Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

1. Soient les nombres complexes $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 - i$

   (a) Calculer zz' sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

   $z = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
   $zz' = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi-3\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

   (b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   $zz' = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$
   Par identification de la partie imaginaire et de la partie réelle on a :
   $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\mathfrak{Re}(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
   $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\mathfrak{Im}(zz')}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

   (c) Démontrer la question précédente sans utiliser les nombres complexes.

   On a les formules de trigonométrie qui nous donnent :
   $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
   $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
   En posant $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ on a $= a - b = \frac{\pi}{12}$ dès lors :
   $\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
   $\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

2. Soit $\Delta = 1 + i$.

   (a) Mettre Δ sous forme exponentielle et calculer ses racines.

   $\Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i.$

   - Sous forme exponentielle
     On cherche $\delta = re^{i\varphi}$ avec $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que
     $\delta^2 = r^2e^{i2\varphi} = \Delta = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

On a : $r^2e^{i2\varphi} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} r &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} \\ \varphi &= \frac{\pi}{8}[\pi] \end{cases}$

On a

$$\delta = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{k\pi}{8}}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

- Sous forme algébrique

  On cherche $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

  On a :
  $\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathfrak{Re}(\Delta) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{2} & (2) \\ 2xy = \mathfrak{Im}(\Delta) = 1 & (3) \end{cases}$

  $(1) + (2) \iff 2x^2 = 1 + \sqrt{2} \iff x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

  $(2) - (1) \iff 2y^2 = \sqrt{2} - 1 \iff y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

  $(3) > 0$ x et y sont de même signe.

$$\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

On a le couple solution : $\mathscr{S} = \{\delta, -\delta\}$

(b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a alors : $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{k\pi}{8}} \iff \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = e^{i\frac{k\pi}{8}}$

Comme $e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \iff \cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

Par identification de la partie réelle et imaginaire on a :

$\mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

$\mathfrak{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = \sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

Problème 2

Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^3 + (8 - i)X^2 + (6 + 6i)X - 9 - 9i$

1. Montrer que 3 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

$P(3) = 3^4 - 6 \times 3^3 + (8 - i)3^2 + (6 + 6i)3 - 9 - 9i$

$P(3) = 81 - 162 + 72 - 9i + 18 + 18i - 9 - 9i = 162 - 162 + 18i - 18i = 0$

3 est au moins racine simple, vérifions si 3 est racine double :

$P'(X) = 4X^3 - 18X^2 + 2(8 - i)X + 6 + 6i$

$P'(3) = 108 - 162 + 148 - 6i + 6 + 6i = 0$

3 est au moins racine double, vérifions si 3 est racine triple :

$P''(X) = 12X^2 - 36X + 16 - 2i$

$P''(3) = 16 - 2i \neq 0$

3 est exactement racine double,

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}$. On donnera les racines sous forme exponentielle et algébrique.

$P(X) = (X-3)^2 Q(X) + R(X)$

On pratique la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-3)^2$:

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
X^4 & -6X^3 & +(8-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & X^2 & -6X & +9 \\
\hline
-[X^4 & -6X^3 & +9X^2] & & & X^2 & -1-i & = Q(X) \\
 & & (-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i & & & \\
 & & -[(-1-i)X^2 & +(6+6i)X & -9-9i] & & & \\
 & & & & R(X) = 0 & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}
$$

$P(X) = (X-3)^2(X^2 - 1 - i)$

D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}$ peut être décomposé comme produit de polynômes de degré 1.

On calcule alors les racines de $X^2 - 1 - i$

$X^2 - 1 - i = 0 \Leftrightarrow X^2 = 1 + i$

- Sous forme algébrique :

  Dès lors : $\begin{cases} X_1 = & \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \\ X_2 = & -X_1 \end{cases}$

- Sous forme exponentielle :

  On cherche $X^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

  $\begin{cases} \rho^2 & = \sqrt{2} \\ e^{i2\theta} & = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho & = \sqrt{\sqrt{2}} \text{ car } \rho > 0 \\ \theta & = \frac{\pi}{8}[\pi] \end{cases}$

  On a alors : $\begin{cases} X_1 & = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \\ X_2 & = -X_1 \end{cases}$

  Ainsi : $P(X) = (X-3)^2(X - \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})(X + \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}})$

Problème 3

Soit $a \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme P_a sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}, P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$$

Notre but ici est de trouver a tel que P_a possède trois racines appartenant à $\mathbb{Z}$.
On suppose qu'un tel a existe. Soient X_1, X_2, X_3, les trois racines de P_a avec $X_1 \leq X_2 \leq X_3$.

1. Que valent $X_1 + X_2 + X_3$ et $X_1X_2X_3$?

   Comme P_a est unitaire, on a

   $$P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2 = (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)$$

   On développe : $(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3) = (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3)$
   $\Leftrightarrow (X^2 - XX_2 - XX_1 + X_1X_2)(X - X_3) = X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3$
   $\Leftrightarrow X^3 - X^2X_3 - X^2X_2 + XX_2X_3 - X^2X_1 + XX_1X_3 + XX_1X_2 - X_1X_2X_3 = X^3 - X^2(X^3 + X^2 + X_1) + X(X_2X_3 + X_1X_3 + X_1X_2) - X_1X_2X_3$

   Par identification et unicité de P_a, il découle que $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ et que $X_1X_2X_3 = -2$

2. Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $X_1 < 0$.

   $P_a(0) = 2 = -X_1X_2X_3$. On sait d'ores et déjà que $X_{i\in\{1,2,3\}} \neq 0$. Supposons que $X_1 > 0$, alors, d'après l'énoncé $X_3 \geq X_2 > 0$, mais $X_1X_2X_3 = -2 < 0$. Dès lors, par contraposée, $X_1 < 0$.

3. Déduire de (a) et (b) que $X_1 \leq 0 \leq X_2 \leq X_3 \leq -X_1$ puis trouver les valeurs de X_1, X_2 et X_3.

   Comme $X_1X_2X_3 = -2$ et que l'on sait que $X_1 < 0$, on alors $X_1 < 0 < X_2 \leq X_3$. De plus, on sait que $X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 + X_3 = -X_1$. Comme X_2 est strictement positif, on en déduit que :

   $$X_1 < 0 < X_2 \leq X_3 \leq -X_1$$

   De plus, on sait que $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$. Dès lors, on déduit que :

   $$X_1 = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = X_3 = 1$$

4. Montrer que $P_a'(X_2) = 0$ et en déduire la valeur de a.

   Comme 1 est racine double, on en déduit effectivement que $P_a'(1) = 0$, soit

   $P_a'(X) = 3X^2 - (a^2 + 2a)$

   $P_a'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - (a^2 + 2a) = 0$
   $\Leftrightarrow (a - 1)(a + 3) = 0$

   Comme $a \in \mathbb{N}$, on la seule solution possible est :

   $$a = 1$$

Problème 4

En utilisant la formule d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Linéariser $\cos^3(x)$.

$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{8} = \frac{e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}+e^{-3ix}}{8}$
$\cos^3(x) = \frac{e^{i3x}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8} = \frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+6\cos(x)\right) = \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$

Problème 5

Démontrer que tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un unique inverse z' noté $\frac{1}{z}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

On cherche donc $z' = x' + iy'$ tel que $zz' = 1$.
$(x+iy)(x'+iy') = 1 \Leftrightarrow xx' - yy' + i(xy' + x'y) = 1$

On a donc : $\begin{cases} xy' + x'y & = 0 \\ xx' - yy' & = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' & = -\frac{x'y}{x} \\ xx' + \frac{x'y^2}{x} & = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' & = -\frac{x'y}{x} \\ x'\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right) & = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' & = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ x' & = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$

Dès lors, on a :

$$z' = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

Problème 6

Les énoncés sont indépendants :

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ tel que $|z| = 1$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on le complexe $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ qui est un réel pur ?

   Puisque $|z| = 1$, posons $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$ puisque $z \neq 1$. On a alors
   $\frac{1+z}{1-z} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
   Ainsi,

   $$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = i^n \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n}$$

   Il résulte que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ est un réel pur si et seulement si n est pair.

2. Calculer pour toute valeur de $\theta \in \mathbb{R}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

On a $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k$

Ça commence à ressembler au binôme de Newton.

$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k 1^{n-k} = (1+e^{i\theta})^n = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^n = e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$e^{i\frac{n\theta}{2}} = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

Dès lors $S_n = \mathfrak{Im}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X) = (x-1)P'(X)$.

Le polynôme nul est solution.

Soit P de degré n. Pour déterminer le n on dresse l'équation de son degré : $n = 1 + (n-1)$.

Seulement ici on arrive à une indétermination. On doit résoudre d'une autre façon.

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Dès lors, on cherche les α_i tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i = (x-1) \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i X^{i-1}$$

On a : $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i = \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i X^i - ia_i X^{i-1}$.

Par identification, il vient que :

$\alpha_0 = -\alpha_1$

$\alpha_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2$

$\alpha_2 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$

$\vdots$

$\alpha_i = i\alpha - (i+1)\alpha_{i+1}$

$\vdots$

$\alpha_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1} - n\alpha_n$

$\alpha_n = n\alpha_n$

On a alors $\alpha_n = \alpha_{n-1} = ... = \alpha_2 = 0$

Dès lors $P(X) = \alpha_1 X - \alpha_1$

Soit :

$$P(X) = \alpha_1(X-1)$$

4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

(a) $P(X) = X^3 - 1$

1 est racine évidente $P(X) = (X-1)(X^2+1)$. $P(X)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$
Dans $\mathbb{C}$, on a $(X^2+1) = (X-i)(X+i)$. Dans $\mathbb{C}$, on a $P(X) = (X-1)(X-i)(X+i)$

(b) $P(X) = X^6 + 1$

On revient à chercher les racines $6-ème$ telles que $z^6 = -1$
On a les solutions $e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$ avec $k \in [\![0,5]\!]$.
Dès lors, dans $\mathbb{C}$, on a $P(X) = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{9\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)$
Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}$, on regroupe les paires de racines complexes conjuguées.
Dès lors, dans $\mathbb{C}$, on a $P(X) = (X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X-1)$

(c) $P(X) = X^9 - X^6 + X^3 - 1$

Dès lors, on a dans $\mathbb{R}$, $P(X)$ tel que : $P(X) = (X-1)(X^2+1)^2(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X-1)$
Et dans $\mathbb{C}$:
$P(X) = (X-1)(X-i)(X+i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{9\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)$

5. Donner la division selon les puissances croissantes à l'ordre $k = 4$ (c'est à dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) de $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$ par $B = 1 + X^2 + X^3$.

$1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1+X^2+X^3)(1-X^2-X^4) + X^5(1+2X+X^2)$

1		$+X^3$	$-2X^4$		$+X^6$		|	1	$+X^2$	$+X^3$
$-[1$	$+X^2$	$+X^3]$					|	1	$-X^2$	$-X^4$
	$-X^2$		$-2X^4$		$+X^6$		|			
	$-[-X^2$		$-X^4$	$-X^5]$			|			
			$-X^4$	$+X^5$	$+X^6$		|			
			$-[-X^4$		$-X^6$	$-X^7]$	|			
				X^5	$+2X^6$	$+X^7$	|			

Problème 7

On considère l'équation (E) suivante avec $z \in \mathbb{C}$.

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \qquad (E)$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Montrer que $\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i\tan(\theta)$

On utilise la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On a donc $e^{i2\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2$.
De plus, on sait que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Dès lors : } \frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} &= \frac{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2-\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-2\sin^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\frac{\sin^2(\theta)-2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)+i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\frac{\sin(\theta)-2i\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)+i\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\tan(\theta)\frac{-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} \\ &= i\tan(\theta)\end{aligned}$$

2. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.

On remarque tout d'abord que i n'est pas solution de sorte que pour $z \neq i$, on a bien $1 - iz \neq 0$.

$$\begin{aligned}(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} \in \mathbb{U}_5 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![-2,2]\!], \frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![-2,2]\!], (1+iz)^5 = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz)^5 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![-2,2]\!], z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1\right)} \text{ Car } \forall k \in [\![-2,2]\!], e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![-2,2]\!], z = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les réels $-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right), -\tan\left(\frac{\pi}{5}\right), 0, \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3. Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.

Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(1+iz)^5 &= \binom{5}{0}(iz)^5 + \binom{5}{1}(iz)^4 + \binom{5}{2}(iz)^3 + \binom{5}{3}(iz)^2 + \binom{5}{4}iz + \binom{5}{5} \\ &= iz^5 + 5z^4 - 10iz^3 - 10z^2 + 5iz + 1\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1-iz)^5 = -iz^5 + 5z^4 + 10iz^3 - 10z^2 - 5iz + 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1-iz)^5 = (1+iz)^5 &\Leftrightarrow 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0\end{aligned}$$

On a d'ores et déjà $z = 0$ comme solution, on cherche les solutions du polynôme $z^4 - 10z^2 + 5$.

On pose $Z = z^2$.

$\Delta = 100 - 20 = 80 > 0$. On a deux solutions réelles : $\begin{cases} Z_1 = 5 + 2\sqrt{5} \\ Z_2 = 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

Les deux solutions sont positives et conviennent. On a alors $\begin{cases} z_1 = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ z_2 = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \end{cases}$

On a l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ équivalentes aux valeurs de tan trouvées précédemment $\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}0, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}$.