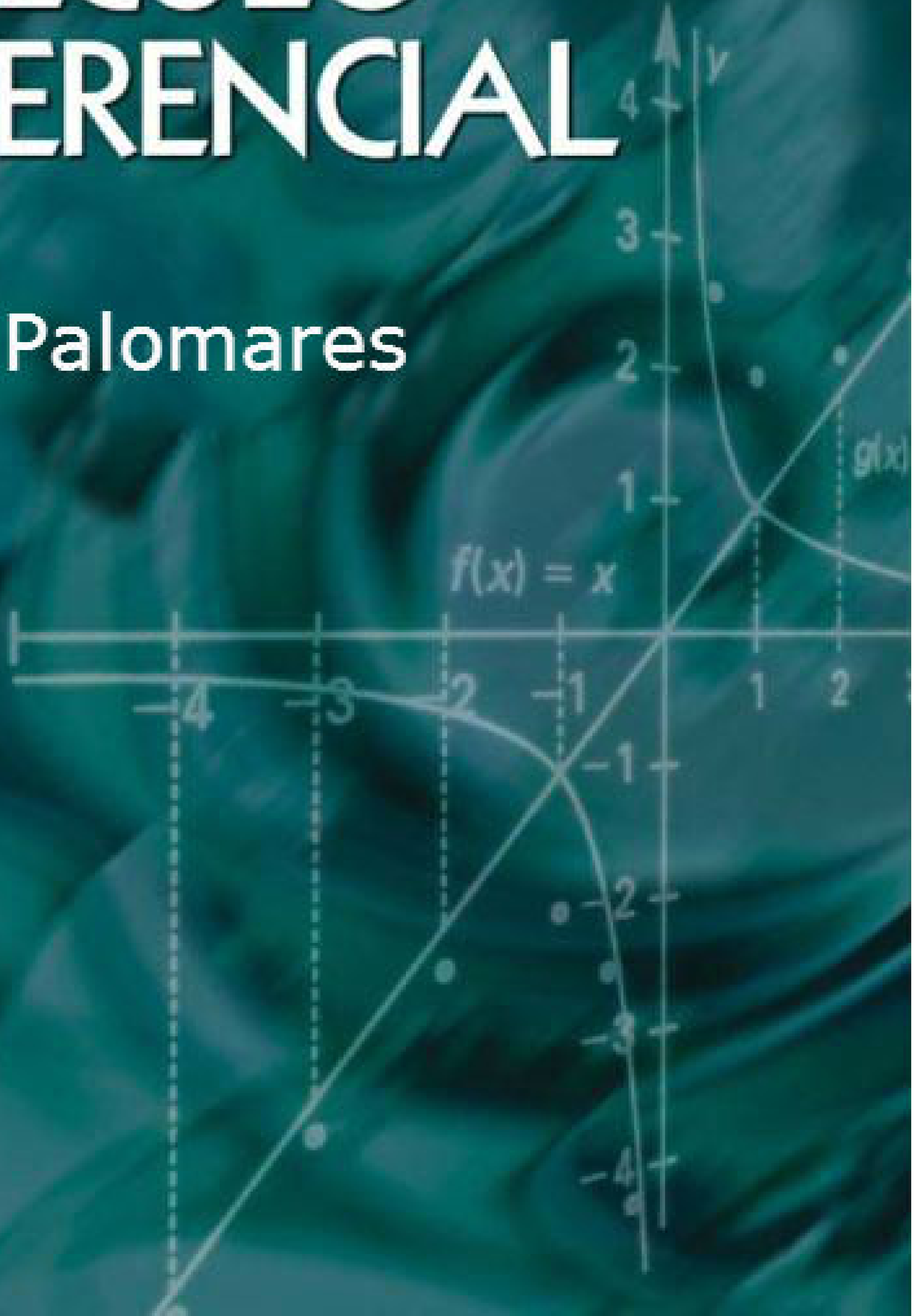
CÁLCULO DIFERENCIAL

Hector Palomares



DIAZ DE SANTOS

C A L C U L O

TAREA 5

Héctor Miguel Palomares Maldonado

En los ejercicios trace el intervalo de (a, b) en el eje x colocando el punto x_0 en el interior- Después encuentre un valor de $\delta > 0$ tal que para toda

$x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < 0 < b$

2. $a = 1b = 7, x_0 = 2$

$|x - 2| < \delta$
$-\delta < x - 2 < \delta$
$-\delta + 2 < x < \delta + 2$

ocurre que
$-\delta - 2 = 1$
$\delta = 1$

o también
$\delta + 2 = 7$
$\delta = 5$

entonces: $\delta = 1$

4. $a = -7/2, b = -1/2, x_0 = -3/2$

$|x - (-3/2)| < \delta$
$-\delta < x + \dfrac{3}{2} < \delta$
$-\delta - \dfrac{3}{2} < x < \delta - \dfrac{3}{2}$

ocurre que
$-\delta - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{7}{2}$
$\delta = 2$

o también
$\delta - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$
$\delta = 1$

Entonces: $\delta = 1$

6. $a = 2{,}7591, b = 3{,}2391, x_0 = 3$

$|x - 3| < \delta$
$-\delta < x - 3 < \delta$
$-\delta + 3 < x < \delta + 3$

ocurre que
$-\delta + 3 = 2{,}7591$
$\delta = 0{,}2409$

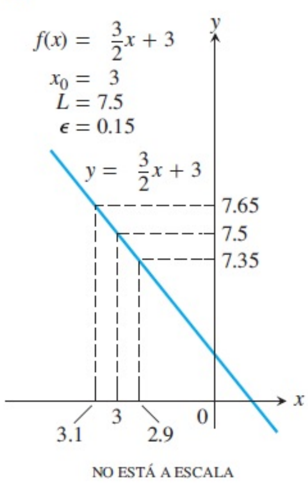
o también
$\delta + 3 = 3{,}2391$
$\delta = 0{,}2391$

entonces $\delta = 0{,}2391$

En los siguientes ejercicios use las gráficas para encontrar un $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

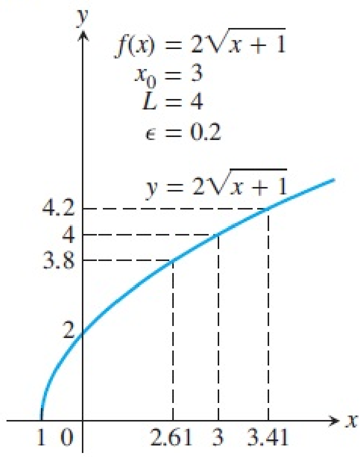
8.



$|x - (-3)| < \delta$
$-\delta < x + 3 < \delta$
$-\delta - 3 < x < \delta - 3$
ocurre que
$-\delta - 3 = -3{,}1$
$\delta = 0{,}1$
o también
$\delta - 3 = -2{,}9$
$\delta = 0{,}1$

Entonces: $\delta = 0{,}1$

10.



NO ESTÁ A ESCALA

$$|x-3|<\delta$$
$$-\delta < x-3 < \delta$$
$$-\delta+3 < x < \delta+3$$

ocurre que

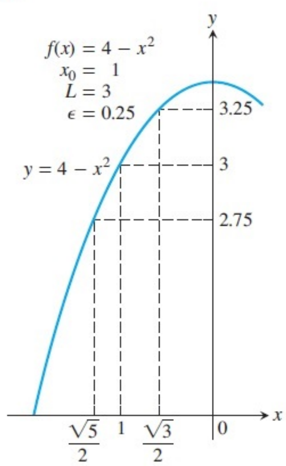
$$-\delta+3 = 2{,}61$$
$$\delta = 0{,}39$$

o también

$$\delta+3 = 3{,}41$$
$$\delta = 0{,}41$$

Entonces: $\delta = 0{,}39$

12.



NO ESTÁ A ESCALA

$$|x-(-1)|<\delta$$
$$-\delta < x+1 < \delta$$
$$-\delta-1 < x < \delta-1$$

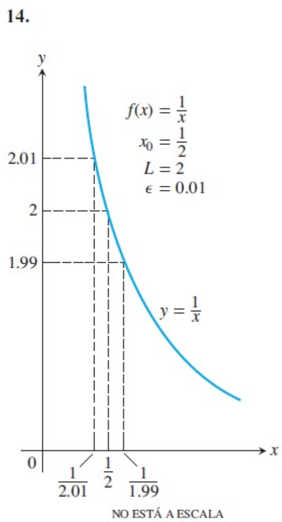
ocurre que

$$-\delta-1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\delta = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$$

o también

$$\delta-1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\delta = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Entonces: $\delta = \dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$



$|x - 1/2| < \delta$
$-\delta < x - \frac{1}{2} < \delta$
$-\delta + \frac{1}{2} < x < \delta + \frac{1}{2}$
ocurre que
$-\delta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2{,}01}$
$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2{,}01}$
o también
$\delta + \frac{1}{2} = \frac{1}{1{,}99}$
$\delta = \frac{1}{1{,}99} - \frac{1}{2}$

Entonces: $\delta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2{,}01}$

16. $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0{,}02$

$|(2x - 2) - (-6)| < 0{,}02$
$|2x + 4| < 0{,}02$
$-0{,}02 < 2x + 4 < 0{,}02$
$-4{,}02 < 2x < -3{,}98$
$-2{,}01 < x < -1{,}99$

$|x - (-2)| < \delta$
$-\delta < x + 2 < \delta$
$-\delta - 2 < x < \delta - 2$
entonces $2 - 1{,}99 = 0{,}01$ y
$2{,}01 - 2 = 0{,}01$, por lo
tanto $\delta = 0{,}01$

22. $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0{,}1$

$|x^2 - 3| < 0{,}1$
$-0{,}1 < x^2 - 3 < 0{,}1$
$2{,}9 < x^2 < 3{,}1$
$\sqrt{2{,}9} < x < \sqrt{3{,}1}$

$|x - \sqrt{3}| < \delta$
$-\delta < x - \sqrt{3} < \delta$
$-\delta + \sqrt{3} < x < \delta + \sqrt{3}$
$-\delta + \sqrt{3} = \sqrt{2{,}9}$
$\delta = \sqrt{3} - \sqrt{2{,}9}$

tambien sucede
$\delta + \sqrt{3} = \sqrt{3{,}1}$
$\delta = \sqrt{3{,}1} - \sqrt{3}$

delta es: $\sqrt{3{,}1} - \sqrt{3}$

25. $f(x) = x^2 - 5, L) = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$

$|(x^2 - 5) - 11| < 1$
$|x^2 - 16| < 1$
$-1 < x^2 - 16 < 1$
$\sqrt{15} < x < \sqrt{17}$

$|x - 4| < \delta$
$-\delta < x - 4 < \delta$
$-\delta + 4 < x < \delta + 4$

$-\delta + 4 = \sqrt{15}$
$\delta = 4 - \sqrt{15}$
o también
$\delta + 4 = \sqrt{17}$
$\delta = \sqrt{17} - 4$

por lo tanto: $\delta = \sqrt{17} - 4$

29. $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$

$|(mx+b) - (1/2m+b)| < c$
$-c < mx - \frac{m}{2} < c$
$-c\frac{m}{2} < mx < c\frac{m}{2}$
$\frac{1}{2} - \frac{c}{m} < x\frac{1}{2} + \frac{c}{m}$
por lo tanto: $\delta = \frac{c}{m}$

$|x - \frac{1}{2}| < \delta$
$-\delta < x - \frac{1}{2} < \delta$
$-\delta + \frac{1}{2} < x < \delta + \frac{1}{2}$

$-\delta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c}{m}$
$\delta = \frac{c}{m}$
o también
$\delta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{c}{m}$
$\delta = \frac{c}{m}$

C A L C U L O

TAREA 7

Héctor Miguel Palomares Maldonado

1. hallar los siguientes limites (Estos limites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas).

   i $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

   $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(1)^2 - 1}{1 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0$

   ii $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

   $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} = (x^2 + 2x + 4) = 12$

   iii $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

   $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \dfrac{27 - 8}{3 - 2} = 19$

   iv $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$

   $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y} = \lim\limits_{x \to y} x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} = y^{n-1} + y^{n-1} + ... + y^{n-1} = ny^{n-1}$

   v $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$

   $\lim\limits_{y \to x} x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} = x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} = nx^{n-1}$

   vi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$

   $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \left(\dfrac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \right) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

2. Hallar los limites siguientes

   i $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

   $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \left(\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$

   ii $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

iii $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$$

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l|<\varepsilon$ para todo x que satisface $|x-a|<\delta$.

i $f(x)=x^4, l=a^4$

Dado $|x-a|<1$, tenemos $|x|-|a|<| \rightarrow |x|<1+|a|$ y sabemos que:

$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3=$

por lo tanto:

$x^3+ax^2+a^2x+a^3 \leq |x|^3+|a|\cdot|x|^2+|a|^2\cdot|x|+|a|^3$

$x^3+ax^2+a^2x+a^3 < (1+|a|)^3+|a|(1+|a|)^2+|a|^2(1+|a|)+|a|^3$

por lo cual elegimos el mínimo

$$\delta = min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^3+|a|(1+|a|)^2+|a|^2(1+|a|)+|a|^3}\right)$$

ultilizando el lema:

$$|x^2-a^2| < min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|a|^2+1)}\right)$$

resulta que se cumple

$$|x-a| < min\left(1, \frac{min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|^2+1)}\right)$$

$$= min\left(1, \frac{\varepsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right) = \delta$$

ii $f(x)=\frac{1}{x}; a=1, l=1$

por el lema: $|\frac{1}{x}-1|<\varepsilon$ tenemos

$$|x-1| < min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \delta$$

iii $f(x)=x^4+\frac{1}{x}; a=1, l=2$

por el lema: $|(x^4+\frac{1}{x}-2|<\varepsilon$

Si $|\frac{1}{x}-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $|x^4-1<\frac{\varepsilon}{2}$

por los ejercicios anteriores.

$$|x-1| < min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, 1, \frac{\varepsilon}{(8)(2)(2)}\right)$$

$$= min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{32}\right) = \delta$$

iv $f(x) = \dfrac{1}{x + sen^2 x}; a = 0, l = 0$

9. Demostrar que $\lim\limits_{x \to a} = \lim\limits_{h \to 0}$. (En este ejercicio se trata principalmente de comprender el significado de los términos.)

   Sea $\lim\limits_{x \to a} = l$ que la función este definida $g(h) = f(a+h)$. y dado para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para x, si $0 < |x - a| < \delta$ por lo tanto $|f(x) - l| > \varepsilon$

   $0 < |h| < \delta$, entonces $0 < |(h+a) - a| < \delta$ por lo tanto, $|f(a+h) - l| < \varepsilon$ esto se puede ver como la siguiente desigualdad $|g(x) - l| < \varepsilon$

   $\lim\limits_{h \to 0} g(x) = l$ o $\lim\limits_{h \to 0} f(h+a) = l$ como los limites son iguales tenemos: $\lim\limits_{h \to 0} f(h+a) = m$ por lo cual $\lim\limits_{x \to a} f(x) = m$.

10. a) demostrar que $= \lim\limits_{x \to a} = l$ si y sólo si $= \lim\limits_{x \to a} [f(x) - l] = 0$ Véase primero por qué la preposición es evidente; dar después una demostración rigurosa. En este capitulo la mayor parte de los problemas en los que se piden demostraciones deben tratarse de la misma manera

    Suponga $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $g(x) = f(x) - 1$ dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para cualquier x con $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$, que convenientemente esta desigualdad se puede escribir $|g(x) - l| < \varepsilon$ de tal forma $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

    b) demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x - a)$.

    Suponga que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $g(x) = f(x - a)$ para un $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ para cualquier x, dado $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

    como: $0 < |y| < \delta$ se puede rescribir como $0 < |(y + a) - a| < \delta$ de forma que $|f(x + a) - l| < \varepsilon$ pero se observa que $|g(y) - l| < \varepsilon$ de forma de limite: $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = l$

    c) Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x^3)$

    sea $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$ para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal forma $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. dado $0 < |x| < min$ se obtiene $0 < |x^3| < \delta$ de forma que $|f(x^3) - l| < \varepsilon$ que puede verse $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3)$ existe, si tomamos $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = m$ se dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ para $0 < |x| < \delta$ entonces: $|f(x^3) - m| < \varepsilon$, $0 < |x| < \delta^3$ tenemos que $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$ tomando forma como: $|f(x) = -m| < \varepsilon$ escribiéndolo como limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = m$.

40. a) Hallar el perímetro de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r; para las funciones trigonométricas que entren en juego, utilizar el radian como argumento.

Vemos que se obtiene: un angulo de $\dfrac{2\pi}{n}$ en toda la circunferencia

El ángulo BOC es de $\dfrac{\pi}{n}$.

por lo que $BC = rsen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

$AC = 2rsen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

por lo tanto el perímetro es $2rnsen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

b) ¿A qué valor se aproxima este perímetro cuando n es muy grande?

$\lim\limits_{x\to\infty} 2rxsen\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 2r\dfrac{x}{\pi}sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = 2a\pi r\Phi$

circ.jpg

C A L C U L O

TAREA 8

Hector Miguel Palomares Maldonado

15. Calcular los limites siguientes en función del numero $\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}$

i $\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(senx)(cosx)}{x} = 2\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 2\alpha$

ii $\lim_{x\to 0} \frac{senax}{senbx}$

$\lim_{x\to 0} \frac{senax}{senbx} = \lim_{x\to 0} \frac{a(senx)(cosx)}{b(senx)(cosx)} = \left(a\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right)\left(\frac{1}{b}\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right) = a\alpha \cdot \frac{1}{b\alpha} = \frac{a}{b}$

iii $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 2x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 2x}{x} = \lim_{x\to 0} sen2x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} = \left(2\lim_{x\to 0}(senx)(cosx)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{2(senx)(cosx)}{x}\right) =$

$\left(2\lim_{x\to 0}(senx)(cosx)\right) \cdot \left(2\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right) = 0 \cdot 2\alpha = 0$

iv $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 2x}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{2(senx)(cosx)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{2(senx)(cosx)}{x}\right)$

$= \left(2\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right)\left(2\lim_{x\to 0} cosx \cdot \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right) = (2\alpha)(2\alpha) = 4\alpha^2$

v $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}\left(\frac{1+cosx}{1+cosx}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{(x^2)(1+cosx)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+cosx}\right)$

$= (\alpha)(\alpha)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{2}$

vi $\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x + 2x}{x+x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x + 2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen^2 x}{cos^2 x} + 2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen^2 x}{xcos^2 x} + 2}{1+x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{senx}{x} \cdot \frac{senx}{cos^2 x} + 2}{1+x} = \frac{(\alpha)(0)+(2)}{1+0} = 2$

vii $\lim_{x\to 0} \frac{xsenx}{1-cosx}$

$\lim_{x\to 0} \frac{xsenx}{1-cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{xsenx}{1-cosx}\left(\frac{1+cosx}{1+cosx}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(xsenx)(1+cosx)}{sen^2 x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{senx}{senx}\right)\left(\lim_{x\to 0} 1+cosx\right)$

$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)(1)(1+cos(0)) = \frac{2}{\alpha}$

viii $\lim_{h\to 0} \dfrac{sen(x+h)-senx}{h}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{senxcosh + cosxsenh - senx}{h}$

$\lim_{h\to 0} senx\dfrac{cosh-1}{h} + \lim_{h\to 0} cosx\dfrac{senh}{h}$

$\left(\lim_{h\to 0} senx\right)\left(\lim_{h\to 0} \dfrac{cosh-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0} cosx\right)\left(\lim_{h\to 0} \dfrac{senh}{h}\right)$

$= (senx)(0) + (cosx)(\alpha)$

$= \alpha cosx$

ix $\lim_{x\to 1} \dfrac{sen(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{sen(x^2-1)}{x-1}\left(\dfrac{x+1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(sen(x^2-1))}{x^2-1} = \left(\lim_{x\to 1} x+1\right)\left(\lim_{x\to 1} \dfrac{sen(x^2-1)}{x^2-1}\right) = 2\alpha$

x $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+senx)}{(x+senx)^2}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+senx)}{(x+senx)^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x^2(3+senx)}{x^2}}{\dfrac{(x+senx)^2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{3+senx}{\left(1+\dfrac{senx}{x}\right)^2} = \dfrac{3}{(1+\alpha)^2}$

xi $\lim_{x\to 1} (x^2-1)sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$

$\lim_{x\to 1} (x^2-1)sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3 = \lim_{x\to 1}((1)^2-1)\lim_{x\to 1} sen\left(\dfrac{1}{(1)-1}\right)^3 = 0$

17. (a) Demostrar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea l, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = l$ es falso

para cualquier $\delta > 0$, existe un x tal que $0 < |x| < \delta$

observamos: $\dfrac{1}{x} > |l| + \varepsilon$, $x = min\left(\delta, \dfrac{1}{|l|+\varepsilon}\right)$ que no satisface $|1/x - l| < \varepsilon$

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ no existe.

Dado un $\delta > 0$ existe un x que cumple $0 < |x-1| < \delta$

observamos: $\dfrac{1}{x-1} > |l| + \varepsilon$, $x = min\left(1+\delta, +\dfrac{1}{|l|+\varepsilon}\right)$ que no cumple $|\dfrac{1}{x-1} - l| < \varepsilon$

33. Hallar los limites siguientes

i $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+sen^3x}{5x+6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+sen^3x}{5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{sen^3x}{x}}{5+\dfrac{6}{x}} = \frac{1}{5}$$

ii $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xsenx}{x^2+5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xsenx}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{xsenx}{x}}{\dfrac{x^2+5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{senx}{x+\dfrac{5}{x}} = 0$$

iii $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}+\dfrac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

iv $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+sen^2x)}{(x+senx)^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+sen^2x)}{(x+senx)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2(1+sen^2x)}{x^2}}{\dfrac{(x+senx)^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+sen^2x}{\left(1+\dfrac{senx}{x}\right)^2}$$ No existe, ya que

$1+sen^2x$, $x\to\infty$ (x tiende a infinito)

39. Hallar los siguientes limites, si existen

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}-\dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{7x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{7}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{4}{\infty}-\dfrac{7}{\infty}}{\dfrac{7}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+0+0}{0+0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1+sen^2x) = \infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} xsen^2x$ No existe

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2sen\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2sen\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x \lim_{x\to\infty} xsen\frac{1}{x}$$

resolviendo individualmente los limites

$\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} xsen\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\dfrac{1}{x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \alpha$$

por lo que tenemos

$$= \lim_{x\to\infty} x \lim_{x\to\infty} x sen\frac{1}{x} = (\infty)(\alpha) = \infty$$

(v) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$$

(vi) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} = \infty$$

(vii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

1. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F del dominio tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

   (i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

   $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

   entonces $F(x) = x+2$

   (ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ no existe el limite cuanto x tiende a 0

   (iii) $f(x) = 0, x$ inrracional

   La función existe y es: $F(x) = 0$

   (iv) $f(x) = \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}$ racional en fracción irreducible

2. ¿En que puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

   4-17

   (i) $f(x) = [x]$ en todo punto excepto el entero. por ser mayor entero

   (ii) $f(x) = x - [x]$ es en todo punto excepto en los enteros

   (iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$ es continua en todo punto excepto en los enteros

   (iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ es continua en todo punto

   (v) $f(x) = [\frac{1}{x}]$ es continua en todo punto excepto el cero y en uno por ser entero

   (vi) $f(x) = \dfrac{1}{[\frac{1}{x}]}$ es continua en el intervalo $(-1, 1)$ excepto el cero.

   4-19

   (i) $f(x) =$ es primer número del desarrollo decimal de x

   para todo punto de la forma $p + \dfrac{q}{10}$ donde p y q son enteros

   (ii) $f =$ el segundo número del desarrollo decimal x

   para todo punto de la forma $p + \dfrac{q}{100}$ donde p y q son enteros

   (iii) $f =$ el número de sietes del desarrollo decimal x si este número es finito y 1 en el caso contrario.

   (iv) $f(x) = 0$ si el número de sietes del desarrollo decimal x es finito y 1 en el caso contrario.

   no es continua

   (v) $f(x) =$ el número obtenido sustituyendo todas las cifras del desarrollo decimal de x que vienen después del primer 7 (si las hay) por 0

   es continua en la expansión de 7.9999999

   (vi) $f(x) = 0$ si 1 no aparece en el desarrollo decimal de x y n Sí 1 no aparece por primera vez en el n-ésimo lugar.

   la función es continua en todo punto cuya expansión decimal contiene al menos un 1.

3. (a) supóngase que f es una función que satisface $|(f(x)| \leq |x|$ para todo x Demostrar que f es continua en 0 [observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.]

   si, $\lim_{x\to\infty} f(h) = 0$ en $|h| < \delta$ implica $|f(x) - f(0)| = |f(h)|$ entonces $|f(h)| < \delta$

   (b) Dar un ejemplo de una función que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

   cuando: $f(x) = 0$ para toda x que sea irracional

   $f(x) = x$ para x racional.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x racional \\ \\ -1 & \text{si} \quad x inrracional \end{cases}$$

C A L C U L O

TARAREA 9

Hector Miguel Palomares Maldonado

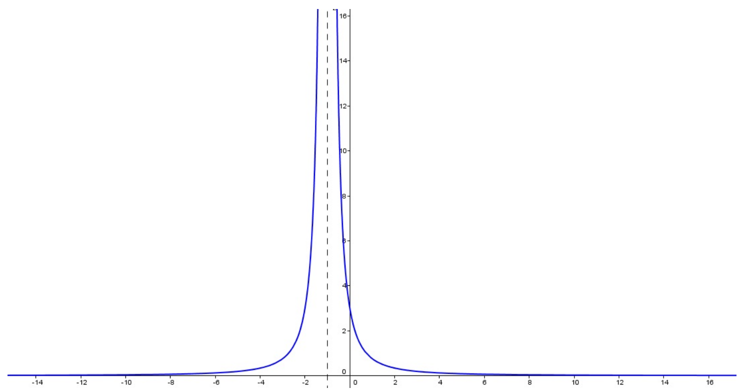
Capitulo 1 Purcell

En los problemas del 44 al 47 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las graficas de las funciones indicadas. Después dibuje sus gráficas

44. $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0$$
$$\lim_{x\to-1^+} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty$$

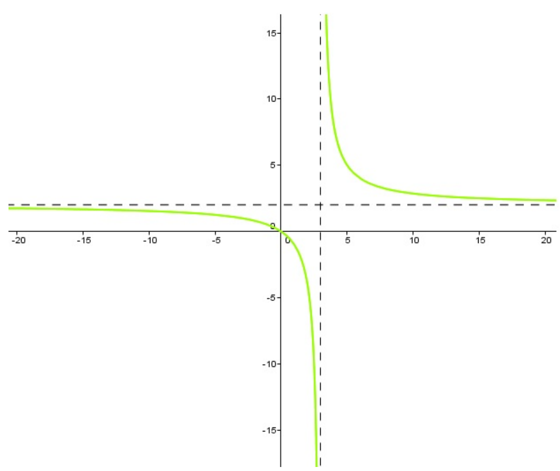
Asíntota Vertical $x = -1$
Asistota Horizontal $y = 0$



45. $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1-\frac{3}{x}} = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\frac{3}{x}} = 2$$
$$\lim_{x\to3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$
$$\lim_{x\to3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

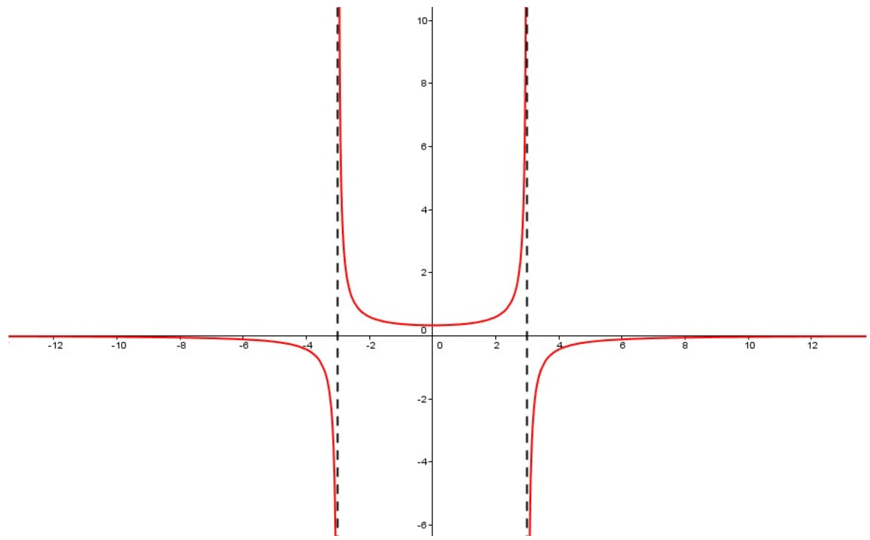
Asíntota Vertical $x = 3$
Asistota Horizontal $y = 2$



46. $f(x) = \dfrac{3}{9-x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{9-x^2} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{9-x^2} = 0$
$\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{3}{9-x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{3}{9-x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{3}{9-x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{3}{9-x^2} = -\infty$

Asíntota Vertical $x = -3$ y $x = 3$
Asistota Horizontal $y = 0$

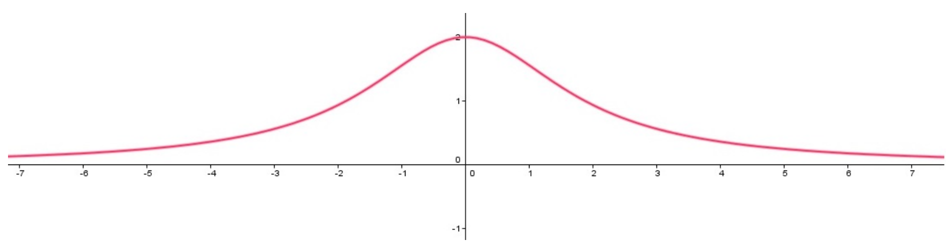


47. $g(x) = \dfrac{14}{2x^2+7}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{14}{2x^2+7} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{14}{2x^2+7} = 0$

Asistota Horizontal $y = 0$

No tiene Asíntota vertical
$2x^2 + 7 > 0$ para toda x
$x = \pm\sqrt{-\dfrac{7}{2}}$
En $\mathbb{R}$ no existe las raices de x



49. La recta $y = ax+b$ se denomina asintota oblicua a la gráfica de $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ o $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

sugerencia Comience comience por dividir el denominador entre el numerador.

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline x^3-1 & 2x^4+3x^3-2x-4 \\ & \underline{-2x^4 \qquad\quad 2x} \\ & \underline{\quad 3x^3 \qquad -4} \\ & \underline{-3x^2 \qquad +3} \\ & \qquad\qquad\quad 1 \end{array}$$

$f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x^3-1}$
$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{1}{x^3-1} = 0$
por lo que la asíntota es:
$y = 2x + 3$

50. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{3x^3+4x^2-x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 3x+4 \\
x^2+1 & \overline{\big)\,3x^3+4x^2-x+1} \\
 & \underline{-3x^3 \qquad\quad -3x} \\
 & \qquad 4x^2 \; -4x \\
 & \qquad \underline{-4x^2 \qquad -4} \\
 & \qquad\qquad -4x-3
\end{array}$$

$$f(x) = 3x+4-\frac{4x+3}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(3x+4)] = \lim_{x\to\infty} -\frac{4x+3}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

la asintota oblicua es: $y = 3x+4$

Capitulo 6 Spivak

6. (a) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.... pero continua en todos los demás puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 2. & x > 1 \end{cases}$$

(b) Hallar una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ y en 0, pero que sea continua en los demás puntos.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 2. & x > 1 \end{cases}$$

7. Supóngase que f satisface $f(x+y) = f(x)+f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a

Observe que $f(x+0) = f(x)+f(0)$ por lo cual $f(0) = 0$ entonces:

$\lim_{h\to 0} f(h+a) - f(a)$

$\lim_{h\to 0} f(h)+f(a)-f(a)$

$\lim_{h\to 0} f(h)$

$\lim_{h\to 0} f(h) - f(0) = 0$

por lo cual f es continua en cero.

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $a \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a

   Supongase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

   Como $(f + \alpha)(a) \neq 0$ entonces $f + \alpha$ es distinto de cero en a.

13. (a) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en $\mathbb{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$. Indicación: puesto que hay evidentemente un gran margen para elegir. hágase la prueba con g constante en $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$

    Como f es continua en $[a, b]$ $\lim\limits_{h \to a} f(h)$ y $\lim\limits_{h \to b} f(h)$ tenemos:

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{h \to a^+}, & x \leq a \\ \\ f(x) & a \leq x \leq b \\ \\ \lim\limits_{h \to a^-} & b \leq x \end{cases}$$

    (b) Hágase ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa se se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

    si! $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$

14. (a) Supóngase que g y h son continuas en a y que $g(a) = h(a)$. Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $\leq a$. Demostrar que f es continua en a;

    existe el limite de:

    $\lim\limits_{x \to 0} f(a + x)$ y toma valores: $f(a) = g(a) = h(a)$

    $\lim\limits_{x \to 0^+} f(a + x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(a + x) = g(a)$

    $\lim\limits_{x \to 0^-} f(a + x) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(a + x) = h(a)$

    (b) Supóngase que g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$. Sea $f(x)$ igual a $g(x)$ para x en $[a, b]$ e igual a $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demostrar que f es continua en $[a, c]$. (Asi, pues, las funciones continuas pueden *soldarse*.)
    $\lim\limits_{x \to 0^+} f(a + x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(a + x)$

    Si f es continua en c como ya esta demostrado. y en $[a, b]$ existe un $x \neq c$ porque f , g y $h(x)$ coinciden en un intervalo respecto a x.

C A L C U L O

TAREA 10

Hector Miguel Palomares Maldonado

spivak capitulo 7

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo (Observe que puede tener estas propiedades aun no siendo continua y aunque el intervalo no sea cerrado

   (i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$ la función esta acotada superiormente e inferiormente alcanza el minimo en 0

   (ii) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$ La función esta acotada superiormente e inferiormente pero no tiene máximos ni mínimos

   (iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ El 0 cota inferior donde igual alcanza en mínimo de f

   (iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$ El 0 es cota inferior, donde igual alcanza en mínimo de f

   (v)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x < a \end{cases}$$
   en $(-a-1, a+1)$ considerar distintos valores para a
   en x^2, $x < a$ esta acotada superiormente y alcanza un máximo

   (vi)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$$

   (vii)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x, inrracional \\ 1/q, & x = p/q \end{cases}$$
   p/q fracción irreducible en [0,1].

   la función tiene cota superior e inferior alcanza su valor maximo en 1 y su valor mínimo en 0

   (viii)
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & x, inrracional \\ 1/q, & x = p/q \end{cases}$$
   p/q fracción irreducible en [0,1].

   la función tiene cota superior e inferior, alcanza su valor maximo en 1

(ix)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x, inrracional \\ \\ -1/q, & x = p/q \end{cases}$$

p/q fracción irreducible en [0,1].
en $[0, 1]$.

la función tiene cota superior e inferior, alcanza su valor maximo en 1

(xi) $f(x) sen^2 \left(cosx + \sqrt{1+a^2}\right)$ en $[0, a^2]$

la función sen de 0 no esta definida, pero en este caso la función nunca es 0 por lo tanto es continua y tiene máximo y mínimo

(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$

la función tiene cota superior e inferior, alcanza su valor mínimo en 0 y maximo en a

2. Para cada una de las siguientes funciones polinomicas f. hallar en entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.
$(-2)^3 - (2) + 3 = -3$
$(-1)^3 - (-1) + 3 = 3$
vemos que en el intervalo $(-2, -1)$existe un cambio de signo, entonces se cumple $f(x) = 0$

(ii) $f(x) x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
$(-5)^5 + 5(-5)^4 + 2(-5) + 1 = -1889$
$(-4)^5 + 5(-4)^4 + 2(-4) + 1 = 2307$
En el intervalo $(-5, -4)$ existe un cambio de signo por lo tanto se cumple $f(x) = 0$

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.
$(0)^5 + (0) + 1 = 1$
$(-1)^5 + (-1) + 1 = -1$
en el intervalo $(-1, 0)$ existe el cambio de signo y por lo tanto es $f(x) = 0$

(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
$f(x) = (2x - 1)^2$
$f(x) = 0$ es $\dfrac{1}{2}$

3. Demostrar que existe algún numero x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + sen^2 x} = 119$
$(1)^{179} + \dfrac{163}{1 + (1)^2 + sen^2(1)}$ es mayor que cero
$(-2)^{179} + \dfrac{163}{1 + (-2)^2 + sen^2(-2)}$ es menor que cero
en -2 y 1 existe el cambio de signo y por lo tanto es $f(x) = 0$ dentro del intervalo $(-2, 1)$

(ii) $senx = x - 1$
$f(x) = x - 1$
$[sen(x)] - x + 1$ tenemos $f(0) > 0$ y $f(2) = (sen2) - 1 < 0$

4. Este problema es una continuación del problema $3-7$.

   (a) Si $n-k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinomica de grado n que tenga exactamente k raíces.
   $f(x) = (x^{n-k} - 1) + (x - a_1) + (x - a_2) + \cdots\cdots + (x - a_k)$
   donde $x^{n-k} - 1$ no tiene raíz y $a_1 \neq a_2 \neq a_n$

   (b) Una raíz de la función polinómica f se dice que tiene **multiplicidad** m si $f(x) = (x-a)^m g(x)$ donde g es una función polinómica que no tiene la raiz a. Sea f una función polinómica de grado n Supóngase que f tiene k raíces, contando las multiplicidades, es decir, supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces demostrar que $n-k$ es par.

   del inciso (a) sabemos que:

   $f(x) = (x - a_1) + (x - a_2) + \cdots\cdots + (x - a_k)$

   cada termino del polinomio tiene raíz, y por $f(x) = (x-a)^m g(x)$ podemos ver el polinomio como:

   $f(x) = (x - a_1)^{m_1} + (x - a_2)^{m_2} + \cdots\cdots + (x - a_k)^{m_r} g(x)$

   donde las multiplicidades son $m_1 ... m_r$ lo cual es igual a k. g tiene grado $n - (m_1 + ... + m_r)$ y lo podemos rescribir como $n-k$ quedado como en el inciso (a) donde $g(x)^{n-k}$ no tiene raíces pero $n-k$ es par.

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$ y que $f \neq 0$ para todo x Demostrar que o bien $f = g$ para todo x o bien $f(x) = -g(x)$

   Demostración

   tenemos $f^2 = g^2$ para todo x Entonces : $f^2(x) = g^2(x)$

   $f^2(x) - g^2(x) = 0$

   $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$

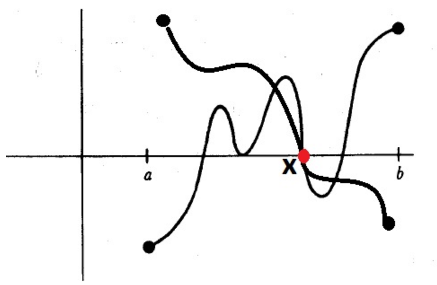
   asi obtenemos que

   $f^2(x) = g^2(x)$ puede ocurrir $f(x) = g(x)$

   o tambien ocurre

   $f^2(x) = g^2(x)$ puede ocurrir $f(x) = g(x)$

10. Supóngase que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$ pero $f(b) > g(b)$ Demostrar que $f(x) = g(x)$ para un x en $[a, b]$. (si la demostración no es muy corta no esta bien.)



Si la función es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe al menos un x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$

Si la función es continua en $[a, b]$ y $g(a) < 0 < g(b)$ entonces existe al menos un x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$

entonces como ambas funciones son continuas en el mismo intervalo existe algun x tal que $f(x) = g(x)$

C A L C U L O

TAREA 11

Hector Miguel Palomares Maldonado

Spivak capitulo 8

1. Hallar la cota superior mínima y la cota inferior máxima (si existen) de los siguientes conjuntos. Decidir también qué conjuntos tienen elemento máximo o elemento mínimo (es decir, decidir cuándo la cuota superior mínima y la cota inferior mínima y la cota inferior máxima pertenecen al conjunto).

   (i) $\left\{\frac{1}{n} : n \text{ en } \mathbb{N}\right\}$

   el máximo es 1, y la cuota inferior es 0 y esté no se escribe de la forma p/q asi que no esta en el conjunto.

   (ii) $\left\{\frac{1}{n} : n \text{ en } \ \text{ y } n \neq 0 \ \right\}$

   el máximo es 1

   (iii) $\{x : x = 0 \text{ o } x = 1/n \text{ para algún } n \text{ en } \mathbb{N}\}$

   el máximo es 1 y el mínimo es 0

   (iv) $\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ es racional } \}$

   solo tiene minimo en 0 y el sup. es $\sqrt{2}$

   (v) $\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\}$

   las raices son complejas, por lo tanto en $\mathbb{R}$no podemos decir si tiene cotas

   (vi) $\{x : x^2 + x - 1 \leq 0\}$

   ya que las raices del polinomio son: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ podemos decir que $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ es el ínfimo y $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ el supremo pero no están dentro del conjunto.

   (vii) $\{x : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\}$

   ya que las raices del polinomio son: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ podemos decir que $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ es el elemento menor por lo tanto es la cota inferior máxima y $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ es la cota es cero. y no están dentro del conjunto.

   (viii) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \text{ en } \mathbb{N}\right\}$

   si n es par obtenemos números positivos, de la forma $\frac{p}{q}$ donde $\frac{1}{2}$ es el mayor, en consecuencia $1 - \frac{1}{2}$ es el máximo.

   por otra parte -1 es la cota inferior cuando $n = 1$

2. (a) Supongamos que $A \neq \phi$ esta acotado inferiormente. Designemos por $-A$el conjunto de todos los $-x$ con x en A. Demostrar que $-A \neq \phi$, que $-A$ está acotado superiormente, y que $-sup(-A)$ es la cota inferior máxima de a

si A es un conjunto no vacío cualquier x en $\mathbb{R}$ está en A, podemos decir que A está acotado superiormente, dado que existe algún $y \geq$ y también $-y \leq -x$ para todo x de A

por otra parte existe un elemento mayor a $-y$ en $-A$. por lo que podemos decir que $-A$ esta acotado interiormente

suponga que $a = sup(-A)$ entonces a es cota superior de A por lo que $-a$ es cota inferior de A.

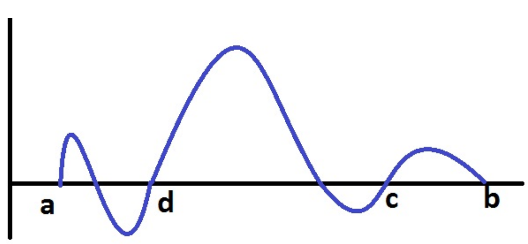
(b) si $A \neq \phi$ está acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A: Demostrar que $B \neq \phi$, que B está acotado superiormente, y que B es la cota inferior máxima de A

Como B es cota inferior de A donde A es un conjunto no vació, entonces B es no vacío $B \neq \phi$.

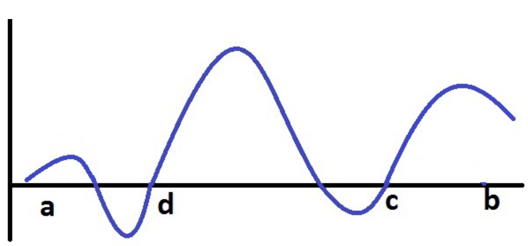
si B es el conjunto de las cotas inferiores que están en A, y existe por lo menos algún x tal que $x > y$ tales que y pertenece a B y x pertenece A, por lo que B esta acotado superiormente $\beta = \sup B$ y como el conjunto B son las cotas inferiores de A, puede suceder que β es cota inferior de A

ahora suponemos que β no es cota inferior de A entonces algún x en el conjunto A sería $x < \beta$, y implica que es cota mínima de B entonces hay un y que $x < y < \beta$, ¡contradicción! dado que $x < y$ eso significa que y no es cota inferior del conjunto A en consecuencia no esta en B.

4. (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Supóngase que tambien que $f(x_0) > 0$ para algún x_0 en $[a, b]$. Demostrar que existen números c y d con $a \leq c < x_0 < d \leq b$ y tales que $f(c) = f(d) = 0$ pero $f(x) > 0$ para todo x de (c, d). Indicación:será útil aplicar el problema anterior.



(b) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < f(b)$. Demostrar que hay números c y d con $a \leq c < d \leq b$ tales que $f(c) = f(a)$ y $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x de (c, d).



12. Supóngamos que A y B son dos conjuntos no vacíos de números tales que $x \leq y$ para todo x de A y todo y de B.

   (a) Demostrar que sup $A \leq y$ para todo y de B.
   tenemos que para todo y de B cumple $y \geq x$ para todo x, y x esta en A
   si B es cota superior de A, entonces $y \geq$ sup A.

   (b) Demostrar que sup $A \leq$ inf B.
   como ya se demostró que el sup es A, entonces B le queda ser en inf.
   inf$B \leq$ sup A
   $A \leq$ inf B.

C A L C U L O

TAREA 12

Hector Miguel Palomares Maldonado

Calcule las derivadas de las funciones utilizando la definición. Después, determine los valores de las derivadas que se especifican.

4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}; k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

$$k'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(z+h)}{2(z+h)} \; \frac{1-z}{2z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-z-h)z-(1-z)(z+h)}{[2(z+h)][zh]} = \lim_{h\to 0} \frac{z-z^2-z-h+z^2+zh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2[(z+h][2h]} = \lim_{h\to 0} = \frac{-1}{2z(z+h)} = \frac{-1}{2z^2}$$

En $k'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

En $k'(1) = -\dfrac{1}{2}$

En $k'(\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{4}$

6. $r(s) = \sqrt{2s+1}$; $r'(0)$, $r'(1)$, $r'(1/2)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(s+h)+1}-\sqrt{2s+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(s+h)+1}-\sqrt{2s+1}}{h} \frac{\sqrt{2(s+h)+1}+\sqrt{2s+1}}{\sqrt{2(s+h)+1}+\sqrt{2s+1}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2s+2h+1-2s-1}{h(\sqrt{2(s+h)+1}+\sqrt{2s+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2(s+h)+1}+\sqrt{2s+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(s+h)+1}+\sqrt{2s+1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2s+1}} = \frac{1}{\sqrt{2s+1}}$$

En los siguientes ejercicios determine las derivadas indicadas.

10. $\dfrac{dv}{dt}$ si $v = t - \dfrac{1}{t}$

$$= \frac{dv}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\left((t+h)-\dfrac{1}{t+h}\right)-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-\dfrac{1}{t+h}+\dfrac{1}{t}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h(t+h)-1}{t+h}+\dfrac{1}{t}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ht(t+h)-t+(t+h)}{(t+h)t} = \lim_{h\to 0} \frac{ht^2+h^2t+h}{h[(t+h)t]} = \lim_{h\to 0} \frac{h(t^2+ht+1)}{h[(t+h)t]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{t^2+1}{t^2} = 1 + \frac{1}{t^2}$$

12. $\dfrac{dz}{dw}$ si $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3(w+h)-2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{3w-2}-\sqrt{3w+3h-2}}{(\sqrt{3w+3h-2})(\sqrt{3w-2})}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3w-2}-\sqrt{3w+3h-2}}{(h\sqrt{3w+3h-2})(\sqrt{3w-2})}\left(\frac{\sqrt{3w-2}+\sqrt{3w+3h-2}}{\sqrt{3w-2}+\sqrt{3w+3h-2}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3w-2)-(3w+3h-2)}{(h\sqrt{3w+3h-2})(\sqrt{3w-2})\left(\sqrt{3w-2}+\sqrt{3w+3h-2}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(\sqrt{3w+3h-2})(\sqrt{3w-2})(\sqrt{3w-2}+\sqrt{3w+3h-2})} = \frac{-3}{2(3w-2)\sqrt{3w-2}}$$

Deriva la función y encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor dado de la variable independiente

16. $y = (x+1)^3$, $x = -2$

$$\acute{y} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)^3-(x+1)^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)^3+3(x+1)^2h+3(x+1)h^2+h^3-(x+1)^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[3(x+1)^2+3(x+1)h+h^2]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}[3(x+1)^2+3(x+1)h+h^2 = 3(x+1)^2$$

la pendiente de la recta tangente en el valor dado

$m = 3(x+1)^2 = 3((-2)+1)^2 = 3$

Derive las funciones, Después encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto indicado

18. $w = g(z) = 1+\sqrt{4-z}$, $(z,w) = (3,2)$

$$\acute{g}(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{4-(z+h)}-\left(1+\sqrt{4-z}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{4-(z+h)}-\left(1+\sqrt{4-z}\right)}{h}\left(\frac{\sqrt{4-z+h}+\sqrt{4-z}}{\sqrt{4-z+h}+\sqrt{4-z}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(4-z-h)-(4-z)}{h\left(\sqrt{4-z+h}+\sqrt{4-z}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-z+h}+\sqrt{4-z}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-z+h}+\sqrt{4-z}} =$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{4-z}}$$

en $\acute{g}(3) = -\dfrac{1}{2}$ y la ecuación de la recta tangente en el punto $(3,2)$ es $W = -\dfrac{1}{2}z+\dfrac{7}{2}$

Determine los valores de la derivada

22. $\dfrac{dw}{dz}|_{z-4}$ si $w = z+\sqrt{z}$

$$\acute{w} = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z+h+\sqrt{z+h}-(z+\sqrt{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+\sqrt{z+h}-\sqrt{z}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{z+h}-\sqrt{z}}{h}\left(\frac{\sqrt{z+h}+\sqrt{z}}{\sqrt{z+h}+\sqrt{z}}\right) = \lim_{h\to 0}1+\frac{h}{h\left(\sqrt{z+h}+\sqrt{z}\right)} = \lim_{h\to 0}1+\frac{1}{\sqrt{z+h}+\sqrt{z}}$$

$1+\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ evaluando obtenemos: $1+\dfrac{1}{2\sqrt{(4)}} = \dfrac{5}{4}$

Use la formula

$$f'(x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

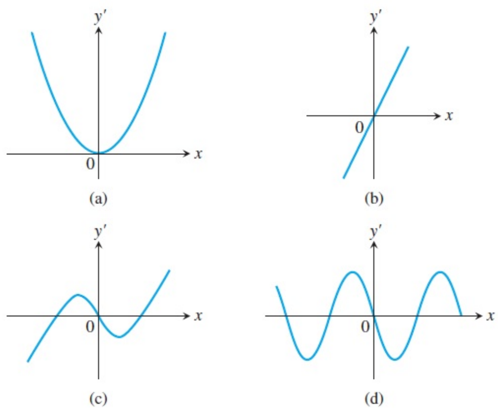
para encontrar la derivada de las funciones

25. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

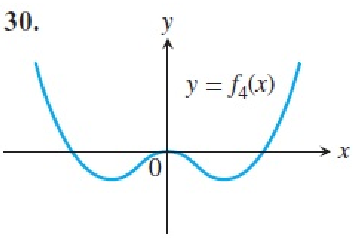
$$g'(x) = \lim_{z \to x} \frac{g(z) - g(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{x}{x-1}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\dfrac{z(x-1) - x(z-1)}{(x-1)(z-1)}}{z - x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{z(x-1) - x(z-1)}{(x-1)(z-1)(z-x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-(z-x)}{(x-1)(z-1)(z-x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x-1)(z-1)} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

Relacione las funciones graficadas con las derivadas graficadas en las figuras (a)-(d)



30.



esta gráfica tiene relación con la gráfica c.

31. a. La gráfica de la figura siguiente se compone de segmentos de recta unidos por sus extremos. ¿En qué puntos del intervalo $[-4, 6]$ no está definida f? Justifique su respuesta.

b. Grafique la derivada de f.

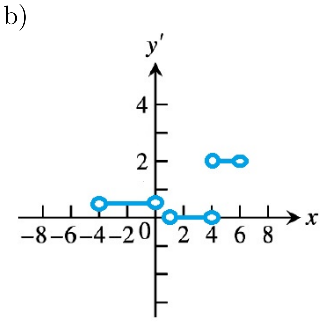
no esta definida en los puntos $x = 0, 1, 4$

la pendiente entre $(-4, 0), (0, 2)$ es $m = \dfrac{2-0}{0-(-4)} = \dfrac{1}{2}$

la pendiente entre $(0, 2)$ y $(1, -2)$ Es $m = \dfrac{-2-2}{1-0} = -4$

puesto a que no son iguales el limite No existe

b)



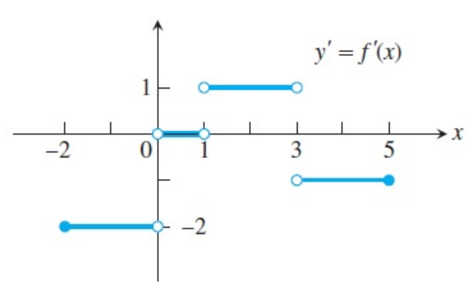
32. Recuperación de una función a partir de su derivada.

   a. Use la información siguiente para graficar la función f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$

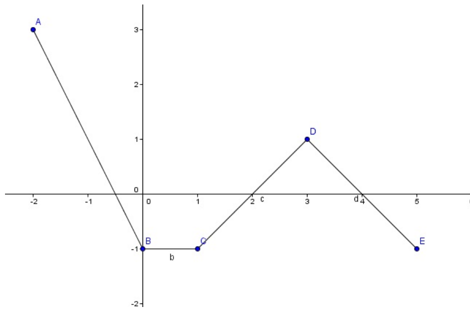
      i) La gráfica de f se compone de segmentos de recta cerrados, unidos por sus extremos.

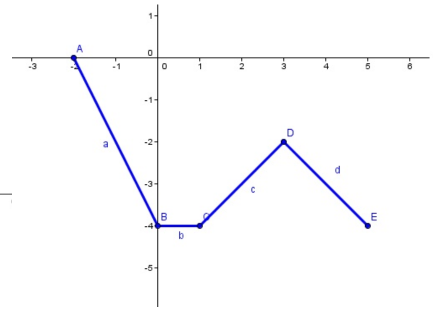
      ii) La gráfica empieza en el punto $(-2, 3)$

      iii) La derivada de f es la función escalonada que se muestra en la figura que aparece enseguida



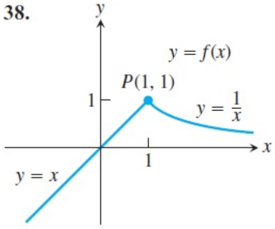
   b. Repita el inciso (a), suponiendo que la gráfica empieza en $(-2, 0)$ en lugar de $(-2, 3)$





Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda para demostrar que las funciones de los ejercicios 35 a 38 no son diferenciables en el punto P

38.



$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{-h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1}{1+h} = -1$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h-1}{h} = 1$$

Ya que el limite por la derecha es diferente al limite por la izquierda, decimos que la derivada de f No existe

En los ejercicios 39 a 44, cada una de las figuras muestra la gráfica de una función sobre un intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio se ve que la función es

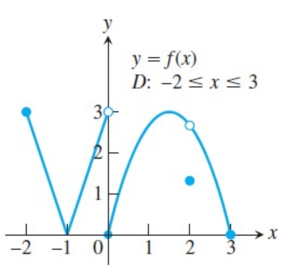
a. diferenciable?

b. continua pero no diferenciable?

c. ni continua ni diferenciable?

Justifique sus respuestas.

42.



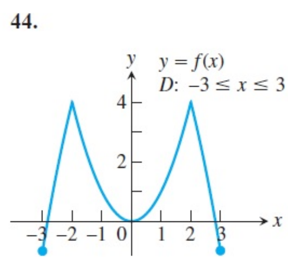
a) la función es diferenciable en

$-2 \le x \le -1$

$-1 < x < 0$

$0 < x < 2$
$2 < x \leq 3$

b) dado que no es extritamente que una función es continua pero no puede ser difereciable, tenemos en este caso que sucede en -1 veamos:
$\lim_{h \to 0^-} f(x) = -3$
$\lim_{h \to 0^+} f(x) = 3$
C) la función es continua pero no diferenciable en : $x = 0$ y $x = 2$
veamos en $x = 0$
$\lim_{h \to 0^+} f(x) = -3$
$\lim_{h \to 0^-} f(x) = 0$
y $x = 2$
$\lim_{h \to 2} f(x)$
NO existen los limites.



a) La funcion es diferenciable en
$-3 \leq x < -2$
$-2 < x < 2$
$2 < x \leq 3$
b) la funcion es continua pero no diferenciable en $x - 2$ y $x = 2$

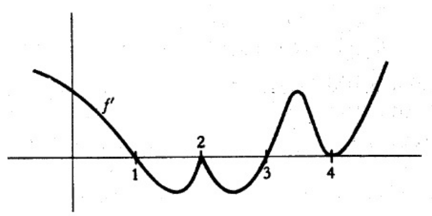
C A L C U L O

TARAEA 14

Hector Miguel Palomares Maldonado

Spivak Capitulo 11

19. La figura 30 muestra la gráfica de la derivada de f. Hallar todos los puntos máximos y mínimos locales de f



3 es un punto mínimo local

1 es un punto máximo local

28. Hallar todas las funciones f tal que

(a) $f'(x) = senx$

$f(x) = \int senx = cosx + c$

(b) $f''(x) = x^3$

$f'(x) = \int x^3 = \frac{x^4}{4} + c$

$f(x) = \int \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^5}{20} + cx + b$

(c) $f'''(x) = x + x^2$

$f'' = \int x + \int x^2$

$f'' = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + a$

$f' \int \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^3}{3} + \int a$

$f' = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + ax + b$

$f = \int \frac{x^3}{6} + \int \frac{x^4}{12} + \int ax + \int b$

$f = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{24} + \frac{ax^2}{2} + bx + c$

Thomas capitulo 3.7

10. Ca**lentamiento de un plato** Cuando un plato circular de metal se está calentando en un horno, su radio aumenta a razón de 0,01cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando su radio mide 50cm?

    el area es dado por $\quad A = \pi r^2 \quad$ la razón de cambio es $\dfrac{dr}{dt} = 0{,}0cm/min$

    $$\frac{dA}{dt} = \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
    $$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$
    $$\frac{dA}{dt} = 2\pi(50)\left(\frac{1}{100}\right)$$
    $$\frac{dA}{dt} = \pi cm^2/min$$

17. **Pila de arena** La arena cae a la parte superior de una pila cónica desde una banda transportadora, a una razón de $10m^3/min$ La altura de la pila siempre es tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian (a) la altura, y (b) el radio cuando la pila tiene $4m$ de altura? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

    el volumen de cono $\quad v = \frac{1}{3}^2$

    la altura del cono $\quad h = \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3}{4}\pi$

    el radio en terminos de la altura $\quad r = \frac{4}{3}h$

    a

    $$v = \frac{1}{3}^2$$
    $$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$$
    $$v = \frac{16}{27}\pi h^3$$

    $$\frac{dv}{dt} = \frac{16\pi}{27} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$
    $$\frac{dv}{dt} = \frac{16\pi h^2}{9} \cdot \frac{dh}{dt}$$
    $$\frac{dh}{dt}\frac{9}{16\pi(4)^2}(10) = \frac{90}{256\pi} \approx 11{,}14m/s$$

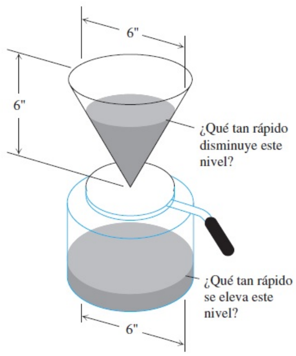
    b

    $$r = \frac{4}{3}h$$
    $$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$
    $$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\left(\frac{90}{256\pi}\right)$$
    $$\frac{dr}{dt} \approx 14{,}9cm/s$$

24. **Preparación de café** El café está pasando a través de un filtro cónico hasta una cafetera cilíndrica, a una razón de $10pulg^3/min$.

a. ¿Qué tan rápido sube el nivel de líquido en la cafetera cuando el café del cono tiene 5 pulgadas de profundidad?

b. ¿Qué tan rápido disminuye el nivel del cono en ese momento?



a)

$V = \pi r^2 h$ volumen de un cilindro donde el radio $r = 3$

$\frac{dV}{dt} = 9\pi \frac{dh}{dt}$ siendo $\frac{dh}{dt}$ la velocidad

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{9\pi} \cdot 10pulg^3/min$

$v = \frac{10}{9\pi} ln/min$

b

suponemos que la altura donde llega el agua es $r = \frac{h}{2}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

sustituyendo el radio

$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$V = \frac{\pi}{12} h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} 3h^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$

$v = \frac{4}{(5pulg)^2 \pi} \cdot 10pulg^3/min$

$v = \frac{8}{5} ln/min$

27. **Movimiento a lo largo de una parábola** Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de manera que sus coordenadas x (medidas en metros) crecen a una razón estable de $10m/seg$. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une la partícula con el origen cuando $x = 3m$?

$tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$tan\theta = \dfrac{x}{x^2}$

$tan\theta = x$

$sec^2\theta \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{sec^2\theta}\dfrac{dx}{dt}$

como dato tenemos $cos\theta = \dfrac{x}{y+x} \quad \dfrac{catetoopuesto}{hipotenusa} entonces..$

$cos\theta|_{x=3}\dfrac{x^2}{y^2+x^2}$

$\dfrac{3^2}{9^2+3^2} = \dfrac{3^2}{3^2(3^2+1)} = \dfrac{1}{10}$

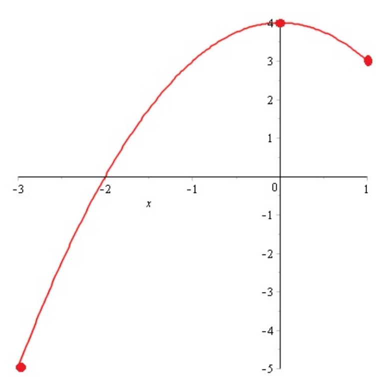
$\dfrac{d\theta}{dt}|_{x=3} = 1\text{rad/seg}$

Thomas capitulo 4.1

Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo dado. Después grafique la función. Identifique en la gráfica los puntos en dónde se alcanzan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

18. $f(x) = 4 - x^2, \qquad -3 \leq x \leq 1$

$f(x) = 4 - x^2$
$f'(x) = -2x$
$f(-3) = -5$
$f(0) = 4$
$f(1) = 3$
el extremo maximo absoluto lo alcanza en 4 en $x = 0$
el extremo minimo absoluto lo alcanza en -5 en $x = -3$



Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de la función y diga en dónde se alcanzan.

33. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \qquad -32 \leq x \leq 1$

$g(\theta) = \theta^{3/5}$
$g'(\theta) = \dfrac{3}{5}\theta^{-2/5}$
puntos críticos
$g(-32) = -8$
$g(1) = 1$
$g(0) = 0$
El Valor máximo se alcanza en 1 cuando $\theta = 1$
El Valor mínimo se alcanza en -8 cuando $\theta = -32$

encuentre los valores extremos de la función y especifique en dónde se alcanzan.

36. $y = x^3 - 2x + 4$

$y = x^3 - 2x + 4$
$y\acute{} = 3x^2 - 2$
$y\acute{} = 0$ cuando $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
Máximo local es $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, 4 + \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$
Mínimo local es $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, 4 - \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

encuentre la derivada en cada punto crítico y determine los valores extremos locales.

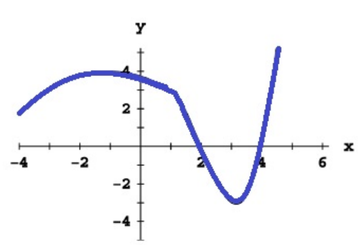
52.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4} & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x & x > 1 \end{cases}$$

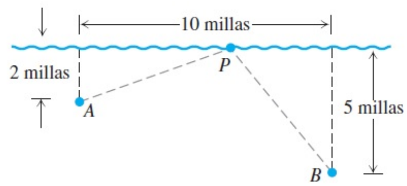
$f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4} \leq 1$
$f'(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$
$f'(x) = 0 \qquad$ cuando $\qquad x = -1$

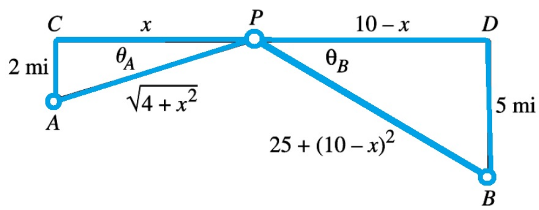
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$
$f'(x) = 0 \qquad$ cuando
$x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(3)(8)}}{6} = \dfrac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$
$x_1 = \dfrac{12 - \sqrt{48}}{6} \approx 0{,}84 < 1$
$x_2 = \dfrac{12 + \sqrt{48}}{6} \approx 3{,}15 > 1$

por lo tanto los puntos criticos son $x = -1$ y $x = 3{,}15$
El maximo local de f es 4
El minimo local de f es 3,07



57. Localización de una estación de bombero Dos pueblos están en el lado sur de un río. Se debe ubicar una estación de bombero para abastecer de agua los dos pueblos. Una tubería será conectada desde la estación de bombeo a cada pueblo a lo largo de una línea que conecte el pueblo con la estación de bombeo. Ubique la estación de bombero de manera que se minimice la cantidad de tubería que debe construirse





$L(x) = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{(10-x)^2+25}$
$L(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} + \dfrac{2(10+x)}{2\sqrt{(10-x)^2+25}}$
$L(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \dfrac{10+x}{\sqrt{(10-x)^2+25}}$
observemos:
$cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
$cos\beta = dfrac10 + x\sqrt{(10-x)^2+25}$
Podemos decir que son simétricos por lo tanto:
$x = \dfrac{x}{2} = \dfrac{10-x}{5} = \dfrac{20}{7}$ millas
en conclusión la estación de bomberos se debe colocar el linea recta donde las distancias entre los pueblos sean las mismas

69. **Funciones cúbicas** Considere la función cúbica

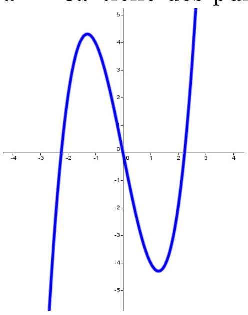
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a. Demuestre que f puede tener $0, 1$ o 2 puntos críticos Dé los ejemplos y haga las gráficas necesarias para apoyar su argumento.

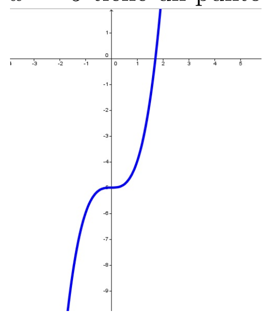
b. ¿Cuántos extremos locales puede tener f ? Puede tener hasta dos extremos locales, o no puede tener

Dado que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ es un polinomio de grado dos, solo puede tener hasta 2 ceros.

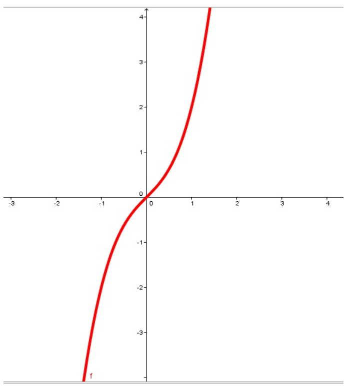
$x^3 - 5x$ tiene dos puntos críticos



$x^3 - 5$ tiene un punto critico



$x^3 + x$ No tiene puntos críticos



Thomas capitulo 4.2

Pruebe que las funciones del 15 tiene exactamente un cero en el intervalo dado.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \qquad [-2, -1]$

$f(-2) = (-2)^4 + 3(-2) + 1 = 11 \qquad f(-1) = (-1)^4 + 3(-1) + 1 = -1$
tenemos que por el teorema del valor intermedio existe algún 0 entre -2 y -1
$-2 < x < -1$
$-8 < x^3 < -1$
$-32 < 4x^3 < -4$
$-29 < 4x^3 + 3 < -1$
por otra parte veamos que $f'(x)$
$f'(x) = 4x^3 + 3$ en $-2 < x < -1 \quad f'(x) < 0$

45. **Cambio de temperatura** Un termómetro de mercurio tardó 14 segundos en subir de $-19°C$ a 100^oC cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que en algún momento el mercurio está subiendo a una razón de $8{,}5^oC/seg$.

$T(0) = 19° \qquad T(14) = 100° \qquad$ tenemos el periodo de tiempo es de $0 < t < 14$

Entonces la razón de cambio esta dada por $\dfrac{\triangle T(s)}{\triangle t} = \dfrac{T(14s) - T(0)}{14s - 0} =$

$\dfrac{100° - (-19°)}{14s} = 8{,}5°C/seg$

50. **Caída libre en la Luna** La aceleración de la gravedad en la Luna es $1{,}6m/seg^2$. Si se lanza una roca al interior de una grieta, ¿qué tan rápido estará cayendo justo antes de golpear el fondo 30 segundos después?

Sabemos que la aceleración esta dada por $a = \dfrac{dv}{dt}$

$\displaystyle\int \frac{da}{dt} = v$

$v = \displaystyle\int 1{,}6 = 1{,}6t + c$ pero la constante $c = 0$

$v(t) = 1{,}6(t)$

$v(30) = 1{,}6(30)$

$v = 48m/s$

C A L C U L O

TAREA 15

Hector Miguel Palomares Maldonado

Capitulo 4.4 Thomas

Use los pasos del procedimiento de graficación, para dibujar la gráfica de las funciones de los ejercicios 19, 31, 35 y 37. Incluya las coordenadas de todos los puntos extremos locales y de inflexión.

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

31. $y = x^{2/3}\left(\frac{2}{5} - x\right)$

35. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \qquad x \neq 0$

37. $y = |x^2 - 1|$

En cada uno de los ejercicios 43 y 47 se da la primera derivada de una función continua Encuentre y después use los pasos 2 a 4 del procedimiento de graficación (página 272) para trazar la forma general de la gráfica de f.

43. $y' = x(x - 3)^2$

47. $y = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

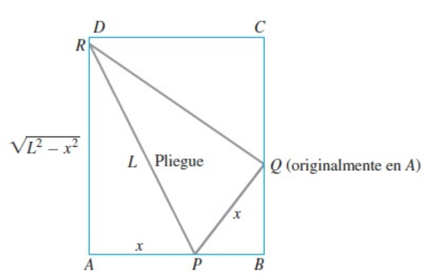
Capitulo 4.5 Thomas

25. **Doblado de papel** Se coloca una hoja de papel de 8,5 por 11 pulgadas sobre una superficie plana. Una de las esquinas se coloca sobre el lado opuesto más largo, como se muestra en la figura, y se mantiene ahí conforme se aplana el papel suavemente. El problema es hacer la longitud del pliegue tan pequeña como sea posible. Llamamos L a la longitud. Inténtelo con papel.

    a. Demuestre que $L^2 = \frac{2x^3}{2x - 8{,}5}$

    b. ¿Qué valorde x minimiza L?

    c. ¿Cuál es el valor de L



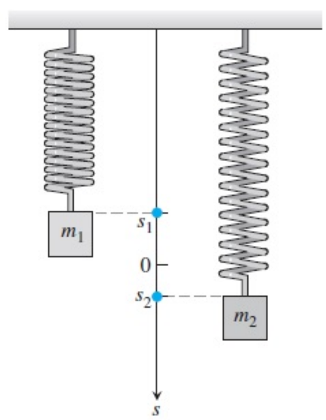
32. **La ruta más rápida** Juana está en una lancha a 2 millas de la orilla y quiere llegar a un pueblo costero que está a 6 millas en línea recta desde el punto de la orilla que es más cercano a la lancha. Ella puede remar a 2 millas/hora y caminar a 5 millas/hora. ¿Dónde debe dejar la lancha para alcanzar el pueblo en el tiempo mínimo?

36. **Movimiento sobre una recta** Las posiciones de dos partículas en el eje $s_1 = sent$ y $s_2 = sen(t + \pi/3)$, con s_1 y s_2 en metros y t en segundos.

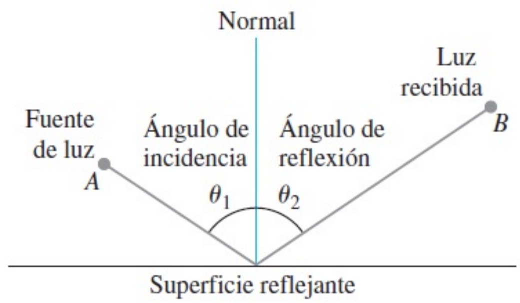
    a. ¿En qué momento(s) del intervalo $0 \leq t \leq 2$
    pi se encuentran las dos partículas en el mismo lugar? b. ¿Cuál es la máxima distancia a la que están separadas las partículas? c. ¿Cuándo, la distancia entre las partículas cambia más rápidamente en el intervalo $0 \leq t \leq 2$
    pi ?

38. Dos masas cuelgan de igual número de resortes, una al lado de la otra, y tienen posiciones $s_1 = 2sent$ y $s_2 sen2t$ respectivamente.

    a. ¿En qué tiempos, en el intervalo $0 < t$, las masas están una frente a la otra? (Sugerencia: $sen2t = 2sentcost$).
    b. ¿En qué momento del intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ se da la máxima distancia vertical entre las masas? ¿Cuál es esa distancia? (Sugerencia: $cos2t = 2os^2t - 1$).



40. El principio de Fermat en óptica En óptica, el principio de Fermat establece que la luz siempre viaja de un punto a otro a lo largo de la trayectoria que minimiza el tiempo de recorrido. La luz de una fuente A es reflejada por un espejo plano a un punto de recepción B, como se muestra en la figura. Muestre que para que la luz obedezca el principio de Fermat, el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión, ambos medidos desde la recta normal de la superficie reflejante. (Este resultado se puede obtener sin cálculo. Hay un argumento puramente geométrico,que usted pudiera preferir).


Normal
Luz
recibida
Fuente
de luz
Ángulo de
incidencia
Ángulo de
reflexión
A
B
θ_1
θ_2
Superficie reflejante