Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones

Método de eliminación gaussiana simple

$Ec. 1 \qquad 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$

$Ec. 2 \qquad 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$

$Ec. 3 \qquad 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$

$(Ec. 1\ normalizada) \qquad x_1 - 0.0333x_2 - 0.0666x_3 = 2.61667$

1.

$$\begin{array}{rr} & 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \\ (Ec. 1\ normalizada \cdot (0.1)) & -(0.1x_1 - 0.00333x_2 - 0.00666x_3 = 0.261667) \\ \hline & 0x_1 + 7.00333x_2 - 0.29334x_3 = -19.561667 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rr} & 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \\ (Ec. 1\ normalizada \cdot (0.3)) & -(0.3x_1 - 0.00999x_2 - 0.01998x_3 = 0.785) \\ \hline & 0x_1 - 0.1900x_2 + 10.019998x_3 = 70.615 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
Ec.1 & 1x_1 - 0.0333x_2 - 0.0666x_3 = 2.61667 \\
Ec.2 & 0x_1 + 7.0033x_2 - 0.29334x_3 = -19.561667 \\
Ec.3 & 0x_1 - 0.1900x_2 + 10.0199x_3 = 70.615
\end{array}
$$

$$(Ec.2\ normalizada) \qquad 0x_1 + x_2 - 0.04188x_3 = -2.79231$$

$$
\left(Ec.2\ normalizada \cdot (-0.19)\right) \qquad
\begin{array}{c}
0x_1 - 0.1900x_2 + 10.019998x_3 = 70.615 \\
\underline{-(0x_1 - 0.1900x_2 + .008x_3 = 0.530)} \\
0x_1 + 0x_2 + 10.01198x_3 = 70.085
\end{array}
$$

$Ec. 1 \qquad x_1 - 0.0333x_2 - 0.0666x_3 = 2.61667$

$Ec. 2 \qquad 0x_1 + x_2 - 0.04188x_3 = -2.79320$

$Ec. 3 \qquad 0x_1 + 0x_2 + 10.01920x_3 = 70.085$

Entonces:

$$\boldsymbol{x_1 = 3}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -2.5}$$

$$\boldsymbol{x_3 = 7}$$

El Método de Eliminación Gaussiana Simple, presenta varias desventajas, tales como:

- Cuando se presenta una división entre cero $(A11) = 0$
- Cuando el coeficiente es muy cercano a 0
- Errores comunes a causa de las cifras significativas a usar (error de redondeo)

Existen técnicas de mejoramiento en las soluciones, tales como:

- Aumentar la cantidad de cifras significativas, para que la solución sea más exacta
- Si el elemento pivotal es cercano a cero y pequeño comparado con los otros elementos, se pueden intercambiar los renglones de tal forma que el elemento mayor sea el pivotal, a esto se le conoce como pivoteo parcial
- Existe el pivoteo total, consiste en intercambiar tanto renglones como columnas, no sucede con frecuencia, ocasiona un cambio de orden de las X´s, aumenta la complejidad

Método de Gauss-Jordan

Este es una variación de eliminación gaussiana simple, la principal diferencia consiste en que el método de Gauss-Jordan cuando se elimina una incógnita no solo se elimina de las ecuaciones siguientes sino de todas las otras ecuaciones.

De esta manera se genera una matriz identidad en vez de una matriz triangular, por lo mismo no se necesita emplear la sustitución hacia atrás para obtener los resultados.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Ejemplo

Ec1 -> $3x1 -0.1x2 -0.2x3 = 7.85$

Ec2 -> $0.1x1 +7x2 -0.3x3 = -19.3$

Ec3 -> $0.3x1 -0.2x2 +10x3 = 71.4$

3	-0.1	-0.2	7.85	<- R1/3
0.1	7	-0.3	-19.3	
0.3	-0.2	10	71.4	

1	-0.0333	-0.0666	2.61668	
0.1	7	-0.3	-19.3	<-R2=R2-(0.1)R1
0.3	-0.2	10	71.4	<-R3=R3-(0.3)R1

Ejemplo

1	-0.0333	-0.0666	2.61668	
0	7.00333	-0.29334	-19.561667	<- R2/7.00333
0	-0.19001	10.01998	70.614999	

1	-0.0333	-0.0666	2.61668	
0	1	-0.0418	-2.7931	
0	-0.19001	10.01998	70.614999	

1	-0.0333	-0.0666	2.61668	<-R1=R1-(-0.0333)R2
0	1	-0.0418	-2.7931	
0	-0.19001	10.01998	70.614999	<-R3=R3-(-0.19001)R2

Ejemplo

1	0	-0.0679	2.523	
0	1	-0.0418	-2.7931	
0	0	10.0120428	70.084211	<-R3/10.0120428

1	0	-0.0679	2.523	<-R1=R1-(-0.0679)R3
0	1	-0.0418	-2.7931	<-R2=R2-(-0.0418)R3
0	0	1	7	

1	0	0	3	**x1 =** 3
0	1	0	-2.5	**x2 =** -2.5
0	0	1	7	**x3 =** 7

Método Gauss – Seidel

Un método iterativo muy utilizado. Supóngase que se da un conjunto de n ecuaciones $Ax = C$ si los elementos de la diagonal principal son diferentes de 0, la 1ra ecuación se puede resolver para x_1, la 2da para x_2,……. lo que lleva:

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \quad (Ec. 1)$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \quad (Ec. 2)$$

$$x_3 = \frac{c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}\, x_n}{a_{33}} \quad (Ec. 3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Se empieza a solucionar tomando las “x” un valor inicial de 0, estos se sustituyen en la ecuación 1, la cual se usa para calcular un nuevo valor de $x_1 = \frac{c_1}{a_{11}}$, luego se sustituye el valor de x_1 con $x_3, \dots, x_n$ aun en 0 en la ecuación 2, con la cual se calcula el valor de x_2, este se repite hasta llegar a la ecuación 4, la cual calcula un nuevo valor de x_n. Enseguida se regresa a la 1ra ecuación y se repite el proceso, hasta que la solución converja bastante cerca de los valores reales. La convergencia se verifica usando:

$$\varepsilon_{a,i} = \left|\frac{(x_i)^j - (x_i)^{j-1}}{(x_i)^j}\right| (100\%) < E_s$$

$\forall i$ en donde j y j-1 denotan la iteración actual y la anterior.

Nota: Este método converge si el coeficiente de la diagonal principal en valor absoluto es mayor que la suma de los coeficientes restantes de la ecuación (diagonalmente dominante).

Ejemplo

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2 + 10x_3 = 71.4$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

- $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

1

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.6166$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.6166) + 0.3(0)}{7} = -2.7945$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.6166) + 0.2(-2.7945)}{10} = 7.0056$$

2

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.7945) + 0.2(7.0056)}{3} = 2.9905$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.9905) + 0.3(7.0056)}{7} = -2.499$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.9905) + 0.2(-2.499\ )}{10} = 7$$

$$E_{a,x_1} = \left|\frac{2.9905 \ - 2.6166}{2.9905}\right| * 100\% = 12.5\%$$

$$E_{a,x_2} = \left|\frac{-2.499 \ - (-2.7945\ )}{-2.499}\right| * 100\% = 11.8\%$$

$$E_{a,x_3} = \left|\frac{7 - 7.0056}{7}\right| * 100\% = 0.076\%$$

Tarea del tema:

2) Resuelva hasta obtener un error < 5%:

$4x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 16$

$1x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 10$

$1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12$

$$x_1 = \frac{16 - 1x_2 - 2x_3}{4}$$

$$x_2 = \frac{10 - 1x_1 - 1x_3}{3}$$

$$x_3 = \frac{12 - 1x_1 - 2x_2}{5}$$

1.

$$x_1 = \frac{16 - 1(0) - 2(0)}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{10 - 1(4) - 1(0)}{3} = 2$$

$$x_3 = \frac{12 - 1(4) - 2(2)}{5} = 0.8$$

2.

$$x_1 = \frac{16 - 1(2) - 2(0.8)}{4} = 3.1$$

$$x_2 = \frac{10 - 1(3.1) - 1(0.8)}{3} = 2.0333$$

$$x_3 = \frac{12 - 1(3.1) - 2(2.0333)}{5} = 0.96668$$

$$E_{a,x_1} = \left|\frac{3.1-4}{3.1}\right|(100\%) = 22.5\%$$

$$E_{a,x_2} = \left|\frac{2.0333-2}{2.0333}\right|(100\%) = 1.64\%$$

$$E_{a,x_3} = \left|\frac{0.96668-0.8}{0.96668}\right|(100\%) = 17.24\%$$

$$x_1 = \frac{16 - 1(2.0333) - 2(0.96668)}{4} = \underline{\mathbf{3.00834}}$$

$$x_2 = \frac{10 - 1(3.00834) - 1(0.96668)}{3} = \underline{\mathbf{2.00832}}$$

$$x_3 = \frac{12 - 1(3.00834) - 2(2.00832)}{5} = \underline{\mathbf{0.995}}$$

$$\varepsilon_{a,x_1} = \left|\frac{3.00834 - 3.1}{3.00834}\right|(100\%) = 3.05\% < 5\%$$

$$\varepsilon_{a,x_2} = \left|\frac{2.00832 - 2.0333}{2.00832}\right|(100\%) = 1.24\% < 5\%$$

$$\varepsilon_{a,x_3} = \left|\frac{0.995 - 0.96668}{0.995}\right|(100\%) = 2.86\% < 5\%$$

Método de montante

Es un método de cálculo matricial cuyas aplicaciones son:

- Obtención de la inversa
- Solución de un sistema de ecuaciones
- Obtención de la adjunta
- Obtención del determinante
- Se aplica el método simplex de programación lineal

Ventajas

- Trabaja con números enteros
- Evita errores por truncamiento

Ejemplo:

Resuelva usando el método montante:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

Pivote anterior = 1

Pivote actual = 2

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -26 \\ 0 & -8 & -6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{matrix}\right|$$

Pivote anterior = 2

Pivote actual = -5

$$\left|\begin{matrix} -5 & 0 & 29 \\ 0 & -5 & -26 \\ 0 & 0 & -89 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 8 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -18 & 8 & -5 \end{matrix}\right|$$

Pivote anterior = -5

Pivote actual = -89

$$\left|\begin{matrix} -89 & 0 & 0 \\ 0 & -89 & 0 \\ 0 & 0 & -89 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 38 & -7 & -29 \\ -31 & -6 & 26 \\ -18 & 8 & -5 \end{matrix}\right|$$

$$\left|\begin{matrix} -89 & 0 & 0 \\ 0 & -89 & 0 \\ 0 & 0 & -89 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 38 & -7 & -29 \\ -31 & -6 & 26 \\ -18 & 8 & -5 \end{matrix}\right|$$

Det=-89

$$\left|\begin{matrix} -38/89 & 7/89 & 29/89 \\ 31/89 & 6/89 & -26/89 \\ 18/89 & -8/89 & 5/89 \end{matrix}\right|$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18$$
$$7x_1 + 8x_2 + 1x_3 = 22$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 33$$

$\therefore$

$$x_1 = 18\left(-\frac{38}{89}\right) + 22\left(\frac{7}{89}\right) + 33\left(\frac{29}{89}\right) = \underline{\mathbf{4.79}}$$

$$x_2 = 18\left(\frac{31}{89}\right) + 22\left(\frac{6}{89}\right) + 33\left(-\frac{26}{89}\right) = \underline{\mathbf{-1.887}}$$

$$x_3 = 18\left(\frac{18}{89}\right) + 22\left(-\frac{8}{89}\right) + 33\left(\frac{5}{89}\right) = \underline{\mathbf{3.516}}$$

Tarea del tema:

Resuelva usando el método montante:

$3x_1 + 6x_2 - x_3 = 25$

$7x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 9$

$-2x_1 - 1x_2 - 1x_3 = -6$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 6 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

Pivote anterior=1

Pivote actual=3

$$\left|\begin{matrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & -45 & 13 \\ 0 & 9 & -5 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}\right|$$

Pivote anterior=3

Pivote actual=-45

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -45 & 0 & -11 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 13 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -9 & -9 & -45 \end{array}\right|$$

Pivote anterior=-45

Pivote actual=36

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 36 & 0 & 0 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 36 & 0 & 3 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 36 & -9 & -9 & -45 \end{array}\right|$$

Pivote anterior=-45

Pivote actual=36

Det=36

$$Inv = \begin{bmatrix} 3/36 & 7/36 & 11/36 \\ 3/36 & -5/36 & -13/36 \\ -9/36 & -9/36 & -45/36 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$x_1 = 25(3/36) + 9(7/36) + -6(11/36) = 2$$
$$x_2 = 25(3/36) + 9(-5/36) + -6(-13/36) = 3$$
$$x_3 = 25(-9/36) + 9(-9/36) + -6(-45/46) = -1$$

$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 3}$$
$$\boldsymbol{x_3 = -1}$$