Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

On appelle *série Harmonique*, la suite $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction Riemann intégrable, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Démontrer que :
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
2. En applicant la question précédente à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n \leq \ln(n) + 1$$
Et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n$.

Problème 2

La *fonction gaussienne* e^{-t^2} est essentielle en statistiques car au coeur de la très commune loi normale. On considère ainsi l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$. En déduire que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$
2. On considère ainsi l'inégalité suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$
En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans le membre de gauche et $t = \sqrt{n}\text{cotan}(u)$ dans le membre de droite. Démontrer que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)du$$

On précisera que $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, que $\text{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ et que $\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

3. On rappelle que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de I.

Problème 3

La *fonction* Γ *d'Euler* est une fonction spéciale définie sur le plan complexe et qui généralise la notion de factorielle.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

On s'intéresse ici aux cas où $x \in \mathbb{N}^*$ mais ceci peut se généraliser aux cas où $x \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(x) > 0$.

1. Calculer $\Gamma(1)$.
2. Par intégration par parties, montrer que : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Montrer par récurrence que la propriété $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \Gamma(n) = (n-1)!$ est vraie.

Problème 4

On s'intéresse aux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$$

1. Ces intégrales comportent-elles des points de singularité ? Démontrer qu'elles sont convergentes.
2. On considère le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. On pourra utiliser la formule $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
4. En déduire la valeur de I.

Problème 5

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx, \qquad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$$

1. On considère la fonction f pour $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. On admet f dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée f' et en déduire une valeur de I.
2. Montrer que $I + J = K$.
3. Montrer par intégration par parties que $K = \sqrt{2} - J$.
4. Déterminer la valeur des intégrales I, J et K.