Laboratorio 5 (Respuestas) - Inferencia Estadística

Estimación puntual pt. 1 - Propiedades de estimadores

Laboratorista: Héctor Lira Talancón

Ago-Dic 2017

1. Si un estimador es consistente en error cuadrático medio, entonces

   a) El estimador converge en probabilidad al parámetro estimado.

   b) El estimador es insesgado.

   c) La varianza del estimador es cero.

   d) Ninguna de las anteriores.

   RESPUESTA

   Un estimador que es consistente en error cuadrático medio cumple que $\lim_{n\to\infty} E[|\hat{\theta}_n - \theta|^2] = 0$. Por teorema, sabemos que si una variable aleatoria $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L^r} \theta$ (converge en media r), entonces $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$. En el caso particular con $r = 2$, hablamos de convergencia en error cuadrático medio.

   Por lo tanto, el inciso a) es correcto.

2. Sean $\hat{p}_1 = \bar{X}_1$ y $\hat{p}_2 = \bar{X}_2$ estimadores de una misma proporción p que se obtuvieron a partir de dos muestras independientes de tamaños n_1 y n_2 de cierta población Bernoulli(p). Considere otro estimador de p dado por $\hat{p} = k\hat{p}_1 + (1-k)\hat{p}_2$. Encontrar el valor de $k \in [0, 1]$, en términos de p, n_1 y n_2 tal que la varianza de $\hat{p}$ sea mínima.

   RESPUESTA

   Primero, encontremos los siguientes valores:

   $Var[\hat{p}_i] = Var[\bar{X}_i] = \frac{1}{n_i^2}\sum_{j=1}^{n_i} Var[X_{i,j}] = \frac{n_i p(1-p)}{n_i^2} = \frac{p(1-p)}{n_i}$, para $i = 1, 2$.

   Ahora,

   $Var[\hat{p}] = Var[k\hat{p}_1 + (1-k)\hat{p}_2] = k^2 Var[\hat{p}_1] + (1-k)^2 Var[\hat{p}_2] = \frac{p(1-p)}{n_1}k^2 + \frac{p(1-p)}{n_2}(1-k)^2$

   Derivando $Var[\hat{p}]$ con respecto a k e igualando a 0 para encontrar los puntos crìticos:

   $\frac{\partial Var[\hat{p}]}{\partial k} = 0$

   $\Rightarrow \frac{2kp(1-p)}{n_1} - \frac{2(1-k)p(1-p)}{n_2} = 0$

   $\Rightarrow \frac{2kp(1-p)}{n_1} = \frac{2(1-k)p(1-p)}{n_2}$

   $\Rightarrow \frac{k}{n_1} = \frac{1-k}{n_2}$

   $\Rightarrow n_2 k = n_1 - n_1 k$

   $\Rightarrow k(n_2 + n_1) = n_1$

   $\Rightarrow k = \frac{n_1}{n_1+n_2}$

3. Sea $T_n(X_1, ..., X_n)$ una sucesión de estimadores del parámetro θ. Se dice que esta sucesión de estimadores es una sucesión de estimadores consistentes de θ si se cumple que:

a) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$

b) $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$ y $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = 0$ y $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

RESPUESTA

El inciso a) es falso pues sabemos que $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - E[T_n]| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{Var[T_n]}{\epsilon^2}$. Si $Var[T_n]$ no converge a 0 sino a una constante, entonces T_n no converge en probabilidad y, por lo tanto, no es consistente.

El inciso b) es falso pues $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$ es una condición necesaria para que el estimador sea consistente.

El inciso d) es falso pues si $\theta \neq 0$, entonces el estimador es asintóticamente insesgado. Usando el mismo argumento que para el inciso b), no se cumple que T_n sea consistente.

Si se cumplen las dos condiciones del inciso c) tenemos que: $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - E[T_n]| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{Var[T_n]}{\epsilon^2} = \dfrac{1}{\epsilon^2} \lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$. Como $P(|T_n - \theta| \geq \epsilon)$ es una medida de probabilidad, entonces $0 \leq P(|T_n - \theta| \geq \epsilon) \leq 1$ y, por lo tanto, tenemos que $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$, i.e, T_n converge en probabilidad a θ, i.e., T_n es consistente.

Por lo tanto, el inciso c) es correcto.

4. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común $f_X(x; \theta)$ donde θ es un parámetro real. Si $\hat{\theta}$ denota al estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) θ es insesgado.

b) θ es único.

c) El error cuadrático medio de θ es igual a su varianza.

d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA

El inciso a) es falso pues los estimadores de máxima verosimilitud no son necesariemente insesgados.

El inciso b) es falso pues para que el estimador de máxima verosimilitud sea único es necesario que se cumplan las condiciones de regularidad (pensar en distribuciones con dos puntos críticos -bimodales-).

El inciso c) es falso pues sabemos que $ECM(\hat{\theta}) = Var[\hat{\theta}] + \text{sesgo}^2(\hat{\theta})$. Para que se cumpla que $ECM(\hat{\theta}) = Var[\hat{\theta}]$ necesitamos que $\text{sesgo}^2(\hat{\theta}) = 0$, i.e, que el estimador sea insesgado. Como los estimadores de máxima verosimilitud no son necesariamente insesgados, entonces este enunciado es falso.

Por lo tanto, el inciso d) es correcto.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común $f_X(x;\theta)$, donde θ es un parámetro real. Si $\hat{\theta}$ denota al estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   a) θ se distribuye asintóticamente como una normal.

   b) θ es consistente.

   c) Alcanza asintóticamente la cota inferior de Cramér-Rao.

   d) Todas las anteriores.

   RESPUESTA

   Los estimadores de máxima verosimilitud cumplen con las propiedades de consistencia y normalidad asintótica con parámetros el valor de θ y varianza la cota inferior de Crámer-Rao.

   Por lo tanto, el inciso d) es correcto.

6. Marque la opción que considera incorreta.

   a) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que $E[\hat{\theta}] = \theta$ y $Var[\hat{\theta}]$ es menor que la varianza de cualquier otro estimador insesgado de θ para todos los posibles valores de θ. Se dice entonces que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado y de varianza mínima de θ.

   b) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ y $\tilde{\theta} = u(X_1, ..., X_n)$ cualesquiera dos estimadores insesgados de θ. Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador más eficiente de θ que $\tilde{\theta}$ si $Var[\hat{\theta}] \leq Var[\tilde{\theta}]$, cumpliéndose la desigualdad en el sentido estricto para algún valor de θ.

   c) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que $E[\hat{\theta}] = \theta$, entonces la varianza de $\hat{\theta}$ debe satisfacer la siguiente desigualdad:

   $$Var[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

   d) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que su error cuadrático medio coincide con la varianza de $\hat{\theta}$. Entonces $\hat{\theta}$ es un estimador de máxima verosimilitud para θ.

   RESPUESTA

   El inciso a) es verdadero. La definición de un estimador insesgado es que $E[\hat{\theta}] = \theta$. La definición de un estimador eficiente es que su varianza es menor o igual que la varianza de cualquier otro estimador.

   El inciso b) es verdadero. La definición de que un estimador sea más eficiente que otro es que $Var[\hat{\theta}] \leq Var[\tilde{\theta}]$.

   El inciso c) es verdadero. La definición de la cota inferior de Cramer-Rao es que la varianza de cualquier estimador es menor o igual que dicha cota. Esta definición es específica para estimadores insesgados (el numerador $\left(\frac{d}{d\theta}E[\hat{\theta}]\right)^2$ de la CICR es igual a 1 para estimadores insesgados).

El inciso d) es falso. El hecho de que el error cuadrático medio de un estimador coincida con su varianza implicaría que el estimador es insesgado. No todos los estimadores de máxima verosimilitud son insesgados.

Por lo tanto, el inciso d) es correcto.

7. Indique cuál propiedad no corresponde a los estimadores máximo verosímiles:

   a) Invarianza.

   b) Insesgamiento asintótico.

   c) Eficiencia.

   d) Consistencia asintótica.

   RESPUESTA

   Los estimadores de máxima verosimilitud cumplen con las propiedades de consistencia y normalidad asintótica con parámetros el valor de θ y varianza la cota inferior de Crámer-Rao. Sin embargo, no son necesariamente estimadores eficientes (solo asintóticamente).

   Por lo tanto, el inciso c) es correcto.

8. Si $X_1, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n de una población tal que para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} & \text{para } 0 \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   Para $\alpha = 3$, se propone $\hat{\beta} = 2\bar{X}$. Determine el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$.

   RESPUESTA

   Primero, calculemos los siguientes valores:

$E[X] = \int\limits_0^\beta x \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{d}x = \frac{3}{\beta^3} \int\limits_0^\beta x^3 \mathrm{d}x = \frac{3}{4\beta^3} x^4 \Big|_0^\beta = \frac{3\beta}{4}$

$E[X^2] = \int\limits_0^\beta x^2 \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{d}x = \frac{3}{\beta^3} \int\limits_0^\beta x^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{5\beta^3} x^5 \Big|_0^\beta = \frac{3\beta^2}{5}$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3\beta^2}{5} - \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2 = \frac{48\beta^2 - 45\beta^2}{80} = \frac{3\beta^2}{80}$

   Esto implica que

$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n \frac{3\beta}{4} = \frac{1}{n} \cdot \left(n\frac{3\beta}{4}\right) = \frac{3\beta}{4}$

$E[\bar{X}^2] = Var[\bar{X}] + E^2[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^n Var[X_i] + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2 = \frac{3\beta^2}{80n} + \frac{9\beta^2}{16}$

$= \frac{3\beta^2 + 45\beta^2 n}{80n}$

   Calculemos ahora el $ECM(\hat{\beta})$:

$ECM(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - \beta)^2\right] = E\left[(2\bar{X} - \beta)^2\right] = E[4\bar{X}^2 - 2(2\bar{X})\beta + \beta^2] = 4E[\bar{X}^2] - 4\beta E[\bar{X}] + \beta^2$

$= 4\left(\frac{3\beta^2 + 45\beta^2 n}{80n}\right) - 4\beta\left(\frac{3\beta}{4}\right) - \beta^2$

$= \frac{3\beta^2+45\beta^2 n-60\beta^2 n+20\beta^2 n}{20n}$

$= \frac{3\beta^2+5\beta^2 n}{20n}$

$= \beta^2\left(\frac{3+5n}{20n}\right)$

9. Considera $\hat{\theta}_n$ un estimador de un parámetro de θ tal que $E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \to 0$ cuando $n \to \infty$, y las siguientes afirmaciones:

   A: $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ.

   B: $\hat{\theta}_n$ es necesariamente insesgado.

   Entonces,

   a) A y B son falsas.

   b) A es falsa pero B no.

   c) B es falsa pero A no.

   d) Ninguna de las anteriores.

   RESPUESTA

   La afirmación A es verdadera. Sabemos que si una variable converge en media r, entonces converge en probabilidad. Si $\lim\limits_{n\to\infty} E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$, i.e., $\hat{\theta}_n$ es estimador consistente de θ.

   La afirmación B es falsa. Podemos encontrar un estimador que sea insesgado y que converga en error cuadrático medio (si un estimador converge en error cuadrático medio es insesgado solo asintóticamente).

   Por lo tanto, el inciso c) es correcto.

10. Considera $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una densidad Bernoulli con parámetro p. Se desea estimar $Var[Y] = p(1-p)$ y se usa $\hat{\lambda} = \hat{p}(1-\hat{p})$, donde $\hat{p}$ es la proporción muestral. Calcula el sesgo de $\hat{\lambda}$ si $n = 15$ y $p = 0.33$.

    RESPUESTA

    Primero, calculemos los siguientes valores:

    $E[\hat{p}] = E[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i] = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E[Y_i] = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} p = p$

    $E[\hat{p}^2] = Var[\hat{p}] + E^2[\hat{p}] = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} Var[Y_i] + p^2 = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} p(1-p) + p^2 = \frac{np(1-p)}{n^2} + p^2 = \frac{p-p^2+np^2}{n} = \frac{p+(n-1)p^2}{n}$

    $E[\hat{\lambda}] = E[\hat{p}(1-\hat{p})] = E[\hat{p}] - E[\hat{p}^2] = p - \frac{p+(n-1)p^2}{n} = \frac{np-p-(n-1)p^2}{n} = \frac{(n-1)(p-p^2)}{n}$

    Esto implica que:

    Sesgo$(\hat{\lambda}) = E[\hat{\lambda}] - \lambda = \frac{n-1}{n}(p-p^2) - p(1-p) = \frac{np-p-np^2+p^2-np+np^2}{n}$

    $= \frac{p^2-p}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.33(0.67)}{15} = 0.01474$

11. Considera $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad $f(y|\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp(-y/\lambda)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ con $\lambda > 0$, definimos $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$. Analiza las siguientes afirmaciones.

A: En este caso se cumple que $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ donde $\sigma^2 = Var(Y_i)$.

B: En este caso, por falta de normalidad, $\bar{Y}$ no es un estimador consistente de $\mu = E[Y_i]$.

Entonces

a) A es verdadera y B es falsa.

b) A es falsa y B es verdadera.

c) A y B son falsas.

d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA

La afirmación A es falsa. Para una población que no es normal, $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ no tiene una distribución $\chi^2_{(n-1)}$ exacta.

La afirmación B es falsa. Calculemos primero $E[\bar{Y}]$:

$E[\bar{Y}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[Y_i] = \frac{n\mu}{n} = \mu$

Ahora, calculemos $Var[\bar{Y}]$:

$Var[\bar{Y}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var[Y_i] = \frac{n\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

Ahora,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y} - E[\bar{Y}]| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y} - \mu| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var[\bar{Y}]}{\epsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0$$

Como $P(|\bar{Y}-E[\bar{Y}]| \geq \epsilon)$ es medida de probabilidad, se cumple que $0 \leq P(|\bar{Y}-E[\bar{Y}]| \geq \epsilon) \leq 1$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y} - E[\bar{Y}]| \geq \epsilon) = 0$.

Esto implica que $\bar{Y}$ es estimador consistente de μ.

Por lo tanto, el inciso c) es correcto.

12. Considera $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(x|p) = \binom{2}{x}p^x(1-p)^{2-x}\mathbb{1}_{\{0,1,2\}}(x)$ con $0 < p < 1$. Se desea estimar p^2, se propone $\hat{\theta} = (\bar{X})^2/4$. ¿Es este un estimador insesgado de p^2?

RESPUESTA

Primero calculemos lo siguiente:

$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x\binom{2}{x}p^x(1-p)^{2-x} = 0 + 1\cdot 2\cdot p(1-p) + 2\cdot 1\cdot p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$

$E[X^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{2}{x}p^x(1-p)^{2-x} = 0+1\cdot 2\cdot p(1-p)+4\cdot 1\cdot p^2 = 2p-2p^2+4p^2 = 2p+2p^2 = 2p(1+p)$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = 2p + 2p^2 - 4p^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p)$

$E[\bar{X}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = 2p$

$Var[\bar{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{2p(1-p)}{n}$

Esto implica que:

$E[\hat{\theta}] = E[\bar{X}^2/4] = \frac{Var[\bar{X}]+E^2[\bar{X}]}{4} = \frac{\frac{2p(1-p)}{n}+4p^2}{4} = \frac{2p(1-p)+4p^2n}{4n} = \frac{2p-2p^2+4p^2n}{4n}$

Por lo tanto,

$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta = \frac{2p-2p^2+4p^2n}{4n} - p^2 = \frac{2p-2p^2+4p^2n-4p^2n}{4n} = \frac{2p(1-p)}{4n} = \frac{p(1-p)}{2n} \neq 0.$

Decimos que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado.

13. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, ambos parámetros desconocidos. Sea $\hat{\mu}_n = (1/2)(Y_1 + Y_n)$ un estimador de μ. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es falsa?

    a) El estimador es insesgado.

    b) El estimador es consistente.

    c) El estimador no es de varianza mínima.

    d) Ninguna de las anteriores.

    RESPUESTA

14. Considera $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con tercer momento finito, $E[y_i] = \mu, Var[Y_i] = \sigma^2, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ y $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es un estimador consistente de c_A, el coeficiente de asimetría?

    a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\bar{Y}}{\sigma})^3$

    b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\bar{Y}}{s})^3$

    c) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\mu}{\sigma})^3$

    d) Ninguna de las anteriores.

15. Considera $\hat{\theta}_n$ un estimador consistente de θ y $F_n(x)$ su función de distribución acumulada. Considera las siguientes afirmaciones.

    A: $P(|\hat{\theta}_n - \theta| > 0.01) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

    B: Si $x < \theta$ entonces $F_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

    Entonces,

    a) A y B son falsas.

    b) A es falsa y B es verdadera.

    c) A y B son verdaderas.

    d) Ninguna de las anteriores.

16. Un estimador es consistente en probabilidad si se cumple que:
    a) Tiene varianza mínima.
    b) Es insesgado.
    c) Es invariante.
    d) El límite de su error cuadrático medio es cero.

17. Se dice que un estadístico es un estimador eficiente para un parámetro si:
    a) Tiene la misma distribución que la variable original.
    b) Es insesgado y tiene varianza mínima.
    c) Se acerca al verdadero valor del parámetro conforme la muestra aumenta.
    d) Converge en probabilidad al parámetro.

18. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya densidad es una Bernoulli(θ). Demuestra que el estimador $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ es un estimador eficiente de θ.

19. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una muestra aleatoria con densidad $f_{x_i}(x_i|\theta) = \theta x_i^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)$, $\theta > 0$.

a) Se desea estimar θ. Si se usara el promedio muestral como su estimador, ¿sería un estimador insesgado? Responde encontrando el sesgo del promedio muestral como estimador de θ.

b) ¿Es el promedio muestral un estimador consistente en media cuadrática de θ? (Nota: puedes dejar indicada $Var[X_i]$)

c) Se considera como estimador alternativo a $\tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$. ¿Es este un estimador consistente de θ? Justifica tu respuesta.

20. Las lecturas de un voltímetro de un voltaje desconocido θ están uniformemente distribuidas en el intervalo $(\theta, \theta + 1)$. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de tales lecturas. ¿Cuál de las siguientes funciones de $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ es un estimador insesgado de θ?

a) $\bar{Y} - 0.5$

b) $\bar{Y}$

c) $\bar{Y} + 0.5$

d) Ninguna de las anteriores.