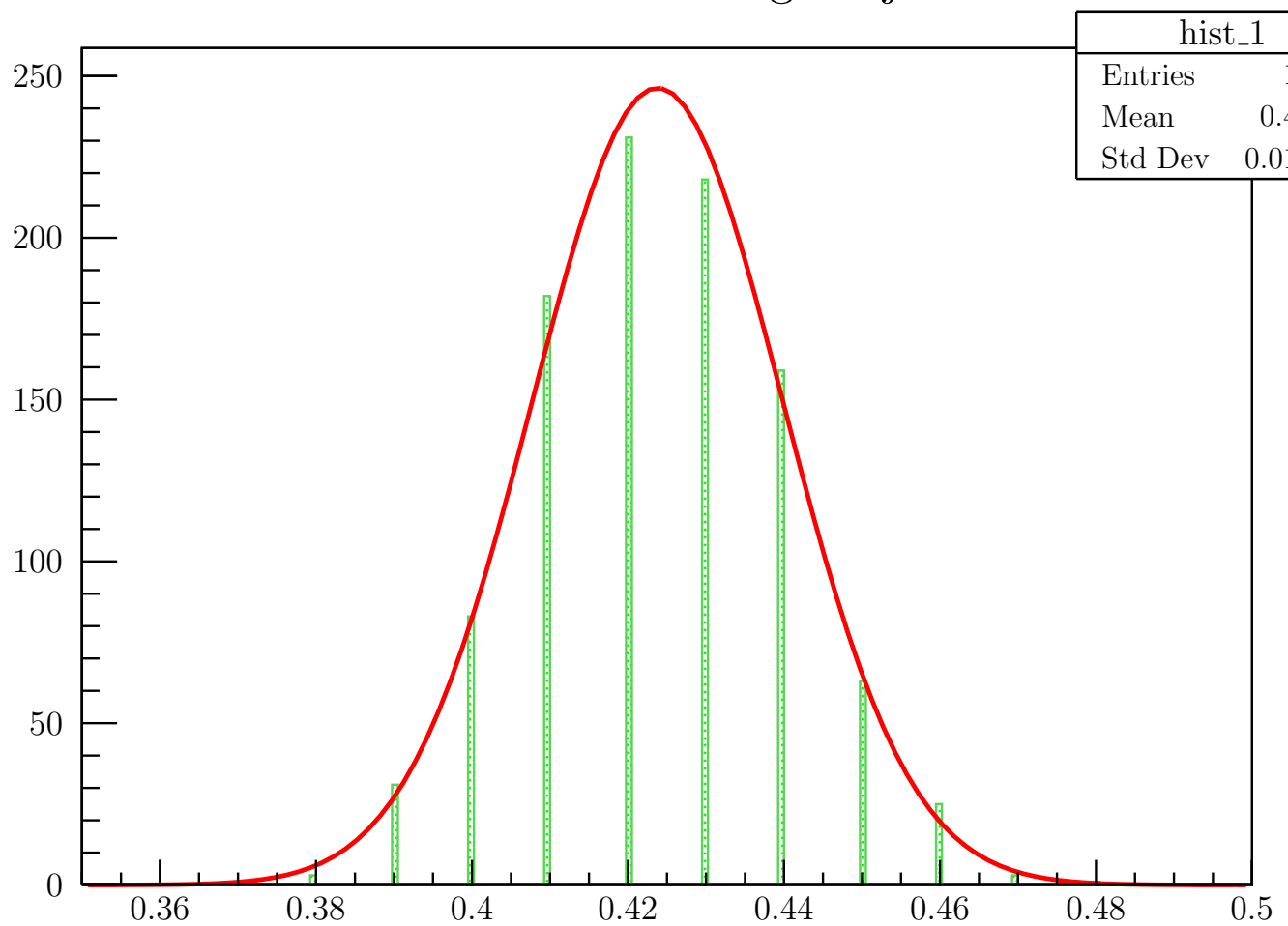
**Reducción a una variable:** Teóricamente el problema se puede resolver despejando  $y$  en la ecuación  $g(x, y) : y = h(x)$  y sustituyendo en  $f(x, y) = f(x, h(x)) = k(x)$ , con lo cual el problema se reduce a calcular un máximo o un mínimo de una sola variable.

El problema se presenta cuando no es práctico o no es posible despejar una de las variables en la ecuación  $g(x, y) = 0$ .

**Método de los multiplicadores de Lagrange** Los extremos de la función  $f(x, y)$  condicionados por la restricción  $g(x, y) = 0$ , se producen en los puntos críticos de la función de Lagrange:  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

**Condiciones necesarias de extremo.** Las condiciones necesarias del extremo de una función de Lagrange vienen dadas por el sistema de ecuaciones:

## Probabilidad salga roja

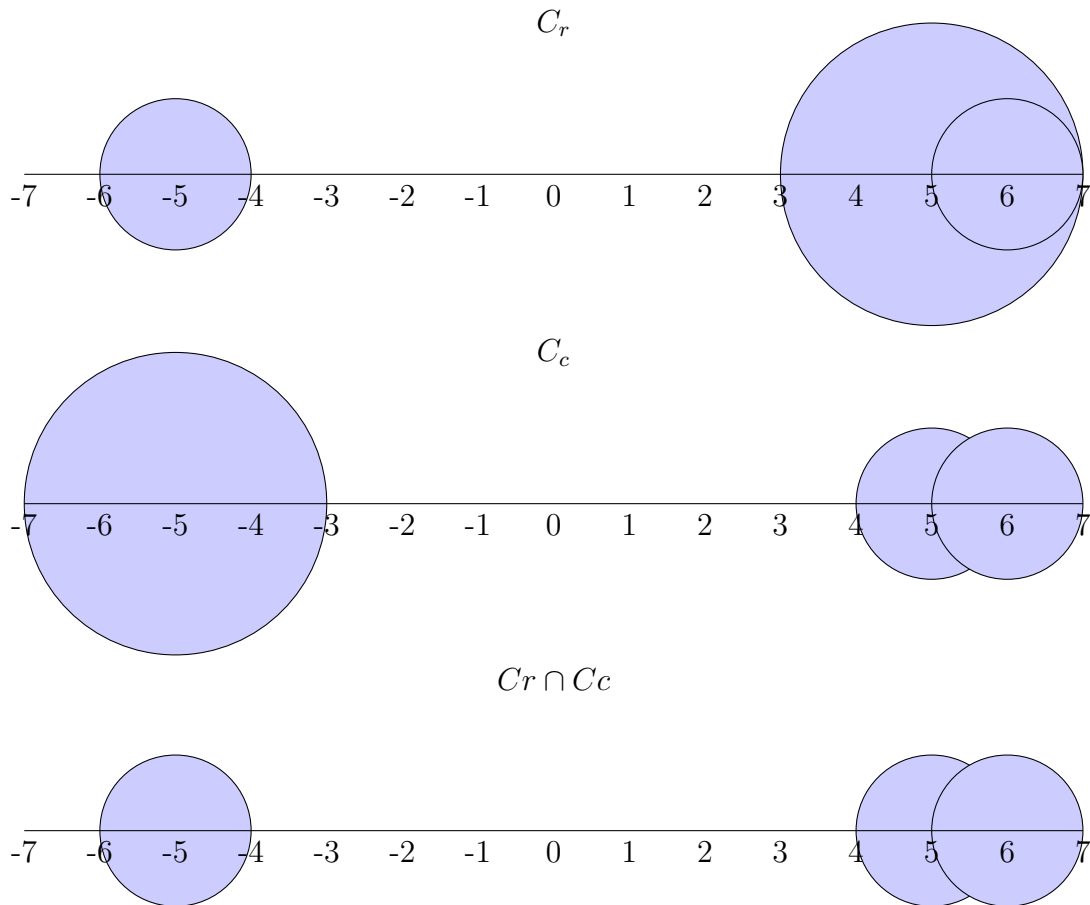


## 1.15 Tarea 14

### 1.15.1 Eigenvalores y eigenvectores

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\| \Rightarrow \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 7. \quad (1.128)$$

Como  $|\lambda| \leq \|A\|_{\infty}$ , entonces todos los eigenvalores de A están contenidos en un círculo centrado en 0 y radio 7. Con los círculos, se tiene:



Para la matriz dada se tiene que:

$$\sigma(A) = \left\{ 5, \left( 1 \pm \frac{5\sqrt{5}}{2} \right) \right\} \approx \{5, 6.0902, -5.0902\} \quad (1.129)$$

## 1.16 Tarea 15

### 1.16.1 Plano Colores Humano

Empezaremos diciendo que el color en sí no existe, no es una característica del objeto, es más bien una apreciación subjetiva nuestra. Por tanto, podemos definirlo como, una sensación que se produce en respuesta a la estimulación del ojo y de sus mecanismos nerviosos, por la energía luminosa de ciertas longitudes de onda.

El color es pues un hecho de la visión que resulta de las diferencias de percepciones del ojo a distintas longitudes de onda que componen lo que se denomina el "espectro" de luz blanca reflejada en una hoja de papel. Estas ondas visibles son aquellas cuya longitud de onda está comprendida entre los 400 y los 700 nanómetros; más allá de estos límites siguen existiendo radiaciones, pero ya no son percibidos por nuestra vista.

Lo que ocurre cuando percibimos un objeto de un determinado color, es que la superficie de ese objeto refleja una parte del espectro de luz blanca que recibe y absorbe las demás. La luz blanca está formada por tres colores básicos: rojo intenso, verde y azul violeta. Por ejemplo, en el caso de objeto de color rojo, éste absorbe el verde y el azul, y refleja el resto de la luz que es interpretado por nuestra retina como color rojo. Este fenómeno fue descubierto en 1666 por Isaac Newton, que observó que cuando un haz de luz blanca traspasaba un prisma de cristal, dicho haz se dividía en un espectro de colores idéntico al del arco iris: rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violeta.

### 1.16.2 Análisis de componentes principales

Problemas:

1. Una muestra con 100 participantes en un estudio, de las cuales se mide su peso, altura, ancho de hombros y ancho de caderas. Suponemos que se tienen las siguientes medidas:

- Media de peso=54.2
- media de altura=161.7
- media de ancho de hombros=36.5
- media de ancho de caderas=30.1

La matriz de covarianzas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
 \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \end{array} & \begin{array}{l} 44.70 \\ 17.79 \\ 5.99 \\ 9.19 \end{array} & \begin{array}{l} 17.79 \\ 26.15 \\ 4.52 \\ 4.44 \end{array} & \begin{array}{l} 5.99 \\ 4.52 \\ 3.33 \\ 1.34 \end{array} & \begin{array}{l} 9.19 \\ 4.44 \\ 1.34 \\ 4.56 \end{array}
 \end{array} \quad (1.130)$$

Para determinar los componentes principales solo se necesita calcular los vectores y valores característicos de la matriz  $S$ . Calculamos los eigenvectores.

$$[1] \quad 58.482924 \quad 15.479064 \quad 2.541130 \quad 2.236882 \quad (1.131)$$

Entonces se puede determinar que el primer vector propio calculado determina el 74.2% de la variabilidad de los datos y junto con el segundo determina el 93.9% de variabilidad. Esto es calculado sumando nuestros valores propios y viendo el promedio que representa cada valor respecto al valor total de los valores propios, claro considerando el orden del primer valor propio al último.

Por lo tanto los componentes principales quedan descritos como:

$$Y_1 = 0.83 \cdot 1 + 0.50 \cdot 2 + 0.13 \cdot 3 + 0.18 \cdot 4 \quad (1.132)$$

$$Y_2 = 0.5 \cdot 1 - 0.85 \cdot 2 - 0.05 \cdot 3 + 0.073 \cdot 4 \quad (1.133)$$

La interpretación del modelo implica que el primer componente principal es un componente de tamaño y el segundo es un componente de forma. Las variables  $X_1, X_2, X_3, X_4$  son los datos. peso, altura, ancho de hombros y ancho de caderas. También se puede observar que se redujo la dimensión de los datos de 4 dimensiones ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ) a 2 dimensiones ( $Y_1, Y_2$ ).

## 1.17 Tarea 16

### 1.17.1 Principal Component Analysis vs. Independent Component Analysis for Damage Detection

Principal Component Analysis (PCA) is a technique of multivariable and megavariable analysis which may provide arguments for reducing a complex data set to a lower dimension and reveal some hidden and simplified structure/patterns that often underlie it. The main goal of Principal Component Analysis is to obtain the most important characteristics from data. In order to develop a PCA model, it is necessary to arrange the collected data in a matrix  $X$ . This  $m \times n$  matrix contains information from  $n$  sensors and  $m$  experimental trials. Since physical variables and sensors have different magnitudes and scales, each data-point is scaled using the mean of all measurements of the sensor at the same time and the standard deviation of all measurements of the sensor. Once the variables are normalized, the covariance matrix  $C_x$  is calculated. It is a square symmetric  $m \times m$  matrix that measures the degree of linear relationship within the data set between all possible pairs of variables (sensors). The subspaces in PCA are defined by the eigenvectors and eigenvalues of the covariance matrix as follows:  $C_x$

$$C_x \tilde{P} = \tilde{P} \Lambda \quad (1.134)$$

Where the eigenvectors of  $C_x$  are the columns of  $\tilde{P}$ , and the eigenvalues are the diagonal terms of  $\Lambda$  (the off-diagonal terms are zero). Columns of matrix  $\tilde{P}$  are sorted according to the eigenvalues by descending order and they are called as (by some authors) Principal Components of the data set or loading vectors. The eigenvectors with the highest eigenvalue represents the most important pattern in the data with the largest quantity of information. Choosing only a reduced number  $r < n$  of principal components, those corresponding to the first eigenvalues, the reduced transformation matrix could be imagined as a model for the structure. In this way, the new matrix  $P$  ( $\tilde{P}$  sorted and reduced) can be called as PCA model. Geometrically, the transformed data matrix  $T$  (score matrix) represents the projection of the original data over the direction of the principal components  $P$ :

$$T = XP \quad (1.135)$$

## 1.18 Tarea 17

### 1.18.1 Radiación del cuerpo negro

El término radiación se refiere a la emisión continua de energía desde la superficie de cualquier cuerpo, esta energía se denomina radiante y es transportada por las ondas electromagnéticas que viajan en el vacío a la velocidad de 3108 m/s . Las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas, la luz visible, la luz ultravioleta, los rayos X y los rayos gamma, constituyen las distintas regiones del espectro electromagnético.

Consideremos una cavidad cuyas paredes están a una cierta temperatura. Los átomos que componen las paredes están emitiendo radiación electromagnética y al mismo tiempo absorben la radiación emitida por otros átomos de las paredes. Cuando la radiación encerrada dentro de la cavidad alcanza el equilibrio con los átomos de las paredes, la cantidad de energía que emiten los átomos en la unidad de tiempo es igual a la que absorben. En consecuencia, la densidad de energía del campo electromagnético existente en la cavidad es constante.

A cada frecuencia corresponde una densidad de energía que depende solamente de la temperatura de las paredes y es independiente del material del que están hechas.

Si se abre un pequeño agujero en el recipiente, parte de la radiación se escapa y se puede analizar. El agujero se ve muy brillante cuando el cuerpo está a alta temperatura, y se ve completamente negro a bajas temperaturas.[Rivadulla, 2002]

### 1.18.2 Ley del desplazamiento de Wien

La posición del máximo en el espectro de la radiación del cuerpo negro depende de la temperatura del cuerpo negro y está dado por la ley de desplazamiento de Wien. Calculando la derivada primera de la función de la distribución de Planck expresada en términos de la longitud de onda o de la frecuencia.

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \right) = 0 \quad (1.136)$$

Obtenemos la ecuación trascendente

$$5(e^x - 1) - xe^x = 0 \text{ con } x = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4.96 \quad (1.137)$$

Este resultado constituye la ley de desplazamiento de Wien, que establece que el máximo de la densidad de energía  $\frac{dE_\lambda}{d\lambda}$  por unidad de longitud de onda a distintas temperaturas  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , se produce a las longitudes de onda  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  tales que

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 = \lambda_3 T_3 = \dots = \frac{hc}{k \cdot 4965} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot K \quad (1.138)$$

De modo similar en el dominio de las frecuencias

$$\frac{d}{df} \left( \frac{f^3}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \right) = 0 \quad (1.139)$$

Obtenemos la ecuación trascendente

$$3(e^x - 1) - xe^x = 0 \text{ con } x = \frac{hf_m}{kT} = 2.822 \quad (1.140)$$

A medida que la temperatura  $T$  se incrementa el máximo se desplaza hacia longitudes de onda menores (mayores frecuencias).

Como podemos comprobar el producto

$$\lambda_m f_m = 0.5684c \quad (1.141)$$

no nos da la velocidad de la luz  $c$  como se podría esperar a primera vista, ya que estamos tratando con el máximo de una distribución que nos da la intensidad por unidad de longitud de onda o por unidad de frecuencia.

La luminosidad de un cuerpo caliente no se puede explicar, como se indica en algunos textos, a partir de la ley del desplazamiento de Wien, sino a partir de la intensidad de la radiación emitida en la región visible del espectro, tal como veremos más abajo. Así, a temperaturas tan elevadas como  $6000K$  el máximo medido en el eje de frecuencias de la distribución espectral se sitúa en la región del infrarrojo cercano. Sin embargo, a esta temperatura una proporción importante de la intensidad emitida se sitúa en la región visible del espectro.[Martínez, 1999]

## 1.19 Histograma de bolitas



# Chapter 2

## Exámenes

“Siempre me recuerdo a m mismo que lo que se observa es como mucho una combinacin de probabilidades y resultados, no slo resultados.”

---

Nassim Taleb

### 2.1 Primer exámen

#### 2.1.1 Mi examen

1. Cuantas permutaciones distintas pueden formarse con todas las letras de cada una de las siguientes palabras: *i*)Sufre, *ii*)examen, *iii*)abandonado. **Solución:**

$$i) \text{Sufre} = 5!; ii) \text{Examen} = \frac{6!}{2!}; iii) \text{Abandonado} = \frac{10!}{3!2!2!2!}$$

2. Simplificar  $\frac{(n+2)!}{n!}$  **Solución:**

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\dots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\dots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

3. *i*) En cuantas maneras diferentes pueden ser colocadas 7 personas en 7 sillas, *ii*) cuantas si son colocadas en una mesa circular. **Solución:**

$$i) 7! \quad ii) (n-1)! = 6!$$

4. Encuentre el valor de  $n$  si  $P(n, 4) = 42P(n, 2)$  **Solución:**

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1)(n-2)(n-3) = 42 \text{ Como } n \text{ debe de ser}$$

positiva el valor de  $n=9$

5. Demuestra el siguiente teorema:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

**Solución:**

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Multiplicamos la primera parte por  $\frac{r}{r}$  y la otra parte  $\frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \cdot \frac{r}{r} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}$$

$$\frac{rn!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$\frac{rn! + (n-r+1)(n!)}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!(r + (n-r+1))}{r!(n-r+1)!}$$

$$\frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}$$

6. En cuantas maneras puede formarse un comité que consta de 3 hombres y 2 mujeres y estos son escogidos de 7 hombres y 5 mujeres. Se escogen: **Solución:**

- 3 hombres de 7  $\therefore \binom{7}{3}$
- 2 mujeres de 5  $\therefore \binom{5}{2}$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350 \text{ maneras}$$

7. i) Encuentra el numero de las distintas permutaciones que pueden ser formadas de la palabra "AVANZA" ii) Cuantas de estas permutaciones empiezan y terminan con "A" iii) Cuantas tienen 3 "A's" juntas iv) Cuantas empiezan con "A" y terminan con "Z" **Solución:**

$$i) \frac{6!}{3!} = 120 \quad ii) 4! = 24 \quad iii) 4 \cdot 3! = 24 \quad iv) \frac{4!}{2!} = 12$$

8. Cuántas soluciones distintas tiene la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \text{ tal que}$$

$$x_1 \in \{1, 2, 3, \dots\}; x_2 \in \{2, 3, 4, \dots\}; x_3, x_4 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

**Solución:** se dice:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Nos adecuamos las restricciones para coincidir con la fórmula general proponemos:

$$y_1 = x_1 - 1 \text{ entonces } \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad y_2 = x_2 - 2 \text{ entonces } \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El problema queda

$$y_1 + 1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 = 100 \text{ donde } y_1; y_2; x_3; x_4 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 97 \text{ donde } y_1; y_2; x_3; x_4 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\binom{4+97-1}{3} = \binom{100}{3}$$

9. Cuántos mensajes telegráficos diferentes se pueden enviar utilizando exactamente 4 puntos y 5 rayas **Solución:**

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \text{ mensajes}$$

10. Si en un salón hay 14 estudiantes Cuántos partidos diferentes de voleibol se podrían realizar si los equipos son de 6 jugadoras ? **Solución:**

- Primer equipo  ${}_{14}C_6$
- Segundo equipo  ${}_8C_6$

Como una sexteta puede pertenecer a ambas combinaciones, se divide entre la permutacion de los 2 equipos.

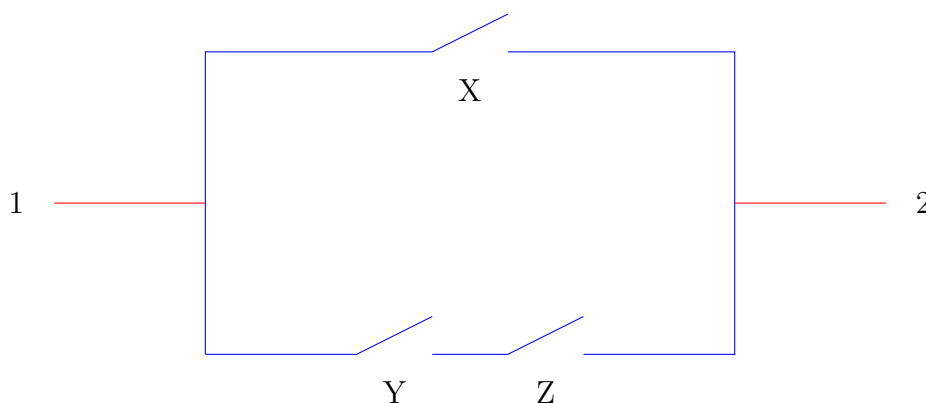
$$\frac{\frac{14!}{6!(14-6)!} \cdot \frac{8!}{6!(8-6)!}}{2!} = 42042 \text{ partidos}$$

11. Encuentra el termino que contiene  $y^6$  en la expansion de  $(3xy^2 - z^2)^7$  **Solución:**

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$\binom{7}{4} (3xy^2)^{7-4} (z^2)^4 = 945x^3y^6z^8$$

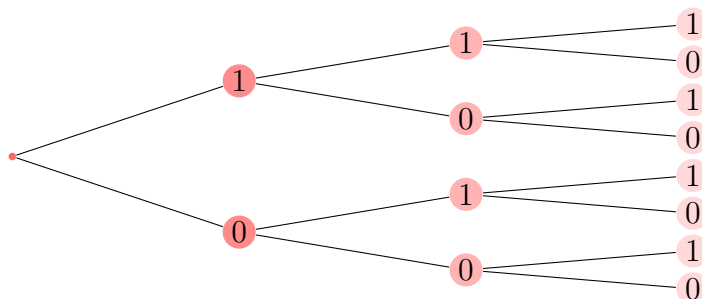
12. En el circuito mostrado en la siguiente figura, la corriente fluye de la terminal 1 a la terminal 2, siempre que el interruptor  $X$  esté cerrado, o que los interruptores  $Y$  y  $Z$ , ambos estén cerrados.



El experimento consiste en observar el funcionamiento de un interruptor, que puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1, cerrado, generando el espacio muestral  $S_1 = \{0, 1\}$ . Observando el funcionamiento de los tres interruptores, simultáneamente.

Construya el diagrama de árbol asociado a tal experimento. **Solución:**

El funcionamiento de cada interruptor es independiente del funcionamiento de los otros dos, por lo que cada interruptor puede presentar uno de dos estados: 0, abierto o 1, cerrado. Entonces, el diagrama de árbol correspondiente es:



13. La selección mexicana está integrada por 25 jugadores en total, de los cuales tres son porteros, siete defensas, diez medios y cinco delanteros. De cuántas maneras puede el entrenador integrar un equipo de once jugadores, si cualquiera de ellos puede ocupar cualquier posición? **Solución:**

$$\frac{25!}{11!(25 - 11)!} = 4457400$$

14. Del problema anterior De cuántas maneras puede integrar el entrenador en equipo que tenga un portero, cuatro defensas, cuatro medios y dos delanteros? **Solución:**

- Para el portero es

$$C \binom{3}{1}$$

- Para los defensas es

$$C \binom{7}{4}$$

- Para los medios es

$$C \binom{10}{4}$$

- Para los delanteros es

$$C \binom{5}{2}$$

$$C \binom{3}{1} * C \binom{7}{4} * C \binom{10}{4} * C \binom{5}{2} = 3 * 840 * 210 * 10 = 5,292,000 \text{ Equipos}$$

15. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si, los libros de cada asignatura deben estar todos juntos. **Solución:**

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 207360$$

16. Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se puede formar con sus vértices? **Solución:** Vamos a determinar en primer lugar las rectas que se pueden

trazar entre 2 vértices.

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

Son  $C \binom{5}{2}$ , a las que tenemos que restar los lados que determinan 5 rectas que no son diagonales.

$$C \binom{5}{2} - 5 = \frac{5!}{2!3!} - 5 = 5 \text{ Diagonales}$$

$$C \binom{5}{3} - 5 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ Triangulos}$$

17. Demuestre:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = 0$$

**Solución:** expandir :  $(1 - 1)^n$

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$(1 + (-1))^n = \binom{n}{0} 1^{n-0} (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n} 1^{n-n} (-1)^n = 0$$

$$(1 + (-1))^n = \binom{n}{0} 1^{n-0} - \binom{n}{1} 1^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} 1^{n-n} (-1)^n = 0$$

18. Con las cifras 1, 2 y 3, cuántos números de cinco cifras pueden formarse? Cuántos son pares?

- Sí entran todos los elementos
- Sí importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

**Solución:**

$$3^5 = 243$$

son pares :

$$3^4 = 81 \text{ son pares}$$

19. Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? Cuántos de ellos son mayores de 70.000?

- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.
- No se repiten los elementos.

**Solución:**

$$5! = 120$$

$$2! \cdot 4! = 48$$

20. Calcular

$$i) \binom{7}{5, 3, 6}$$

$$ii) \binom{12}{10, 3, 5}$$

**Solución:**

$$i) \frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 6!}$$

$ii)$  no se puede ya que  $10 + 3 + 5 \neq 12$

### 2.1.2 Examen a resolver

**Nombre:** Sánchez González Sandra Lizeth

1.- En una carrera de velocidad participan 12 personas. De cuántas formas pueden ser otorgados el primero, segundo y tercer lugar en premios, si el empate no se considera?

**Respuesta:**

$$P \binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

2.- Un niño debe seleccionar 8 canicas de diferente color para jugar, de un total de 12 canicas, cabe mencionar que no hay colores repetidos. De cuántas maneras puede hacer esta selección? **Respuesta:**

$$C \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

3.- Tres sillas de metal, cuatro de plástico y dos de madera, cabe mencionar que todas son de diferente color y se colocan en una sala de esperase. De cuántas formas distintas es posible ordenarlas si: Las sillas de cada material deben estar todas juntas? **Respuesta:**

Maneras de ordenar las sillas  $P_m \cdot P_p \cdot P_{mad}$ , como todas deben permanecer juntas, se multiplica por  $P_t$

$$P_m = 3! = 6$$

$$P_p = 4! = 24$$

$$P_{mad} = 2! = 2$$

$$P_t = 3! = 6$$

$$P_m P_p P_{mad} P_t = (6)(24)(2)(6) = 1728$$

4.- Tres sillas de metal, cuatro de plástico y dos de madera, cabe mencionar que todas son de diferente color y se colocan en una sala de espera. De cuántas formas distintas es posible ordenarlas si: solo las sillas de plástico deben estar juntas? **Respuesta:** Como

solo plástico deben de estar juntas, contemplaremos como un conjunto  $P_{m+mad}$ , y las maneras de ordenar las sillas  $P_m \cdot P_p \cdot P_{m+mad}$ , juntas, se multiplica por  $P_t$

$$P_p = 4! = 24$$

$$P_{m+mad} = 5! = 120$$

$$P_t = 2! = 2$$

$$P_p P_{m+mad} P_t = (24)(120)(2) = 5720$$



5.-Simplifique la siguiente función  $\frac{(n+2)!}{n!}$  **Respuesta:**

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!}{n!} &= \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n(n-1)(n-2)\dots}}{\cancel{n(n-1)(n-2)\dots}} \\ &= (n+2)(n+1) \\ &= n^2 + 3n + 2\end{aligned}$$

6.-  $A = \{\text{rojo, azul, verde, amarillo, negro, morado}\}$  Dado el conjunto de colores, de cuantas formas se pueden elegir 3 elementos del conjunto  $A$  considerando que si se aceptan repeticiones: **Respuesta:**

$$C\binom{6}{3} = \frac{(6+3-1)!}{3!(6-1)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 56$$

7.- Arturo tiene en total 4 monedas de las siguientes denominaciones 10,5, 2y1. Cuántas cantidades diferentes puede formar con estas monedas? **Respuesta:**

$$\begin{aligned}\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \\ 1 + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3!} = 15\end{aligned}$$

8.- Expanda  $(x+y)^4$  haciendo uso del teorema del binomio. **Respuesta:**

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

9.- Expanda  $(x+y)^6$  haciendo uso del teorema del binomio. **Respuesta:**

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6 \\ &= x^6 + 15x^5y + 20x^4y^2 + 15x^3y^3 + 6x^2y^4 + 6xy^5 + y^6\end{aligned}$$

10.- Un señor debe seleccionar 8 lapiceros de diferente color para pintar, de un total de 12 lapiceros de diferente color, cabe mencionar que no hay colores repetidos. De cuántas maneras puede hacer esta selección? **Respuesta:**

$$C \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

11.- Un sensor se puede comprar de entre cinco proveedores. En cuántas formas se pueden escoger tres proveedores de entre los cinco?. Cabe mencionar que sólo importan los tres que se han escogido, no el orden de selección. **Respuesta:**

$$C \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

12.- El colegio de profesores de la universidad esta conformado por 6 profesores, en una reunión de trabajo estos se sientan al rededor de una mesa circular, de cuantas maneras se pueden sentar estos profesores? **Respuesta:**

$$(6-1)! = 5! = 120$$

13.- Tenemos un faro de señalización con 8 focos, 4 focos rojos, 3 focos verdes y 1 foco amarillo. Cuantas señales diferentes se pueden formar en el faro? **Respuesta:**

$$P \binom{8}{4 \quad 3} = \frac{8!}{4!3!} = 280$$

14.- Tenemos una palabra con 10 letras, 5 letras A, 3 letras B y 2 letras C. Cuantas palabras diferentes podemos formar? **Respuesta:**

$$P \binom{10}{5 \quad 3 \quad 1} = \frac{10!}{5!3!1!} = 2520$$

15.- Demuestre que :  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  **Respuesta:**

$$\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\text{Si multiplicamos por } \frac{k}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k}$$

16.- Un estudiante debe seleccionar 8 materias para cursar en el semestre, de un total de 12 materias ofertadas. De cuántas maneras puede hacer esta selección? **Respuesta:**

$$C \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

17.- Simplificar  $\frac{n!}{(n-1)!}$  **Respuesta:**

$$\frac{(n!)}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}{(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)} = \frac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\dots\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\dots\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}} = n$$

18.-Cinco fabricantes producen televisores, cuya calidad varía de un fabricante a otro. Si fuéramos a seleccionar tres fabricantes al azar, de cuantas maneras se pueden elegir dos de los tres fabricantes? **Respuesta:**

$$C \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

19.- En una clase hay 12 estudiantes a punto de presentar examen. De cuántas maneras los 12 estudiantes pueden presentar 3 exámenes diferentes si a cada examen le corresponden cuatro estudiantes? **Respuesta:** Hay

$$C \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!}$$

maneras de escoger 4 estudiantes que tomen el primer examen, a continuación hay

$$C \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!}$$

maneras de escoger 4 estudiantes que tomen el segundo examen. Es decir, que por todo hay

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = 495 \cdot 70 = 34,650$$

20.- Un niño tiene en el bolsillo 5 paletas de diferentes sabores. De cuántas formas distintas puede sacar dos paletas? **Respuesta:**

$$C \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

### 2.1.3 Examen a revisar

Eduardo

1.- Demostrar el siguiente Teorema de orden sin remplazamiento (Permutación):

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad 0 \leq k \leq n \quad (2.1)$$

2.- Demuestre el teorema Binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^n (a)^k (b)^{n-k} \quad (2.2)$$

y desarrolle la expresión:

$$(a+b)^7 \quad (2.3)$$

3.- El Licenciado Memo realizará un proyecto de Chat y pretende crear un sistema de login para asignar un nombre de usuario en un Chat, el nombre de usuario debe de ser único para cada miembro del chat. La cadena de usuario consta de 4 letras y 2 números específicamente en ese orden. De cuantas maneras se pueden formar las cadenas de usuarios dado que no se puedan repetir las letras y los dígitos, tomando en cuenta que el Licenciado es muy egocéntrico quiere que todas las cadenas de usuario empiecen con la inicial de su nombre: Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el rango es de 0-9 Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z.

4.- Siguiendo las mismas reglas que el problema 3. También el Licenciado sufrió un trauma con los números impares, desarrolle la cantidad nombres de usuario que sólo acepte números pares.

5. Cuantas distintas permutaciones de cada palabra se forman en total a partir del palíndromo ?Son esos ojos océanos

6.- Habrá una reunión con mesas circulares y butacas en fila; cada fila o mesa tiene 5 asientos, un grupo de compañeros asistieron juntos: Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina, pero como Regina y Lorenzo son novios quieren saber si es mejor sentarse en grupo en las mesas circulares o butacas de tal forma que siempre estén juntos. Cuál es la mejor opción y Por qué? Demuestre las probabilidades.

7.- Simplifique la siguiente función

$$\frac{(n+2)!}{n!} \quad (2.4)$$

8.- Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad (2.5)$$

9.- En una clase de 25 Alumnos se requiere elegir un comité formado por un Presidente, un Secretario, Vocal y un Escrutador Cuántos comités diferentes se pueden formar?

10.- Debido a una campaña escolar se busca tener tratos igualitarios y se le exige al profesor obtener las diferentes maneras de escoger un comité compuesto por 2 mujeres y 2 hombres. En el grupo del problema número 9, existen 15 hombres y 10 mujeres.

11.- En una biblioteca se encuentran 7 libros diferentes de probabilidad De cuantas formas se pueden elegir 5 libros?

12.- De cuántas formas se pueden agrupar los números 0, 2, 4, 6, 8 cada agrupación por 2 y 4 elementos sin repetirse? Escriba las parejas de combinaciones para 2 elementos y para 4 elementos.

13.-Desarrolle el siguiente binomio:

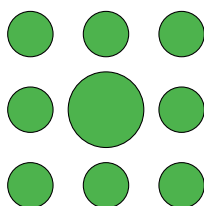
$$(a + 2b)^5 \quad (2.6)$$

14.- En una carrera de 200 metros planos se encuentran 4 mexicanos, 3 haitiano 2 ingleses, 2 jamaquinos y 1 estadounidense. Cuántos distintos pódiums se pueden dar al finalizar la carrera, tomando en cuenta como premios Oro, Plata y Bronce?

15.- En la cafetería de ESCOM se ofrece el siguiente menú para los trabajadores y estudiantes: a) Sopa b) Arroz, Espagueti c) Filete de pescado, pizza, enchiladas de mole. d) Flan Cuantas combinaciones es posible tener, Grafique el diagrama de árbol?

16.-  $A = \{a, b, c, d, e\}$  Dado el conjunto de cuantas formas se pueden elegir 3 elementos:

17.- De cuantas maneras se pueden ubicar las cifras del 1 al 9 en el siguiente diagrama:



18.- Si una prueba de selección múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales sólo 1 es correcta.

a) En cuántas formas diferentes puede un estudiante escoger una respuesta para cada preguntar?

b) En cuántas formas puede un estudiante escoger una alternativa para cada pregunta y tener todas las respuestas incorrectas?

19.- Un alumno decide presentar 3 de las 5 evaluaciones (Ingles (I), Certificación(C), Probabilidad (P), Teoría de la Computación (T), Algoritmos(A), Matemáticas (M) y Seminario(S)) que tiene pendiente. De cuantas maneras diferentes puede elegir esas evaluaciones?

20.- En una universidad egresaron 8 estudiantes y 3 empresas ofrece 1 contrato a firmar, determine las formas en que pueden firmar contrato los egresados.

## Respuestas

1.-

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Obtenida dicha expresión, ésta se multiplica por  $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) * (n-r)!}{(n-r)!}$$

Por tanto se obtiene:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2.-Dado

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n (a)^k (b)^{n-k}$$

Desarrollando se tiene:

$$(a+b)^n = (a)^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1*2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

Por otro lado resolviendo:

$$(a+b)^7 = (a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7)$$

3.- Dado el conjunto de las letras por 10 dígitos, donde el rango es de 0-9 Dado el conjunto de las letras por 27 letras, donde el rango es de A a Z. Se tiene que:  $1x26x25x24x10x9 = 1,404,000$  cadenas de usuario También se tiene que:

$$1x \frac{26!}{(26-3)!} x \frac{10!}{(10-2)!} = 1,404,000 \text{cadenas de usuario}$$

4.- Se tiene que:  $1x26x25x24x5x4 = 312,000$  cadenas de usuario También se tiene que:

$$1x \frac{26!}{(26-3)!} x \frac{5!}{(5-2)!} = 312,000 \text{cadenas de usuario}$$

5.- 1)  $3! = 6$ ; Existen 3 letras en total que no se repiten. 2)  $\frac{4!}{2!} = 12$ ; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 's'. 3)  $\frac{4!}{2!} = 12$ ; Existen 4 letras pero 2 repetidas que es 'o'. 4)

$\frac{7!}{2!} = 2520$ ; Existen 7 letras pero 2 repetidas que es 'o'.

6.-Se determinan los casos posibles para las butacas en fila se tiene:

$$P(n) = n! = 5! = 120 \text{ casos posibles.}$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto { Gabriel, Carlos, Jazmín, Lorenzo y Regina} Por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$P(cn) = n! = 4! = 24 \text{ casos favorables.}$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{24}{120} = .20$$

Probabilidad = .20 = 20 % de probabilidad Se determinan los casos posibles para las mesas circulares:

$$PCn = (n - 1)! = (5 - 1)! = 4! = 24 \text{ casos posibles}$$

Dado que son 5 compañeros, Jazmín y Lorenzo se pueden ver como un conjunto por tanto se determinan los casos favorables para 4:

$$PCn = (n - 1)! = (4 - 1)! = 3! = 6 \text{ casos favorables}$$

Por tanto se tiene la probabilidad:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{6}{24} = .25$$

Probabilidad = .25 = 25 % de probabilidad Conclusión: (P(Butacas)=.20)-Es menos

que-(P(Mesas Circulares)=.25) Comparando las probabilidades, se tiene que en es mejor opción sentarse en mesas circulares.

7. primeramente se tiene:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n+1)(n+2)\dots}{n(n-1)(n-2)\dots}$$

eliminando terminos de tiene:

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{n(n+1)(n+2)\dots}}{\cancel{n(n-1)(n-2)\dots}} = (n+2)(n+1)$$

Resolviendo la ecuación

$$(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

8. Demuestre:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Para obtener el mismo denominador se tiene:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{r*n!}{r*(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)*n!}{r!(n-r+1)*(n-r)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r*n!}{r!*(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} \\
&= \frac{r*n!+(n-r+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} = \frac{[r+(n-r+1)]*n!}{r!*(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)*n!}{r!*(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!*(n-r+1)!} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}
\end{aligned}$$

9.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(25, 4) = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4!21!} = \frac{25*24*23*22}{4*3*2*1} = 12,650 \text{ grupos}$$

10.- Se requiere saber el número de combinaciones de un grupo se tiene la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Esto para cada conjunto de género de alumnos:

$$C(h, r) * C(m, r) = C(15, 2) * C(10, 2) = \frac{15!}{2!(15-2)!} * \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{15!}{2!13!} * \frac{10!}{2!8!} = 4,725 \text{ grupos}$$

11.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Por tanto se desarrolla la fórmula

$$C(7, 5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \text{ formas de escoger}$$

12.- Primero se utiliza la siguiente fórmula:

$$C(n, r) = C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!}$$

Sustituyendo para 2 elementos se tiene:

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Sustituyendo para 4 elementos se tiene:

$$C(5, 4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$

Finalmente

$$C(5, 2) * C(5, 4) = 10 * 5 = 50 \text{ agrupaciones}$$

13.- Desarrollando se tiene:



$$(a + 2b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4(2b) + \binom{5}{2}a^3(2b)^2 + \binom{5}{3}a^2(2b)^3 + \binom{5}{4}a(2b)^4 + \binom{5}{5}(2b)^5$$

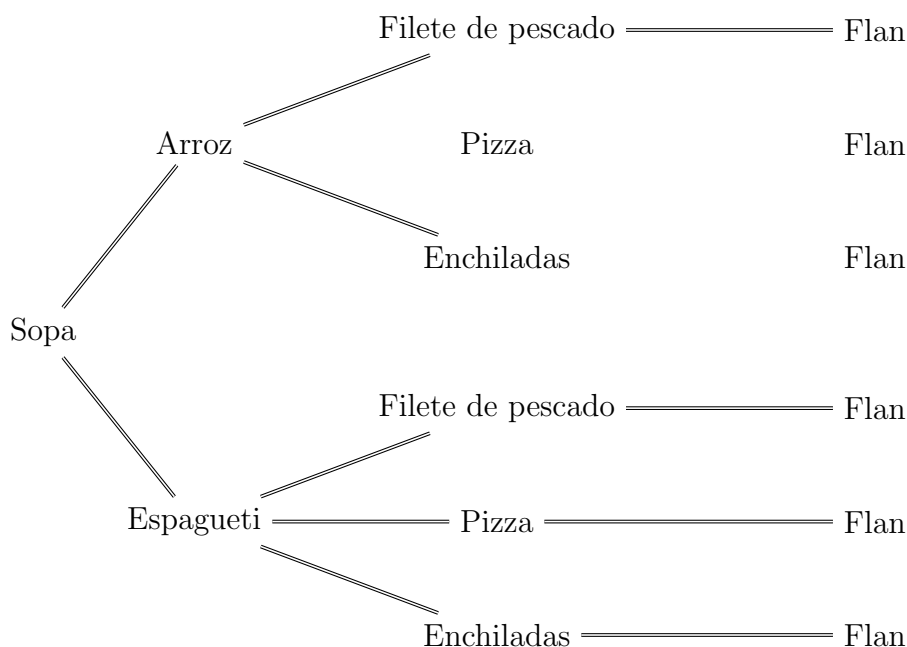
Como el segundo término de la suma contiene un coeficiente igual a 2, entonces primero se eleva ese término  $(2b)$  y después se multiplica por el coeficiente de la función del binomio:

$$(a + 2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$$

14.- Primero se cuentan los corredores:  $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12$  Y como el pódium tiene 3 ganadores (Oro, Plata y Bronce), por tanto se tiene:

$$P(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1,320 \text{ distintos podiums}$$

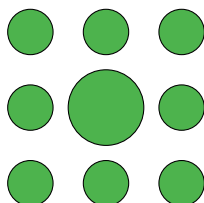
15.-Gráficamente el diagrama de árbol se tiene:



16.-Desarrollando las operaciones se tienen:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \quad C(5, 3) = C_5^3 = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35 \text{ formas de elegir}$$

17.- Observemos el siguiente diagrama



Dado que es un diagrama circular:

$$Pcn(n-1)! = (8-1)! = 7! = 5,040 \text{ casos}$$

Ahora dado que en el círculo central (CC) se pueden colocar los 9 dígitos se tiene:

$$P_{cn} * circulo central = 9! * 9 = 362,880 * 9 = 3,265,920 \text{ casos}$$

18.- Para a) Dado que son 5 preguntas, se realizan las posibles respuestas para cada pregunta:

$$nPr = 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 1024 \text{ on } Pr = 4^5 = 1024 \text{ posibles respuestas}$$

Para b) Se elimina la respuesta correcta y sólo queda 3 posibles respuestas incorrectas para cada pregunta:

$$nPr = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 243 \text{ on } Pr = 3^5 = 243 \text{ posibles respuestas incorrectas}$$

19.-  $n=5$  Número de evaluaciones a escoger  $r=3$  Número de evaluaciones a combinar

$$C(n, r) = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 \text{ maneras diferentes}$$

20.- Dado que se requiere un estudiante en cada empresa

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 336 \text{ formas de firmar contratos}$$

## 2.2 Segundo examen

Recomendación: Asegúrese de comprender cada reactivo antes de proceder a responder. Anote debajo de cada pregunta, únicamente la solución a la pregunta o problema, puede apoyarse de anotar todo el procedimiento realizado para llegar a su resultado en una hoja en blanco.

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

1. Una familia tiene dos niños. Encuentra la probabilidad que los dos niños sean mujeres, dado que al menos uno de los dos niños nació en invierno. Considera que las cuatro estaciones son igualmente probables, que el género es independiente de la estación y que los dos géneros son igualmente probables. (1 punto)

### Solución:

Sea:  $A$  = dos mujeres  $B$  = al menos una mujer en invierno  $A \cap B$  = dos mujeres y al menos una mujer en invierno

por la definición de probabilidad condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de que el niño sea mujer es  $\frac{1}{2}$  y la probabilidad de que el niño nazca en invierno es  $\frac{1}{4}$ , por lo que la probabilidad de que un niño sea mujer y que nazca en invierno es:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ , ahora la probabilidad de que el otro niño sea mujer es:  $\frac{1}{2}$  y que nazca en cualquier estación  $\frac{1}{4}$ . Entonces la probabilidad de que sean dos mujeres y la primera haya nacido en invierno es:  $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ .

Utilizando la analogía anterior se pueden obtener las probabilidades, se puede hacer un diagrama de árbol de cuatro niveles donde el primer nivel consta de 4 elementos ( $P = 1/4$ ) que representan las estaciones del año, el segundo nivel (de 8 elementos, dos por cada estación) representa al género (hombre o mujer) con  $P = 1/2$ , hasta este nivel representa solo un niño, ahora para representar al segundo niño, en el tercer nivel se representan las estaciones del año ( $P = 1/4$ ) y el último nivel representa el género. Ahora para obtener la  $P(B)$  se toma en cuenta solo las ramas donde al menos

un niño de género mujer nació en invierno lo que genera las siguientes expresiones:

$$P(B) = 7\left(\frac{1}{64}\right) + \frac{1}{8} = \frac{7}{64} + \frac{8}{64} = \frac{15}{64}$$

Ahora se recorre el árbol buscando esta vez solo las ramas donde nacieron dos mujeres y al menos una mujer nació en invierno, generando la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{64} \cdot \frac{4}{64} = \frac{7}{64} \text{ entonces:}$$

$$P(A | B) = \frac{7/64}{15/64} = \frac{7}{15}$$

2. Se cuentan con dos monedas, una moneda normal, y otra moneda preparada que cae cara con una probabilidad de  $3/4$ . Se escoge una moneda al azar y se lanzas 3 veces. Esta cae cara las 3 veces. Con esta información ¿cuál es la probabilidad de que la moneda escogida sea la moneda normal? (1 punto)

**Solución:**

Sea:  $A$  = el evento de que la moneda escogida cae cara 3 veces  $B$  = el evento de

escoger la moneda normal  $C$  = el evento de escoger la moneda preparada Entonces,

el evento de elegir una moneda al azar es:

$$P(B) = P(C) = 1/2$$

Si consideramos de obtener cara con la moneda normal es  $1/2$ , y la probabilidad condicional de que caiga tres veces cara dado que fue la moneda normal:

$$P(A | B) = (1/2) \cdot (1/2)^3$$

donde el primer término representa la probabilidad de escoger la moneda normal, y el segundo la probabilidad de que al lanzar 3 veces la moneda, obtengamos 3 caras.

Ahora bien para obtener la probabilidad de que salgan 3 caras en el evento de lanzar la moneda ( $P(A)$ ), se hace uso del teorema de la probabilidad total, entonces:

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | C)P(C)$$

Se sabe que la probabilidad de que la moneda preparada caiga cara es  $3/4$ , por lo que:

$$P(A) = (1/2)^3 \cdot (1/2) + (3/4)^3 \cdot (1/2)$$

Usando el teorema de Bayes, entonces:

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|C)P(C)} \\ &= \frac{(1/2)^3 \cdot 1/2}{(1/2)^3 \cdot 1/2 + (3/4)^3 \cdot 1/2} \\ &\approx 0.23 \end{aligned}$$

3. Una amiba vive en un estanque. Pasado un minuto, la amiba morirá, se dividirá en dos o permanecerá igual, los tres eventos son igualmente probables, y en los minutos consecuentes las amibas resultantes tendrán el mismo comportamiento, de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad que la población de amibas eventualmente muera? (1 punto)

**Solución:**

Sea:  $M$  = el evento de que todas las amibas mueran.  $A_i$  = el evento de que la amiba

inicial se divida en  $i$  amibas, considerando el caso mas sencillo, para el primer minutos se pueden tener las siguientes amibas  $i = 0, 1, 2$  Entonces, para el primer

minuto hay 3 opciones:

$$P(M) = P(M | A_0) \cdot \frac{1}{3} + P(M | A_1) \cdot \frac{1}{3} + P(M | A_2) \cdot \frac{1}{3}$$

La  $P(M | A_0) = 1$  ya que muere la amiba pasado el primer minuto, La  $P(M | A_1) =$

$P(M)$  ya que la amiba no cambia, (no muere ni se divide), por lo que regresamos al caso inicial. La  $P(M | A_2) = P(M)^2$ , se generan dos amibas y estas cuentan con

las mismas características que la amiba inicial; entonces:

$$P(M) = \frac{1}{3} + \frac{P(M)}{3} + \frac{P(M)^2}{3}$$

$$\frac{1}{3}P(M)^2 - \frac{2}{3}P(M) + \frac{1}{3} = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$P(M) = 1$$

Por lo que la población de amibas morirá con el paso del tiempo.

4. Es posible tener eventos  $A, B, C$  tal que  $P(A | C) < P(B | C)$  y  $P(A | C^c) < P(B | C^c)$ , entonces ¿ $P(A) > P(B)$ ? Muestra que esto es posible. (1 punto)

**Solución:**

No es posible, usando la ley total de la probabilidad se tiene:

$$P(A) = P(A | C)P(C) + P(A | C^c)P(C^c) < P(B | C)P(C) + P(B | C^c)P(C^c) = P(B)$$

$$P(A) < P(B)$$

5. Sean tres urnas con las siguientes composiciones de bolas blancas y negras:

$$U_1 : (3 \text{ blancas y } 2 \text{ negras}) \quad U_2 : (4 \text{ blancas y } 2 \text{ negras}) \quad U_3 : (1 \text{ blancas y } 4 \text{ negras})$$

Calcúlese:

- Probabilidad de extraer bola blanca.
- Probabilidad de que una bola negra que se ha extraído proceda de la segunda urna.

(1 punto)

### Solución

- Suponemos inicialmente, puesto que nada indica lo contrario, que las tres urnas son equiprobables:

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(\text{blanca}) &= P(\text{blanca}|U_1)P(U_1) + P(\text{blanca}|U_2)P(U_2) + P(\text{blanca}|U_3)P(U_3) \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{1}{3} = \frac{22}{45} \end{aligned}$$

- Por el teorema de Bayes:

$$P(U_2|\text{negra}) = \frac{P(\text{negra}|U_2)P(U_2)}{P(\text{negra})}$$

donde  $P(\text{negra})$  se puede determinar, como antes en el caso de la bola blanca, por el teorema de la probabilidad total y, por tanto.

$$\begin{aligned} P(U_2|\text{negra}) &= \frac{P(\text{negra}|U_2)P(U_2)}{P(\text{negra}|U_1)P(U_1) + P(\text{negra}|U_2)P(U_2) + P(\text{negra}|U_3)P(U_3)} \\ P(U_2|\text{negra}) &= \frac{\frac{2}{6} \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \frac{1}{3}} = \frac{5}{23} \end{aligned}$$

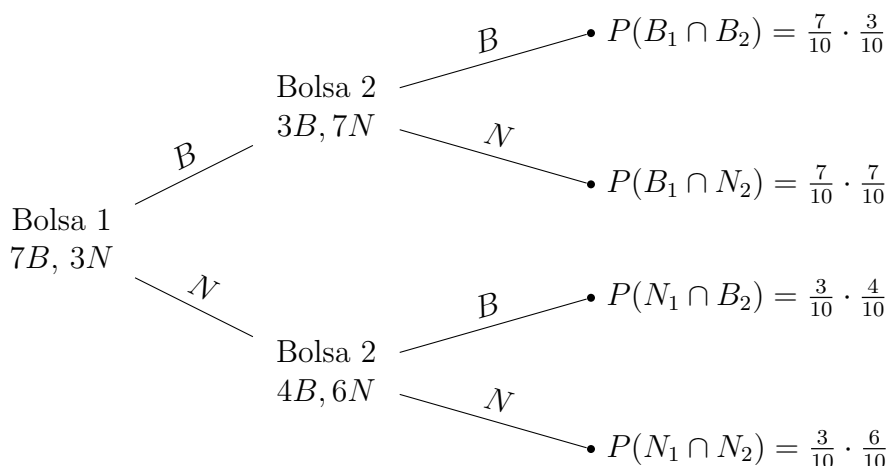
6. Tenemos dos bolsas, la primera con 10 bolas, 7 blancas y 3 negras, y la segunda con 9 bolas, 3 blancas y 6 negras.

Se extrae al azar una bola de la primera bolsa y se pasa a la segunda. De esta bolsa, también al azar, se saca una bola, calcúlese la probabilidad que esta bola sea blanca.

(1 punto)

### Solución:

En el diagrama siguiente tenemos las distintas maneras de llegar a la extracción de la segunda bola:



En el diagrama se aprecia que hay dos caminos para obtener bola blanca en la segunda extracción. caminos que hay que tomar en cuenta a la hora de calcular la probabilidad, pues al final del experimento se puede llegar por uno u por otro, sin saber de antemano cual tendrá lugar.

El diagrama en términos de sucesos, adopta la forma anterior, siendo  $B_1$  la extracción de bola blanca en la  $i$ -ésima extracción, y análogamente para  $N_1$  como bola negra.

El suceso de bola blanca es la segunda extracción sin establecer condición alguna (camino seguido),  $(B_2)$ , es igual a

$$(B_2) = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Se puede llegar a  $B_2$  a través de dos sucesos disjuntos, los del segundo miembro de la igualdad, siendo su probabilidad

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) \quad P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2|N_1)$$

por lo cual la probabilidad de extraer bola blanca,  $P(B_2)$ , es:

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2|N_1)$$

$$P(B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{37}{100}$$

7. En el centro de Ecatepec, un ladrón es perseguido por un coche de policía y al llegar a un determinado cruce en San Agustín se encuentra tres posibles calles por las que huir  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de tal manera que las dos últimas son tan estrechas que por ellas no cabe el coche de la policía, si bien el ladrón va tan nervioso que no es consciente de ello.

Si huye por la calle  $A$  le atrapan seguro puesto que el final de la misma está cortado por otra patrulla de la policía. Si huye por la calle  $C$  escapa seguro puesto que no está vigilada. Si huye por la calle  $B$  se encuentra con que está cortada y que se

bifurca en dos callejuelas: la  $BA$ , que conduce a la calle  $A$  y la  $BC$  que lleva a la calle  $C$ .

Cuál es la probabilidad de que el ladrón sea atrapado?

(1 punto)

**Solución:**

$$P(\text{atraparle}) = P(A) P(\text{atraparle} | A) + \\ P(B) P(\text{atraparle} | B) + \\ P(C) P(\text{atraparle} | C)$$

$$P(\text{atraparle} | B) = P(BA)P(\text{atraparle} | BA) + \\ P(BC)P(\text{atraparle} | BC)$$

$$P(\text{atraparle}) = P(A) P(\text{atraparle} | A) + \\ P(B) (P(BA) P(\text{atraparle} | BA) + \\ P(BC) P(\text{atraparle} | BC)) + \\ P(C) P(\text{atraparle} | C) = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0\right) + \frac{1}{3}0 = \frac{1}{2}$$

8. Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una fiabilidad del 98 por ciento; es decir, si uno tiene cáncer el análisis dará positivo el 98 por ciento de las veces, y si no lo tiene, dará negativo el 98 por ciento de las veces. Supongamos además que el 0,5 por ciento de la población, una de cada doscientas personas, padece verdaderamente cáncer. Imaginemos que uno se ha sometido al análisis y que su médico le informa con tono pesimista que ha dado positivo. Hasta qué punto ha de deprimirse esa persona? Lo sorprendente del caso es que dicho paciente ha de mantenerse prudentemente optimista. El por qué de este optimismo lo encontraremos al determinar la probabilidad condicional de que uno tenga un cáncer sabiendo que el análisis ha dado positivo. Supongamos que se hacen 10.000 pruebas de cáncer. Cuántas de ellas darán positivo? (1 punto)

**Solución:**

En promedio, 50 de estas 10.000 personas (el 0,5 por ciento de 10.000) tendrán cáncer, y como el 98 por ciento de ellas darán positivo, tendremos 49 análisis positivos. Por otra parte, el 2 por ciento de las 9.950 personas restantes, que no padecen cáncer, también darán positivo, con un total de 199 análisis positivos  $(0,02)(9.950) = 199$ ). Así, del total de 248 positivos  $(199 + 49 = 248)$ , la mayoría (199) son falsos positivos, y la probabilidad



condicional de padecer el cáncer sabiendo que se ha dado positivo es sólo  $\frac{49}{248}$

9. Dos jugadores  $A$  y  $B$  compiten en un test que incluye una serie de preguntas. Para cada una de las preguntas, las probabilidades de que  $A$  y  $B$  den la respuesta correcta son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, para todas las preguntas. Se consideran todas las preguntas eventos independientes. El juego termina cuando un jugador responde una pregunta correctamente. Defina la probabilidad de que el jugador  $A$  gane si:

- a) El jugador  $A$  responda la primera pregunta.
- b) El jugador  $B$  responda la primera pregunta:

(1 punto)

**Solución:** Primer definimos las condiciones:  $\Omega$  consiste en el espacio de muestreo

que son todas las posibles secuencias infinitas de respuestas -Evento  $A$  determina

que el jugador  $A$  responda la primera pregunta correctamente -Evento  $F$  el juego

termina despues de la primera pregunta -Evento  $W$  el jugador  $A$  gana -Evento

$A^c$  determina que el jugador  $B$  responda la primera pregunta correctamente Se

quiere obtener  $P(W|A)$  y  $P(W|A^c)$  Usando el teorema de la probabilidad total y la

particion dada por  $\{F, F^c\}$   $P(W|A) = P(W|A \cap F)P(F|A) + P(W|A \cap F^c)P(F^c|A)$

Ahora tenemos:  $P(F|A) = P[A \text{ responda correctamente la primera pregunta}] = \alpha$

$P(F^c|A) = 1 - \alpha$ ,  $P(W|A \cap F) = 1$  pero  $P(W|A \cap F^c) = P(W|A^c)$  entonces

tenemos que

$$P(W|A) = (1 \times \alpha) + (P(W|A^c) \times (1 - \alpha)) = \alpha + P(W|A^c)(1 - \alpha) \quad (2.7)$$

de forma similar:

$$P(W|A^c) = P(W|A^c \cap F)P(F|A^c) + P(W|A^c \cap F^c)P(F^c|A^c) \quad (2.8)$$

entonces definimos:

$$P(F|A^c) = P[B \text{ responde la primer pregunta correctamente}] = \beta \quad P(F^c|A) = 1 - \beta$$

pero  $P(W|A^c \cap F) = 0$ , finalmente  $P(W|A^c \cap F^c) = P(W|A)$ , entonces tenemos:

$$P(W|A^c) = (0 \times \beta) + (P(W|A) \times (1 - \beta)) = P(W|A)(1 - \beta) \quad (2.9)$$

Resolviendo la ecuación 1 y 3 tenemos que :

$$P(W|A) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (2.10)$$

$$P(W|A^c) = \frac{(1 - \beta)\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (2.11)$$

10. La información de un dispositivo es transmitida como una secuencia de números binarios(bits), sin embargo el ruido en el canal interrumpe la señal, en el que un dígito transmitido como 0 es recibido como 1 con una probabilidad  $1 - \alpha$ , con una interrupción similar cuando el dígito 1 es transmitido, se ha observado que en un gran número de señales transmitidas, los 0s y 1s son transmitidos en el ratio 3:4. Dado que la secuencia 101 es recibida, cual es la distribución de probabilidad

sobre las señales transmitidas?, asume que la transmisión y recepción son procesos independientes. (1 punto)

### Solución:

-El espacio de muestreo  $\Omega$  consiste en todas las posibles secuencias de longitud 3 que es:  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$  A conjunto correspondiente a eventos de

señales  $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$  y eventos de recepción  $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

Hemos observado el evento  $R_5$  que 101 fue recibido, deseamos obtener  $P(S_i|R_5)$  para  $i=0,1,\dots,7$ . Sin embargo en la información dada solo tenemos  $P(R_5|S_i)$ , primero usando el teorema de la probabilidad total calculamos  $P(R_5)$

$$P(R_5) = \sum_{i=0}^7 P(R_5|S_i)P(S_i) \quad (2.12)$$

Si consideramos  $P(R_5|S_0)$ , si 000 es transmitido, la probabilidad de que 101 sea recibido es  $(1 - \alpha) \times \alpha \times (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)^2$ , completando la evaluación tenemos:

$$P(R_5|S_0) = \alpha(1 - \alpha)^2 \quad P(R_5|S_1) = \alpha^1(1 - \alpha) \quad P(R_5|S_2) = (1 - \alpha)^3 \quad P(R_5|S_3) =$$

$$\alpha(1 - \alpha)^2 \quad P(R_5|S_4) = \alpha^2(1 - \alpha) \quad P(R_5|S_5) = \alpha^3 \quad P(R_5|S_6) = \alpha(1 - \alpha)^2 \quad P(R_5|S_7) =$$

$\alpha^2(1 - \alpha)$  La información de los dígitos transmitidos es la probabilidad de transmitir

1 que es  $4/7$ , entonces tenemos:  $P(S_0) = (\frac{3}{7})^3 \quad P(S_1) = (\frac{4}{7})(\frac{3}{7})^2 \quad P(S_2) = (\frac{4}{7})(\frac{3}{7})^2$

$$P(S_3) = (\frac{4}{7})^2(\frac{3}{7}) \quad P(S_4) = (\frac{4}{7})(\frac{3}{7})^2 \quad P(S_5) = (\frac{4}{7})^2(\frac{3}{7}) \quad P(S_6) = (\frac{4}{7})^2(\frac{3}{7}) \quad P(S_7) = (\frac{4}{7})^3 \quad \text{De}$$

esta forma tenemos:

$$P(R_5) = \frac{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1 - \alpha) + 123\alpha(1 - \alpha)^2 + 36(1 - \alpha)^3}{343} \quad (2.13)$$

Finalmente usando el teorema de bayes tenemos que la probabilidad de distribución sobre:  $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$

$$P(S_i|R_5) = \frac{P(R_5|S_i)P(S_i)}{P(R_5)} \quad (2.14)$$

La probabilidad de recepción de  $S_5$  es:

$$P(S_5|R_5) = \frac{P(R_5|S_5)P(S_5)}{P(R_5)} = \frac{48\alpha^3}{48\alpha^3 + 136\alpha^2(1 - \alpha) + 123\alpha(1 - \alpha)^2 + 36(1 - \alpha)^3} \quad (2.15)$$

11. En una ciudad hay 51% son hombres y 49% mujeres, un adulto es seleccionado aleatoriamente para una encuesta, encuentra las siguientes dos probabilidades: a) La

encuesta es acerca de las personas que fuman, 9.5% de los hombres fuman mientras que el 1.7% de las mujeres también fuman, encuentra la probabilidad de que una persona entrevistada al azar sea fumador y hombre. (1 punto)

**Solución:** Definimos: M=hombres  $M^c$ =mujeres C=fumadores  $C^c$ =no fumadores

Basados en la información definimos:  $P(M) = 0.51$   $P(M^c) = 0.49$   $P(C|M) = 0.095$

probabilidad de que un hombre tomado al azar sea fumador  $P(C|M^c) = 0.017$

probabilidad de que una mujer seleccionada al azar sea fumadora

Aplicando teorema de Bayes queremos obtener la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea fumador.

$$\frac{P(M)P(C|M)}{(P(M)P(C|M) + (P(M^c)P(C|M^c))} \quad (2.16)$$

$$\frac{0.51 \times 0.095}{(0.51 \times 0.095) + (0.49 \times 0.017)} = 0.85329341 \quad (2.17)$$

12. Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43%, 26% y 31% de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8%, 2% y 1.6% del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso, a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cual es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B? (1 punto)

**Solución:**

Se definen los eventos:

D = evento de que el producto seleccionado sea defectuoso  
 A = evento de que el producto sea fabricado en la máquina A  
 B = evento de que el producto sea fabricado por la máquina B  
 C = evento de que el producto sea fabricado por la máquina C

$$P(B|D) = \frac{p(B)p(D|B)}{p(D)} = \frac{p(B)p(D|B)}{p(A)p(D|A) + p(B)p(D|B) + p(C)p(D|C)} \quad (2.18)$$

$$P(B|D) = \frac{(0.26 * 0.02)}{(0.43 * 0.08 + 0.26 * 0.02 + 0.31 * 0.016)} \quad (2.19)$$

$$= \frac{0.0052}{0.04456} \quad (2.20)$$

$$= 0.116697 \quad (2.21)$$

13. A un paciente de un hospital se le aplica una prueba para la detección de una enfermedad, dicha enfermedad solo afecta al 1% de la población. El resultado es positivo indicando que el paciente tiene la enfermedad. Siendo  $D$  el evento que el paciente tenga la enfermedad y  $T$  de que el la prueba resulte positiva. Suponiendo

que la prueba tiene una precisión del 95%, existen diferentes medidas para calcular la precisión, pero en este problema se considera  $P(T|D)$  Y  $P(T^c|D^c)$ . La probabilidad  $P(T|D)$  es conocida como la sensibilidad o verdaderos positivos y  $P(T^c|D^c)$  son los falsos negativos.

Encuentra la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad dada la evidencia proporcionada por el test. (1 punto)

**Solución:** Aplicando el teorema de bayes y el teorema de probabilidad completa:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} \quad (2.22)$$

$$= \frac{P(T|D)P(D)}{P(D|T)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} \quad (2.23)$$

$$= \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} \quad (2.24)$$

$$= 0.16 \quad (2.25)$$

14. Servicios de telecomunicaciones. Suponga que es de interés conocer la probabilidad de que un usuario de Telex, que tiene señal de televisión satelital, tenga servicio ilimitado de larga distancia de cobertura nacional. El espacio muestral se reduce automáticamente, se condiciona a la ocurrencia de un evento, se restringe a los usuarios que tienen televisión satelital. Ahora bien, 1 de cada 5 usuarios tiene señal de televisión y 3 de cada 25 tiene tanto señal de televisión como larga distancia nacional, por lo que, por cada 25 usuarios, habrá 5 que tengan señal de televisión y 3 de ellos también tendrán servicio de larga distancia nacional; es decir, por cada 5 usuarios con televisión satelital, habrá 3 con servicio de larga distancia nacional. Entonces, la probabilidad de que un usuario tenga servicio de larga distancia nacional, dado que tiene señal de televisión satelital, es  $3/5$ . Calcule las siguientes probabilidades de que un usuario de Telex:

- (a) Tenga señal de televisión satelital, dado que tiene Internet de banda ancha.
- (b) Tenga Internet de banda ancha, dado que tiene señal de televisión satelital.
- (c) No tenga Internet, dado que tiene señal de televisión satelital.
- (d) Tenga señal de televisión satelital, dado que no tiene servicio de larga distancia.
- (e) Tenga servicio de larga distancia, dado que tiene señal de televisión.
- (f) Tenga larga distancia o señal de televisión, dado que tiene Internet.

(1 punto)

**Solución:**

(a) Tenga señal de televisión satelital, dado que tiene Internet de banda ancha:

$$P(T|I) = \frac{P(I \cap T)}{P(I)} = \frac{0.10}{0.30} = \frac{1}{3}$$

(b) Tenga Internet de banda ancha, dado que tiene señal de televisión satelital:

$$P(I|T) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0.10}{0.20} = \frac{1}{2}$$

(c) No tenga Internet, dado que tiene señal de televisión satelital:

$$P(\bar{I}|T) = \frac{P(\bar{I} \cap T)}{P(T)} = \frac{0.10}{0.20} = \frac{1}{2}$$

(d) Tenga señal de televisión satelital, dado que no tiene servicio de larga distancia:

$$P(T|\bar{L}) = \frac{P(T \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0.00}{0.30} = 0$$

(e) Tenga servicio de larga distancia, dado que tiene señal de televisión:

$$P(L|T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{0.20}{0.20} = 1$$

(f) Tenga larga distancia o señal de televisión, dado que tiene Internet:

$$\begin{aligned} P(L \cup T|I) &= P(L|I) + P(T|I) - P(L \cap T|I) \\ &= \frac{P(L \cap I)}{P(I)} + \frac{P(T \cap I)}{P(I)} - \frac{P(L \cap T \cap I)}{P(I)} \\ &= \frac{0.23}{0.30} + \frac{0.10}{0.30} - \frac{0.10}{0.30} \\ &= \frac{0.23}{0.30} \end{aligned}$$

15. Dado. Considere el experimento consistente en lanzar un dado y observar la cara que queda hacia arriba. Sean los eventos: A = cae par, B = cae 2 o 4 y C = cae 1 o 2; las probabilidades correspondientes son:  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/3$  y  $P(C) = 1/3$ . Calcularemos las siguientes probabilidades condicionales, utilizando la

interpretación clásica o a priori: (1 punto)

**Solución:**

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(\text{cae 2 o 4})}{N(\text{cae 2 o 4})} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{N(\text{cae 2 o 4})}{N(\text{cae par})} = \frac{2}{3}$$

$$P(A|C) = \frac{N(A \cap C)}{N(C)} = \frac{N(\text{cae 2})}{N(\text{cae 1 o 2})} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{N(A \cap C)}{N(A)} = \frac{N(\text{cae 2})}{N(\text{cae par})} = \frac{1}{3}$$

16. Considere una urna que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules, de la que se extraen sucesivamente de la urna tres bolas, con reemplazo. Sean los eventos:

- $A = \{\text{sale bola azul}\}$
- $B = \{\text{sale bola blanca}\}$
- $R = \{\text{sale bola roja}\}$

Calcule las siguientes probabilidades:

- (a) Que salgan en el orden roja, azul, blanca.
- (b) Que salgan en el orden azul, roja azul.
- (c) Que salgan tres bolas blancas.
- (d) Que salgan una roja, una azul y una blanca, sin importar el orden.
- (e) Que salgan dos azules y una roja.

(1 punto)

**Solución:**

- (a) Que salgan en el orden roja, azul, blanca:

$$\begin{aligned} P(R \cap A \cap B) &= P(R) * P(A|R) * P(B|R \cap A) \\ &= \frac{6}{15} * \frac{5}{15} * \frac{4}{15} = \frac{120}{3375} = \frac{8}{225} \end{aligned}$$

- (b) Que salgan en el orden azul, roja azul:

$$\begin{aligned} P(A \cap R \cap A) &= P(A) * P(R|A) * P(A|R \cap A) \\ &= \frac{5}{15} * \frac{6}{15} * \frac{5}{15} = \frac{150}{3375} = \frac{2}{45} \end{aligned}$$

(c) Que salgan tres bolas blancas:

$$\begin{aligned} P(B \cap B \cap B) &= P(B) * P(B|B) * P(B|B \cap B) \\ &= \frac{4}{15} * \frac{4}{15} * \frac{4}{15} = \frac{64}{3375} \end{aligned}$$

(d) Que salgan una roja, una azul y una blanca, sin importar el orden:

$$\begin{aligned} P(1 \text{ roja, } 1 \text{ azul y } 1 \text{ blanca}) &= 6 * P(R \cap A \cap B) \\ &= 6 \left( \frac{8}{225} \right) = \frac{16}{75} \end{aligned}$$

(e) Que salgan dos azules y una roja:

$$P(2 \text{ azules y } 1 \text{ roja}) = 3 \left( \frac{2}{45} \right) = \frac{2}{15}$$

17. Tetraedro. Si en lugar de lanzar un dado, se lanza un tetraedro, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, definimos los eventos:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ ,  $C = \{1, 4\}$ , las probabilidades correspondientes son:  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/2$ ,  $P(C) = 1/2$ . Ahora, utilizando el criterio de Laplace, calculamos las siguientes probabilidades conjuntas: (1 punto)

**Solución:**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{N(A \cap B)}{N} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap C) &= \frac{N(A \cap C)}{N} = \frac{1}{4} \\ P(B \cap C) &= \frac{N(B \cap C)}{N} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B \cap C) &= \frac{N(A \cap B \cap C)}{N} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vemos que los eventos A, B y C son independientes por pares, pues:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B \cap C) &= \frac{N(A \cap B \cap C)}{N} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Sin embargo, A, B y C no son mutuamente independientes, ya que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

18. A y B juegan 12 partidas de ajedrez. A gana seis, B gana cuatro y en dos quedan en tablas. Otro día acuerdan jugar un torneo de 3 partidas. Hallar la probabilidad de que:

- (a) A gane las tres;
- (b) En dos partidas queden en tablas;
- (c) A y B ganen alternadamente;
- (d) B gane al menos una partida.

(1 punto)

### Solución:

Espacio muestral:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{A, B, X\}, i = 1, 2, 3\} \quad (2.26)$$

Donde: cada  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$  representa el resultado de la  $i$ -ésima partida del torneo resultado:

- A si gana el jugador A
- B si gana el jugador B
- X si quedan tablas

los resultados de las partidas son independientes. También sabemos:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(X) = \frac{1}{6}$$

- (a) Sea M el suceso “A gana las tres partidas”. Luego,  $M = (A, A, A)$  y la probabilidad es  $P(M) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ .
- (b) Definimos el suceso N = “En dos partidas del torneo A y B quedan en tablas”. Se tiene entonces que

$$N = N1 \cup N2 \cup N3,$$

Siendo

$$N_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{A, B\}; \omega_j = X, \text{ para todo } j = 1, 2, 3, j \neq i\}, i = 1, 2, 3$$

Nótese que los sucesos elementales que son permutaciones de un mismo conjunto de resultados individuales, tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por lo tanto:

$$P(N) = 3 \cdot P(A, X, X) + 3 \cdot P(B, X, X) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}$$

- (c) Sea el suceso  $S =$  “A y B ganan alternadamente”. Así, como cada torneo consta de 3 partidas, se obtiene que:

$$P(S) = P(A, B, A) + P(B, A, B) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

- (d) Representemos por  $T$  el suceso “B gana al menos una partida”. La probabilidad deseada es:

$$\begin{aligned} P(T) &= 1 - P(T^c) = 1 - P((A, A, A)) - C_{3,1} \cdot P((A, X, X)) - C_{3,1} \cdot P(A, A, X) - P(X, X, X) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{72} + 3 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{216}\right) = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

19. Se dispone de tres cajas idénticas y cada caja contiene dos cajones. Una caja contiene una moneda de oro en cada cajón, otra contiene una moneda de plata en cada cajón, y la tercera una moneda de oro en un cajón, y una moneda de plata en el otro cajón.

- (a) Se selecciona aleatoriamente una caja, cuál es la probabilidad de que la caja seleccionada contenga monedas de diferentes metales?
- (b) Se selecciona aleatoriamente una caja, y al abrir aleatoriamente un cajón, nos encontramos con una moneda de oro. Cuál es la probabilidad de que el otro cajón contenga una moneda de plata?

(1 punto)

**Solución:**

Numeremos las cajas: la caja 1 es aquella caja con 2 monedas de oro, la 2 es la que tiene 2 monedas de plata y, finalmente, las monedas de diferente metal (una de oro y otra de plata) se encuentran en la caja 3. Sea entonces el espacio muestral

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{1, 2, 3\}; \omega_2 \in \{O, P\}\}$$

donde  $\omega_1$  representa la caja escogida y  $\omega_2$  el metal de la moneda que contiene un cajón de esa caja escogido de forma aleatoria.  $P(\{(1, P)\}) = 0$ , pero  $P(\{(1, O)\}) = \frac{1}{3}$

- (a) Sea el suceso  $A_i =$  “Se selecciona la caja  $i$ ”,  $i = 1, 2, 3$ . En nuestro caso,  $i = 3$ , por lo que el suceso  $A_3$  es equivalente a “La caja seleccionada tiene monedas de diferentes metales”. Sean también los sucesos  $B_o =$  “La moneda en el cajón escogido de forma aleatoria en la caja seleccionada es de oro” y  $B_p$  el correspondiente a una moneda de plata. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\{(3, O)\}) + P(\{(3, P)\}) \\ &= P(B_o|A_3) \cdot P(A_3) + P(B_p|A_3) \cdot P(A_3) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (b) Si uno de los cajones contiene una moneda de oro y el otro una de plata, la caja en la que se encuentran es la  $B$ . Por lo tanto, la probabilidad pedida, es:

$$P(A_3|B_o) = \frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B_o)} =$$

$$\frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{\sum_{i=1}^3 P(B_o|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

20. Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato. (1 punto)

**Solución:**

Se definen los sucesos:

Suceso P: seleccionar el primer aparato

Suceso S: seleccionar el segundo aparato

Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de Bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P|E) = \frac{P(P) \cdot P(E|P)}{P(P) \cdot P(E|P) + P(S) \cdot P(E|S) + P(T) \cdot P(E|T)}$$

$$P(P|E) = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.25 \cdot 0.001 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.03} = 0.116 \cong 12 = 12\%$$

21. Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25% se deben a la imprudencia del conductor (sobrio) y el resto a otras causas, (fallo mecánico...etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero. Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes tenga resultado nefasto. (1 punto)

**Solución:**  $A_1$  al suceso “tener un accidente por circular con una ingesta excesiva

de alcohol”  $A_2$  al suceso “tener un accidente por imprudencia del conductor” y  $A_3$  al suceso “tener un accidente por otras causas”. Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, por lo que se verifican las hipótesis del teorema de la probabilidad total. Sea  $N$  el suceso “tener resultado nefasto”

$$P(N) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{N}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{N}{A_2}\right) + P(A_3) \cdot P\left(\frac{N}{A_3}\right) = 0.65 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.05 = 0.25$$

22. Se tienen tres monedas cargadas, donde se conoce que la primera tiene una probabilidad de 0.3 de obtenerse cara, la segunda una probabilidad de 0.4 de ocurrir sello y la tercera una probabilidad de 0.4 de salir cara. Un jugador escoge al azar una de las monedas y la lanza dos veces. Cuál es la probabilidad de obtener dos caras? (1 punto)

**RESPUESTA:** Experimento aleatorio 1: Escoger al azar de una moneda Propósito:

Determinar cuál de las monedas fue escogida Experimento aleatorio 2: Lanzamiento

por primera vez de la moneda Propósito: Determinar lo ocurrido en la parte superior

de la moneda Experimento aleatorio 3: Lanzamiento por segunda vez de la moneda

Propósito: Determinar lo ocurrido en la parte superior de la moneda *Definición de*

*los eventos:*  $M_i$  : se seleccionó la moneda  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$   $C_j$  : ocurrió cara en el primer

lanzamiento  $j$ ,  $j = 1, 2$  Por el teorema de la probabilidad total tenemos:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= P(M_1)P(C_1 \cap C_2)/M_1 + P(M_2)P(C_1 \cap C_2)/M_2 + P(M_3)P(C_1 \cap C_2)/M_3 \\ &= (1/3) \times (0.3)^2 + (1/3) \times (0.6)^2 + (1/3) \times (0.4)^2 \approx 0.203 \end{aligned}$$

23. De los eventos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se tiene la siguiente información:

- $A$  y  $B$  son independientes,  $B$  y  $C$  son independientes también  $A$  y  $C$  son independientes
- De  $A$ ,  $B$  y  $C$  pueden ocurrir a lo sumo 2 de ellos
- $A \cup B \cup C$  y  $D$  son mutuamente excluyentes
- $A$ ,  $B$  y  $C$  ocurren cada uno con una probabilidad de  $r$
- El evento  $D$  tiene una probabilidad igual a  $1/5$

Encuentre el valor de  $r$  para el cual la probabilidad de que ocurra al menos uno de los cuatro eventos anteriores sea máxima. (1 punto)

**RESPUESTA:**

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \dots \\ &\dots - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= r + r + r - r^2 - r^2 - r^2 - 0 = 3r - 3r^2 \end{aligned}$$

de lo cual se sigue

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A \cup B \cup C) + P(D) = 3r - 3r^2 + \frac{1}{5}$$

De esto calcular la probabilidad máxima es sencillo:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= f(r) = 3r - 3r^2 + \frac{1}{5} \\ \implies f'(r) &= 3 - 6r = 0 \implies r = \frac{1}{2} \\ \implies f''(r) &= -6 \implies f''\left(\frac{1}{2}\right) = -6 < 0 \end{aligned}$$

por lo tanto para  $r = \frac{1}{2}$  la probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos es máxima.

24. La probabilidad de que una persona que se detiene en una gasolinera solicite revisión de neumáticos es 0.12, la probabilidad de que pida revisión de aceite es 0.29 y la probabilidad de que pida ambas cosas es 0.07. Cuál es la probabilidad de que no solicite la revisión de neumáticos ni de aceite? (1 punto)

**RESPUESTA:** Sea “A” el evento de pedir revisión de aceite y “N” el evento de

pedir revisión de neumáticos. Como ambos eventos son compatibles, tenemos:

$$P(N \cup A) = P(N) + P(A) - P(N \cap A) = 0.12 + 0.29 - 0.07 = 0.34$$

La probabilidad de no pedir revisión de neumáticos ni de aceite, es el complemento de pedir cualquiera de estos servicios o ambos. Por lo que tenemos:

$$P(N \cup A)^c = 1 - P(N \cup A) = 1 - 0.34 = 0.66$$

25. El capataz de un grupo de 20 obreros, pide la opinión de dos de ellos seleccionados aleatoriamente sobre las nuevas disposiciones de seguridad en la construcción. Si 12 están a favor y 8 están en contra, cuál es la probabilidad de que los dos obreros elegidos por el capataz estén en contra? (1 punto)

**RESPUESTA:** Llamemos “ $R_c$ ” el evento de que el primer obrero seleccionado

esté en contra y “ $S_c$ ” el evento de que el segundo obrero seleccionado esté en contra. Se trata de eventos condicionales, puesto que lo que realmente se pide es hallar la probabilidad de que el segundo obrero esté en contra, previo cumplimiento de que el primer seleccionado estuvo en contra, es decir, se pide  $P(R_c \cap S_c)$ . Aplicando el principio de la multiplicación en la probabilidad condicional y teniendo en cuenta que el evento condición es que el primer obrero estuvo en contra, tenemos:

$$P(R_c \cap S_c) = P(R_c) * P(S_c | R_c) = 8/20 * 7/19 = 56/380$$

26. Se sabe por experiencia que de cada 100 clientes que entran a un supermercado, 18 pagan con tarjeta débito. Si se seleccionan 12 clientes aleatoriamente uno tras otro, cuál es la probabilidad de que al menos uno pague con tarjeta débito? (1 punto)

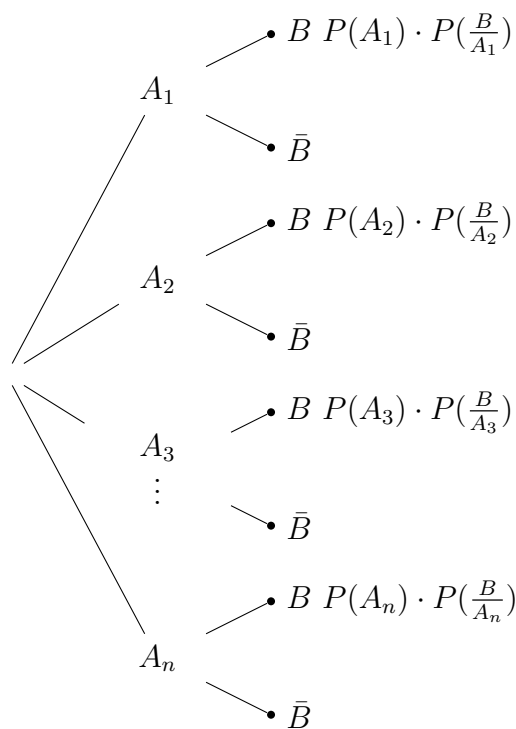
**RESPUESTA:** Si de cada 100 clientes 18 pagan con tarjeta débito, entonces la

probabilidad de pagar con tarjeta débito es 0.18 y la probabilidad de no pagar con éste documento será el complemento, es decir 0.82. Los ensayos entre cliente y cliente son independientes. De los 12 clientes, pagaré con tarjeta débito: 0, 1, 2, 3, ... o

12 clientes y éstos 13 resultados constituyen el espacio muestral, cuya probabilidad es igual a uno, según el segundo axioma de probabilidad. Como se pide calcular la probabilidad de que mínimo uno de los doce pague con tarjeta débito, ya que la probabilidad del espacio muestral es "1", le debemos restar la probabilidad de que "0" (cero) paguen con tarjeta débito. La probabilidad pedida será entonces:

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - \underbrace{0.82 \times 0.82 \times \cdots \times 0.82}_{\text{Doce veces}} = 0.9076$$

27. Demuestre que se puede obtener  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$  la probabilidad total del suceso B (la probabilidad de B) en el siguiente árbol (1 punto)



**Solución:**

Primero se toman las ramas que nos llevan a B y por definición se sabe que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$  (con probabilidades positivas), por tanto se tiene:

$$A_1 \rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) \quad (2.27)$$

$$A_2 \rightarrow P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B | A_2) \quad (2.28)$$

$$A_3 \rightarrow P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B | A_3) \quad (2.29)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (2.30)$$

$$A_n \rightarrow P(A_n \cap B) = P(A_n) \cdot P(B | A_n) \quad (2.31)$$

$$(2.32)$$

Ahora sumando las ecuaciones previas y dado que se requiere la probabilidad de B se tiene:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \quad (2.33)$$

Por último y reduciendo la sumatoria de la ecuación previa, se tiene:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i) \quad (2.34)$$

28. Se tienen 3 lotes de lápices dados por A,B,C; y su siguiente margen de defecto está dado respectivamente por:  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{5}{100}$  y  $\frac{15}{100}$ . La cantidad de cada lote ésta dada por  $\frac{36}{100}$ ,  $\frac{60}{100}$  y  $\frac{4}{100}$  respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un lápiz de cualquiera de los lotes, éste se encuentre defectuoso? (1 punto)

**Solución:**

Se definen los sucesos: Suceso A: seleccionar el lote A Suceso B: seleccionar el lote

B Suceso C: seleccionar el lote C Suceso D: seleccionar un resultado con defecto

Se sabe que:

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D | A_i) \cdot P(A_i) \quad (2.35)$$

Por tanto se tiene:

$$P(D) = P(D | A_1) \cdot P(A_1) + P(D | A_2) \cdot P(A_2) + P(D | A_3) \cdot P(A_3) \quad (2.36)$$

Ahora representando los sucesos se tiene:

$$P(D) = P(D | A) \cdot P(A) + P(D | B) \cdot P(B) + P(D | C) \cdot P(C) \quad (2.37)$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P(D) = \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{15}{100} \cdot \frac{4}{100} \quad (2.38)$$

$$P(D) = \frac{36}{1000} + \frac{300}{10000} + \frac{60}{10000} = \frac{36}{1000} + \frac{36}{1000} = \frac{72}{1000} = 0.072 \quad (2.39)$$

29. Demuestre que:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j)} \quad (2.40)$$

(1 punto)

**Solución:**

Por definición se sabe que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$  por tanto:

Utilizando solamente a  $P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P(A_i | B)$  se despeja  $P(A_i | B)$  y se obtiene:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad (2.41)$$

Ahora para la parte del numerador de la ecuación 15 se tiene que:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B | A_i) \quad (2.42)$$

Para la parte del denominador de la ecuación 15 se tiene que:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \quad (2.43)$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j) \quad (2.44)$$

Por último uniendo el resultado de las ecuaciones anteriores se concluye que:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j)} \quad (2.45)$$

30. Un paciente tiene una prueba para una enfermedad llamada condicionitis, una condición médica que afecta al 1% de la población. La prueba resultante es positiva, la prueba muestra que el paciente tiene la enfermedad, Dejemos que D sea el evento de que el paciente tenga la enfermedad y T el evento de que la prueba sea positiva.

Suponiendo que la prueba tiene 95% de precisión; hay diferentes mediciones de la precisión de una prueba, pero en este problema se asume que  $P(T|D) = 0.95$  y que  $P(T^c|D^c) = 0.95$ . La cantidad  $P(T|D)$  es conocida como la sensibilidad o tasa de verdadero positivo de la prueba y  $P(T^c|D^c)$  es conocida como la especificidad o tasa de verdadero negativo.

Encontrar la probabilidad condicional de que el paciente tiene condicionitis, dada la evidencia probada por el resultado de la prueba (1 punto)



**Solución:**

Aplicando el teorema de Bayes y la ley de la probabilidad total se tiene:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)} \quad (2.46)$$

$$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T|D) \cdot P(D) + P(T|D^c) \cdot P(D^c)} \quad (2.47)$$

$$P(D|T) = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} \quad (2.48)$$

$$P(D|T) \approx 0.16 \quad (2.49)$$

Existe un 16% de oportunidad de que el paciente tenga condicionitis, dado que su prueba es positiva



# Chapter 3

## Programas

“La tarea del programador no es slo escribir un programa, sino que su tarea principal es dar una prueba formal de que el programa que propone cumple la especificacin funcional.”

---

Edsger Dijkstra

### 3.1 Cuadro Mgico

```
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
    int i,j,a,n,p=0;
    while(p==0)
    {printf(" Introduzca n para cuadrado:");
    scanf("%d",&a);
    //evaluamos
    if ((a%2)!=0)
    {p=1;}
    else {
    printf("No se puede desarrollar para un numero par \n");
    }
    }
    int cuadro[a][a];
    n=a*a;
    //llenar la matriz con 0
    for (i=0;i<a;i++)
    {
    for (j=0;j<a;j++)
    {
    cuadro[i][j]=0;
    }
```

```
} }
//el numero 1
int pri=(a/2);
i=0;
cuadro[i][pri]=1;
//desplazar
for (int num=2;num<=n;num++)
{
//diagonal
i=i-1;
pri=pri+1;
if (i>=0 && pri<a)
{
if (cuadro[i][pri]==0)
{
cuadro[i][pri]=num;
}
else
{
i=i+2;
pri=pri-1;
cuadro[i][pri]=num;
}
}
else if (i<0 && pri<a)
{
i=a-1;
cuadro[i][pri]=num;
}
else if (i>=0 && pri==a)
{
pri=0;
cuadro[i][pri]=num;
}
else
{
i=i+2;
pri=pri-1;
cuadro[i][pri]=num;
} }
for (i=0;i<a;i++)
{
printf(" |");
for (j=0;j<a;j++)
{
//cuadro[i][j]=1;
printf(" %d ",cuadro[i][j]);
}
printf(" |\n");
}
return 0;
```

```
}
```

## 3.2 Permutaciones

```
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
using namespace std;
static int n;
static char arbol[20][10];

void impArbol(int n,int m)
{
for(int i=0;i<n;i++)
{
for(int j=0;j<m;j++)
{cout<<arbol[i][j]<<" ";}
cout<<"\n";
}
}
int factorial(int a)
{
int fac=1;
for (int j=1;j<=a;j++)
{
fac=fac*j;
}
return fac;
}

int main( )
{
string cadena;
cout<<"ingresa la cadena ";
cin>>cadena;
n=cadena.length();
char per[n];
string todas[factorial(n)];
cout<<"Permutaciones n!="<<factorial(n)<<"\n";
for(int cu=0;cu<n;cu++)
{
per[cu]=cadena[cu];
}
int y=0;
do
{
cout << cadena << endl;
todas[y]=cadena;
y++;
```

```

//cu++;
}
while(next_permutation( cadena.begin( ), cadena.end()));
switch(n) {
case 3 :
//char arbol[17][5];
for(int i=0;i<17;i++)
{
for(int j=0;j<5;j++)
{arbol[i][j]=0;}
}
arbol[2][0]=per[0];
arbol[8][0]=per[1];
arbol[14][0]=per[2];
arbol[1][1]=47;
arbol[3][1]=92;
arbol[7][1]=47;
arbol[9][1]=92;
arbol[13][1]=47;
arbol[15][1]=92;
arbol[0][2]=per[1];
arbol[4][2]=per[2];
arbol[6][2]=per[0];
arbol[10][2]=per[2];
arbol[12][2]=per[0];
arbol[16][2]=per[1];
arbol[0][3]='-';
arbol[4][3]='-';
arbol[6][3]='-';
arbol[10][3]='-';
arbol[12][3]='-';
arbol[16][3]='-';
arbol[0][4]=per[2];
arbol[4][4]=per[1];
arbol[6][4]=per[2];
arbol[10][4]=per[0];
arbol[12][4]=per[1];
arbol[16][4]=per[0];
impArbol(17,5);
break;
case 4 :
//char arbol[13][7];
for(int i=0;i<13;i++)
{
for(int j=0;j<7;j++)
{arbol[i][j]=0;}
}
arbol[6][0]=per[0];
arbol[4][0]='|';
arbol[5][0]='|';

```

```

arbol [7][0] = '|';
arbol [8][0] = '|';
arbol [3][1] = 47;
arbol [6][1] = '-';
arbol [9][1] = 92;
arbol [2][2] = per [1];
arbol [6][2] = per [2];
arbol [10][2] = per [3];
arbol [1][3] = 47;
arbol [2][3] = '-';
arbol [5][3] = 47;
arbol [7][3] = 92;
arbol [10][3] = '-';
arbol [11][3] = 92;
arbol [0][4] = per [2];
arbol [2][4] = per [3];
arbol [4][4] = per [1];
arbol [8][4] = per [3];
arbol [10][4] = per [1];
arbol [12][4] = per [2];
arbol [0][5] = '-';
arbol [2][5] = '-';
arbol [4][5] = '-';
arbol [8][5] = '-';
arbol [10][5] = '-';
arbol [12][5] = '-';
arbol [0][6] = per [3];
arbol [2][6] = per [2];
arbol [4][6] = per [3];
arbol [8][6] = per [1];
arbol [10][6] = per [2];
arbol [12][6] = per [1];
impArbol(13,7);
break;
default :
cout<<"Sin arbol\n";
}

```

### 3.3 Polgonos

```

#include <math.h>
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <graphics.h>

using namespace std;

int main ()

```

```

{
int gd = DETECT, gm;
initgraph(&gd, &gm, NULL);
int lados;
float px, py, px1, py1, ang;
float tam=100;
float dislado;
float puntox, puntoy;
int may=getmaxy();
int max=getmaxx();
closegraph();
cout<< " Cuantos lados ";
cin>>lados;
dislado=2*M_PI/lados;
initgraph(&gd, &gm, NULL);
line(0, may/2, max, may/2);
line(max/2, 0, max/2, may);
puntox=max/2;
puntoy=may/2;
// circle (puntox, puntoy, tam);
px=puntox;
py=0;
float gir=0;
for(int g=0; gir<100; g++)
{
    gir=g*(M_PI/10);
    cleardevice();
    if (lados%2==0)
    {
        px1=tam*(cos((M_PI/2)+(dislado/2)+gir));
        if(px1<0)
        {px1=(max/2)-(px1*(-1));}
        else
        {px1=max/2+px1;}
        py1=tam*(sin((M_PI/2)+(dislado/2)+gir));
        if(py1<0)
        {py1=(may/2)+(py1*(-1));}
        else
        {py1=puntoy-py1;}
        px=px1;
        py=py1;
        ang=(M_PI/2)+dislado+(dislado/2)+gir;
        for (int i=0; i<lados; i++)
        {
            px1=tam*(cos(ang));
            if(px1<0)
            {px1=(max/2)-(px1*(-1));}
            else
            {px1=max/2+px1;}
            py1=tam*(sin(ang));
            if(py1<0)
            {py1=(may/2)+(py1*(-1));}
            else
            {py1=puntoy-py1;}
            line(px, py, px1, py1);
            px=px1;
            py=py1;
            ang=ang+dislado;
        }
    }
else{

```



```

px1=tam*( cos ((M.PI/2)+gir ));
if (px1<0)
{px1=(max/2)-(px1*(-1));}
else
{px1=max/2+px1;}
py1=tam*( sin ((M.PI/2)+gir ));
if (py1<0)
{py1=(may/2)+(py1*(-1));}
else
{py1=puntoy-py1;}
px=px1;
py=py1;
ang=(M.PI/2)+dislado+gir;
for (int i=0;i<lados;i++)
{
px1=tam*( cos ( ang ));
if (px1<0)
{px1=(max/2)-(px1*(-1));}
else
{px1=max/2+px1;}
py1=tam*( sin ( ang ));
if (py1<0)
{py1=(may/2)+(py1*(-1));}
else
{py1=puntoy-py1;}
line (px,py,px1,py1);
px=px1;
py=py1;
ang=ang+dislado;
}}
delay (500);
}
getch ();
//delay (5000);
closegraph ();
cout<<ang<<"\n";
cout<<cos ( ang)<<"\n";
return 0;
}

```

## 3.4 Fractal Triangulo

```

#include <math.h>
#include <iostream>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

using namespace std;

int main()
{
srand (time(NULL));
float t1,t1_1,t2,t2_2,t3,t3_3;
t1=0;
t1_1=0;
t2=6;
t2_2=0;

```

```

t3=3;
t3_3=sqrt(75);
float puntox ,puntoy ,num;
puntox=(t1+t2+t3)/3;
puntoy=(t1_1+t2_2+t3_3)/3;
int expe;
expe=0;
while(expe<=1000)
{
num = rand();
int cara;
if (num<(1/3))
{cara=1;}
else if ((num>=(1/3)) && (num<(2/3)))
{cara=2;}
else if ((num>=(2/3))&&(num<=1))
{cara=3;}

/*switch (cara)
{
case 1:
puntox=(puntox+t1)/2;
puntoy=(puntoy+t1_1)/2;
break;

case 2:
puntox=(puntox+t2)/2;
puntoy=(puntoy+t2_2)/2;
break;
case 3:
puntox=(puntox+t3)/2;
puntoy=(puntoy+t3_3)/2;
break;

default:
cout<<"Opcion no valida\n";
break;
}*/

cout << puntox <<" ," << puntoy << "\n";
expe++;
}
return 0;
}

```

## 3.5 Cuadrado Flor

```

import turtle

turtle.shape("turtle")
def mue(x,l):
turtle.left(x)
turtle.forward(1)
turtle.left(90)
turtle.forward(1)
turtle.left(90)
turtle.forward(1)
turtle.left(90)

```

```

turtle.forward(1)
turtle.left(90)
for e in range(18):
mue(20,80)
turtle.exitonclick()

```

## 3.6 Bolitas

```

int ramdon(void);
int boli (void)
{int one_red;
int one_black;
int one_bag=0;
int two_red;
int two_black;
int two_bag=0;
int i;
int num_execution=0;
int total_probability=0;
float percent_total=0;
int rand_one=0;
int rand_two=0;
char Rand_one;
//srand( time( NULL ) );
system("clear");
printf ("\nWelcome to Bayes probability\n");
printf ("\tThis program will calculate the probability to get two
red balls\n");
printf ("\tgetting one red from the bag one and the other one from
the bag two.\n");
printf ("Bag one...\n");
printf ("\tPlease, enter the number of red balls ... ");
scanf ("%d", &one_red);
printf ("\tPlease, enter the number of black balls ... ");
scanf ("%d", &one_black);
printf ("\nBag two...\n");
printf ("\tPlease, enter the number of red balls ... ");
scanf ("%d", &two_red);
printf ("\tPlease, enter the number of black balls ... ");
scanf ("%d", &two_black);
printf ("\nHow many time do you want to repeat the experiment?...")
;
scanf ("%d", &num_execution);
float arreglo[num_execution];
printf ("\nBag one--Balls red %d Balls black %d\n", one_red,
one_black);
printf ("Bag two--Balls red %d Balls black %d\n\n", two_red,
two_black);
one_bag= one_red + one_black;
two_bag= two_red + two_black;
//printf("\nIntroduce un texto al fichero:");
num_execution2=num_execution;
// Ramdon de la primera bolsa
for(int gu=0;gu<num_execution;gu++)
{
total_probability=0;
for (i=0;i<num_execution2;i++){

```

```

rand_one=0;
rand_two=0;
rand_one = rand() % one_bag;
rand_one = rand_one +1;
if (rand_one <= one_red){
rand_one =1;
two_red = two_red +1;
Rand_one=rand_one +'0';
//printf ("%d\n" ,rand_one);
//printf ("ID %d Ball in bag one is: %d\n", i+1, rand_one);
}
if (rand_one > one_red){
rand_one =2;
two_black=two_black +1;
Rand_one=rand_one +'0';
//printf ("%d\n" ,rand_one);
//printf ("ID %d Ball in bag one is: %d\n", i+1, rand_one);
}
// Ramdon de la segunda bolsa
rand_two = rand() % two_bag;
rand_two = rand_two +1;
if (rand_two <= two_red){
rand_two =2;
//printf ("%d\n" ,rand_one);
//printf ("ID %d Ball in bag two is: %d\n", i+1, rand_one);
}
if (rand_two > two_red){
rand_two =1;
//printf ("%d\n" ,rand_two);
//printf ("ID %d Ball in bag two is: %d\n", i+1, rand_two);
}
if (rand_one==2 && rand_two==2){
total_probability ++;
}
//printf("%d\n", total_probability);
}
percent_total=(total_probability * 100)/num_execution2;
arreglo[gu]=percent_total/100;
//printf("%f\n", arreglo[gu]);
//printf("\n The total of matches is : ... %d of %d, which is : %.2f %%
\n\n", total_probability , num_execution , percent_total);
//printf("%f\n", total_probability);
}
TCanvas *c1 = new TCanvas("c1","c1",800,600);
TH1F *hist_1 = new TH1F("hist_1", "Probabilidad salga roja", 200,
0.35,0.5);
hist_1->SetLineColor(8);
hist_1->SetFillStyle( 3001);
hist_1->SetFillColor( kGreen);
double valor=0.0;
for(int t=0;t<num_execution;t++)
{
valor=arreglo[t];
hist_1->Fill(valor);
}
hist_1->Fit("gaus");
hist_1->Draw();
c1->Update();
return 0;
}

```

# Bibliography

- [Alberich and Miró, 2009] Alberich, R. and Miró, J. (2009). La colaboración en el jenui revisited: La convergencia europea. *Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática (15es: 2009: Barcelona)*.
- [Fernández-Alonso, 2016] Fernández-Alonso, M. C. (2016). La ciencia reta a la muerte.
- [García et al., ] García, J. A. G., Benítez, A. P., and Vergara, E. G. La nueva y sorprendente química del carbono: Los fullerenos.
- [González, 2013] González, C. D. H. (2013). Teorías del envejecimiento. *La vejez en movimiento. Un enfoque integral*, page 43.
- [GRAFICAS, ] GRAFICAS, R. Medidas de tendencia central. *MEDIDAS DE DISPERSION*.
- [Igual García, 2010] Igual García, J. (2010). Teorema del límite central.
- [Martín, 2011] Martín, N. (2011). Sobre fullerenos, nanotubos de carbono y grafenos. *Arbor*, 187(Extra.1):115–131.
- [Martínez, 1999] Martínez, R. (1999). La teoría de la radiación del cuerpo negro. *MOMENTO-Revista de Física*, (19):59–75.
- [Montoro et al., 2016] Montoro, E., Barahona, W., Macha, L., Rodríguez, G., Castillo, E., De La Cruz, R., and Becerra, P. (2016). Fórmula de stirling. *Pesquimat*, 19(1).
- [Pliego and Pérez, 2006] Pliego, F. J. M. and Pérez, L. R.-M. (2006). *Fundamentos de probabilidad*. Editorial Paraninfo.
- [Rivadulla, 2002] Rivadulla, A. (2002). La solución revolucionaria de planck del problema de la radiación del cuerpo negro. *Física Cuántica y Realidad/Quantum Physics and Reality*, Editorial Complutense, Madrid.
- [Santaló et al., 1970] Santaló, L. A. et al. (1970). *Probabilidad e inferencia estadística*. Edwin S.
- [Sebag-Montefiore, 2011] Sebag-Montefiore, H. (2011). *Enigma: the battle for the code*. Hachette UK.
- [Spiegel et al., 2000] Spiegel, M. R., Schiller, J. J., and Srinivasan, R. A. (2000). *Probabilidad y estadística*. Number QA39. 2. S644 1999. McGraw-Hill.
- [TRILLAS, 1968] TRILLAS, E. (1968). Sobre las funciones de distribucion de probabilidad. *Actas*, (9):211.