Raíces de Ecuaciones

Iteración de punto fijo

Este pertenece a los métodos abiertos, ya que requiere de un solo valor de x, o de un par de ellos, pero que no necesariamente encierran a la raíz, por lo que algunas veces divergen o se alejan de la raíz, a medida que crece el número de iteraciones.

Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos que usan intervalos, los métodos abiertos emplean una fórmula que predice una aproximación a la raíz.

Tal formula se puede desarrollar re-arreglando la ecuación f(x)=0, de tal forma que “x” quede del lado izquierdo de la ecuación x=g(x) (ecuación 1).

Esta transformación se lleva a cabo mediante operaciones algebraicas o simplemente agregando una x a cada lado de la ecuación original:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

ó

$$sen(x) = 0$$

$$sen(x) + x = x$$

La ventaja de la ecuación 1 es que proporciona una fórmula para predecir un valor de x en función de x, por lo que se le puede dar una aproximación inicial a la raíz x_i y la ecuación 1, se puede usar para obtener una nueva aproximación x_{i+1}, expresada:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

El error aproximado se obtiene como:

$$E_a = |\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}| * 100\%$$

Ejemplo:

Ejemplo: Utilizando iteración de punto fijo localice la raíz de:

$f(x) = e^{-x} - x; \quad x_0 = 0$ con Es < 1.5%

Solución:

$$x = e^{-x} - x + x$$
$$x_{i+1} = e^{-x}$$

Iteración	x_i	$\varepsilon_a\%$
0	0	-
1	1	100%
2	0.3678	171.88%
3	0.6922	46.86%
4	0.5004	38.44%
5	0.6062	17.45%
6	0.5453	11.17%
7	0.5796	5.91%
8	0.5601	3.48%
9	0.5711	1.93%
10	0.5648	1.103%

NOTA:

Se dice que la iteración de punto fijo es linealmente convergente ya que cuando el método converge el error es casi proporcional y menor al paso anterior.

Método gráfico de 2 curvas

Este consiste en separar la ecuación f(x)=0 en 2 partes:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

resultando 2 ecuaciones

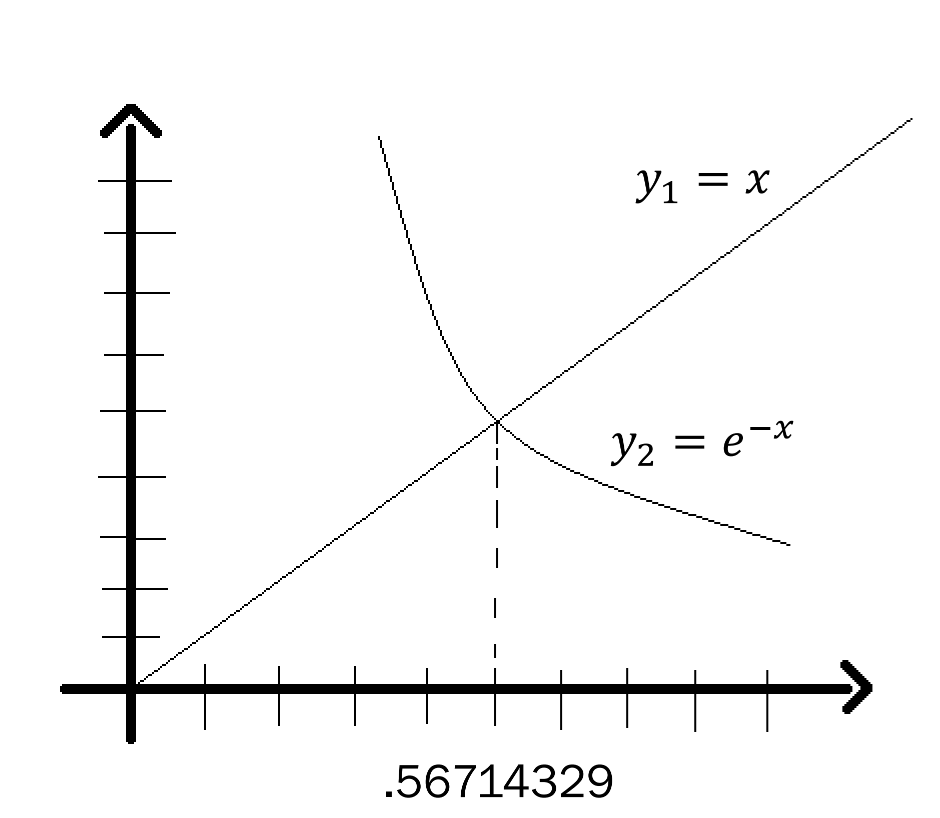
$y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$,

estas se pueden graficar por separado. Los valores de x correspondientes a las intersecciones representan las raíces de f(x)=0

Ejemplo

Sepárese la ecuación $f(x) = e^{-x} - x$ en 2 partes y determínese su raíz gráficamente

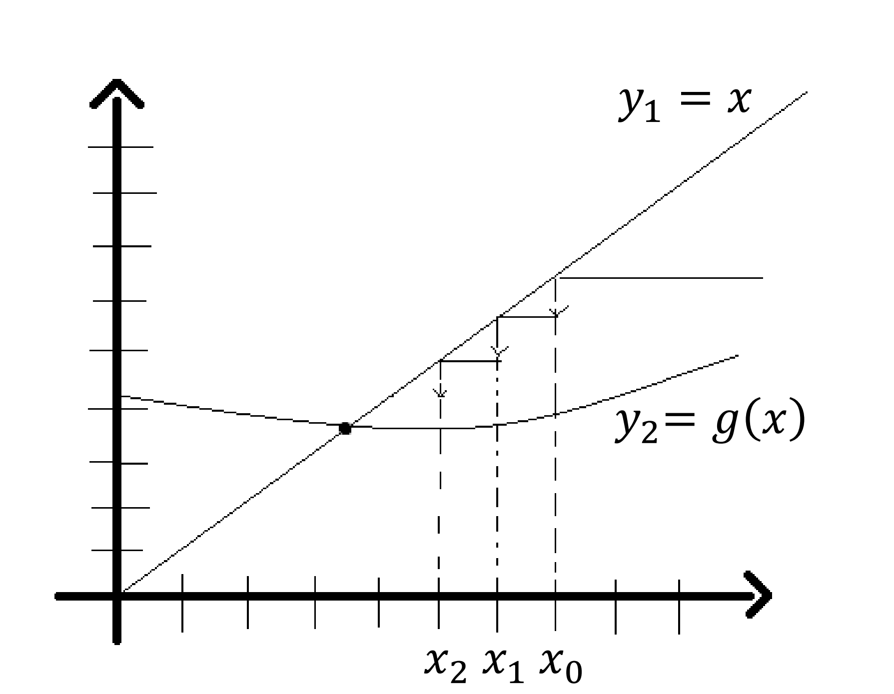
→Gráfica



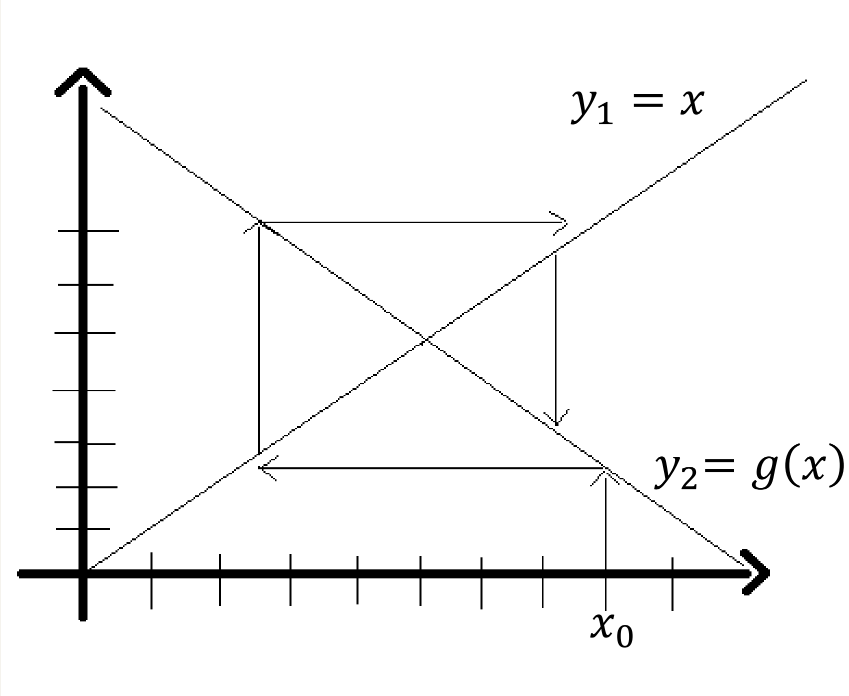
x	y_1	y_2
0	0	1
.2	.2	.81873
.4	.4	.67032
.6	.6	.54881
.8	.8	.44932
1	1	.36787

El método de las 2 curvas se puede usar para ilustrar la convergencia y divergencia de la iteración de punto fijo.
En primer lugar, $x = g(x)$ se puede expresar como un par de ecuaciones $y_1 = x$ y $y_2 = g(x)$.

Estas 2 ecuaciones se pueden graficar por separado, las raíces de $f(x) = 0$ son iguales al valor de la abscisa en la intersección de las 2 curvas



CONVERGENCIA

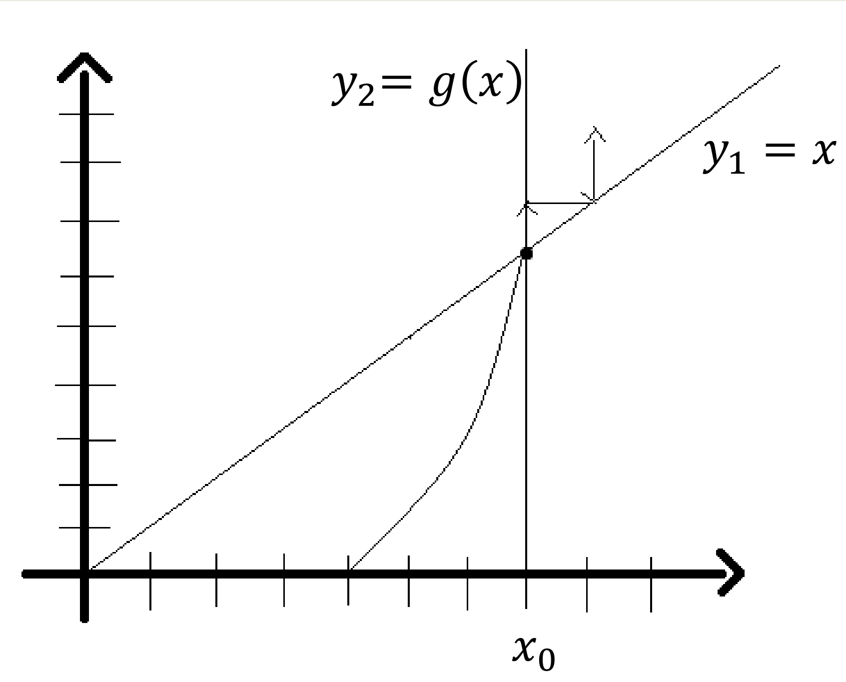


PATRÓN MONÓTONO

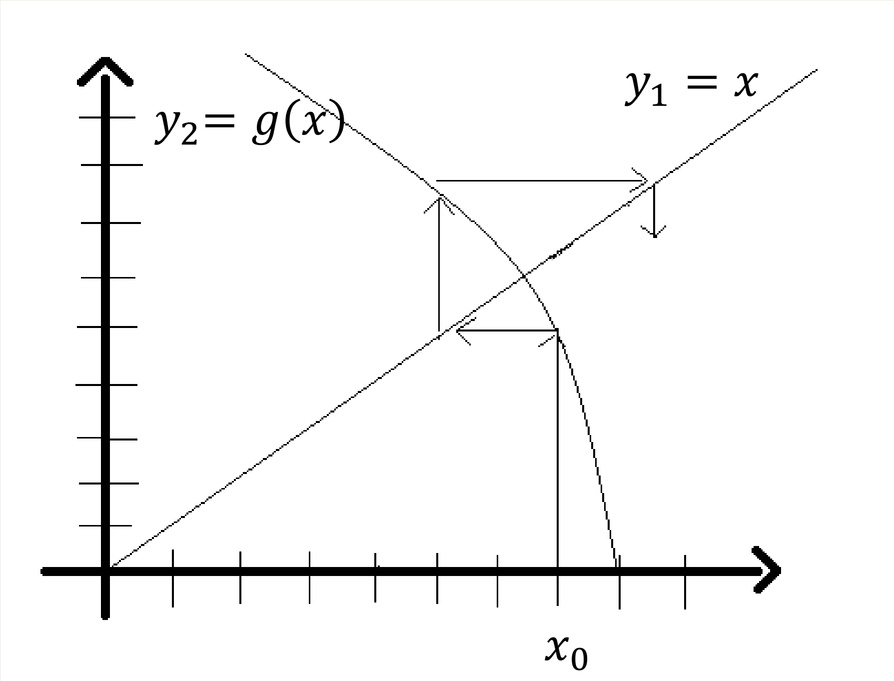
PATRÓN OSCILATORIO

PATRÓN MONÓTONO

PATRÓN OSCILATORIO



DIVERGENCIA

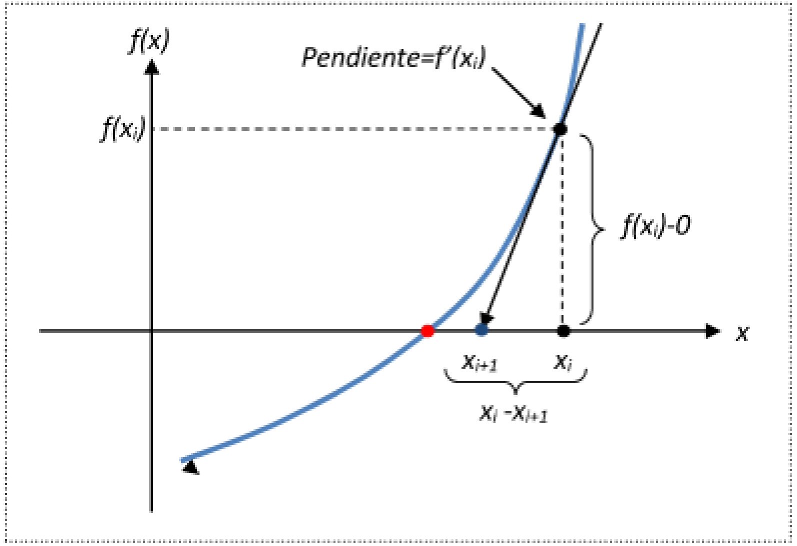


La convergencia se obtiene cuando

$$|g'(x)| < 1$$

Newton – Raphson

Es uno de los métodos más utilizados. Si el valor inicial de la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(x_i, f(x_i))$. El punto donde la tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada a la raíz.

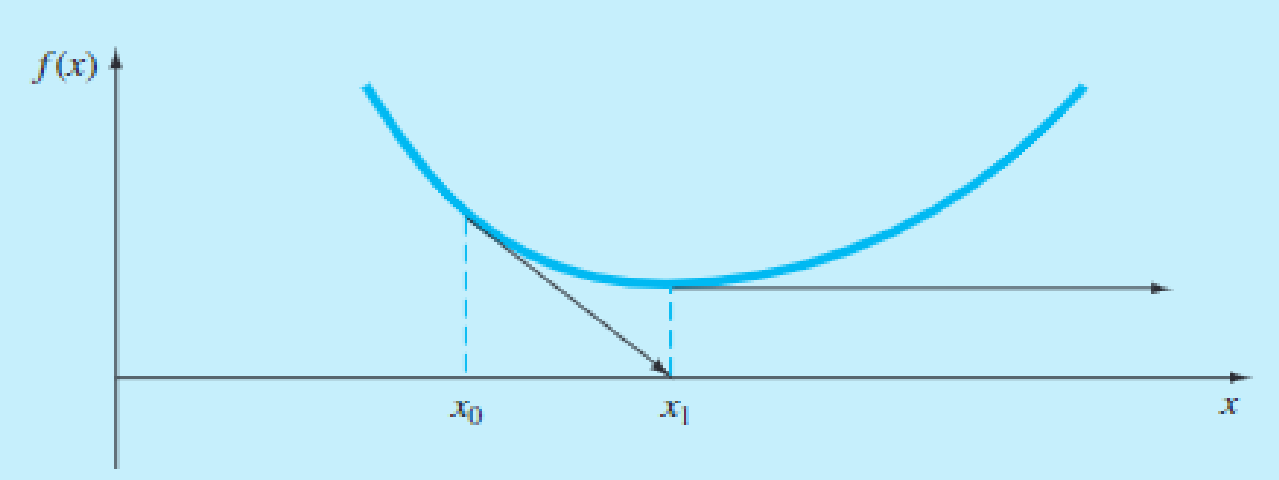


$$f'(x) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{(i+1)}}$$

Reordenando:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Este es uno de los métodos más poderosos y conocidos para solucionar problemas, es muy rápido, si hay mas de un cero no converge, $f'(x) = 0$, habría una división entre cero, gráficamente la solución se dispara horizontalmente y no toca el eje de las x´s.



Criterio de convergencia

$$\frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} < 1$$

Ejemplo:

1) Calcular la raíz de f(x)

$$f(x) = e^{-x} - x; \qquad\qquad x_0 = 0$$

Si no hay valor inicial, lo suponemos

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Iteración	x_i	E_a%
0	0	-
1	0.5	100%
2	0.566311	11%
3	0.567143	0.14%
4	**0.567143**	**0%**

2) Calcular la raíz de f(x).

$f(x) = 3x^2 - e^x$

$f'(x) = 6x - e^x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{3{x_i}^2 - e^{x_i}}{6x_i - e^{x_i}}$$

Iteración	x_i	E_a%
0	1	-
1	0.914155	9%
2	0.910017	0.45%
3	0.91	0.0002%
4	**0.91**	**0%**

Bisección (Bolzano)

Este utiliza intervalos y es conocido también como Bolzano, es un método de búsqueda incremental donde el intervalo se divide siempre en 2. Si la función cambia de signo, sobre un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina, situándola en el punto medio del subintervalo, dentro del cual, ocurre un cambio de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Algoritmo:

Paso 1: Seleccione los valores iniciales x_1 y x_u de tal forma que la función cambie de signo sobre el intervalo. Esto se verifica, asegurándose de que $f(x_1) * f(x_u) < 0$.

Paso 2: La primera aproximación a la raíz x_r, se determina como:

$$x_r = \frac{x_1 + x_u}{2}$$

Paso 3: Realícense las siguientes evaluaciones y determínese en que subintervalo cae la raíz.

A) Si $f(x_1) * f(x_r) < 0$, la raíz se encuentra dentro del 1er subintervalo, por lo tanto, $x_u = x_r$ y se continua en el paso 4.

B) Si $f(x_1) * f(x_r) > 0$, la raíz se encuentra dentro del 2do subintervalo, por lo tanto, $x_1 = x_r$ y se continua en el paso 4.

C) Si $f(x_1) * f(x_r) = 0$, la raíz es igual a x_r y se terminan los cálculos.

Paso 4: Calcúlese una nueva aproximación a la raíz mediante x_r:

$$x_r = \frac{x_1 + x_u}{2}$$

Paso 5: Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así, entonces los cálculos terminan, de otra manera regresa al paso 3. El método termina cuando el error aproximado < error deseado.

Ejemplo:

$f(x) = e^{-x} - x$

Selecciona el intervalo: $x_1 = 0, x_u = 1$
$x_1 = 0, x_u = 1 \rightarrow\ Encierra\ a\ la\ raíz$

1era aproximación

$$x_r = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$f(x_1) \cdot f(x_r) = f(0) * f(0.5)$
$++ > 0$

$\therefore$ consideramos $x_u = 1$ y ahora, $x_1 = 0.5$

$$E_v = \left|\frac{0.56714329 - 0.5}{0.56714329}\right| 100\% = 11.8\%$$

$$x_r = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

$$E_v = \left|\frac{0.56714329 - 0.75}{0.56714329}\right| 100\% = 32.24\%$$

$$f(x_1) \cdot f(x_r) = f(0.5) * f(0.75)$$

$$+ \ - < 0$$

$$\therefore x_1 = 0.5 \ \ x_u = 0.75$$

$$x_r = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

$$E_v = \left|\frac{0.56714329 - 0.625}{0.56714329}\right| 100\% = 10.2\%$$

$$f(x_1) * f(x_r) = f(0.5) * f(0.625)$$

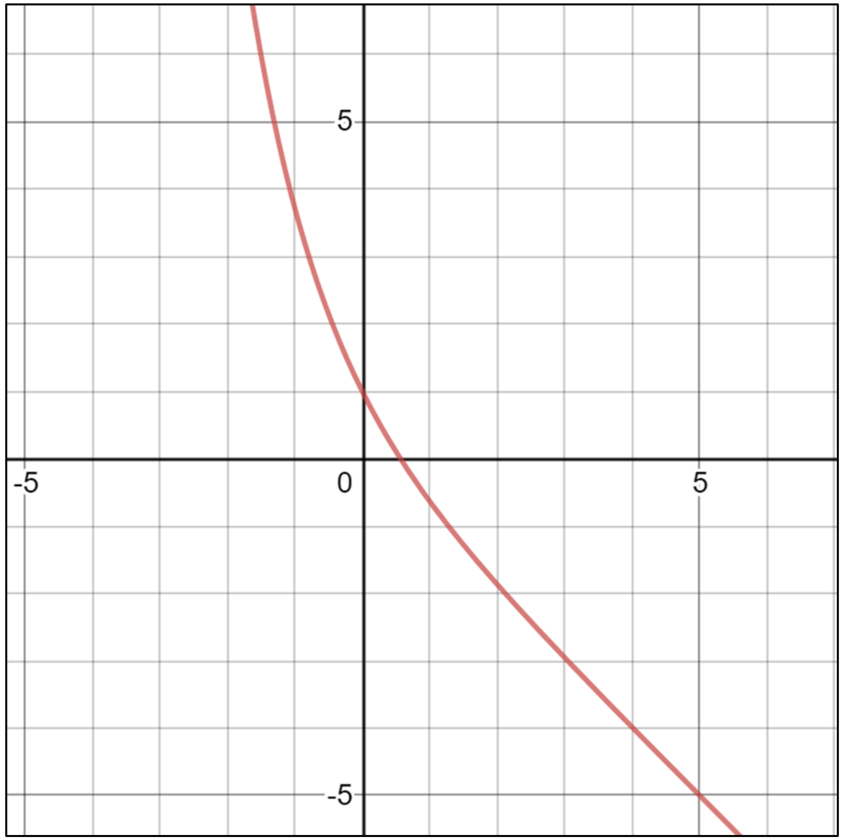
$$+ - < 0$$

$$\therefore x_1 = 0.5 \ \ x_u = 0.625$$

$$x_r = \frac{0.5 + 0.625}{2} = \underline{\mathbf{0.5625}}$$

$$E_v = \left|\frac{0.56714329 - 0.5625}{0.56714329}\right| 100\% = \underline{\mathbf{0.81\%}}$$

$$\boldsymbol{x = 0.5625\ es\ una\ buena\ aproximaci\acute{o}n}$$



Tarea del tema:

$f(x) = -0.874x^2 + 1.75x + 2.627$
$x_1 = 2.9 \;\; x_u = 3.1$

Resolver hasta obtener un error aproximado menor a 0.5%

Intervalo inicial $x_1 = 2.9 \;\; x_u = 3.1$

$$x_r = \frac{2.9 + 3.1}{2} = 3$$

$f(x_1)f(x_r) = f(2.9)f(3) =$

$++ > 0$

$x_1 = 3 \; x_u = 3.1$

$$x_r = \frac{3 + 3.1}{2} = 3.05$$

$$E_a = \left|\frac{3.05 - 3}{3.05}\right| 100\% = 1.6\%$$

$$f(x_1)f(x_r) = f(2.9)f(3.05) = +- < 0$$

$$x_1 = 3 \; x_u = 3.05$$

$$x_r = \frac{3 + 3.05}{2} = 3.025$$

$$E_a = \left|\frac{3.025 - 3.05}{3.025}\right| 100\% = 0.82\%$$

$$f(x_1)f(x_r) = f(3)f(3.025) = +- < 0$$

$$x_1 = 3 \; x_u = 3.025$$

$$x_r = \frac{3 + 3.025}{2} = 3.0125$$

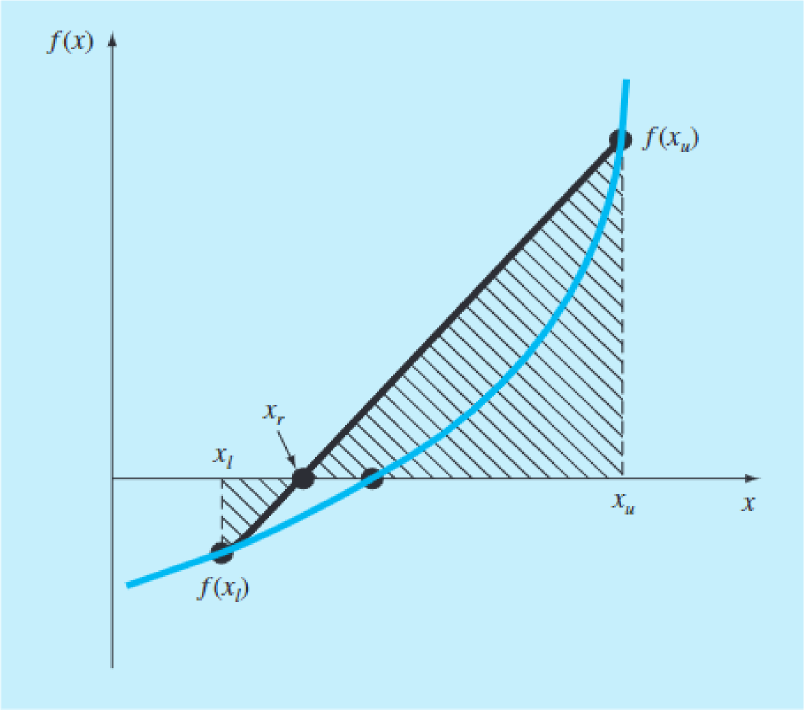
$$E_a = \left|\frac{3.0125 - 3.025}{3.0125}\right| 100\% = 0.4149\% < 0.5\%$$

$$\boldsymbol{x = 3.0125\ es\ una\ buena\ aproximaci\acute{o}n}$$

Regla falsa

Este utiliza intervalos, está basado en una idea para aproximarse en forma más eficiente a la raíz. Este método aprovecha la idea de unir puntos aun línea recta, la intersección de esta línea con el eje x, proporciona una mejor estimación de la raíz. Reemplaza la curva, por una línea recta, da una "posición falsa" de la raíz, de ahí el nombre.

$$\boxed{x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_1 - x_u)}{f(x_1) - f(x_u)}} \qquad Ec._1$$



El valor de x_r calculado con la ecuación 1, reemplaza a uno de los 2 valores x_1 o x_u que produzca un valor de la función que tengo el mismo de signo $f(x_r)$. De esta manera los valores de x_1 y x_u siempre encierran a la raíz. El proceso se repite hasta que la aproximación a la raíz sea adecuada. El algoritmo es idéntico a la de Bisección con excepción de que la $Ec._1$ se usa en los pasos 2 y 4, se usan los mismos criterios para detener los cálculos ($E_a < E_s$).

NOTA

Se tiene que acotar el intervalo de tal manera que al evaluar la función exista una variación en signos, si es muy pequeño, el grado de dificultad aumenta.

Ejemplo:

1. Resuelva:

$f(x) = e^{-x} - x; \quad V_r = 0.56714329$

$x_1 = 0 \qquad x_u = 1$

$f(0) = 1 \quad f(1) = -0.6321$

$$x_r = 1 - \frac{-0.6321(0-1)}{1-(-0.6321)} = 0.6127$$

$$E_v = \left|\frac{0.567142329 - 0.6127}{0.567142329}\right|(100\%) = 8\%$$

$f(x_1)f(x_r) = f(0)f(0.6127) = + - < 0$

$x_1 = 0 \qquad x_u = 0.6127$
$f(0) = 1 \quad f(0.6127) = -0.0708$

$$x_r = 0.6127 - \frac{-0.0708(0 - 0.6127)}{1 - (-0.0708)} = 0.5721$$

$$E_v = \left|\frac{0.567142329 - 0.5721}{0.567142329}\right|(100\%) = \underline{\mathbf{0.87\%}}$$

X = 0.5721 es una buena aproximación

$$E_a = \left|\frac{0.5721 - 0.6127}{0.5721}\right|(100\%) = 7.08\%$$

Newton-Raphson mejorado

Las raíces múltiples ofrecen muchas dificultades, el hecho de que la función no cambia de signo en una raíz de multiplicidad par, impide el uso de los métodos confiables que usan intervalos (bisección y regla falsa). Los métodos abiertos tienen la limitación de que pueden divergir (iteración de punto fijo, Newton-Raphson). Por su parte el método de Newton-Raphson, ya que contiene derivadas en el denominador de su fórmula, provoca una división entre 0, cuando la solución se acerca a la raíz.

Por todo lo anterior, se ha demostrado que si se verifica f(x) contra 0, dentro del programa. Entonces, los cálculos, se pueden terminar antes de que f'(x) llegue a 0.

El método de Newton-Raphson converge en forma lineal, en vez de cuadrática, cuando hay raíces múltiples, por lo que se han hecho varios cambios para solucionar este problema y así retorne su convergencia cuadrática, obteniendo una nueva forma mejorada o modificada.

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}}$$

Ejercicio:

1) Resuelva:

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3;\ x_0 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$

$f''(x) = 6x - 10$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{({x_i}^3 - 5{x_i}^2 + 7x_i - 3)(3{x_i}^2 - 10x_i + 7)}{(3{x_i}^2 - 10x_i + 7)^2 - ({x_i}^3 - 5{x_i}^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

Iteración	x_i	E_a
0	0	0
1	1.105263	100%
2	1.003081	10.18%
3	1.000002	0.3%

Birge-Vieta

Este se usa para obtener raíces reales, se tiene un polinomio de la siguiente forma $P(X) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Se usa una aproximación estimada de $x_i = \frac{-a_n}{a_{n-1}}$. Se realizan los siguientes cálculos:

$a_1 = P_1 - x_i \quad \rightarrow \quad P_1 = a_1 + x_i$

$a_2 = P_2 - P_1x_i \quad \rightarrow \quad P_2 = a_2 + P_1x_i$

$a_3 = P_3 - P_2x_i \quad \rightarrow \quad P_3 = a_3 + P_2x_i$

…

$a_k = P_k - P_{k-1}x_i \quad \rightarrow \quad P_k = a_k + P_{k-1}x_i$

…

$a_{n-1} = P_{n-1} - P_{n-2}x_i \quad \rightarrow \quad P_{n-1} = a_{n-1} + P_{n-2}x_i$

…

$a_n = P_n - P_{n-1}x_i \quad \rightarrow \quad P_n = a_n + P_{n-1}x_i$

$$\boxed{\begin{gathered} P_i = a_i + x_i \\ P_k = a_k + P_{k-1}x_i; (k = 2, \ldots n) \end{gathered}}$$

$$P_1 = \overline{P_2} - x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_2} = P_1 + x_i = \overline{P_1} + P_1 x_i$$
$$P_2 = \overline{P_3} - \overline{P_2} x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_3} = P_2 + \overline{P_2} x_i$$
$$P_3 = \overline{P_4} - \overline{P_3} x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_4} = P_3 + \overline{P_3} x_i$$
$$\ldots$$
$$P_{k-1} = \overline{P_k} - \overline{P_{k-1}} x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_k} = P_{k-1} + \overline{P_{k-1}} x_i$$
$$\ldots$$
$$P_{n-2} = \overline{P_{n-1}} - \overline{P_{n-2}} x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_{n-1}} = P_{n-2} + \overline{P_{n-2}} x_i$$
$$\ldots$$
$$P_{n-1} = \overline{P_n} - \overline{P_{n-1}} x_i \quad \rightarrow \quad \overline{P_n} = P_{n-1} + \overline{P_{n-1}} x_i$$

$$\boxed{\begin{gathered} \overline{P_1} = 1 \quad Comienzo \\ \overline{P_k} = P_{k-1} + \overline{P_{k-1}} x_i; (k = 2, \ldots n) \end{gathered}}$$

x_1	1	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
+		x_1	$x_i P_1$	$x_i P_2$	...	$x_i P_{n-3}$	$x_i P_{n-2}$	$x_i P_{n-1}$
=	1	P_1	P_2	P_3	...	P_{n-2}	P_{n-1}	$P_n \approx P_n(x_i)$
+		$x_i \overline{P_1}$	$x_i \overline{P_2}$	$x_i \overline{P_3}$	...	$x_i \overline{P_{n-2}}$	$x_i \overline{P_{n-1}}$	
=	$\overline{P_1}$	$\overline{P_2}$	$\overline{P_3}$	$\overline{P_4}$	...	$\overline{P_{n-1}}$	$\overline{P_n} \approx P_n'(x_i)$	

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P_n(x_i)}{P_n'(x_i)}$$

Ejemplo 1

$$P_3(x) = x^3 - 11x^2 + 32x - 22\,;\;\; x_0 = \frac{-(-22)}{32} = .6875$$

X_0 =.6875	1	-11	32	-22	
+		.6875	-7.0898	17.1257	
	1	-10.3125	24.9101	-4.8742	$= P_3\ (.6875)$
+		.6875	-6.6171		
	1	-9.6250	18.2929		$= P'_3\ (.6875)$

$$x_1 = .6875 - \frac{-4.8742}{18.2929} = .9540$$

X_1 =.9540	1	-11	32	-22	
+		.9540	-9.5838	21.3849	
	1	-10.0460	22.4161	-.6150	$= P_3\ (.9540)$
+		.9540	-8.6737		
	1	-9.0920	13.7423		$= P'_3\ (.9540)$

$$x_2 = .9540 - \frac{-.6150}{13.7423} = .9988$$

X_2 =.9988	1	-11	32	-22	
+		.9988	-9.9892	21.9844	
	1	-10.0012	22.0108	-.0156	$= P_3\ (.9988)$
+		.9988	-8.9916		
	1	-9.0024	13.0196		$= P'_3\ (.9988)$

$$x_3 = .9988 - \frac{-.0156}{13.0196} = 1$$

$X_3 = 1$	1	-11	32	-22	
+		1	-10	22	
	1	-10	22	0	$= P_3\ (1)$

x= 1 es una raíz y se reduce el grado al polinomio

$$P_2(x) = x^2 - 10x + 22 = 0\ ;\ \ x_0 = \frac{-(22)}{-10} = 2.2$$

$X_0 = 2.2$	1	-10	22	
+		2.2	-17.6	
	1	-7.8	4.84	$= P_2\ (2.2)$
+		2.2		
	1	-5.6		$= P'_2\ (2.2)$

$$x_1 = 2.2 - \frac{4.84}{-5.6} = 3.064$$

$X_1 = 3.064$	1	-10	22	
+		3.064	-21.2519	
	1	-6.936	.7480	$= P_2\ (3.064)$
+		3.064		
	1	-3.872		$= P'_2\ (3.064)$

$$x_2 = 3.064 - \frac{.7480}{-3.872} = 3.257$$

$X_2 = 3.257$	1	-10	22	
+		3.257	-21.9616	
	1	-6.7425	.03832	$= P_2\ (3.257)$
+		3.257		
	1	-3.4855		$= P'_2\ (3.257)$

$$x_3 = 3.257 - \frac{.03832}{-3.4855} = 3.267$$

$X_3 = 3.267$	1	-10	22	
+		3.26	-21.9967	
	1	-6.733	.003	$= P_2\ (3.267)$

x – 6.733 = 0

x = 6.733

$$\Rightarrow \quad P_3(x) = (x - 1)(x - 3.267)(x - 6.733)$$

Tarea

$$P_3(x) = x^3 - .5x^2 - 8x + 7.5\ ;\ \ x_0 = \frac{-7.5}{-8} = .9375$$

X_0 =.9375	1	-.5	-8	7.5	
+		.9375	.41015	-7.1154	
	1	.4375	-7.5898	.3846	$= P_3\ (.9375)$
+		.9375	1.2890		
	1	1.375	-6.3008		$= P'_3\ (.9375)$

$$x_1 = .9375 - \frac{.3846}{-6.3008} = .9985$$

X_1 =.9985	1	-.5	-8	7.5	
+		.9985	.4977	-7.4910	
	1	.4985	-7.5023	.009	$= P_3\ (.9985)$

x= .9985 es una raíz y se reduce el grado al polinomio

$$P_2(x) = x^2 + .4985x - 7.5023 = 0\ ;\ \ x_0 = \frac{-(-7.5023)}{.4985} = 15.0497$$

$X_0 = 15.0497$	1	.4985	-7.5023	
+		15.0497	233.9957	
	1	15.5482	226.4934	$= P_2\ (15.0497)$
+		15.0497		
	1	30.5979		$= P'_2\ (15.0497)$

$$x_1 = 15.0497 - \frac{226.4934}{30.5979} = 7.6474$$

X_1 =7.6474	1	.4985	-7.5023	
+		7.6474	62.2949	
	1	8.1459	54.7926	$= P_2\ (7.6474)$
+		7.6474		
	1	15.7933		$= P'_2\ (7.6474)$

$$x_2 = 7.6474 - \frac{54.7926}{15.7933} = 4.1780$$

X_2 =4.1780	1	.4985	-7.5023	
+		4.1780	19.5384	
	1	4.6765	12.0361	$= P_2\ (4.1780)$
+		4.1780		
	1	8.8545		$= P'_2\ (4.1780)$

$$x_3 = 4.1780 - \frac{12.0361}{8.8545} = 2.8186$$

$X_3 = 2.8186$	1	.4985	-7.5023	
+		2.8186	9.3495	
	1	3.3171	1.8472	$= P_2\ (2.8186)$
+		2.8186		
	1	6.1357		$= P'_2\ (2.8186)$

$$x_4 = 2.8186 - \frac{1.8472}{6.1357} = 2.5175$$

$X_4 = 2.5175$	1	.4985	-7.5023	
+		2.5175	7.5927	
	1	3.016	.0904	$= P_2\ (2.5175)$
+		2.5175		
	1	5.5335		$= P'_2\ (2.5175)$

$$x_5 = 2.5175 - \frac{.0904}{5.5335} = 2.5011$$

$X_5 = 2.5011$	1	.4985	-7.5023
+		2.5011	7.5022
	1	2.9996	-.0001

x + 2.9996 = 0

x = -2.9996

$$P_3(x) = (x - .9985)(x - 2.5011)(x + 2.9996)$$