Laboratorio 4 - Inferencia Estadística

Convergencia y Teorema Central del Límite

Laboratorista: Héctor Lira Talancón

Ago-Dic 2017

1. Suponga que $X_1, X_2, ...$ es una sucesión de variables aleatorias con $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ y $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Demuestra que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ (Ley débil de los grandes números).

2. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una muestra aleatoria de $U(0, \theta)$. Sea $Y = X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

   a) Demuestra que $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$.

   b) Demuestra que $W = n(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow{d} Exp(\theta)$.

3. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común f_X, tales que $E(X_i)$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Entonces el Teorema Central del Límite dice:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt$, para toda $x \in \mathbb{R}$

   b) $\bar{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ si $n \geq 1000$.

   c) $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ tiene una distribución normal para n muy grande.

   d) Si $W_n = \sqrt{n}(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma})$ con $\bar{X}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P(W_n > w) = 1 - P(Z \leq w)$, para toda $w \in \mathbb{R}$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

4. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución de frecuencias es f_Y tal que $E(Y) = 0$ y $Var(Y) = \sigma^2$. El Teorema Central del Límite dice que:

   A: Si $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, entonces $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{Y}}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$

   B: Cuando n es grande, Y_n es aproximadamente normal.

   Entonces,

   a) A y B son falsas.

   b) A es falsa pero B no.

   c) B es falsa pero A no.

   d) Ninguna de las anteriores.

5. Considera $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita y $E(Y_i) = \mu$. Sea $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Considera el siguiente límite $\lim_{n\to\infty} P(\bar{Y}_n < y)$ con $y > \mu$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) El límite es cero.

   b) El límite es uno.

   c) El límite está estrictamente entre cero y uno.

   d) El límite no existe.

6. Considera $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias tales que $Y_n \xrightarrow{P} c$ cuando $n \to \infty$ y c una constante. Considera las siguientes afirmaciones:

   A: $F_{Y_n}(c + 0.01) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

   B: $F_{Y_n}(c - 0.01) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

   Entonces,

   a) A y B son falsas.

   b) A es verdadera y B falsa.

   c) A y B son verdaderas.

   d) Ninguna de las anteriores.

7. Considera $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita y $E(Y_i) = \mu$. Sea $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Considera el siguiente límite $\lim_{n\to\infty} P\left(\bar{Y}_n < \mu + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)$ con $y < 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) El límite es cero.

   b) El límite es mayor a 0.5.

   c) El límite es menor a 0.5.

   d) El límite es uno.

8. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $Exp(\beta)$. Sea $\hat{\beta} = \bar{X}$, el estimador de máxima verosimilitud.

   a) Demuestra que $\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ cuando $n \to \infty$.

   b) Demuestra que $\frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\beta}/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ cuando $n \to \infty$.

9. Suponga que $X_1, ..., X_{100}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Poisson con valor esperado igual a 1. Encuentre una aproximación para la probabilidad de que la suma sea mayor a 85.

10. a) Sea $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n+5}$, para $n = 1, 2, ...$; con X_i's $\sim$ i.i.d. Bernoulli(p). Demuestra que Y_n converge en probabilidad y/o en media cuadrática a p.

    b) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias idependientes e idénticamente distribuidas tales que $X_n \sim$ Poisson(λ). Demuestra que $Y_n = e^{-\bar{X}_n}$ converge en probabilidad a
    $P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

11. Analice las siguientes afirmaciones:

A: Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con densidad común f_X tales que $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Defina $W_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. Si $F_n(w)$ es la función de distribución de la variable aleatoria W_n, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{F_n(w)}{\phi(w)} = 1$ donde $\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

B: Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria tales que $X_i \sim U(0, 1)$. Sea $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $Y_n \dot{\sim} N(\frac{n}{2}, \frac{n}{12})$, donde el símbolo $\dot{\sim}$ significa distribución asintótica.

C: Si X es una varible aleatoria discreta tal que $X \sim Bin(n, p)$, entonces $P(X \leq x) \dot{\sim} \phi\Big(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big)$, con $\phi(\cdot)$ y $\dot{\sim}$ igual que en A y B, respectivamente.

Entonces,

a) Solo A y C son verdaderas.

b) Solo A es verdadera.

c) A, B y C son verdaderas.

d) Solo C es verdadera.

12. Sean Z_n y Y_n dos sucesiones de variables aleatorias tales que $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ y $Y_n \xrightarrow{P} c, c \neq 0$.

a) Sea $W_n = Y_n Z_n$. Diga cuál es la distribución de W_n.

b) ¿Cuál es la distribución límite de $\frac{Z_n}{Y_n}$?

c) Si $X_n \sim F_n(x)$ para cada $n = 1, 2, ...$ con $F_n(x) = (1 + \frac{e^{-x}}{n})^{-n}$. Diga cuál es la distribución límite de X_n.