

Tutorat mathématiques : TD3
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Déterminer une démonstration des assertions vraies et un contre-exemple dans le cas contraire.

- (a) L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par α est inférieure à 2α .

L'assertion est *vraie*.

Soit $x \in [-1, 1], f(x) \leq \alpha$.

Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-1} f(x)dx &\leq \int_{-1}^{-1} \alpha dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{-1} f(x)dx \leq [x\alpha]_{-1}^{-1} \\ &\Leftrightarrow \int_{-1}^{-1} f(x)dx \leq \alpha - (-\alpha) \\ &\Leftrightarrow \int_{-1}^{-1} f(x)dx \leq 2\alpha \end{aligned}$$

CQFD! ☺

- (b) Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.

L'assertion est *fausse*.

La fonction partie entière $E(x)$ est intégrable sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue.

Toute fonction qui ne comporte pas de "trou" sur son intervalle d'intégration est intégrable.

- (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose un intervalle $I = [-\alpha, \alpha]$. Soit une fonction réelle f définie et intégrable sur I , on suppose que f est impaire. Alors, on peut affirmer que $\int_I f(x)dx = 0$.

L'assertion est *vraie*.

$$\begin{aligned} \int_I f(x)dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx \\ &= \int_{-\alpha}^0 f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \\ &= -\int_{-\alpha}^0 f(-x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \end{aligned}$$

On sait qu'une fonction impaire se traduit par $-f(-x) = f(x)$.

On effectue le changement de variable $x = -y$ dans la première intégrale, dès lors :

$$\frac{dx}{dy} = -1 \Leftrightarrow dx = -dy.$$

De plus,

$$\text{Si } x = -\alpha \rightarrow y = \alpha$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 0$$

Ainsi, on a :

$$\int_{\alpha}^0 f(y)dy + \int_0^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(0) + F(0) - F(\alpha) = 0$$

CQFD! ☺

- (d) Soient F et G , deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R}^* , on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G'(x) = F'(x)$. Alors, on peut dire que $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = F(x) + k$.

L'assertion est *fausse*.

En effet, si on pose $G(x) = 1$ et $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On a bien $x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = F'(x)$ mais il n'existe pas de constante k telle que $G(x) = F(x) + k$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre 1. À quel objet mathématique correspond ce développement limité?

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admette au moins un $DL_1(a)$ est qu'elle soit dérivable en a . En effet, un $DL_1(a)$ peut se traduire comme étant l'équation de la tangente à la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f en a .

3. Donner la définition de l'intégrale au sens de Riemann.

On dit que la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si son intégrale inférieure $\sigma(f)$ est égale à son intégrale supérieure $\Sigma(f)$.

On pose $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$ et le pas δ de l'intervalle tel que $\delta = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{x_k - x_{k-1}\}$. On précise que $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})m_k \text{ où } m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]}(f)$$

$$\Sigma(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})M_k \text{ où } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]}(f)$$

On démontre que $\sigma(f)$ est croissante et $\Sigma(f)$ est décroissante.

De plus, on a naturellement $\sigma(f) \leq \Sigma(f)$ et $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma(f) - \sigma(f) = 0$. On peut donc dire que ces suites sont convergentes vers une même limite R .

Cette valeur commune R s'appelle l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et est notée $\int_b^a f(x)dx$.

Elle est associée à la somme de Riemann $\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(x_k)$. Ainsi

$$\left\| \right. R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) = \int_b^a f(x) dx$$

Problème 2

Soit l'intégrale I définie sur \mathbb{R} telle que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \alpha \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{\beta}{(x^2+2x+2)^2}$.

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\alpha(2x+2)+\beta}{(x^2+2x+2)^2} \\ \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2\alpha x+2\alpha+\beta}{(x^2+2x+2)^2} \end{array} \right.$$

Par identification, on a $\begin{cases} 2\alpha &= 3 \\ 2\alpha + \beta &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{3}{2} \\ \beta &= 1 \end{cases}$

2. Calculer $\frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx$.

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx \text{ On reconnaît la forme } \frac{u'}{u^n} \xrightarrow{f} -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \text{ avec } n=2 \\ \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+2x+2} \end{array} \right.$$

3. Déterminer les réels a et b tels que : $x^2+2x+2 = (x+a)+b^2$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Trouver les réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } x^2+2x+2 = (x+a)+b^2 \text{ revient à rechercher la forme canonique :} \\ x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \text{ On trouve alors } a=b=1. \end{array} \right.$$

4. On considère le changement de variable $u = x+1$.

(a) Montrer que $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On procède au changement de variable } u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1 \\ \frac{dx}{du} = \frac{(u-1)'}{(u)'} \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = 1 \\ \Leftrightarrow dx = du \\ \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ = \int \frac{du}{((u-1)+1)^2+1} \\ = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \end{array} \right.$$

(b) Montrer par une technique que l'on expliquera que : $2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

Pour l'intégration par parties on pose u et v telles que :

$$v' = 1 \rightarrow v = u$$

$$w = \frac{1}{u^2+1} \rightarrow w' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, on a } \int \frac{du}{u^2+1} &= [v.w] - \int v.w' du = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2} du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2} du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2 \int \frac{(u^2+1)-1}{(u^2+1)^2} du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2 \left(\int \frac{(u^2+1)}{(u^2+1)^2} du - \int \frac{1}{(u^2+1)^2} du \right) \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2 \left(\int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int \frac{du}{u^2+1} - 2 \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} - 2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \Leftrightarrow 2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$\text{On retrouve bien } 2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$$

5. En déduire la valeur de I .

Par suite (On considère toute $cte = 0$) :

$$2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \arctan(u) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \arctan(x+1) \right]$$

$$\text{On trouve } I \text{ telle que : } I = \frac{1}{2} \left[\frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{3}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) \right]$$

On pose $X \in [0, +\infty[$, dès lors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx \\ &= I(X) - I(0) \end{aligned}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = \frac{\pi}{4} \text{ et } I(0) = -\frac{3}{4} + \frac{2+\pi}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

Par conséquent, cette intégrale converge vers $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$

Problème 3

Soit l'intégrale I définie telle que : $I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1} dx$

1. Montrer que I est de la forme : $\int_0^1 \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1} + \frac{\gamma}{x^2+x+1} dx$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} dx \end{aligned}$$

Par identification, il vient que $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$

2. Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 1, \text{ On fait un début d'identité remarquable.} \\ & x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. En déduire l'intégrale I et la calculer.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ \text{L'intégrale se compose de deux intégrales :} \\ (1) : & \frac{u'}{u} \xrightarrow{f} \ln|u| \text{ avec ici } u = x^2 + x + 1 \\ (2) : & \frac{u'}{u^2 + \alpha^2} \xrightarrow{f} \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right) \text{ avec ici } u = x + \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (ou } -\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ I &= \left[\ln|x^2 + x + 1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \right]_1^0 \\ &= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \ln(3) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{6\sqrt{3}} \\ &= \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Problème 4

Soit l'intégrale $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$

1. Démontrer que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

$$\begin{aligned} & \text{On utilise la formule d'Euler.} \\ e^{i2x} &= (e^{ix})^2 \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i \sin(x) \cos(x) \\ & \text{On sait que } \sin(x) = \Im(e^{ix}) \text{ par conséquent : } \sin(2x) = \Im(e^{i2x}) = 2 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

2. En posant le changement de variable $u = \frac{x}{2}$, montrer que $\varphi(u) = \int \frac{\tan'(u)}{\tan(u)} du$. On rappelle que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

$$\begin{aligned} & \text{On pose } u = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2u = x, \text{ on a donc : } dx = 2du \\ \varphi(u) &= \int \frac{2}{\sin(2u)} du \\ &= \int \frac{2}{2 \sin(u) \cos(u)} du \\ &= \int \frac{\cos(u)}{\sin(u) \cos^2(u)} du \\ &= \int \frac{1}{\tan(u)} \times \frac{1}{\cos^2(u)} du \\ & \text{On trouve bien } I(x) \text{ de la forme } \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } u'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

3. En déduire la forme de $\varphi(x)$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La primitive d'une fonction de la forme } \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ est } \ln |u(x)| \\ \text{Ainsi : } \varphi(x) = \int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + cte \end{array} \right\|$$

Problème 5

Soient les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} :

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad \text{et} \quad h(x) = e^x$$

1. Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Une condition suffisante pour qu'elles soient intégrables et qu'elles soient continues sur leur inter-} \\ \text{valle d'intégration. Les fonctions ci-dessus sont continues sur tout } \mathbb{R} \text{ et donc, sur tout intervalle} \\ [a, b] \subset \mathbb{R}. \end{array} \right\|$$

2. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 f(x) dx.$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Par définition, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) = \int_b^a f(x) dx. \text{ Dès lors :} \\ \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)}{2n} \\ = \frac{1}{2} \end{array} \right\|$$

(b) $\int_1^2 g(x) dx.$

$$\left\| \begin{array}{l} \int_1^2 g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2} + 2\frac{k}{n}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k \right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(n + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} + (n-1) \right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{n-1}{n} \\ = \frac{7}{3} \end{array} \right\|$$

$$(c) \int_0^x h(t) dt.$$

$$\left\| \begin{aligned} \int_0^x h(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{kx}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \left(\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}\right) \\ \text{On pose } u &= \frac{x}{n}. \text{ ainsi, si } n \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0. \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} u \left(e^u \frac{1-e^x}{1-e^u}\right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} (1-e^x) u \frac{e^u}{1-e^u} \\ &= (1-e^x) \end{aligned} \right\|$$

Problème 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'intégrale définie telle que

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

On a $\forall x \in [0, 1], \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, puis par linéarité de l'intégration, on en déduit que :

$$\left\| \begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned} \right\|$$

Ainsi, on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème des gendarmes, on $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

$$\left\| \begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned} \right\|$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

On pose $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Ainsi, on a $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (I_k + I_{k+1})$

Il vient par télescopage que $S_n = I_0 + (-1)^n I_n$

Dès lors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 + (-1)^n I_n = \ln(2)$