

Tutorat mathématiques : TD1
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Donner l'ensemble de définition adéquat de ces expressions puis résoudre en fonction de x . On précise que m est un nombre réel fixé.

- | | | |
|-------------------------------|--|----------------------------------|
| 1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ | 6. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4} > \frac{7}{x-3}$ | 11. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ |
| 2. $(2x - 5)^2 = (4x + 7)^2$ | 7. $-1 < x - 1 - x < 1$ | 12. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$ |
| 3. $mx + 4 = x + 4m^2$ | 8. $ x + 2 = 2x - 1$ | 13. $ x^2 - x - 1 = 1$ |
| 4. $\frac{3x-m}{x-3} = m - 1$ | 9. $\frac{ x }{ x-1 } - x \leq 0$ | 14. $\sqrt{x+1} + x = 1$ |
| 5. $(3x - 1)^2 > (4x + 7)^2$ | 10. $-x - 1 = \sqrt{x^2 + 1}$ | 15. $\sqrt{x^2 + x - 6} < x + 7$ |

Problème 2

Les énoncés sont indépendants.

1. Simplifier l'écriture des réels suivants.

- | | |
|---|--|
| (a) $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)}$ | (c) $e^{2\ln(2)} + \ln(e^{-3}) + e^{\ln(5)}$ |
| (b) $\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right)$ | (d) $\frac{e}{e^{1+\ln(2)}}$ |

2. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

- | | |
|--|--|
| (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ | (c) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x})$ |
| (b) $\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$ | (d) $e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ |

Problème 3

Les énoncés sont indépendants.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Simplifier la somme S_n suivante : $S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$.

3. Simplifier le produit P_n suivant : $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

4. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$(a) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 1$$

$$(b) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i+j)$$

5. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage :

$$(a) \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$(c) \sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k \times k!$$

$$(d) \sum_{k=0}^n (k+2)2^k$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Développer $(k+1)^4 - k^4$. En déduire que : $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$.

(b) En déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$ en fonction de n .

Problème 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres associe :

$$f(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

1. Que vaut $f(3, 0)$? $f(-1, 0)$? $f(2, 4)$?
2. Montrer que $f(x, y) = \max(x, y)$.
3. Déterminer $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x, y, z) = \max(x, y, z)$. On pourra exprimer g à l'aide de f .

Problème 5

Démontrer les propriétés suivantes par récurrence :

1. Somme des entiers au carré.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Somme alternée des entiers (décomposer selon la parité de n , soit $2n$ et $2n+1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3. Racine itérée (on pensera à utiliser la relation $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}}$$