Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

On appelle *série Harmonique*, la suite $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\mathcal{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction Riemann intégrable, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Démontrer que :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

> Par définition de m et M, on a $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$.
>
> Par linéarité de l'intégration, il vient que : $\displaystyle\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$
>
> Soit, $[mx]_a^b \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$
>
> On retrouve bien :
>
> $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

2. En appliquant la question précédente à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n \leq \ln(n) + 1$$

Et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n$.

> On obtient l'inégalité suivante avec $a = k$, $b = k+1$, $m = \frac{1}{k+1}$ et $M = \frac{1}{k}$
>
> $$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$
>
> On décompose puis on somme l'inégalité :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n & \text{pour } k \geq 1 \\ 1+ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+ \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \mathcal{H}_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(x) + 1 & \text{pour } k \geq 2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n \leq \ln(n) + 1$$

Et par le théorème de divergence par minoration, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{H}_n = +\infty$.

Problème 2

La *fonction gaussienne* e^{-t^2} est essentielle en statistiques car au coeur de la très commune loi normale. On considère ainsi l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^*, \ln\left(1 + \tfrac{t^2}{n}\right) \leq \tfrac{t^2}{n} &\Leftrightarrow -n \ln\left(1 + \tfrac{t^2}{n}\right) \geq -t^2 \\ &\Leftrightarrow e^{-n \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \geq e^{-t^2} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \tfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t^2} \end{aligned}$$

On fait de même pour l'autre moitié de l'égalité.

2. On considère ainsi l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans le membre de gauche et $t = \sqrt{n}\text{cotan}(u)$ dans le membre de droite. Démontrer que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u) du$$

On précisera que $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, que $\text{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ et que $\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

- Égalité (1) : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$

  Soit $t = \sqrt{n}\cos(u) \Leftrightarrow u = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$.

  Si $t = \sqrt{n} \to u = 0$

Si $t = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$
De plus $\frac{dt}{du} = -\sqrt{n}\sin(u) \Leftrightarrow dt = -\sqrt{n}\sin(u)du$
Il vient que (1) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sqrt{n}\sin(u)\left(1 - \frac{(\sqrt{n}\cos(u))^2}{n}\right)^n du$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\left(1-\cos^2(u)\right)^n du$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\left(\sin^2(u)+\cos^2(u)-\cos^2(u)\right)^n du$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)du$$

- Égalité (2) : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$

Soit $t = \sqrt{n}\text{cotan}(u) \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$.
Si $t = \sqrt{n} \rightarrow u = \frac{\pi}{4}$
Si $t = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$
De plus $\frac{dt}{du} = -\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(x)} \Leftrightarrow dt = -\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(x)}du$
Il vient que (2) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\sqrt{n}\left(1+\frac{(\sqrt{n}\text{cotan}(u))^2}{n}\right)^{-n}\frac{du}{\sin^2(x)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2(u)+\cos^2(u)}{\sin^2(u)}\right)^{-n}\frac{du}{\sin^2(x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}}{\sin^2(x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)du$$

De plus, la fonction $\sin^{2n-2}(u)$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il vient que $\sqrt{n}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)du \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)du$.

3. On rappelle que l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de I.

Par le théorème des gendarmes, il vient immédiatement que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 3

La *fonction* Γ *d'Euler* est une fonction spéciale définie sur le plan complexe et qui généralise la notion de factorielle.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

On s'intéresse ici aux cas où $x \in \mathbb{N}^*$ mais ceci peut se généraliser aux cas où $x \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(x) > 0$.

1. Calculer $\Gamma(1)$.

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \\ &= -\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= -\left(\lim_{X\to+\infty} e^{-X} - e^0\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Par intégration par parties, montrer que : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$u(t) = e^{-t} \xrightarrow{'} u'(t) = -e^{-t}$

$v'(t) = t^{x-1} \xrightarrow{\int} v(t) = \frac{t^x}{x}$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \left[-e^{-t} \times \tfrac{t^x}{x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\tfrac{t^x}{x}dt \\ &= \tfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt \\ &= \tfrac{1}{x}\Gamma(x+1)\end{aligned}$$

Il résulte que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

3. Montrer par récurrence que la propriété $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \Gamma(n) = (n-1)!$ est vraie.

- Initialisation : (pour $n = 1$)

  Vérifié à la question 1.

  $P(1)$ est vraie.

- Hérédité :

  On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang suivant, c'est à dire montrer que $P_{n+1} : \Gamma(n+1) = n!$ est vraie.

  On utilise l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned}\Gamma(n) = (n-1)! &\Leftrightarrow n\Gamma(n) = n(n-1)!! \\ &\Leftrightarrow \Gamma(n+1) = n\end{aligned}$$

  Dès lors $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

  La propriété est initialisée pour $n = 1$ et héréditaire. Dès lors, par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \Gamma(n) = (n-1)!$ est vraie.

Problème 4

On s'intéresse aux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$$

1. Ces intégrales comportent-elles des points de singularité ? Démontrer qu'elles sont convergentes.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x)$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il y a un point de singularité en 0. En 0, on sait que $DL_1(0) : \sin(x) = x + o(x)$.

Donc $\ln(\sin(x)) = \ln(x + o(x))$

$= \ln(x) + \ln(1 + o(1))$.

D'où $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

On sait que $\int_0^t \ln(x)dx$ converge, comme au voisinage de 0 $\ln(\sin(x))$ est de signe fixe, alors on peut appliquer le théorème des équivalents. On en déduit alors que I est convergente.

On applique le même raisonnement pour J.

2. On considère le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$. Montrer que $I = J$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\ln(\sin(\tfrac{\pi}{2} - t)) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt \\ &= J \end{aligned}$$

3. Calculer $I + J$. On pourra utiliser la formule $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tfrac{\sin(2x)}{2}\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) - \ln(2)dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t = 2x$.

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\tfrac{dt}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))dt\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))dt\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \end{aligned}$$

On pose à nouveau $u = \pi - t$

$$I + J = \tfrac{1}{2}\left(I - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - u))du\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(I + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))du\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx$$
$$= \frac{1}{2}(I + I) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx$$
$$= I - \frac{\pi}{2}\ln(2)dx$$

4. En déduire la valeur de I.

De l'égalité précédente, on déduit que $I = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$.

Problème 5

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx, \qquad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$$

1. On considère la fonction f pour $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. On admet f dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée f' et en déduire une valeur de I.

f est de forme $\ln(u) \xrightarrow{\prime} \frac{u'}{u}$ avec $u = x + \sqrt{x^2+1}$

On rappelle que $u^\alpha \xrightarrow{\prime} \alpha u' u^{\alpha-1}$

Ainsi, $u \xrightarrow{\prime} u' = 1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

Dès lors

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f est donc une intégrale de $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Alors : $I = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{2})$

2. Montrer que $I + J = K$.

Par linéarité de l'intégrale, $J + I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$J + I = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$$
$$= K$$

3. Montrer par intégration par parties que $K = \sqrt{2} - J$.

$$K = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - J$$

4. Déterminer la valeur des intégrales I, J et K.

$$\begin{cases} I &= \ln(1+\sqrt{2}) \\ J &= \sqrt{2} - K \\ K &= J + I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I &= \ln(1+\sqrt{2}) \\ J &= \sqrt{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2} \\ K &= \frac{\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$