Laboratorio 9 - Inferencia Estadística

Pruebas de hipótesis pt. 1 - Conceptos básicos

Laboratorista: Héctor Lira Talancón

Ago-Dic 2017

1. Establezca la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

   La probabilidad de no rechazar una hipótesis nula cuando ésta es falsa, sumada a la probabilidad de no rechazar dicha hipótesis cuando es verdadera es igual a uno.

2. En una población $N(\mu, \sigma^2)$ la potencia de la prueba $H_0 : \mu \geq 5$ vs. $H_1 : \mu < 5$ cuando $\mu = 3$ corresponde a:

   a) La probabilidad de rechazar H_0 cuando $\mu = 5$.

   b) La probabilidad de rechazar H_0 cuando $\mu = 3$.

   c) La probabilidad de no rechazar H_0 cuando $\mu = 5$.

   d) La probabilidad de no rechazar H_0 cuando $\mu = 3$.

3. Al realizar una prueba de hipótesis siempre se cumple que:

   a) $P(\text{no rechazar } H_0|H_0 \text{ verdadera}) + P(\text{no rechazar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = 1$.

   b) $P(\text{rechazar } H_0|H_0 \text{ falsa}) + P(\text{no rechazar } H_0|H_0 \text{ verdadera}) = 1$.

   c) $P(\text{rechazar } H_0|H_0 \text{ verdadera}) + P(\text{no rechazar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = 1$.

   d) Ninguna de las anteriores.

4. Un asesor de inversiones afirma que el riesgo (desviación estándar) al invertir en cierto instrumento es mayor a 3. Para corroborar la validez de esta afirmación se planea realizar la prueba $H_0 : \sigma = 3$ vs. $H_1 : \sigma > 3$. Con una muestra aleatoria de 29 valores del rendimiento se tuvo una media muestral de 8 y una varianza muestral de 16. ¿Cuál es el valor aproximado del nivel de significancia de la prueba si la región de rechazo que se piensa usar está dada por aquellos valores de S^2 tal que $S^2 \leq 13$?

5. Si tenemos una muestra aleatoria fija $x_1, \ldots, x_{20}$ de una densidad Poisson con parámetro λ y se observó que $\bar{x}_{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 1.7$ y se desea probar $H_0 : \lambda = 1$ vs. $H_1 : \lambda = 2$ y el mecanismo de prueba nos indica que la región de rechazo de H_0 está dada por $C = \{\underline{\mathrm{x}} = (x_1, \ldots, x_{20}) : \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 15\}$. Entonces el valor-p asociado a esta muestra fija es:

   a) $P(\bar{x}_{20} \geq 15|\lambda = 1)$.

   b) $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 17|\lambda = 1)$.

   c) $P(\bar{x}_{20} \geq 1.7|\lambda = 1)$.

d) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $\underline{\mathrm{X}} = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una densidad común $f_X(x|\theta)$, donde θ es un parámetro desconocido con valores positivos. Si se desea probar

$$H_0 : \theta = 1 \text{ vs. } H_1 : \theta = 5 \tag{1}$$

al nivel $\alpha = 0.05$ y se proponen dos posibles regiones de rechazo de H_0 o críticas $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$, tales que $P(\underline{\mathrm{X}} \in A|\theta = 1) = P(\underline{\mathrm{X}} \in B|\theta = 1) = 0.05$. Decimos que A es una mejor región de rechazo que B para probar (1) si:

a) $P(\underline{\mathrm{X}} \notin A|\theta = 1) = P(\underline{\mathrm{X}} \notin B|\theta = 1)$.

b) $P(\underline{\mathrm{X}} \notin A|\theta = 5) \geq P(\underline{\mathrm{X}} \notin B|\theta = 5)$.

c) $P(\underline{\mathrm{X}} \notin A|\theta = 5) \leq P(\underline{\mathrm{X}} \notin B|\theta = 5)$.

d) $P(\underline{\mathrm{X}} \in A|\theta = 5) \leq P(\underline{\mathrm{X}} \in B|\theta = 5)$.

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con densidad común $f_X(x|\theta)$, donde θ es un parámetro desconocido con valores positivos. Si se desea probar $H_0 : \theta = 1$ vs. $H_1 : \theta = 2$ al nivel $\alpha = 0.05$. La potencia de la prueba se define como:

a) $P(\text{rechazar } H_0|\theta = 1)$.

b) $P(\text{aceptar (no rechazar) } H_0|\theta = 2)$.

c) $P(\text{rechazar } H_0|\theta = 2)$.

d) $1 - P(\text{rechazar } H_0|\theta = 1)$.

8. Si tomamos una muestra aleatoria fija $x_1, \ldots, x_{10}$ de una densidad $N(\mu, 1)$ con parámetro μ y se observa que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 16$ y se desea probar $H_0 : \mu = 1$ vs. $H_0 : \mu = 2$ y el mecanismo de prueba nos indica que la región de rechazo de H_0 está dado por $C = \{\underline{\mathrm{x}} = (x_1, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 15\}$. Entonces el valor-p asociado a esta muestra fija es:

a) $P(\bar{x}_{10} \geq 1.5|\mu = 1)$.

b) $P(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 16|\mu = 2)$.

c) $P(\bar{x}_{10} \geq 1.6|\mu = 1)$.

d) Ninguna de las anteriores.

9. Si tenemos una muestra aleatoria fija $x_1, \ldots, x_{20}$ de una densidad Poisson con parámetro λ y se observó que $\bar{x}_{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 1.7$ y se desea probar $H_0 : \lambda = 1$ vs. $H_1 : \lambda = 2$ y el mecanismo de prueba nos indica que la región de rechazo de H_0 está dada por $C = \{\underline{\mathrm{x}} = (x_1, \ldots, x_{20}) : \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 15\}$. Entonces el valor-p y el Error Tipo II asociado a esta muestra fija están dados por:

a) $P(\bar{x}_{20} \geq 1.7|\lambda = 1)$ y $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 15|\lambda = 1)$, respectivamente.

b) $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 17|\lambda = 1)$ y $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 15|\lambda = 1)$, respectivamente.

c) $P(\bar{x}_{20} \geq 1.7|\lambda = 1)$ y $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 15|\lambda = 2)$, respectivamente.

d) $P(\bar{x}_{20} \geq 1.5|\lambda = 1)$ y $P(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 15|\lambda = 2)$, respectivamente.

10. Si se aumenta la región de rechazo en una prueba de hipótesis simple vs. simple, se logra que:

    a) Se disminuyan los errores tipo I y II.

    b) Se disminuya el error tipo I.

    c) Se disminuya el error tipo II.

    d) Ninguna de las anteriores.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

    a) Si se rechaza la hipótesis nula con $\alpha = 0.01$ también se rechazará con $\alpha = 0.05$.

    b) Una región de rechazo indica los valores del estadístico de prueba para los cuales se rechaza la hipótesis nula.

    c) En una prueba de hipótesis siempre es más probable cometer el error tipo II que el error tipo I.

    d) La única manera de disminuir simultáneamente el error tipo I y el error tipo II en cualquier prueba es aumentando el tamaño de muestra.

12. Considera las siguientes afirmaciones.

    A: La potencia de una prueba da la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis nula.

    B: Un estimador insesgado siempre tendrá menor varianza que un estimador sesgado.

    Entonces:

    a) A es falsa pero B no.

    b) B es falsa pero A no.

    c) A y B son falsas.

    d) Ninguna de las anteriores.

13. Considera las siguientes afirmaciones:

    A: Se tiene la densidad Gamma con parámetros α, β y las hipótesis $H_0 : \alpha = 1$ vs. $H_1 : \alpha = 2$. Lo anterior es un ejemplo de dos hipótesis simples.

    B: Suponga la densidad Binomial con parámetros $n = 10$ y p además las hipótesis $H_0 : p = p_0$ vs. $H_1 : p = p_1$. Lo anterior es un ejemplo de dos hipótesis compuestas.

    Entonces:

    a) A es verdadera y B es falsa.

    b) A y B son verdaderas.

    c) A es falsa y B es verdadera.

    d) Ninguna de las anteriores.

14. Considera una prueba de hipótesis H_0 vs. H_1 ambas simples y las siguientes afirmaciones:

    A: $P(\text{no rechazar } H_0 | H_0 \text{ verdadera}) + P(\text{no rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = 1$.

    B: $P(\text{no rechazar } H_0 | H_1 \text{ verdadera}) + P(\text{no rechazar } H_0 | H_1 \text{ falsa}) = 1$.

    Entonces:

    a) A y B son falsas.

    b) A es falsa y B verdadera.

    c) A y B son verdaderas.

    d) Ninguna de las anteriores.

15. Considera las siguientes afirmaciones:

    A: Al hacer una prueba de hipótesis siempre se comete el error tipo I o se comete el error tipo II.

    B: Si en una prueba de hipótesis no se rechaza H_0 al 1% de significancia, entonces tampoco se rechazará al 5% de significancia.

    Entonces:

    a) A es falsa y B verdadera.

    b) A y B son verdaderas.

    c) A es verdadera y B es falsa.

    d) Ninguna de las anteriores.

16. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes con densidad $f(y) = p^y(1-p)^{1-y}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(y)$ con $0 < p < 1$. Se desea probar $H_0 : p \leq 0.5$ vs. $H_1 : p > 0.5$. Se usa como región de rechazo de H_0 a $C = \left\{\sum_{i=1}^{20} Y_i > 13\right\}$. Considera las siguientes afirmaciones:

    A: La potencia de la prueba cuando $p = 0.75$ es menor a 0.7.

    B: La probabilidad de rechazar H_0 cuando $p = 0.5$ es menor a 0.1.

    Entonces:

    a) A y B son falsas.

    b) A es falsa y B verdadera.

    c) A y B son verdaderas.

    d) Ninguna de las anteriores.

17. Considera las siguientes afirmaciones:

    A: Si se prueba una hipótesis con un nivel de significancia menor al valor-p, entonces no se rechaza la hipótesis nula.

    B: Si en una prueba de hipótesis no se rechaza H_0 al 1% de significancia, entonces tampoco se rechazará al 5% de significancia.

    Entonces:

    a) A es falsa y B es verdadera.

    b) A y B son verdaderas.

    c) A es verdadera y B es falsa.

    d) Ninguna de las anteriores.