Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

On définit sur l'ensemble $\mathbb{N}$ la loi de composition $\star$ telle que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, a \star b = a + b - ab$$

1. Est-ce que la loi $\star$ est une loi de composition interne ?
2. Est-ce que $(\mathbb{R}, \star)$ est-un groupe abélien ? Si non, quelle(s) propriété(s) lui manque(nt) t-il ?
3. Calculer $\underbrace{a \star a \star ... \star a}_{n \text{ fois}} = a^{\star n}$.

Problème 2

Soit la loi de composition interne $\star$ définie sur $E = \{a, b, c, d\}$ telle que :

$\star$	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	b	c	d	d
d	a	c	b	d

1. La loi $\star$ est-elle commutative ? Associative ? Pour quels éléments l'écriture $x \star x \star x$ a t-elle un sens ?
2. $(E, \star)$ possède-t-elle l'élément neutre ? Un élément neutre à gauche ? Neutre à droite ?
3. L'ensemble $A = \{a, b, c\}$ est t-il stable ?

Problème 4

Soit un ensemble Ω tel que $\text{card}(\Omega) = n$.

Combien de lois de composition interne différentes peut-on créer sur Ω ? Parmi toutes ces lois, combien sont commutatives ? Combien possèdent l'élément neutre ?

Problème 3

Soit une loi $\star$ associative sur un ensemble E. Un élément $x \in E$ est dit *idempotent* si et seulement si $x \star x = x$.

1. Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x \star y$ est idempotent.
2. Montrer que si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Problème 4

On définit le groupe des n-entiers relatifs comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\mathbb{Z} = \{n \times k | k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Déterminer $0\mathbb{Z}$ et $1\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
3. Montrer que $A = 3\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}$ n'est pas stable pour l'addition.
4. Montrer que l'application f telle que $f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ k & \mapsto 6k \end{cases}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$.
5. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Qu'en déduisez-vous ?

Problème 5

On se place ici dans l'algèbre $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle.
On considère qu'un système [d'opérateurs] S est *complet* quand toute formule $\varphi \in \mathcal{L}$ peut-être représentée à l'aide de S. On considère que $S = \{\neg, \vee, \wedge\}$ est un système complet.

1. Combien d'opérateurs d'arité 2 peut-on définir au total ?
2. Trouver un système à 8 opérateurs d'arité 2 qui n'est pas complet.
3. On considère les deux opérateurs $\uparrow$ et $\downarrow$ respectivement *Nand* et *Nor* dont on donne la table de vérité suivante :

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

   (a) Ces opérateurs sont-ils associatifs ? Commutatifs ? Montrer que $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ sont des systèmes complets ?
   (b) Montrer que les seuls opérateurs qui forment à eux seuls un ensemble un système complets sont $\uparrow$ et $\downarrow$.

Problème 6

1. Soit l'application φ telle que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto |z| \end{cases}$
   (a) Montrer que φ définie un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.
   (b) Calculer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. En donner une interprétation géométrique.
2. Soit l'application ψ telle que $\psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^* | |z| = 1\}$
   (a) Montrer que ψ définie un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$.
   (b) ψ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?