Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

`Département informatique de Blois`

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Donner l'ensemble de définition adéquat de ces expressions puis résoudre en fonction de x. On précise que m est un nombre réel fixé.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $(2x-5)^2 = (4x+7)^2$
3. $mx + 4 = x + 4m^2$
4. $\frac{3x-m}{x-3} = m - 1$
5. $(3x-1)^2 > (4x+7)^2$
6. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4} > \frac{7}{x-3}$
7. $-1 < |x-1| - |x| < 1$
8. $|x+2| = 2x - 1$
9. $\frac{|x|}{|x-1|} - |x| \leq 0$
10. $-x - 1 = \sqrt{x^2+1}$
11. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$
12. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$
13. $|x^2 - x - 1| = 1$
14. $\sqrt{x+1} + x = 1$
15. $\sqrt{x^2+x-6} < x + 7$

Problème 2

Les énoncés sont indépendants.

1. Simplifier l'écriture des réels suivants.
   (a) $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)}$
   (b) $\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right)$
   (c) $e^{2\ln(2)} + \ln\left(e^{-3}\right) + e^{\ln(5)}$
   (d) $\frac{e}{e^{1+\ln(2)}}$
2. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les simplifier.
   (a) $\sqrt{x^2-4x+4}$
   (b) $\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$
   (c) $\ln(e^x+1) - \ln(1+e^{-x})$
   (d) $e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Problème 3

Les énoncés sont indépendants.

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire le calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Simplifier la somme S_n suivante : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$.

3. Simplifier le produit P_n suivant : $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
4. Calculer les doubles sommes suivantes :

   (a) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} 1$

   (b) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (i+j)$

5. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage :

   (a) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$

   (c) $\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$

   (d) $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

   (a) Développer $(k+1)^4 - k^4$. En déduire que : $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

   (b) En déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ en fonction de n.

Problème 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres associe :

$$f(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

1. Que vaut $f(3, 0)$? $f(-1, 0)$? $f(2, 4)$?
2. Montrer que $f(x, y) = \max(x, y)$.
3. Déterminer $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $g(x, y, z) = \max(x, y, z)$. On pourra exprimer g à l'aide de f.

Problème 5

Démontrer les propriétés suivantes par récurrence :

1. Somme des entiers au carré.

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Somme alternée des entiers (décomposer selon la parité de n, soit $2n$ et $2n + 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3. Racine itérée (on pensera à utiliser la relation $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}}}_{n \text{ racines}}$$