

Tutorat logique : TD4
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

Les énoncés sont indépendants.

1. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_1 = \{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow R(x))\}$$

Et la formule $C = \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow R(x))$. A-t-on $\mathcal{F}_1 \models C$?

2. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_2 = \{\forall x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x))\}$$

Et la formule $C = \exists x \cdot \neg Q(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y)$. A-t-on $\mathcal{F}_2 \models C$?

3. Soient les énoncés suivants :

$$\Psi_1 = \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (F(x, y) \wedge F(y, z)) \Rightarrow G(x, z)$$

$$\Psi_2 = \forall x \cdot \exists y \cdot F(y, x)$$

$$\Psi_3 = \neg \forall x \cdot \exists y \cdot G(y, x)$$

L'ensemble $\mathcal{F}_3 = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est-il cohérent ?

Problème 2

Soient les énoncés suivants Φ_i du raisonnement R :

Φ_1 : Pour tout crime, il y'a un quelqu'un qui l'a commis.

Φ_2 : Il y'a uniquement les gens malhonnêtes qui commettent des crimes.

Φ_3 : Ne sont arrêtés que les gens malhonnêtes.

Φ_4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.

Φ_5 : Il y'a des crimes.

C : Il y'a des gens malhonnêtes non arrêtés.

On définit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{Cr, M, A, C\}$: $Cr(x)$ d'arité 1 vrai si x est un crime, $M(y)$ d'arité 1 vrai si y est malhonnête, $A(y)$ vrai si y est arrêté et $C(x, y)$ d'arité 2 vrai si y a commis le crime x .

1. Représenter en logique des prédicats les énoncés Φ_i et C .
2. Donner la forme de Skolem correspondante aux énoncés Φ_i et C respectifs.
3. A-t-on $\bigcup_{\Phi_i \in R} \Phi_i \models C$? Le montrer par résolution.

Problème 3

1. On définit la suite de Fibonacci $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :
- $$\begin{cases} \mathcal{F}_{n+2} &= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_0 &= 0 \\ \mathcal{F}_1 &= 1 \end{cases}$$

Écrire en Prolog un programme `fib(N,R)` qui calcule le terme $\mathcal{F}_n = R$ pour un rang N donné.

Le programme renverra par exemple :

```
[1] ?-fib(6, R)
R = 8
[2] ?-fib(6, 12)
Failure
```

2. Écrire en Prolog un programme `subst(N, 0, 1, 1')` qui prend une liste `1` en paramètre et retourne une liste `1'` avec tous les éléments `0` remplacés par `N`.

Le programme renverra :

```
[1] ?-subst(new, old, [a, old, b, c, old], R).
R = [a, new, b, c, new]
[2] ?-subst(0, 1, [1, 0, 0, 1], [0 ,0 ,0 ,0]).
Success
```

Problème 4

Soit p , un symbole de prédicat d'arité 2.

1. Écrire une formule ϕ qui traduit que p est une relation symétrique, transitive et que tout élément a a une image par la relation (i.e. tout élément x a au moins une image y telle que $p(x, y)$).
2. Montrer en utilisant la méthode de résolution que p est réflexive.

Rappel : Une relation R est symétrique si pour tout $(d, d') \in R$, on a $(d', d) \in R$. Elle est transitive si pour tout $(d, d') \in R$ et tout $(d', d'') \in R$, on a $(d, d'') \in R$. Enfin, elle est réflexive si tout couple $(d, d) \in R$.

Problème 5

Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
2. Un chat est entré.
3. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean-Yves n'arrive pas à se concentrer.
4. Quelqu'un cite un philosophe qui n'a rien écrit.
5. Il y'a [au moins] un exercice qu'aucun mathématicien ne sait résoudre.

Problème 6

On sait que la logique des prédicats du premier ordre forme une théorie *indécidable*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de vérifier si une formule logique Φ est valide ou non.

On considère le raisonnement suivant :

$$\{\forall x \cdot P(x) \Rightarrow Q(f(x)), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow P(f(x))), P(A)\} \models \forall x \cdot P(x)$$

Peut-on conclure que ce raisonnement est valide ? Si non, essayer de montrer que la conclusion n'est pas une conséquence logique des hypothèses en exhibant un contre-exemple.