

Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a . On suppose de plus que f est définie au point a .

Donner la définition de la continuité de f en a et l'illustrer par une figure.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Problème 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que, indépendamment du choix de a et b , la fonction f admet une droite asymptote Δ en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} .

Problème 4

Étudier la continuité de la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x - E(x)} - E(x) \end{cases}$$

On rappelle que $E(x)$ est la fonction *partie entière* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq E(x) < x + 1$.

Problème 5

On appelle fonction caractéristique χ_F d'un sous-ensemble $F \subset E$, une fonction :

$$\chi_F : \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \end{cases}$$

1. Démontrer que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe toujours un nombre rationnel.

On pourra utiliser l'axiome d'Archimède qui énonce que :

Axiome d'Archimède - Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, (0 < x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} | n \times x > y)$$

2. Montrer que la fonction caractéristique de $\chi_{\mathbb{Q}}$ pour $E = \mathbb{R}$ est discontinue en chacun de ses points.

Problème 6

Soit un polynôme P tel que $\deg(P)$ est impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Problème 7

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes ainsi que la limite en α .

$$1. f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \alpha = 0$$

$$5. f_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right), \alpha = 0$$

$$2. f_2(x) = 1 - x - 2x \ln|x|, \alpha = 0$$

$$6. f_6(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x}, \alpha = 0$$

$$3. f_3(x) = \frac{|x|-2}{x^2-4}, \alpha = 2$$

$$7. f_7(x) = \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}, \alpha = 2$$

$$4. f_4(x) = \ln(\sqrt{x} + 1) - \ln(x), \alpha = +\infty$$

$$8. f_8(x) = \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1), \alpha = 0$$

Problème 8

Soit f une fonction continue croissante $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.