

Implementacion de la Factorizacion Cholesky con openMP

Aplicacion

Alejandro Nivon¹ Uriel Miranda¹ Hector Corro¹

¹Maestria en Ciencia de Datos
ITAM

MNO - 2018, Mayo 2018

Contenido

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

- 1 Primera Parte
 - Objetivo
 - Factorizacion Cholesky
- 2 Implementacion
 - Algoritmo

Contenido

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

- 1 Primera Parte
 - Objetivo
 - Factorizacion Cholesky
- 2 Implementacion
 - Algoritmo

Introduccion

Motivacion

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

- **Objetivo.**

- Aprovechar las oportunidades creadas o generadas por las tecnologías actuales para la paralelizacion de rutinas del calculo numerico.

Contenido

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

- 1 Primera Parte
 - Objetivo
 - Factorizacion Cholesky
- 2 Implementacion
 - Algoritmo

Factorizacion Cholesky

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

- Para matrices positivas definidas.
- Las matrices positivas definidas pueden ser expresadas de la forma $A = X^T X$ para una matriz X no singular.
- La factorizacion Cholesky es una forma particular de factorizar X , en la que X es la matriz triangular superior con elementos positivos en su diagonal; generalmente es escrito como: $A = R^T R$ o $A = LL^T$ de una matriz definida A , en la que R es una matriz triangular superior con elementos positivos en su diagonal es una herramienta fundamental para su calculo matricial.

Factorizacion Cholesky

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

Lemma 1.1

Sea A positiva semi-definida de rango r

- 1 Existe al menos una matriz triangular superior R con elementos no negativos en su diagonal tal que $A = R^T R$.
- 1 Hay una permutacion Π tal que $\Pi^T A \Pi$ tiene una unica factorizacion cholesky que toma la forma:

$$\Pi^T A \Pi = R^T R, \quad (1)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorizacion Cholesky

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

• Aplicaciones

- La descomposicion de Cholesky se usa principalmente para hallar la solucion numerica de ecuaciones lineales $Ax = b$. Si a es simetrica y positiva definida, entonces se puede solucionar $Ax = b$ calculando primero la descomposicion de Cholesky $A = LL^T$, luego resolviendo $Ly = b$ para y , y finalmente resolviendo $L^T x = y$ para x .

• Ejemplos:

- Minimicos cuadrados lineales
- Simulacion de Monte Carlo
- Filtro de Kalman

Contenido

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones

- 1 Primera Parte
 - Objetivo
 - Factorizacion Cholesky
- 2 Implementacion
 - Algoritmo

Algoritmo

Calculo

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

La Factorizacion Cholesky puede ser calculada por una forma de eliminacion gaussiana que toma ventaja de la simetria y definicion. Iterando (i,j) , elementos en la ecuacion $A = R^T R$ como se ve a continuacion:

$$J = i \quad a_{ii} = \sum_{k=1}^i r_{ki}^2 \quad (2)$$

$$J > i \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^i r_{ki} r_{kj} \quad (3)$$

Algoritmo

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

- **Algoritmo** las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas para producir R columnas a la vez de la siguiente manera:

```
for  $j = 1:n$ 
  for  $i = 1:j - 1$ 
     $r_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}r_{kj})/r_{ii}$ 
  end
   $r_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^2)^{1/2}$ 
end
```

Algoritmo

Implementación
de la
Factorización
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivón, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorización
Cholesky

Implementación
Algoritmo

Conclusiones

Después de investigar diferentes aproximaciones y formas de desarrollar la factorización de Cholesky, así como su implementación, se decidió paralelizar con base en el cálculo de filas. Para esto lo más importante a considerar es el orden en que se realizan los cálculos

- Elementos en la diagonal

$$L_{ij} = \sqrt{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2} \quad (4)$$

- Elementos bajo la diagonal

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) \quad (5)$$

Iniciando por el elemento l_{11} :

Aplicando la frmula para elementos en la diagonal, tenemos:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (6)$$

Para calcular el elemento l_{21} :

$$l_{21} = \sqrt{a_{21}} \quad (7)$$

Por lo cual para cada elemento de la columna $j=1$ no requiere dependencia de ningn otro elemento, por lo cual se puede realizar en paralelo.

Siguiendo con esa linea para calcular el elemento l_{32}

$$l_{32} = \frac{1}{l_{33}} (a_{32} - l_{31} l_{21}) \quad (8)$$

Comparamos con el calculo del elemento l_{42} :

$$l_{42} = \frac{1}{l_{44}} (a_{42} - l_{41} l_{21}) \quad (9)$$

La dependencia de elementos de la matriz L para los dos elementos de la misma columna es:

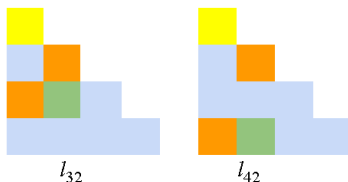
Algoritmo

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo
Conclusiones



Los colores en este caso tienen los siguientes distintivos:

- Verde: El elemento que se esta calculando.
- Naranja: Los elementos de los que depende directamente el elemento calculado.
- Amarillo: Los elementos de los que depende indirectamente el elemento calculado.

Algoritmo

Paso a paso

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

El algoritmo para el calculo en paralelo sera:

- 1 Se calcula el elemento de la diagonal l_{kk} .
- 2 Se calculan en paralelo los elementos para cada i con la j fija.
- 3 Se repite para toda $k \leq n$ donde n es la dimension de la matriz, dado que es simetrica tendremos matrices de $n \times n$.

Ejemplo grafico

En el primer punto el calculo depende unicamente de los elementos de la fila k , en una matriz de $n = 5$ el orden de calculo sera:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---



El orden es de $1 \rightarrow 5$ y empezando por el elemento en verde, siendo los elementos en azul ,para cada columna, los que se podran calcular en paralelo.

OpenMP

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

Ventajas de OpenMP

- Paralelizar for-loops secuenciales de forma simple
- Paralelizacion de tareas y sincronizacion explicita de threads
- Permite una paralelizacion del codigo secuencial de forma paulatina (incremental parallelism)

- 1 Se diseno y programo en R un script que genera matrices para su posterior implementacion de la Factorizacion Cholesky en C.
 - El nombre del archivo que contiene el script es **matriz.r**.
 - Se ejecuta con el comando: python **matriz.r n**, en el cual se debe sustituir **n** por la dimension de la matriz cuadrada positiva definida a generar.
 - El resultado se almacenara en el archivo **matrizSPD.txt** en una sola columna, para despues ser el insumo del algoritmo de factorizacion de cholesky con **chlesky_final.c**.

Programacion

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

- El script **cholesky_final.out** realizara mediante standar input la ingesta de los elementos de la matriz y posteriormente imprimir la matriz factor en el archivo: **fact.txt**. Se dejan los archivos .txt como ejemplo con matrices de dimensin 20x20.
- Por ultimo los scripts **cholesky_1.c** y **chol_seq.c** son ejemplos de aplicaciones de matrices pequenas en el algoritmo de la factorizacion cholesky tanto secuencial como en paralelo con tiempos de ejecucion y matrices introducidas a mano en el script.

Conclusiones

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Primera Parte
Objetivo
Factorizacion
Cholesky

Implementacion
Algoritmo

Conclusiones

- The **first main message** of your talk in one or two lines.
- The **second main message** of your talk in one or two lines.
- Perhaps a **third message**, but not more than that.
- Outlook
 - Something you haven't solved.
 - Something else you haven't solved.

Referencias I

Implementacion
de la
Factorizacion
Cholesky con
openMP

Alejandro
Nivon, Uriel
Miranda,
Hector Corro

Appendix
Referencias



A. Author.

Handbook of Everything.

Some Press, 1990.



S. Someone.

On this and that.

Journal of This and That, 2(1):50–100, 2000.