Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Academia de Matemáticas y Física

Electrodinámica

Presenta:
Palomares Maldonado Héctor Miguel

Enero - Mayo 2019

.

Índice

1. Electrostática

1. Una distribución de carga estática produce un campo eléctrico radial

$$E = A\frac{e^{-br}}{r}\hat{r}$$

Donde A y b son constantes

a) ¿Cual es la densidad de carga?

b) ¿Cual es la Carga total Q?

Solución:
La densidad de carga se calcula como:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla E = \epsilon_0 A \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-br}}{r}\right)\hat{r} = \epsilon_0\left(\frac{-bre^{-br} - e^{-br}}{r^2}\right) = -\epsilon_0 A e^{-br}(br+1)\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$Q = \int \rho dT = \epsilon_0 A \int_0^{\infty} e^{-br}(br+1)\frac{\hat{r}}{r^2} r dr = \epsilon_0 A \left[\int_0^{\infty} -be^{-br}dr - \int_0^{\infty} e^{-br}r^{-1}dr\right]$$

la primera integral

$$\int_0^{\infty} -be^{-br}dr = e^{-br}|_0^{\infty} = 1$$

La segunda integral
$u = \frac{1}{r}$, $du = -\frac{1}{r^2}dr$, $dv = e^{-br}dr$ y $v = \frac{e^{-br}}{-b}$

$$\int_0^{\infty} e^{-br}r^{-1}dr = -\frac{e^{-br}}{rb} - \frac{1}{b}\int_0^{\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr$$

2. Supongamos que, en lugar de la ley de fuerza de Coulomb, se descubriera experimentalmente que la fuerza entre dos cargas cualquiera q_1 y q_2 fuera

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_{12}})}{r_{12}^2}\hat{r}$$

donde α es una constante

a) Escriba el campo eléctrico E apropiado que rodea una carga puntual

b) Eliga una trayectoria alrededor de la carga puntual y calcule la integral de linea $\oint \bar{E}\cdot dl$ y compare su resultado con el de Coulomb

c) Encuentre $\oint \bar{E}\cdot dS$ sobre una superficie esférica de radio r_1 con el punto carga en el centro. Compárelo con el resultado de Coulomb.

d) Repita (c) para el radio $r_1 + \Delta$ y $\nabla \cdot E$ a una distancia r_1 de la carga puntual. Compare con el resultado de Coulomb. Tenga en cuenta que es Δ una cantidad pequeña.

Solución:

a) Tomemos la siguiente definición de campo eléctrico $E = F/q$ siendo F la fuerza

$$E_2 = \frac{F}{q_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_2})}{r_2^2}\hat{r}$$

o bien

$$E_1 = \frac{F}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_1})}{r_1^2}\hat{r}$$

escribiéndolo en términos de la densidad

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho}{r_1^2}\hat{r}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

b)

$$\int \bar{E}\cdot dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r}-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}\right]_a^b$$

si es una trayectoria alrededor de la carga puntual, entonces es una trayectoria cerrada, lo que significa de $r(a)=r(b)$ por lo que

$$\oint \bar{E}\cdot dl = 0$$

ejemplo:
elijamos la trayectoria $x=\cos t$ y $y=\operatorname{sen} t$ en $0\leq t\leq 2\pi$, $F(\sigma(t))=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ que describe un circulo, la integral de linea se define:

$$\int F(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

$\sigma'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t)$ La integral de linea es

$$\int F(\sigma(t))\sigma'(t)dt\int_0^{2\pi}(\cos t,\operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)dt=(-\cos t\operatorname{sen} t+\cos t\operatorname{sen} t)dt=0$$

c)

$$\oint \bar{E}\cdot ds = \int_0^{r_1}\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2}\hat{r}\right)dr$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\right]_0^{r_1}=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r_1}}\right)$$

d)

$$\oint \bar{E}\cdot ds = \int_0^{r_1+\Delta}\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2}\hat{r}\right)dr$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_1+\Delta}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\right]_0^{r_1+\Delta}=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1+\Delta}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r_1+\Delta}}\right)$$

$$\nabla\cdot\bar{E}=\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}(1-\sqrt{\alpha r_1}\right)$$

en coordenadas cilindricas es

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^2\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}\right)\right]$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^2\left(\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}\right)\right]$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

$$\nabla\cdot\bar{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

$$\nabla\cdot\bar{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha r_1}}=\frac{q\sqrt{\alpha}}{8\pi\epsilon_0 r_1^{5/2}}$$

3. Una cantidad de carga q se distribuye uniformemente en una capa en la superficie de un disco de radio a.

   a) Use métodos elementales basados en la simetría acimutal de la distribución de carga para encontrar el potencial en cualquier punto del eje de simetría.

   b) Con la ayuda de (a) encuentre una expresión para el potencial en cualquier punto r ($|r|>a$), como una expansión de polinomios de Legendre

Solución:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi r^2}\frac{\sigma}{r}da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r}\int_0^{2\pi r^2}da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r}(2\pi r^2) = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}$$

4. Una esfera de metal de radio R, que tiene carga q, está rodeada por una concha de metal concéntrica gruesa (radio interior a, radio exterior b, como en la figura 2.48). El caparazón no tiene carga neta.

   a) Encuentre la densidad de carga superficial? para R, para a, y para b.

   b) Encuentre el potencial en el centro, utilizando el infinito como punto de referencia.

   c) Ahora la superficie externa toca un cable a tierra, que baja su potencial a cero (igual que en infinito). ¿Cómo cambiarían (a) y (b)?

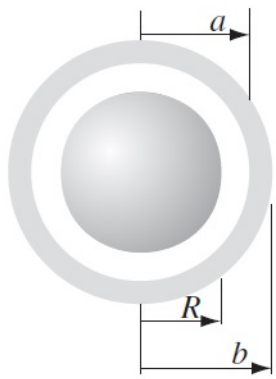


FIGURE 2.48

Solución

a) De la ley de Gauss

$$\oint EdA = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{\sigma A}{\varepsilon}$$

por lo que podemos decir que

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

para el Radio R y el area de una esfera es $4\pi r^2$ donde r es el radio

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

para el Radio a

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$$

para el Radio b

$$\sigma = \frac{q}{4\pi b^2}$$

b) El potencial lo calculamos como

$$V = \int \bar{E}ds$$

en este caso desde un punto lejano respecto a la primera distancia $[-\infty, b]$ es

$$V_1 = -\int_{-\infty}^{b}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b}$$

$$V_2 = -\int_a^b 0dr = 0$$

$$V_3 = -\int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}\bar{r}\frac{dr}{r^2} == \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_a^R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} =$$

$$V_4 = -\int_R^0 0dr = 0$$

Finalmente sumamos los potenciales

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

c) Como se coloca a tierra, entonces el b el potencial es $V_b = 0$ no hay densidad de carga $\sigma_b = 0$ el potencial total sería:

$$V(0) = -\int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

5. Dos cavidades esféricas, de radios a y b, están en el interior de una esfera conductora (neutra) de radio R (figura 2.49). En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual. llamadas estas cargas q_a y q_b.

   a) Encuentre las densidades de cargas superficiales O_a, O_b y O_R.
   b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor?
   c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?
   d) ¿Cuál es la fuerza sobre q_a y q_b?
   e) ¿Cuál de anteriores respuestas cambiaría si hay una tercera carga, q_c, que fuera llevada cerca del conductor?

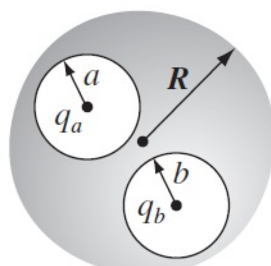


FIGURE 2.49

Solución

a)

$$\sigma = (\bar{E} \cdot n)\varepsilon$$

$$\sigma_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-a}{a^3}\right) = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$\sigma_b = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-b}{b^3}\right) = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

$$\sigma_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_a(R-a)}{|R-a|^3} + \frac{q_b(R-b)}{|R-b|^3}\right)$$

donde a y b son muy pequeños

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

b) de la ley de Gauss, donde r

$$\int \bar{E} \cdot dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} \int_0^{\text{area}} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada es $q_a + q_b$ el area de la esfera es $4\pi r^2$

$$\bar{E} \int_0^{4\pi r^2} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E}(4\pi r^2)\hat{r} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

c)

$$E_a \int_0^{4\pi r_a^2} dA = \frac{q_a}{\varepsilon} \qquad\qquad E_b \int_0^{4\pi r_b^2} dA = \frac{q_b}{\varepsilon}$$

$$E_a(4\pi r_a^2)\hat{r_a} = \frac{q_a}{\varepsilon} \qquad\qquad E_b(4\pi r_b^2)\hat{r_b} = \frac{q_b}{\varepsilon}$$

$$E_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon r_a^2}\hat{r_a} \qquad\qquad E_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon r_b^2}\hat{r_b}$$

d) Como la esfera es neutra no ejerce una fuera sobre las cargas q_a y q_b

e) El campo eléctrico afuera y la densidad de carga de la esfera (gris)

2. Potenciales

1. El potencial en la superficie de una esfera de radio R está dado por $\phi_0 = k\cos(3\theta)$, donde k es una constante. Encuentre el potencial dentro y fuera de la esfera, asi como también la densidad superficial de carga $\sigma(\theta)$ sobre la superficie de la esfera.
solución:
$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
entonces

$$V_0 = k\cos 3\theta = k(4\cos^3 x - 3\cos x)$$

como esta en cosenos lo podemos poner en terminos de los polinomios de legrende, según la potencia $\cos^3 x \to P_3$ y $\cos x \to P_1$

$$\begin{aligned} 4\cos^3 x - 3\cos x &= \frac{a}{2}\left[5(\cos^3\theta) - 3\cos\theta\right] + b\cos\theta \\ &= \frac{5a}{2}(\cos^3\theta) + \left(b - \frac{3}{2}a\right)\cos\theta \end{aligned}$$

determinando a y b, conforme a $4\cos^3 x - 3\cos x$

$$4 = \frac{5a}{2} \to a = \frac{8}{5}$$

y

$$-3 = b - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{5}\right) \to b = \frac{12}{5} - 3 = -\frac{3}{5}$$

rescribiendo el potencial

$$\phi_0(\theta) = \frac{k}{5}\left(8P_3(\cos\theta) - 3P_3(\cos\theta)\right)$$

Sabemos que la solución para un potencial es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

dado a las propiedades de ortogonalización

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta = 0 \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \tag{1}$$

donde P_m es el potencial en este caso

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{2r^n}\left[\frac{8k}{5}\int_0^{\pi} P_3(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta - \frac{3k}{5}\int_0^{\pi} P_1(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta\right] \\ &= \frac{2n+1}{2r^n}\left[\frac{8k}{5}\frac{2\delta_{n3}}{2n+1} - \frac{3k}{5}\frac{2\delta_{n1}}{2n+1}\right] \\ &= \frac{k[8\delta_{n3} - 3\delta_{n1}]}{5r^n} \end{aligned}$$

Sabemos que $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y para $n \neq m \to \delta_{mn} = 0$, entonces para la primera hacemos $n = 3$ y el segundo $n = 1$

$$A_n = \frac{8k}{5r^3} \qquad A_n = -\frac{3k}{5r}$$

El potencial para la primera contribución es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n\right)P_n(\cos\theta) = \frac{8k}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)P_1(\cos\theta)$$

sustituyendo $P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$ y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\phi(r,\theta) = \frac{8k}{10}\left(\frac{r'}{r}\right)^3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) - \frac{3k}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta$$

si los términos A_l no van a cero en el infinito. Estas dos funciones deben ser unidos por las condiciones de contorno apropiadas en la superficie misma. Primero, el potencial es continuo en $r = R$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n\right)P_n(\cos\theta) \qquad r \leq R$$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \qquad r \geq R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n R^n\right)P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

Se deduce que los coeficientes de polinomios de Legendre similares son iguales

$$B_n = A_n R^{2n+1}$$

Para $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y para $n \neq m \to \delta_{mn} = 0$, entonces para la primera hacemos $n = 3$ y el segundo $n = 1$

$$B_n = \frac{8k}{5r^3}r^{2(3)+1} = \frac{8kr^4}{5} \qquad B_n = -\frac{3k}{5r}r^{2(1)+1} = -\frac{3kr^2}{5}$$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) = \frac{8k}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta)$$

2. Un cascaron esférico de radio R contiene una carga superficial uniforme σ_0 en el hemisferio norte y una densidad superficial $-\sigma_0$ en el hemisferio sur. Encuentre el potencial dentro y fuera de la esfera, calculando explicitamente los coeficientes de la solución con simetría axial hasta A_6 y B_6.
Solución
De la solución de Laplace para el potencial es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

por ec 1 tenemos

$$A_n = \frac{1}{r^n}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$

$P_m(\cos\theta) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$

$q = \sigma A = \sigma 2\pi r$ por otra parte el potencial es $\phi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$ sustituyendo q, tenemos $\phi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2\pi r\sigma}{r} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$

dado a la relación de ortogonalidad ec(1) haciendo el cambio de variable $\cos\theta = x$ los nuevos limites de integración son $\cos\pi = -1$ y $\cos 0 = 1$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^{1} P_n(x)dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)dx$$

Por la propiedad $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ y por $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$ la integral se puede ver como:

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \int_{-1}^{0} P_n(-x)d(-x) = (-1)^n\int_0^1 P_n(x)dx$$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^1 P_n(x)dx - (-1)^n\int_0^1 P_n(x)dx$$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{n-1}}[1-(-1)^n]\int_0^1 P_n(x)dx$$

se puede observar que para n pares $[1-(-1)^n] = 0$ asi que $A_{2n} = 0$ y para n impares, los polinomios que obtenemos son

$$\int_0^{-1} P_1(x)dx = \int_0^1 xd = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{-1} P_3(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (5x^3-3x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\int_0^{-1} P_5(x)dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (63x^5-70x^3+15x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{63}{6}-\frac{70}{4}+\frac{15}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$A_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad A_3 = -\frac{\sigma}{8\varepsilon r^2} \qquad A_5 = \frac{\sigma}{16\varepsilon r^4}$$

del ejercicio anterior sabemos que $B_n = A_n^{r^{2n+1}}$

$$B_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}r^3 \qquad B_3 = -\frac{\sigma}{8\varepsilon}r^5 \qquad B_5 = \frac{\sigma}{16\varepsilon}r^7$$

El potencial es

$$V(r,\theta) = \frac{\sigma r'}{2\varepsilon}\left[P_1(\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{1}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_5(\cos\theta)\right]$$

$$V(r,\theta) = \frac{\sigma r^3}{2\varepsilon r^{2\prime}}\left[P_1(\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{1}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_5(\cos\theta)\right]$$

3. . Resuelva la ecuación de Laplace por separación de variables en coordenadas cilíndricas, suponiendo que no hay dependencia en la coordenada z. Encuentre las soluciones de la ecuación radial que sean compatibles con las soluciones de una linea infinita con densidad lineal de carga constante. Demuestre que su solución se reduce a la solución conocida de este sistema. El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$\nabla^2 V(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

proponemos que $V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)\Theta(\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{\Theta(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

multiplicando por $r^2(R(r)\Theta(\theta))^{-1}$

$$\nabla^2 V = \underbrace{\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)}_{=-k} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}}_{=k} = 0$$

sabemos que la solución de

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = -k\Theta(\theta) \qquad \Theta(\theta) = A \operatorname{sen} k\theta + B\cos k\theta$$

pero si $k = 0$, la derivada de una constante B es cero, entonces,

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = B$$

$$\int d\Phi = \int B d\phi$$

$$\Phi = B\phi + A$$

donde A es la constante de integración, como necesita ser periódica, esto es que regrese a su valor inicial, esta solución se descarta

para la ecuación para la parte radial

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = k^2 R(r)$$

proponemos $R(r)$ como r^n, sustituyendo

$$\begin{aligned}
r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr^n}{dr}\right) &= r\frac{d}{dr}\left(rnr^{n-1}\right)\\
&= nr\frac{d}{dr}\left(r^n\right)\\
&= n^2 r(r^{n-1})\\
&= n^2 r^n = k^2 R
\end{aligned}$$

entonces $n = \pm k$ para el segundo termino descartamos la solución trivial $s = 0$, pero sabemos que la derivada de una constante es cero

$$\frac{d}{dr}\left(\underbrace{r\frac{dR(r)}{dr}}_{=C}\right) = KR(r)$$

donde C es una constante, resolviendo

$$\frac{dR(r)}{dr} = \frac{C}{r}$$

$$\int dR(r) = C\int \frac{dr}{r}$$

$$R(r) = C\ln r + D$$

donde D es la constante de integración. Finalmente teniendo en cuenta que $\pm k$ el potencial es

$$V(r,\theta) = C\ln r + D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^k(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) + r^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right]$$

4. . Una densidad de carga superficial $\sigma(\theta) = a\operatorname{sen}(5\theta)$ se encuentra sobre la superficie de un cilindro infinito de radio R. Encuentre el potencial dentro y fuera del cilindro. (Sugerencia: Usa las soluciones generales encontradas en el problema anterior)

   Solución:

   Encontrado el potencial en el ejercicio anterior

$$V(r,\theta) = C\ln r + D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^k(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) + r^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right]$$

Dentro del cilindro, tenemos problemas en $\ln r$ y r^{-k} cuando el radio $r = 0$, entonces el potencial es

$$\Phi_1(r,\theta) = D' + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)$$

y fuera, no esta definido para r^n y ln para cuando el radio muy grande

$$\Phi_2(r,\theta) = D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^k}(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)\right]$$

por otra parte el potencial en la frontera

$$\nabla\Phi_2 - \nabla\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

de manera conveniente lo escribimos, ya que consideramos la componente normal

$$\nabla\Phi_2\hat{n} - \nabla\Phi_1\hat{n} = \frac{\partial}{\partial n}\Phi_2 - \frac{\partial}{\partial n}\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

El problema nos da la densidad $\sigma(\theta)$

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta) &= a\operatorname{sen} 5\theta \\
&= \epsilon\frac{\partial}{\partial n}\left(D + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right) \\
&- \epsilon\frac{\partial}{\partial n}\left(D' + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)\right)
\end{aligned}$$

$$\sigma(\theta) = a\operatorname{sen} 5\theta = \epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-k}{R^{k+1}}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right] - kR^{k-1}(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)$$

como tienen que ser iguales solo queda que $k = 5$,

$$a\operatorname{sen} 5\theta = \frac{-5}{R^6}(\cancel{a_k\cos k\theta} + b'_5\operatorname{sen} k\theta) - 5R^4(\cancel{a_k\cos k\theta} + b_k\operatorname{sen} k\theta)$$

$$a = \frac{5\epsilon}{R^6} b_5 + 5\epsilon R^4 b_5' \tag{2}$$

el potencial en la interface es igual $\Phi_1(r, \theta) = \Phi_2(r, \theta)$

$$\cancel{D_0} + \frac{5}{R^6} b_5 \cancel{\operatorname{sen} 5\theta} = \cancel{D_0'} + 5R^4 b_5' \cancel{\operatorname{sen} 5\theta}$$

$$\frac{1}{R^6} b_5 = R^4 b_5' \qquad b_5 = R^{10} b_5'$$

sustituyendo b_5 en 2

$$a = 5\epsilon \left(R^4 b_5' + R^4 b_5'\right) = 10\epsilon R^4 b_5' \qquad b_5' = \frac{a}{10\epsilon R^4} \qquad b = \frac{aR^6}{10\epsilon}$$

El potencial dentro es

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{a \operatorname{sen} 5\theta}{10\varepsilon} \frac{r^5}{R^4}$$

y el potencial fuera

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{a \operatorname{sen} 5\theta}{10\varepsilon} \frac{R^6}{r^5}$$

5. Una caja cubica de arista a se forma con 5 placas de metal que son soldadas juntas y aterrizadas. La placa superior es de una metal distinto y está aislada de las otras y se mantiene a un potencial Φ_0. Encuentre el potencial dentro de la caja.
   Solución:
   en la figura se aprecia que las condiciones de frontera son

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{en} \quad x = y = z = 0, x = y = a \\ \Phi_0 & \text{en} \quad z = a \end{cases}$$

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial z^2} \tag{3}$$

Proponemos $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)Y(y)Z(z)}{\partial z^2}$$

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

dividiendo por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = k_x X(x) \qquad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = k_y Y(y) \qquad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = k_z Z(z)$$

las soluciones de 3 son

$$X(x) = A \operatorname{sen} k_x x + B \operatorname{sen} k_x x \qquad Y(y) = C \operatorname{sen} k_y y + D \cos k_y y$$

$$Z(z) = Eexp(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z) + Fexp(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z)$$

donde $k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ para $x = 0$ y $y = 0$

$$\cancel{A \operatorname{sen} k_x 0} + B \overbrace{\cos k_x 0}^{=1} = 0 \qquad \cancel{C \operatorname{sen} k_y 0} + D \overbrace{\cos k_y 0}^{=1} = 0$$

$B = D = 0$ y para $x = y = a$

$$A \operatorname{sen} k_x a + B \cos k_x a = 0 \qquad C \operatorname{sen} k_y a + D \cos k_y a = 0$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \qquad k_y = \frac{m\pi}{a}$$

$$Z(0) = Eexp(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}0) + Fexp(-\sqrt{k_x^2 + k_y^2}0) = 0 \qquad E + F = 0$$

$$Z(z) = 2E \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} z\right) = 2E \sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)$$

$$\Phi_0(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)$$

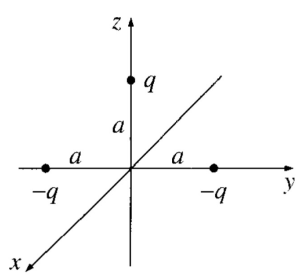
$$T_{mn} \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right) = \frac{4V_0}{a^2}\int_0^a \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} dxdy = \frac{16V_0}{\pi^2 nm}\delta_{mn}$$

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n=2k}^{\infty}\sum_{m=2k}^{\infty} \frac{1}{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{a} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)}$$

el potencial en el centro del cubo es

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n=2k}^{\infty}\sum_{m=2k}^{\infty} \frac{1}{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2 + m^2}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)}$$

6. Tres cargas puntuales están localizadas como se muestra en la figura, cada una a una distancia a del origen. *a)* Calcular el momento dipolar del sistema. *b)* Encuentre el campo eléctrico aproximado para puntos lejanos al origen. *c)* Expresar la solución en coordenadas esféricas y escribir explicitamente los dos primeros términos en la expansión multipolar.



Solución:
Tenemos que el potencial para cargas puntuales es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r}$$

para una distrubución el momento dipolar es:

$$P \equiv \int r' \rho(r') d\tau$$

para la distribución del dipolo se simplifica a

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P \cdot \hat{r}}{r^2} \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i r_i$$

Por otra parte tenemos

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|r_1|} - \frac{q}{|r_2|}\right)$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

De la ley de los cosenos $r_1 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$ y $r_2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(pi - \theta)$ considerando el caso $r >> a$

$$r_1 = r\left(1 - 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$r_2 = r\left(1 + 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\left(1 - 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1 + 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^n(-1)^n\right]$$

observación $g(x,t) = (1 - 2x(-t) + (-t)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(-\frac{a}{r}\right)^n$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}2\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}\left(P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots\right)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{2aq}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{2aq}{r^4}a^2P_3(\cos\theta) + \dots\right)$$

el momento dipolar es $d = 2aq$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{d}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{d}{r^4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \dots\right)$$

La contribución mas grande $r >> a$

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

El potencial

$$\Phi(r,\theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{aq\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$$

y sabemos que el campo electrico es $E = -\nabla\Phi$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + a\,\mathrm{sen}\,\theta r^2\hat{\theta} - \frac{1}{r^2}\hat{r}\right)$$

7. Demuestre que el termino del cuadrupolo en la expansión multipolar puede ser escrito como

$$\Phi_{quad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\hat{r_i}\hat{r_j}Q_{ij}$$

donde

$$Q_{ij} = \int[3r_i'r_j' - (r^2)\delta_{ij}]\rho_c(r')dV'$$

Solución:
Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|r-r'|} &= \frac{1}{\sqrt{(r-r')\cdot(r-r')}} = \frac{1}{\sqrt{|r|^2-2r\cdot r'+|r'|^2}} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1+\left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2}+\frac{|r'|^2}{|r|^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1-\frac{1}{2}\left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2}+\frac{|r'|^2}{|r|^2}\right)+\frac{3}{8}\left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2}+\frac{|r'|^2}{|r|^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1+\frac{r\cdot r'}{|r|^2}+\frac{3(r\cdot r')^2+-|r|^2|r|^2}{2|r|^4}+\frac{|r'|^3}{|r|^3}\right] \\
&= \frac{1}{|r|}+\frac{r\cdot r'}{|r|^2}+\frac{3(r\cdot r')^2+-|r|^2|r|^2}{2|r|^5}+\frac{1}{|r|}\frac{|r'|^3}{|r|^3}
\end{aligned} \tag{5}$$

Tomando en cuenta que $\frac{r\cdot r'}{|r|^2} \le \frac{|r'|}{|r|} << 1$ y también pedimos $\frac{|r'|^2}{|r|^2} >> \frac{|r'|}{|r|} << 1$ El desarrollo multipolar, valido en principio para un punto alejado del cuerpo cargado (esto es si se cumple que $|r|$ es mucho mayor que el maximo de $|r'|$)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r|}\int \rho(r')d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r|^3}\int \rho(r')rd\tau$$
$$\Phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0|r|^5}\left(\int \rho(r')[3(r\cdot r')^2-|r|^2|r'|^2]d\tau+\dots\right)$$

8. Hallar la densidad de carga inducida en un plano conductor cuando se coloca una linea cargada paralela a un plano conductor a una distancia d del plano.
Solución
el potencial es
$$V(y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$
observemos que $a = y + (z-d)$ y $b = y + (z+d)$
$$V(y,z) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{y^2+(z+d)^2}{y^2+(z-d)^2}$$
la densidad es
$$\begin{aligned}
\sigma &= -\epsilon\frac{\partial V}{\partial y} \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi}\left(\frac{2(z+d)}{y^2+(z+d)^2}-\frac{2(z-d)}{y^2+(z-d)^2}\right)_{z=0} \\
&= -\frac{2\lambda}{4\pi}\left(\frac{d}{y^2+d^2}+\frac{d}{y^2+d^2}\right) \\
&= -\frac{\lambda d}{\pi(y^2+d^2)}
\end{aligned}$$

9. Una esfera dieléctrica de permitividad $K_e\epsilon$ y radio R se coloca en un campo eléctrico contante. Determinar, el campo eléctrico en todas las regiones, la densidad de carga superficial inducida por la polarización del dieléctrico y el momento dipolar de la esfera
Solución
Teniendo en cuenta la simetría axial la solución para el flujo en el interior es

$$\Phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{6}$$

en el exterior

$$\Phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(B_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

De la condición de frontera en el infinito $\Phi \to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$, se puede ver que el B_l que no se anula es $B_1 = -E_0$. Los otros coeficientes se calculan por las condiciones de contorno para $r = a$
La componente tangencial de E

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{int}}{\partial\theta}_{r=a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{ext}}{\partial\theta}_{r=a}$$

La componente normal de D

$$-\epsilon\frac{\partial\Phi_{int}}{\partial r}_{r=a} = -\epsilon_0\frac{\partial\Phi_{ext}}{\partial r}_{r=a}$$

cuando se sustituye 80 y (7), los polinomios de legendre es igual a cero para cualquier θ, sabemos que $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$A_1 \cancel{r\cos\theta} = E_0 \cancel{r\cos\theta}$$

$$\left(\cancel{B_l r^l} + \frac{C_1}{r^2} \right)\cos\theta = E_0\cos\theta$$

$$A_l = E_0 + \frac{C_1}{a^3}$$

$$A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad l \neq 1 \tag{8}$$

para la parte tangencial tenemos

$$\epsilon A_1 = -\varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2C_1}{r^3}\right)$$

$$\epsilon l A_l = -\varepsilon_0(l+1)\frac{C_l}{r^{2l+1}} \tag{9}$$

las ecuaciones 8 y 9 se satisfacen si $A_l = C_l = 0$ para todo $l \neq 1$, Los coeficientes vienen dados en función del campo eléctrico E_0

$$A_1 = -\left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\right) E_0$$

$$C_1 = -\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right) a^3 E_0$$

por lo tanto el potencial es

$$\Phi_{int} = -\left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\right) E_0 r\cos\theta$$

$$\Phi_{ext} = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right) a^3 E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

Φ dentro de la esfera el campo eléctrico es paralelo al campo que se aplico

$$E_{int} = \left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\right) E_0$$

y fuera es equivalente al campo que se aplico E_0 más el campo de un dipolo, colocado en el centro de la esfera, y el momento dipolar es

$$p = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0} \right) a^3 E_0$$

la polarización es

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0} \right) E_0$$

La densidad superficial de carga de polarización es

$$\sigma_p = 213\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0} \right) E_0$$

10. El volumen entre dos esferas conductoras concentricas de radios a y b ($a < b$) está lleno de un dieléctrico con permitividad no homogénea dada por

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{1 + Kr}$$

donde ϵ_0 y K son contantes, r es la coordenada radial. Se asume que el material es lineal. Una carga Q se coloca dentro de la superficie interior, mientras que la otra superficie se mantiene aterrizada. Encontrar:

a) El vector desplazamiento en la región $a < r < b$.

b) La capacidad del sistema

c) La densidad de carga de polarización en $a < r < b$

d) La densidad de carga superficial de polarización en $r = a$ y $r = b$.

Solución

a) La ley de Gauus en forma integral es

$$\oint D \cdot ds = q$$

como tiene geometría esférica donde Q es la carga y $a < r < b$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

b) El Desplazamiento eléctrico lo definimos como $D = \epsilon E + P$ donde la polarización en este problema es $P = 0$ y sustituyendo la permitividad dada por el problema, resulta que el campo eléctrico es

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(\frac{1 + Kr}{\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + Kr)$$

Conociendo el campo eléctrico, podemos calcular el potencial

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_a^b \bar{E} \cdot dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2}(1 + kr) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \right) dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} + k \ln r \right]_a^b \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{aa} + k \ln \frac{b}{a} \right]
\end{aligned}$$

La capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{b} - \frac{1}{aa} + k\ln\frac{b}{a}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{b-a}{ab} + k\ln\frac{b}{a}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a) + abk\ln\frac{b}{a}}$$

c) La polarización es

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E$$

Sustituyendo el campo eléctrico y la permitividad del dieléctrico

$$P = \left(\frac{\epsilon_0}{1+Kr} - \epsilon_0\right)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1+Kr) = \frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{QKr}{4\pi r^2}$$

$$P = \frac{QK}{4\pi r}$$

entonces la de densidad de polarización es

$$\rho = -\nabla P$$

en coordenadas esféricas solo nos queda el termino de la parte radial

$$\rho = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{QK}{4\pi r}\right) = \frac{QK}{4\pi}$$

d) La densidad de carga superficial se define como

$$\sigma = P \cdot \hat{n} = P\cos\theta$$

en este caso es perpendicular $\cos\theta = 1$

$$\sigma = \frac{QK}{4\pi a}$$

y para $r = b$, $\cos\theta = -1$

$$\sigma = -\frac{QK}{4\pi b}$$

11. el potencial electroestatico dentro y fuera de la esfera es

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

en $r = 0$ para el primer potencial

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}\left(A_n(0) + \frac{B_n}{0}\right)P_n(\cos\theta) = \infty$$

esto sucede por que es la superficie dentro de la esfera
en $r = \infty$ para el segundo potencial

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

sabemos que $k^\infty = k$ para $k > 1$

$$\Phi_2 = CrP(\cos\theta)$$

el polinomio de Legendre $P_1(x) = x$, entonces

$$\Phi_2 = C_1 r \cos\theta$$

y en el radio de la esfera $r = a$ El potencial debe ser continuo en la superficie

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \qquad \Phi_2 = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \tag{10}$$

de expresiones encontradas para Φ_2 tenemos

$$Ea\cos\theta + \sum_{n=0} \frac{D_n}{a^{n+1}} P(\cos\theta) = \sum_{n=0} A_n a^n P(\cos\theta) \tag{11}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo θ, el coeficiente de cada función de Legendre debe ser igual

$$A_1 = -E + \frac{C_1}{a^3} \qquad A_n = \frac{C_n}{a^{2l+1}} \quad n \neq 1 \tag{12}$$

el primer termino de 16 es por lo dicho anteriormente solo se remplaza, y derivado para obtener ecuación 80, respecto al radio

$$-\varepsilon_2 \left(EP_1(\cos\theta) + \sum_{n=0} (n+1) \frac{D_n}{a^{n+1}} P(\cos\theta) \right) = \varepsilon_1 \sum_{n=0} n A_n a^{n-1} P(\cos\theta)$$

de igual manera coeficiente de cada función de Legendre son

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_1 = -E - \frac{2C_1}{a^2} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} n A_n = -(n+1) \frac{2C_n}{a^{2n+1}} \quad n \neq 1 \tag{13}$$

Las segundas ecuaciones en 17 y 18 se pueden satisfacer simultáneamente solo con $A_n = C_n = 0$ para todo $n \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E

$$A_l = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E \tag{14}$$

El potencial es por lo tanto

$$E_1 = -\nabla \Phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad r < a$$

$$E_2 = -\nabla \Phi_2 = E + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \left[\frac{3(E \cdot r) r}{r^5} - \frac{E}{r^3} \right] \qquad r < a$$

12.

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

en $r = 0$ para el primer potencial

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} \left(A_n(0) + \frac{B_n}{0} \right) P_n(\cos\theta) = \infty$$

esto sucede por que es la superficie dentro de la esfera en $r = \infty$ para el segundo potencial

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

sabemos que $k^\infty = k$ para $k > 1$

$$\Phi_2 = CrP(\cos\theta)$$

el polinomio de Legendre $P_1(x) = x$, entonces

$$\Phi_2 = C_1 r \cos\theta$$

y en el radio de la esfera $r = R$ El potencial debe ser continuo en la superficie

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \qquad \Phi_2 = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \tag{15}$$

de expresiones encontradas para Φ_2 tenemos

$$ER\cos\theta + \sum_{n=0} \frac{D_n}{R^{n+1}} P(\cos\theta) = \sum_{n=0} A_n R^n P(\cos\theta) \tag{16}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo θ, el coeficiente de cada función de Legendre debe ser igual

$$A_1 = -E + \frac{C_1}{R^3} \qquad A_n = \frac{C_n}{R^{2l+1}} \;\; n \neq 1 \tag{17}$$

el primer termino de 16 es por lo dicho anteriormente solo se remplaza, y derivado para obtener ecuación 80, respecto al radio

$$-\varepsilon_2 \left(EP_1(\cos\theta) + \sum_{n=0} (n+1) \frac{D_n}{R^{n+1}} P(\cos\theta) \right) = \varepsilon_1 \sum_{n=0} nA_n R^{n-1} P(\cos\theta)$$

de igual manera coeficiente de cada función de Legendre son

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_1 = -E - \frac{2C_1}{R^2} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} nA_n = -(n+1) \frac{2C_n}{R^{2n+1}} \;\; n \neq 1 \tag{18}$$

Las segundas ecuaciones en 17 y 18 se pueden satisfacer simultáneamente solo con $A_n = C_n = 0$ para todo $n \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E

$$A_l = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E \tag{19}$$

El potencial es por lo tanto

$$E_1 = -\nabla \Phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad r < R$$

$$E_2 = -\nabla \Phi_2 = E + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 \left[\frac{3(E \cdot r)r}{r^5} - \frac{E}{r^3} \right] \qquad r < R$$

13. De los ejercicios anteriores tenemos que el campo eléctrico incidente es

$$E = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

La polarización del diaelectrico es

$$p = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E$$

sustituyendo E

$$p = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

La densidad de carga en la superficie de la esfera es

$$\sigma(\theta) = n \cdot p$$

donde n es el vector normal $E_0 \cos\theta$ sustituyendo:

$$\sigma(\theta) = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\theta$$

donde $\cos\theta = 1$

$$\sigma(\theta) = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0$$

el momento dipolar eléctrico es

$$P = Vp = \frac{4}{3}\pi R^3 p$$

$$P = \frac{4\pi R^3 E_0 \varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

14. a) Las condiciones iniciales son.

$$\Phi = \Phi = k$$

el potencial de la esfera conductora es constante k y la densidad de carga σ es

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{20}$$

esta ecuación proviene de la ley de Gauss, el potencial para un punto fuera de la esfera esta dado por la ecuación 60

$$\sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{21}$$

como en un ejercicio anterior, si $r \to \infty$ Entonces

$$\Phi = -ErP_1(\cos\theta) = -Er\cos\theta \tag{22}$$

por la igualdad de coeficientes de los polinomios de Lagrange obtenemos que

$$C_0 = 0 \quad C_1 = -E \quad D_1 = Ea^2 \quad D_n = C_n = 0, n > 1 \tag{23}$$

para el $P_n(\cos\theta) = \cos\theta$, cuando $n = 1$ tenemos, donde a es el radio de la esfera

$$\Phi = -Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\cos\theta \tag{24}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial a} \left(-Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\cos\theta \right) \tag{25}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 E \frac{3a^2}{r^2} \cos\theta \tag{26}$$

haciendo $a = -r$

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E \cos\theta \tag{27}$$

b) Suponga que el dipolo eléctrico $P = Pe_z$ es puesto en el origen de la esfera, y el potencial por r producido por el dipolo es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \tag{28}$$

por la ecuación 24 podemos ver que el P

$$P = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \tag{29}$$

a) De la solución de la ecuación de Laplace obtenemos los potenciales fuera y dentro de la cascara esférica dados por Φ_1 y Φ_2

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta) \qquad r > R \tag{30}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} a_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad r < R \tag{31}$$

cuando $R = r$ el radio del potencial al cascaron es el mismo dentro y fuera $\Phi_1 = \Phi_2$

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 P_n(\cos\theta) \tag{32}$$

Por la ley de Gauss tenemos

$$\sigma(\theta) = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) \tag{33}$$

Derivando y para $n = 1$, Obtenemos

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} = a_1 \cos\theta \tag{34}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \frac{3b_1\cos\theta}{r^3} \tag{35}$$

de la ecuación 32 y 33 tenemos

$$\sigma_0\cos\theta = \varepsilon_0 a_1 \cos\theta$$

$$a_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{36}$$

y

$$\sigma_0\cos\theta = \varepsilon\frac{3b_1\cos\theta}{r^3}$$

$$b_1 = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0} \tag{37}$$

Por lo tanto

$$\Phi_1 = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \tag{38}$$

$$\Phi_2 = \frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0}\cos\theta \tag{39}$$

El campo eléctrico esta dado por

$$E = -\nabla\phi \tag{40}$$

el campo eléctrico afuera y dentro es

$$E_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right) = -\left(\frac{-2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta + \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}(-\operatorname{sen}\theta)\right) = \frac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta - \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\operatorname{sen}\theta \tag{41}$$

$$E_2 = -\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right) = -\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\theta - \frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(r\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \tag{42}$$

15. Se obtiene ecuación diferencial de Poisson si la función depende solo de R

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\rho(\phi)}{\varepsilon_0} \tag{43}$$

Para el caso en que $r < R$

$$\nabla^2_-\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{44}$$

y en $r > R$

$$\nabla^2_+\Phi = 0 \tag{45}$$

la solución de esta ecuación son los polinomios de Langrange.
En el caso del potencial dentro de la esfera es la carga puntual y el potencial de la esfera, como la esfera es finita, tenemos

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{46}$$

En el exterior el potencial es

$$\Phi_+ = \sum_{n_0} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{47}$$

en la frontera el potencial es

$$\Phi_- = \Phi_+ = V_0 \cos\theta$$

como indica el problema esto es para $r = R$, para $n = 0$, $P_0(\cos\theta) = 1$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A_0 = 0 \qquad A_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

y

$$\Phi_+ = \sum_{n_0} \frac{B_0}{r} \qquad B_0 = 0$$

para $n = 1$

$$\Phi_- = A_1 r P_1(\cos\theta)$$

el polinomio $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$V_0 \cos\theta = A_1 R \cos\theta$$

$$A_1 = \frac{V_0}{R}$$

y

$$\Phi_+ = \frac{B_1}{r^2}\cos\theta = V_0\cos\theta \qquad B_1 = V_0 R^2$$

Sustituyendo A_0 y $A_1 \to n = 1$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0}{R} r^n P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0 r}{R}\cos\theta \tag{48}$$

ahora B_0 y B_1 en la otra ecuación

$$\Phi_+ = \frac{V_0 R^2}{r^{1+1}} P_1(\cos\theta)$$

$$\Phi_+ = \frac{V_0 R^2}{r^2}\cos\theta \tag{49}$$

Separación de variables en coordenadas Esféricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi} \tag{50}$$

Sistemas con simetría axial $\phi=\phi(r,\theta)$ se simplifica

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \tag{51}$$

Por separación de variables $\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{T\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT}{d\theta}\right)=K \tag{52}$$

R satisface

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-KR=0 \tag{53}$$

Si la solución es de la forma $R=\alpha r^l$ el resultado que se obtiene es $[l(l+1)-K]R=0$ por lo que $k=l(l+1)$

Al sustituir k en ec 52

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT_l}{d\theta}\right)-l(l+1)T_l \tag{54}$$

T_1 debe ser una cantidad finita univaluada y continua sobre el rango completo de θ, es posible demostrarlo si l es un entero positivo incluyendo el cero

$$l=0,1,2,3\ldots$$

los T_1 se pueden identificar como los polinomios de Legrendre

$$\frac{1}{R_i}=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^lP_l(\cos\theta) \tag{55}$$

Se sabe que es solución de la ecuación de Laplace por lo tanto $\phi=1/R_i$ y debe ser solución de ec 51

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l\left[l(l+1)P_l\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP_l}{d\theta}\right)\right] \tag{56}$$

El termino que esta entre corchetes es igual a cero para cada l. Al comparar con 54 T_l y P_l satisfacen a la misma ecuación diferencial por lo que T_l puede tomarse a lo mucho como una constante multiplicada por P_l se puede absorber cualquier constante tal en el factor $R(r)$ por lo que $T_l(\theta)=P_l(\cos\theta)$, ahora $R_l=rP_l(\cos\theta)$ la solución de 51 para cada l se puede expresar como la solución general

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{57}$$

La ecuación que R_l debe satisfacer de acuerdo con 53 es

$$r^2\frac{d^2R_l}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-l(l+1)R_l=0 \tag{58}$$

se resuelve mediante la forma $R_l=\alpha_lr^n$ donde α es constante y n es entero, al sustituir en la ecuación 58 se encuentra que se debe satisfacer $n(n-1)-l(l+1)=0$ se tienen dos soluciones $n=l$ y $-(l+1)$ de modo que la solución general de 58 es

$$R_l(r)=A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}} \tag{59}$$

donde A_l y B_l son constantes de integración. Al sustituir este resultado en 57 se obtiene la forma general de solución de Laplace para una situación axialmente simétrica

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{60}$$

3. Magnetoestatica

1. Supongamos que el campo magnético en alguna región tiene la forma

$$B = kz\hat{x}$$

(donde k es una constante). Encuentre la fuerza en un bucle cuadrado (lado a), en el plano yz y centrado en el origen, si lleva una corriente I, fluyendo en sentido contrario a las agujas del reloj, cuando mira hacia abajo el eje x.
Solución
La fuerza se define como

$$F = \int dq(v \times B) = \int (v \times B)\lambda dl = I \int dl \times B$$

la fuerza de los lados izquierdo y derecho es la misma pero de sentido contrario
La fuerza de la parte superior es horizontal, por lo tanto

$$F = IBa$$

sustituyendo el campo magnético

$$IBa = Ia\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{Ika^2}{2}$$

En la parte inferior es la misma

$$IBa = Ia\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{Ika^2}{2}$$

Sumando las fuerzas de los cuatro lados, obtenemos

$$F = Ika^2$$

2. (a) Un registro fonográfico lleva una densidad uniforme de *electricidad estática* σ. Si gira a una velocidad angular ω, ¿cuál es la densidad de corriente de superficie K a una distancia r del centro?
(b) Una esfera sólida cargada uniformemente, de radio R y carga total Q, se centra en el origen y gira a una velocidad angular constante ω sobre el eje z. Encontrar la densidad de corriente J en cualquier punto (r, θ, φ) dentro de la esfera

Solución :

a) En un movimiento circular, tenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$
$$v = \omega r \tag{61}$$

Si tenemos una región del espacio con una densidad de carga, no necesariamente uniforme, en la que el movimiento de cargas se puede representar por un campo vectorial de velocidades, para esa distribución de cargas en movimiento tenemos:

$$J = \rho v \tag{62}$$

donde ρ es la densidad de carga en un punto y v la velocidad de las cargas en ese punto.

$$\frac{K}{\rho} = \omega r$$
$$K = \rho\omega r$$

b) la velocidad angular ω queda determinada la distribución de velocidades en todos los puntos del sólido rígido en rotación. La expresión 61 puede escribirse en la forma

$$v = \omega \times r = \omega r \operatorname{sen}\theta \tag{63}$$

sabemos que la superficie es esférica por lo que la densidad es $\rho = \dfrac{3Q\pi R^3}{4}$, sustituyendo en 62

$$J = \frac{3Q\pi R^3}{4}\omega r \operatorname{sen}\theta$$

3. Para una configuración de cargas y corrientes confinadas dentro de un volumen V, muestre que

$$\int_V J d\tau = \frac{dp}{dt}$$

Donde p es el momento dipolar total, *Hint* evalué $\int_v \nabla \cdot (xJ) d\tau$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_v \rho x d\tau \\ &= \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) x d\tau \\ &= -\int (\nabla \cdot J) x d\tau \end{aligned}$$

Dado la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (xJ) &= x(\nabla \cdot J) + J \cdot (\nabla x) \\ &= x(\nabla \cdot J) + J_x \end{aligned}$$

por lo que la integral es

$$\int_v (\nabla \cdot J) x d\tau = \int_v \nabla \cdot (xJ) d\tau - \int_v J_x d\tau$$

por el teorema de la divergencia, como J esta contenida en v, es cero

$$\int_v (\nabla \cdot J) x d\tau = -\int_v J_x d\tau$$

entonces

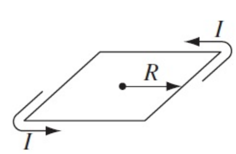
$$\frac{dp}{dt} = \int J d\tau$$

con lo cual queda demostrado

4. *a*) Encuentre el campo magnético en el centro de un ciclo cuadrado, que lleva una corriente constante I. Sea R la distancia de centro a lado (Figura).

   b) Encuentre el campo en el centro de un polígono regular de n lados, llevando una corriente constante I. Nuevamente, sea R la distancia desde el centro a cualquier lado.

   c) Verifique que su fórmula se reduzca al campo en el centro de un circuito circular, en el límite $n \to \infty$.



Solución:

a)

$$dl\operatorname{sen}\theta = dl\cos\theta$$

tenemos que $l = s\tan\theta$, $dl = s\sec^2\theta d\theta$ y $s = \imath\cos\theta$ el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl}{\imath}\cos\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_1=-45}^{\theta_2=45}\left(\frac{\cos^2\theta}{R^2}\right)\left(\frac{R}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\theta_1=-45}^{\theta_2=45}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\operatorname{sen}(45)-\operatorname{sen}(-45)) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi R}
\end{aligned}$$

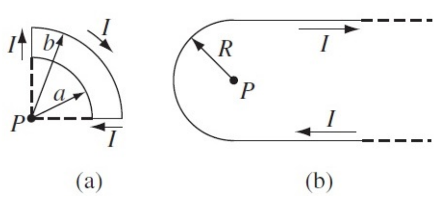
b) el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B &= \frac{n\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl}{\imath}\cos\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\left(\frac{\cos^2\theta}{R^2}\right)\left(\frac{R}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \frac{n\mu_0 I}{2\pi R}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

c) para ángulos muy pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ del inciso anterior, diciendo que $\theta = \dfrac{n}{\pi}$ tenemos

$$\frac{\cancel{n}\mu_0 I}{2\cancel{\pi}R}\left(\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{n}}\right) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

5. Encuentre el campo magnético en el punto P para cada una de las configuraciones de corriente constante que se muestran en la Figura.



Solución:

a) el campo magnético en las rectas no contribuye en campo magnético ya que es paralelo al punto P, $\operatorname{sen} 0 = 0$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_b^a \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \right]_b^a \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \end{aligned}$$

b) Las lineas rectas, que terminan punteadas se van al infinito

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_\infty^R \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \right]_\infty^R \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{aligned}$$

Las contribución del campo magnético, el los cuartos de los círculos es

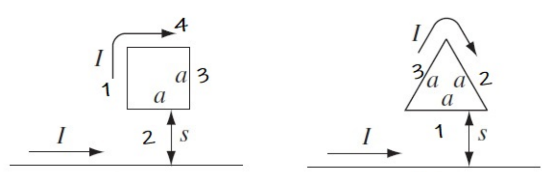
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4R} \end{aligned}$$

el campo magnético total es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right)$$

6. *a*) Encuentre la fuerza en un circuito cuadrado colocado como se muestra en la Fig (a), cerca de un alambre recto infinito. Tanto el lazo como el cable llevan una corriente constante I.

   b) Encuentre la fuerza en el bucle triangular en la Fig.(b).



(a) (b)

Solución:

a) como la corriente va el sentido contrario en los lados 1 y 2, las fuerzas se cancelan en la parte de arriba, tenemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_{\infty}^{s}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{\infty}^{s} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \end{aligned}$$

la fuerza se define como $F = IaB$

$$F_1 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right) Ia = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s}$$

en la parte de abajo

b)

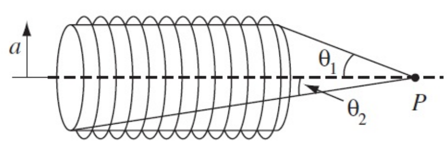
$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_{\infty}^{s+a}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{\infty}^{s+a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} Ia = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)}$$

La fuerza total es

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)} + \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s} = (2s+a)\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s(s+a)}$$

7. Encuentre el campo magnético en el punto P en el eje de un solenoide enrollado firmemente (bobina helicoidal) que consiste en n giros por unidad de longitud enrollado alrededor de un tubo cilíndrico de radio a y que lleva la corriente I Exprese su respuesta en términos de θ_1 y θ_2 (así es más fácil). Considera que los giros son esencialmente circulares, y usa el resultado de Ex. 5.6. ¿Cuál es el campo en el eje de un solenoide infinito (infinito en ambas direcciones)?



Solución

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

observación dl es perpendicular a r

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\theta}{r^2}\int_0^{2\pi a} dl = \frac{I\mu_0 a\cos\theta}{2r^2}$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $r = \sqrt{a^2+z^2}$

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

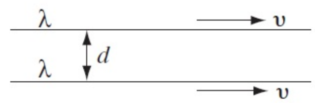
donde $z = a\cot\theta$ entonces $dz = -\csc^2\theta d\theta = -\dfrac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ además $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2+z^2}} = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta}{a^2}$ Sustituyendo

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\frac{a^2\operatorname{sen}^3\theta}{a^3\operatorname{sen}^2\theta}ad\theta = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

para un solenoide infinito

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = \frac{\mu_0 nI}{2}[1-(-1)] = \mu_0 nI$$

8. Suponga que tiene dos líneas rectas de cargas infinitas λ, a una distancia d, moviéndose a una velocidad constante v como se muestra en la figura. ¿Qué tan grande tendría v ¿Esta en orden para que la atracción magnética equilibre la repulsión eléctrica? Calcula el número real. ¿Es esta una velocidad razonable?



Solución

Una carga de línea que viaja por un cable a velocidad v. Constituye una corriente

$$I = \lambda v$$

el campo magnético es

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_{\infty}^{d}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{\infty}^{d} \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \end{aligned}$$

La fuerza dirigida a (1), cuando las corrientes son alineadas, es

$$F = I_2\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)\int dl$$

la Fuerza por unidad de longitud es

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

sustituyendo las corrientes

$$f_m = \frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}$$

Calculando el campo eléctrico

$$EdA = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$E_0^{2\pi r}dA = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

sabemos $F = E/\lambda$

$$f_e = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$f_m = f_e$$

$$\frac{\mu_0 \cancel{\lambda^2} v^2}{\cancel{2\pi d}} = \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{2\pi d}\epsilon_0}$$

$$\mu v^2 = \frac{1}{\epsilon}$$

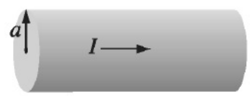
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

donde $c \approx 3 \times 10^8$, tiene que se mayor que la velocidad de la luz, hasta la fecha, no es razonable, casi nada viaja a la velocidad de la luz

9. Una corriente constante fluye por un largo cable cilíndrico de radio a (como se muestra en la Figura). Encuentre el campo magnético, tanto dentro como fuera del cable, si

   (a) La corriente se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior del cable.

   (b) La corriente se distribuye de tal manera que J es proporcional a s, la distancia desde el eje.



Solución:

(a)

$$\oint B ds = \mu I$$

la superficie es un cilindro $S = 2\pi r l$, por lo que el campo magnetico es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

para $s > a$, y para $s < a$, $B = 0$

(b) La corriente se define como

$$I = \int J da$$

Supongamos que la densidad de corriente en el cilindro es proporcional a la distancia del eje,

$$J = kr$$

Para alguna contante k entonces

$$I = \int J da = \int k r da$$

pero la superficie es $a = 2\pi r^2$

$$I = k \int r(2\pi r) dr = 2\pi k \int r^2 dr = \frac{2\pi k r^3}{3}$$

$$k = \frac{3I}{2\pi r^3}$$

$$I_e = k \int^s r(2\pi r) dr = 2\pi k \int^s r^2 dr = \frac{2\pi k s^3}{3}$$

$$k = \frac{3I_e}{2\pi s^3}$$

igualando las expresiones k

$$\frac{\cancel{3}I}{\cancel{2\pi}r^3} = \frac{\cancel{3}I_e}{\cancel{2\pi}s^3}$$

$$\frac{I}{r^3} = \frac{I_e}{s^3}$$

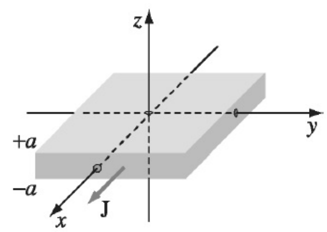
$$I_e = \frac{s^3}{r^3} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I s^2}{2\pi r^3}\hat{\phi}$$

para $r >> s$ tenemos que $I_e \approx I$ en el caso contrario $r < s$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

10. Una losa gruesa que se extiende desde $z = -a$ to $z = a$ (e infinita en las direcciones xy) lleva una corriente de volumen uniforme $J = J\hat{x}$ (como se muestra en la figura). Encuentre el campo magnético, en función de z, tanto dentro como fuera de la losa



Solución
El campo magnético se expresa

$$Bdl = \mu_0 I$$

sabemos que la corriente

$$I = \int Jda = \int Jzdl$$

donde $a = dl * z$, sustituyendo I

$$B\int dl = \mu_0 Jz \int dl$$

$$B = \mu_0 zJ$$

el campo magnético va en la dirección $\hat{y}$ para $z < 0$, y $-\hat{y}$ para $z > 0$ para dentro y fuera de la superficie $-a < z < a$, la corriente es

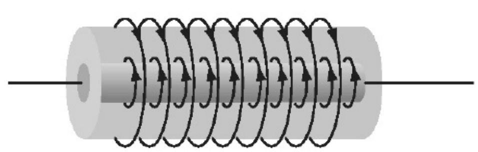
$$I_e = \mu_0 aJ$$

sustituyendo

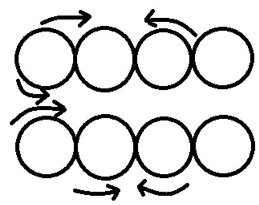
$$B = \mu_0 aJ\hat{y} \qquad z > a$$

$$B = -\mu_0 aJ\hat{y} \qquad z > -a$$

11. Dos solenoides coaxiales largos llevan cada uno la corriente I, pero en direcciones opuestas, como se muestra en la figura. El solenoide interno (radio a) tiene n_1 vueltas de longitud y el exterior (radio b) tiene n_2 Encuentre B en cada una de las tres regiones; (i) dentro del solenoide interno, (ii) entre ellos, y (iii) fuera de ambos



Solución:



fuera de ellos el campo magnético es cero, $B = 0$
entre ellos,

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_e$$

$$\bar{B}d\bar{l} = Bl\cancelto{1}{\cos 180^\circ}$$

La corriente encerrada es el numero de espiras por la corriente que pasa en cada una de ellas,

$$\int Bdl = \mu_0 n_2 i$$

dentro del solenoide

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_e$$

$$\int Bdl = \mu_0 I_e$$

sabemos tiene la misma corriente, pero el campo magnético en el solenoide exterior se dirige $\hat{z}$ y el en interior va $-\hat{z}$

$$\int Bdl = \mu_0 I_e$$

indicado que In_2 va $\hat{z}$ y In_1 va hacia $-\hat{z}$

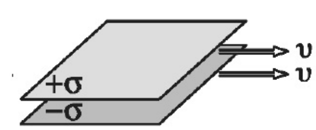
$$\int Bdl = \mu_0 I(n_2 - n_1)$$

12. Un capacitor grande de placas paralelas con carga superficial σ uniforme en la placa superior y $-\sigma$ en la inferior se mueve con una velocidad constante v, como se muestra en la Figura.

    (a) Encuentre el campo magnético entre las placas y también por encima y por debajo de ellas.

    (b) Encuentre la fuerza magnética por unidad de área en la placa superior, incluida su dirección.

    (c) ¿A qué velocidad v equilibraría la fuerza magnética la fuerza eléctrica?



Solución:
La densidad superficial de corriente viene dada por:

$$K = \sigma v$$

sabemos que la corriente es

$$I = \int k dl$$

sustituyendo en la expresión del campo

$$\begin{aligned} \oint B dl &= Bl \\ &= \mu_0 I \\ &= \mu_0 \sigma v \int dl \\ Bl &= \mu_0 \sigma v l \\ B &= \mu_0 \sigma v \end{aligned}$$

este es el campo entre las placas, Encima y por debajo, el campo magnético es $B = 0$, ya que se cancela

$$F_B = LI \times B$$

el campo magnético de una placa sobre otra, por la ley de Ampere

$$B = \frac{\mu I}{2\pi d}$$

por lo que la magnitud de la fuerza magnética es

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{\mu I^2 L}{2\pi d} \\ &= \frac{\mu L}{2\pi d} \sigma^2 v^2 \end{aligned} \tag{64}$$

De la ley de Gauss para el campo eléctrico

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 d}$$

La fuerza debido al campo eléctrico es

$$F_e = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 d} \sigma L \tag{65}$$

de 65 y 64 obtenemos la velocidad

$$\frac{\sigma^2}{2\pi\epsilon_0 d} L = \frac{\mu L}{2\pi d} \sigma^2 v^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

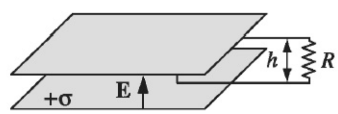
que es la velocidad de la luz

4. Electrodinámica

1. Una batería de emf ε y resistencia interna r está conectada a una resistencia de carga variable, R. Si desea entregar la máxima potencia posible a la carga, ¿qué resistencia R debería elegir? (Por supuesto, no puede cambiar ε y r).

   Solución:
   De la ley de ohm $\varepsilon = IR$,
   $$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$
   La potencia eléctrica se puede calcular como
   $$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$
   sustituyendo la corriente I
   $$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$$
   Para saber cual es el valor máximo de la potencia, derivamos e igualamos a cero
   $$\frac{dP}{dt} = \frac{\varepsilon^2[(R+r)^2 - 2R(R+r)]}{(R+r)^4} = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} - \frac{2R\varepsilon^2}{(R+r)^3} = 0$$
   $$\varepsilon^2\,(R+r-2R) = 0$$
   para obtener el máximo valor $R = r$

2. Un bucle rectangular de cable está situado de manera que un extremo (altura h) está entre las placas de un condensador de placa paralela (Figura), orientado en paralelo al campo E. El otro extremo está fuera, donde el campo es esencialmente cero. ¿Qué es la fem en este bucle? Si la resistencia total es R, ¿qué flujos actuales? Explique. [Advertencia: esta es una pregunta con trampa, así que ten cuidado; Si has inventado una máquina de movimiento perpetuo, es probable que haya algo mal con ella.]



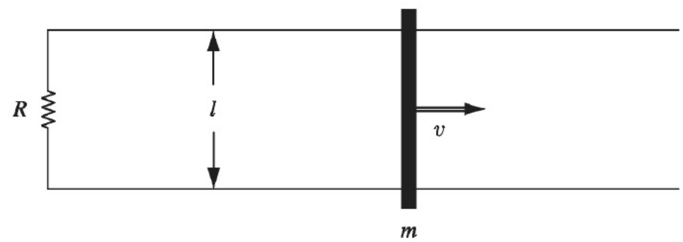
   Solución:
   para este problema el potencial es
   $$\phi = \oint E \cdot dl$$
   esto es $\Phi = 0$ se puede ver que, de la ley de gauss
   $$\phi = \oint E \cdot dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$$
   entre las placas se esperaría que fuera σ/ϵ, y fuera es cero. por lo tanto la corriente es cero

3. Una barra de metal de masa m se desliza sin fricción en dos carriles conductores paralelos a una distancia de l aparte (Figura). Una resistencia R está conectada a través de los rieles, y un campo magnético uniforme B, que apunta a la página, llena toda la región.

   a) Si la barra se mueve a la derecha a velocidad v, ¿cuál es la corriente en la resistencia? ¿En qué dirección fluye?

   b) ¿Cuál es la fuerza magnética en la barra? ¿En qué dirección? item Si la barra comienza con la velocidad v_0 en el momento $t = 0$, y se deja deslizar, ¿cuál es su velocidad en un momento posterior t?

   c) La energía cinética inicial de la barra era, por supuesto, $\frac{1}{2}mv_0^2$ Comprobar que la energía entregado a la resistencia es exactamente $\frac{1}{2}mv_0^2$



Solución:

a) de la ley de ohm

$$\phi = IR$$

donde el potencial por la ley de Lenz es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dx}{dt}$$

sabemos que dx/dt es la velocidad
sustituyendo el potencial en la ley de Ohm, obtenemos la corriente

$$I = \frac{Blv}{R}$$

La ley de lenz, tiene el signo negativo, asi que la dirección es hacia abajo

b) sabemos que la fuerza es

$$F = \int dq(v \times B) = \int (v \times B)\lambda dl = I\int dl \times B$$

sustituyendo I

$$F = \frac{B^2l^2v}{R}$$

y se dirige hacia la izquierda

c) por la segunda ley de newton

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2m}{R}dt$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{mR}\int dt$$

$$v = v_0e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

d) sabemos que la potencia es w/t y I^2R

$$\frac{dW}{dt} = I^2R$$

sustituyendo I

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{B^2l^2v^2}{R^2}R$$

sustituyendo v

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2 e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}$$

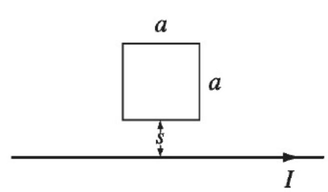
$$dW = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2 e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}dt$$

resolviendo la ecuación diferencial

$$W = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2 \int e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}dt$$

$$W = -\frac{\cancel{B^2l^2}}{\cancel{R}}(v_0)^2 \left[-\frac{m\cancel{R}e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}}}{2\cancel{B^2l^2}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}m(v_0)^2$$

4. Un lazo cuadrado de cable (lado a) se encuentra en una mesa, a una distancia de un cable recto muy largo, que lleva un I actual, como se muestra en la Figura.



a) Encuentra el flujo de B a través del bucle.

b) Si alguien ahora saca el lazo directamente del cable, a velocidad v, ¿qué se genera emf? ¿En qué dirección (hacia la derecha o hacia la izquierda) hace el flujo de corriente?

c) ¿Qué pasa si el bucle se tira a la derecha a velocidad v?

Solución

a) Hacemos una superficie gausiana sobre el cable que lleva la corriente I, el campo es

$$\int_0^{2\pi s} Bdl = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

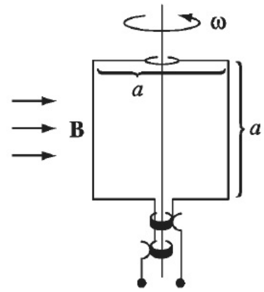
entonces el flujo es

$$\Phi = \int_s^{s+a} Bdl$$

sustituyendo B

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_s^{s+a}\frac{ds}{s}\\ &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)\end{aligned}$$

5. Un bucle cuadrado (lado a) se monta en un eje vertical y se gira a velocidad angular ω vea la figura. Un campo magnético uniforme B apunta a la derecha. Encuentre el $\varepsilon(t)$ para este generador de corriente alterna



Solución:
El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = B \cdot a = Ba^2 \cos \omega t$$

de la ley de lenz

$$\begin{aligned} V(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= Ba^2 \omega \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

6. Un solenoide largo, de radio a, es impulsado por una corriente alterna, de modo que el campo interior es sinusoidal: $B(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{z}$. Se coloca un bucle circular de alambre, de radio $a/2$ y resistencia R, dentro del solenoide, y coaxial con él. Encontrar la corriente inducida en el bucle, en función del tiempo.
Solución:
El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = B \cdot a = Ba \cos \theta \tag{66}$$

en este caso la superficie es área del un circulo de radio $a/2$, $a = \pi(a^2/4)$ sustituyendo en 66 el área y el campo magnético

$$\Phi = \frac{\pi a^2 B_0 \cos \omega t}{4}$$

de la ley de lenz sabemos que el potencial es la variación del flujo

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2 B_0}{4}(-\omega \operatorname{sen} \omega t) \\ &= \frac{\pi a^2 B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t}{4} \end{aligned}$$

de la ley de Ohm, $V = IR$ podemos obtener la corriente, sustituimos el potencial obtenido

$$I = \frac{\pi a^2 B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t}{4R}$$

7. Un bucle cuadrado de alambre, con lados de longitud a, se encuentra en el primer cuadrante del plano xy, con una esquina en el origen. En esta región, hay un campo magnético no uniforme dependiente del tiempo $B(y,t) = ky^3t^2\hat{z}$ (donde k es una constante). Encuentra el emf inducido en el bucle.
Solución:

El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = Bs$$

sumando el flujo de toda la superficie

$$d\Phi = Bds$$

como el campo es función de x, y y como es un cuadrado de lados a entonces $ds = dxdy$, $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq a$

$$\begin{aligned}
\Phi &= B\int_0^a dx \int_0^a dy \\
&= kt^2\int_0^a dx \int_0^a y^3dy \\
&= kt^2(a)\frac{a^4}{4} \\
&= \frac{kt^2a^5}{4}
\end{aligned}$$

La variación del flujo obtenemos la fuerza electromotriz

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -\frac{kta^5}{2}
\end{aligned}$$

8. Un solenoide largo con un radio de a y n vueltas por unidad de longitud lleva un $I(t)$ dependiente del tiempo en la dirección $\hat{\phi}$. Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) a una distancia s del eje (tanto dentro como fuera del solenoide), en la aproximación cuasiestática
Solución:
dentro

$$\Phi = BS$$

Donde la superficie es un circulo de radio s

$$\Phi = B\pi s^2$$

sabemos que el campo magnético se expresa

$$\oint BdS = \mu I$$

sustituyendo el campo magnético para n espiras

$$\Phi = \mu nI\pi s^2$$

Por otra parte el potencial eléctrico es

$$V = \oint Edl$$

$$V = 2\pi sE$$

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

sustituyendo

$$2\pi sE = \mu n\pi s^2\frac{dI}{dt}$$

$$E = \frac{\mu ns}{2}\frac{dI}{dt}$$

fuera

$$\Phi = B\pi s^2$$

sustituyendo el campo magnético para n espiras

$$\Phi = \mu nI\pi a^2$$

Por otra parte el potencial eléctrico es

$$V = \oint Edl$$

$$V = 2\pi aE$$

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

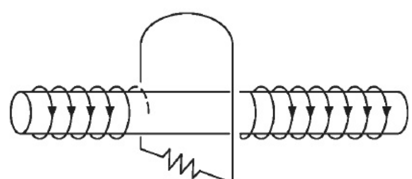
sustituyendo

$$2\pi aE = \mu n\pi a^2\frac{dI}{dt}$$

$$E = \frac{\mu na}{2}\frac{dI}{dt}$$

9. Un largo solenoide de radio a, que lleva n vueltas por unidad de longitud, se enrolla mediante un cable con resistencia R, como se muestra en la Figura

   - Si la corriente en el solenoide aumenta a una velocidad constante ($dl/dt = k$), ¿qué corriente fluye en el bucle y de qué manera (izquierda o derecha) pasa a través de la resistencia?
   - Si el I actual en el solenoide es constante pero el solenoide se saca del bucle (hacia la izquierda, a un lugar alejado del bucle), ¿qué carga total pasa a través de la resistencia?



Solución

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

observación dl es perpendicular a r

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\theta}{r^2}\int_0^{2\pi a}dl = \frac{I\mu_0 a\cos\theta}{2r^2}$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $r = \sqrt{a^2+z^2}$

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

donde $z = a\cot\theta$ entonces $dz = -\csc^2\theta d\theta = -\dfrac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ además $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2+z^2}} = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta}{a^2}$ Sustituyendo

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\frac{a^2\operatorname{sen}^3\theta}{a^3\operatorname{sen}^2\theta}ad\theta = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

para un solenoide infinito

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = \frac{\mu_0 n I}{2}[1-(-1)] = \mu_0 n I$$

El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = AB\cos\theta$$

sustituyendo el campo magnético, y el area $A = \pi a^2$

$$\Phi = \pi a^2 \mu_0 n I$$

y la fuerza electromotriz viene dada por la ley le lenz

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \pi a^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

y La corriente se define como

$$I = \int J da$$

Supongamos que la densidad de corriente en el cilindro es proporcional a la distancia del eje,

$$J = kr$$

Para alguna contante k entonces

$$I = \int J da = \int k r da$$

$$\varepsilon = \pi a^2 \mu_0 n k$$

este potencial lo sustituimos en la ley de ohm, y así obtener la corriente

$$I = \frac{\pi a^2 \mu_0 n k}{R}$$

10. Un pequeño bucle de cable (radio a) se mantiene a una distancia z sobre el centro de un bucle grande (radio b), como se muestra en la Figura. Los planos de los dos bucles son paralelos y perpendiculares al eje común.

    a) Supongamos que los flujos actuales de I en el bucle grande. Encuentra el flujo a través del pequeño bucle. (El pequeño bucle es tan pequeño que puede considerar que el campo del gran bucle es esencialmente constante).
    b) Supongamos que los I corrientes fluyen en el pequeño bucle. Encuentra el flujo a través del bucle grande. (El pequeño bucle es tan pequeño que puede tratarlo como un dipolo magnético).
    c) Encuentra las inductancias mutuas, y confirma que $M_{12} = M_{21}$

    Solución:

    a) Para calcular el campo magnético, utilizamos la ley de Biot-Savart

    $$B = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi a} \frac{dl}{r}\cos\theta$$

    dl y r, son perpendiculares

    $$B = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi a} \frac{2\pi b(\cos\theta)}{r} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

    El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

    $$\Phi = AB\cos\theta$$

    sustituyendo el campo magnético, y el area $A = \pi a^2$

    $$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\pi a^2 b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

b)

$$A_{dip}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m \operatorname{sen}\theta}{r^2}\hat{\phi}$$

El campo magnifico

$$B_{dip} = \nabla \times A = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\hat{\phi})$$

donde m es $I\pi a^2$, integrando sobre la tapa

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \bar{B}\cdot d\bar{a} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2}{r^3}\int(2\cos\theta)(r^2\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi) \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{r}\int_0^\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
\text{donde } r = \sqrt{b^2+z^2} & \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{\sqrt{b^2+z^2}}\int_0^\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{\sqrt{b^2+z^2}}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^\theta \\
\text{tenemos que } \operatorname{sen}\theta = b/r & \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{2\sqrt{b^2+z^2}}\frac{b^2}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{2\sqrt{b^2+z^2}}\frac{b^2}{b^2+z^2} \\
&= \frac{\mu_0 I \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

c) dividiendo por I

$$M_{1,2} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}} = M_{2,1}$$

11. Encuentre la autoinducción por unidad de longitud de un solenoide largo, de radio R, llevando n vueltas por unidad de longitud
Solución:
la integral de B alrededor de una trayectoria circular de radio R

$$Bdl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl = \mu_0 I$$

para n espiras, tenemos

$$B = \mu_0 n I$$

Sabemos que el flujo son las lineas de un campo vectorial que pasan sobre una superficie, en este caso es el el volumen de un cilindro, que tiene círculos de área πR^2, en una longitud l

$$\Phi = B\cdot a = \mu_0 n I(\pi R^2)(nl)$$

$$\Phi = \mu_0 n^2 I \pi l R^2$$

La autoinducción viene dada por $\Phi = lI$, por lo que la autoinducción por unidad de longitud es

$$L = \cancel{l} = \mu_0 n^2 \pi \cancel{l} R^2$$

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

12. suponga

$$\bar{E}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(r-vt)\hat{r}; \qquad \bar{B}(x,t) = 0$$

Demuestre que estos campos satisfacen todos Las ecuaciones de Maxwell, y determinan ρ y J. Describe la situación física que da origen a estos campos.

Solución:

Este campo es como el de una carga puntual en el origen, hacia una superficie esférica de radio vt, fuera de la superficie el campo es cero, el cascaron que carga $-q$ Calculando la divergencia del campo eléctrico, aplicando la regla del producto

$$\nabla \cdot E = \theta(vt-r)\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\nabla \cdot \theta(vt-r)$$

Sabemos que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(r)$$

, y en el segundo termino θ es función solo de r y

$$\nabla \cdot E = \theta(vt-r)\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt-r)$$

$$\nabla \cdot E = \theta(vt-r)\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(4\pi\delta^3(r)) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt-r)$$

$$\nabla \cdot E = \theta(vt-r)\frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(r) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt-r)$$

por otra parte

$$\delta^3(r)\theta(vt-r) = \delta^3(r)\theta(t)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt-r) = -\delta(vt-r) \tag{67}$$

de la ley de Gauss

$$\rho = \epsilon\nabla \cdot E$$

sustituyendo

$$\rho = q\delta^4(r)\theta(r) - \frac{q}{4\pi r^2}\delta(vt-r)$$

de la ley de Maxwell-Amper

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 J + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

si $\nabla \times \bar{B} = 0$ entonces

$$J = -\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

sustituyendo el campo eléctrico

$$J = -\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(r-vt)\right)\hat{r}$$

y de 67 tenemos

$$J = \frac{vq}{4\pi r^2}\delta(r-vt)\hat{r}$$

13. Una cáscara esférica de radio perfectamente conductora gira alrededor del eje z con velocidad angular ω, en un campo magnético uniforme $B = B_0\hat{z}$. Calcula la fem desarrollada entre el polo norte y el ecuador. [Respuesta $\frac{1}{2}B_0\omega a^2$
Solución:

$$\begin{aligned} F &= q(\bar{v} \times \bar{B}) \\ &= vB \operatorname{sen}\theta \hat{z} \\ &= \omega a v B \operatorname{sen}\theta(\hat{\phi} \times \hat{z}) \end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que

$$\varepsilon = \int F dl$$

donde $dl = ad\theta\hat{\theta}$ sustituyendo f y dl

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega a^2 B \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \\ &= \omega a^2 B \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right] 0^{\pi/2} \\ &= \omega a^2 B \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}{2}^{=1} - \frac{\operatorname{sen}^2 0}{2}^{=0}\right] \\ &= \frac{a^2 B \omega}{2} \end{aligned}$$

5. Campos Electromagneticos

15.1
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla J = R \tag{69}$$

Como hacer compatibles las ecuaciones de Maxwell con la creación de materia

a) Mostrar que basta con cambiar a

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} - \lambda\varphi$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}\lambda A$$

es invariante de norma

b) Confirme que $A = qf(r,t)\varphi - \varphi_0$ donde f es una constante

c) Mostrar que J/P es lineal en r

Solución:

a)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot E) = \mu\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot E) - \lambda\left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \varphi)\right)$$

La ecuación de continuidad modificada se cumplirá si elegimos los potenciales de la forma

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{\lambda}R$$

b) De las ecuaciones de Maxwell, tenemos

$$E = \frac{\partial A}{dt} = r\dot{f}$$

$$B = \nabla \cdot A = f\nabla \times r - r \times \nabla f = 0$$

donde $f(r)$ es una función radial las densidades de corriente y de carga relacionadas con los campos son

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot E + \epsilon_0 \lambda\varphi = -3\epsilon_0 \frac{\partial f}{\partial r} - \epsilon_0 r f + \epsilon_0 \lambda \varphi$$

$$J = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times B + \frac{A\lambda}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{rf\lambda}{\mu_0}$$

c) sustituyendo en la ecuación de continuidad modificada

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\epsilon_0 r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{rf\lambda}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-3\epsilon_0 \frac{\partial f}{\partial r} - \epsilon_0 r f'\right) \\
&= \frac{\lambda}{\mu_0}(3f + rf')
\end{aligned}$$

La solución a la ecuación homogenea $3f + rf' = 0$ es

$$f = \frac{k}{r^3}$$

donde k es una constante

15.2 A y p satisfacen las condición de Lorenz que debemos pedir para Ω para que $A+\nabla\Omega$, $X=\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\Omega$ lo haga también

Solución:

Los potenciales gauge de Lorenz satisfacen

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t}=-\mu_0 J$$

Haciendo

$$\varphi\to\varphi+\frac{\partial\xi}{\partial t}\qquad A\to A+\nabla\xi$$

las ecuaciones se convierten

$$\nabla^2\varphi+\nabla^2\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right]=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 A+\nabla^2\nabla\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\nabla\xi}{\partial t}=-\mu_0 J$$

$$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t}-\nabla\left[\nabla^2\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t}\right]=-\mu_0 J$$

podemos decir las ecuaciones de movimiento de Lorenz para los potenciales son invariantes de las transformaciones de la función $\xi(r,t)$ y satisface la ecuación de onda.

15.5 *a*) Mostrar que $\varphi=qE_0$, $A=-\frac{1}{2}q\times B_0$ describen los campos B y E constantes.

b) Integre $B=\nabla\times A$ y $E=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}$
para encontrar

$$\varphi=-q\int_0^1 d\lambda E(\lambda,t)$$

$$A=-\int_0^1\lambda d\lambda q\times B(\lambda q,t)$$

hint: Mostrar que

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda,q)=\frac{1}{\lambda}(q\cdot\nabla)F(\lambda q)$$

Para un campo vectorial F arbitrario

Solución:

a) Sabemos que el campo eléctrico es

$$-\nabla\varphi=-\nabla(-r\cdot E)=\nabla r_iE_i=E$$

$$E=-\nabla\varphi$$

y para la parte magnética

$$\nabla\times A=-\frac{1}{2}\nabla\times(r\times B)=\frac{1}{2}\left[(B\cdot\nabla)r-(r\cdot\nabla)B+r(\nabla\cdot B)-B(\nabla\cdot r)\right]$$

y sabemos que

$$\nabla \cdot r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

debido a la ley de Maxwell $\nabla \cdot B = 0$. tenemos y $(B \cdot \nabla) r = B$

$$\nabla \times A = \frac{1}{2}\left[B - 3B\right] = B$$

b) Por regla de la cadena

$$\frac{dG}{d\lambda} = \frac{d(\lambda r)}{d\lambda}\frac{dG}{d(\lambda r)} = \frac{r}{\lambda}\frac{dG}{dr} = \frac{1}{\lambda}\hat{r}\nabla G$$

Usando una identidad

$$\begin{aligned}
\nabla \times A &= \int_0^1 d\lambda\lambda \left\{2B(\lambda r, t) + (r \cdot \nabla) B(\lambda)\right. \\
&= \int_0^1 d\lambda\lambda \left\{2B(\lambda r, t) + \lambda \frac{d}{d\lambda} B(\lambda r, t)\right\} \\
&= \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda}\left\{\lambda^2 B(\lambda r, t)\right.
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\nabla \varphi(r, t) &= -\int_0^1 d\lambda \nabla \left\{r \cdot E(\lambda r, t)\right\} \\
&= -\int_0^1 d\lambda \left\{(r \cdot \nabla) E + \underbrace{(\nabla \cdot E)}_{-\partial B/\partial t} r + r \times (\nabla \times E) + E \times \underbrace{\cancel{(\nabla \times r)}}_{=0}\right. \\
&= -\int_0^1 d\lambda \left\{\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda E(\lambda r, t)\right] - r \times \frac{\partial B}{\partial t}\right. \\
&= E(r, t) - \int_0^1 d\lambda r \times \frac{\partial B}{\partial t}
\end{aligned}$$

se prueba que

$$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

dado que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\int_0^1 d\lambda\lambda r \times \frac{\partial}{\partial t} B(\lambda r, t)$$

15.16 Demuestra que la desigualdad $U_{EM} \leq c|P_{EM}|$ Es una propiedad general de la electricidad. y campos magnéticos. ¿Bajo qué condiciones son iguales las dos cantidades?
Solución:

$$\begin{aligned}
U_{EM} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int dr^3 (E \cdot E + cB \cdot B) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int dr^3 [|E|^2 + c|B|^2 + 2c|E||B| - 2c|E||B|] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int dr^3 [(|E| - c|B|)^2 + 2c|E||B|]
\end{aligned}$$

entonces

$$U_{EM} = \leq \epsilon_0 c \int d^3 r |E||B|$$

por otra parte

$$\int d^3r|E||B| \int d^3r|E\times B|$$

por la propiedad de valor absoluto

$$\int d^3r|E\times B| \leq \left|\int d^3rE\times B\right| = \frac{|P_{EM}|}{\epsilon_0}$$

15.19 *a)* Muestre que el momento electromagnético lineal P_{EM} para campos estáticos en todo el espacio se puede reescribir en términos de la densidad de corriente $j(r)$ y el potencial electrostático $\phi(r)$.

b) Las cargas puntuales q y $-q$ se sitúan en los puntos $(0,0,d)$ y $(0,0,-d)$, respectivamente. Un punto dipolar magnético con momento m se asienta en el origen. Demuestre que $P_{EM} = E(0)\times m/c^2$, donde $E(0)$ es el campo eléctrico de las cargas evaluadas en el origen.

c) Un dipolo eléctrico puntual con el momento p no está lejos de una distribución estable de la corriente. Expresa P_{EM} en términos de p y el potencial de vector del medidor de Coulomb.

Solución:

a) Sabemos

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3rE\times B$$

Para un campo que es independiente del tiempo $E(r) = \nabla\phi$

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3r\nabla\phi\times B$$

por una identidad vectorial, tenemos

$$P_{EM} = -\epsilon_0 \int d^3r\nabla\times(\phi B) - \phi(\nabla\times B)$$

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3r\phi(\mu_0 J) - \epsilon_0 \int d^3r\nabla\times(\phi B)$$

$$P_{EM} = \frac{1}{c^2}\int d^3r\phi J - \epsilon_0 \int d^3r\nabla\times(\phi B)$$

aplicado el teorema de Stokes a la 2da integral

$$P_{EM} = \frac{1}{c^2}\int d^3r\phi J - \epsilon_0 \int_S dS\nabla\times B\phi$$

pero

$$\int_S dS\nabla\times B\phi = 0$$

por lo tanto

$$P_{EM} = \frac{1}{c^2}\int \phi J d^3r$$

b) Sabemos que la densidad de corriente es $J = -m\times\nabla\delta(r)$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} P_{EM} &= -\frac{1}{c^2}\int d^3rm\times\nabla\delta(r) \\ &= -\frac{1}{c^2}\int d^3r\delta(r)\nabla\phi\times m \\ &= \frac{1}{c^2}E\times m \end{aligned}$$

c) El potencial estático para un dipolo eléctrico es

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \cdot \nabla \frac{1}{|r - r_0|}$$

Sustituyendo de nuevo en la expresión que se encontró en (a)

$$\begin{aligned} P_{EM} &= \frac{1}{c^2}\int \phi J d^3 r \\ &= \frac{1}{c^2}\int \phi J d^3 r \\ \text{sustituyendo } \Phi \quad & \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int d^3 r P \cdot \nabla \frac{1}{|r - r_0|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} P \cdot \nabla \int \frac{d^3 r}{|r - r_0|} \\ &= (p \cdot \nabla) A(r_0)|_{r_0 = 0} \end{aligned}$$

15.22 L_{EM} para una carga en un campo magnético bidimensional Una carga puntual q se encuentra en el origen. Un magnético el campo $B(r) = B(x, y)\hat{z}$ llena todo el espacio. Demuestre que el momento angular del campo es $L_{EM} = -(q/2\pi)\Phi_b \hat{z}$ donde Φ_B es el flujo de B a través del plano $z = 0$.

Solución

Densidad de corriente de momento angular

$$M = T \times r \qquad (M_{ij} = T_{ik} r_l \epsilon_{jkl}) \tag{70}$$

Por sus unidades puede verse como el momento angular de densidad de corriente, sustituyendo (70) en

$$\frac{\partial}{\partial}(r \times g) + \nabla \cdot (T \times r) = -r \times f \tag{71}$$

e integrando sobre un volumen arbitrario, nos da la fuerza mecánica

$$\frac{dL}{dt} = -\int d^3 r \left(\frac{\partial}{\partial t}(r \times g) + \nabla \cdot M \right)$$

$(r \times g)$ es la densidad de momento angular de un campo electromagnético entonces el momento angular total del campo en un volumen V es

$$L_{EM} = \epsilon_0 \int d^3 r \; r \times (E \times B)$$

por identidad vectorial

$$L_{EM} = \epsilon_0 \int d^3 r [E(r \cdot B) - B(r \cdot E)]$$

$$L_{EM} = \frac{q\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz B(x, y)\left[\frac{z}{r^2}\hat{r} - \frac{\hat{z}}{r}\right]$$

Por la forma del campo eléctrico

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x + y + z}{r^3}$$

$$L_{EM} = \frac{q\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dz B(x, y)\left[\frac{x + y - (x^2 + y^2)}{r^2}\right]$$

$$L_{EM} = \frac{q}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy (x^2 + y^2) \int_{-\infty}^\infty B(x, y)\left[\frac{dz}{r^2}\right]$$

$$L_{EM} = \frac{q}{4\pi}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (x^2 + y^2) B(x, y)\left[\frac{2}{x^2 + y^2}\right]$$

$$L_{EM} = \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy B(x, y)$$

15.24 a) Demuestre que el momento angular electromagnético para campos estáticos en el medidor de Coulomb es

$$L_{EM} = \int d^3 r \rho(r) r \times A(r) \tag{72}$$

b) Evalúe el L_{EM} cuando un dipolo p de punto eléctrico se asienta en el origen en presencia de un campo magnético estático $B(r)$.

c) Una distribución de carga axialmente simétrica gira alrededor de su eje de simetría con la frecuencia ω. Pruebe que la energía magnética total se puede expresar como

$$U_B = \frac{1}{2}\omega \cdot L_{EM} \tag{73}$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
P_{EM} &= \epsilon_0 \int d^3 r r \times (E \times B) \\
&= \epsilon_0 \int d^3 r r \times (E \times (\nabla \times A)) \\
&= \epsilon_0 \int d^3 r r \times (\nabla(E \cdot A) - (A \cdot \nabla)E - (E \cdot \nabla)A - A \times (\nabla \times E)) \\
&= \epsilon_0 \int d^3 r r \times (\nabla(E \cdot A)) - \epsilon_0 \int d^3 r r \times (A \cdot \nabla)E) - \epsilon_0 \int d^3 r r \times (E \cdot \nabla)A)
\end{aligned}$$

En forma tensorial la primera integral es

$$\epsilon_{ijk} \int d^3 r r_j \partial_k (E_m A_m) = \epsilon_{ijk} \int d^3 r [\partial_k (r_j E_m A_m) - E_m A_m \delta_{jk}] = 0$$

dado que $\nabla \cdot A = 0$ la segunda integral es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \int d^3 r r_j A_m \partial_m E_k &= \epsilon_{ijk} \int d^3 r [\partial_m (r_j A_m E_k) - r_j E_k \partial_m A_m - \delta_{mj} A_m E_k \\
&= -\epsilon_{imk} \int dr A_m E_k \\
&= \int d^3 E \times A
\end{aligned}$$

Para la tercera integral

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \int d^3 r [r_j E_m \partial_m A_k] &= \epsilon_{ijk} \int d^3 r [\partial_m r_j E_m A_k) - \delta_{mj} E_m A_k - r_j A_k \partial_m E_m] \\
&= \int d^3 r \partial_m r_j \epsilon_{ijk} E_m A_k) - \int d^3 r (\partial_m E_m) \epsilon_{ijk} r_j A_k \\
&= -\int d^3 r E \times A - \int d^3 r (\nabla \cdot E)(r \times A)
\end{aligned}$$

sustituyendo las tres integrales y usando el teorema de Gauss

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3 r E \times A - \epsilon_0 \int d^3 r E \times A - \epsilon_0 \int d^3 r (\nabla \cdot E)(r \times A)$$

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3 r (\nabla \cdot E)(r \times A)$$

$$P_{EM} = \epsilon_0 \int d^3 r \rho r \times A$$

b) La densidad de carga de un punto dipolo eléctrico en el origen es

$$\begin{aligned} L_k &= -\epsilon_{ijk}\int d^3r\partial_l[p_l\delta]r_jA_k \\ &= -\epsilon_{ijk}\int d^3r[\partial_l(p_lr_j\delta]A_k - p_l\delta_{lj}A_k\delta] \\ &= \epsilon_{ijk}p_l\int d^3rA_m\delta \end{aligned}$$

Si la densidad de carga del dipolo, esta en el origen.

$$L_{EM} = p\times A(0)$$

c) La densidad de corriente en rotación es

$$J = \rho v = \rho\omega\times r$$

por lo que la energía magnética se puede escribir como

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int d^3rA\cdot J \\ &= \frac{1}{2}\int d^3r\rho A\cdot(\omega\times r) \\ &= \frac{\omega}{2}\int d^3r\rho r\times A \\ &= \frac{\omega}{2}\cdot L_{EM} \end{aligned}$$

6. Ondas en el Vacío

16.1 Ecuación de onda frente a ecuaciones de Maxwell Sea $E(r,t)$ un campo vectorial que satisfaga

$$\nabla\cdot E = 0 \qquad \nabla^2E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

Usa el teorema de Helmholtz para escribir una fórmula para $B(r,t)$ en términos de $E(r,t)$. Confirme que $B(r,t)$ y $E(r,t)$ satisfacer las cuatro ecuaciones de Maxwell en el espacio libre.

Solución:

Definimos el campo magnético

$$B(x,t) = \nabla\times\frac{1}{4\pi c^2}\int d^3r'\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\frac{1}{|r-r'|}$$

Satisface las ecuaciónes de Maxwell para B, tambien sabemos que son soluciones de la ecuación de onda B y E para el caso $\nabla\times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ Derivado con respecto de t

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(r,t)}{\partial t} &= \nabla\times\frac{1}{4\pi c^2}\int d^3r'\frac{\partial^2E(x,t)}{\partial t^2}\frac{1}{|r-r'|} \\ &= \nabla\times\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\nabla^2E(x,t)\frac{1}{|r-r'|} \\ &= \nabla\times\frac{1}{4\pi}\int d^3r'E(x,t)\nabla^2\frac{1}{|r-r'|} \end{aligned}$$

sabemos que

$$\nabla\left(\frac{\hat{r}}{r}\right) = 4\pi\delta(r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(r,t)}{\partial t} &= -\nabla\times\int d^3r'E(x,t)\delta(r-r') \\ &= -\nabla\times E(r,t) \end{aligned}$$

16.2 No hay balas electromagnéticas Sea $f(\xi)$ una función escalar arbitraria de la variable escalar ξ. Hemos aprendido que $f(z-ct)$ es una solución de onda viajera de la ecuación de onda unidimensional. En otras palabras

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] f(z-ct) = 0 \tag{74}$$

También hemos aprendido que las soluciones de esta ecuación se pueden localizar, es decir, $f(\xi)$ puede ir a cero fuera de un intervalo finito de ξ. Ahora sea $\psi(x, y, z-ct)$ una solución de la ecuación de onda tridimensional. Utilice la información que se acaba de dar (y su conocimiento de la electrostática) para demostrar que ψ no se puede localizar en las direcciones x, y, y z simultáneamente.

Solución:

Tenemos la ecuación de onda

$$\nabla^2\psi(x,y,z,-ct) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi(x,y,z,-ct)}{\partial t} = 0$$

concederemos x y y constantes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,y,z,-ct) = 0$$

Por lo tanto, ψ satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones:

Ahora, si $\psi(x,y,z-ct)$ se localiza en las direcciones x e y simultáneamente, el origen debe ser parte de un área cerrada A en el plano x, y tal que $\psi(x,y,z-ct)$ es cero en todas partes dentro y fuera de la curva límite de A. la solución de la ecuación de Laplace que satisface esta condición de frontera es $\psi(x,y,z-ct) = 0$ en todas partes de A. entonces $\psi(x,y,z-ct)$ está localizado en los tres. Las imágenes no pueden ser correctas.

16.3 El campo eléctrico de una onda que se propaga en el vacío es $E = \hat{y}E_0 exp[i(hz-\omega t) - kx]$.

1) ¿Cómo se relacionan los parámetros reales h, k y ω entre sí?
2) Encuentre el campo magnético asociado B.
3) ¿Bajo qué condiciones la polarización del campo magnético es casi circular?
4) Calcular el vector de Poynting promediado en el tiempo

Solución:

1) El campo E satisface la ecuación de onda

$$\nabla E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

sustituyendo E

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]})}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_0 k e^{[i(hz-\omega t)-kx]} + ih\frac{\partial}{\partial z}E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]} - i\omega\frac{1}{c^2}\frac{\partial(E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]}}{\partial t} = 0$$

$$E_0 k^2 e^{[i(hz-\omega t)-kx]} + i^2h^2 E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]} - i^2\omega^2\frac{1}{c^2}E_0 e^{[i(hz-\omega t)-kx]} = 0$$

$$k^2 - h^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$h^2 - k^2 = \omega^2\frac{\omega^2}{c^2}$$

2)

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial k} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Quedando

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$B_y = -\int \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dt$$

$$B = E_0(k + ih) \int \left(e^{[i(hz - \omega t) - kx]}\right) dt$$

$$B = E_0(k + ih) \frac{e^{[i(hz - \omega t) - kx]}}{i\omega}$$

3) el campo estará circularmente polarizado si $k = h$

4) El vector de Poynting se define

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |E_0 \times B_0|$$

los campos magnético y eléctrico son $B = B_0 e^{-i\omega t}$ y $E = E_0 e^{-i\omega t}$ solo consideramos la parte temporal

$$\langle s \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2kx} \hat{z}$$

16.4 1) Sea $A(x)$ una función vectorial de un argumento escalar. Encuentre las condiciones que hacen de $A(k \cdot r - ckt)$ un potencial de vector de calibre Coulomb legítimo en un espacio vacío. Calcule $E(r, t)$ y $B(r, t)$ explícitamente y muestre que ambos son transversales.

2) Considere un vector de calibre de Coulomb $A_C(r, t) = u(r, t)a$ donde u es una función escalar y a es un vector constante. ¿Qué restricciones deben imponerse en $u(r, t)$ y a, si las hay? Encuentra los campos eléctricos y magnéticos asociados.

3) Especialice (b) en el caso en que $u(r, t) = u(k \cdot r - ckt)$. Demuestre que $cB = \hat{k} \times E$.

4) Considere un potencial gauge de Lorenz $A_L(r, t) = u(r, t)s$ donde u es una función escalar y s es un vector constante. ¿Qué restricciones deben imponerse a $u(r, t)$ y a, si las hay? Encuentra los campos eléctricos y magnéticos asociados.

5) Del (d) en el caso en que $u(r, t)$ sea la misma onda plana que en la parte (c). Mostrar que el eléctrico y los campos magnéticos son exactamente los mismos que los calculados en la parte (c).

Solución

1) sabemos que

$$E = -\nabla \phi$$

donde $\phi = A$ es el potencial

$$E = -\frac{\partial A_C}{\partial t} = -\frac{\partial A(k \cdot r - ckt)}{\partial t} = -A'(k \cdot r - ckt) \frac{\partial \partial (k \cdot r - ckt)}{\partial t} = A'(k \cdot r - ckt)ck$$

$$B = \nabla \times A_C = \hat{k} \times A$$

Ambos campos son perpendiculares a k porque $A(k \cdot r - ckt)$ y por lo tanto $A'(k \cdot r - ckt)$ son perpendiculares a k

2) del inciso anterior sabemos $\nabla \cdot A_C = 0$

$$\nabla \cdot A_C = \nabla \cdot (ua) = u\nabla \cdot a$$

son cero si a es perpendicular a ∇u, de la ecuación de onda, tenemos

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) A_C = a\left(\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

$u(r,t)$ es una solución de la ecuación de onda homogénea. del inciso a)

$$E = \frac{\partial (ua)}{\partial t}$$

tambien se puede concluir que

$$B = -a \times \nabla u$$

3)

$$E = -a\frac{\partial u(\phi)}{\partial t} = -a\frac{\partial u(k \cdot r - ckt)}{\partial t} = -au'(k \cdot r - ckt)\frac{\partial \partial (k \cdot r - ckt)}{\partial t} = au'(k \cdot r - ckt)ck$$

$$B = a \times u(\phi)\hat{k}$$

4) del inciso (b) tenemos que

$$s\left(\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

la restricción de Lorenz es

$$\frac{\partial \varphi_L}{\partial t} - c^2 s\nabla u$$

agregando esto, en el campo eléctrico

$$\begin{aligned} E &= -\nabla \varphi_L - \frac{\partial A_L}{\partial t} \\ &= c^2 (s \cdot \nabla)\nabla \int_{-\infty}^{t} dt' u(r,t') - \frac{\partial u}{\partial t} s \end{aligned}$$

$$B = \nabla \times A_L = -s \times \nabla u$$

5) con $A_L = u(\phi)\hat{s}$ donde $\phi = k \cdot r - ckt$, la solución de la restricción de Lorenz es

$$\varphi_L(\phi) = c(s \cdot \hat{k})u(\phi)$$

en este caso

$$E = -\nabla \varphi_L - \frac{\partial A_L}{\partial t} = -\nabla[c(s \cdot \hat{k})u(\phi)] - \frac{\partial u(\phi)}{\partial t} = ck(s - (s \cdot \hat{k})\hat{k})u'(\phi)$$

$$B = ck(\hat{k} \times s)u'$$

16.5 1) Sea $E = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_0 \cos(kz + \omega t)\hat{x}$. Escriba $E(z,t)$ de forma más sencilla y encuentre el campo magnético asociado $B(z,t)$.

2) Para los campos en la parte (a), encuentre las densidades de energía de campo eléctrico y magnético instantáneas y promediadas en el tiempo. Encuentre también la densidad de corriente de energía instantánea y promediada en el tiempo.

3) Sea $E = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_0 \,\mathrm{sen}(kz + \omega t)\hat{y}$. Determine la polarización de este campo en $z = 0$, $z = \lambda/8$, $z = \lambda/4$, $z = 3\lambda/8$ y $z = \lambda/2$.

4) Muestre que el campo en la parte (c) se puede escribir como una posición ascendente de una onda estacionaria de LHC y una onda estacionaria de RHC.

5) Encuentre el vector de Poynting promediado en el tiempo como una función de z para el campo en la parte (c).

Solución:

1)

$$\begin{aligned} E &= E_0[\cos(kz-\omega t)+\cos(kz+\omega t)] \\ &= E_0[\cos kz\cos\omega t+\operatorname{sen} kz\operatorname{sen}\omega t+\cos kz\cos\omega t-\operatorname{sen} kz\operatorname{sen}\omega t] \\ &= 2E_0\cos kz\cos\omega t \end{aligned}$$

sea ε la parte real del campo E, y β la de B

$$\varepsilon = E(z)e^{i\omega t} \qquad \beta = Be^{i\omega t}$$

por la ley de Faraday tenemos

$$\nabla\times\varepsilon = \frac{\partial\beta}{\partial t} = i\omega\beta$$

$$\nabla\times Ee^{i\omega t} = i\omega Be^{i\omega t}$$

sustituyendo

$$\nabla\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial k} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i}-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

con $E_z = E_y = 0$ y $E_x = 2E_0\cos kz$

$$-2E_0\operatorname{sen} kz\hat{j} = i\omega B\operatorname{sen}(i\omega t)$$

Sabemos que

$$cB = E$$

$$cB = Re\left(\frac{2ic}{k}\operatorname{sen} kze^{i\omega t}\right)\hat{j} = 2E_0\operatorname{sen} kz\operatorname{sen}\omega t\hat{j}$$

2) tenemos que

$$U_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2}(E\cdot E+cB\cdot B) = \frac{\epsilon_0}{2}[|E_\perp|^2+(\hat{k}\times B)\cdot(\hat{k}\times B)]$$

$$U_{EM} = \epsilon_0[E_\perp(k\cdot r-ckt)]^2$$

$$E = (r,t) = E_\perp(k\cdot r-ckt) \qquad cB(r,t) = \hat{k}\times E(r,t)$$

rescribiendo

$$U_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2}\left\{|ReE|^2+c^2|ReB|^2\right\}$$

$$ReE = \frac{1}{2}(E^*+E) \qquad ReB = \frac{1}{2}(B^*+B)$$

$$\langle uE(z)\rangle = \frac{1}{2}Re\left(\frac{1}{2}(E^*+E)\right) = E^2\cos^2 kz$$

$$\langle uB(z)\rangle = \frac{1}{2}Re\left(\frac{1}{2}(cB^*+cB)\right) = E^2\operatorname{sen}^2 kz$$

como E es real y B es puramente imaginario, el vector de poynting

$$\langle S(z)\rangle \propto Re[E^*\times B] = 0$$

3) el campo eléctrico es

$$\begin{aligned} E(z,t) &= Re\left(E_0e^{i(kz-\omega t)}\right)\hat{i} + Re\left(iE_0e^{-i(kz+\omega t)}\right)\hat{j} \\ &= Re\left[E_0\left(e^{ikz}\hat{i} + e^{-ikz}\hat{j}\right)e^{-i\omega t}\right] \\ &= Re\left[\sqrt{2}E_0e^{ikz}\left(\frac{\hat{i}+e^{-2ikz}\hat{j}}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\omega t}\right] \end{aligned}$$

renombremos e a $\left(\frac{\hat{i}+e^{-2ikz}\hat{j}}{\sqrt{2}}\right)$ Se puede observar que, el vector de polarización normalizado es, veamos para valores de z

$$e(z=0) = \frac{\hat{i}+i\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

es polarización circular derecha

$$e(z=\lambda/8) = \frac{\hat{i}+ie^{-i\pi/2}\hat{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

es una polarización lineal

$$e(z=\lambda/4) = \frac{\hat{i}+ie^{-i\pi}\hat{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}+i\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

es polarización circular derecha izquierda

$$e(z=3\lambda/8) = \frac{\hat{i}+ie^{-3i\pi/2}\hat{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

es una polarización lineal

$$e(z=2\lambda) = \frac{\hat{i}+ie^{-2i\pi}\hat{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}+i\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

es polarización circular derecha

16.22 1) Superponga dos ondas escalares: una onda plana $u_1exp(ikx)$ y una onda esférica $(u_2/r)exp(ik\cdot r+\delta)$. Mostrar que el lugar geométrico de los puntos donde se produce la interferencia constructiva define una familia de parábolas.

2) Superponga dos ondas planas de amplitud igual, armónicas en el tiempo y polarizadas en y. Sus vectores de onda satisfacen $|k_1| = |k_2|$ y se encuentran en el plano xy como se muestra a continuación. Es la suma de estas dos ondas planas misma un plano? ¿Es transversal?

3) Grafique el vector de Poynting promediado en el tiempo para la onda en la parte *(b)* como una función de la posición para $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, y $\theta = \pi/2$.

Solución:

Las ondas interfieren constructivamente cuando sus fases difieren en un múltiplo de 2π. Si sustituimos este múltiplo en la definición de δ, la condición de interferencia es

$$\begin{aligned} kx-\delta &= -k\cdot r \\ &= -k\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ k^2x^2 &= -(k^2x^2+k^2y^2+k^2z^2) \\ 2k^2x^2 &= -k^2(y^2+z^2)-\delta \\ x^2 &= -\frac{(y^2+z^2)}{2}-\frac{\delta}{2k^2} \end{aligned}$$

se puede observar que solo tomamos la solución $-$ de la raíz

$$x = -\frac{y^2+z^2}{2} - \frac{\delta}{2k^2}$$

Esta ecuación define una familia de paraboloides parametrizados por el cambio de fasecomo dice que son armónicas en el tiempo, en la parte temporal de la onda plana $\psi = Ae^{ikt}$, escribimos $t \equiv \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

$$E_1 = Ae^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)}\hat{j}$$
$$E_2 = Ae^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)}\hat{j}$$

Sumando las ondas E_1 y E_2

$$\begin{aligned}
E &= E_1 + E_2 \\
&= Ae^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)}\hat{j} + Ae^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)}\hat{j} \\
&= A[e^{ikz\cos\theta}e^{-ikx\operatorname{sen}\theta} + e^{ikz\cos\theta}e^{-ikx\operatorname{sen}\theta}]\hat{j} \\
&= 2A\left[e^{ikz\cos\theta}\left(\frac{e^{ikx\operatorname{sen}\theta} + e^{-ikx\operatorname{sen}\theta}}{2}\right)\right]\hat{j} \\
&= A\left[e^{ikz\cos\theta}\left(e^{ikx\operatorname{sen}\theta} + e^{-ikx\operatorname{sen}\theta}\right)\right]\hat{j} \\
&= 2Ae^{ikz\cos\theta}\cos(kx\operatorname{sen}\theta)
\end{aligned}$$

$E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$, $t \to \theta$

$$B_1 = A(z\operatorname{sen}\theta - x\cos\theta)e^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)}$$
$$B_1 = A(z\operatorname{sen}\theta - x\cos\theta)e^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)} = A - (z\operatorname{sen}\theta + x\cos\theta)e^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)}$$

$$\begin{aligned}
B &= B_1 + B_2 \\
&= A(z\operatorname{sen}\theta - x\cos\theta)e^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)} + A(z\operatorname{sen}\theta - x\cos\theta)e^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)} \\
&= A\left[z\operatorname{sen}\theta(e^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)} - e^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)}) - x\cos\theta(e^{ik(z\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)} + e^{ik(z\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)})\right] \\
&= 2A\left[zi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{e^{ik\theta + x\operatorname{sen}\theta} - e^{-ik + x\operatorname{sen}\theta}}{2i}\right) - x\cos\theta\left(\frac{e^{ikx\operatorname{sen}\theta} + e^{-ikx\operatorname{sen}\theta}}{2}\right)\right]e^{ik(z\cos\theta} \\
&= 2A\left[zi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(kx\operatorname{sen}\theta) - x\cos\theta\cos(kx\operatorname{sen}\theta)\right]e^{ik(z\cos\theta}
\end{aligned}$$

para $\theta = 0$, sabemos que $\cos(0°) = 1$ y el $\operatorname{sen}(0°) = 0$ sustituyendo en los campos E y B

$$E = 2Ae^{ikz\cos(0°)}\cos(kx\operatorname{sen}(0°)) = 2Ae^{ikz}\hat{j}$$

$$B = 2A\left[zi\operatorname{sen}0°\operatorname{sen}(kx\operatorname{sen}0° right) - x\cos 0°\cos(kx\operatorname{sen}0°)\right]e^{ik(z\cos 0°} = -2Ae^{ikz}$$

y un vector de Poynting promediado en el tiempo que es uniforme en todo el espacio

$$\begin{aligned}
\langle S\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re(E\times B) \\
\langle S(0)\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} 0 & 2Ae^{ikz} & 0 \\ -2Ae^{-ikz} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mu_0}(4A^2)\hat{k} \\
&= \frac{2A^2}{\mu_0}\hat{k}
\end{aligned}$$

para $\theta = \pi/2$, sabemos que $\cos(\pi/2) = 0$ y el $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ sustituyendo en los campos E y B

$$E = 2Ae^{ikz\cos(\pi/2)}\cos(kx\operatorname{sen}(\pi/2)) = 2A\cos kx\hat{j}$$

$$B = 2A\left[zi\,\mathrm{sen}(\pi/2)\,\mathrm{sen}\left(kx\,\mathrm{sen}(\pi/2)right) - x\cos\pi/2\cos\left(kx\,\mathrm{sen}\,\pi/2\right)\right]e^{ik(z\cos\pi/2} = -2Ai\,\mathrm{sen}\Big(kxright)\hat{k}$$

y un vector de Poynting promediado en el tiempo que es uniforme en todo el espacio

$$\begin{aligned}
\langle S\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re(E\times B) \\
\langle S(\pi/2)\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} 0 & 2A\cos kx & 0 \\ -2Ai\,\mathrm{sen}(kx) & & \end{vmatrix} \\
&= Re\left\{\frac{-2iA^2\cos kx\,\mathrm{sen}\,kx}{\mu_0}\hat{i}\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

para $\theta = \pi/4$, sabemos que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sustituyendo en los campos E y B

$$E = 2Ae^{ikz\cos\frac{\pi}{4}}\cos\left(kx\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2Ae^{ikz/\sqrt{2}}\cos\left(kx/\sqrt{2}\right)$$

$$B = 2A\left[zi\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\left(kx\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - x\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(kx\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]e^{ikz\cos\pi/4}$$

$$B = 2A\left[\frac{i\hat{k}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(kx/\sqrt{2}\right) - \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\cos\left(kx/\sqrt{2}\right)\right]e^{ikz/\sqrt{2}}$$

y un vector de Poynting promediado en el tiempo que es uniforme en todo el espacio

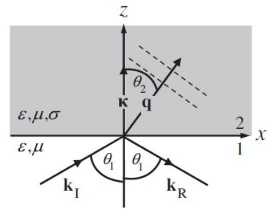
$$\begin{aligned}
\langle S\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re(E\times B) \\
\langle S(\pi/2)\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mu_0}Re\begin{vmatrix} 0 & 2A\cancel{e^{ikz/\sqrt{2}}}\cos\left(kx/\sqrt{2}\right) & 0 \\ -\frac{2A}{\sqrt{2}}\cos\left(kx/\sqrt{2}\right) & 0 & \cancel{\frac{2Ai}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(kx/\sqrt{2}\right)e^{ikz/\sqrt{2}}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{2A^2}{\sqrt{2}\mu_0}\cos^2\left(\frac{kx}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

7. Ondas en materia simple

17.1 4) Demuestre que la velocidad promediada en el tiempo a la cual la potencia fluye a través de un área de superficie de unidad de un conductor óhmico es exactamente igual a la velocidad en tiempo de calentamiento de Joule (área de superficie perunit) en la mayor parte del conductor.
Solución

$$\begin{aligned}
S &= E^*\times H \\
&= \frac{1}{2}[E^*(0)\times H(0)] \\
&= \frac{1}{2}\left[E^*(0)\times\frac{\sigma\delta}{1-i}(\hat{z}\times E(0))\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma\delta}{1-i}\hat{z}|E(0)|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma\delta(1+i)}{(1-i)(1+i)}\hat{z}|E(0)|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}RE\left[\frac{\sigma\delta(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]\hat{z}|E(0)|^2 \\
\text{Tomando la parte real} \quad &= \frac{1}{4}\sigma\delta|E(0)|^2\hat{z}
\end{aligned}$$

17.15 Considere la posibilidad de refracción de onda plana de un medio no conductor (ϵ, μ) a un medio conductor (ϵ, μ, σ). La pérdida óhmica requiere que el vector de onda k_2 sea complejo. La siguiente figura muestra una geometría de efracción propuesta donde $k_2 = q + i\kappa$.



1) Explica por qué los puntos en la dirección $+z$ y por qué el ángulo de incidencia todavía es igual al ángulo de reflexión. Derive la generalización de la ley de Snell para este problema.
2) Use la relación de dispersión en el conductor para demostrar que $\theta_2 \leq \theta_1$
3) Derive una ecuación cuadrática para la variable κ^2. Si $\delta(\omega)$ es la profundidad de la piel, encuentre $\wedge(\omega)$ tal que
$$\kappa = \delta(\omega)^{-1} exp\left(-\frac{1}{2} \wedge (\omega)\right)$$
4) Muestre que $\theta_2 1 para un buen conductor, independientemente del ángu \ll l$ para un buen conductor, independientemente para el angulo de incidencia. Descuidar el desplazamiento de Corriente para la propagación de ondas dentro de un buen conductor.

Solución

1) sabemos que una onda plana es de la forma e^{ikz} con $k > 0$, la fase de la onda incidente, ondas reflejadas y transmitidas, deben coincidir en $z = 0$
the Specular reflection and snell law $\omega_I = \omega_R = \omega_T$, $k_I \cdot r|_{z=0} = k_R \cdot r|_{z=0} = k_T \cdot r|_{z=0}$
$$k_{Ix} = k_{Rx} = Re\{k_{2x}\}$$
donde $k_I = k_R = k_1 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ y también tenemos la generalización de la ley de Snell
$$q \operatorname{sen}\theta_2 = k_1 \operatorname{sen}\theta_1 \tag{75}$$
2) La relación de dispersión para un conductor es $\hat{k} \cdot \hat{k} = \mu\omega\hat{\epsilon}$, la relación entre la parte real e imaginaria esta dada por
$$q^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 = k_1^2 \qquad\qquad 2kq\cos\theta_2 = \mu\sigma\omega$$
si $q > k_1$ de la ecuación 75 tenemos $\theta_2 \leq \theta_1$

3)
$$q \operatorname{sen}\theta_2 - k_1 \operatorname{sen}\theta_1 = 0$$
$$\begin{aligned} q \operatorname{sen}\theta_2 - k_1 \operatorname{sen}\theta_1 &= \sqrt{k_1^2 + \kappa^2} \operatorname{sen}\theta_2 - k_1 \operatorname{sen}\theta_1 \\ &= k_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_2 + \kappa^2 \operatorname{sen}^2\theta_2 - k_1^2 \operatorname{sen}\theta_1^2 \end{aligned}$$

17.16 Considere una onda plana TE (s-polarizada) que incide en un ángulo θ_1 en un buen conductor con profundidad de piel $\delta(\omega)$ a partir de un dieléctrico transparente con un índice de refracción n_1. Ambos materiales son no magnéticos. Demuestre que la fase de la onda reflejada con respecto a la onda incidente es aproximadamente
$$\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{c} n_1 \delta(\omega)\cos\theta_1\right)$$

solución:
el coeficiente de reflexión es

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2} = \frac{\frac{\mu_2 c}{n_2}\cos\theta_1 - \frac{\mu_1 c}{n_1}\cos\theta_2}{\frac{\mu_2 c}{n_2}\cos\theta_1 + \frac{\mu_1 c}{n_1}\cos\theta_2}$$

sabemos $\mu_1 = \mu_2$

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{\frac{\cos\theta_1}{n_2} - \frac{\cos\theta_2}{n_1}}{\frac{\cos\theta_1}{n_2} + \frac{\cos\theta_2}{n_1}} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

Podemos hacer $\cos\theta_2 = 1$ y $n_2 = n_2 + in_2$

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2 - in_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2 + in_2} = \frac{n_1^2\cos^2\theta_1 - |n_2|^2 - 2in_1n_2''\cos\theta_1}{n_1^2\cos^2\theta_1 + |n_2|^2 + 2in_2n_1n_2\cos\theta_1}$$

para un buen conductor $|n_2|^2 >> n_1\cos\theta_1^2$ donde $n_2 \approx (1+i)\frac{c}{\omega\delta(\omega)} = (1+i)n_2$ en este caso $n_2 >> 1$

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1^2\cos^2\theta_1 - |n_2|^2 - 2in_1n_2''\cos\theta_1}{n_1^2\cos^2\theta_1 + |n_2|^2 + 2in_2n_1n_2\cos\theta_1}$$

$$E_R = -E_I\left(\frac{n_2 + in_1\cos\theta_1}{n_2 - n_1\cos\theta_1}\right)$$

el cambio de fase es

$$\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{c}n_1\delta(\omega)\cos\theta_1\right)$$

8. Ondas en dispersión de Materia

18.1 **Solución:**

(a)

$$x(t) = x_0\delta(t)$$

encontrando la susceptibilidad

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{i\omega t}$$

$$\hat{x}(\omega) = x_0\int_{-\infty}^{\infty} dt\delta(t)e^{i\omega t} = x_0\int_{-\infty}^{\infty} dt\delta(t-t_0)e^{i\omega t} = x_0e^{i\omega t}$$

con $t = 0$ tenemos $\hat{x}(\omega) = x_0$

(b) $x(t) = x_0\theta(t)$

$$\hat{x}(\omega) = x_0\int_{-\infty}^{\infty} dt\theta(t)e^{i\omega t} =$$

Utilizando la definición

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{-ikt}}{k+it}$$

$$\hat{x}(\omega) = \frac{ix_0}{2í}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{-ikt}}{k+it}\int_{-\infty}^{\infty} dte^{i\omega t}$$

sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dte^{i\omega t} = 2\pi\delta(\omega - k)$$

$$\hat{x}(\omega) = \frac{ix_0}{2í}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k+it} 2\pi\delta(\omega - k)$$

y también $\delta(\omega - k) = \delta(k - \omega)$

$$\hat{x}(\omega) = ix_0 \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\delta(\omega-k)}{k+it} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{ix_0}{\omega+it}\frac{\omega-it}{\omega-it} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[ix_0\left(\frac{\omega}{\omega^2+t^2} - i\frac{t}{\omega^2+t^2}\right)\right]$$

$$\hat{x}(\omega) = i\frac{x_0}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

(c) $x(t) = x_0 e^{-t/\tau}$

$$\hat{x}(\omega) = x_0\int_{-\infty}^{\infty} dt\theta(t)e^{-t/\tau}e^{i\omega t}$$

Utilizando la definición

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{-ikt}}{k+it}$$

$$\hat{x}(\omega) = x_0\left(\frac{i}{2\pi}\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{k+it}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega+i/\tau-k)}$$

$$\hat{x}(\omega) = x_0\left(\frac{i}{2\pi}\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{k+it}[2\pi\delta(\omega+i/\tau-k)]$$

pero $\delta(\omega + i/\tau - k) = \delta(k - (\underbrace{\omega + i/\tau}_{\gamma}))$

$$\hat{x}(\omega) = ix_0\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{k+it}\delta(k-\gamma) = ix_0\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\gamma+it}\right] = \frac{ix_0}{\omega+i/\tau}$$

$$\hat{x}(\omega) = \frac{ix_0}{1/\tau - i\omega}$$

18.4 Muestre que la propagación de la onda plana no se produce en todas las frecuencias en un medio donde la densidad de corriente j es proporcional al potencial del vector: $\mu_0 j = -k_0^2 A$

Solución

De la ecuación de onda y del potencial de Lorenz gauge

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 j = -k_0^2 A$$

sabemos que la representación para una onda plana es

$$A(r,t) = A_0 e^{i(k\cdot r - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}A_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)} = -k_0^2 A$$

$$k^2 A_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)} - \frac{\omega^2}{c^2}A_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)} = -k_0^2 A_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)}$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -k_0^2$$

18.5 Sea $\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2$ la función dieléctrica de un plasma donde ω_p es el plasmafrecuencia. En un entorno de laboratorio o astrofísico típico, cualquier intento de crear una caída de voltaje $V(t) = V\cos\omega t$ a través del plasma genera una región de vacío (llamada "sheath") a cada lado del volumen de plasma como se indica en el boceto tridimensional abajo.

Solución

18.6 Derive la ecuación de onda inhomogénea satisfecha por el eléctrico campo $E(r,t)$ en un sistema donde Ï $\rho(r,t) = 0$ pero $j(r,t) \neq 0$. Demuestre que esta ecuación tiene una solución plana $E = E_0 exp[i(k \cdot r - \omega t)]$ para un sistema de electrones que no interactúan (densidad numérica n) que responden a un campo eléctrico E de acuerdo con la ley de Newton. Mostrar la relación de dispersión $\omega(k)$ explícitamente.
Solución

$$
\begin{aligned}
\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\nabla \times (\nabla \times E) & \\
\nabla \underbrace{(\nabla \cdot E)}_{=0} - \nabla^2 E &= -\frac{\partial \nabla \times B}{\partial t} \\
-\nabla^2 E &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) \\
\nabla^2 E &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} j + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\
\nabla^2 E - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} j
\end{aligned}
$$

La densidad de corriente está relacionada con los portadores de cargas por :

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \, \mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

Donde:

- $n_i \, n_i$ es la concentración del portador i.
- $q_i \, q_i$ es la carga eléctrica del portador i.
- $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$ es la velocidad media del portador i en el volumen.

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 E - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \mu_0 n q v \\
&= \mu_0 n q \frac{F}{m} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{nq^2}{m} E \\
\text{sabemos que } \omega_p^2 = nq^2/m\epsilon & \\
&= \mu_0 \frac{nq^2}{m} E \\
&= \frac{\omega_p^2}{c^2} E
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la onda plana

$$\frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega}{c^2} - k^2$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

18.7 Sea $\hat{\epsilon}(\omega)/\epsilon = 1 - \omega_p/\omega$ la función dieléctrica de la mitad del espacio $z > 0$. La mitad del espacio $z < 0$ es vacío. Considere soluciones de la ecuación de onda apropiada dentro y fuera del medio conductor que se localizan cerca de la superficie libre $z = 0$:

$$E(x,z) = [E_x^{in/out}(x,z)\hat{x} + E_z^{in/out}(x,z)\hat{z}] exp(\kappa_{in/out}|z|)$$

(a) Relaciona κ con $q_\parallel$ en cada medio.

(b) Use $\nabla \cdot D = 0$ y las condiciones correspondientes para que E deduzca eso

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon} = -\frac{\kappa_{in}}{\kappa_{out}} < 0$$

(c) Derive la relación de dispersión

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\hat{\epsilon}(\omega)/\epsilon_0}{1+\hat{\epsilon}(\omega)/\epsilon_0}$$

Solución

(a) la ecuación de onda es

$$\nabla^2 E + \mu_0 \omega \hat{\epsilon}(\omega) E = 0$$

para $z < 0$ no cambia, pero para $z > 0$ la permitividad es ϵ_0

$$\kappa_{in}^2 = q - \mu_0 \omega \hat{\epsilon} \qquad z < 0$$

$$\kappa_{out}^2 = q - \frac{\omega^2}{c^2} \qquad z < 0$$

(b) Las funciones dieléctricas no dependen de la posición. esto es $\nabla D = 0$ por lo que

$$\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

el campo eléctrico dentro se puede escribir como

$$iqE_{x,in} - \kappa_{in} E_{z,in} = 0$$

y fuera es

$$iqE_{x,out} + \kappa_{out} E_{z,out} = 0$$

de la condición $z = 0$ para $\nabla D = 0$ tenemos

$$\epsilon_0 E_{z,out} = \hat{\epsilon}(\omega) E_{z,in}$$

se observa que $E_{x,in} = E_{x,out}$ entonces

$$iqE_{x,out} = \kappa_{in} E_{z,in} \qquad iqE_{x,out} + \kappa_{out} E_{z,out} = 0$$

de aquí

$$\kappa_{in} E_{z,in} + \kappa_{out} E_{z,out} = 0 \qquad \frac{E_{z,out}}{E_{z,in}} = -\frac{\kappa_{in}}{\kappa_{out}}$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \frac{E_{z,out}}{E_{z,in}} = -\epsilon_0 \frac{\kappa_{in}}{\kappa_{out}}$$

(c)

$$\frac{\kappa_{in}^2}{\kappa_{out}^2} = \frac{q - \mu_0 \omega \hat{\epsilon}}{q - \omega^2/c^2}$$

$$-\frac{\hat{\epsilon}^2}{\epsilon_0^2} = \frac{q - \mu_0 \omega \hat{\epsilon}}{q - \omega^2/c^2}$$

$$\hat{\epsilon}^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \hat{\epsilon}^2 q = q\epsilon_0^2 - \mu_0 \omega \hat{\epsilon} \epsilon_0^2$$

$$\hat{\epsilon}^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \omega \hat{\epsilon} \epsilon_0^2 = q\epsilon_0^2 + \hat{\epsilon}^2 q$$

$$q = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\hat{\epsilon}^2 + \mu_0 \omega \hat{\epsilon} \epsilon_0^2}{\epsilon_0^2 + \hat{\epsilon}^2}$$

18.8 **Solución**

(a) El promedio de la densidad está dado por el producto $e\sigma n e^{i\omega t}$ y $\sigma v e^{-i\omega t}$ y se calcula como

$$\langle j\rangle = -\frac{1}{2}Re(e\delta n\delta\hat{v})$$

(b) de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot j = 0$$

es proporcional a $\delta n\delta v$

$$i\omega\delta n + \nabla(\bar{n}\delta v) = 0 \Rightarrow \delta n \approx -\frac{i}{\omega}\nabla\cdot(\bar{n}\delta v)$$

el problema nos indica $\delta v = -\dfrac{\sigma}{e\bar{n}}\delta E$ sustituyendo en el promedio de j

$$\langle j\rangle = -\frac{1}{2\bar{n}e\omega}Re[i\sigma^*\delta E^*\nabla\cdot(\sigma\delta E)] = \frac{1}{2\bar{n}\omega}Im[\sigma^*\delta E^*\nabla\cdot(\sigma\delta E)]$$

rescribiendo

$$\langle j\rangle = -\frac{1}{2\bar{n}e\omega}\left[\frac{\sigma^*\delta E^*\nabla\cdot(\sigma\delta E) - \sigma\delta E\nabla\cdot(\sigma^*\delta E^*)}{2i}\right]$$

$$\langle j\rangle = -\frac{i|\sigma|^2}{4\bar{n}e\omega}\left[\nabla\times(\delta E\times\delta E^*) + (\sigma E\cdot\nabla)\sigma E^* - (\sigma E^*\cdot\nabla)\sigma E\right.$$

vemos que el primer termino tiene la forma de $\nabla\times M$ así

$$M = -\frac{i|\sigma|^2}{4\bar{n}e\omega}(\delta E\times\delta E^*)$$

sustituyendo $\sigma^2 = \dfrac{\bar{n}^2e^4}{m^2\omega^2}$

$$M = -\frac{i\bar{n}e^3}{4m^2\omega^3}(\delta E\times\delta E^*)$$

ahora $\hat{n} = \dfrac{m\epsilon_0\omega_p^2}{e^2}$

$$M = -\frac{ie\epsilon_0\omega_p^2}{4m\omega^3}(\delta E\times\delta E^*)$$

(c) para una polarización lineal $M = 0$, por que δE es lineal, para una polarización circular la onda se propaga a lo largo del eje z $\delta E = A(\hat{x}\pm i\hat{y})$ por lo tanto

$$\delta E\times\delta E^* = \delta E = A(\hat{x}\pm i\hat{y})\times\delta E = A(\hat{x}\mp i\hat{y}) = \mp 2iA\hat{z}$$

sustituyendo

$$M = -\frac{ie\epsilon_0\omega_p^2}{4m\omega^3}(\delta E\times\delta E^*) = -\frac{ie\epsilon_0\omega_p^2}{4m\omega^3}(\mp 2iA\hat{z}) = \pm\frac{e\epsilon_0\omega_p^2}{2m\omega^3}A^2$$

18.10 (a) Considere un medio compuesto por N osciladores de Lorentz unidimensionales sin amortiguar por unidad de volumen. Mostrar por cálculo explícito que el promedio de tiempo de

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\epsilon'(\omega)][E(t)]$$

es igual al promedio de tiempo de la suma de las densidades de energía eléctrica, cinética y potencial del medio.

(b) Considere un medio drude con momento de relajación τ. Mostrar por cálculo explícito que el promedio de tiempo de

$$Q(t) = \omega\epsilon''(\omega)|E(t)|^2$$

es igual al promedio de tiempo de la velocidad a la que los campos trabajan en los cargos en una unidad de volumen del medio.

solución:
La densidad de energía es

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon_0|E|^2 + N\left[\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$$

donde x es

$$x = -\frac{q}{m(\omega_0^2-\omega^2)}Ee^{-i\omega t}$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qi\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}Ee^{i\omega t}$$

sustituyendo en u_{EM}

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon_0|E|^2 + N\left[\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{qi\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}Ee^{i\omega t}\right)^2\right]$$

el promedio temporal de la densidad energía es

$$\langle u_{EM}\rangle = \frac{1}{4}|E_0|^2\left[\epsilon_0 + \frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} + \frac{Nq^2}{m}\frac{2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\right]$$

$$\langle u_{EM}\rangle = \frac{1}{4}|E_0|^2\left[\epsilon(\hat{\omega}) + \frac{Nq^2}{m}\frac{2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\right]$$

escribiendo de otra manera

$$\langle u_{EM}\rangle = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\omega}|[\omega\epsilon(\omega)]E_0|^2$$

(b) La función dieléctrica es

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 + \frac{i}{\omega}\left(\frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}\right)$$

El tiempo promedio de la densidad de energía es

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{1}{2}re[j(\omega)+E^*(\omega)]\\ &= \frac{1}{2}Re(\sigma)|E_0|^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}\right)|E_0|^2\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\epsilon''(\omega) = Im\left\{\frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}\right\} = Im\left\{\frac{i}{\omega}\frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}\left(\frac{1+i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\right)\right\} = Im\left\{\frac{i}{\omega}\frac{\sigma_0(1+i\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}\right\} = \frac{\sigma_0}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

entonces

$$\langle Q(t)\rangle = \frac{1}{2}[\omega\epsilon''(\omega)|E|^2] = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}|E_0|^2$$

18.11 El campo eléctrico de la esfera dialectrica $\bar{E}_0 = E\hat{z}$ si $D = k\epsilon_0E$, afuera y dentro de la esfera es $\nabla\cdot E = 0$, dado la relación con el potencial $E = -\nabla\phi$ entonces $\nabla E = \nabla(\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = 0$ sabemos la solución de la ecuación de Poisson es

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}\left(A_nr^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

para afuera de la esfera para $n=1$, *nota* sabemos $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\Phi(r,\theta) = -Er\cos\theta$$

adentro de la esfera la solución es

$$\Phi_{in}(r,\theta) = Ar\cos\theta$$

y afuera

$$\Phi_{out}(r,\theta) = \frac{(A+E_0)a^3}{r^2}\cos\theta - Er\cos\theta$$

$$\frac{\partial\Phi_{out}}{\partial r}_{r=a} = k\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial r}_{r=a}$$

$$(77)$$

$$\begin{aligned}
2\frac{(A+E_0)a^3}{a^3}\cos\theta - E_0\cos\theta &= -kA\cos\theta \\
2A + E_0 &= -\kappa A \\
A(\kappa+2) &= -E_0 \\
A &= -E_0
\end{aligned}$$

$$A = -\frac{E_0}{\kappa+2}$$

18.16 Sabemos que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

si dividimos entre c en ambos lados

$$\frac{v_g}{c} = \frac{1}{c}\frac{d\omega}{dk}$$

de la expreción $\omega^2 = c^2k^2 + (Mc^2/\hbar)^2$ Factorizamos c Dividimos entre k

$$v_g\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{Mc}{\hbar k}\right)^2}}$$

De la serie de Tylor

$$v_g = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{\hbar k}\right)$$

$$v_g = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Mc^2}{\hbar ck}\right)$$

Sabemos que

$$\omega = ck$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Mc^2}{\hbar\omega}\right)^2$$

sabemos que $v = d/t$ que es igual a $t = d/v$ entonces la ultima ecuaación se puede escribir

$$t = \frac{d}{c}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Mc^2}{\hbar\omega}\right)^2\right]$$

derivando respeto de ω

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\left[\cancel{\frac{d}{c}} - \frac{1}{2}\frac{d}{c}\frac{M^2c^4}{\hbar^2\omega^2}\right] \\
&= \frac{d}{c}\frac{M^2c^4}{\hbar^2\omega^3} \\
&= \frac{M^2c^3d}{\hbar^2\omega^3} \\
\frac{\Delta t}{\Delta\omega} &= \frac{d}{\omega c}\frac{M^2c^2}{\hbar^2\omega^2} \\
\Delta t &= \frac{d}{c}\cancelto{=1}{\frac{\Delta\omega}{\omega}}\frac{M^2c^2}{\hbar^2\omega^2} \\
&= \frac{d}{c}\frac{M^2c^2}{\hbar^2\omega^2} \\
M^2c^2 &= \frac{c}{d}(\hbar^2\omega^2)\Delta t
\end{aligned}
$$

18.19 a' para un material Dieléctrico el desplazamiento es $D = \epsilon_0 E + P$ donde la polarización $P = \gamma\nabla\times E$ de la ley de maxwell

$$\nabla\times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j$$

de la relación de j y p

$$\nabla\times B = \frac{1}{c^2}\frac{E}{\partial t^{?`}} + \mu_0\gamma\nabla\times E$$

derivando con respecto de t a toda la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\nabla\times\frac{\partial E}{\partial t}$$

de la ley de Faraday $\nabla\times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ si aplicamos un rotaciónal

$$\nabla\times\nabla\times E = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times B$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$-\nabla\times\nabla\times E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\nabla\times\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot D &= \epsilon_0\nabla\cdot E + \cancel{\nabla\cdot\gamma\nabla\times E} \\
&= \epsilon_0\nabla\cdot E \\
&= 0
\end{aligned}
$$

identidad vectorial $\nabla\times\nabla\times E = \nabla(\nabla\cdot E) - \nabla^2 E$

$$-[\nabla(\cancelto{=0}{\nabla\cdot E}) - \nabla^2 E] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\nabla\times\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\nabla\times\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

b' para una onda plana $E = E_0 e^{i(kr-\omega t)}$

$$\nabla^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\nabla\times\frac{\partial^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\partial^2 t}$$

$$-k^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)} = \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)}\right) - i\omega^2\gamma\mu_0 k\times E_0$$

multiplicando por c^2 eliminando $e^{i(kr-\omega t)}$

$$k^2c^2E_0 = \omega^2 E_0 + i\frac{\omega^2\gamma}{\epsilon_0}k \times E_0$$

escribiendo a $E_0 = ax + by$

9. Retardación y Radiación

20.1 Un golpe de luz asociado con una tormenta eléctrica se parece mucho a una antena de banda ancha. Explicar por qué los datos de los sensores de campo magnético y eléctricos que se transportan en el avión, volando inmediatamente arriba (en la zona cercana a) de tales tormentas, revelan flujos de Poynting en la dirección $\hat{\rho}$ (con respecto a la dirección $\hat{z}$ del golpe de iluminación vertical) que aumentan casi con la frecuencia Entre $100Hz$ y $10kHz$. Consejo: las nubes bajas se elevan a unos $50,000$ pies sobre el nivel del mar.
Solución

La banda de frecuencia tiene longitudes de onda $\lambda = 10^5$ y 10^7 metros. Un rayo se eleva a unos 10^4 metros. Lo consideráramos al rayo como un dipolo oscilando orientado verticalmente. el campo eléctrico está aproximadamente

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p(t)}{z^3}\hat{z}$$

donde z se mide desde la posición del dipolo. El campo cercano magnético proviene de la corriente de desplazamiento en el lado derecho de

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

calculando la integral de linea de B dado un contorno circular de radio r respecto al eje z

$$\int_C Bds = 2\pi rB$$

$$\begin{aligned}
2\pi rB &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}\int_0^A da \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_0 e^{i(kz-\omega t)}}{\partial t}\pi r^2 \\
&= -i\frac{\omega}{c^2}E_0 e^{i(kz-\omega t)\pi r^2} \\
&= -i\frac{\omega}{c^2}E_z\pi r^2
\end{aligned}$$

sustituyendo E_z

$$B = -i\frac{\omega r p(t)}{4\pi\epsilon_0 c^2 z^3}\hat{\phi}$$

sabemos que el vector de Poything es $S = \epsilon_0 E \times B$, aumentara y sera radial

20.3 la función de Green para una onda es

$$[\nabla^2 + k]G(l, l') = -\delta(l, l')$$

cuando $l' = 0$

$$G(l, \phi) = G(l)$$

sustituyendo

$$\nabla^2 G(l) + k^2 G(l) = -\frac{\delta(l)}{2\pi}$$

integrando

$$\int_v dv\nabla^2 G(l) + \int k^2 G(l) = -\underbrace{\int\frac{\delta(l)}{2\pi}}_{=1}$$

$$\begin{aligned}
\int_v dv\nabla^2 G(l) &= \int_s ds\nabla G(l) \\
&= \oint\frac{\partial}{\partial l}G(l)l \\
&= 2\pi l G|_{l=\epsilon}
\end{aligned}$$

Si $l = 0$ tenemos la función de Hankel $H_0^{(1)}(kl)$
esta función para comportamientos pequeños

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} H_0^{(1)}(x) &= \lim_{x\to 0}[J_0(x) + iY_=(x)] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2i}{\pi}\log\frac{x}{2}\right] \\
&= \frac{2i}{\pi} \\
&= log\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

sustituyendo en la función de green

$$\begin{aligned}
2\pi l G|_{l=\epsilon} &= 2\pi\epsilon\frac{d}{dl}\left(\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kl)\right) \\
+ &= 2\pi\epsilon\left(\frac{i}{4}\frac{2i}{\pi}\frac{1}{t}\right) \\
&= i^2 = -1
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 G_0(l) + kG(l) = -\frac{\delta(l)}{2\pi l}$$

$$\nabla^2\left(\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kl)\right) + k^2\left(\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kl)\right) = \frac{\delta(l)}{2\pi l}$$

$$\frac{ik\pi\epsilon}{4}H_0^{(i)}(k\epsilon) = -\frac{k\epsilon^2}{2}\log k\epsilon$$

20.4 La función de Green $G(x, y, z, t > 0) = \delta(t - r/c)/4\pi r$ es una solución de ecuación de onda no homogénea en tres dimensiones espaciales con el término fuente ?$\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$.

(a) Muestra que

$$G_2(x, y, z, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G(x, y, z, t)$$

es solución de la ecuación de onda homogénea, en dos dimensiones con una fuente $-\delta(x)\delta(y)\delta(t)$

(b) Evalué la integral del inciso (a) para encontrar $G_2(\rho, t)$ explicablemente donde $\rho = x^2 + y^2$

Solución:

(a) sabemos que la ecuación de onda tiene la forma

$$\left(\nabla - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = f$$

tambien sabemos que tiene que tener la forma

$$\mathscr{L}G = \delta(x)$$

pasando el termino de z al lado derecho de la ecuación y$\psi \to G(x, y, z, t)$ e integrando respecto a z

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\int G(x, y, z, t)dz &= -\int \delta(x)\delta(y)\cancel{\delta(z)}\delta(z)^{=1} - \int\frac{\partial^2}{\partial z^2}G(x, y, z, t)dz \\
&= \cancel{\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty}} - \delta(x)\delta(y)\delta(t) \\
&= -\delta(x)\delta(y)\delta(t)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]G(x, y, t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(t)$$

(b) si $G(r,r)$ es una función de z, y usando la propiedad de la función δ

$$\int_a^b g(x)\delta[f(dx)]dx = \sum_{k=0} \frac{g(x_k)}{|f'(x_k)|}$$

donde $f(x_k) = 0$ en $a < x_k < b$

entonces

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz G(x,y,z,t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{z^2+\rho^2}}{c}\right)}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2}\Theta(t-\rho/c)\frac{c}{z}_{z=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} \\ &= \frac{c\Theta(t-\rho/c)}{2\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} \end{aligned}$$

20.5 a)

b) de la función delta, podemos escribir el campo magnético como

$$\begin{aligned} B(r,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \nabla\times\left[\frac{\delta(t-t_0+|r_0-r|/c)}{|r_0-r|}\right] j_\perp(r,t) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{\delta(t-t_0+|r_0-r|/c)}{|r_0-r|}\right] \nabla\times j_\perp(r,t) \end{aligned}$$

el termino $j_\perp(r,t)/|r_0-r|$ tiende a cero en el infinito péro $\nabla\times = \cancel{\nabla\times j_\parallel} + \nabla\times j_\perp = \nabla\times j_\perp$

$$B(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t-t_0+|r_0-r|/c)\frac{\nabla\times j_\perp(r,t)}{|r_0-r|}$$

c) de la ecuación de Ampere

$$\nabla\times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

esto se puede integrar como

$$E(r,t) = E(r,t_0) + c^2\int_{t_0}^{t}(\nabla\times B(r) - \mu_0 j(r))$$

20.6 Un gas de electrones clásico con densidad numérica n_0 exhibe una distribución de velocidad de Maxwell a temperatura T. En presencia de un campo magnético uniforme B_0, el gas emite radiación a una longitud de onda que es mucho más grande que la separación media entre los electrones. Encuentra la potencia radiada por unidad de volumen.

Solución La potencia emitida por un electrón por un campo magnético es $P = e^2 v_\perp^2 B_0^2/6\pi\epsilon_0 m^2 c^4$ donde $v_\perp$ es la componente perpendicular de la velocidad del electrón, de la distribución de Maxwell podemos sumar las potencias de cada electrón

$$n(v) = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_BT}$$

usando coordenadas cilíndricas de la forma $(v_\perp, \phi, v_\parallel)$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dV} &= n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\frac{e^2B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2c^2}\int_0^{2\pi} d\phi\int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^{\infty} dv_\perp e^{-mv^2/2k_BT} \\ &= n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\frac{e^2B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2c^2}(2\pi)\left(\sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}\right)\left(\frac{2k_B^2T^2}{m^2}\right) \\ &= \frac{n_0 e^2 B_0^2 k_B T}{3\pi\epsilon_0 m^3 c^4} \end{aligned}$$

20.7 Los campos magnéticos y eléctricos de un punto del dipolo eléctrico son.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{r} \times \left(\frac{1}{r^2}\frac{dP}{dt} + \frac{1}{cr}\frac{d^2P}{dt}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot p) - p}{r^3} + \frac{1}{cr^2}\left(3\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\frac{dp}{dt}\right) - \frac{dp}{dr}\right) + \frac{1}{c^2r}\left(\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\frac{d^2p}{dr^2}\right) - \frac{d^2p}{dt^2}\right)\right]$$

$$\frac{dU}{dt} = \int dA\cdot S = \frac{1}{\mu_0}R^2\int d\theta d\phi \operatorname{sen}\theta (E\times B)\cdot\hat{r}|_{r=R}$$

esto es conveniente para escribir

$$3\hat{r}(\hat{r}\cdot p) - p = 3\hat{r}\times(r\times p) \qquad \hat{r}\left(\hat{r}\times\frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d^2p}{dt^2} = \hat{r}\times\left(r\times\frac{d^2p}{dt^2}\right)$$

nombremos $\ddot{p} = \dfrac{d^2p}{dt^2}$ y $\dot{p} = \dfrac{dp}{dt}$ y usemos la regla BAC-CAB para escribir

$$\begin{aligned}(\hat{r}\times\dot{p})\times[3\hat{r}(\hat{r}\cdot p) - p] &= (\hat{r}\times\dot{p})\times[3\hat{r}\times(\hat{r}\times p) + 2p]\\ &= 3(\hat{r}\times\dot{p})\cdot(\hat{r}\times p)\hat{r} + 2\dot{p}(p\cdot\hat{r}) - 2(\dot{p}\cdot p)\hat{r}\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}(\hat{r}\times\dot{p})\times[\hat{r}(\hat{r}\cdot\ddot{p}) - \ddot{p}] &= (r\times\dot{p})\times[\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{p})]\\ &= (\hat{r}\times\dot{p})\cdot(\hat{r}\times\ddot{p})\cdot\hat{r}\end{aligned}$$

Cuatro de los términos que aparecen en el vector de Poynting tienen la forma de 78. Los dos términos restantes tienen la forma de 78. Por lo tanto, con $\hat{p}\times\hat{r} = \operatorname{sen}\theta$ y $\hat{p}\cdot\hat{r} = \cos\theta$

$$\begin{aligned}dU &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi}2\pi\int_0^\pi\left[\frac{p\dot{p}}{R^3} + \frac{\dot{p}^2}{cR^2} + \frac{\dot{p}\ddot{p}}{c^2R} + \frac{p\ddot{p}}{cR^2} + \frac{\dot{p}\ddot{p}}{c^2R} + \frac{\ddot{p}^2}{c^2R}\right]\operatorname{sen}^3\theta d\theta\\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2R^3} + \frac{p\dot{p}}{cR^2} + \frac{\dot{p}^2}{c^2R}\right) + \frac{\ddot{p}^2}{c^3}\right]\end{aligned}$$

20.9 El texto muestra que el campo eléctrico de un punto dipolo eléctrico en el origen con el momento $p(t) = p(t)\hat{z}$ produce un campo eléctrico (alejado de la fuente) en coordenadas cilíndricas de la forma

$$E(\rho,z,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\hat{z} - \frac{1}{\rho}\frac{dR}{dz}\hat{\rho}\right]$$

donde

$$R(\rho,z,t) = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{p(t-r/c)}{r}\right]$$

La familia de curvas $R(\rho,z) = cte = R_0$ Puede interpretarse como líneas de campo eléctrico.

(a) Muestre que los puntos (ρ,z) del campo eléctrico nulo (cero) donde las líneas de campo se separan y se separan de la fuente en el momento t satisfacen

$$z = 0 \qquad \frac{R_0}{\rho} = 0$$

(b) Suponga que $p(t) = p_0\cos\omega t$ y muestre que solo esas líneas de campo con $|R_0| < 2\omega p_0/c\sqrt{3}$ puede desprenderse de la fuente. Compruebe que las soluciones de punto de desprendimiento corresponden a $\rho > 0$.

Solución:

(a) Las líneas del campo eléctrico se desplazan en los puntos donde $E = 0$ y dos campos eléctricos se cruzan. Las condiciones necesarias son.

$$\frac{dR}{dz} = 0 \qquad \frac{dR}{d\rho} = 0$$

Hagamos $z = 0$

$$R(\rho, t) = \frac{p(t-\rho/c)}{\rho} + \frac{\dot{p}(t-\rho/c)}{c}$$

Si hacemos $dR/d\rho = 0$ tenemos

$$\frac{dR}{d\rho} = -\frac{cR}{c\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\dot{p}(t-\rho/c)}{c^2}$$
$$\frac{R}{\rho} - \frac{\ddot{p}(t-\rho/c)}{c^2} = 0$$

(b) con $p(t) = p_0 \cos\omega t$ las expresiones para $R(\rho, z)$ y $dR/d\rho$ son

$$R = \frac{p_0\cos(\omega t - \rho\omega/c)}{\rho} - \frac{p_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \rho\omega/c)}{c}$$

sustituyendo R y obteniendo la segunda derivada respecto de ρ

$$\left(\frac{p_0\cos(\omega t - \rho\omega/c)}{\rho} - \frac{p_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \rho\omega/c)}{c}\right)\frac{1}{\rho} - \frac{p_0\omega^2}{c^2}$$

deben resolverse simultáneamente para el radio desconocido ρ. Eliminando los sinusoides da.

$$(\bar{R}^2 - 1)\rho^{-4} - \bar{R}^2\rho^{-2} + R^2 = 0$$

en términos de longitud $\bar{R} = Rc/p_0\omega$ y $\bar{\rho} = \omega c/\rho$ es una ecuación cuadrática de la variable ρ^{-2}, obtenemos soluciones reales si el discriminante no es negativo $R^4 - 4R^2(R^2-1) \leq 0$

$$|R| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{p_0\omega}{c}$$

Cuando esto es verdad, una de las dos raíces

$$\rho^{-2} = \frac{1}{1/R^2 - 1}\frac{-1 \pm \sqrt{4/R^2 - 3}}{2}$$

siempre es positiva

20.11

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left[\frac{I_S(t-r/c)}{r} - \frac{I_S(t-d/c-(r-d\cos\theta)/c)}{r}\right]\hat{\theta} \\
&+ \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}(\theta-\pi)}{1-\cos(\theta-\pi)}\left[\frac{I_S(t-d/c-(r-d\cos\theta)/c)}{r} - \frac{I_S(t-d/c-(r-d\cos\theta)/c-d[1-\cos(\theta-\pi)]}{r}\right. \\
&+ \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}(\theta-\pi)}{1-\cos(\theta-\pi)}\left[\frac{I_S(t-r/c)}{r} - \frac{I_S(t-r/c-d[1-\cos(\theta-\pi)]/c)}{r}\right] \\
&- \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left[\frac{I_S(t-d/c-[r-d\cos(\theta-\pi)]/c)}{r} - \frac{I_S(t-d/c-[r-d\cos(\theta-\pi)]/c-d(1-\cos\theta)/}{r}\right.
\end{aligned}$$

sabemos que $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\mu_0 c}{4\pi}\left\{\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left[I_s\left(t-\frac{r}{c}\right) - I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1+\cos\theta)}{c}\right)\right]\right. \\
&- \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}\left[I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1-\cos\theta)}{c}\right) - I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{2d}{c}\right)\right] \\
&+ \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left[I_s\left(t-\frac{r}{c}\right) - I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1-\cos\theta)}{c}\right)\right] \\
&- \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\left[I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1-\cos\theta)}{c}\right) - I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{2d}{c}\right)\right]\hat{\theta}
\end{aligned}$$

(79)

factorizando

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\mu_0 c \operatorname{sen}\theta}{4\pi r}\left[I_s\left(t-\frac{r}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\right. \\
&+ I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{2d}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right) \\
&- I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1-\cos\theta)}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right) \\
&+ I_s\left(t-\frac{r}{c}-\frac{d(1+\cos\theta)}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

20.13 Supongamos que $f(r)$ es una función vectorial localizada y $j(r,t) = j(r|\omega)exp(?i\omega t)$ una densidad de corriente armónica en el tiempo donde

$$i\omega\mu_0 j(r|\omega) = \nabla \times [\nabla \times f(r)] - \frac{\omega^2}{c^2} f(r)$$

Demuestre que $j(r,t)$ no irradia y encuentre el significado físico de $f(r,t)$.
Solución
Obteniendo la transformada de fourier de $j(r,t)$ y $f(r,t)$

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \hat{f}(r) e^{ik\cdot r}$$

y

$$j(r|\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \hat{j}(r|\omega) e^{ik\cdot r}$$

Sustituyendo en la ecuación dada muestra que

$$\frac{1}{i\omega}\left[ik\times(ik\times f) - \frac{\omega^2}{c^2} f\right] = j(r|\omega)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f - k(f\cdot k) = i\omega f(r|\omega)$$

tomando el producto cruz respecto a k

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) k\times f = i\omega k\times j(r|\omega) = i\omega j_\perp(r|\omega)$$

si $\omega = ck$, la componente transversal de la densidad de corriente es cero. no se produce radiación. Combinando las dos ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

para $B = e^{i(kr+\omega t)}$

$$\nabla\times E = i\omega B$$

y

$$\nabla\times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

con $E = e^{i(kr+\omega t)}$

$$\nabla\times B = \mu_0 j + \frac{\omega^2}{c^2} E$$

$$\frac{1}{i\omega}\left\{\nabla\times[\nabla\times E(r)] - \frac{\omega^2}{c^2}E(r)\right\} = \mu_0 j(r,\omega)$$

$f(r)e^{i\omega t}$ es el campo eléctrico producido por esta densidad de corriente no radiante.

10. Scattering

21.2 Sea $q = k_0 - k$ el vector de dispersión definido en el Ejemplo 1.2. Si a_B es el radio de Bohr, muestra que la sección transversal para la dispersión de la onda plana de un átomo de hidrógeno es proporcional al factor $[1 + (qa_B/2)^2]^{-4}$

Solución:

la sección transversal para la dispersión de un conjunto de electrones con densidad numérica $n(r)$ es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{en} = \frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} \times |n(q)|^2$$

donde

$$n(q) = \int d^3 r n(r) e^{-iq\cdot r}$$

La densidad del número de electrones asociada con el orbital de hidrógeno es

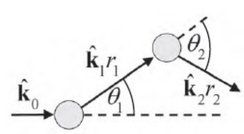
$$n(r) = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B} \right|^2 = \frac{1}{\pi a_B^3} e^{-2r/a_B}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} n(q) &= \frac{2\pi}{\pi a_B^3} \int_0^\infty dr r^2 e^{-2r/a_B} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta e^{iqr\cos\theta} \\ &= \frac{2}{a_B^3} \int_0^\infty dr r^2 e^{-2r/a_B} \frac{2 \operatorname{sen} qr}{qr} \\ &= \frac{4}{qa_B^3} Im \left\{ \int_0^\infty dr r e^{-r(2/a_B - iq)} \right\} \\ &= \frac{4}{qa_B^3} Im \left\{ \frac{1}{(2/a_B - iq)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{[1 + (qa_B/2)^2]^2} \end{aligned}$$

La sección transversal es proporcional al cuadrado absoluto de esta cantidad, que es el resultado deseado.

21.3 Una onda plana monocromática, de longitud de onda izquierda, polarizada circularmente, se dispersa en la dirección $\hat{k}_1$ desde una esfera dieléctrica uniforme con radio a y polarizabilidad α. La onda dispersada recorre una distancia $r_1 >> a$ y se dispersa desde una esfera idéntica en la dirección $\hat{k}_2$. Encuentra el campo eléctrico dos veces dispersado a una distancia $r_2 >> a$ de la segunda esfera. Exprese su respuesta utilizando vectores de polarización que son *(i)* transversales a $\hat{k}_2$ y *(ii)* paralelos y perpendiculares al plano del diagrama



Solución

Esto es dispersión elástica, por lo que $k_0 = k_1 = k_2 = k$ los tres vectores unitarios ortogonales son. $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}_0)$, $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{k}_1)$ y $(\hat{e}''_1, \hat{e}_2,'' \hat{k}_2)$ Los vectores fuera del plano satisfacen $\hat{e}_1 = \hat{e}'_1 = e''_1$ Si la onda incidente es $E_0 e^{i(k_0 \cdot r - \omega t)}$ el campo eléctrico irradiado es

$$E = \frac{k^2 \alpha E_0}{4\pi r_1} e^{i(k_0\cdot r - \omega t)} [(\hat{k}_1 \times \hat{e}_0) \times \hat{k_1}]$$

Para polarización circular izquierda, nuestra convención es $\hat{e}_0 = (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)/\sqrt{2}$ asi que

$$\frac{[\hat{k}_1 \times (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)] \times \hat{k_1}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{e}'_2 \times \hat{k}_1}{\sqrt{2}} - i\frac{\hat{e}_1 \cos\theta_1 \times \hat{k}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 \cos\theta}{\sqrt{2}}$$

y el campo eléctrico después del primer evento de dispersión es

$$E = \frac{k^2 \alpha E_0}{4\pi r_1} e^{i(k\cdot r_1 - \omega t)} \frac{\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 \cos\theta_1}{\sqrt{2}}$$

El segundo evento de dispersión es exactamente igual al primero. Por lo tanto, la iteración del cálculo anterior con una distancia r_2 y un ángulo de dispersión θ_2 da el campo eléctrico observado como

$$E = \frac{k^4 \alpha \tilde{n}^2 E_0}{16\pi^2 r_1 r_2} e^{i(k_{r1} + k r_2 - \omega t)} \frac{\hat{e}_1'' + i\hat{e}_2'' \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\sqrt{2}}$$

21.4 En uno de sus papeles dedicados al color del tragaluz, Lord Rayleigh usó el razonamiento físico y el análisis dimensional para deducir la dependencia de la longitud de onda de la intensidad de la luz dispersada por una partícula en la atmósfera. Invente el argumento de Rayleigh, comenzando con su suposición de que la relación entre la amplitud del campo dispersado y la amplitud del campo incidente podría depender de *(i)* el volumen de la partícula, *(ii)* la distancia de la partícula al punto de observación, *(iii)* la longitud de onda de la luz dispersada, y *(iv)* la velocidad de la luz.
Solución:
Vemos $A = |E_{scatt}|/|E_{inc}|$ es la relación de amplitud. La velocidad de la luz tiene dimensiones de longitud/tiempo y ninguna de las otras cantidades enumeradas tiene tiempo como dimensión para cancelarla. Por lo tanto, A no puede depender de c. De lo contrario, debemos tener $A \propto 1/r$ para que el flujo de energía sea el mismo para todos los observadores distantes. También la dispersión aumenta a medida que V aumenta. La suposición más simple es $A \propto V$. Por lo tanto, si N es un entero, la combinación

$$A \propto \frac{V}{r} \lambda^N$$

debe ser adimensional. Esto implica que $N =?2$. Por lo tanto, la intensidad dispersa

$$I = |A|^2 \propto \lambda^{-4}$$

21.6 Una onda plana monocromática, polarizada linealmente, se dispersa desde una molécula polar al ejercer un par que pone la molécula en movimiento. Trate la molécula como un dipolo eléctrico con el momento p y el momento de inercia I. Ignore los términos cuadráticos en la velocidad angular (muy lenta) de la molécula y promedie sobre todas las orientaciones de p para mostrar que la sección transversal de dispersión total es $\sigma_{scatt} = \mu_0^2 p^4 / 9\pi I^2$. Sugerencia: Un momento dipolar giratorio satisface $\dot{p} = \Omega \times p$

11. Relatividad Especial

22.2 El texto explota la homogeneidad del espacio para concluir que la transformación de Lorentz debe ser lineal. Algunos autores afirman que esta conclusión también se sigue si exigimos ese movimiento rectilíneo uniforme en K corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme en K'. Mostrar, por el contrario, Que la misma propiedad es una consecuencia de la ley de transformación no lineal.

$$x_i' = \frac{A_{ij} x_j + b_i}{c_j x_j + d} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Examine los puntos que se transforman al infinito e, utilizando esta información, invente un argumento físico que obligue a $c_j = 0$. Sugerencia: es conveniente establecer $x^4 ct$ por lo tanto $v_4 = dx_4/dt = c$ **Solución:**
tenemos $x_4 = ct$ y $v_4 = c$ en el marco de referencia s esto es $x_i = x_{i0} + v_i(t - t_0)$, entonces en el marco s' las posiciones se transforma

$$x_i' = \frac{A_{ij}[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + b_i}{c_j[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + d} \tag{80}$$

y la otra coordenada (velocidad de c)

$$ct' = \frac{A_{4j}[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + b_4}{c_j[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + d}$$

$$(c_j[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + d)ct' = A_{4j}[x_{j0} + v_j(t - t_0)] + b_4$$
$$(c_j x_{j0} ct' + v_j(t - t_0)ct' + dc_j ct' = A_{4j}x_{j0} + v_j(t - t_0)A_{4j} + b_4$$

$$v_j(t - t_0)c_j ct' - v_j(t - t_0)A_{4j} = A_{4j}x_{j0} + b_4 - c_j x_{j0} ct' - dct'$$

$$(t - t_0)[v_j c_j ct' - v_j A_{4j}] = A_{4j}x_{j0} + b_4 - c_j x_{j0} ct' - dct'$$

$$(t - t_0) = \frac{A_{4j}x_{j0} + b_4 - ct'[c_j x_{j0} + d]}{v_j c_j ct' - v_j A_{4j}}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación 80

$$x_i' = \frac{A_{ij}\left[x_{j0} + v_j\left(\frac{A_{4j}x_{j0} + b_4 - ct'[c_j x_{j0} + d]}{v_j c_j ct' - v_j A_{4j}}\right)\right] + b_i}{c_j\left[x_{j0} + v_j\left(\frac{A_{4j}x_{j0} + b_4 - ct'[c_j x_{j0} + d]}{v_j c_j ct' - v_j A_{4j}}\right)\right] + d}$$

22.3 Sea $u = dr/dt$ la velocidad de una partícula observada en un marco de inercia K. La misma cantidad observada en un marco de inercia K' que se mueve con velocidad v con respecto a K es $u' = dr'/dt'$

(a) Use las propiedades de transformación de dt, $r_\parallel$ y $r_\perp$ directamente para derivar la regla de adición de velocidad

$$u_\parallel = \frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{u_\parallel' + v}{1 + \dfrac{v \cdot u_\parallel}{c^2}} \qquad \text{y} u_\perp = \frac{dr_\perp}{dt} = \frac{u_\perp'}{\gamma(\nu)\left[1 + \dfrac{v \cdot u_\parallel}{c^2}\right]}$$

(b) Deje que v defina un eje polar con coordenadas polares $u = (u, \theta)$ y $u' = (u', \theta')$ para las velocidades de las partículas como se mide en K y K'. Escriba las leyes de transformación en la parte (a) en la forma $u = u(u', \theta')$ y$\theta = \theta(u', \theta')$

(c) Usa los resultados de (b) para mostrar que $u \to c$ cuando $v \to c$.

Solución

(a) Escribimos las transformaciones de Lorentz para el cuadri-vector (r, ict) donde $r = r_\parallel + r_\perp$ estos se aplican igualmente bien a los elementos diferenciales dt y dr. Aquí solo necesitamos

$$\begin{aligned} dr &= \gamma(dr_\parallel' + \beta ct') \\ dr_\perp &= dr_\perp' \\ cdt &= \gamma(cdt' + \beta \cdot dr_\parallel') \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{u_\parallel}{c} = \frac{1}{c}\frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{dr_\parallel' + \beta cdt'}{cdt' + \beta dr_\parallel'}$$

$$\frac{u_\perp}{c} = \frac{1}{c}\frac{dr_\perp}{dt} = \frac{dr_\perp'}{\gamma(cdt' + \beta \cdot dr_\perp')}$$

asi obtenemos

$$u_\parallel = \frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{u_\parallel' + v}{1 + \dfrac{v \cdot u_\parallel}{c^2}} \qquad \text{y} u_\perp = \frac{dr_\perp}{dt} = \frac{u_\perp'}{\gamma(\nu)\left[1 + \dfrac{v \cdot u_\parallel}{c^2}\right]}$$

(b) Si la dirección de v se define por un eje polar $u_\perp = u\cos\theta$ y $u_\perp = u \operatorname{sen}\theta$

$$u\cos\theta = \frac{u'\cos\theta' + v}{1 + \dfrac{u'v\cos\theta'}{c^2}}$$

y

$$u\operatorname{sen}\theta = \frac{u'\operatorname{sen}\theta'}{\gamma\left(1 + \dfrac{u'v\cos\theta'}{c^2}\right)}$$

usando el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ dividiendo las anteriores ecuaciones, una respecto de la otra, de la siguiente forma

$$\frac{u\operatorname{sen}\theta}{u\cos\theta} = \frac{\dfrac{u'\operatorname{sen}\theta'}{\gamma\left(1 + \dfrac{u'v\cos\theta'}{c^2}\right)}}{\dfrac{u'\cos\theta' + v}{1 + \dfrac{u'v\cos\theta'}{c^2}}}$$

$$\tan\theta = \frac{u'\operatorname{sen}\theta'}{\gamma(u'\cos\theta' + v)}$$

$$u = \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta' - \left(\dfrac{u'v\operatorname{sen}\theta'}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{u'v\cos\theta'}{c^2}}$$

22.4 Sean $a = (\bar{a}, a_4)$ y $b = (\bar{b}, b_4)$ dos cuadri-vectores. Mostrar que el producto escalar $a \cdot b = \bar{a}\cdot\bar{b} + a_4 b_4$ es un escalar invariante de Lorentz. Será conveniente escribir $a = a_\parallel + a_\perp$ y de manera similar para b.

Solución

las transformaciones son

$$\begin{aligned} A'_\perp &= A_\perp \\ A'_\parallel &= \gamma(A_\parallel + i\beta A_4) \\ A'_4 &= \gamma(A_4 - i\beta\cdot A_\parallel) \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} a'\cdot b + a'_4 b'_4 &= a'_\perp\cdot b'_\perp + a'_\parallel\cdot b'_\parallel + a'_4 b'_4 \\ &= a_\perp\cdot b_\perp + \gamma(a_\parallel + i\beta a_4)\cdot\gamma(b_{\parallel + i\beta b_4} + \gamma(a_4 - i\beta a_\parallel)\gamma(b_4 - i\beta b_\parallel) \\ &= a_\perp\cdot b_\perp + \gamma^2(a_\parallel\cdot b_\parallel - \beta^2 a_4 b_4 + i b_4 a_\parallel\cdot\beta i a_4 b_\parallel\cdot\beta) + \gamma^2(a_4 b_4 - \beta^2 a_\parallel\cdot b_\parallel - i a_4 b_\parallel\cdot\beta - i b_4 a_\parallel \\ &= a_\perp\cdot b_\perp + \gamma^2(1-\beta^2)a_4 b_4 + \gamma^2(1-\beta^2)a_\parallel\cdot b_\parallel \\ &= a\cdot b + a_4 b_4 \end{aligned}$$

22.6 Utilice las propiedades de transformación de los cuadri-vectores A y ∇ directamente para demostrar que

$$E'_\perp = \gamma[E + v\times B]$$

Solución

$$\begin{aligned} E'_\perp &= -\nabla'_\perp - \frac{\partial A'_\perp}{\partial t'} \\ &= -\nabla_\perp\gamma(\varphi - v\cdot A) - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla\right)A \\ &= \gamma\left[\left(-\nabla_\perp\varphi - \frac{\partial A_\perp}{\partial t}\right) + \nabla_\perp(v\cdot A) - (v\cdot\nabla)A_\perp\right. \\ &= \nabla[E_\perp + \nabla_\perp(v\cdot A) - (v\cdot\nabla)A_\perp] \end{aligned}$$

como v es constante

$$\nabla_\perp(v\cdot A) = \nabla_\perp(v\cdot A_\parallel) = v\times(\nabla_\perp\times A_\parallel) + \cancel{(v\cdot\nabla_\perp)A_\parallel} = v\times(\nabla_\perp\times A_\parallel)$$

ahora veamos

$$\nabla_\parallel(v\cdot A_\perp) = v\times(\nabla_\parallel\times A_\perp) + (v\cdot\nabla_\parallel)A_\perp$$

sabemos que $v\cdot A_\perp = 0$

$$v\times(\nabla_\parallel\times A_\perp) = -(v\cdot\nabla_\parallel)A_\perp$$

entonces se puede ver con lo anterior que

$$\nabla_\perp(v\cdot A) - (v\cdot A_\parallel) = v\times[\nabla_\perp\times A_\parallel + \nabla_\parallel\times A_\perp] = v\times(\nabla\times A)_\perp = v\times B_\perp = (v\times B)_\perp$$

22.10 Para algún evento, el observador A mide $E=(\alpha,0,0)$ y $B=(\alpha/c,0,2\alpha/c)$ y el observador B mide $E=(E'_x,\alpha,0)$ y $B'=(\alpha/c,B'_y,\alpha/c)$. El observador C se mueve con velocidad $v\hat{x}$ con respecto al observador B. Encuentre (a) los campos E' y B' medidos por el observador B; y (b) los campos E'' y B'' medidos por el observador C.
Solución:

(a) Para el observador A es invariante el campo electromagnético y se encuentra

$$E\cdot B = \frac{\alpha^2}{c}$$
$$E^2 - c^2B^2 = \alpha^2 - c^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2}+\frac{4\alpha^2}{c^2}\right) = -4\alpha^2$$

El observador B evalúa los mismos invariantes y encuentra

$$E'\cdot B' = \frac{E'_x\alpha^2}{c} + B'_y\alpha$$

$$E^{2\prime} - c^2B^{2\prime} = E'^2_x + \alpha^2 - c^2\left(\frac{2\alpha^2}{c^2} + B'^2_y\right) = E'^2_x - c^2B'^2_y - \alpha^2$$

Al establecer estos invariantes iguales en los dos cuadros da

$$\begin{aligned} E'_x + cB'_y &= \alpha \\ E'^2_x - c^2B'^2_y &= -3\alpha^2 \end{aligned}$$

elevando al cuadrado primera ecuación

$$\begin{aligned} E'^2_x + cB'^2_y &= \alpha^2 \\ E'^2_x - c^2B'^2_y &= -3\alpha^2 \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones

$$2E'^2_x = -2\alpha^2$$
$$E'_x = -\alpha$$

sustituyendo E_x en $E'^2_x + cB'^2_y = \alpha^2$ tenemos

$$\begin{aligned} -\alpha^2 + cB'^2_y &= \alpha^2 \\ B'^2_y &= \frac{2\alpha^2}{c} \end{aligned}$$

entonces

$$E' = (-\alpha,\alpha,0) \qquad B = (\alpha/c, 2\alpha/c, \alpha/c)$$

(b) Los campos se transforman como

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} \qquad E'_{\perp} = \gamma(E + \beta \times cB)_{\perp}$$

y

$$B_{\parallel} = B'_{\parallel} \qquad B'_{\perp} = \gamma(cB - \beta \times E)_{\perp}$$

$$\begin{aligned}
E'' &= -\alpha\hat{x} + \gamma[E'_{\perp} + v\hat{x} \times (B'_y\hat{y} + B'_z\hat{z})] \\
&= -\alpha\hat{x} + \gamma[E'_{\perp} + vB'_y\hat{z} - vB_z\hat{y}] \\
&= -\alpha\hat{x} + \gamma\left(\alpha - \frac{v\alpha}{c}\right)\hat{y} + \frac{2\gamma v\alpha}{c}\hat{z} \\
&= -\alpha\hat{x} + \gamma\alpha(1-\beta)\hat{y} + \frac{2\gamma v\alpha}{c}\hat{z}
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
B'' &= \frac{\alpha}{c}\hat{x} + \gamma\left[B'_{\perp} +' \frac{v}{c^2}\hat{x} \times (E'_y\hat{y} + E'_z\hat{z})\right] \\
&= \frac{\alpha}{c}\hat{x} + \gamma\left[B'_{\perp} + \frac{v}{c^2}E'_y\hat{z} + \frac{v}{c^2}B'_z\hat{y}\right] \\
&= \frac{\alpha}{c}\hat{x} + \frac{2\gamma\alpha}{c}\hat{y} + \gamma\left(\frac{\alpha}{c} - \frac{v\alpha}{c^2}\right)\hat{z} \\
&= \frac{\alpha}{c}\hat{x} + \frac{2\gamma\alpha}{c}\hat{y} + \gamma\alpha\frac{(1-\beta)}{c}\hat{z}
\end{aligned}$$

22.12

(a) Use las leyes de transformación para E y B para mostrar que $E \cdot B$ es un invariante de Lorentz.

(b) Encuentre la velocidad de impulso v de K a K' para que el campo sea puramente eléctrico o puramente magnético en K' Si $E \perp B$ y $E \neq cB$ en S.

(c) Los campos estáticos $E = E_0\hat{y}$ y $cB = E_0(\hat{y}\cos\theta + \hat{z}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ existen en algún marco inercial S. Encuentre el impulso velocidades de K a K' que hacen que E sea paralelo o anti-paralelo a B' en K'. Para ambos casos, encontrar La dependencia de las magnitudes de E', B', y la velocidad de impulso

solución:

(a)

$$\begin{aligned}
E' \cdot B &= E'_{\parallel} + B_{\parallel} + E'_{\perp} + B_{\perp} \\
&= \gamma(E_{\perp} + v \times B_{\perp}) \cdot \gamma\left(B_{\perp} - \frac{v \times E_{\perp}}{c^2}\right) \\
&= E_{\parallel} \cdot B_{\perp} + \gamma^2\left[E_{\perp} \cdot B_{\perp} - \frac{(v \times B_{\perp}) \cdot (v \times E_{\perp})}{c^2}\right] \\
&= E_{\parallel} \cdot B_{\perp} + \gamma^2 E_{\perp} \cdot B_{\perp}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= E_{\parallel} \cdot B_{\perp} + E_{\perp} \cdot B_{\perp} \\
&= E \cdot B
\end{aligned}$$

(b) Dado $\bar{E} = E\hat{y}$, $\bar{B} = B\hat{z}$ y $\bar{v} = v\hat{x}$

$$\bar{E}'_{\perp} = \gamma(\bar{E}_{\perp} + v \times \bar{B}_{\perp}) = \gamma(E - vB)\hat{y}$$

$$\bar{B}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{B}_{\perp} + \frac{v \times \bar{B}_{\perp}}{c}\right) = \gamma\left(B - \frac{vE}{c}\right)\hat{z}$$

Para eliminar E tenemos $v = v_E = E/B$ y para B es $v = v_B = cB/E$ cuando $E \neq cB$ uno de estos debe ser menor que c porque $v_E v_B = c^2$ y $v_E + v_B > 2c$

(c) Debemos tener $\bar{v} = v\hat{x}$ porque los componentes paralelos del campo son invariantes. Entonces

$$\bar{E}'_{\perp} = \gamma(E_0\hat{y} + v \times \bar{B}_{\perp}) =_0 \left[\left(1 - \frac{v \operatorname{sen}\theta}{c}\right)\hat{y} + \frac{v\cos\theta}{c}\hat{z}\right]$$

$$\bar{B}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{B}_{\perp} + \frac{v \times \bar{B}_{\perp}}{c}\right) = \frac{\gamma E_0}{c}\left[\cos\theta\hat{y} + \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{v}{c}\right)\cos\theta\hat{z}\right]$$

$$\frac{\bar{E}'_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v\operatorname{sen}\theta}{c}\right)^2 + \left(\frac{v\cos\theta}{c}\right)^2}}\left[\left(-\frac{v\operatorname{sen}\theta}{c}\right)\hat{y} + \frac{v\cos\theta}{c}\hat{z}\right]$$

$$\frac{\bar{B}'_{\perp}}{B_{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{v_0}{c}\right)^2}}\left[\cos\theta\hat{y} + \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{v_0}{c}\right)\hat{z}\right]$$

Del denominador de $\bar{E}_{\perp}/E_{\perp}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(1 - \frac{v\operatorname{sen}\theta}{c}\right)^2 + \left(\frac{v\cos\theta}{c}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{c\operatorname{sen}\theta}\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta + \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{v}{c}\right)^2}\end{aligned}$$

22.15

(a) Impulso desde el marco de laboratorio K al resto marco K' para encontrar el potencial vectorial $\bar{A}(r,t)$ y el escalar potencial Ï $\varphi(r,t)$ para una partícula cargada q que se mueve con velocidad constante v cuando se ve desde la laboratorio.

(b) Encuentre $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en el marco del laboratorio utilizando los potenciales calculados en la parte (a).

(c) Sea $r = r_{\perp} + r_{\parallel}$ la descomposición del vector de posición en componentes perpendicular y paralelo para v. En el límite cuando $v \to c$, muestre que los campos que calculó en la parte (b) se reducen a

$$\bar{E}(r,t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\bar{r}_{\perp}^2}{r_{\perp}^2}q\delta(ct - r_{\parallel}) \quad \text{y} \quad \bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\bar{v} \times \bar{r}_{\perp}}{r_{\perp}^2}q\delta(ct - r_{\parallel})$$

Interpreta su resultado en términos de la contracción de Lorentz.

(d) Compare y contraste los campos en la parte (c) con los campos de radiación producidos por una fuente compacta dependiente del tiempo.

Solución

(a) Los potenciales eléctricos y magnético son

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon r'} \qquad A' = 0$$

las transformaciones de Lorentz

$$r'_{\perp} = r_{\perp} \qquad r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - vt)$$

el potencial en el marco de referencia del laboratorio

$$\begin{aligned}\varphi &= \gamma(\varphi' + V \cdot A') \\ &= \gamma\varphi' \\ &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon r'} \\ &= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_{\perp}^2 + \gamma^2(r_{\parallel} - vt)^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\parallel &= \gamma\left(A'_\parallel + \frac{V}{c^2}\varphi'\right) \\
&= \frac{\gamma V q}{4\pi\epsilon c^2 r'} \\
&= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon}\frac{V}{c^2}\frac{1}{\sqrt{r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E &= -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \\
&= -\nabla_\perp\varphi - \nabla_\parallel\varphi - \frac{\partial A_\parallel}{\partial t} \\
&= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_\perp + \gamma^2(r_\parallel - Vt) - \beta^2\gamma^2(r_\parallel - Vt)}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_\perp + r_\parallel - vt}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r - vt}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$

ademas

$$\begin{aligned}
B &= \nabla \times A \\
&= (\nabla_\perp + \nabla_\parallel) \times (A_\perp + A_\parallel) \\
&= \nabla_\perp \times A_\parallel \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\gamma q v \times r_\perp}{[r_\perp^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$

(c) $E_\parallel \to 0$ cuando $r_\parallel = Vt$ para algún V también $v \to c$, cuando $\gamma^2 \to \infty$ tenemos $E_\perp \to 0$ cuando $v \to c$ si $r_\parallel \neq Vt$ sin embargo $E_\perp \to \infty$ cuando $v \to c$ si $r_\parallel \neq Vt$ de otra manera

$$\begin{aligned}
\int d(r_\parallel - ct)\bar{E}_\perp &= \frac{\gamma q \bar{r}_\perp}{2\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dy}{[r^2 + \gamma^2 y^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\gamma q \bar{r}_\perp}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{y}{r_\perp^2\sqrt{r_\perp^2 + \gamma^2 y^2}}\right]_0^\infty \\
&= \frac{q\bar{r}_\perp}{2\pi\epsilon_0 r_\perp^2}
\end{aligned}$$

obteniendo el limite

$$\lim_{v\to c}\bar{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\bar{r}_\perp}{r_\perp}q\delta(r_\perp - ct)$$

como $\bar{B} = \dfrac{V}{c} \times \bar{E}_\perp$ para algún V debe ser el caso que

$$\lim_{v\to c} B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{v \times r_\perp}{r^2}q\delta(r_\parallel - ct)$$

22.28 Evalúe el invariante de Lorentz $\theta_{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}$ en un marco inercial arbitrario. Identificar un tipo de campo electromagnético donde este invariante es cero

Solución:

El tensor de tensión-energía para el campo electromagnético es

$$\Theta = \begin{pmatrix} -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} & icg_x \\ -T_{xy} & -T_{yy} & -T_{yz} & icg_y \\ -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} & icg_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij} = -T_{ij} &= -\epsilon_0\left[E_iE_j - c^2B_iB_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(E - cB)\right] \\
&= -\epsilon_0(E_iE_j - c^2B_iB_j) + \delta_{ij}u_{EM}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\theta_{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} &= T_{ij}T_{ij} + 2c^2g^2 + u_{EM}^2 \\
&= [\epsilon_0(E_iE_j - c^2B_iB_j) + \delta_{ij}u_{EM}][\epsilon_0(E_iE_j - c^2B_iB_j) + \delta_{ij}u_{EM}] - 2c^2\epsilon_0^2[\bar{E}\times\bar{B}] + u \\
&= \epsilon_0E^4 + \epsilon_0^2c^2(\bar{E}\cdot\bar{B}) - \epsilon_0E^2u_{EM} + \epsilon_0^2c^2(\bar{E}\cdot\bar{B}) + \epsilon_0^2c^2B^2 - \epsilon_0c^2B^2u_{EM} - \epsilon_0E^2u_{EM} \\
&- \epsilon_0c^2B^2u_{EM} + \delta_{ij}\delta_{ij}u_{EM}^2 - 2\epsilon^2c^2E^2B^2 - 2\epsilon_0^2c^2(\bar{E}\cdot\bar{B}) + u_{EM}^2 \\
&= \epsilon_0^2(E^4 + c^4B^4) - 2\epsilon_0u_{EM}(E^2 + c^2B^2) + u_{EM}^2 + \delta_{ij}u_{EM}^2 - 2\epsilon_0^2c^2E^2B^2 \\
&= \epsilon_0^2(E^4 + c^4B^4) - 4u_{EM}^2 + u_{EM}^2 + 3u_{EM}^2 + \delta_{ij}u_{EM}^2 - 2\epsilon_0^2c^2E^2B^2 \\
&= \epsilon_0^2(E^4 + c^4B^4) + \delta_{ij}u_{EM}^2 - 2\epsilon_0^2c^2E^2B^2
\end{aligned}
$$

$\epsilon_0^2(E^2 + c^2B^2)^2$

Este invariante es cero para, digamos, una onda electromagnética transversal donde $|\bar{E}| = c|\bar{B}|$

22.29 En un solo punto espacio-tiempo, siempre es posible orientar los ejes de espacio así que $E_z = B_z = 0$ y $\bar{E}\cdot\bar{B} = EB\cos\theta$.

(a) En estas condiciones, diagonalice $\Theta_{\mu\nu}$ y demuestre que los dos valores propios distintos son

$$\lambda = \pm\frac{1}{4\mu_0}\sqrt{F_{\mu\nu}F_{(\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu}G_{\mu\nu})^2} = \pm\frac{1}{2}\epsilon_0\sqrt{E^2 + c^2B^2 + 2E^2B^2c^2\cos 2\theta}$$

(b) Mostrar que la parte (a) implica que la densidad de energía electromagnética en el punto espacio-temporal en cuestión es cero o no menor que $|\lambda|$ en cada marco inercial

Solución:

Hacemos $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ Bajo las condiciones los elementos de la matriz simétrica $\Theta_{\mu\nu}$ son

$$
\begin{aligned}
\Theta_{11} &= -\Theta_{22} = -\frac{1}{2}(E_1^2 - E_2^2 + B_1^2 - B_2^2) \\
\theta_{33} &= -\Theta_{44} = \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 + B_1^2 + B_2^2) \\
\Theta_{12} &= -(E_1E_2 + B_1B_2) \\
\Theta_{13} &= \Theta_{23} = \Theta_{14} = \Theta_{24} = 0 \\
\Theta_{24} &= -i(E_2B_1 - E_1B_2)
\end{aligned}
$$

para encontrar los eigeinvalores λ de $\Theta_{\mu\nu}$ hacemos

$$
\begin{vmatrix}
\Theta_{11}-\lambda & \Theta_{12} & 0 & 0 \\
\Theta_{12} & \Theta_{22}-\lambda & 0 & 0\ 0 \\
0 & \Theta_{33}-\lambda & \Theta_{34} & \\
0 & 0 & \Theta_{43} & \Theta_{44}-\lambda
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(\Theta_{11}-\lambda_1)(\Theta_{22}-\lambda_1) - \Theta_{12}^2 &= 0 \\
&= (\Theta_{11}-\lambda_1)(\Theta_{11}+\lambda_1) - \Theta_{12}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Theta_{33}-\lambda_2)(\Theta_{44}-\lambda_2) - \Theta_{34}^2 &= 0 \\
&= (\Theta_{33}-\lambda_2)(\Theta_{33}+\lambda_2) - \Theta_{34}^2
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\lambda_1^2 = \Theta_{11}^2 + \Theta_{22}^2 = \frac{1}{4}\left[(E_1^2 - E_2^2 + B_1^2 - B_2^2)^2 + 4(E_1^2 + B_2^2)^2\right]$$

$$\lambda_2^2 = \Theta_{33}^2 + \Theta_{34}^2 = \frac{1}{4}\left[(E^2 + B^2)^2 - 4(E_1B_2 - E_2B_1)^2\right]$$

podemos ver que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda^2$ donde

$$\lambda_2^2 \frac{1}{4}\left[(E^2 - B^2)^2 + 4(E_1 B_1 + E_2 B_2)^2\right]$$

Ahora recordamos las dos invariantes de Lorentz asociadas con el tensor de estrés y su doble:

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) \qquad F_{\mu\nu}G_{\mu\nu} = \frac{4\bar{E}\cdot\bar{B}}{c} = -\frac{4(E_1 B_1 + E_2 B_2)}{c}$$

Por lo tanto, volviendo a poner los factores dimensionales para que λ tenga las dimensiones correctas,

$$\lambda = \pm\frac{1}{4\mu_0}\sqrt{(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu}G_{\mu\nu})^2}$$

de otra manera

$$\begin{aligned}(FF)^2 + (FG)^2 &= 4(B^4 + E^4 - 2E^2B^2) + 16E^2B^2\cos^2\theta \\ &= 4(B^2 + E^4) - 8E^2B^2 + 8E^2B^2(1 + \cos 2\theta) \\ &= 4[B^4 + E^2 + 2E^2B^2\cos 2\theta]\end{aligned}$$