Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Déterminer une démonstration des assertions vraies et un contre-exemple dans le cas contraire.
   (a) L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par α est inférieure à 2α.
   (b) Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose un intervalle $I = [-\alpha, \alpha]$. Soit une fonction réelle f définie et intégrable sur I. On suppose que f est impaire. Alors, on peu affirmer que $\int_I f(x)dx = 0$.
   (d) Soient F et G, deux fonction définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = F'(x)$. Alors, on peut dire que $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = F(x) + k$.
2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre 1. À quel objet mathématique correspond ce développement limité ?
3. Donner la définition de l'intégrale au sens de Riemann.

Problème 2

Soit l'intégrale I définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \alpha \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{\beta}{(x^2+2x+2)^2}$.
2. Calculer $\frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx$.
3. Déterminer les réels a et b tels que : $x^2 + 2x + 2 = (x+a) + b^2$.
4. On considère le changement de variable $u = x + 1$.
   (a) Montrer que $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$.
   (b) Montrer par une technique que l'on expliquera que : $2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$
5. En déduire la valeur de I.

Problème 3

Soit l'intégrale I définie telle que : $I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1} dx$

1. Montrer que I est de la forme : $\int_0^1 \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1} + \frac{\gamma}{x^2+x+1} dx$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.
3. En déduire l'intégrale I et la calculer.

Problème 4

Soit l'intégrale $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$

1. Démontrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
2. En posant le changement de variable $u = \frac{x}{2}$, montrer que $\varphi(u) = \int \frac{\tan'(u)}{\tan(u)} du$. On rappelle que $\tan'(x) = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$.
3. En déduire la forme de $\varphi(x)$.

Problème 5

Soient les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2, \quad \text{et} \quad h(x) = e^x$$

1. Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
2. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^1 f(x)dx$.
   (b) $\int_1^2 g(x)dx$.
   (c) $\int_0^x h(t)dt$.

Problème 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'intégrale définie telle que

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.