Tutorat logique : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

* * *

Problème 1

1. On considère le raisonnement R_1 suivant :

   (1) : "Si la rivière est polluée alors les poissons meurent."
   (2) : "Les poissons meurent."
   (C) : "Donc, la rivière est polluée."

   Ce raisonnement est-il correct ? Formaliser-le en logique propositionnelle et démontrer sa correction ou son incorrection par le méthode de votre choix.

2. On considère désormais le raisonnement R_2 suivant :

   (1) : "Si la rivière déborde, alors il y'a des inondations."
   (C) : "Donc, s'il n'y a pas d'inondations, alors la rivière ne déborde pas."

   Même question que précédemment.

Problème 2

On considère l'ensemble de formules $\Gamma = \{t \vee p \vee \neg r, \neg t \vee q \vee \neg s\}$ et la formule $\varphi = p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$. Montrer que $\Gamma \models \varphi$.

Problème 3

Soient φ_1 et φ_2, deux formules de la logique propositionnelle. Démontrer la proposition suivante :

$$\varphi_1 \models \varphi_2 \textit{ si et seulement si } \models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$$

Problème 4

Modéliser le principe de raisonnement par l'*absurde* en logique propositionnelle et démontrer sa validité.

Problème 5

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis démontrer.

1. Il existe une formule satisfaisable dont la négation est satisfaisable.
2. Il existe une tautologie dont la négation est satisfaisable.
3. L'unique connecteur unaire existant en logique propositionnelle est $\neg$.
4. Toute formule admet au moins un modèle.
5. Le système de connecteurs $\{\neg, \Rightarrow\}$ est complet.

Problème 6

Traduire les énoncés suivants en logique propositionnelle et dire s'ils sont vrais dans le domaine d'interprétation du monde réel.

1. Pour que les souris soient des oiseaux, il faut qu'elles aient des ailes.
2. 1 est égale à 4 si et seulement si 1 est égale à 2.
3. Pour qu'un oeuf réussisse le cours de logique, il ne suffit pas qu'il assiste au cours.
4. Une porte est ouverte ou fermée.

Problème 7

Démontrer le résultat suivant. On pourra raisonner par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles en commun de φ et ψ.

> ***Théorème d'interpolation*** *- Soient φ et ψ, deux formules propositionnelles telles que $\models \varphi \Rightarrow \psi$. Montrer qu'il existe une formule propositionnelle χ, dont les variables propositionnelles apparaissent dans φ et ψ et telle que $\models \varphi \Rightarrow \chi$ et $\models \chi \Rightarrow \psi$.*

Problème 8

Soient les trois énoncés suivants :

p : "Demain il pleut."
q : "Aujourd'hui il fait beau."
r : "Un jour, il neigera."

Traduire en langue naturelle le plus adéquatement possibles les énoncés logiques suivants :

1. $\neg q \Rightarrow p$
2. $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$
3. $\neg(q \Rightarrow r)$
4. $r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

Problème 9

Démontrer le principe de *contraposition* mathématique.

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

Problème 10

Donner des interprétations qui rendent faux les énoncés suivants puis un modèle de ceux-ci.

1. $r \wedge \neg p \Rightarrow (q \vee (r \Rightarrow p))$
2. $[q \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow p)] \vee \neg r \vee p$
3. $\neg(p \oplus q) \wedge (r \Leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$