Laboratorio 5 - Inferencia Estadística

Estimación puntual pt. 1 - Propiedades de estimadores

Laboratorista: Héctor Lira Talancón

Ago-Dic 2017

1. Si un estimador es consistente en error cuadrático medio, entonces

   a) El estimador converge en probabilidad al parámetro estimado.

   b) El estimador es insesgado.

   c) La varianza del estimador es cero.

   d) Ninguna de las anteriores.

2. Sean $\hat{p}_1 = \bar{X}_1$ y $\hat{p}_2 = \bar{X}_2$ estimadores de una misma proporción p que se obtuvieron a partir de dos muestras independientes de tamaños n_1 y n_2 de cierta población Bernoulli(p). Considere otro estimador de p dado por $\hat{p} = k\hat{p}_1 + (1-k)\hat{p}_2$. Encontrar el valor de $k \in [0, 1]$, en términos de p, n_1 y n_2 tal que la varianza de $\hat{p}$ sea mínima.

3. Sea $T_n(X_1, ..., X_n)$ una sucesión de estimadores del parámetro θ. Se dice que esta sucesión de estimadores es una sucesión de estimadores consistentes de θ si se cumple que:

   a) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$

   b) $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

   c) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$ y $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

   d) $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = 0$ y $\lim_{n\to\infty} Var[T_n] = 0$

4. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común $f_X(x;\theta)$ donde θ es un parámetro real. Si $\hat{\theta}$ denota al estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   a) θ es insesgado.

   b) θ es único.

   c) El error cuadrático medio de θ es igual a su varianza.

   d) Ninguna de las anteriores.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común $f_X(x;\theta)$, donde θ es un parámetro real. Si $\hat{\theta}$ denota al estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   a) θ se distribuye asintóticamente como una normal.

   b) θ es consistente.

   c) Alcanza asintóticamente la cota inferior de Cramér-Rao.

d) Todas las anteriores.

6. Marque la opción que considera incorreta.

   a) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que $E[\hat{\theta}] = \theta$ y $Var[\hat{\theta}]$ es menor que la varianza de cualquier otro estimador insesgado de θ para todos los posibles valores de θ. Se dice entonces que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado y de varianza mínima de θ.

   b) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ y $\tilde{\theta} = u(X_1, ..., X_n)$ cualesquiera dos estimadores insesgados de θ. Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador más eficiente de θ que $\tilde{\theta}$ si $Var[\hat{\theta}] \leq Var[\tilde{\theta}]$, cumpliéndose la desigualdad en el sentido estricto para algún valor de θ.

   c) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que $E[\hat{\theta}] = \theta$, entonces la varianza de $\hat{\theta}$ debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$Var[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

   d) Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya densidad es $f_X(X;\theta)$. Sea $\hat{\theta} = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de θ tal que su error cuadrático medio coincide con la varianza de $\hat{\theta}$. Entonces $\hat{\theta}$ es un estimador de máxima verosimilitud para θ.

7. Indique cuál propiedad no corresponde a los estimadores máximo verosímiles:

   a) Invarianza.

   b) Insesgamiento asintótico.

   c) Eficiencia.

   d) Consistencia asintótica.

8. Si $X_1, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n de una población tal que para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} & \text{para } 0 \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   Para $\alpha = 3$, se propone $\hat{\beta} = 2\bar{X}$. Determine el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$.

9. Considera $\hat{\theta}_n$ un estimador de un parámetro de θ tal que $E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \to 0$ cuando $n \to \infty$, y las siguientes afirmaciones:

   A: $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ.

   B: $\hat{\theta}_n$ es necesariamente insesgado.

   Entonces,

   a) A y B son falsas.

   b) A es falsa pero B no.

   c) B es falsa pero A no.

d) Ninguna de las anteriores.

10. Considera $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una densidad Bernoulli con parámetro p. Se desea estimar $Var[Y] = p(1-p)$ y se usa $\hat{\lambda} = \hat{p}(1-\hat{p})$, donde $\hat{p}$ es la proporción muestral. Calcula el sesgo de $\hat{\lambda}$ si $n = 15$ y $p = 0.33$.

11. Considera $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad $f(y|\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp(-y/\lambda)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ con $\lambda > 0$, definimos $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$. Analiza las siguientes afirmaciones.

    A: En este caso se cumple que $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ donde $\sigma^2 = Var(Y_i)$.

    B: En este caso, por falta de normalidad, $\bar{Y}$ no es un estimador consistente de $\mu = E[Y_i]$.

    Entonces

    a) A es verdadera y B es falsa.

    b) A es falsa y B es verdadera.

    c) A y B son falsas.

    d) Ninguna de las anteriores.

12. Considera $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(x|p) = \binom{2}{x}p^x(1-p)^{2-x}\mathbb{1}_{\{0,1,2\}}(x)$ con $0 < p < 1$. Se desea estimar p^2, se propone $\hat{\theta} = (\bar{X})^2/4$. ¿Es este un estimador insesgado de p^2?

13. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, ambos parámetros desconocidos. Sea $\hat{\mu}_n = (1/2)(Y_1 + Y_n)$ un estimador de μ. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es falsa?

    a) El estimador es insesgado.

    b) El estimador es consistente.

    c) El estimador no es de varianza mínima.

    d) Ninguna de las anteriores.

14. Considera $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con tercer momento finito, $E[y_i] = \mu, Var[Y_i] = \sigma^2, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ y $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es un estimador consistente de c_A, el coeficiente de asimetría?

    a) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\bar{Y}}{\sigma})^3$

    b) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\bar{Y}}{s})^3$

    c) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{Y_i-\mu}{\sigma})^3$

    d) Ninguna de las anteriores.

15. Considera $\hat{\theta}_n$ un estimador consistente de θ y $F_n(x)$ su función de distribución acumulada. Considera las siguientes afirmaciones.

    A: $P(|\hat{\theta}_n - \theta| > 0.01) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

    B: Si $x < \theta$ entonces $F_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

    Entonces,

    a) A y B son falsas.

    b) A es falsa y B es verdadera.

    c) A y B son verdaderas.

    d) Ninguna de las anteriores.

16. Un estimador es consistente en probabilidad si se cumple que:

    a) Tiene varianza mínima.

    b) Es insesgado.

    c) Es invariante.

    d) El límite de su error cuadrático medio es cero.

17. Se dice que un estadístico es un estimador eficiente para un parámetro si:

    a) Tiene la misma distribución que la variable original.

    b) Es insesgado y tiene varianza mínima.

    c) Se acerca al verdadero valor del parámetro conforme la muestra aumenta.

    d) Converge en probabilidad al parámetro.

18. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya densidad es una Bernoulli(θ). Demuestra que el estimador $\hat{\theta} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i/n$ es un estimador eficiente de θ.

19. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una muestra aleatoria con densidad $f_{x_i}(x_i|\theta) = \theta x_i^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)$, $\theta > 0$.

    a) Se desea estimar θ. Si se usara el promedio muestral como su estimador, ¿sería un estimador insesgado? Responde encontrando el sesgo del promedio muestral como estimador de θ.

    b) ¿Es el promedio muestral un estimador consistente en media cuadrática de θ? (Nota: puedes dejar indicada $Var[X_i]$)

    c) Se considera como estimador alternativo a $\tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$. ¿Es este un estimador consistente de θ? Justifica tu respuesta.

20. Las lecturas de un voltímetro de un voltaje desconocido θ están uniformemente distribuidas en el intervalo $(\theta, \theta + 1)$. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de tales lecturas. ¿Cuál de las siguientes funciones de $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ es un estimador insesgado de θ?

    a) $\bar{Y} - 0.5$

    b) $\bar{Y}$

    c) $\bar{Y} + 0.5$

    d) Ninguna de las anteriores.