Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Les énoncés sont indépendants.

1. Démontrer que n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair.

> Pour montrer une équivalence, on démontre les deux implications réciproques l'une de l'autre.
>
> - n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.
>
>   On utilise les propriétés de l'implication. En particulier, celle-ci est fausse dans l'unique cas où l'hypothèse est vraie et la thèse est fausse.
>
>   On utilise un *raisonnement déductif*. On émet alors l'hypothèse que n est pair.
>
>   Comme n est pair, on peut écrire que $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.
>
>   On obtient donc $n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. Dès lors n^2 est effectivement pair.
>
> - n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair.
>
>   On démontre cette implication à l'aide de sa *contraposée*. En effet, démontrer $P \Rightarrow Q$ revient à démontrer $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
>
>   Dès lors, notre assertion est équivalente à : n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair.
>
>   qui est équivalent à : n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair.
>
>   On résout par déduction comme précédemment

2. Démontrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$)

> On utilise un raisonnement par l'absurde.
>
> Supposons un nombre $a \in \mathbb{K}$ tel que
>
> $$a \times 0 = 1$$
>
> On a $a \times 0 = 1 \Leftrightarrow a \times (0 + 0) = 1$
>
> $$\Leftrightarrow a \times 0 + a \times 0 = 1$$
>
> $$\Leftrightarrow 2 = 1$$

‖ On aboutit à une contradiction, l'hypothèse de départ est absurde. 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{K}$.

Problème 2

Le théorème de Cantor énonce le résultat suivant :

> ***Théorème de Cantor -*** *Pour tout ensemble E fini ou infini, il n'existe pas de bijection entre E et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$.*

1. Montrer qu'il existe une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$.

‖ On a l'injection triviale $\varphi : x \to \{x\}$.

2. On considère la partie $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A = \{x \in E | x \notin \varphi(x)\}$, soit l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à leur propre image par la fonction $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$. Montrer que φ n'est pas surjective puis conclure.

‖ Montrons qu'il n'existe pas de surjection entre E et $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde. On construit pour cela l'ensemble A des éléments de E qui n'appartiennent pas à leur propre image. Question : quels éléments de E donnent A comme image par φ ?

Cet argument utilise une méthode semblable à celle du *paradoxe de Russell.*

On suppose que $\exists a \in E | \varphi(a) = A$, dès lors :

$$a \in A \Rightarrow a \notin \varphi(a) = A$$

ce qui est absurde, car si $a \in A$, par construction de A, il ne appartenir à sa propre image par φ et donc appartenir à A.

De même :

$$a \notin A \Rightarrow a \in \varphi(a) = A$$

ce qui est absurde également. Dans les deux cas, A n'a pas d'antécédent. On a réussi à construire un ensemble qui n'a pas d'antécédent, dès lors, φ n'est pas surjective et donc, il n'existe pas de bijection entre E (vide, fini, ou infini) et $\mathcal{P}(E)$.

Problème 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle.

1. Écrire en langage mathématique les assertions suivantes :

   (a) (P) : la suite (u_n) est croissante.

   ‖ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

   (b) (Q) : la suite (u_n) est majorée par 2.

‖ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$

2. On suppose (P) et (Q) vraies ; qu'en déduisez-vous pour (u_n) ?

‖ La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente. Mais on ne peut pas affirmer qu'elle converge vers 2, on sait juste dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ tel que $\alpha \leq 2$.

3. On considère l'assertion suivante :

$$(R) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

(a) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

‖ La suite (u_n) converge vers 2.

(b) Donner un exemple de suite réelle vérifiant (R).

‖ On peut donner l'exemple de la suite $u_n = 2$, tout simplement...

(c) Écrire en langage mathématique l'assertion $\neg(R)$.

‖ $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 2| > \varepsilon$

Problème 4

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

‖ La fonction est définie si et seulement si $z - 2i \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 2i$. Soit $D_f = \mathbb{C}\backslash\{2i\}$

2. Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$. En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.

‖ (a) On pose $\Delta = 8 - 6i$

On cherche $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathfrak{Re}(\Delta) = 8 & (1) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 10 & (2) \\ 2xy = \mathfrak{Im}(\Delta) = -6 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } -3 \\ (2) - (1) &\Leftrightarrow 2y^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } -1 \end{aligned}$$

$(3) < 0$ x et y ont un signe différent.

$$\begin{cases} \delta_1 & = 3 - i \\ \delta_2 & = -3 + i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) = 1 + i &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z-2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z-2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow z^2 = (z - 2i)(1 + i) \\ &\Leftrightarrow z^2 = z + iz - 2i + 2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - z(i + 1) + 2i - 2 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant : $\Delta = (i + 1)^2 - 4(2i - 2) = 1 - 1 + 2i - 8i + 8 = 8 - 6i$

On a déjà calculé les racines de ce discriminant. On a deux solutions complexes : $\begin{cases} z_1 & = \frac{(i+1)-(3-i)}{2} = i - 1 \\ z_2 & = \frac{(i+1)+(3-i)}{2} = 2 \end{cases}$

On a alors :

$$f(i - 1) = f(2) = i + 1$$

3. Soit h, un complexe. Discuter selon les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

$f(z) = h \Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = h^2 - 8ih = h(h - 8i)$.

Comme tout nombre complexe, sauf zéro, admet exactement deux racines carrées, h admet deux antécédents par f si et seulement si $h \in \mathbb{C}\backslash\{0, 8i\}$ et une seule et unique sinon.

4. Déterminer $f(D_f)$. La fonction est-elle une application surjective de D_f dans $\mathbb{C}$?

On vient de voir que tout élément $h \in \mathbb{C}$ admet au moins un antécédent par f ce qui signifie que :

$$f(D_f) = \mathbb{C} \ : \ f \text{ est une surjection de } D_f \to \mathbb{C}$$

5. f est-elle une application injective de D_f dans $\mathbb{C}$?

f n'est pas injective, on a vu e particulier que $f(2) = f(i - 1)$.

Problème 5

On rappelle que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des entiers naturels. On note $\text{card}(\mathbb{N}) = \infty$.
$\mathbb{N}$ est un *ensemble infini dénombrable*.
On peut prouver que deux ensembles E et F ont le même cardinal s'il existe une bijection f entre eux.

$$\text{card}(E) = \text{card}(F) \Leftrightarrow \left(\exists f \in F^E | \forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y\right)$$

Par exemple, pour montrer que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$. Il nous suffit de créer la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Montrer que f réalise bien une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.

> Soit $\varphi \in \mathbb{N}$
>
> On sépare les cas où φ est pair et impair
>
> - $f(2\varphi) = -\frac{2\varphi}{2} = -\varphi$
>   Soit $f(2\mathbb{N}) = \{0, -1, -2, ...\}$
> - $f(2\varphi + 1) = \frac{2\varphi+1+1}{2} = \frac{2(\varphi+1)}{2} = \varphi + 1$
>   Soit $f(2\mathbb{N} + 1) = \{1, 2, 3, ...\}$
>
> Dès lors, $\{0, -1, -2, ...\} \cup \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{Z}$. On a bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Montrer que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(E)$

> Il suffit de créer la la fonction $f : \mathbb{N} \to E$ telle que $f(n) = n - 1$.

3. Montrer que $\text{card}(\mathbb{N}^2) = \text{card}(\mathbb{N})$, en déduire que $\text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{N})$.

> On peut créer la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $f(i, j) = i + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$
>
> - Pour montrer qu'elle est injective :
>   On suppose que $\exists(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $\exists(c, d) \in \mathbb{N}^2$ tels que :
> $$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\Leftrightarrow (f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)) \\ &\Leftrightarrow a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = c + \frac{(c+d)(c+d+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow 3(a - c) + (b - d) + (a + b)^2 - (c + d)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(a - c) + (b - d) + (a + b + c + d)(a + b - c - d) = 0 \end{aligned}$$
> $$\text{On a } \begin{cases} a - c & = 0 \\ b - d & = 0 \\ a + b + c + d & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d \\ c & = -d \end{cases}$$
> $$\text{ou } \begin{cases} a - c & = 0 \\ b - d & = 0 \\ a + b - c - d & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
>   Dès lors, on a bien $(a, b) = (c, d)$
> - Pour montrer qu'elle est surjective :
>   On a :
> $f(0, 0) = 0$
> $f(0, 1) = 1$
> $\forall(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* | f(a + 1, b - 1) = f(a, b) + 1$
>
> On peut conclure que f est surjective.
>
> Il résulte que f est bien bijective. L'ensemble des fractions $\mathbb{Q}$ peut être vu tel que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* \right\}$.
> On a vu que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$ et de plus $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}^2)$ et on sait que $\mathbb{Q}$ peut-être vu en terme de couple. Dès lors $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Q})$.

4. Démontrer que $\text{card}(]0,1[) \neq \text{card}(\mathbb{N})$

   On suppose que $]0,1[$ est dénombrable de la même manière que $\mathbb{N}$. Dès lors, on peut construire un ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ qui correspond à tous les nombres possibles qui appartiennent à $]0,1[$.

   Ainsi, chaque ω_i est un nombre tel que $\omega_i = 0, r_{i1}r_{i2}r_{i3}...$ avec $r_j = [\![0, 9]\!]$.

   Par exemple, on peut trouver :

   $\omega_1 = 0,01820...$

   $\omega_2 = 0,45023...$

   $\omega_3 = 0,31415...$

   $\omega_4 = 0,22193...$

   $\omega_5 = 0,16180...$

   $\vdots$

   On construit le nouveau nombre ω' telle que $r'_i = r_{ii} + 1$ (modulo 10). Avec l'exemple précédent, on a :

   $\omega' = 0,16501...$

   Or ω' diffère de tous ω_i d'au moins un r'_i, dès lors $\omega' \notin \Omega$. Ainsi $]0,1[$ n'est pas dénombrable et donc $\text{card}(\mathbb{N}) \neq \text{card}(]0,1[)$.

5. Montrer que $\text{card}(]0,1[) = \text{card}(\mathbb{R})$

   Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. f réalise bien une bijection de $]0,1[$ vers $\mathbb{R}$.

Problème 6

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x+1|$.

   (a) Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ associée à f dans le plan $\mathbb{R}^2$.

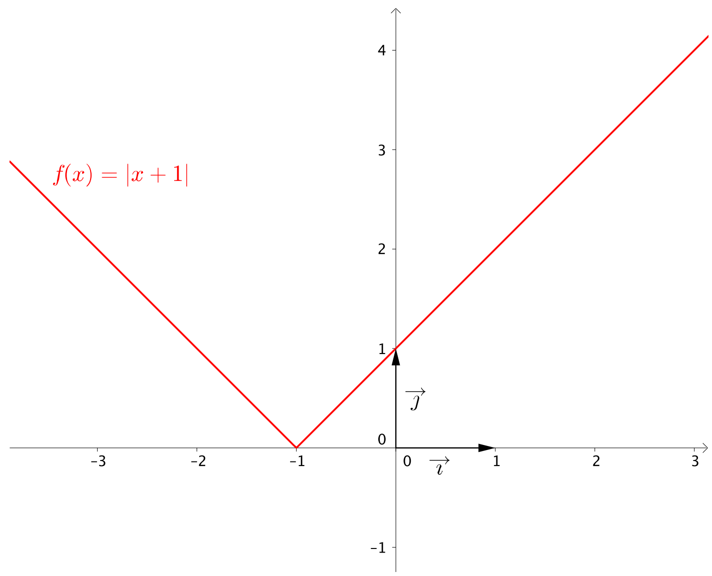

FIGURE 1 : Fonction f dans le plan $\mathbb{R}^2$

(b) Calculer les ensembles $f([-3,2]), f(\{-2\}), f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-5,2])$.

- $f([-3,2]) =$ [0,3]
- $f(\{-2\}) = \{1\}$
- $f^{-1}(\{1\}) = \{-2, 0\}$
- $f^{-1}([-5,2]) =$ [-3,1]

2. L'application$f$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

- L'application n'est pas injective car $f(-2) = f(0) = 1$ et $-2 \neq 0$.
- L'application n'est pas non plus surjective car elle décrit uniquement les nombres positifs. Elle est surjective cependant de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$.
- Elle n'est pas injective donc elle n'est pas bijective.

3. On considère de plus l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = |x-1|$.

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g \circ f(x) = 1$. On rappelle que $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

donc

$g(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$ ou $x = 1$

On a l'ensemble des solutions $\mathscr{S} = \{-3, -1, 1\}$.

(b) Représenter graphiquement l'application $g \circ f$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

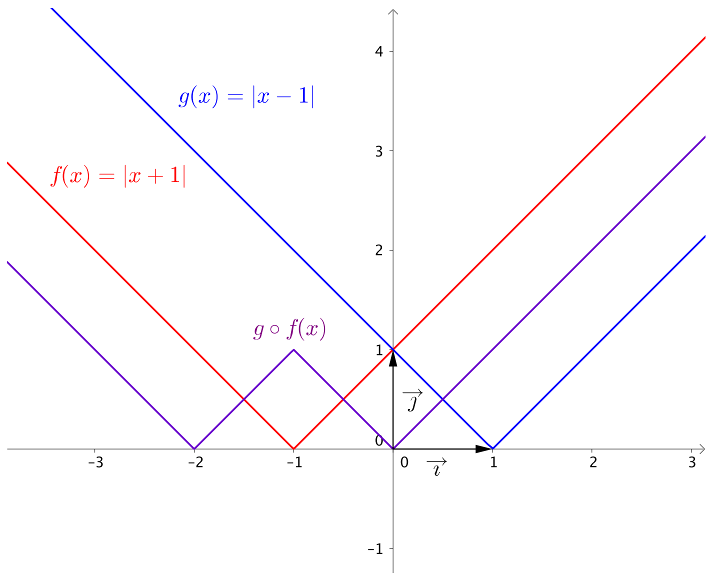

FIGURE 2 : Fonction f dans le plan $\mathbb{R}^2$

Problème 7

Soit l'application $f : E \to F$ définie telle que $f(x) = x^2$.

1. Donner deux ensembles E et F tels que f soit injective mais non surjective.

   Par exemple $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$

2. Donner deux ensembles E et F tels que f soit non injective mais surjective.

   Par exemple $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$

3. Donner deux ensembles E et F tels que f soit ni injective ni surjective.

   Par exemple $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$

4. Donner deux ensembles E et F tels que f soit bijective.

   Par exemple $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$