Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Analyse

*
* *

Problème 1

À l'aide d'une écriture sous forme de somme des développements limités, démontrer la formule générale d'Euler.

$$\forall x \in \mathbb{R} | e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

On pensera notamment à séparer le développement de e^{ix} en termes pairs et impairs.
On rappelle aussi que : $e^t = 1 + t + ... + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

On reconnait le développement limité du cosinus et du sinus. Il vient alors que :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Problème 2

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre et au point donné.

1. $f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} : DL_2(1)$

   On ne peut pas appliquer le développement directement car on n'est pas en 0.

   On pose pose $h = x - 1 \Leftrightarrow h + 1 = x$

   $DL_2(1) : \sqrt{x} \Leftrightarrow DL_2(0) : \sqrt{h+1} = \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2\right)$

   $DL_2(1) : \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow DL_2(0) : \frac{1}{(h+1)+1} = \frac{1}{h+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{h}{2}+1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon(h))$

   Si $h \to 0$, alors $x \to 1$.

   $$\begin{aligned} DL_2(1) : f_1(h) &= \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{8} - \frac{1}{16}h^2 \end{aligned}$$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{16}h^2 + h^2\varepsilon(h)$

On peut se ramener en x

$DL_2(1) : f_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{16} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$

2. $f_2(x) = \sqrt{x^2+3x+2} + \frac{1}{x} : DL_2(+\infty)$

On pose $\varphi(t) = tf_2\left(\frac{1}{t}\right)$ avec $t = \frac{1}{x}$ et $x \neq 0$

$\varphi(t) = t\left(\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 2} + t\right)$

$= t\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}\left(1+3t+2t^2\right)} + t\right)$

$= \sqrt{2t^2+3t+1} + t^2$

Si $t \to 0$, alors $x \to +\infty$.

$DL_2(0) : \varphi(t) = 1 + \frac{2t^2+3t}{2} + \frac{(2t^2+3t)^2}{8} + t^2\varepsilon(t) + t^2$

$= 1 + \frac{4t^2+3t}{2} + \frac{9t^2+12t^3}{8} + t^2\varepsilon(t)$

$= 1 + \frac{3t}{2} + \frac{25t^2}{8} + \frac{12t^3}{8} + t^3\varepsilon(t)$

On se ramène en x : $\frac{\varphi(t)}{t} = f_2\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = f_2(x)$

$DL_2(+\infty) : f_2(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{25}{8x} + \frac{12}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)}{\arctan(\sin(x))} : \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$

$DL_3(0) : \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

$DL_3(0) : \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

$DL_3(0) : \arctan(x - \frac{x^3}{3!}) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x-\frac{x^3}{3!}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}{1-\frac{x^2}{6}} = 1$

4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} : DL_2(0)$

On sait que $f_4(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$DL_2(0) : f_4(x) = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)}$

$e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}$

Attention ici ! ! ! ! ! Il ne faut pas oublier de ce ramener en 0 !

$DL_2(0) : f_4(x) = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}$

$= e \times e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}$

$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$

Il vient que :

$DL_2(0) : f_4(x) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + x^2\varepsilon(x)\right)$

Problème 3

Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. Calculer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2.

> $D_f = \mathbb{R}^*$
>
> $DL_2(0) : f(x) = \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)-1}$
> $= \frac{x}{x(1+\frac{x}{2}+x\varepsilon_1(x))}$
> $= \frac{1}{1+\frac{x}{2}+x\varepsilon_1(x)}$
> $= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_2(x)$
>
> avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0 \; i \in \{1,2\}$

2. En déduire que la fonction f peut-être prolongée par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.

> $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. La fonction f peut donc bien être prolongée par continuité en posant $\tilde{f}(0) = 1$.

3. Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

> f est dérivable en $a \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$
>
> Ici, $a = 0$ et on a montré que $f(0) = 1$. On a alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-1}{x}$
>
> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}{x}$
> $= \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$

4. Donner l'équation T_0, de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $x = 0$ et la position relative de T_0 par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

> L'équation de la tangente est donnée par les deux premiers termes du développement limité, on a :
>
> $T_0 : y = 1 - \frac{x}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - T_0 = \frac{x^2}{4} \geq 0$, dès lors, $\mathcal{C}$ est toujours au dessus de T_0.

5. Déterminer une asymptote $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et -∞.

> Les asymptotes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de f respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ sont :
>
> $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ alors, $\mathcal{A}_1 : y = 0$
>
> $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -x$ alors, $\mathcal{A}_2 : y = -x$

Problème 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'application :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pensera ici à s'aider de l'unicité du développement limité et des formules de Taylor.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'application $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
La fonction f est de classe C^∞, on peut donc rechercher $f^{(n)}(0), \forall n \in \mathbb{N}$
Pour ceci, on va faire l'inverse de ce que l'on fait d'habitude, on va partir du développement limité en 0 de la fonction et par unicité de ce développement on va en déduire les coefficients des formules de Taylor associés.

$f(x) = x \times \frac{1}{1+x^2} = x(1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^l x^{2l}) = x - x^3 + ... + (-1)^l x^{2l+1}$

Sous la forme d'une série de Maclaurin, on obtient :

$$f(x) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l x^{2l+1}$$

Les formules de Taylor nous donnent les formules suivantes :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Par unicité :

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} (-1)^l & \textbf{si } l = 1 + 2n \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

$n = 1 + 2l \Leftrightarrow l = \frac{n-1}{2}$

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times n! & \textbf{si } n \textbf{ est impair} \\ 0 & \textbf{si } n \textbf{ est pair} \end{cases}$

Problème 5

Donner le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
2. $x \mapsto \ln(1 + x)$.

   On a $\frac{1}{1+x} = 1 - x + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
   Les développements limités sont conservés lors de l'intégration. On en déduit que :
   $$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int (1 - x + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x))\, dx \\ &= \int dx - \int x dx + ... + \int (-1)^n x^n dx + \int x^n \varepsilon(x) dx \\ &= x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
4. $x \mapsto \arctan(x)$.

‖ On suit la même procédure que ci-dessus.

Problème 6

Soit la fonction f définie telle que :

$$f(x) = (3x^2 + 6x - 10)\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de la fonction f.

La partie polynomiale de la fonction ne contraint pas son existence, seul le logarithme est gênant ici. On cherche donc :

f existe $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{x+2} & > 0 \\ x+2 & \neq 0 \end{cases}$

$\frac{x+4}{x+2} > 0$ se traduit par $x+4$ et $x+2$ sont de même signe. On cherche donc :

$\frac{x+4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+4 & > 0 \\ x+2 & > 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x+4 & < 0 \\ x+2 & < 0 \end{cases} \right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x & > -4 \\ x & > -2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x & < -4 \\ x & < -2 \end{cases} \right)$

f existe $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$

$D_f =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$

2. Pour tout $x \neq 0$ on pose $u = \frac{1}{x}$ ainsi que la fonction auxiliaire g telle que : $g(u) = uf\left(\frac{1}{u}\right)$

(a) Expliciter g uniquement en fonction de u.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ on pose $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$ et on considère la fonction g définie par :

$g(u) = uf(\frac{1}{u}) \Leftrightarrow xg(\frac{1}{x}) = f(x)$

$\Leftrightarrow g(u) = u(\frac{3}{u^2} + \frac{6}{u} - 10)\ln\left(\frac{\frac{1}{u}+4}{\frac{1}{u}+2}\right)$

$\Leftrightarrow g(u) = (\frac{3}{u} + 6 - 10u)\ln\left(\frac{1+4u}{1+2u}\right)$

(b) Soit $h(u) = \ln\left(\frac{1+4u}{1+2u}\right)$, donner le $DL_4(0)$ de h. (On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$)

Soit $h(u) = \ln\left(\frac{1+4u}{1+2u}\right) \Leftrightarrow h(u) = \ln(1+4u) - \ln(1+2u)$

$DL_4 : h(u)$, on considèrera $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_i(u) = 0$

$h(u) = \ln(1+4u) - \ln(1+2u)$

$= (4u - \frac{16u^2}{2} + \frac{4^3u^3}{3} - \frac{4^4u^4}{4} + u^4\varepsilon_1(u)) - (2u - \frac{4u^2}{2} + \frac{8u^3}{3} - \frac{16u^4}{4} + u^4\varepsilon_2(u))$

$= (4u - 8u^2 + \frac{64u^3}{3} - 64u^4 + u^4\varepsilon_1(u)) - (2u - 2u^2 + \frac{8u^3}{3} - 4u^4 + u^4\varepsilon_2(u))$

$= 2u - 6u^2 + \frac{56u^3}{3} - 60u^4 + u^4\varepsilon_3(u)$

3. En déduire que :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 | f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

Si $u\to 0$, alors $x\to+\infty$. Ainsi, le $DL_n(0)$: $\frac{1}{u}g(u)$ nous donne un $DL_n(+\infty)$: $f(x)$

On rappelle que : $\frac{g(u)}{u}=\left(\frac{3}{u^2}+\frac{6}{u}-10\right)h(u)$

$\frac{g(u)}{u}=\left(\frac{3}{u^2}+\frac{6}{u}-10\right)\left(2u-6u^2+\frac{56u^3}{3}-60u^4+u^4\varepsilon_3(u)\right)$

$f(x)=(3x^2+6x-10)\left(\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{56}{x^3}-\frac{60}{x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon_3(\frac{1}{x})\right)$

$f(x)=6x-6+\frac{48}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$

4. On considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $\Delta=6x+6$.

   $f(x)-(6x-6)=\frac{48}{x^2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(6x-6)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{48}{x^2}=0$

   On en déduit que l'asymptote Δ de f au voisinage de $+\infty$ est d'équation $\Delta : y=6x-6$, de plus $f(x)-(6x-6)=\frac{48}{x^2}>0$.

   (b) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ quand $x\to+\infty$.

   Soit $x\to+\infty$, alors

   $f(x)-(6x-6)=\frac{48}{x^2}>0$.

   La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan est au dessus de Δ pour $x\to+\infty$.