Laboratorio 6 - Inferencia Estadística

Estimación puntual pt. 2 - Métodos de estimación

Laboratorista: Héctor Lira Talancón

Ago-Dic 2017

1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución (geométrica) con función de densidad $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^x \mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(x), 0 < \theta < 1, E[X] = (1-\theta)/\theta, Var[X] = (1-\theta)/\theta^2$

   a) Estimar θ y $E[X]$ por máxima verosimilitud.

   b) Encontrar la CICR para estimadores insesgados de $E[X]$.

2. El tiempo en minutos que tarda un sistema de cómputo en procesar una solicitud de estado financiero es una variable aleatoria Y con función de densidad $f(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-(y-b)/\lambda}, y > b$. Las constantes $\lambda > 0$ y $b > 0$. Además, se sabe que $E[Y] = \lambda + b, Var[Y] = \lambda^2$.

   a) Considere que b es conocido y que se tiene una muestra aleatoria $Y_1, ..., Y_n$ de observaciones de Y. Obtener el estimador de λ por máxima verosimilitud.

   b) ¿El estimador encontrado en el inciso anterior es insesgado? ¿Es consistente?

   c) Si $n = 28, \sum\limits_{i=1}^{28} Y_i = 84, b = 1$, evaluar el estimador de λ encontrado en el inciso a), así como el error estándar del mismo.

3. Marque la opción que considere correcta. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f_X(x;\theta)$. Sea $\hat{\theta}_n = h(X_1, ..., X_n)$ un estimador de máxima verosimilitud para θ. Entonces, si las condiciones de regularidad se cumplen,

   a) $\hat{\theta}_n$ existe y es único.

   b) $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ.

   c) $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente eficiente.

   d) Todas las anteriores.

4. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es de Poisson con parámetro λ. $\left(p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)$

   a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ.

   b) Determine si el estimador obtenido en a) es insesgado y consistente.

   c) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para $p(\lambda) = p(X = 1)$.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad, $\theta > 0$ y

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} & \text{para } 0 < x < \sqrt{2\theta} \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

   a) Encontrar la función de distribución $F_X(x;\theta)$ y el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para θ.

   b) Sea $X_{[n]}$ =max$\{X_1, ..., X_n\}$ cuya función de densidad está dada por $f_{X_{[n]}}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X x$. Encontrar la esperanza y la varianza de $\hat{\theta}$. ¿Es $\hat{\theta}$ insesgado?

c) Encontrar una constante c_0 tal que $\hat{\theta}_0 = c_0\hat{\theta}$ sea insesgado para θ y encontrar la esperanza y la varianza de $\hat{\theta}_0$ y ver que sea consistente para θ.

6. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya densidad está dada por

$$f(x;k) = k(1+x)^{-k-1}; x > 0, k > 0.$$

a) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud $\hat{k}$ para k.

b) Sabemos que el estimador de máxima verosimilitud $\hat{k}$ se distribuye asintóticamente como una normal con media k y varianza $\frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial k}\log f(x;k)\right)^2\right]}$. Encuentre la varianza y, por lo tanto, los parámetros de la normal (sugerencia: la variable aleatoria $\log(1+X) \sim Exp(\frac{1}{k})$.

7. Si $X_1, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n de una población tal que para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1} & \text{para } 0 \leq x \leq \beta \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a) Para $\beta = 2$, determine el estimador máximo verosímil de α.

b) Para $\alpha = 2$, determine el estimador máximo verosímil de β.

c) Para $\alpha = 3$, si se propone $\hat{\beta} = 2\bar{X}$. Determine el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$.

8. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución de frecuencias sigue la densidad

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \theta(1+y)^{-(\theta+1)} & \text{para } 0 < y; 0 < \theta \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a) Encuentra $\hat{\theta}$ el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Obtén la aproximación normal de $P(\hat{\theta} < 8)$ si $\theta = 9$ y $n = 100$.

9. Considera $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(y|\lambda) = \frac{\lambda^{-3}}{2}y^2 exp(-y/\lambda)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$, con $\lambda > 0$. Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de λ. Evalúalo si $n = 3$ y $Y_1 = 1.3, Y_2 = 3.5, Y_3 = 2.7$.

10. Considera $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(x|\theta) = \frac{x}{\theta}exp(-x^2/2\theta)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, con $\theta > 0$. Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de θ y su distribución asintótica. Se sabe que $E[X^2] = 2\theta$.

11. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(x|\lambda) = \frac{\lambda}{(1+x)^{\lambda+1}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, con $\lambda > 0$.

a) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de λ.

b) Indica y emplea la aproximación asintótica del formulario que consideres aplica al estimador en este caso.

12. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $Exp(\beta)$.

a) Demuestra que el estimador de máxima verosimilitud de β es $\hat{\beta} = \bar{X}$.

b) Demuestra que el error cuadrático medio de $\hat{\beta}$ converge a cero cuando $n \to \infty$.

13. Se desea estimar la probabilidad (p) de que un encendedor funcione. Para esto se toma una muestra aleatoria de tamaño n de un lote de encendedores. Para el i-èsimo encendedor en la muestra se observa X_i, el número de ensayos hasta qye falla por primera vez. Se supone el siguiente modelo $f(x|p) = (1-p)p^{x-1}\mathbb{1}_{\{1,2,...\}}(x)$ para $0 < p < 1$.

    a) Indica cuál es el soporte de $f(x|p)$. ¿Depende de p?

    b) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de p y calcula su valor si $n = 70$ y $\sum_{i=1}^{n} X_i = 120$.

    c) Encuentra y justifica el límite de probabilidad del EMV en términos de $E[X]$ y deduce cuál debe ser la fórmula de $E[X]$ en función de p.

14. Considera una variable X con distribución Pareto, cuya función de densidad de probabilidad es $f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$ para $x > 1$.

    a) Encuentra el estimador de α por máxima verosimilitud.

    b) Estima el valor medio $E[X]$ por máxima verosimilitud.

    c) Obtén la distribución asintótica de cada uno de los estimadores encontrados en los incisos anteriores. Se te sugiere usar un resultado del Formulario Abreviado anexo.

15. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya densidad es una Bernoulli(θ). Verifique que el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro θ, es $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.

16. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una mueatra aleatoria con $F_{X_i}(x_i|\theta) = \theta x_i^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(X_i), \theta > 0$. Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de θ y su distribución asintótica.

17. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una mueatra aleatoria de una población con densidad

$$f_{X_i}(x_i|\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} exp(\frac{-x_i^2}{2\beta^2})\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x_i), \beta > 0$$

.

    a) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de β, llamémosle $\hat{\beta}$

    b) Encuentra la distribución asintótica de $\hat{\beta}$.

    c) ¿A qué converge la distribución $\frac{\sqrt{n}(\hat{\beta}_n-\beta)}{\hat{\beta}_n}$? Justifica tu respuesta.