Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a. On suppose de plus que f est définie au point a.

Donner la définition de la continuité de f en a et l'illustrer par une figure.

La *continuité* est une notion de topologie qui énonce que : pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Cela veut dire que si l'on se fixe un seuil ε aussi petit que l'on veut, on peut toujours trouver un intervalle autour de a tel que $f(x)$ soit à une distance inférieure à ε de $f(a)$.

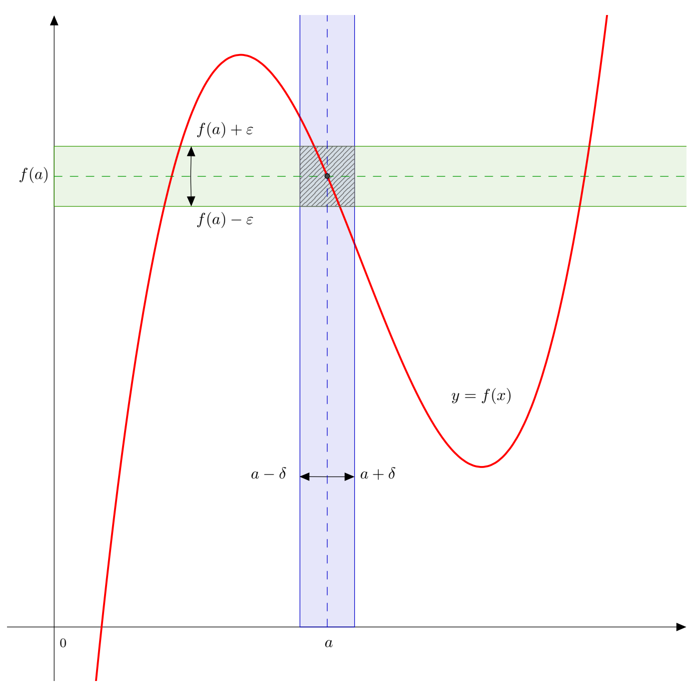

Figure 1 : Illustration de la continuité au point a de la fonction f

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Si $f(2x) = f(x)$ alors,
$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$,
$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)$,
$\vdots$
$f(\frac{x}{2^{n-1}}) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$,
On a finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$.
Donc, par continuité de f en 0, il vient que $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$
Mais, on sait que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
Par unicité de la limite, on a

$$f(x) = f(0)$$

Comme ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, il résulte que la fonction f est constante.

Problème 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^3+a}{x^3-1} & \text{si } x \neq 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que, indépendamment du choix de a et b, la fonction f admet une droite asymptote Δ en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.

   On cherche $\Delta = \alpha x + \beta$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \Delta = 0$.

   En établissant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, il vient immédiatement que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = x + 2$, on en déduit que $\Delta = x + 2$.

   Dans la forme, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \beta$.

2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $N(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ et $D(x) = x^3 - 1$ (respectivement numérateur et dénominateur de f) sont continues sur $\mathbb{R}$ et le polynôme D ne s'annule qu'en 1, ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction f sera continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3+a}{x^3-1} = b$$

Cette configuration force le polynôme N à s'annuler également en 1 pour compenser D.

$N(1) = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

Ainsi, on a $N(x) = (x-1)(x^3+3x^2-3x+3)$ et $D(x) = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-3x+3}{x^2+x+1} = \frac{10}{3} = b$$

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = -3$ et $b = \frac{10}{3}$.

Problème 4

Étudier la continuité de la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x - E(x)} - E(x) \end{cases}$$

On rappelle que $E(x)$ est la fonction *partie entière* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq E(x) < x+1$

Le fonction est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ puisque la partie entière est constante au voisinage d'un tel réel.

Étudions la situation en un entier $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a :

- $\lim\limits_{x\to n^+} E(x) = n$
- $\lim\limits_{x\to n^-} E(x) = n-1$

On a donc :

- $\lim\limits_{x\to n^+} \sqrt{x - E(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to n^-} \sqrt{x - E(x)} = 1$

On ajoute la dernière partie entière pour compléter la fonction f.

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} \sqrt{x - E(x)} + E(x) = n$$

et

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} \sqrt{x - E(x)} + E(x) = n$$

Les limites sont égales à gauche et à droite et valent n. Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dès lors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Problème 5

On appelle fonction caractéristique χ_F d'un sous-ensemble $F \subset E$, une fonction :

$$\chi_F : \begin{cases} E \to & \{0,1\} \\ x \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe toujours un nombre rationnel.

   On pourra utiliser la propriété d'Archimède qui énonce que :

   Axiome d'Archimède - *Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.*

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}, (0 < x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} | n \times x > y)$$

> Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il s'agit d'exhiber un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $a < \frac{p}{q} < b$. En appliquant la propriété d'Archimède , on voit qu'il existe un entier q tel que
>
> $$\frac{1}{b-a} < q$$
>
> En prenant $y = 1$ et $x = \frac{1}{b-a}$.
>
> On obtient par le suite
>
> $$qa + 1 < qb$$
>
> Soit p le plus petit entier relatif tel que $p > qa$. On a alors
>
> $$p - 1 < qa < p$$
>
> Donc $p \leq qa + 1$ et $qa < p \leq qa + 1 < qb$. En divisant par q on obtient le résultat voulu.

2. Montrer que la fonction caractéristique de $\chi_{\mathbb{Q}}$ pour $E = \mathbb{R}$ est discontinue en chacun de ses points.

> Soit $a \in \mathbb{Q}$ (respectivement $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$).
>
> Pour tout réel $\delta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel (respectivement rationnel) x dans $]a - \delta, a + \delta[$ et on a $|\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en tout point de $\mathbb{R}$.

Problème 6

Soit un polynôme P tel que $\deg(P)$ est impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Si P est de degré impair, alors on a de suite que :

- $\lim\limits_{X \to +\infty} P(X) = +\infty$
  Ainsi, $\exists A > 0$ tel que $P(A) > 0$.

- $\lim\limits_{X \to -\infty} P(X) = -\infty$
  Ainsi, $\exists A' < 0$ tel que $P(A') < 0$.

Un polynôme est continu sur son ensemble de définition. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui nous assure l'existence d'un réel $a \in [A', A]$ sur lequel P s'annule.

Problème 7

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes ainsi que la limite en α.

1. $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $\alpha = 0$

   $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$

   Par la formule du taux d'accroissement, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

   Dès lors ici $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$

2. $f_2(x) = 1 - x - 2x \ln|x|$, $\alpha = 0$

   $D_{f_2} = \mathbb{R}^*$

   On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = x$.

   Lorsque $x \to 0^+$, on a $X \to +\infty$. De même lorsque $x \to 0^-$, on a $X \to -\infty$.

   On note que $x \ln|x| = \frac{1}{X} \ln\left|\frac{1}{X}\right|$
   $= -\frac{1}{X} \ln|X|$
   $= -\frac{\ln|X|}{X}$

   On a déjà démontré que $\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln|X|}{X} = 0$. (Ici, la valeur absolue nous permet d'assurer la continuité à gauche et à droite).

   Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} x \ln|x| = 0$

   On conclut que $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 1$

3. $f_3(x) = \frac{|x|-2}{x^2-4}$, $\alpha = 2$

   $D_{f_3} = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$

   Comme $2 > 0$, on peut établir que :

   $$\lim_{x \to 2} f_3(x) = \lim_{x \to 2} \frac{|x|-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

4. $f_4(x) = \ln(\sqrt{x} + 1) - \ln(x)$, $\alpha = +\infty$

$D_{f_4} = \mathbb{R}_+^*$

On a $f_4(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 0$

Par composition des limites, il vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = -\infty$.

5. $f_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = 0$

$D_{f_5} = \mathbb{R}^*$

Par définition, on a $\frac{1}{x} \leq E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} + 1$

- On considère x positif, dès lors :

  $1 \leq f_5(x) < 1 + x$

  Lorsque $x \to 0^+$, par le théorème de gendarmes, il résulte immédiatement que $\lim\limits_{x\to0^+} f_5(x) = 1$
- On considère x négatif, dès lors :

  $1 \geq f_5(x) > 1 + x$

  De même, lorsque $x \to 0^-$, il résulte que $\lim\limits_{x\to0^-} f_5(x) = 1$

On a alors $\lim\limits_{x\to0} f_5(x) = 1$

6. $f_6(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}$, $\alpha = 0$

$D_{f_6} = \mathbb{R}^*$

On peut simplifier l'expression de $f_6(x)$ telle que $f_6(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 0 \\ x-2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On a alors $\lim\limits_{x\to0^+} = 2$ et $\lim\limits_{x\to0^-} = -2$. Dès lors, la fonction n'est pas continue.

7. $f_7(x) = \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6}$, $\alpha = 2$

$D_{f_7} = \mathbb{R}\backslash\{-3, 2\}$

En factorisant le dénominateur, on a $f_7(x) = \frac{e^x-e^2}{(x-2)(x+3)}$

$$= \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}$$

On reconnait le taux d'accroissement de e^x en 2 : $\lim\limits_{x\to2} \frac{e^x-e^2}{x-2} = e^2$

Dès lors $\lim\limits_{x\to2} f_7(x) = \frac{e^2}{5}$

8. $f_8(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)$, $\alpha = 0$

$D_{f_8} = \mathbb{R}^*$

En modifiant un peu l'expression de f_8, on a :

$f_8(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}^2-1^2}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\right)$
$= \frac{1}{x}\left(\frac{x(x+1)}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\right)$
$= \frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$

Il vient que $\lim\limits_{x \to 0} f_8(x) = \frac{1}{2}$

Problème 8

Soit f une fonction continue croissante $f : [a,b] \to [a,b]$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Soit E l'ensemble défini tel que $E = \{x \in [a,b] | f(x) \geq x\}$. $E \neq \emptyset$ car $a \in E$, en particulier a minore f et b majore f. Donc E admet une borne supérieure c telle que $a \leq c \leq b$.
Montrons que $f(c) = c$.
Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E | b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Puisque f est à valeurs dans $[a,b]$ et que les x_n sont dans E pour tout $n \neq 0$.
On a alors

$$x_n \leq f(x_n) \leq b \qquad (*)$$

Quand $n \to +\infty$, la suite $x_n \to b$ par le théorème des gendarmes. La fonction f étant croissante, il vient que $f(x_n) \to f(b^-) \leq f(b)$.
En se remplaçant dans l'équation $(*)$, il vient que $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$ et donc que $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe.
Par une technique analogue, on montre bien que si $c \in [a, b[$, on a bien $f(c) = c$.