

## Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales*\*  
\* \***Problème 1**

1. Soient les nombres complexes  $z = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z' = 1 - i$ 
  - (a) Calculer  $zz'$  sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
  - (b) En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
  - (c) Démontrer la question précédente sans utiliser les nombres complexes.
2. Soit  $\Delta = 1 + i$ .
  - (a) Mettre  $\Delta$  sous forme exponentielle et calculer ses racines.
  - (b) En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

**Problème 2**Soit le polynôme  $P(X) = X^4 - 6X^3 + (8 - i)X^2 + (6 + 6i)X - 9 - 9i$ 

1. Montrer que 3 est racine de  $P$  et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . On donnera les racines sous forme exponentielle et algébrique.

**Problème 3**Soit  $a \in \mathbb{N}$ . On définit le polynôme  $P_a$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}, P_a(X) = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$$

Notre but ici est de trouver  $a$  tel que  $P_a$  possède trois racines appartenant à  $\mathbb{Z}$ .On suppose qu'un tel  $a$  existe. Soient  $X_1, X_2, X_3$ , les trois racines de  $P_a$  avec  $X_1 \leq X_2 \leq X_3$ .

1. Que valent  $X_1 + X_2 + X_3$  et  $X_1X_2X_3$  ?
2. Calculer  $P_a(0)$  et en déduire que  $X_1 < 0$ .
3. Déduire de 1. et 2. que  $X_1 \leq 0 \leq X_2 \leq X_3 \leq -X_1$  puis trouver les valeurs de  $X_1, X_2$  et  $X_3$ .
4. Montrer que  $P'_a(X_2) = 0$  et en déduire la valeur de  $a$ .

**Problème 4**

En utilisant la formule d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Linéariser  $\cos^3(x)$ .

**Problème 5**

Démontrer que tout nombre complexe  $z \neq 0$  admet un unique inverse  $z'$  noté  $\frac{1}{z}$  tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

**Problème 6**

Les énoncés sont indépendants :

1. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  tel que  $|z| = 1$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$  a-t-on le complexe  $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$  qui est un réel pur ?
2. Calculer pour toute valeur de  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ .
3. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $P(X) = (X-1)P'(X)$ .
4. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  puis  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes suivants :
  - (a)  $P(X) = X^3 - 1$
  - (b)  $P(X) = X^6 + 1$
  - (c)  $P(X) = X^9 - X^6 + X^3 - 1$
5. Donner la division selon les puissances croissantes à l'ordre  $k = 4$  (c'est à dire tel que le reste soit divisible par  $X^{k+1}$ ) de  $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$  par  $B = 1 + X^2 + X^3$ .

**Problème 7**

On considère l'équation (E) suivante avec  $z \in \mathbb{C}$ .

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (E)$$

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  non congru à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ . Montrer que  $\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = i \tan(\theta)$
2. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines 5-ème de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $\tan$ .
3. Développer  $(1 + iz)^5$  et  $(1 - iz)^5$  à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.