Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

À l'aide d'une écriture sous forme de somme des développements limités, démontrer la formule générale d'Euler.

$$\forall x \in \mathbb{R} | e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

On pensera notamment à séparer le développement de e^{ix} en termes pairs et impairs.
On rappelle aussi que : $e^t = 1 + t + ... + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Problème 2

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre et au point donné.

1. $f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$: $DL_2(1)$
2. $f_2(x) = \sqrt{x^2+3x+2} + \frac{1}{x}$: $DL_2(+\infty)$
3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)}{\arctan(\sin(x))}$: $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$
4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$: $DL_2(0)$

Problème 3

Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. Calculer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la fonction f peut-être prolongée par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
4. Donner l'équation T_0, de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $x = 0$ et la position relative de T_0 par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.
5. Déterminer une asymptote $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et -∞.

Problème 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'application :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pensera ici à s'aider de l'unicité du développement limité et des formules de Taylor.

Problème 5

Donner le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
2. $x \mapsto \ln(1+x)$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
4. $x \mapsto \arctan(x)$.

Problème 6

Soit la fonction f définie telle que :

$$f(x) = (3x^2 + 6x - 10)\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Pour tout $x \neq 0$ on pose $u = \frac{1}{x}$ ainsi que la fonction auxiliaire g telle que : $g(u) = uf\left(\frac{1}{u}\right)$
   (a) Expliciter g uniquement en fonction de u.
   (b) Soit $h(u) = \ln\left(\frac{1+4u}{1+2u}\right)$, donner le $DL_4(0)$ de h. (On rappelle que : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$)
3. En déduire que :

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$
4. On considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $\Delta = 6x + 6$.
   (b) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ quand $x \to +\infty$.