

Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**Résoudre les équations et inéquations en fonction de x suivantes dans \mathbb{R} ou dans l'ensemble proposé.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

On calcule le discriminant Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$

$$\sqrt{\Delta} = 2 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1/3, 1\}$.

2. $(2x - 5)^2 = (4x + 7)^2$

On a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Soit : $(2x - 5)^2 - (4x + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5 + 4x + 7)(2x - 5 - 4x - 7) = 0$

$$\Leftrightarrow (6x + 2)(-2x - 12) = 0$$

On résout alors : $\begin{cases} 6x + 2 = 0 \\ -2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -6 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-6, -1/3\}$.

3. $mx + 4 = x + 4m^2$ [discuter la solution selon les valeurs de m]

On groupe les termes selon x dans le premier membre : $mx - x = 4m^4 - 4 \Leftrightarrow x(m - 1) = 4(m^2 - 1)$. On remarque que si $m = 1$, l'équation est $0 = 0$, elle est indéterminée.

Si $m \neq 1$, $x = \frac{4(m^2 - 1)}{m - 1} = \frac{4(m + 1)(m - 1)}{m - 1} = 4(m + 1)$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 1 & \text{indétermination} \\ \text{si } m \neq 1 & 4(m+1) \end{array} \right\}$.

4. $\frac{3x-m}{x-3} = m-1$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, discuter la solution selon les valeurs de m]

On chasse le dénominateur :

$3x - m = (x - 3)(m - 1) \Leftrightarrow x(4 - m) = 3 - 2m$. On remarque que si $m = 4$, l'équation est indéterminée.

Si $m \neq 4$, $x = \frac{3-2m}{4-m}$

Or, l'ensemble donné est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, l'équation $\frac{3-2m}{4-m} = 3$ ne doit pas être satisfaite, soit $m = 9$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 4 \text{ ou } m = 9 & \text{impossible} \\ \text{si } m \neq 4 \text{ et } m \neq 9 & \frac{3-2m}{4-m} \end{array} \right\}$.

5. $(3x - 1)^2 > (4x + 7)^2$

On écrit :

$(3x - 1)^2 - (4x + 7)^2 > 0$. On a une différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(3x - 1 + 4x + 7)(3x - 1 - 4x - 7) > 0 \Leftrightarrow (7x + 6)(-x - 8) > 0$

C'est un produit de binômes de premier degré, on peut faire un tableau de signes.

x	$-\infty$	-8	$-\frac{6}{7}$	$+\infty$
$-x - 8$	+	0	-	-
$7x + 6$	-	-	0	+
Résultat	-	0	+	-

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-8, -6/8[$.

6. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4} > \frac{7}{x-3}$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$]

On groupe tous les termes dans le premier membre et on réduit au dénominateur commun :

$$\frac{3(x-4)(x-3) + 4(x-2)(x-3) - 7(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)} > 0$$

Après réduction du numérateur on obtient :

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)(x-4)}, \text{ on effectue le tableau de signes du quotient.}$$

x	$-\infty$	-4	2	3	4	$+\infty$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Résultat	$+$	0	$-$	$+$	$-$	$+$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]2, 3[\cup]4, +\infty[$.

7. $-1 < |x - 1| - |x| < 1$

On résout chaque partie : $\begin{cases} -1 < |x - 1| - |x| & (1) \\ |x - 1| - |x| < 1 & (2) \end{cases}$

On commence par (1) :

$$-1 < |x - 1| - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 < |x - 1|$$

Si $|x| - 1 < 0$, l'égalité est vraie. On a donc $x \in]-1, 1[$ solution de (1). On résout pour le cas où $|x| - 1$ est positif, soit $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Sous cette condition,

$$\begin{aligned} |x| - 1 < |x - 1| &\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 - |x - 1|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 1 + x - 1)(|x| - 1 - x + 1) < 0 \end{aligned}$$

C'est un produit de binômes de premier degré, on résout en cherchant les signes :

$$(|x| + x - 2) \underbrace{(|x| - x)}_{\forall x, \geq 0} < 0. \text{ On cherche } |x| + x - 2 < 0$$

$$|x| + x - 2 < 0 \Leftrightarrow |x| < 2 - x. \text{ L'égalité n'a de sens que si } 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x. \text{ Soit } x \in]-\infty, 2].$$

Sous cette condition, on a :

$$\begin{aligned} |x| < 2 - x &\Leftrightarrow x^2 < (2 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 < x^2 + 4 - 4x \\ &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{S}_1 =]-\infty, 1[$.

Même méthode pour (2), on trouve $\mathcal{S}_2 =]0, +\infty[$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]0, 1[$

8. $|x + 2| = 2x - 1$

La solution n'existe que si $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Sous cette condition, on a $|x + 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (2x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x + 2 + 2x - 1)(x + 2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(-x + 3) = 0$$

Deux solutions sont possibles, $\frac{1}{3}$ et 3. Or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ne peut être solution.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

9. $\frac{|x|}{|x-1|} - |x| \leq 0$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$]

On factorise par $|x|$, on a :

$$|x| \left(\frac{1}{|x-1|} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x-1|} - 1 \right) \leq 0 \text{ On sait que 0 est solution.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - |x-1|}{|x-1|} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - |x-1| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + x - 1)(1 - x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 - x) \leq 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
$2 - x$	-	-	0	+
Résultat	+	0	-	+

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

10. $-x - 1 = -(x + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$

L'équation n'a de sens que si $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

On pose alors l'ensemble contrainte $C =]-\infty, -1]$.

$$\text{Sous cette condition : } x^2 + 1 + 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Or $0 \notin C$, dès lors $\mathcal{S} = \emptyset$.

11. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

On pose $X = x^2$, dès lors, on a :

$$X^2 - 11X + 18 = 0$$

$$\Delta = 121 - 72 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} X_1 = \frac{11+7}{2} = 9 \\ X_2 = \frac{11-7}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On ramène nos solutions en } x_1, x_2 : & \begin{cases} X_1 = x_1^2 \Leftrightarrow 9 = x_1^2 \\ X_2 = x_2^2 \Leftrightarrow 2 = x_2^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ ou } -3 \\ x_2^2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$.

12. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$

On pose $X = e^x$, dès lors, on a :

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 5 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

$$\text{On ramène nos solutions en } x_1, x_2 : \begin{cases} X_1 = e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \ln(X_1) = \ln(\varphi) \\ X_2 = e^{x_2} \Leftrightarrow x_2 = \ln(X_2) \end{cases} \quad \text{impossible car } -\frac{1}{\varphi} < 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\ln(\varphi)\}$.

13. $|x^2 - x - 1| = 1$

$$(x^2 - x - 1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x^2 - x - 1 - 1)(x^2 - x - 1 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$$

On cherche une racine évidente : 1 est racine évidente.

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

14. $\sqrt{x+1} + x = 1$

Précisons que les solutions existent si et seulement si $\begin{cases} 1 - x \geq 0 & \Leftrightarrow 1 \geq x \\ x + 1 \geq 0 & \Leftrightarrow x \geq -1 \end{cases}$

On pose l'ensemble contrainte $C = [-1, 1]$

Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1})^2 &= (1-x)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2+1-2x \\ &\Leftrightarrow x^2-3x=0 \\ &\Leftrightarrow x(x-3)=0 \end{aligned}$$

Les solutions proposées sont 0 et 3. Or $3 \notin C$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

15. $\sqrt{x^2+x-6} < x+7$

Précisons que les solutions existent si et seulement si : $\begin{cases} x^2+x-6 \geq 0 & (1) \\ x+7 \geq 0 & (2) \end{cases}$

On calcule l'ensemble des contraintes C que doivent respecter nos solutions.



On résout (1) :

$$x^2+x-6=0, \text{ on a deux solutions : } \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

puis (2) :

$$x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$$

On effectue un tableau de signes :

x	$-\infty$	-7	-3	2	$+\infty$	
(1)	+	+	0	-	0	+
(2)	-	0	+	+	+	+
C			0			0

On a l'ensemble des contraintes $C = [-7, -3] \cup [2, +\infty[$

Sous cette condition, on résout l'inéquation : $\sqrt{x^2+x-6} \leq x+7 \Leftrightarrow x^2+x-6 \leq x^2+49+14x$

$$x \geq -\frac{55}{13} \approx -4,23$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = C \cap [-55/13, +\infty[= [-55/13, -3] \cup [2, +\infty[$.

Problème 2

Les énoncés sont indépendants.

1. Simplifier l'écriture des réels suivants.

(a) $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)}$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Dès lors :
$$\begin{aligned} e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)} &= 3 - \frac{1}{e^{\ln(4)}} \\ &= 3 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right)$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^b) = b \ln(a)$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

Dès lors :
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right) &= \ln(e^{2+\ln(8)}) - \ln(e^{3+\ln(4)}) \\ &= \ln(e^2 \times e^{\ln(8)}) - \ln(e^3 \times e^{\ln(4)}) \\ &= \ln(e^2) + \ln(e^{\ln(8)}) - [\ln(e^3) + \ln(e^{\ln(4)})] \\ &= 2 + \ln(8) - [3 + \ln(4)] \\ &= 2 + 3 \ln(2) - 3 - 2 \ln(2) \\ &= \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

(c) $e^{2\ln(2)} + \ln(e^{-3}) + e^{\ln(5)}$

On utilise la propriété supplémentaire :

- $\ln(1) = 0$

$$\begin{aligned} e^{2\ln(2)} + \ln(e^{-3}) + e^{\ln(5)} &= e^{\ln(4)} + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) + 5 \\ &= 4 - 3 + 5 = 6 \end{aligned}$$

(d) $\frac{e}{e^{1+\ln(2)}}$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On considère les formules précédentes.} \\ \frac{e}{e^{1+\ln(2)}} = \frac{e}{e \times e^{\ln(2)}} \\ = \frac{1}{2} \end{array} \right\|$$

2. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

(a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{L'expression n'existe que si } x^2 - 4x + 4 \geq 0. \\ \text{On a } x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{On a le domaine de définition } D = \mathbb{R}. \\ \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} \\ = |x-2| \end{array} \right\|$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La fonction } \ln \text{ est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs.} \\ \text{La fonction } e \text{ décrit l'ensemble des réels strictement positifs.} \\ \text{Dès lors, on a le domaine de définition } D = \mathbb{R}. \\ \text{On a la propriété suivante :} \\ \bullet \ln(e) = 1 \\ \ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) = \ln(e^{1-x}) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ = \ln(e \times e^{-x}) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ = \ln(e) - \ln(e^x) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ = 0 \end{array} \right\|$$

(c) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x})$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Même justification que précédemment. On a le domaine de définition } D = \mathbb{R}. \\ \ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = \ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) \\ = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) \\ = x \end{array} \right\|$$

3. $e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Attention!! Ce n'est pas parce que $e^{\ln(x)} = x$ que l'on a le même domaine de définition pour les deux expressions.

En particulier on a la fonction \ln qui est définie uniquement pour les réels strictement positifs. Les autres expressions sont définies pour sur tout \mathbb{R} . Dès lors, il ici que résulte que $D = \mathbb{R}_+^*$.

$$e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = x - [\ln(2) + \ln(e^x)] - [\ln(1) - \ln(2)]$$

$$\| \quad \quad \quad = 0$$

Problème 3

Les énoncés sont indépendants.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{On cherche un couple } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \\ &= \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Par identification, on a : $\Leftrightarrow 1 = ak + a + bk$

$$\Leftrightarrow 1 = k(a + b) + a$$

$$\text{Par identification toujours, on a } \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On pratique un télescopage.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= 1 - \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \vdots \\ &\quad + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

2. Simplifier la somme S_n suivante : $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k-1}{k} \right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k-1}{k} \right) \\ &= \ln \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= -\ln(n) \end{aligned}$$

3. Simplifier le produit P_n suivant : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k} \right) \prod_{k=2}^n \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

4. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$(a) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 1$$

Les sommes doubles s'expriment l'une par rapport à l'autre.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 &= \sum_{i=0}^n i \\ &= \sum_{i=0}^n i \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$(b) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i+j)$$

La variable i est libre par rapport à la deuxième somme.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i+j) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i i + \sum_{j=0}^i j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(i \sum_{j=0}^i 1 + \sum_{j=0}^i j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(i(i+1) + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{3}{2} i(i+1) \right) \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=0}^n (i^2 + i) \\ &= \frac{3}{2} \left[\sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{2n(n+1)(n+2)}{6} \right] \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

5. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage :

$$(a) \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k \times k!$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=0}^n (k+1)k! - k! \\
&= \sum_{k=0}^n (k+1)! - k! \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

$$(c) \sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

$$\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}$$

$$(d) \sum_{k=0}^n (k+2)2^k$$

Posons la suite $u_k = (ak+b)2^k$ et cherchons a et b tels que, pour tout entier k , $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$.

On remarque que :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k &= (a(k+1) + b)2^{k+1} - (ak+b)2^k \\
&= 2^k [2(a(k+1) + b) - (ak+b)] \\
&= (ak + 2a + b)2^k
\end{aligned}$$

En prenant $a = 1$ et $b = 0$ on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$. Il résulte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (k+2)2^k &= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k \\
&= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k \\
&= \sum_{k=0}^n (k+1)2^k - k2^k \\
&= \sum_{k=0}^n (n+1)2^{n+1}
\end{aligned}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$(a) \text{ Développer } (k+1)^4 - k^4. \text{ En déduire que : } (n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

On développe le triangle de Pascal jusqu'à obtenir la ligne 4, ce qui nous donnera les coefficients de notre identité.

$\begin{array}{c} p \\ \backslash \\ n \end{array}$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On a donc :

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - k^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4] = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

On effectue un télescopage.

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

Soit en développant :

$$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

(b) En déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$ en fonction de n .

On a :

$$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

En développant les sommes connues, on obtient :

$$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

Il en résulte que :

$$\frac{(n+1)^4 - 1 - [n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n]}{4} = \sum_{k=1}^n k^3$$

Soit en simplifiant :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Problème 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres associe :

$$f(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

1. Que vaut $f(3, 0)$? $f(-1, 0)$? $f(2, 4)$?

$$\begin{aligned}f(3, 0) &= \frac{3+0+|3-0|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ f(-1, 0) &= \frac{-1+0+|-1-0|}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0\end{aligned}$$

$$\| f(2, 4) = \frac{2+4+|2-4|}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$$

2. Montrer que $f(x, y) = \max(x, y)$.

On distingue 3 cas :

- Si $x = y$

$$f(x, y) = f(y, y) = f(x, x) = \frac{x+x+|x-x|}{2} = \frac{2x}{2} = x = y = \max(x, y)$$

- Si $x < y$

$$|x - y| = -x + y$$

$$f(x) = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x, y)$$

- Si $x > y$

$$|x - y| = x - y$$

$$f(x) = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x, y)$$

Les trois cas sont vérifiés, dès lors $f(x, y) = \max(x, y)$.

3. Déterminer $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ une fonction $g(x, y, z) = \max(x, y, z)$. On pourra exprimer g à l'aide de f .

$$\| \text{ On a } g(x, y, z) = f(f(x, y), z) = \max(x, y, z).$$

Problème 5

Démontrer les propriétés suivantes par récurrence :

1. Somme des entiers au carré.

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On raisonne par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 0$)

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 \text{ et } \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0. \text{ Donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

- Hérédité

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $P(n)$ est vraie.

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$ c'est-à-dire, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

La propriété $P(n)$ est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire. Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. Somme alternée des entiers (décomposer selon la parité de n , soit $2n$ et $2n+1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- On commence par démontrer le cas si n est pair.

- Initialisation (pour $n = 0$)

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k k = 1 \times 0 = 0$$

$$\frac{0}{2} = 0$$

$P(0)$ est vraie.

- Hérédité

On suppose qu'il existe un entier naturel pair $2n$ tel que $P(2n)$ est vraie.

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = \frac{2(n+1)}{2} = n+1$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k \right) + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) = n + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n - (2n+1) + (2n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n+1$$

La propriété $P(2(n+1))$ est vraie.

- Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire pour le cas où n est pair.

Dès lors $P(2n)$ est vraie.

- On poursuit si n est impair.

- Initialisation (pour $n = 1$)

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k k = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$$

$$-\frac{2}{2} = -1$$

$P(1)$ est vraie.

– Hérité

On suppose qu'il existe un entier naturel impair $2n+1$ tel que $P(2n+1)$ est vraie.

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)+1$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -\frac{2(n+1)+1+1}{2} = -(n+2)$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k \right) + (-1)^{2n+2}(2n+2) + (-1)^{2n+3}(2n+3) = -(n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) + (-1)^{2n+3}(2n+3) \\ & \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+1) + (2n+2) - (2n+3) \\ & \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+2) \end{aligned}$$

La propriété $P(2(n+1)+1)$ est vraie.

– Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n=1$ et est héréditaire pour le cas où n est impair.

Dès lors $P(2n+1)$ est vraie.

La propriété est vérifiée dans le cas où n est pair et impair. Dès lors, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Racine itérée (on pensera à utiliser la relation $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}}$$

• Initialisation (pour $n=1$)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$P(1)$ est vraie.

• Hérité

On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire, montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n+1 \text{ racines}}$$

On pose $a = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, on sait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$

On utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire. Dès lors $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) =$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$