

Tutorat logique : TD3  
Université François Rabelais  
Département informatique de Blois

*Logique pour l'informatique*

\*  
\* \*

### Problème 1

Soit  $\phi(x)$  une formule de la logique du premier ordre avec une variable libre  $x$ , définie sur un langage du premier ordre  $\mathcal{L}$ .

Démontrer que  $\forall x \cdot \phi(x)$  n'est pas valide si et seulement si  $\exists x \cdot \neg\phi(x)$  est satisfaisable.

### Problème 2

Soit un langage du premier ordre  $\mathcal{L} = \{P\}$  où  $P$  est un symbole de prédicat d'arité 2. Montrer à l'aide de la méthode de résolution que la formule suivante est valide.

$$\neg\exists y \cdot \forall z \cdot (P(z, y) \Leftrightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z, x) \wedge P(x, z))))$$

### Problème 3

On considère les deux formules de la logique des prédicats du premier ordre suivantes :

$$\forall x \cdot [P(x) \Rightarrow \exists y \cdot Q(x, y)] \quad (1) \qquad \exists x \cdot [P(x) \Rightarrow \forall y \cdot Q(x, y)] \quad (2)$$

Donner un modèle pour la formule (1) pour lequel la formule (2) soit fausse.

### Problème 4

Montrer en utilisant le principe de résolution que les raisonnements  $R_i$  suivants sont valides.

1. Soit le raisonnement  $R_1$  :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \forall x \cdot \exists y \cdot P(x, y) \\ \Phi_2 &: \forall z \cdot \forall t \cdot P(z, t) \Rightarrow Q(z) \\ C &: \forall u \cdot Q(u) \end{aligned}$$

2. Soit le raisonnement  $R_2$  :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \forall x \cdot P(x) \Rightarrow P(f(f(x))) \\ \Phi_2 &: \forall x \cdot P(x) \Rightarrow R(f(x)) \\ C &: \forall x \cdot R(x) \Rightarrow P(f(x)) \end{aligned}$$

3. Soit le raisonnement  $R_3$  :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \forall x \cdot P(x) \Rightarrow Q(s(x)) \\ \Phi_2 &: \forall x \cdot Q(x) \Rightarrow P(s(x)) \\ \Phi_3 &: P(A) \\ C &: P(s(s(s(s(A)))))) \end{aligned}$$

**Problème 5**

On se donne un langage du premier ordre  $\mathcal{L} = \{f, P, c\}$  où  $f$  est un symbole de fonction d'arité 1,  $P$  un symbole de prédicat d'arité 2 et  $c$  un symbole constant (d'arité 0). On suppose également que l'on dispose du symbole d'égalité  $=$ . Exprimer les propriétés suivantes en logique du premier ordre.

1. Tout élément et son image par  $f$  sont en relation par  $P$ .
2. La fonction  $f$  coïncide avec la relation  $P$ . Autrement dit, si on voit  $f$  comme une relation binaire, alors elle est égale à  $P$ .
3.  $c$  est le seul élément dont l'image par  $f$  est égale à lui même.
4. Si on suppose que  $P$  est une relation d'ordre, exprimer que  $f$  est monotone (soit croissant, soit décroissant).

**Problème 6**

Soit le langage du premier ordre  $\mathcal{L} = \{R, S\}$  composé de deux prédicats d'arité 2. On considère les deux formules logiques suivantes :

$$\exists x \cdot \forall y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (1) \quad \forall x \cdot \exists y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (2)$$

1. Déterminer une structure  $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$  tel que la valeur de vérité des deux formules soit différente.
2. En modifiant uniquement le domaine  $M$  de  $\mathcal{M}$ , déterminer pour que les deux formules soient vraies.

**Problème 7**

Pour chaque cas, dire si les deux formules atomiques proposées sont unifiables et en donner la résolution lorsque c'est possible.

1.  $A(x, g(x, y))$                        $A(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$
2.  $B(x, f(g(y)), f(x))$                $B(h(t, z), f(z), f(h(y, z)))$
3.  $P(u, g(f(A, b)), u)$                $P(f(x, g(z)), x, f(y, g(B)))$
4.  $P(x, f(x), f(f(x)))$                $P(f(f(y)), y, f(y))$

**Problème 8**

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses puis les démontrer si elles sont vraies, donner un contre-exemple si elles sont fausses.

1.  $\models \forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$
2.  $\models \exists x \cdot \Phi(x) \vee \exists x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \exists x \cdot [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$
3.  $\models \forall x \cdot [\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$
4.  $\models \exists y \cdot \forall x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \forall x \cdot \exists y \cdot \Phi(x, y)$
5.  $\models \forall y \cdot \exists x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \exists x \cdot \forall y \cdot \Phi(x, y)$

**Problème 9**

Soit l'ensemble de formules :

$$\Sigma = \{\exists x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x)), \forall z \cdot \neg((\exists x \cdot \neg G(x)) \Rightarrow \forall y \cdot P(y))\}$$

Transformer l'ensemble  $\Sigma$  en un ensemble  $S$  de clôtures universelles de clauses.