

Tutorat logique : TD4
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

Les énoncés sont indépendants.

1. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_1 = \{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow R(x))\}$$

Et la formule $C = \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow R(x))$. A-t-on $\mathcal{F}_1 \models C$?

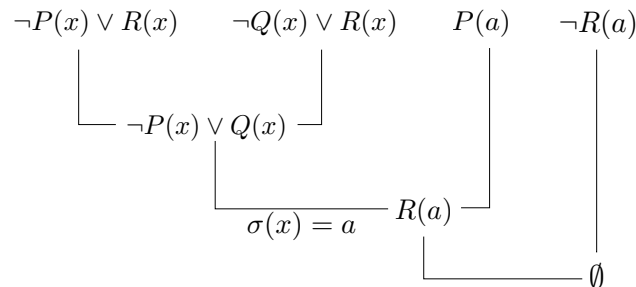
Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F}_1 = \{\theta_1, \theta_2\}$ avec :

$$\theta_1 = \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(x)) = \neg P(x) \vee Q(x)$$

$$\theta_2 = \neg Q(x) \vee R(x)$$

$$\neg C = \neg \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow R(x)) = P(a) \wedge \neg R(a)$$

On obtient l'arbre de résolution suivant :



Dès lors, le raisonnement est valide, on a bien C conséquences logiques des prémisses établies dans \mathcal{F}_1 .

2. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_2 = \{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y)), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x))\}$$

Et la formule $C = \exists x \cdot (\neg Q(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y))$. A-t-on $\mathcal{F}_2 \models C$?

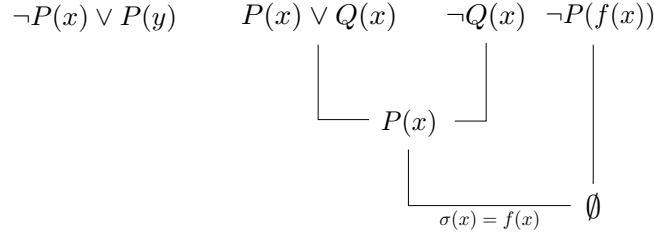
Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F}_2 = \{\pi_1, \pi_2\}$ avec :

$$\pi_1 = \forall x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y) = \neg P(x) \vee P(y)$$

$$\pi_2 = \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x)) = P(x) \vee Q(x)$$

$$\neg C = \neg(\exists x \cdot \neg Q(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y)) = \neg \exists \cdot Q(x) \wedge \neg \forall y \cdot P(y) = \neg Q(x) \wedge P(f(x))$$

On obtient l'arbre de résolution suivant :



Dès lors, le raisonnement est valide, on a bien C conséquences logiques des prémisses établies dans \mathcal{F}_2 .

3. Soient les énoncés suivants :

$$\Psi_1 = \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (F(x, y) \wedge F(y, z)) \Rightarrow G(x, z)$$

$$\Psi_2 = \forall x \cdot \exists y \cdot F(y, x)$$

$$\Psi_3 = \neg \forall x \cdot \exists y \cdot G(y, x)$$

L'ensemble $\mathcal{F}_3 = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est-il cohérent ?

$$\Psi_1 = \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (F(x, y) \wedge F(y, z)) \Rightarrow G(x, z) = \neg F(x, y) \vee \neg F(y, z) \vee G(x, z)$$

$$\Psi_2 = \forall x \cdot \exists y \cdot F(y, x) = F(f(x'), x') \text{ On renomme pour éviter les collisions de variables}$$

$$\Psi_3 = \neg \forall x \cdot \exists y \cdot G(y, x) = \neg G(y', a)$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\} \text{ est cohérent} \Leftrightarrow \bigwedge_{\Psi_i \in \mathcal{F}_3} \Psi_i \neq \perp$$

On cherche les résolvantes :

$$\Psi_3 \wedge \Psi_1 \text{ avec les substitutions } \sigma(z) = a, \sigma(x) = y' : \Psi_4 \equiv \neg F(y', y) \vee \neg F(y, a)$$

$$\Psi_4 \wedge \Psi_2 \text{ avec les substitutions } \sigma(x') = a, \sigma(y) = f(x') : \Psi_5 \equiv F(y', f(a))$$

$$\Psi_5 \wedge \Psi_2 \text{ avec les substitutions } \sigma(x') = f(a), \sigma(y') = f(f(a)) : \perp$$

Dès lors \mathcal{F}_3 est incohérent.

Problème 2

Soient les énoncés suivants Φ_i du raisonnement R :

Φ_1 : Pour tout crime, il y'a un quelqu'un qui l'a commis.

Φ_2 : Il y'a uniquement les gens malhonnêtes qui commettent des crimes.

Φ_3 : Ne sont arrêtés que les gens malhonnêtes.

Φ_4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.

Φ_5 : Il y'a des crimes.

C : Il y'a des gens malhonnêtes non arrêtés.

On définit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{Cr, M, A, C\}$: $Cr(x)$ d'arité 1 vrai si x est un crime, $M(y)$ d'arité 1 vrai si y est malhonnête, $A(y)$ vrai si y est arrêté et $C(x,y)$ d'arité 2 vrai si y a commis le crime x .

1. Représenter en logique des prédicats les énoncés Φ_i et C .

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \forall x \cdot (Cr(x) \Rightarrow \exists y C(x, y)) \\ \Phi_2 &: \forall x \cdot \forall y \cdot [(Cr(x) \wedge C(x, y)) \Rightarrow M(y)] \\ \Phi_3 &: \forall y \cdot (A(y) \Rightarrow M(y)) \\ \Phi_4 &: \forall y \cdot (A(y) \wedge M(y)) \Rightarrow \neg \exists x \cdot (Cr(x) \wedge \neg C(x, y)) \\ \Phi_5 &: \exists x \cdot Cr(x) \\ C &: \exists y \cdot (M(y) \wedge \neg A(y)) \end{aligned}$$

2. Donner la forme de Skolem correspondante aux énoncés Φ_i et C respectifs.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \forall x \cdot (\neg Cr(x) \vee \exists y \cdot C(x, y)) = \neg Cr(x) \vee C(x, f(x)) \\ \Phi_2 &: \forall x \cdot \forall y \cdot [((Cr(x) \wedge C(x, y)) \Rightarrow M(y)) \neg Cr(x) \vee \neg C(x, y) \vee M(y)] \\ \Phi_3 &: \forall y \cdot (A(y) \Rightarrow M(y)) = \neg A(y) \vee M(y) \\ \Phi_4 &: \forall y \cdot (A(y) \wedge M(y)) \Rightarrow \neg \exists x \cdot (Cr(x) \wedge \neg C(x, y)) = \neg A(y) \vee \neg M(y) \vee \neg Cr(x) \vee \neg C(x, y) \\ \Phi_5 &: Cr(a) \end{aligned}$$

3. A-t-on $\bigcup_{\Phi_i \in R} \Phi_i \models C$? Le montrer par résolution.

Le raisonnement R est cohérent si et seulement si $\bigwedge_{\Phi_i \in R} \Phi_i \wedge \neg C = \perp$

$$\Phi_c = \neg C = \neg(\exists y \cdot (M(y) \wedge \neg A(y))) = \neg M(y) \vee A(y)$$

On construit les résolvantes par coupure et unification (équivalent de la résolution en arbre) :

$$\Phi_1 \wedge \Phi_5 \text{ avec la substitution } \sigma(x) = a : \Phi_6 = C(a, f(a))$$

$$\Phi_6 \wedge \Phi_2 \text{ avec la substitution } \sigma(x) = a \text{ et } \sigma(y) = f(a) : \Phi_7 = \neg Cr(a) \vee M(f(a))$$

$$\Phi_7 \wedge \Phi_5 : \Phi_8 = M(f(a))$$

$$\Phi_6 \wedge \Phi_4 \text{ avec la substitution } \sigma(x) = a \text{ et } \sigma(y) = f(a) : \Phi_9 = \neg A(f(a)) \vee \neg M(f(a)) \vee \neg Cr(a)$$

$$\Phi_5 \wedge \Phi_9 : \Phi_{10} = \neg A(f(a)) \vee \neg M(f(a))$$

$$\Phi_8 \wedge \Phi_{10} : \Phi_{11} = \neg A(f(a))$$

$$\Phi_c \wedge \Phi_{11} \text{ avec la substitution } \sigma(y) = f(a) : \Phi_{12} = \neg M(f(a))$$

$$\Phi_8 \wedge \Phi_{12} : \perp$$

On arrive à une contradiction ce qui montre que le raisonnement est bien valide.

Problème 3

1. On définit la suite de Fibonacci $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :
- $$\begin{cases} \mathcal{F}_{n+2} &= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_0 &= 0 \\ \mathcal{F}_1 &= 1 \end{cases}$$

Écrire en Prolog un programme `fib(N,R)` qui calcule le terme $\mathcal{F}_n = R$ pour un rang N donné.

Le programme renverra par exemple :

```
[1] ?-fib(6, R)
R = 8
[2] ?-fib(6, 12)
Failure
```

On a le programme suivant en Prolog.

Algorithme 1 Suite de Fibonacci

```
% Author Clément

/***** BASE DE FAITS *****/
Fib(0,0). % Cas de base  $\mathcal{F}_0$ 
Fib(1,1). % Cas de base  $\mathcal{F}_1$ 
/*****/

/***** BASE DE RÉGLES *****/
fib(N,R):- N >= 2,
N1 is N - 1,
N2 is N - 2,
fib(N1,R1),
fib(N2,R2),
R is R1 + R2.
% On calcule  $\mathcal{F}_{n-1}$  (Idem  $\mathcal{F}_{n-2}$ ) par l'appel fib(N1,R1) (Idem fib(N2,R2))
% De manière récursive on arrive aux cas de base, puis le programme remonte
% les calculs pour donner le résultat.
```

2. Écrire en Prolog un programme `subst(N, 0, 1, 1')` qui prend une liste `l` en paramètre et retourne une liste `l'` avec tous les éléments 0 remplacés par N.

Le programme renverra :

```
[1] ?-subst(new, old, [a, old, b, c, old], R).
R = [a, new, b, c, new]
[2] ?-subst(0, 1, [1, 0, 0, 1], [0 ,0 ,0 ,0]).
Success
```

On a le programme suivant en Prolog.

Algorithme 2 Substitution dans une liste

```

% Author Clément

/**** Rappel bref ****/
% Une liste se compose d'un élément de tête 'H' qui est un élément de la liste
% et d'une queue 'T' qui est le reste de la liste.
% On a alors une liste 'l' telle que l = [H|T].

/***** BASE DE FAITS *****/
subst(N,0,[],[]) :- !. % Cas de base, la liste est vide.
/*****/

/***** BASE DE RÉGLES *****/
subst(N,0,[O|T],[N|R]) :- subst(N,0,T,R), !.
% L'élément de tête est 0, on le remplace par N.
% T est le reste de la liste à parcourir.
% R est la queue de liste que l'on construit récursivement.
subst(N,0,[X|T],[X|R]) :- subst(N,0,T,R).
% X est un élément que l'on ne cherche pas à remplacer.

```

Problème 4

Soit p , un symbole de prédicat d'arité 2.

1. Écrire une formule ϕ qui traduit que p est une relation symétrique, transitive et que tout élément a une image par la relation (i.e. tout élément x a au moins une image y telle que $p(x, y)$).

- Symétrie : $\phi_1 = \forall x \cdot \forall y \cdot [p(x, y) \Rightarrow p(y, x)]$
- Transitivité : $\phi_2 = \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot [p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)]$
- Image : $\phi_3 = \forall x \cdot \exists y \cdot p(x, y)$
- Réflexivité : $\phi_4 = \forall x \cdot p(x, x)$

2. Montrer en utilisant la méthode de résolution que p est réflexive.

On veut montrer que l'on a $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \models \phi_4$. On va le faire par la méthode de résolution. On va donc montrer que l'ensemble $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \neg\phi_4\}$ est insatisfaisable.

On met notre ensemble sous forme de Skolem, on renomme également nos variables pour éviter toute ambiguïté.

Dès lors, on a :

$$\phi_1 = \neg p(x_1, y_1) \vee p(y_1, x_1)$$

$$\phi_2 = \neg p(x_2, y_2) \vee \neg p(y_2, z_2) \vee p(x_2, z_2)$$

$$\phi_3 = p(x_3, f(x_3))$$

$$\phi_4 = \neg p(a, a)$$

On applique la règle de coupure et l'unification pour construire les résolvantes.

$$\phi_2 \wedge \phi_4 \text{ avec les substitutions } \sigma(x_2) = a \text{ et } \sigma(z_2) = a : \phi_5 = \neg p(a, y_2) \vee \neg p(y_2, a)$$

- $$\left\| \begin{array}{l} \phi_3 \wedge \phi_5 \text{ avec les substitutions } \sigma(x_3) = a \text{ et } \sigma(y_2) = f(a) : \phi_6 = \neg p(f(a), a) \\ \phi_1 \wedge \phi_6 \text{ avec les substitutions } \sigma(y_1) = f(a) \text{ et } \sigma(x_1) = a : \phi_7 = p(a, f(a)) \\ \phi_3 \wedge \phi_7 \text{ avec les substitutions } \sigma(x_3) = a : \perp \\ \text{On arrive bien à une contradiction. } p \text{ est bien réflexive.} \end{array} \right.$$

Rappel : Une relation R est symétrique si pour tout $(d, d') \in R$, on a $(d', d) \in R$. Elle est transitive si pour tout $(d, d') \in R$ et tout $(d', d'') \in R$, on a $(d, d'') \in R$. Enfin, elle est réflexive si tout couple $(d, d) \in R$.

Problème 5

Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
 $\parallel \forall x \cdot \exists y \cdot ((Personne(x) \wedge Personne(y)) \Rightarrow Menti(x, y))$
2. Un chat est entré.
 $\parallel \exists x \cdot Chat(x) \wedge Entré(x)$
3. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean-Yves n'arrive pas à se concentrer.
 $\parallel (\forall x \cdot (Personne(x) \Rightarrow \neg Bruit(x)) \wedge \neg Concentrer(Jean - Yves))$
4. Quelqu'un cite un philosophe qui n'a rien écrit.
 $\parallel \exists x \cdot \exists y \cdot (Philosophe(y) \wedge Cite(x, y) \wedge \neg \exists z \cdot Ecrit(y, z))$
5. Il y'a [au moins] un exercice qu'aucun mathématicien ne sait résoudre.
 $\parallel \exists x \cdot \neg \exists y \cdot (Exercice(x) \wedge Mathématicien(y) \wedge Resoudre(y, x))$

Problème 6

On sait que la logique des prédicats du premier ordre forme une théorie *indécidable*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de vérifier si une formule logique Φ est valide ou non.

On considère le raisonnement suivant :

$$\{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(f(x))), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow P(f(x))), P(A)\} \models \forall x \cdot P(x)$$

Peut-on conclure que ce raisonnement est valide ? Si non, essayer de montrer que la conclusion n'est pas une conséquence logique des hypothèses en exhibant un contre-exemple.

Considérons que le raisonnement est formé de l'ensemble de clauses $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. On met le raisonnement sous forme de Skolem.

$$\left\| \begin{array}{l} \gamma_1 = \neg P(x) \vee Q(f(x)) \\ \gamma_2 = \neg Q(x) \vee P(f(x)) \\ \gamma_3 = P(A) \end{array} \right.$$

$$\neg C = \gamma_c = \neg P(A')$$

On applique le principe de résolution.

$$\gamma_1 \wedge \gamma_c \text{ avec la substitution } \sigma(x) = A' : \gamma_4 = Q(f(A'))$$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_3 \text{ avec la substitution } \sigma(x) = A : \gamma_4 = Q(f(A))$$

$$\gamma_4 \wedge \gamma_2 \text{ avec la substitution } \sigma(x) = f(A') : \gamma_5 = P(f(f(A)))$$

\vdots

On peut former autant de résultante que l'on veut, mais on montre par récurrence que l'on n'arrivera jamais à exhiber une contradiction. On ne peut donc pas conclure que le résultat est valide.

Soit P la relation " $\in \mathbb{Z}$ " et Q la relation " $\in \mathbb{N}$ " et f la fonction valeur absolue " $|\cdot|$ ", notre domaine d'interprétation est $M = \mathbb{R}$.

Nos prémisses sont bien valides, mais la conclusion n'est pas une conséquence logique.