

Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**1. Soient les nombres complexes $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 - i$ (a) Calculer zz' sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

$$\left\| \begin{array}{l} z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ zz' = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi - 3\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \end{array} \right.$$

(b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\left\| \begin{array}{l} zz' = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) \\ \text{Par identification de la partie imaginaire et de la partie réelle on a :} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Re(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Im(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

(c) Démontrer la question précédente sans utiliser les nombres complexes.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On a les formules de trigonométrie qui nous donnent :} \\ \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \text{En posant } a = \frac{\pi}{3} \text{ et } b = \frac{\pi}{4} \text{ on a } a - b = \frac{\pi}{12} \text{ dès lors :} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

2. Soit $\Delta = 1 + i$.(a) Mettre Δ sous forme exponentielle et calculer ses racines.

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i. \\ \bullet \text{ Sous forme exponentielle} \\ \text{On cherche } \delta = re^{i\varphi} \text{ avec } (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \delta^2 = r^2e^{i2\varphi} = \Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } r^2 e^{i2\varphi} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} r = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} \\ \varphi = \frac{\pi}{8}[\pi] \end{cases}$$

On a

$$\delta = \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\frac{k\pi}{8}}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

- Sous forme algébrique

On cherche $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(\Delta) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{2} & (2) \\ 2xy = \Im(\Delta) = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \iff 2x^2 = 1 + \sqrt{2} \iff x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

$$(2) - (1) \iff 2y^2 = \sqrt{2} - 1 \iff y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(3) > 0 x et y sont de même signe.

$$\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

On a le couple solution : $\mathcal{S} = \{\delta, -\delta\}$

(b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

$$\text{On a alors : } \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\frac{k\pi}{8}} \iff \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = e^{i\frac{k\pi}{8}}$$

$$\text{Comme } e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Par identification de la partie réelle et imaginaire on a :

$$\Re\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

$$\Im\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Problème 2

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^3 + (8-i)X^2 + (6+6i)X - 9-9i$

1. Montrer que 3 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

$$P(3) = 3^4 - 6 \times 3^3 + (8-i)3^2 + (6+6i)3 - 9-9i$$

$$P(3) = 81 - 162 + 72 - 9i + 18 + 18i - 9 - 9i = 162 - 162 + 18i - 18i = 0$$

3 est au moins racine simple, vérifions si 3 est racine double :

$$P'(X) = 4X^3 - 18X^2 + 2(8-i)X + 6+6i$$

$$P'(3) = 108 - 162 + 148 - 6i + 6 + 6i = 0$$

3 est au moins racine double, vérifions si 3 est racine triple :

$$P''(X) = 12X^2 - 36X + 16 - 2i$$

$$P''(3) = 16 - 2i \neq 0$$

3 est exactement racine double,

2. Factoriser P dans \mathbb{C} . On donnera les racines sous forme exponentielle et algébrique.

$$P(X) = (X - 3)^2 Q(X) + R(X)$$

On pratique la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 3)^2$:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc|cccc}
 X^4 & -6X^3 & +(8-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & | & X^2 & -6X & +9 \\
 \hline
 -[X^4 & -6X^3 & +9X^2] & & & | & X^2 & -1-i & = Q(X) \\
 & & (-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & | & & & \\
 & & -[(-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i] & | & & & \\
 & & & & R(X) = 0 & | & & & \\
 & & & & & | & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$P(X) = (X - 3)^2 (X^2 - 1 - i)$$

D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme non constant dans \mathbb{C} peut être décomposé comme produit de polynômes de degré 1.

On calcule alors les racines de $X^2 - 1 - i$

$$X^2 - 1 - i = 0 \Leftrightarrow X^2 = 1 + i$$

- Sous forme algébrique :

$$\text{Dès lors : } \begin{cases} X_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \\ X_2 = -X_1 \end{cases}$$

- Sous forme exponentielle :

$$\text{On cherche } X^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ e^{i2\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\sqrt{2}} \text{ car } \rho > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{8}[\pi] \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} X_1 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \\ X_2 = -X_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } P(X) = (X - 3)^2 (X - \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})(X + \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})$$

Problème 3

Soit $a \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme P_a sur \mathbb{R} tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}, P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$$

Notre but ici est de trouver a tel que P_a possède trois racines appartenant à \mathbb{Z} .

On suppose qu'un tel a existe. Soient X_1, X_2, X_3 , les trois racines de P_a avec $X_1 \leq X_2 \leq X_3$.

1. Que valent $X_1 + X_2 + X_3$ et $X_1X_2X_3$?

Comme P_a est unitaire, on a

$$P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2 = (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)$$

On développe : $(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3) = (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3)$

$$\Leftrightarrow (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3) = X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3$$

$$\Leftrightarrow X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3 = X^3 - X^2(X^3 + X^2 + X_1) + X(X_2X_3 + X_1X_3 + X_1X_2) - X_1X_2X_3$$

Par identification et unicité de P_a , il découle que $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ et que $X_1X_2X_3 = -2$

2. Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $X_1 < 0$.

$P_a(0) = 2 = -X_1X_2X_3$. On sait d'ores et déjà que $X_{i \in \{1,2,3\}} \neq 0$. Supposons que $X_1 > 0$, alors, d'après l'énoncé $X_3 \geq X_2 > 0$, mais $X_1X_2X_3 = -2 < 0$. Dès lors, par contraposée, $X_1 < 0$.

3. Déduire de (a) et (b) que $X_1 \leq 0 \leq X_2 \leq X_3 \leq -X_1$ puis trouver les valeurs de X_1, X_2 et X_3 .

Comme $X_1X_2X_3 = -2$ et que l'on sait que $X_1 < 0$, on alors $X_1 < 0 < X_2 \leq X_3$. De plus, on sait que $X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 + X_3 = -X_1$. Comme X_2 est strictement positif, on en déduit que :

$$X_1 < 0 < X_2 \leq X_3 \leq -X_1$$

De plus, on sait que $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$. Dès lors, on déduit que :

$$X_1 = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = X_3 = 1$$

4. Montrer que $P'_a(t_2) = 0$ et en déduire la valeur de a .

Comme 1 est racine double, on en déduit effectivement que $P'_a(1) = 0$, soit

$$P'_a(X) = 3X^2 - (a^2 + 2a)$$

$$P'_a(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - (a^2 + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a + 3) = 0$$

Comme $a \in \mathbb{N}$, on la seule solution possible est :

$$a = 1$$

Problème 4

En utilisant la formule d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Linéariser $\cos^3(x)$.

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-3ix}}{8} \\ \cos^3(x) &= \frac{e^{i3x} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{1}{8} (2 \cos(3x) + 6 \cos(x)) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x)) \end{aligned}$$

Problème 5

Démontrer que tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un unique inverse z' noté $\frac{1}{z}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

On cherche donc $z' = x' + iy'$ tel que $zz' = 1$.

$$(x + iy)(x' + iy') = 1 \Leftrightarrow xx' - yy' + i(xy' + x'y) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } & \begin{cases} xy' + x'y = 0 \\ xx' - yy' = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y' = -\frac{x'y}{x} \\ xx' + \frac{x'y^2}{x} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y' = -\frac{x'y}{x} \\ x' \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \right) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y' = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors, on a :

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

Problème 6

Les énoncés sont indépendants :

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on le complexe $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ qui est un réel pur ?

Puisque $|z| = 1$, posons $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$ puisque $z \neq 1$. On a alors

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2 \cos(\frac{\theta}{2})}{-2i \sin(\frac{\theta}{2})} = i \times \frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n = i^n \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^n}$$

Il résulte que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ est un réel pur si et seulement si n est pair.

2. Calculer pour toute valeur de $\theta \in \mathbb{R}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Posons $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

On a $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k$

Ça commence à ressembler au binôme de Newton.

$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k} = (1 + e^{i\theta})^n = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \right)^n = e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$e^{i\frac{n\theta}{2}} = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

Dès lors $S_n = \Im \left(e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X) = (X-1)P'(X)$.

Le polynôme nul est solution.

Soit P de degré n . Pour déterminer le n on dresse l'équation de son degré : $n = 1 + (n-1)$.

Seulement ici on arrive à une indétermination. On doit résoudre d'une autre façon.

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Dès lors, on cherche les α_i tels que :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i X^i = (X-1) \sum_{i=1}^n i \alpha_i X^{i-1}$$

On a : $\sum_{i=0}^n \alpha_i X^i = \sum_{i=1}^n i \alpha_i X^i - i \alpha_i X^{i-1}$.

Par identification, il vient que :

$$\alpha_0 = -\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2$$

$$\alpha_2 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$$

\vdots

$$\alpha_i = i\alpha_i - (i+1)\alpha_{i+1}$$

\vdots

$$\alpha_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1} - n\alpha_n$$

$$\alpha_n = n\alpha_n$$

On a alors $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_2 = 0$

Dès lors $P(X) = \alpha_1 X - \alpha_1$

Soit :

$$P(X) = \alpha_1(X-1)$$

4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

(a) $P(X) = X^3 - 1$

- 1 est racine évidente $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$. $P(X)$ est factorisé dans \mathbb{R}
 Dans \mathbb{C} , on a $(X^2 + 1) = (X - i)(X + i)$. Dans \mathbb{C} , on a $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)$

(b) $P(X) = X^6 + 1$

- On revient à chercher les racines 6-ème telles que $z^6 = -1$
 On a les solutions $e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$ avec $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
 Dès lors, dans \mathbb{C} , on a $P(X) = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{3\pi}{6}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{9\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$
 Pour obtenir la factorisation dans \mathbb{R} , on regroupe les paires de racines complexes conjuguées.
 Dès lors, dans \mathbb{C} , on a $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X - 1)$

(c) $P(X) = X^9 - X^6 + X^3 - 1$

- Dès lors, on a dans \mathbb{R} , $P(X)$ tel que : $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)^2(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X - 1)$
 Et dans \mathbb{C} :
 $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)(X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{3\pi}{6}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{9\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$

5. Donner la division selon les puissances croissantes à l'ordre 4 (c'est à dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) de $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$ par $B = 1 + X^2 + X^3$.

$$1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1 + X^2 + X^3)(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$$

1	+X ³	-2X ⁴	+X ⁶	1	+X ²	+X ³
				+		
-[1	+X ²	+X ³]			1	-X ²
	-X ²		-2X ⁴			-X ⁴
	-[-X ²		-X ⁴			
			-X ⁴			
			+X ⁵			
			-[-X ⁴			
			X ⁵			
			+2X ⁶			
			+X ⁷			

Problème 7

On considère l'équation (E) suivante avec $z \in \mathbb{C}$.

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (E)$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Montrer que $\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i \tan(\theta)$

- On utilise la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On a donc $e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2$.
 De plus, on sait que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Dès lors : } \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} &= \frac{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\
&= \frac{-2\sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\
&= -\frac{\sin^2(\theta) - 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\
&= -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{\sin(\theta) - 2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta) + i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\
&= -\tan(\theta) \frac{-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} \\
&= i\tan(\theta)
\end{aligned}$$

2. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction \tan .

On remarque tout d'abord que i n'est pas solution de sorte que pour $z \neq i$, on a bien $1 - iz \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(1 + iz)^5 &= (1 - iz)^5 \Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} \in \mathbb{U}_5 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, (1 + iz)^5 = e^{\frac{2ik\pi}{5}} (1 - iz)^5 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1\right)} \text{ Car } \forall k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, z = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les réels $-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$, 0 , $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3. Développer $(1 + iz)^5$ et $(1 - iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.

Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
(1 + iz)^5 &= \binom{5}{0}(iz)^5 + \binom{5}{1}(iz)^4 + \binom{5}{2}(iz)^3 + \binom{5}{3}(iz)^2 + \binom{5}{4}iz + \binom{5}{5} \\
&= iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1 - iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(1 - iz)^5 &= (1 + iz)^5 \Leftrightarrow 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 0 \\
&\Leftrightarrow z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0
\end{aligned}$$

On a d'ores et déjà $z = 0$ comme solution, on cherche les solutions du polynôme $z^4 - 10z^2 + 5$.

On pose $Z = z^2$.

$$\Delta = 100 - 20 = 80 > 0. \text{ On a deux solutions réelles : } \begin{cases} Z_1 = 5 + 2\sqrt{5} \\ Z_2 = 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Les deux solutions sont positives et conviennent. On a alors } \begin{cases} z_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \\ z_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \end{cases}$$

On a l'ensemble des solutions \mathcal{S} équivalentes aux valeurs de \tan trouvées précédemment $\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}} \right\}$.