

Tutorat mathématiques : TD1
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

Soit le polynôme $P(X) = X^n + aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que P admet au plus 3 racines réelles. On pourra s'aider du théorème de Rolle.

Problème 2

Donner la valeur, si elle existe, des expressions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\cos\left(-\frac{22\pi}{12}\right)$ | 7. $\sin(\arctan(\sqrt{3}))$ |
| 2. $\arcsin(\sin(\frac{14\pi}{2}))$ | 8. $\sin(x) = \tan(x)$ |
| 3. $\cos(\arcsin(\frac{1}{2}))$ | 9. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ |
| 4. $\sin(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$ | 10. $2\sin^2(x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 3$ |
| 5. $\tan(\frac{17\pi}{6})$ | 11. $\cos(3x) = \sin(2x)$ |
| 6. $\arctan(\cos(\frac{15\pi}{5}))$ | 12. $\arcsin(3x) = \arccos(2x)$ |

Problème 3

Soit la fonction f définie telle que :

$$f(x) = 2\arctan(x) - \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Faire la division euclidienne de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, en faire un encadrement et en déduire D_f .
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Justifier que f est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* et montrer que $f'(x) = \frac{2}{x^2+1}(1+\operatorname{sgn}(x))$.

On rappellera éventuellement que la fonction signe s'écrit : $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

4. Déduire des questions précédentes une forme plus simple de f .

Problème 4

Calculer la dérivée n -ème de $x \mapsto x^n(1+x^2)$.