Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Déterminer une démonstration des assertions vraies et un contre-exemple dans le cas contraire.

   (a) L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par α est inférieure à 2α.

   > L'assertion est *vraie*.
   >
   > Soit $x \in [-1,1], f(x) \leq \alpha$.
   >
   > Par linéarité de l'intégration, on a :
   > $$\begin{aligned}\int_1^{-1} f(x)dx \leq \int_1^{-1} \alpha dx \Leftrightarrow \int_1^{-1} f(x)dx &\leq [x\alpha]_{-1}^{1} \\ \Leftrightarrow \int_1^{-1} f(x)dx &\leq \alpha - (-\alpha) \\ \Leftrightarrow \int_1^{-1} f(x)dx &\leq 2\alpha\end{aligned}$$
   > CQFD ! ☺

   (b) Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.

   > L'assertion est *fausse*.
   >
   > La fonction partie entière $E(x)$ est intégrable sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue. Toute fonction qui ne comporte pas de "trou" sur sont intervalle d'intégration est intégrable.

   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose un intervalle $I = [-\alpha, \alpha]$. Soit une fonction réelle f définie et intégrable sur I. On suppose que f est impaire. Alors, on peu affirmer que $\displaystyle\int_I f(x)dx = 0$.

   > L'assertion est *vraie*.
   > $$\begin{aligned}\int_I f(x)dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx \\ &= \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \\ &= -\int_{-\alpha}^{0} f(-x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx\end{aligned}$$
   > On sait qu'une fonction impaire se traduit par $-f(-x) = f(x)$.

On effectue le changement variable $x = -y$ dans la première intégrale, dès lors :
$\frac{dx}{dy} = -1 \Leftrightarrow dx = -dy$.
De plus,
Si $x = -\alpha \to y = \alpha$
Si $x = 0 \to y = 0$
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx &= F(\alpha) - F(0) + F(0) - F(\alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$

CQFD ! ☺

(d) Soient F et G, deux fonction définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = F'(x)$. Alors, on peut dire que $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = F(x) + k$.

L'assertion est *fausse*.

En effet, si on pose $G(x) = 1$ et $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On a bien $x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = F'(x)$ mais il n'existe pas de constante k telle que $G(x) = F(x) + k$.

2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre 1. À quel objet mathématique correspond ce développement limité ?

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admette au moins un $DL_1(a)$ est qu'elle soit dérivable en a. En effet, un $DL_1(a)$ peut se traduire comme étant l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en a.

3. Donner la définition de l'intégrale au sens de Riemann.

On dit que la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si son intégrale inférieure $\sigma(f)$ est égale à son intégrale supérieure $\Sigma(f)$.

On pose $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$ et le pas δ de l'intervalle tel que $\delta = \max_{k \in [\![1,n]\!]} \{x_k - x_{k-1}\}$. On précise que $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})m_k$ où $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]}(f)$

$\Sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})M_k$ où $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]}(f)$

On démontrer que $\sigma(f)$ est croissante et $\Sigma(f)$ est décroissante.

De plus, on a naturellement $\sigma(f) \leq \Sigma(f)$ et $\lim_{\delta \to 0} \Sigma(f) - \sigma(f) = 0$. On peut donc dire que ces suites sont convergentes vers une même limite R.

Cette valeur commune R s'appelle l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et est notée $\int_{b}^{a} f(x)dx$.

Elle est associée à la somme de Riemann $\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})f(x_k)$. Ainsi

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_b^a f(x)dx$$

Problème 2

Soit l'intégrale I définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \alpha\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{\beta}{(x^2+2x+2)^2}$.

$\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\alpha(2x+2)+\beta}{(x^2+2x+2)^2}$
$\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2\alpha x+2\alpha+\beta}{(x^2+2x+2)^2}$
Par identification, on a $\begin{cases} 2\alpha & = 3 \\ 2\alpha+\beta & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = \frac{3}{2} \\ \beta & = 1 \end{cases}$

2. Calculer $\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$ On reconnait la forme $\frac{u'}{u^n} \xrightarrow{\int} -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ avec $n = 2$
$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2}$

3. Déterminer les réels a et b tels que : $x^2+2x+2 = (x+a)+b^2$.

Trouver les réels a et b tels que : $x^2+2x+2 = (x+a)+b^2$ revient à rechercher la forme canonique :
$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ On trouve alors $a = b = 1$.

4. On considère le changement de variable $u = x+1$.
   (a) Montrer que $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$.

   On procède au changement de variable $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$
   $\frac{dx}{du} = \frac{(u-1)'}{(u)'} \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = 1$
   $\Leftrightarrow dx = du$
   $$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{du}{((u-1)+1)^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

   (b) Montrer par une technique que l'on expliquera que : $2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

Pour l'intégration par parties on pose u et v telles que :

$v' = 1 \to v = u$

$w = \frac{1}{u^2+1} \to w' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$

Ainsi, on a
$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2+1} = [v.w] - \int v.w'du &= \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{(u^2+1)-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2\left(\int \frac{(u^2+1)}{(u^2+1)^2}du - \int \frac{1}{(u^2+1)^2}du\right) \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2\left(\int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{du}{(u^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \Leftrightarrow 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$$

On retrouve bien $2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

5. En déduire la valeur de I.

Par suite (On considère toute $cte = 0$) :

$$2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \arctan(u) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \arctan(x+1)\right]$$

On trouve I telle que : $I = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{3}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1)\right]$

On pose $X \in [0, +\infty[$, dès lors :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx &= \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx \\ &= I(X) - I(0)\end{aligned}$$

$\lim_{X\to+\infty} I(X) = \frac{\pi}{4}$ et $I(0) = -\frac{3}{4} + \frac{2+\pi}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$

Par conséquent, cette intégrale converge vers $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$

Problème 3

Soit l'intégrale I définie telle que : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$

1. Montrer que I est de la forme : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1} + \frac{\gamma}{x^2+x+1}dx$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}dx\end{aligned}$$

Par identification, il vient que $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$

2. Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.

x^2+x+1, On fait un début d'identité remarquable.

$x^2+x+1 = x^2+2.\frac{1}{2}.x+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

3. En déduire l'intégrale I et la calculer.

$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$

L'intégrale se compose de deux intégrales :

(1) : $\frac{u'}{u} \xrightarrow{\int} \ln|u|$ avec ici $u = x^2+x+1$

(2) : $\frac{u'}{u^2+\alpha^2} \xrightarrow{\int} \frac{1}{\alpha}\arctan(\frac{u}{\alpha})$ avec ici $u = x+\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\begin{aligned} I &= \left[\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2})\right)\right]_1^0 \\ &= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \ln(3) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{6\sqrt{3}} \\ &= \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Problème 4

Soit l'intégrale $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$

1. Démontrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

On utilise la formule d'Euler.

$$\begin{aligned} e^{i2x} &= (e^{ix})^2 \\ &= (\cos(x)+i\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x)-\sin^2(x)+2i\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

On sait que $\sin(x) = \mathfrak{Im}(e^{ix})$ par conséquent : $\sin(2x) = \mathfrak{Im}(e^{i2x}) = 2\sin(x)\cos(x)$

2. En posant le changement de variable $u = \frac{x}{2}$, montrer que $\varphi(u) = \int \frac{\tan'(u)}{\tan(u)}du$. On rappelle que $\tan'(x) = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$.

On pose $u = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2u = x$, on a donc : $dx = 2du$

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int \frac{2}{\sin(2u)}du \\ &= \int \frac{2}{2\sin(u)\cos(u)}du \\ &= \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)\cos^2(u)}du \\ &= \int \frac{1}{\tan(u)} \times \frac{1}{\cos^2(u)}\,du \end{aligned}$$

On trouve bien $I(x)$ de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et $u'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

3. En déduire la forme de $\varphi(x)$.

La primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$

Ainsi : $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + cte$

Problème 5

Soient les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2, \quad \text{et} \quad h(x) = e^x$$

1. Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Une condition suffisante pour qu'elles soient intégrables et qu'elles soient continues sur leur intervalle d'intégration. Les fonctions ci-dessus sont continues sur tout $\mathbb{R}$ et donc, sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Par définition, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_b^a f(x)dx$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)}{2n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_1^2 g(x)dx$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 g(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{k^2}{n^2} + 2\frac{k}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(n + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} + (n-1)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{n-1}{n} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^x h(t)dt$.

> $$\begin{aligned}\int_0^x h(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \tfrac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\tfrac{kx}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \tfrac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \tfrac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^k\\ &= \lim_{n\to+\infty} \tfrac{x}{n} \left(\tfrac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}\right)\end{aligned}$$
> On pose $u = \frac{x}{n}$. ainsi, si $n \to +\infty$, $u \to 0$.
> $$\begin{aligned}&= \lim_{u\to 0} u\left(e^u \tfrac{1-e^x}{1-e^u}\right)\\ &= \lim_{u\to 0}(1-e^x)u\tfrac{e^u}{1-e^u}\\ &= (1-e^x)\end{aligned}$$

Problème 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'intégrale définie telle que

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

> On a $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, puis par linéarité de l'intégration, on en déduit que :
> $$\begin{aligned}I_n \leq \int_0^1 x^n dx &\Leftrightarrow I_n \leq \left[\tfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\ &\Leftrightarrow I_n \leq \tfrac{1}{n+1}\end{aligned}$$
> Ainsi, on a
> $$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
> Par le théorème des gendarmes, on $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

> $$\begin{aligned}I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \tfrac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \tfrac{x^{n+1}}{1+x}dx\\ &= \int_0^1 \tfrac{x^n+x^{n+1}}{1+x}dx\\ &= \int_0^1 \tfrac{x^n(1+x)}{1+x}dx\\ &= \int_0^1 x^n dx\\ &= \tfrac{1}{n+1}\end{aligned}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

On pose $S_n = 1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Ainsi, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_k + I_{k+1})$

Il vient par télescopage que $S_n = I_0 + (-1)^n I_n$

Dès lors $\lim_{n \to +\infty} I_0 + (-1)^n I_n = \ln(2)$