Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

1. Soit E, un $\mathbb{K}-ev$ de vecteur nul 0_E, compléter et répondre aux questions :
   (a) F est un $s-ev$ de $E \Leftrightarrow$ ....
   Le plus grand et le plus petit (pour l'inclusion) $s-ev$ de E sont respectivement ... et ....
   (b) Si F et G sont deux $s-ev$ de E alors :
   - $F \cap G$ est un ....
   - $F \cup G$ est un $s-ev$ de $E \Leftrightarrow$ ....

   Définir :
   - $F + G =$ ....
   - $F + F =$ ....
   - $F + E =$ ....

   (c) Quels sont les $s-ev$ de $\mathbb{R}^2$?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.
   (a) Définir $F = \text{Vect}(u_1, u_2) =$ ....
   Que peut-on dire de F ?
   (b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $v = (x, y, z)$ appartienne à F.
   (c) Donner une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x - y + z = 0$.

Problème 2

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère les vecteurs suivants :
$u = (1, 0, 0, 1), v = (1, 0, 1, 1), w = (1, 0, -2, 1)$ et $t = (1, 0, -3, 1)$.

1. Définir $F = \text{Vect}(u, v, w, t)$ et le rang r de la famille de vecteurs (u, v, w, t).
2. En utilisant la méthode d'échelonnement : déterminer r, une base échelonnée et la dimension de F.
3. Déduire de ce qui précède un supplémentaire G de F dans E.
4. Déterminer un système d'équation(s) caractérisant F.

Problème 3

Soient A, F et G les sous-ensembles de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ définis tels que :
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{Z}\}, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ et $G = \{a, b, a - b)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Justifier que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en donner une base. Idem pour G.
3. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y, z pour que $u = (x, y, z)$ appartienne à G. en déduire un système d'équation(s) de G.
4. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel ? Justifier.
5. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel, en donner une base et sa dimension.
6. Définir $F + G$ puis par un raisonnement que l'on indiquera, déduire de ce qui précède que $F + G = E$. Cette somme est-elle directe ?
7. Quels sont les supplémentaires de F dans E ? Illustrer par une figure.

Problème 4

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$

1. Montrer que f est effectivement une application linéaire.
2. Sans le démontrer, donner la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et la matrice A, représentative de f relativement aux bases canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le noyau de f, en donner une base et sa dimension. Que peut-on en déduire pour f ?
4. Énoncer le théorème du rang pour f, puis, en déduire que f est surjective.

Problème 5

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Puis $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z)$.
2. Prouver que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, en déduire son noyau et son image.
3. Déterminer $f^{-1}(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice B représentant $f \circ f$ dans $\mathcal{B}$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1), v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice D représentant f dans $\mathcal{B}_1$.