

## Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Algèbre*\*  
\* \***Problème 1**

Soit  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $\mathbb{N}_n$ . On rappelle qu'une permutation  $s \in S_n$  est telle que :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(i) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$$

Démontrer que  $\text{card}(S_n) = n!$ .

On peut démontrer le résultat grâce aux combinatoires.

On peut se figurer une analogie simple. Celle d'un tableau de dimension  $n$  où l'on doit placer les  $n$  premiers nombres de manière aléatoire.

Pour la première case du tableau, on dispose donc de  $n$  choix possible d'éléments. À la deuxième, il nous reste  $n - 1$  choix, à la troisième  $n - 2$ , etc...

Au final, quand on arrive à la  $n - \text{ème}$  case, il ne nous reste plus qu'un élément à placer.

Dès lors, on a :  $\text{card}(S_n) = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ .

**Problème 2**

Soit  $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in S_9$

1. Sans justification, donner  $\text{card}(S_9)$  puis l'écriture matricielle de  $s^{-1}$  et  $s^2$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \text{card}(S_9) = 9! \\ s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \\ s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 9 & 4 & 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\|$$

2. Donner le support  $\text{Supp}(s)$ . Puis calculer  $I(s)$ .

$$\text{Supp}(s) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

La liste des pairs en inversion  $I(s)$  se calcule tel que

$$I(s) = \{\{i, j\} | \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket, s(j) < s(i)\}$$

Dès lors, on a :

$$I(s) = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{4, 9\}, \\ \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{8, 9\}\}$$

3. Calculer les orbites  $\mathcal{O}_s(i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ . Donner la décomposition canonique de  $s$  en un produit de supports deux à deux disjoints, en déduire une décomposition de  $s$  en un produit de transpositions.

Les orbites  $\mathcal{O}_s(i)$  se calculent de manière récursive de la manière suivante telles que

$$\text{init : } \mathcal{O}_s(i) = \{i\}, \quad \text{iter : } \mathcal{O}_s(i) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_s(i)} \{s(x) | s(x) \notin \mathcal{O}_s(i)\}$$

On donne aussi la définition :

$$\mathcal{O}_s(i) = \{i, s(i), s^2(i), \dots, s^k(i)\}$$

C'est aussi le plus petit sous-ensemble de  $E$  contenant  $i$  et stable par  $s$  c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble  $F$  de  $E$  qui contient  $i$  et tel que  $s(F) \subset F$ .

De plus,  $\forall j \in \mathcal{O}_s(i), \mathcal{O}_s(i) = \mathcal{O}_s(j)$ . Il vient que :

$$\mathcal{O}_s(1) = \mathcal{O}_s(4) = \mathcal{O}_s(6) = \mathcal{O}_s(9) = \mathcal{O}_s(5) = \{1, 4, 6, 9, 5\}$$

$$\mathcal{O}_s(2) = \mathcal{O}_s(7) = \mathcal{O}_s(3) = \{2, 7, 3\}$$

Les orbites nous fournissent la décomposition en supports disjoints, ainsi,  $s = (1, 4, 6, 9, 5)(2, 7, 3) = \sigma_1 \circ \sigma_2$

La décomposition d'un cycle de se fait en produit de transposition telle que :

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = \tau_{i,k} \circ \tau_{i,k-1} \circ \dots \circ \tau_{i,2}$$

$$\text{On a donc } s = \underbrace{(\tau_{1,5} \circ \tau_{1,9} \circ \tau_{1,6} \circ \tau_{1,4})}_{\sigma_1} \circ \underbrace{(\tau_{2,3} \circ \tau_{2,7})}_{\sigma_2}$$

4. Calculer la signature  $\varepsilon(s)$  de deux façons.

La signature  $\varepsilon(s)$  d'une permutation  $s$  peut se calculer de plusieurs façons différentes, en voici deux :

- $\varepsilon(s) = (-1)^{\text{card}(I(s))} = (-1)^{16} = 1$
- Comme on sait que  $\varepsilon$  est un morphisme de  $(S_n, \circ)$  vers  $(\{-1, 1\}, \times)$ . Alors :  

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)(-1)^4 \times (-1)^2 = 1$$

### Problème 3

Le jeu du *taquin* est constitué d'une matrice de seize cases dont quinze sont numérotées et dont une est vide. On peut faire glisser les cases numérotées verticalement ou horizontalement dans la case vide. On repère le résultat d'une manipulation par la permutation des numéros qu'elle produit. Par exemple, les mouvements effectués tels que :

Position  $t_0$  :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Position  $t_n$  :

10	7	1	9
12		15	13
3	5	8	4
2	6	11	14

Nous donnent la permutation suivante :

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 7 & 1 & 9 & 12 & 15 & 13 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 11 & 14 \end{array} \right)$$

1. Montrer qu'on ne peut obtenir que des permutations de signature égale à 1.

Lorsqu'on réalise un déplacement horizontal, on ne change pas l'ordre des numéros étant donné que la case blanche n'est pas comptée, la permutation correspondante est alors simplement l'identité.

Par contre, lorsqu'on réalise un déplacement vertical d'une case, on produit un cycle de longueur 3, donc une permutation de signature égale à 1. La position finale étant obtenue comme suite de déplacements horizontaux ou verticaux, la permutation obtenue correspond à un produit de cycles de longueur 3, donc à un produit de permutations de signature égale à 1.

2. Écrire le carré correspondant à la permutations  $s = (14, 15)$ . Ce taquin est-il résoluble ?

Le taquin correspondant est :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Ce taquin n'est pas résoluble car il correspond à une unique transposition. Dès lors  $\varepsilon(s) = -1$ , on a démontré que c'est impossible.

3. Montrer que la configuration  $t_n$  n'est pas possible.

On peut le décomposer comme produit de transpositions, il vient que :

$$t_n = (1, 10, 8, 3)(2, 7, 13, 6, 15, 14, 11, 4, 9, 5, 12)$$

On a deux cycles : un 4-cycle et un 11-cycle, ceux-ci nous engendrent alors 13 transpositions.

On a alors  $\varepsilon(t_n) = (-1)^{13} = -1$ . Cette configuration est impossible.

## Problème 4

Soit  $s \in S_7$  définie par  $s = (1, 4, 2)(2, 7)(1, 4, 6)$

1. Donner la forme matricielle de  $s$ , calculer  $s^2$  et  $s^{-1}$  et le support de  $s$ ,  $s^{-1}$  et  $s^2$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On a } s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ de support } \text{Supp}(s) = \{1, 2, 4, 6, 7\}. \\ \\ s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ de support } \text{Supp}(s^{-1}) = \{1, 2, 4, 6, 7\}. \\ \\ s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ de support } \text{Supp}(s^2) = \{1, 2, 7\}. \end{array} \right\|$$

2. Donner la décomposition canonique de  $s$  en un produit de supports deux à deux disjoints.

On commence de la droite vers la gauche.

On écrit  $(1$  puis on cherche l'image de  $1$  : changé en  $4$  par  $(1, 4, 6)$  puis  $4$  est changé en  $2$  par  $(1, 4, 2)$ .

Ajoutons  $2$ , soit  $(1, 2$  : on poursuit  $2$  est changé en  $7$  par  $(2, 7)$  et inchangé par  $(1, 4, 2)$ .

On obtient  $(1, 2, 7$  :  $7$  est changé en  $2$  par  $(2, 7)$  puis changé en  $1$  par  $(1, 4, 2)$ . Le support est bouclé.

$3$  est ne varie par, on passe à  $4$  : celui-ci est changé en  $6$  par  $(1, 4, 6)$  et ne bouge plus.

On obtient  $(1, 2, 7)(4, 6$  :  $6$  est transformé en  $1$  qui est retransformé en  $4$ . Le support est bouclé.

On a finalement  $s = (1, 2, 7)(4, 6)$

3. Calculer l'ordre  $n$  de  $s$ , c'est à dire le plus petit  $n$  tel que  $s^n = \text{Id}_{S_7}$ .

L'ordre  $n$  d'une permutation  $s$  est égal au PPCM de la longueur des supports de la décomposition canonique de  $s$ .

Ici, il vient de suite que  $n = 6$ .

4. Calculer  $s^6$ ,  $s^{37}$  et  $s^{41}$ .

Comme on sait que  $s$  est d'ordre 6, il vient que :

- $s^6 = \text{Id}_{S_7}$
- $s^{37} = s$  car  $37 = 1[6]$ .
- $s^{41} = s^5 = s^{-1}$  car  $41 = 5[6]$ .

5. Calculer la signature  $\varepsilon(s)$ .

On a la décomposition de  $s$  comme produit de transpositions telle que  $s = (\tau_{1,7} \circ \tau_{1,2}) \circ \tau_{4,6}$ .

En utilisant le fait que  $\varepsilon$  est un morphisme de  $(S_n, \circ)$  vers  $(\{-1, 1\}, \times)$  et que  $\forall \tau \in S_2, \varepsilon(\tau) = -1$ .

On a  $\varepsilon(s) = (-1)^3 = -1$

## Problème 5

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'égalité suivante :

$$A^2 + 2A + 3I_n = \mathcal{O}_n \quad (*)$$

1. Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{aligned} \text{D'après } (*), \text{ on a : } A^2 + 2A &= -3I_n \Leftrightarrow A(A + 2I_n) = -3I_n \\ &\Leftrightarrow -3A(A + 2I_n) = I_n \\ &\Leftrightarrow A(-3A - 6I_n) = I_n \end{aligned}$$

On a trouvé une matrice qui multipliée par  $A$  donne l'identité. On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = -3(A + 2I_n)$

2. Calculer  $\det((A + I_n)^2)$ .

Comme  $I_n$  commute avec toute matrice, on peut utiliser la formule du binôme. On a alors :

$$\begin{aligned} (A + I_n)^2 &= A^2 + 2A + I_n \\ &= A(A + 2I_n) + I_n \\ &= -3I_n + I_n \\ &= -2I_n \end{aligned}$$

Dès lors, on en déduit que  $\det((A + I_n)^2) = \det(-2I_n) = -2$ .

## Problème 6

Les énoncés sont indépendants.

1. Pour quelles valeurs de  $z$  la matrice  $A(z) = \begin{pmatrix} z^3 & -i \\ i & z \end{pmatrix}$  est-elle inversible? Lorsque  $A(z)$  est inversible, déterminer  $A^{-1}(z)$ .

$$\begin{aligned} A(z) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \det(A(z)) = z^4 - 1 \neq 0 \\ \text{or } z^4 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^4 = 1 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\} \\ A(z) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, i, -i\} \\ A^{-1}(z) &= \frac{1}{z^4 - 1} \begin{pmatrix} z & i \\ -i & z^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. À l'aide d'opérations que l'on explicitera clairement. Calculer  $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice est triangulaire supérieure, dès lors, le déterminant est égale au produit des éléments de la diagonale.

Ainsi, il vient que :

$$\Delta = 125$$

### Problème 7

Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$M \cdot {}^t M = -I_3$$

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une matrice  $M$  qui respecte l'équation énoncée, alors  $\det(M \cdot {}^t M) = \det(-I_3)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \det(M \cdot {}^t M) &= \det(M) \times \det({}^t M) \\
&= \det(M) \times \det(M) \\
&= \det(M)^2
\end{aligned}$$

Mais,  $\det(-I_3) = -1$

On a alors  $\det(M)^2 = -1$  avec  $\det(M) \in \mathbb{R}$ . Ce qui est impossible, l'hypothèse de départ est absurde, il n'existe pas  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M \cdot {}^t M = -I_3$ .