Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

Soit le polynôme $P(X) = X^n + aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que P admet au plus 3 racines réelles. On pourra s'aider du théorème de Rolle.

On peut le montrer par l'absurde.
On suppose qu'il existe quatre racines réelles distincts $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$.
Le théorème de Rolle nous donne le résultat suivant :
Théorème de Rolle - *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = 0$$

Ainsi, comme $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = f(r_4) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle entre chaque racines, on peut s'assurer qu'il existe 3 racines r'_1, r'_2 et r'_3 tels que $r'_1 < r'_2 < r'_3$ où la dérivé P' s'annule.
De même, en appliquant à nouveau le théorème de Rolle, on obtient qu'il existe 2 racines r''_1 et r''_2 où P'' s'annule.
Or $P''(X) = n(n-1)X^{n-2}$, et l'unique racine de P'' est 0.
L'hypothèse de départ est absurde. On a au maximum 3 racines.

Problème 2

Donner la valeur, si elle existe, des expressions suivantes :

1. $\cos\left(-\frac{22\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{24\pi-2\pi}{12}\right) = \cos\left(-2\pi + \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(6\pi + \pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi\right)\right) = \arcsin(0) = 0$
3. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
4. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
5. $\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{18\pi-\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
6. $\arctan\left(\cos\left(\frac{15\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\cos\left(3\pi\right)\right) = \arctan\left(-1\right) = -\frac{\pi}{4}$

7. $\sin\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\sin(x) = \tan(x) \Leftrightarrow \sin(x)\left(1 - \frac{1}{\cos(x)}\right) = 0$
$$\Leftrightarrow \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x | 1 - \frac{1}{\cos(x)} = 0\}$$
$$\Leftrightarrow \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$
Soit $\mathscr{S} = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

9. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$
Soit $\mathscr{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} - 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

On rappelle au passage que :

- $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow b = \begin{cases} a + 2k\pi \\ -a + 2k\pi \end{cases}$
- $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow b = \begin{cases} a + 2k\pi \\ \pi - a + 2k\pi \end{cases}$

10. $2\sin^2(x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 3 \Leftrightarrow 1 - \cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 3$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) = 1$$
On a alors $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sin(\theta) \\ -\frac{1}{2} = r\cos(\theta) \end{cases}$

r nous est donné par l'équation : $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

θ nous est donné par l'équation : $\tan(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\sin(\theta) > 0$, dès lors la valeur correcte de θ est $\frac{2\pi}{3}$. On peut remplacer
$$r\sin(\theta)\sin(2x) + r\cos(\theta)\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(2x) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(2x) = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$
Soit $\mathscr{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

11. $\cos(3x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Soit $\mathscr{S} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$

12. $\arcsin(3x) = \arccos(2x)$

L'équation n'a de sens que si $3x \in [-1, 1]$ et $2x \in [-1, 1] \Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ et $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Soit $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

On a $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

$\arcsin(3x) = \arccos(2x) \Leftrightarrow 3x = \sin(\arccos(2x))$. (car sin est bijective sur $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$).

$\Leftrightarrow 3x = \sqrt{1 - 4x^2}$Dès lors $x > 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 = \left(1 - 4x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{13}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Comme $x > 0$, on a $\mathscr{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \right\}$.

Problème 3

Soit la fonction f telle que : $f(x) = 2\arctan(x) - \arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})$

1. Faire la division euclidienne de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, en faire un encadrement et en déduire D_f.

On va chercher à simplifier $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, on effectue donc la division euclidienne de la fraction rationnelle :

$$\begin{array}{ccccc} -x^2 & +1 & | & x^2 & +1 \\ --- & --- & + & --- & --- \\ -(-x^2 & -1) & | & -1 & \\ & & | & & \\ & 2 & | & & \end{array}$$

Il en résulte que : $\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$

$1 + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow 2 \geq \frac{2}{1+x^2}$, de plus, comme $\frac{2}{1+x^2}$ est une fonction inverse positive : $0 < \frac{2}{1+x^2} \leq 2 \Rightarrow -1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} \leq 1$

La fonction arctangeante est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction à l'intérieur de l'arcsinus est bornée entre -1 et 1. Il en résulte que $D_f = \mathbb{R}$

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On calcule les limites aux extrémités du domaine de définition :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2\arctan(x) - \arcsin(-1 + \frac{2}{1+x^2}) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

3. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que $f'(x) = \frac{2}{x^2+1}(1+\text{sgn}(x))$.

   On rappellera éventuellement que la fonction signe s'écrit : $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

> f est continue comme composée de fonctions continues sur D_f. et est dérivable sur $\mathbb{R}^*$en tant que composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{x^2+1} - \tfrac{-4x}{(1+x^2)^2\sqrt{1-(-1+\frac{2}{1+x^2})^2}} \\ &= \tfrac{2}{x^2+1} + \tfrac{4x}{(1+x^2)^2\sqrt{-\frac{4}{(1+x^2)^2}+\frac{4}{(1+x^2)}}} \\ &= \tfrac{2}{x^2+1} + \tfrac{4x}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{4}{(1+x^2)^2}(-1+(1+x^2))}} \\ &= \tfrac{2}{x^2+1} + \tfrac{4x}{(1+x^2)^2\frac{2}{1+x^2}\sqrt{x^2}} \\ &= \tfrac{2}{x^2+1} + \tfrac{2x}{(1+x^2)|x|} \\ &= \tfrac{2}{x^2+1}(1+\text{sgn}(x)) \end{aligned}$$

4. Déduire des questions précédentes une forme plus simple de f.

> Si $x < 0$, alors $f'(x) = 0$ car $\forall x < 0, (1+\text{sgn}(x)) = 0$ et par conséquent, la fonction f est constante sur $]-\infty; 0[$.
>
> Dès lors : $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*_- | f(x) = \alpha$
>
> On a ainsi : $f(x) = \begin{cases} \int \frac{4}{x^2+1}dx & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$
>
> On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, on en déduit alors que $\alpha = -\frac{\pi}{2}$
>
> $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+1}dx = 4\arctan(x) + C,$
>
> On sait que la fonction est continue sur tout D_f donc en particulier pour $f(0)$:
>
> $4\arctan(0) + C = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{2}$
>
> On a ainsi f telle que : $f(x) = \begin{cases} 4\arctan(x) - \frac{\pi}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

Problème 4

Calculer la dérivée $n-ème$ de $x \mapsto x^n(1+x^2)$.

> On est en présence d'un produit de deux fonctions. Posons $g(x) = x^n$ et $f(x) = (1+x)^2$.
> La formule de Leibniz nous donne le résultat suivant :
> ***Formule de Leibniz -*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le produit de deux fonctions f et g à variable réelle de classe C^n sur un intervalle I. Alors la dérivée $n-ème$ du produit de f et g est telle que :*
>
> $$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)$$
>
> Ainsi, on a :

$f'(x) = 2(1+x), \qquad f''(x) = 2, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 3, f^{(k)}(x) = 0$
et
$g^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}x^2, \qquad g^{(n-1)} = n!x, \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = n!$
Par l'application de la formule, il vient que :

$$\left(x^n(1+x)^2\right)^{(n)} = n!(1+x)^2 + 2nn!x(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}n!x^2$$