Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

1. Soit E, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de vecteur nul 0_E, compléter et répondre aux questions :

   (a) F est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall (u,v) \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u + v \in F \end{cases}$

   Le plus grand et le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E sont respectivement $\{0_E\}$ et E.

   (b) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors :

   - $F \cap G$ est un *sous-espace vectoriel de E (et de F et G).*
   - $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.

   Définir :

   - $F + G = \{u_1 + u_2 | u_1 \in F, u_2 \in G\}$ *qui est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$*
   - $F + F = F$.
   - $F + E = E$.

   (c) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

   Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :

   - $\{(0,0)\}$
   - *Les droites passant par* $(0,0)$.
   - $\mathbb{R}^2$

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1,-1,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

   (a) Définir $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) == \{\alpha u_1 + \beta u_2 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   Que peut-on dire de F ?

   F est un sous-espace vectoriel dont (u_1, u_2) est une famille génératrice.

   (b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $v = (x,y,z)$ appartienne à F.

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : v(\alpha u_1,\beta u_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = x \\ -\alpha+\beta & = y \\ -\beta & = z \end{cases} \textit{ est compatible}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = x \\ \beta & = x+y \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -\beta & = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = x \\ \beta & = x+y \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ 0 & = x+y+z \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $v \in F$ sont qu'il vérifier l'équation $x+y+z=0$. Soit F est le plan qu'équation : $x+y+z=0$

(c) Donner une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x-y+z=0$.

$x-y+z=0 \Leftrightarrow x+z=y$

$G = \{(x, x+z, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \{x(1,1,0) + z(0,1,1) | x, r \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(0,1,1)\right)$

$(1,1,0)$ *et* $(0,1,1)$ *est une famille génératrice de* G.

Problème 2

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère les vecteurs suivants :
$u = (1,0,0,1), v = (1,0,1,1), w = (1,0,-2,1)$ et $t = (1,0,-3,1)$.

1. Définir $F = \mathrm{Vect}(u,v,w,t)$ et le rang r de la famille de vecteurs (u,v,w,t).

   Par définition

   $F = \mathrm{Vect}(u,v,w,t) = \{au+bv+cw+dt | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$: l'ensemble est combinaisons linéaires des vecteurs u, v, w et t.

   $r = \mathrm{rg}(u,v,w,t) = \dim(F)$

2. En utilisant la méthode d'échelonnement : déterminer r, une base échelonnée et la dimension de F.

   On échelonne la famille (u,v,w,t)

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & : & u \\ 1 & 0 & 1 & 1 & : & v \\ 1 & 0 & -2 & 1 & : & w \\ 1 & 0 & -3 & 1 & : & t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & : & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & v-u \\ 0 & 0 & -2 & 0 & : & w-u \\ 0 & 0 & -3 & 0 & : & t-u \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & : & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & v-u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & w-u+2(v-u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & t-u+3(v-u) \end{array}\right.$$

Cette dernière famille $(u, u - v, -3u + 2v + w, -4u + 3v + t)$ est échelonnée, deux de ses vecteurs sont non nuls, de plus elle est de rang $r = 2$.

$(u, v - u) = ((1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ est une base échelonnée de F et donc $\dim(F) = 2$

3. Déduire de ce qui précède un supplémentaire G de F dans E.

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 1 & : & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & v-u \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & e_4 \end{cases}$$

donc $(u, e_2, v - u, e_4)$ est une famille échelonnée de E sans vecteur nul, de plus $\mathrm{rg}(u, e_2, v - u, e_4) = 4$

La famille $(u, e_2, v - u, e_4)$ est libre maximale dans E, c'est donc une base de E.

Par conséquent, $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_4)$ est un supplémentaire de F dans E.

4. Déterminer un système d'équation(s) caractérisant F.

$\nu = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \exists(a, b)\mathbb{R}^2 : \nu = (x, y, z, t) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 0, 1, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = x \\ 0 & = y \\ b & = z \\ a & = t \end{cases} \text{est compatible}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = x \\ 0 & = y \\ b & = z \\ a & = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = x \\ b & = z \\ 0 & = x - t \\ 0 & = y \end{cases}$$

Dès lors $\nu \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - t & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$

Problème 3

Soient A, F et G les sous-ensembles de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ définis tels que :
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{Z}\}, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ et $G = \{a, b, a - b)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Justifier que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

A n'est pas un sous-espace vectoriel de E car $(1, 0, 0) \in A$ mais $\frac{1}{2}(1, 0, 0) \notin A$ étant donné que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en donner une base. Idem pour G.

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,x+y) | x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) | x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1) \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E dont $((1,0,1),(0,1,1))$ est une famille génératrice ; de plus $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires donc $((1,0,1),(0,1,1))$ est une famille libre, des lors : $((1,0,1),(0,1,1))$ est une base de F et $\dim(F) = 2$.

De la même manière $G = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,-1))$.

On en déduit aussi que G est un sous-espace vectoriel de E de base $((1,0,1),(0,1,-1))$ et donc que $\dim(G) = 2$.

3. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x,y,z pour que $u=(x,y,z)$ appartienne à G. en déduire un système d'équation(s) de G.

$$\begin{aligned} u=(x,y,z) \in G &\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} | u = (\alpha,\beta,\alpha-\beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= x \\ \beta &= y \\ \alpha-\beta &= z \end{cases} \text{ est compatible} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= x \\ \beta &= y \\ x-y-z &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors $u \in G \Leftrightarrow u \in \mathcal{P} : x-y-z=0$

4. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel ? Justifier.

F et G sont des plans de E respectivement d'équation $x+y-z=0$ et $x-y-z=0$

Soient $u=(0,1,1)$ et $v=(1,1,0)$

$u \in F$ et $v \in G$ Donc $u,v \in F \cup G$. Cependant $u+v=(1,2,1) \notin F$ et $u+v \notin G$.

Dès lors $F \cup G$ n'est pas stable pour l'addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

5. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel, en donner une base et sa dimension.

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels on sait que $F \cap G$ est lui aussi un sous-espace vectoriel.

$$\begin{aligned} u=(x,y,z), u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y-z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = z \\ y & = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $F \cap G = \{(x, 0, x) | x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow \text{Vect}((1, 0, 1))$

$F \cap G$ est la droite dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$, de plus $\dim(F \cap G) = 1$

6. Définir $F + G$ puis par un raisonnement que l'on indiquera, déduire de ce qui précède que $F + G = E$. Cette somme est-elle directe ?

Par définition $F + G = \{u + v | u \in F \text{ et } v \in G\}$, de plus on sait que $F + G$ est le plus petit $s - ev$ pour l'inclusion contenant $F \cup G$.

D'après le théorème de Grassman

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Dès lors $\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3$

$\dim(F + G) = 3$ et $F + G$ est un sous-espace vectoriel et $F + G = E$.

Puisque $F \cap G \neq \{0_E\}$, la somme n'est pas directe.

7. Quels sont les supplémentaires de F dans E ? Illustrer par une figure.

F étant un plan de E, ses supplémentaires sont toutes droites Δ de E : $\text{Vect}(\alpha, \beta, \gamma)$ telles que $\Delta \not\subseteq F$, c'est à dire toute droite dirigée par (α, β, γ) mais avec $\alpha + \beta - \gamma \neq 0$

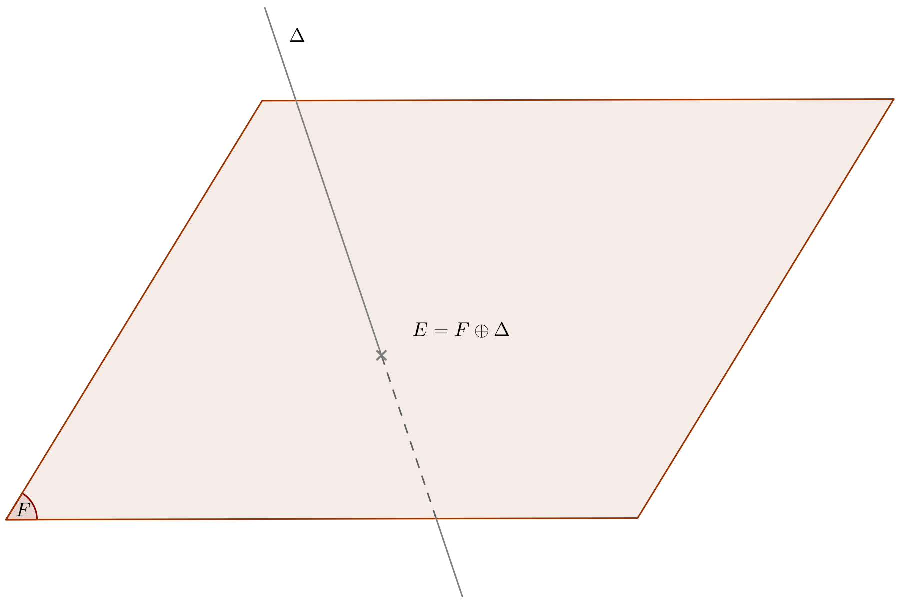

FIGURE 1 : Représentation de F et d'un supplémentaire Δ

Problème 4

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$

1. Montrer que f est effectivement une application linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de $E \to F$. On dit que f est une *application linéaire* si

$$\begin{cases} \forall v, w \in E, & f(v+w) = f(v) + f(w) \\ \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, & f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{cases}$$

Dans notre cas :

- Pour $\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x,y,z) + f(x',y',z')$
$$\begin{aligned} f((x,y,z)+(x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= ((x+x')+(z+z'), (y+y') - 2(z+z')) \\ &= (x+z+x'+z', y-2z+y'-2z') \\ &= f(x,y,z) + f(x',y',z') \end{aligned}$$
- Pour $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$
$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + \lambda z, \lambda y - 2\lambda z) \\ &= (\lambda(x+z), \lambda(y-2z)) \\ &= \lambda(x+z, y-2z) \\ &= \lambda f(x,y,z) \end{aligned}$$

2. Sans le démontrer, donner la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et la matrice A, représentative de f relativement aux bases canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

$\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)) = 3 \times 2 = 6$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

3. Déterminer le noyau de f, en donner une base et sa dimension. Que peut-on en déduire pour f ?

$$\ker(f) = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = (0,0)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z &= 0 \\ y-2z &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -z \\ y &= 2z \\ z &= z \end{cases}$$

$\ker(f) = \{(-z, 2z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1,2,1))$. Soit la droite dirigée par $(-1,2,1)$: $\dim(\ker(f)) = 1 \neq 0 \Leftrightarrow f$ est non injective.

4. Énoncer le théorème du rang pour f, puis, en déduire que f est surjective.

Le théorème du rang s'énonce tel que :

$$\dim(\textit{Départ}) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Soit ici : $\dim(\mathbb{R}^3) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)) \Leftrightarrow 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\textit{Arrivé})$. On en conclut que f est surjective.

Problème 5

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Donner $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Puis $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z)$.

$f(e_1) = (-1,1,1), \quad f(e_2) = (1,-1,1), \quad f(e_3) = (1,1,-1)$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$

2. Prouver que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, en déduire son noyau et son image.

f est une matrice carrée, ce qui indique que c'est un endomorphisme, f est bijective si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= 1 \times (-2) \times (-2) = 4 \neq 0$$

Dès lors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Comme f est bijective, on en déduit que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ et que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

3. Déterminer $f^{-1}(x,y,z)$ pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $f^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{2}(y+z, x+z, x+y)$

4. Déterminer la matrice B représentant $f \circ f$ dans $\mathcal{B}$.

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u,v,w)$ avec $u = (1,1,1), v = (1,-1,0)$ et $w = (1,1,-2)$ est

une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & : & u \\ 1 & -1 & 0 & : & v \\ 1 & 1 & -2 & : & w \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & : & u \\ 0 & -2 & -1 & : & v-u \\ 0 & 0 & -3 & : & w-u \end{array}\right.$$

La famille $\mathcal{B}_1$ est échelonnée sans vecteur nul, donc de rang 3.

$\mathrm{rg}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_1) = 3$: $\mathcal{B}_1$ est une famille libre et $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, c'est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^3$.

Dès lors $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer la matrice D représentant f dans $\mathcal{B}_1$.

On va représenter les vecteurs dans $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f)$

$f(u) = f(1,1,1) = u$

$f(v) = f(1,-1,0) = (-2,2,0) = -2v$

$f(w) = f(1,1,-2) = (-2,-2,4) = -2w$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$