# Tutorat mathématiques : TD7

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales*

*
* *

## Problème 1

On considère les matrices $P$ et $D$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calcul matriciel
   (a) Montrer que $P$ est inversible et calculer son inverse $P^{-1}$.
   (b) Soit la matrice $A = P.D.P^{-1}$. Calculer $A$.
   (c) Soit la propriété $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$. Démontrer que $P(n)$ est vraie.
2. Soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et définies par récurrence telles que : $\begin{cases} u_{n+1} & = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + v_n \end{cases}$
   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Traduire ces suites par un système matriciel. Quelle relation vérifie ce système ?
   (b) On pose $X_n = P.D^n.P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.

## Problème 2

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer$A_0 - A_1$ et $A_0A_1$
2. Écrire le système linéaire $(S_m)$ d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 3m \end{pmatrix}$
3. Calculer $\det(A_m)$ puis donner $\det(A_0)$, $\det(2\,{}^tA_0)$, $\det(A_0^3)$.
4. Pour quelles valeurs de $m$ la matrice $A_m$ est-elle inversible ?
5. Déterminer sans calcul l'ensemble des solutions $(S_0)$.
6. Résoudre $(S_1)$.

## Problème 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(A)$ la somme des coefficients de $A$.

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Exprimer $UAU$ en fonction de $\sigma(A)$ et $U$.

## Problème 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n$ le déterminant suivant de taille $n \times n$ tel que :

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}}_{n} \Bigg\updownarrow n$$

1. Calculer $\Delta_n$ en fonction de $\Delta_{n-1}$. On pourra penser à factoriser selon les colonnes.

2. Démontrer que : $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$

## Problème 5

Les *matrices stochastiques* sont des structures très utilisées en informatique et en probabilités. Elles sont à la base des *chaînes de Markov* qui servent en particulier à modéliser des processus aléatoires complexes de manière très simple et forment ainsi des outils puissants pour l'étude de problèmes.
Une matrice $M$ est dite stochastique si et seulement si :

$$M \in \mathcal{M}_n([0,1]) \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

C'est-à-dire que tous les coefficients $m_{ij}$ de $M$ appartiennent à $[0,1]$ (en fait ces coefficients représentent des probabilités), et la somme des coefficients en ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n$.
Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$ . Montrer que $A \times B$ est une matrice stochastique.

## Problème 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$. Que peut-on constater ? Pourquoi ?
   Développer $(A+B)^2$, factoriser $A^3 - I_2$.

2. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.

3. Déterminer $\mathcal{C}_B = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | BM = MB\}$.

4. Déterminer $\mathcal{O}_{MB} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | MB = \mathcal{O}_2\}$.