

## Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales*\*  
\* \***Problème 1**1. Soient les nombres complexes  $z = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z' = 1 - i$ (a) Calculer  $zz'$  sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

$$\left\| \begin{array}{l} z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ zz' = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi - 3\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \end{array} \right.$$

(b) En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

$$\left\| \begin{array}{l} zz' = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) \\ \text{Par identification de la partie imaginaire et de la partie réelle on a :} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Re(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Im(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

(c) Démontrer la question précédente sans utiliser les nombres complexes.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On a les formules de trigonométrie qui nous donnent :} \\ \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \text{En posant } a = \frac{\pi}{3} \text{ et } b = \frac{\pi}{4} \text{ on a } a - b = \frac{\pi}{12} \text{ dès lors :} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

2. Soit  $\Delta = 1 + i$ .(a) Mettre  $\Delta$  sous forme exponentielle et calculer ses racines.

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i. \\ \bullet \text{ Sous forme exponentielle} \\ \text{On cherche } \delta = re^{i\varphi} \text{ avec } (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \delta^2 = r^2e^{i2\varphi} = \Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } r^2 e^{i2\varphi} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} \\ \varphi &= \frac{\pi}{8} [\pi] \end{cases}$$

On a

$$\delta = \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\frac{k\pi}{8}}$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Sous forme algébrique

On cherche  $\delta = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\delta^2 = \Delta$ .

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(\Delta) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{2} & (2) \\ 2xy = \Im(\Delta) = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow 2x^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

$$(2) - (1) \Leftrightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(3)  $> 0$   $x$  et  $y$  sont de même signe.

$$\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

On a le couple solution :  $\mathcal{S} = \{\delta, -\delta\}$

(b) En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

$$\text{On a alors : } \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\frac{k\pi}{8}} \iff \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = e^{i\frac{k\pi}{8}}$$

$$\text{Comme } e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Par identification de la partie réelle et imaginaire on a :

$$\Re\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

$$\Im\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

## Problème 2

Soit le polynôme  $P(X) = X^4 - 6X^3 + (8-i)X^2 + (6+6i)X - 9-9i$

1. Montrer que 3 est racine de  $P$  et déterminer son ordre de multiplicité.

$$P(3) = 3^4 - 6 \times 3^3 + (8-i)3^2 + (6+6i)3 - 9-9i$$

$$P(3) = 81 - 162 + 72 - 9i + 18 + 18i - 9 - 9i = 162 - 162 + 18i - 18i = 0$$

3 est au moins racine simple, vérifions si 3 est racine double :

$$P'(X) = 4X^3 - 18X^2 + 2(8-i)X + 6+6i$$

$$P'(3) = 108 - 162 + 148 - 6i + 6 + 6i = 0$$

3 est au moins racine double, vérifions si 3 est racine triple :

$$P''(X) = 12X^2 - 36X + 16 - 2i$$

$$P''(3) = 16 - 2i \neq 0$$

3 est exactement racine double,

2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . On donnera les racines sous forme exponentielle et algébrique.

$$P(X) = (X - 3)^2 Q(X) + R(X)$$

On pratique la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - 3)^2$  :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrrr}
 X^4 & -6X^3 & +(8-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & \\
 \hline
 -[X^4 & -6X^3 & +9X^2] & & & \\
 \hline
 & & (-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & \\
 & & -[(-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i] & \\
 & & & & R(X) = 0 & 
 \end{array}
 & + \begin{array}{rrr}
 X^2 & -6X & +9 \\
 \hline
 X^2 & -1-i & = Q(X)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$P(X) = (X - 3)^2 (X^2 - 1 - i)$$

D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme non constant dans  $\mathbb{C}$  peut être décomposé comme produit de polynômes de degré 1.

On calcule alors les racines de  $X^2 - 1 - i$

$$X^2 - 1 - i = 0 \Leftrightarrow X^2 = 1 + i$$

- Sous forme algébrique :

$$\text{Dès lors : } \begin{cases} X_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \\ X_2 = -X_1 \end{cases}$$

- Sous forme exponentielle :

On cherche  $X^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ e^{i2\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\sqrt{2}} \text{ car } \rho > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{8} [\pi] \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} X_1 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \\ X_2 = -X_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } P(X) = (X - 3)^2 (X - \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})(X + \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})$$

### Problème 3

Soit  $a \in \mathbb{N}$ . On définit le polynôme  $P_a$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}, P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$$

Notre but ici est de trouver  $a$  tel que  $P_a$  possède trois racines appartenant à  $\mathbb{Z}$ .

On suppose qu'un tel  $a$  existe. Soient  $X_1, X_2, X_3$ , les trois racines de  $P_a$  avec  $X_1 \leq X_2 \leq X_3$ .

1. Que valent  $X_1 + X_2 + X_3$  et  $X_1 X_2 X_3$  ?

Comme  $P_a$  est unitaire, on a

$$P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2 = (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)$$

On développe :  $(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3) = (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3)$

$$\Leftrightarrow (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3) = X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3$$

$$\Leftrightarrow X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3 = X^3 - X^2(X^3 + X^2 + X_1) + X(X_2X_3 + X_1X_3 + X_1X_2) - X_1X_2X_3$$

Par identification et unicité de  $P_a$ , il découle que  $X_1 + X_2 + X_3 = 0$  et que  $X_1 X_2 X_3 = -2$

2. Calculer  $P_a(0)$  et en déduire que  $X_1 < 0$ .

$P_a(0) = 2 = -X_1 X_2 X_3$ . On sait d'ores et déjà que  $X_{i \in \{1,2,3\}} \neq 0$ . Supposons que  $X_1 > 0$ , alors, d'après l'énoncé  $X_3 \geq X_2 > 0$ , mais  $X_1 X_2 X_3 = -2 < 0$ . Dès lors, par contraposée,  $X_1 < 0$ .

3. Déduire de (a) et (b) que  $X_1 \leq 0 \leq X_2 \leq X_3 \leq -X_1$  puis trouver les valeurs de  $X_1, X_2$  et  $X_3$ .

Comme  $X_1 X_2 X_3 = -2$  et que l'on sait que  $X_1 < 0$ , on alors  $X_1 < 0 < X_2 \leq X_3$ . De plus, on sait que  $X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 + X_3 = -X_1$ . Comme  $X_2$  est strictement positif, on en déduit que :

$$X_1 < 0 < X_2 \leq X_3 \leq -X_1$$

De plus, on sait que  $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$ . Dès lors, on déduit que :

$$X_1 = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = X_3 = 1$$

4. Montrer que  $P'_a(X_2) = 0$  et en déduire la valeur de  $a$ .

Comme 1 est racine double, on en déduit effectivement que  $P'_a(1) = 0$ , soit

$$P'_a(X) = 3X^2 - (a^2 + 2a)$$

$$P'_a(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - (a^2 + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a + 3) = 0$$

Comme  $a \in \mathbb{N}$ , on la seule solution possible est :

$$a = 1$$

## Problème 4

En utilisant la formule d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Linéariser  $\cos^3(x)$ .

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}}{8} \\ \cos^3(x) &= \frac{e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{1}{8} (2 \cos(3x) + 6 \cos(x)) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x)) \end{aligned}$$

## Problème 5

Démontrer que tout nombre complexe  $z \neq 0$  admet un unique inverse  $z'$  noté  $\frac{1}{z}$  tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

On cherche donc  $z' = x' + iy'$  tel que  $zz' = 1$ .

$$(x + iy)(x' + iy') = 1 \Leftrightarrow xx' - yy' + i(xy' + x'y) = 1$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} xy' + x'y &= 0 \\ xx' - yy' &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' &= -\frac{x'y}{x} \\ xx' + \frac{x'y^2}{x} &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' &= -\frac{x'y}{x} \\ x' \left( \frac{x^2 + y^2}{x} \right) &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ x' &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Dès lors, on a :

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

## Problème 6

Les énoncés sont indépendants :

1. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  tel que  $|z| = 1$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$  a-t-on le complexe  $\left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n$  qui est un réel pur ?

Puisque  $|z| = 1$ , posons  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \neq 0[2\pi]$  puisque  $z \neq 1$ . On a alors

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ainsi,

$$\left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n = i^n \frac{1}{\left( \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^n}$$

Il résulte que  $\left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n$  est un réel pur si et seulement si  $n$  est pair.

2. Calculer pour toute valeur de  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ .

Posons  $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

On a  $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k$

Ça commence à ressembler au binôme de Newton.

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k} = (1 + e^{i\theta})^n = \left( e^{i\frac{\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \right)^n = e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$e^{i\frac{n\theta}{2}} = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Dès lors  $S_n = \Im \left( e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $P(X) = (X-1)P'(X)$ .

Le polynôme nul est solution.

Soit  $P$  de degré  $n$ . Pour déterminer le  $n$  on dresse l'équation de son degré :  $n = 1 + (n-1)$ .

Seulement ici on arrive à une indétermination. On doit résoudre d'une autre façon.

Soit  $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ , où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Dès lors, on cherche les  $\alpha_i$  tels que :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i X^i = (X-1) \sum_{i=1}^n i \alpha_i X^{i-1}$$

On a :  $\sum_{i=0}^n \alpha_i X^i = \sum_{i=1}^n i \alpha_i X^i - i \alpha_i X^{i-1}$ .

Par identification, il vient que :

$$\alpha_0 = -\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2$$

$$\alpha_2 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$$

$\vdots$

$$\alpha_i = i\alpha_i - (i+1)\alpha_{i+1}$$

$\vdots$

$$\alpha_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1} - n\alpha_n$$

$$\alpha_n = n\alpha_n$$

On a alors  $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_2 = 0$

Dès lors  $P(X) = \alpha_1 X - \alpha_1$

Soit :

$$P(X) = \alpha_1(X-1)$$

4. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  puis  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes suivants :

(a)  $P(X) = X^3 - 1$

1 est racine évidente  $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$ .  $P(X)$  est factorisé dans  $\mathbb{R}$   
 Dans  $\mathbb{C}$ , on a  $(X^2 + 1) = (X - i)(X + i)$ . Dans  $\mathbb{C}$ , on a  $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)$

(b)  $P(X) = X^6 + 1$

On revient à chercher les racines 6-ème telles que  $z^6 = -1$   
 On a les solutions  $e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$  avec  $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ .  
 Dès lors, dans  $\mathbb{C}$ , on a  $P(X) = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{3\pi}{6}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{9\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$   
 Pour obtenir la factorisation dans  $\mathbb{R}$ , on regroupe les paires de racines complexes conjuguées.  
 Dès lors, dans  $\mathbb{C}$ , on a  $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X - 1)$

(c)  $P(X) = X^9 - X^6 + X^3 - 1$

Dès lors, on a dans  $\mathbb{R}$ ,  $P(X)$  tel que :  $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)^2(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X - 1)$   
 Et dans  $\mathbb{C}$  :  
 $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)(X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{3\pi}{6}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{9\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$

5. Donner la division selon les puissances croissantes à l'ordre  $k = 4$  (c'est à dire tel que le reste soit divisible par  $X^{k+1}$ ) de  $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$  par  $B = 1 + X^2 + X^3$ .

$$1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1 + X^2 + X^3)(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$$

1	$+X^3$	$-2X^4$	$+X^6$	1	$+X^2$	$+X^3$
$-[1$	$+X^2$	$+X^3]$	$-2X^4$	1	$-X^2$	$-X^4$
$-X^2$	$-2X^4$	$+X^6$				
$-[-X^2$	$-X^4$	$-X^5]$				
	$-X^4$	$+X^5$	$+X^6$			
	$-[-X^4$	$-X^6$	$-X^7]$			
		$X^5$	$+2X^6$	$+X^7$		

## Problème 7

On considère l'équation (E) suivante avec  $z \in \mathbb{C}$ .

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (E)$$

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  non congru à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ . Montrer que  $\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i \tan(\theta)$

On utilise la formule d'Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ . On a donc  $e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2$ .

De plus, on sait que  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Dès lors : } \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} &= \frac{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-2\sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\frac{\sin^2(\theta) - 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\frac{\sin(\theta)\sin(\theta) - 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)\cos(\theta) + i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\tan(\theta) \frac{-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} \\ &= i\tan(\theta) \end{aligned}$$

2. Déterminer les solutions complexes de  $(E)$  à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $\tan$ .

On remarque tout d'abord que  $i$  n'est pas solution de sorte que pour  $z \neq i$ , on a bien  $1 - iz \neq 0$ .

$$\begin{aligned} (1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 &\Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} \in \mathbb{U}_5 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, (1 + iz)^5 = e^{\frac{2ik\pi}{5}} (1 - iz)^5 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)} \quad \text{Car } \forall k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, z = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de  $(E)$  sont les réels  $-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ,  $0$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3. Développer  $(1 + iz)^5$  et  $(1 - iz)^5$  à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de  $(E)$  sous une autre forme.

Tout d'abord, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} (1 + iz)^5 &= \binom{5}{0}(iz)^5 + \binom{5}{1}(iz)^4 + \binom{5}{2}(iz)^3 + \binom{5}{3}(iz)^2 + \binom{5}{4}iz + \binom{5}{5} \\ &= iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1 - iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (1 - iz)^5 = (1 + iz)^5 &\Leftrightarrow 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0 \end{aligned}$$

On a d'ores et déjà  $z = 0$  comme solution, on cherche les solutions du polynôme  $z^4 - 10z^2 + 5$ .

On pose  $Z = z^2$ .

$$\Delta = 100 - 20 = 80 > 0. \text{ On a deux solutions réelles : } \begin{cases} Z_1 = 5 + 2\sqrt{5} \\ Z_2 = 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$



Les deux solutions sont positives et conviennent. On a alors 
$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \\ z_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \end{cases}$$

On a l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  équivalentes aux valeurs de  $\tan$  trouvées précédemment  $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\}$ .