

Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**Résoudre les équations et inéquations en fonction de x suivantes dans \mathbb{R} ou dans l'ensemble proposé.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

On calcule le discriminant Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$

$$\sqrt{\Delta} = 2 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1/3, 1\}$.

2. $(2x - 5)^2 = (4x + 7)^2$

On a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Soit : $(2x - 5)^2 - (4x + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5 + 4x + 7)(2x - 5 - 4x - 7) = 0$

$$\Leftrightarrow (6x + 2)(-2x - 12) = 0$$

On résout alors : $\begin{cases} 6x + 2 = 0 \\ -2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -6 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-6, -1/3\}$.

3. $mx + 4 = x + 4m^2$ [discuter la solution selon les valeurs de m]

On groupe les termes selon x dans le premier membre : $mx - x = 4m^4 - 4 \Leftrightarrow x(m - 1) = 4(m^2 - 1)$. On remarque que si $m = 1$, l'équation est $0 = 0$, elle est indéterminée.

Si $m \neq 1$, $x = \frac{4(m^2 - 1)}{m - 1} = \frac{4(m+1)(m-1)}{m-1} = 4(m+1)$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 1 & \text{indétermination} \\ \text{si } m \neq 1 & 4(m+1) \end{array} \right\}$.

4. $\frac{3x-m}{x-3} = m-1$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, discuter la solution selon les valeurs de m]

On chasse le dénominateur :

$3x - m = (x-3)(m-1) \Leftrightarrow x(4-m) = 3-2m$. On remarque que si $m = 4$, l'équation est indéterminée.

Si $m \neq 4$, $x = \frac{3-2m}{4-m}$

Or, l'ensemble donné est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, l'équation $\frac{3-2m}{4-m} = 3$ ne doit pas être satisfaite, soit $m = 9$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 4 \text{ ou } m = 9 & \text{impossible} \\ \text{si } m \neq 4 \text{ et } m \neq 9 & \frac{3-2m}{4-m} \end{array} \right\}$.

5. $(3x-1)^2 > (4x+7)^2$

On écrit :

$(3x-1)^2 - (4x+7)^2 > 0$. On a une différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(3x-1+4x+7)(3x-1-4x-7) > 0 \Leftrightarrow (7x+6)(-x-8) > 0$

C'est un produit de binômes de premier degré, on peut faire un tableau de signes.

x	$-\infty$	-8	$-\frac{6}{7}$	$+\infty$
$-x-8$	+	0	-	-
$7x+6$	-	-	0	+
Résultat	-	0	+	-

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-8, -6/8[$.

6. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4} > \frac{7}{x-3}$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$]

On groupe tous les termes dans le premier membre et on réduit au dénominateur commun :

$$\frac{3(x-4)(x-3)+4(x-2)(x-3)-7(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)} > 0$$

Après réduction du numérateur on obtient :

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)(x-4)}, \text{ on effectue le tableau de signes du quotient.}$$

x	$-\infty$	-4	2	3	4	$+\infty$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Résultat	$+$	0	$-$	$+$	$-$	$+$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]2, 3[\cup]4, +\infty[$.

7. $-1 < |x - 1| - |x| < 1$

On résout chaque partie :
$$\begin{cases} -1 < |x - 1| - |x| & (1) \\ |x - 1| - |x| < 1 & (2) \end{cases}$$

On commence par (1) :

$$-1 < |x - 1| - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 < |x - 1|$$

Si $|x| - 1 < 0$, l'égalité est vraie. On a donc $x \in]-1, 1[$ solution de (1). On résout pour le cas où $|x| - 1$ est positif, soit $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Sous cette condition,

$$\begin{aligned} |x| - 1 < |x - 1| &\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 - |x - 1|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 1 + x - 1)(|x| - 1 - x + 1) < 0 \end{aligned}$$

C'est un produit de binômes de premier degré, on résout en cherchant les signes :

$$(|x| + x - 2) \underbrace{(|x| - x)}_{\forall x, \geq 0} < 0. \text{ On cherche } |x| + x - 2 < 0$$

$$|x| + x - 2 < 0 \Leftrightarrow |x| < 2 - x. \text{ L'égalité n'a de sens que si } 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x. \text{ Soit } x \in]-\infty, 2].$$

Sous cette condition, on a :

$$\begin{aligned} |x| < 2 - x &\Leftrightarrow x^2 < (2 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 < x^2 + 4 - 4x \\ &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{S}_1 =]-\infty, 1[$.

Même méthode pour (2), on trouve $\mathcal{S}_2 =]0, +\infty[$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]0, 1[$

8. $|x + 2| = 2x - 1$

Pour que l'équivalence soit vérifiée lors de la résolution, on impose que $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Sous cette condition, on a : $|x + 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (2x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x + 2 + 2x - 1)(x + 2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(-x + 3) = 0$$

Deux solutions sont possibles, $\frac{1}{3}$ et 3. Or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ne peut être solution.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

9. $\frac{|x|}{|x-1|} - |x| \leq 0$ [dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$]

On factorise par $|x|$, on a :

$$|x| \left(\frac{1}{|x-1|} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x-1|} - 1 \right) \leq 0 \text{ On sait que 0 est solution.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - |x-1|}{|x-1|} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - |x-1| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + x - 1)(1 - x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 - x) \leq 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
$2 - x$	-	-	0	+
Résultat	+	0	-	+

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

10. $-x - 1 = \sqrt{x^2 + 1}$

La racine est bien définie sur l'ensemble des réels car : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.

On cherche les conditions d'équivalence nous permettant de résoudre, soit : $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

On pose alors l'ensemble contrainte $C =]-\infty, -1]$.

Sous cette condition : $x^2 + 1 + 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 0$

Or $0 \notin C$, dès lors $\mathcal{S} = \emptyset$.

11. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

On pose $X = x^2$, dès lors, on a :

$$X^2 - 11X + 18 = 0$$

$$\Delta = 121 - 72 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} X_1 = \frac{11+7}{2} = 9 \\ X_2 = \frac{11-7}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On ramène nos solutions en } x_1, x_2 : & \begin{cases} X_1 = x_1^2 \Leftrightarrow 9 = x_1^2 \\ X_2 = x_2^2 \Leftrightarrow 2 = x_2^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ ou } -3 \\ x_2^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$.

12. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$

On pose $X = e^x$, dès lors, on a :

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 5 > 0, \text{ l'équation a deux solutions : } \begin{cases} X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

$$\text{On ramène nos solutions en } x_1, x_2 : \begin{cases} X_1 = e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \ln(X_1) = \ln(\varphi) \\ X_2 = e^{x_2} \Leftrightarrow x_2 = \ln(X_2) \end{cases} \quad \text{impossible car } -\frac{1}{\varphi} < 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\ln(\varphi)\}$.

13. $|x^2 - x - 1| = 1$

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)^2 = 1^2 & \Leftrightarrow (x^2 - x - 1 - 1)(x^2 - x - 1 + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - x) = 0 \end{aligned}$$

0 et 1 sont racines évidentes.

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

14. $\sqrt{x+1} + x = 1$

On donne le domaine de définition $D = [-1, +\infty[$ validant l'existence de la racine $\sqrt{x+1}$.

$\sqrt{x+1} + x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x$. On établit les conditions d'équivalences nécessaires à la résolution. On cherche donc $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$.

On pose ainsi l'ensemble contrainte $C =]-\infty, 1]$.

Sous cette condition, on a :

$$(\sqrt{x+1})^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2+1-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

Les solutions proposées sont 0 et 3. Or $3 \notin C$.

Cependant $0 \in D$ et $0 \in C$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

15. $\sqrt{x^2 + x - 6} < x + 7$

On calcule le domaine de définition D garantissant l'existence de la racine $\sqrt{x^2 + x - 6}$.

$$x^2 + x - 6 = 0, \text{ on a deux solutions : } \begin{cases} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 2 \end{cases}$$

De plus, on cherche les conditions d'équivalence, soit $x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

On a l'ensemble de définition $D =]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$ et l'ensemble contrainte $C = [-7, +\infty[$.

On note l'ensemble de résolution $R = D \cap C = [-7, -3] \cup [2, +\infty[$.

Sous cette condition, on résout l'inéquation : $\sqrt{x^2 + x - 6} \leq x + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leq x^2 + 49 + 14x$

$$x \geq -\frac{55}{13} \approx -4,23$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = R \cap [-55/13, +\infty[= [-55/13, -3] \cup [2, +\infty[$.

Problème 2

Les énoncés sont indépendants.

1. Simplifier l'écriture des réels suivants.

(a) $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)}$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

$$\begin{aligned} \text{Dès lors : } e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)} &= 3 - \frac{1}{e^{\ln(4)}} \\ &= 3 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right)$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^b) = b \ln(a)$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

$$\begin{aligned}
 \text{Dès lors : } \ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right) &= \ln(e^{2+\ln(8)}) - \ln(e^{3+\ln(4)}) \\
 &= \ln(e^2 \times e^{\ln(8)}) - \ln(e^3 \times e^{\ln(4)}) \\
 &= \ln(e^2) + \ln(e^{\ln(8)}) - [\ln(e^3) + \ln(e^{\ln(4)})] \\
 &= 2 + \ln(8) - [3 + \ln(4)] \\
 &= 2 + 3 \ln(2) - 3 - 2 \ln(2) \\
 &= \ln(2) - 1
 \end{aligned}$$

(c) $e^{2 \ln(2)} + \ln(e^{-3}) + e^{\ln(5)}$

On utilise la propriété supplémentaire :

- $\ln(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 e^{2 \ln(2)} + \ln(e^{-3}) + e^{\ln(5)} &= e^{\ln(4)} + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) + 5 \\
 &= 4 - 3 + 5 = 6
 \end{aligned}$$

(d) $\frac{e}{e^{1+\ln(2)}}$

On considère les formules précédentes.

$$\begin{aligned}
 \frac{e}{e^{1+\ln(2)}} &= \frac{e}{e \times e^{\ln(2)}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

(a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

L'expression n'existe que si $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

On a $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

On a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 - 4x + 4} &= \sqrt{(x-2)^2} \\
 &= |x-2|
 \end{aligned}$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$

La fonction \ln est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs.

La fonction e décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

Dès lors, on a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

On a la propriété suivante :

- $\ln(e) = 1$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) &= \ln(e^{1-x}) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= \ln(e \times e^{-x}) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= \ln(e) - \ln(e^x) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x})$

Même justification que précédemment. On a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) &= \ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) \\ &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) \\ &= x \end{aligned}$$

3. $e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Attention!! Ce n'est pas parce que $e^{\ln(x)} = x$ que l'on a le même domaine de définition pour les deux expressions.

En particulier on a la fonction \ln qui est définie uniquement pour les réels strictement positifs. Les autres expressions sont définies pour sur tout \mathbb{R} . Dès lors, il ici que résulte que $D = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= x - [\ln(2) + \ln(e^x)] - [\ln(1) - \ln(2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Problème 3

Les énoncés sont indépendants.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

On cherche un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
 $= \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$

Par identification, on a : $\Leftrightarrow 1 = ak + a + bk$

$$\Leftrightarrow 1 = k(a+b) + a$$

Par identification toujours, on a $\begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= -1 \\ a &= 1 \end{cases}$

Ainsi, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On pratique un télescope.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\left\| \begin{array}{l} +\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ +\vdots \\ +\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$

2. Simplifier la somme S_n suivante : $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

$$\left\| \begin{array}{l} S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ = \ln\left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \\ = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n}\right) \\ = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ = -\ln(n) \end{array} \right.$$

3. Simplifier le produit P_n suivant : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\left\| \begin{array}{l} P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right) \prod_{k=2}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) \\ = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \\ = \frac{n+1}{2n} \end{array} \right.$$

4. Calculer les doubles sommes suivantes :

(a) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 1$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les sommes doubles s'expriment l'une par rapport à l'autre.} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=0}^n i \\ = \sum_{i=0}^n i \\ = \frac{n(n+1)}{2} \\ = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \right.$$

(b) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i+j)$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La variable } i \text{ est libre par rapport à la deuxième somme.} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i+j) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i i + \sum_{j=0}^i j \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \left(i \sum_{j=0}^i 1 + \sum_{j=0}^i j \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(i(i+1) + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\frac{3}{2} i(i+1) \right) \\
&= \frac{3}{2} \sum_{i=0}^n (i^2 + i) \\
&= \frac{3}{2} \left[\sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \right] \\
&= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
&= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \right] \\
&= \frac{3}{2} \left[\frac{2n(n+1)(n+2)}{6} \right] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

5. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage :

(a) $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

(b) $\sum_{k=0}^n k \times k!$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=0}^n (k+1)k! - k! \\
&= \sum_{k=0}^n (k+1)! - k! \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

(c) $\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$

$$\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}$$

(d) $\sum_{k=0}^n (k+2)2^k$

$$\text{Posons la suite } u_k = (ak+b)2^k \text{ et cherchons } a \text{ et } b \text{ tels que, pour tout entier } k, u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= (a(k+1) + n)2^{k+1} - (ak + b)2^k \\ &= 2^k [2(a(k+1) + b) - (ak + b)] \\ &= (ak + 2a + b)2^k \end{aligned}$$

En prenant $a = 1$ et $b = 0$ on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$. Il résulte que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+2)2^k &= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k \\ &= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)2^k - k2^k \\ &= \sum_{k=0}^n (n+1)2^{n+1} \end{aligned}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Développer $(k+1)^4 - k^4$. En déduire que : $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$.

On développe le triangle de Pascal jusqu'à obtenir la ligne 4, ce qui nous donnera les coefficients de notre identité.

$p \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On a donc :

$$\begin{aligned} (k+1)^4 - k^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4] = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

On effectue un télescopage.

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

Soit en développant :

$$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

(b) En déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$ en fonction de n .

On a :

$$\begin{aligned}
& (n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
& \text{En développant les sommes connues, on obtient :} \\
& (n+1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \\
& \text{Il en résulte que :} \\
& \frac{(n+1)^4 - 1 - [n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n]}{4} = \sum_{k=1}^n k^3 \\
& \text{Soit en simplifiant :} \\
& \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}
\end{aligned}$$

Problème 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres associe :

$$f(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

1. Que vaut $f(3, 0)$? $f(-1, 0)$? $f(2, 4)$?

$$\begin{aligned}
f(3, 0) &= \frac{3+0+|3-0|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\
f(-1, 0) &= \frac{-1+0+|-1-0|}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\
f(2, 4) &= \frac{2+4+|2-4|}{2} = \frac{6+2}{2} = 4
\end{aligned}$$

2. Montrer que $f(x, y) = \max(x, y)$.

On distingue 3 cas :

- Si $x = y$
 $f(x, y) = f(y, y) = f(x, x) = \frac{x+x+|x-x|}{2} = \frac{2x}{2} = x = y = \max(x, y)$
- Si $x < y$
 $|x - y| = y - x$
 $f(x) = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x, y)$
- Si $x > y$
 $|x - y| = x - y$
 $f(x) = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x, y)$

Les trois cas sont vérifiés, dès lors $f(x, y) = \max(x, y)$.

3. Déterminer $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ une fonction $g(x, y, z) = \max(x, y, z)$. On pourra exprimer g à l'aide de f .

$$\parallel \text{ On a } g(x, y, z) = f(f(x, y), z) = \max(x, y, z).$$

Problème 5

Démontrer les propriétés suivantes par récurrence :

1. Somme des entiers au carré.

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On raisonne par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 0$)

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 \text{ et } \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0. \text{ Donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

- Hérité

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $P(n)$ est vraie.

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$ c'est-à-dire, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

La propriété $P(n)$ est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire. Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. Somme alternée des entiers (décomposer selon la parité de n , soit $2n$ et $2n + 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- On commence par démontrer le cas si n est pair.

- Initialisation (pour $n = 0$)

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k k = 1 \times 0 = 0$$

$$\frac{0}{2} = 0$$

$P(0)$ est vraie.

- Hérité

On suppose qu'il existe un entier naturel pair $2n$ tel que $P(2n)$ est vraie.

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = \frac{2(n+1)}{2} = n+1$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k \right) + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) = n + (-1)^{2n+1}(2n+1) + \\ & (-1)^{2n+2}(2n+2) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n - (2n+1) + (2n+2) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n+1 \end{aligned}$$

La propriété $P(2(n+1))$ est vraie.

– Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire pour le cas où n est pair.

Dès lors $P(2n)$ est vraie.

- On poursuit si n est impair.

– Initialisation (pour $n=1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 (-1)^k k &= 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \\ -\frac{2}{2} &= -1 \end{aligned}$$

$P(1)$ est vraie.

– Hérédité

On suppose qu'il existe un entier naturel impair $2n+1$ tel que $P(2n+1)$ est vraie.

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)+1$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -\frac{2(n+1)+1+1}{2} = -(n+2)$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k \right) + (-1)^{2n+2}(2n+2) + (-1)^{2n+3}(2n+3) = -(n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+ \\ & 2) + (-1)^{2n+3}(2n+3) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+1) + (2n+2) - (2n+3) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+2) \end{aligned}$$

La propriété $P(2(n+1)+1)$ est vraie.

– Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n=1$ et est héréditaire pour le cas où n est impair.

Dès lors $P(2n+1)$ est vraie.

La propriété est vérifiée dans le cas où n est pair et impair. Dès lors, elle est vraie pour tout

|| $n \in \mathbb{N}$.

3. Racine itérée (on pensera à utiliser la relation $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}}$$

- Initialisation (pour $n = 1$)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$P(1)$ est vraie.

- Hérédité

On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire, montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n+1 \text{ racines}}$$

On pose $a = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, on sait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$

On utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n \text{ racines}} \right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}_{n+1 \text{ racines}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire. Dès lors $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_{n \text{ racines}}} \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$