Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

Soit S_n l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$. On rappelle qu'une permutation $s \in S_n$ est telle que :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(i) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\text{card}(S_n) = n!$.

Problème 2

Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$

1. Sans justification, donner $\text{card}(S_9)$ puis l'écriture matricielle de s^{-1} et s^2.
2. Donner le support $\text{Supp}(s)$. Puis calculer $I(s)$.
3. Calculer les orbites $\mathcal{O}_s(i)$ pour tout $i \in [\![1, 9]\!]$. Donner la décomposition canonique de s en un produit de supports deux à deux disjoints, en déduire une décomposition de s en un produit de transpositions.
4. Calculer la signature $\varepsilon(s)$ de deux façons.
5. Déterminer s^9, puis en déduire s^8.

Problème 3

Le jeu du *taquin* est constitué d'une matrice de neuf cases dont huit sont numérotées et dont une est vide. On peut faire glisser les cases numérotées verticalement ou horizontalement dans la case vide. On repère le résultat d'une manipulation par la permutation des numéros qu'elle produit. Par exemple, les mouvement effectués tels que :

Position t_0 :

1	2	3
4	5	6
7	8	

Position t_n :

4	1	3
2		5
7	8	6

Nous donnent la permutation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'on ne peut obtenir que des permutations de signature égale à 1.

Problème 4

Soit $s \in S_7$ définie par $s = (1,4,2)(2,7)(1,4,6)$

1. Donner la forme matricielle de s, calculer s^2 et s^{-1} et le support de s, s^{-1} et s^2.
2. Donner la décomposition canonique de s en un produit de supports deux à deux disjoints.
3. Calculer l'ordre n de s, c'est à dire le plus petit n tel que $s^n = \mathrm{Id}_{S_9}$.
4. Décomposer s comme un produit de transpositions.
5. Calculer la signature $\varepsilon(s)$ de quatre façons.

Problème 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'égalité suivante :

$$A^2 + 2A + 3I_n = \mathcal{O}_n \quad (*)$$

1. Montrer que A est inversible et calculer sont inverse.
2. Calculer $\det((A + I_n)^2)$.

Problème 6

Les énoncés sont indépendants.

1. Pour quelles valeurs de z la matrice $A(z) = A(z) = \begin{pmatrix} z^3 & -i \\ i & z \end{pmatrix}$. est-elle inversible ? Lorsque $A(z)$ est inversible, déterminer $A^{-1}(z)$.
2. À l'aide d'opérations que l'on explicitera clairement. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Problème 7

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M.{}^tM = -I_3$$