Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Academia de Matemáticas y Física

Ecuaciones Diferenciales

Presenta:
Palomares Maldonado Héctor Miguel

Enero - Junio 2015

.

Índice

1. Variables separables

Resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $y\acute{} = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$
$$ydy = \frac{x^2}{1+x^3}$$
$$\int ydy = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}ln|1+x^3| + c$$

2. $y\acute{} + y^2 senx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 senx$$
$$\frac{dy}{y^2} = -senxdx$$
$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int senxdx$$
$$-\int y^{-2}dy = \int senxdx$$
$$\frac{1}{y} = cosx + c$$

3. $y\acute{} = 1 + x + y^2 + xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2(1+x)$$
$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$
$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx$$
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1dx + \int xdx$$
$$\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + c$$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^x}{y + e^y}$

$$(y + e^y)dy = (x - e^x)dx$$
$$\int ydy + \int e^y dy = \int xdx - \int e^x dx$$
$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} - e^x + c$$
$$y + ln^{\frac{y^2}{2}} = ln^{\frac{x^2}{2}} - x + c$$

2. Exactas

Determinar cuáles de estas ecuaciones son exactas y resolverlas.

1. $\left(x + \dfrac{2}{y}\right) dy + ydx = 0$

   Solución

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 1$$

$$f = \int \left(x + \frac{2}{y}\right) dy = xy + 2lny + c(x)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + 2lny + c\right) = y + c'(x)$$

$$N = y + c'(x) \qquad y = y + c'(x) \qquad 0 = c'(x)$$

$$c = 0$$

   sustituyendo en $f = xy + 2lny + c(x)$
   por lo tanto la solución es:

$$k = xy + 2lny$$

2. $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

   Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$f = \int (y - x^3)dx = xy - \frac{x^4}{4} + c(y)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \frac{x^4}{4} + c(y)\right) = x + c'(y)$$

$$N = x + c'(y)$$

$$x + y^3 = x + c'(y)$$

$$y^3 = c'(y)$$

$$\int y^3 = \int c'(y)$$

$$c = \frac{y^4}{4} + k$$

   entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$k = -xy - \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4}$$

3. $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4 - 2y + 4xy)dy$
Solución:

$$(2y^2 - 4x + 5)dx - (4 - 2y + 4xy)dy = 0$$

veamos si la ecuación diferencia es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4y$$

Integramos el con respecto a x

$$f = \int (2y^2 - 4x + 5)dx = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + c(y)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y^2x - 2x^2 + 5x + c(y)) = 4yx + c'(y)$$

$$4xy + c'(y) = 4 - 2y + 4xy$$

$$c'(y) = 4 - 2y$$

$$\int c'(y) = \int 4 - 2y$$

$$c(y) = 4y - y^2 + A$$

la solución de la ecuación diferencial

$$A = -2xy^2 + 2x^2 - 4y + y^2$$

4. $(2xy^4 + seny)dx + (4x^2y^3 + xcosy)dy = 0$
Solución:
Veamos si la ecuación diferencial es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 + cosy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3 + cosy$$

$$f = \int (2xy^4 + seny)dx = x^2y^4 + xseny + c(y)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + xseny + c(y)) = 4x^2y^3 + xcosy + c'(y)$$

$$N = 4x^2y^3 + xcosy + c'(y)$$

$$4x^2y^3 + xcosy = 4x^2y^3 + xcosy + c'(y)$$

$$c'(y) = 1$$

$$\int c'(y) = \int 1dy$$

$$c(y) = y - k$$

Solución de la ecuación diferencial $k = x^2y^4 + xseny + y$

5. $(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

   Solución:

$$M_y(x,y) = \cos x + 2xe^y \qquad N_x(x,y) = \cos x + 2xe^y$$

   de modo que la ecuación dada es exacta. por lo tanto, existe una función $\psi(x,y)$ tal que.

$$\psi_x(x,y) = y\cos x + 2xe^y \qquad\qquad \psi_y(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$$

   Al integrar la primera de estas ecuaciones respecto a x se obtiene

$$\psi_y(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y)$$

   Si se hace $\psi_y = N$

$$\psi_y(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$$

   por lo tanto, $h\acute{}(y) = -1$ y $h(y) = y$.Puede omitirse la constante de integración ya que en cualquier solución de la ecuación procedente es satisfactoria; no se requiere la mas general. Al sustituir $h(y)$ en la ecuación diferencial.

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y$$

   Donde, la solución de la ecuación diferencial queda dada implícitamente por

$$y\operatorname{sen} x + x^2ey - y = c$$

3. Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes

1. comprobar que $y = xe^{5x}$ es solución de la ecuación diferencial.

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

   Solución

   sea $y = e^{5x}$ $\qquad y' = 5xe^{5x} + e^{5x}$ $\qquad y'' = 25xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x}$

   sustituyendo en $y'' - 10y' + 25y = 0$

$$25xe^{5x} + 10e^{5x} - 50xe^{5x} - 10e^{5x} + 25e^{5x} = 0$$

   por lo que es solución

   Así que la solución general es $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$

2. Sean $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ funciones continuas en un intervalo I y con, al menos, tres derivadas. Compruebe que estas funciones son un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Solución: y_1

$$y = e^x \qquad y' = e^x \qquad y'' = e^x \qquad y''' = e^x$$

sustituyendo en la Ecuación diferencial

$$e^x - 6e^x + 11e^x - 6e^x = 0$$

$$0 = 0$$

solución: y_2

$$y = e^{2x} \qquad y' = 2e^{2x} \qquad y'' = 4e^{2x} \qquad y''' = 8e^x$$

$$8e^{2x} - 6(4e^{2x}) + 11(2e^{2x}) - 6(e^{2x})$$

$$8e^{2x} - 24e^{2x} + 22e^{2x} - 6e^{2x}$$

$$0 = 0$$

Solución: y_3

$$y = e^{3x} \qquad y' = 3e^{3x} \qquad y'' = 9e^{3x} \qquad y''' = 27e^{3x}$$

sustituyendo en la Ecuación diferencial

$$27e^{3x} - 6\left(9e^{3x}\right) + 11\left(3e^{3x}\right) - 6\left(e^{3x}\right) = 0$$

$$27e^{3x} - 54e^{3x} + 33e^{3x} - 6e^{3x} = 0$$

$$0 = 0$$

3. Encontrar la solución de la ecuación diferencial y compruebe.

   a)
$$y'' + 2y' + y = 0.$$

   Solución
   la ecuación Auxiliar es:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

   Factorizando

$$(m+1)^2 = 0$$

   entonces $m_1 = -1$ y $m_2 = -1$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 t e^{-t}$$

$$y''(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}$$

   sustituyendo en la ecuación diferencial

$$C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - 2\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}\right) + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} = 0$$

$$0 = 0$$

   b)
$$y'' + 8y' + 15y = 0.$$

   Solución:
   Dado que $m_1 = -3$ y $m_2 = -5$

$$y(y) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-5t}$$

$$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} - 5C_2 e^{-5t}$$

$$y''(t) = 9C_1 e^{-3t} + 25C_2 e^{-5t}$$

   Sustituyendo en la ecuación diferencial.

$$9C_1 e^{-3t} + 25C_2 e^{-5t} - 8\left(3C_1 e^{-3t} + 5C_2 e^{-5t}\right) + 15\left(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-5t}\right) = 0$$

$$9C_1 e^{-3t} + 25C_2 e^{-5t} - 24C_1 e^{-3t} - 40C_2 e^{-5t} + 15C_1 e^{-3t} + 15C_2 e^{-5t} = 0$$

$$0 = 0$$

4. Hallar la solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + 14y' + 49y = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = -2 \qquad y'(0) = 10$

Solución

la ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 14m + 49 = 0$$

$$(m+7)^2 = 0$$

donde $m_1 = m_2 = -7$

por lo que la solución general es:

$$y = c_1 e^{-7x} + c_2 x e^{-7x}$$

como tenemos condiciones iniciales, entonces:

$$y' = -7c_1 e^{-7x} - 7c_2 x e^{-7x} + c_2 e^{-7x}$$

como $y(0) = -2$ tenemos:

$$-2 = c_1 e^0 + 0$$

$$c_1 = -2$$

y $y'(0) = 10$

$$10 = -7c_1 e^0 - 0 + c_2 e^0$$

$$10 = -7c_1 + c_2$$

$$c_2 = -4$$

por lo que la solución particular es:

$$y = -2e^{-7x} - 4xe^{-7x}$$

5. Dada la solución de una ecuación diferencial: $y = c_1 e^{2x/5} + c_2 x e^{2x/5}$ encontrar la ecuación diferencial.

Solución:

como: $y = c_1 e^{2x/5} + c_2 x e^{2x/5}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{5}$$

$\left(\lambda - \dfrac{2}{5}\right)^2 = 0$ sera la ecuación auxiliar

$$\lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda + \frac{4}{25} = 0$$

$$y'' - \frac{4}{5}y' + \frac{4}{25}y = 0$$

O bien, $25y'' - 20y' + 4 = 0$ que es la ecuación buscada.

4. Coeficientes Indeterminados

Utilizando el método de coeficientes indeterminados, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial.

1.

$$y'' - 4y' + 4y = 12x^2 - 40x + 42$$

Solución:

La solución homogénea $y_h = C_1 e^{2x} + Cxe^{2x}$

La solución particular tiene forma $Ax^2 + Bx + C$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 12x^2 - 40x + 42$$

La igualdad se cumple cuando:

$$4A = 12$$

$$-8A + 4B = -40$$

$$2A - 4B + 4C = 42$$

El sistema de ecuaciones que tiene por solución a

$$A = 3, \quad B = -4 \quad C = 5$$

entonces la solución particular es:

$$y_p = 3x^2 - 4x + 5$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = y_h + y_p = 3x^2 - 4x + 5 + C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$$

2.
$$y'' - 4y' + 4y = 4(2x-1)e^{4x}$$

Solución:

La solución homogénea $y_h = C_1 e^{2x} + Cxe^{2x}$

La solución particular tiene forma $y_P = (Ax+B)e^{4x}$

$y'_P = 4(Ax+B)e^{4x} + Ae^{4x}$ $\qquad y''_p = 16(Ax+B)e^{4x} + 8Ae^{4x}$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$[16(Ax+B) + 8A]e^{4x} - 4[4(Ax+B) + A]e^{4x} + 4(Ax+B)e^{4x} = (8x-4)e^{4x}$$

$$16Ax + 16B + 8A - 16Ax - 16B + 4A + 4Ax + 4B = 8x - 4$$

$$4Ax + 4A + 4B = 8x - 4$$

obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cc} 4A = 8 & A = 2 \\ 4A + 4B = -4 & B - 3 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$(2x-3)e^{4x} + C_1 e^{2x} + Cxe^{2x}$$

3.

$$y'' - 4y + 4 = -80sen3x - 23cos3x$$

Solución:

se sabe que la solución general de la homogénea asociada, es

$$y_p = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

Para obtener una solución particular. Se propone como solución a

$$y_p = Asen3x + B\cos 3x$$

entonces: $y'_P = 3A\cos 3x - 3Bsen3x \qquad y''_p = -9Asen3x - 9Bcos3x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$[-9Asen3x - 9B\cos 3x] - 4[3A\cos 3x - 3Bsen3x] + 4[Asen3x + B\cos 3x] = -80sen3x - 23\cos 3x$$

Asociando términos respecto a $sen3x$ y $\cos 3x$

$$(-5A + 12B)sen3x + (-12A - 5B)\cos 3x = -80sen3x - 23\cos 3x$$

$$\begin{cases} -5A + 12B = -80 \\ -12A - 5B = -23 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones tiene por solución a:

$$A = 4 \qquad B = -5$$

Entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = 4sen3x - 5\cos 3x$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = 4sen3x - 5\cos 3x + (c_1 + c_2x)e^{2x}$$

4.

$$y'' - 4y' = 12x^2 - 40x + 42$$

solución:

Primero se obtiene la solución de la homogénea $y'' - 4y = 0$ que es:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{4x}$$

para obtener la solución particular $y_p(x)$ debe considerarse el termino no homogéneo es un polinomio de grado 2, se propone como solución particular a

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$$

con coeficientes a determinarse.

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx \qquad y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad y_p'' = 6Ax + 2B$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 40x + 42$$

Asociando términos respecto de x

$$(12A)x^2 + (6A - 8B)x + (2B - 4C) = 12x^2 - 40x + 42$$

la igualdad se cumple cuando:

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 6A - 8B = -40 \\ 2B - 4C = 42 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones tiene por solución a

$A = -1 \qquad B = \dfrac{17}{4} \qquad$ y $\qquad C = \dfrac{67}{8}$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = -x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{67}{8}x$$

por lo tanto, la solución general es

$$y = -x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{67}{8}x + c_1 + c_2 e^{4x}$$

5.
$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}$$

Solución

La solución de la homogénea asociada es:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

para obtener la solución particular, debe considerarse el término no homogéneo, se propone como solución particular

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^{4x}$$

Con coeficientes A y B a determinarse.

si $y_p(x) = (Ax^2 + Bx)e^{4x}$ $\quad y_p'(x) = 4(Ax^2 + Bx)e^{4x} + (2Ax + B)e^{4x}$ $\quad y_p''(x) = 16(Ax^2 + Bx) + 8(2Ax + B)e^{4x} + 2Ae^{4x}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, y eliminando e^{4x}

$$16Ax^2 + 16Bx + 16Ax + 8B + 2A + 20Ax^2 + 5Bx + 10Ax + 5B + 5Ax^2 + 5Bx = 12x - 5$$

simplificando y asociando términos respecto a x, se obtiene

$(6A)x + (2A + 3B) = 12x - 5$

$$\begin{cases} 6A = 12 \\ 2A + 3B = -5 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones tiene por solución:

$$A = 2 \qquad B = -3$$

entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} = x(2x - 3)e^{4x}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = x(2x - 3)e^{4x} + c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

5. Variación de Parámetros

1. $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

   Solución:

   De la ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$$

   Donde las raíces son $m_1 = m_2 = 2$

   obteniendo la solución homogenea de la siguiente forma:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

   calculando el Wronskiano de $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$$

$$u_1' = -\int \frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} dx = \int x^2 dx - \int xd = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

   y

$$u_2' = \int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = \int xdx - \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

   La solución particular de la ecuación es:

$$y_p = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^{2x}$$

   por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial

$$y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^{2x}$$

2. $y'' - y = \sec^2 x$

   La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h = A \operatorname{sen} x + B \cos x$$

   Calculando wronskiano para obtener u_1' y u_2' que satisfacen la solución particular :

$$y_p = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x$$

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1$$

   entonces:

$$u_1' = \int \frac{-\sec^2 x \cos x}{-1} dx = \int \sec x dx = \ln(\sec c + \tan x)$$

$$u_2' = \int \frac{\operatorname{sen} x \sec^2 x}{-1} dx = -\int \operatorname{sen} x \sec^2 x dx \int (\cos x)^{-2}(-\operatorname{sen} x) dx = \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} = -\sec x$$

   sustituyendo obtenemos la solución particular,

$$y_p = (\operatorname{sen} x)[\ln(\operatorname{sen} x + \tan x)] - (\sec x)(\cos x)$$

$$y_p = (\operatorname{sen} x)[\ln(\operatorname{sen} x + \tan x)] - 1$$

Entonces la solución general es:

$$y = (\operatorname{sen} x)[\ln(\operatorname{sen} x + \tan x)] - 1 + A \operatorname{sen} x + B \cos x$$

3. $4y'' + 36y = \csc 3x$

   Solución:

   reescribiendo la ecuación diferencial

$$y'' + 9y = \frac{1}{4} \csc 3x$$

donde la solución homogénea es:

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3 \operatorname{sen} 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3 \operatorname{sen}^2 3x = 3$$

$$u_1' = -\int \frac{(\operatorname{sen} 3x)(\frac{1}{4} \csc 3x)}{3} = -\int \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} x$$

$$u_2' = \int \frac{(\cos 3x)(\frac{1}{4} \csc 3x)}{3} = \frac{1}{12} \int \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{1}{36} \ln |\operatorname{sen} 3x|$$

la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$y_p = -\frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} \ln |\operatorname{sen} 3x|$$

la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} \ln |\operatorname{sen} 3x|$$

4. Hallar la solución particular de la siguiente ecuación:

$$y'' - 3y' + 2y = e^t sent$$

Solución:

la ecuación ecuación auxiliar es:

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

Y sus raíces son: $m_1 = -1$ $\quad$ $m_2 = -2$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

para obtener la solución de la particular debemos calcular el Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-3t} + e^{-3t} = -e^{-3t}$$

$$y_p = \int \frac{e^{-2t} e^t senx}{e^{-3t}} + e^{2t} \int \frac{e^t e^t sent}{e^{3t}}$$

$$y_p = e^t \int sent + e^{2t} \int e^{-t} sent$$

$$y_p = e^t \cos t + e^{2t} \left[\frac{-1}{2} e^{-t} (senx + \cos t) \right]$$

$$y_p = e^t \cos t - \frac{1}{2} e^t (senx + \cos t)$$

$$y_p = e^t \left[\cos t - \frac{1}{2} senx - \frac{1}{2} \cos t \right]$$

Finalmente la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{2} e^t \left(\cos t - senx \right)$$

5. Resolver por variación de parámetros

$$y'' + y = cosx$$

Solución:

Las raíces de la ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ son $m \pm i$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h = A \cos x + Bsenx$$

Sean $y_1 = \cos x$, $y_2 = senx$

y

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ senx & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + sen^2 x = 1$$

$$y_p = -\cos x \int senx \cos x dx + senx \int \cos^2 x dx$$

$$y_p = -\cos x \left(\frac{1}{2} sen^2 x \right) + senx \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} sen2x \right)$$

$$y_p = -\frac{1}{2} sen^2 x \cos x + \frac{1}{2} xsenx + \frac{1}{4} \left(2senxcosx \right) senx$$

La solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{2} xsenx$$

La solución general de la ecuación diferencial

$$y = A \cos x + Bsenx + \frac{1}{2} xsenx$$

6. Resolver por variación de parámetros , la siguiente ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^2 y'' + 7xy' + 10y = x^{-1} \ln x$$

Solución:

Su ecuación auxiliar es:

$$m^2+7m+10=(m+2)(m+5)=0$$

por lo que sus raíces son: $m_1=-2$ y $m_2=-5$.
dado que la solución homogénea esta dada como:

$$y_h=c_1x^{-5}+c_2x^{-2}$$

$$W=\begin{vmatrix} x^{-5} & x^{-2} \\ -5x^{-6} & -2x^{-3} \end{vmatrix}=-2x^{-8}+5x^{-8}=3x^{-8}$$

$$y_p=-x^{-5}\int\frac{x^{-2}x^{-1}\ln x}{3x^{-8}}dx+x^{-2}\int\frac{x^{-5}x^{-1}\ln x}{3x^{-8}}dx$$

$$=-\frac{x^{-5}}{3}\int x^5\ln x dx+\frac{x^{-2}}{3}\int lnx$$

$$=-\frac{x^{-5}}{3}\left(\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}\right)+\frac{x^{-2}}{3}(x\ln x-x)$$

$$=-\frac{\ln x}{12x}+\frac{1}{48x}+\frac{\ln x}{3x}-\frac{1}{3x}=\frac{\ln x}{4x}-\frac{15}{48x}$$

$$y_p=\frac{x^{-1}}{4}\left(\ln x-\frac{5}{4}\right)$$

La solución general $y=y_h+y_p$

$$y=c_1x^{-5}+c_2x^{-2}+\frac{x^{-1}}{4}\left(\ln x-\frac{5}{4}\right)$$

6. Bernoulli

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)y^n$$

que se conoce como la ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0$ ó 1 probar que se puede deducir a una ecuación lineal para cualquier valor de n por el cambio de variable $z = y^{1-n}$ y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

1. $xy^2y' + y^3 = x\cos x$;

Solución:

$$xy^2\frac{dy}{dx} + y^3 = x\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^{-2}\cos x$$

$$u = y^{1-(-2)} = y^3 \qquad\qquad \frac{du}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}y^{-2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{3}y^{-2}\frac{du}{dx} + \frac{y}{x} = y^{-2}\cos x$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}y^3 = 3\cos x$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}u = 3\cos x$$

$$e^{3\int\frac{1}{x}} = e^{lnx^3} = x^3$$

$$x^3\frac{du}{dx} + 3x^2u = 3x^3\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(ux^3\right) = 3x^3cosx$$

$$ux^3 = 3\int x^3cosxdx$$

$$ux^3 = 3\int x^3cosxdx$$

$$ux^3 = 3\left(x^3senx - \int senx3xdx\right)$$

$$ux^3 = 3\left(x^3senx + 3x^2cosx + \int \cos x6xdx\right)$$

$$ux^3 = 3\left[x^3senx + 3x^2\left(6xsenx - 6\int cosxdx\right)\right]$$

$$ux^3 = 3[x^3senx + 3x^2cosx + (6xsenx - 6senx)]$$

$$u = \frac{3[x^3 senx + 3x^2 cosx + (6xsenx - 6senx)]}{x^3}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \sqrt[3]{= \frac{3[x^3 senx + 3x^2 cosx + (6xsenx - 6senx)]}{x^3}}$$

2. $xdy + ydx = xy^2 dx$.

   Solución:

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2$$

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2\frac{du}{dx}$$

$$-y^2\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -1$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1$$

$$e^{-\int \frac{1}{x}} = e^{-lnx} = x^{-1}$$

$$x^{-1}\frac{du}{dx} - (x^{-1})\frac{1}{x}u = -1(x^{-1})$$

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot u\right) = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\cdot u = -\int \frac{1}{x}$$

$$-\int \frac{1}{x} = lnx$$

$$\frac{1}{x}\cdot u = -lnx$$

$$u = x - lnx$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{x - lnx}$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

3. $y' + y = xy^2$

Solución:

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \qquad \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{du}{dx}$$

$$-y^2\frac{du}{dx} + y = xy^2$$

$$\frac{du}{dx} - y^{-1} = -x$$

$$\frac{du}{dx} - u = -x$$

$$e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$$e^{-x}\frac{du}{dx} - ue^{-x} = -x$$

$$\int \frac{d}{dx}(ue^{-x}) = -\int xdx$$

$$ue^{-x} = -\frac{x^2}{2}$$

$$u = -\frac{x^2}{2}e^x$$

$$y = -\frac{2}{x^2e^x}$$

4. $x^2y' - xy = x^{-7}y^{\frac{1}{2}}$

solución:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^{-9}y^{1/2}$$

$$u = y^{1-1/2} = y^{1/2} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = 2y^{1/2}\frac{du}{dx}$$

$$2y^{1/2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}y = x^{-9}y^{1/2}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}y^{1/2} = x^{-9}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}u = x^{-9}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}} = x^{-1/2}$$

$$x^{-1/2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}x^{-3/2}u = x^{9/2}$$

$$\int (x^{-1/2} \cdot u) = \int x^{9/2} dx$$

$$x^{-1/2} \cdot u = -\frac{2x^{11/2}}{11}$$

$$u = \frac{x^6}{11}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \left(\frac{x^6}{11}\right)^2$$

5. $y' + xy = xy^2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \qquad \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{du}{dx}$$

$$-y^2\frac{du}{dx} + xy = xy^2$$

$$\frac{du}{dx} - xy^{-1} = x$$

$$\frac{du}{dx} - xu = x$$

$$e^{-\int x} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{du}{dx} - xe^{-\frac{x^2}{2}}u = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}u\right) = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}u = xe^{-\frac{x^2}{2}} - \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}u = xe^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(x-1)$$

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(x-1)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = x - 1$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{x-1}$$

6. $y' - x^2 y = x^2 y^{-4}$

Solución:

$$u = y^{1-(-4)} = y^5 \qquad \frac{du}{dx} = 5y^4 \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} y^{-4} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{5} y^{-4} \frac{du}{dx} - x^2 y = x^2 y^{-4}$$

$$\frac{du}{dx} - 5x^2 y^5 = 5x^2$$

$$e^{-5\int x^2} = e^{\frac{5x^3}{3}}$$

$$e^{\frac{5x^3}{3}} \frac{du}{dx} - 5x^2 e^{\frac{5x^3}{3}} y^5 = 5x^2 e^{\frac{5x^3}{3}}$$

$$\int \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{5x^3}{3}} \cdot u \right) = 5 \int x^2 e^{\frac{5x^3}{3}}$$

$$e^{\frac{5x^3}{3}} \cdot u = 5 \left[x^2 e^{\frac{5x^3}{3}} - 2 \int e^{\frac{5x^3}{3}} x dx \right]$$

$$e^{\frac{5x^3}{3}} \cdot u = 5 \left[x^2 e^{\frac{5x^3}{3}} - 2 \left[x e^{\frac{5x^3}{3}} - \int e^{\frac{5x^3}{3}} dx \right] \right]$$

$$e^{\frac{5x^3}{3}} \cdot u = 5x^2 e^{\frac{5x^3}{3}} - 10 \left[x e^{\frac{5x^3}{3}} - e^{\frac{5x^3}{3}} \right]$$

$$u = 5x^2 - 10 [x - 1]$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \sqrt[5]{5x^2 - 10(x-1)}$$

7. Transformada de Laplace

1. Hallar una función $f(x)$ cuya transformada de Laplace sea

   a) $\dfrac{30}{p^4}$;
   solución:
   $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{30}{p^4}\right\} = 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{p^4}\right\} = 5\mathscr{L}^{-1}\dfrac{3!}{p^4} = 5p^3$

   b) $\dfrac{2}{p+3}$;
   Solución:
   $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{p+3}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p+3}\right\} = 2e^{-3t}$

   c) $\dfrac{4}{p^3} + \dfrac{6}{p^2+4}$;
   Solución:
   $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{p^3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{p^2+4}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{p^3}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{p^2+4}\right\} = 2p^2 + 3sen2t$

   d) $\dfrac{1}{p^2+p}$;
   Solución 1
   $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2+p}\right\}$
   $\dfrac{1}{p^2+p} = \dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1} = \dfrac{A(p+1)+B(p)}{p(p+1)}$
   $1 = A(p+1) + B(p)$ si $p = 0$ $A = 1$
   $1 = A(p+1) + B(p)$ si $p = -1$ $B = -1$
   $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p+1}\right\} = 1 - e^{-t}$
   Solución 2
   $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) \star g(t)$
   $F(p) = \dfrac{1}{p} \Rightarrow f(t) = 1$ $G(p) = \dfrac{1}{p+1} \Rightarrow g(t) = e^{-t}$
   $f(t) \star g(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}$

2. Determinar $\mathscr{L}$ de los siguientes problemas

   a) $f(t) = (2t+1)^3$
   Solución:
   $(2t+1)^3 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$
   $8\mathscr{L}\left\{t^3\right\} + 12\mathscr{L}\left\{t^2\right\} 6\mathscr{L}\{t\} + \mathscr{L}\{1\}$
   $8\dfrac{3!}{s^4} + 12\dfrac{2!}{s^3} + 6\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}$
   $\dfrac{48}{s^4} + \dfrac{24}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

   b) $f(t) = (1+e^{2t})^2$
   Solución:
   $(1+e^{2t})^2 = 1 + 2e^{2t} + e^{4t}$
   $\mathscr{L}\{1\} + 2\mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\} + \mathscr{L}\left\{e^{4t}\right\}$
   $= \dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s-2} + \dfrac{1}{s-4}$

   c) $f(t) = 4t^2 - 5sen3t$
   Solución
   $4\mathscr{L}\left\{t^2\right\} - 5\mathscr{L}\{sen3t\} = 4\dfrac{2!}{t^3} - 5\dfrac{3}{s^2+9} = \dfrac{8}{t^3} - \dfrac{15}{s^2+9}$

d) $f(t) = \cos 5t + sen2t$
Solución:
$\mathscr{L}\left\{\cos 5t\right\} + \mathscr{L}\left\{sen2t\right\}$
$\dfrac{s}{s^2+25} + \dfrac{2}{s^2+4}$

8. Resolución de Ecuaciones diferenciales mediante Transformada de Laplace

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por medio de la transformada de Laplace.

1. $y'' - 2y' - 3y = 4 \qquad$ para $y(0) = 1, \quad y' = -1$

   Solución

$$\mathscr{L}\left\{y'' - 2y' - 3y\right\} = \mathscr{L}\left\{4\right\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) - 2y(0) - 3Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{4}{s} + sy(0) + y'(0) - 2y(0)}{s^2 - 2s - 3} = \frac{4 + s^2 - s - 2s}{s(s^2 - 2s - 3)} = \frac{s^2 - 3s + 4}{2(s+1)(s-3)}$$

la solución de la ecuación por el método de las derivadas será:

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s-3)}\right\} = Ae^{0t} + Be^{-t} + Ce^{3t}$$

$$A = \frac{G(0)}{H'(0)} \qquad B = \frac{G(-1)}{H'(-1)} \qquad C = \frac{G(3)}{H'(3)}$$

ademas,

$$G(s) = s^2 - 3s + 4$$

$$H(s) = s^3 - 2s^2 - 3s$$

$$H'(s) = 3s^2 - 4s - 3$$

$$A = \frac{4}{-3} \qquad B = \frac{8}{4} = 2 \qquad C = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = -\frac{4}{3} + 2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{3t}$$

Comprobando por el método de fracciones parciales

$$\frac{s^3 - 3s + 4}{s(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3}$$

$$s^2 - 3s + 4 = As^2 - 2As - 3A + Bs^2 - 3Bs + Cs^2 + Cs$$

$$A + B + C = 1$$

$$-2A - 3B + C = -3$$

$$-3A = 4$$

$$A = -\frac{4}{3} \qquad B = 2 \qquad C = \frac{1}{3}$$

2. $y'' - 2y' - 3y = e^t \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 4$

Solución:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)(s^2 - 2 - 3) = \frac{1}{s-1} + 2s$$

$$Y(s)[(s+1)(s-3)] = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 2s + 1}{(s-1)(s+1)(s-3)}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 2s + 1}{s^3 - 3s^2 - s + 3}\right\} = Ae^t + Be^{3t} + Ce^{-t}$$

$$G(s) = 2s^2 - 2s + 1$$

$$H'(S) = 3s^2 - 6s - 1$$

$$A = \frac{G(1)}{H(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \frac{G(3)}{H'(3)} = \frac{13}{8}$$

$$C = \frac{G(-1)}{H'(-1)} = \frac{5}{8}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = -\frac{1}{4}e^t + \frac{13}{8}e^{3t} + \frac{5}{8}e^{-t}$$

3. $y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

Solución:

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + 2Y(s) = 0$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{(s-1-i)(s-1+i)}$$

Tenemos: $Q(s) = \dfrac{1}{s-1+i}$, entonces

$$Q(1+i) = \frac{1}{1+i-1+i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{i}\right) = -\frac{i}{2} \rightarrow Q_1 = 0$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}$$

como $s = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$$y = e^t\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) sent\right)$$

finalmente la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = e^t sent$$

4. $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}$ $\qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 6$

Solución:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

sustituyendo las condiciones iniciales:

$$s^2Y(s) - 2s - 6 - 6sY(s) + 12 + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Agrupando términos

$$Y(S)[s^2 - 6s + 9] = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s + 6 - 12$$

$$Y(s)[(s-3)^2] = \frac{2}{(s-3)^3} + 2(s-3)$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

$$Y(s) = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

por un teorema tenemos:

$$Y(s) = 2\left[\frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = 2\left[e^{3t} \cdot \frac{1}{4!}t^4\right] + 2e^{3t}$$

5. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \qquad y(0) = -3 \qquad y'(0) = 5$

Solución:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s)[s^2 - 3s + 2] = \frac{4}{s-2} - 3s + 14$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)(s-2)^2} + \frac{14-3s}{(s-1)(s-2)}$$

$$Y(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

Descomponiendo Fracciones parciales tenemos

$$\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

$$A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1) = -3s^2 + 20 - 24$$

donde:

$$A = -7 \qquad B = 4 \qquad C = 4$$

Sustituyendo estos valores:

$$\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

$$Y(s) = -7\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

obteniendo como solución

$$y = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

9. Aplicaciones 1er Orden

1. En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento de población es proporcional al número presente en cualquier instante. Si se sabe que el número original se ha duplicado en 6 hrs. ¿Qué número se debe esperar al cabo de 12 hrs.?

   Solución:

   Sea p el número de bacterias presentes en un instante dado y $\frac{dp}{dt}$ la velocidad de aumento de p por lo tanto tenemos

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

   Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables vemos que:

$$\frac{dp}{p} = kdt$$

$$\int \frac{dp}{p} = k \int dt$$

   resolviendo las integrales

$$lnp = kt + C$$

   y aplicando propiedades de logaritmos expresamos como:

$$p(t) = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c} = Ce^{kt}$$

   por lo tanto:

$$p(t) = Ce^{kt}$$

   Considerando que $t = 0$, habrá una cantidad inicial $P(0) = P_0$ vemos que:

$$p_0 = Ce^0$$

$$p_0 = C$$

   Entonces, la ecuación toma la forma:

$$p(t) = p_0 e^{kt}$$

   Ahora bien, considerando que $t = 6$, $p(6) = 2p_0$ tenemos:

$$2p_0 = p_0 e^{kt}$$

   despejando a k

$$ln(2) = 6k$$

$$k = \frac{ln(2)}{6} = 0{,}1155$$

   con lo que la ecuación se puede expresar como:

$$p(t) = p_0 e^{0{,}1155t}$$

de esta forma, para $t = 12$ hrs:
$p(t) = p_0 e^{(0,1155)(12)}$

$$p(t) = 4P_0$$

Lo que significa que al cabo de 12 hrs. la cantidad de bacterias se habrá cuadruplicado

2. Si la diferencia entre la temperatura de un cuerpo y la del medio ambiente es "x"grados, se considera que la disminución de x con respecto al tiempo es proporcional a x. Si esta diferencia era al principio de 80° y después de un minuto de 70°, ¿cuál será después de dos minutos?, ¿ en cuántos minutos será de 20°?

   Solución:

   Dado que x es la diferencia de temperaturas, la ecuación diferencial que modela este caso es:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

   ecuación que se resuelve por separando variables, es decir:

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

   por lo que integrando tenemos:

$$lnx = kt + C$$

$$x = e^{kt+c} = e^{kt}e^{C} = Ce^{kt}$$

   Considerando que x es una función de t, la solución general de la ecuación diferencial propuesta se puede expresar como:

$$x(t) = Ce^{kt}$$

   dada la condición inicial tenemos:

$$x(0) = 80$$

   sustituyendo en la ecuación anterior:

$$80 = Ce^{k(0)}$$

   por lo tanto $c = 80$, de manera que la ecuación queda de la siguiente forma.

$$x(t) = 80e^{kt}$$

   Sabiendo la condición inicial $x(1) = 70$ y sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$70 = 80e^{k}$$

   por lo que lo que queremos encontrar el valor de k entonces despejando

$$k = ln\left(\frac{70}{80}\right) = -0{,}1335$$

entonces la forma de la ecuación es:

$$x(t) = 80e^{-0{,}1335t}$$

para $t = 2\text{min}$

$$x(2) = 80e^{(-0{,}1335)(2)}$$

$$x(2) = 61{,}25^{\circ}$$

Finalmente vemos que una diferencia de temperatura $x(t) = 20^{\circ}$ se alcanzará en:

$$20 = 80e^{-0{,}1335t}$$

$$e^{-0{,}1335t} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{ln\left(\dfrac{1}{4}\right)}{-0{,}1335}$$

$$t = 10{,}38 minutos$$

3. Un barco disminuye su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es $15m/s$, y después de 5 segundos ha disminuido a $8m/s$. ¿Después de cuanto tiempo la velocidad será de $1m/s$?

   Solución:

   De acuerdo con la segunda ley de Newton y considerando que la resistencia del agua es: $F = -kv$ la ecuación diferencial que modela es:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

   Dividiendo la ecuación por m

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{kv}{m}$$

   haciendo $\dfrac{k}{m} = \beta$ y resolviendo por variables separables:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\beta \int dt$$

$$lnv = -\beta t + c$$

$$v = e^{\beta t + c} = ce^{-\beta t}$$

   Considerando la condición $v(0) = 15$, para determinar el valor de c

$$15 = ce^{-\beta(0)}$$

$$15 = c$$

dado que $c = 15$ la ecuación queda de la siguiente manera:

$$v(t) = 15e^{-\beta t}$$

Sabemos que para $t = 5$, $v = 8$ por lo que determinando el valor de β

$$8 = 15e^{-5\beta}$$

$$\beta = \frac{ln\left(\dfrac{8}{15}\right)}{-5}$$

$$\beta = 0{,}1257$$

Finalmente la velocidad $v = 1m/s$ se alcanza en:

$$1 = 15e^{-0{,}1257t}$$

$$t = \frac{ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0{,}1257}$$

$$t = 21{,}54s$$

4. En $t = 0$ una fem de $100\,\text{sen}(10t)$ voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 50 ohmios. Si la corriente es cero en $t = 0$ ¿Cuál es en cualquier tiempo $t \geq 0$?

   Solución:

   Dado que $L = 2h$, $R = 50$ Ohmios y $E = 100\,\text{sen}(10t)$ podemos proponer la siguiente ecuación diferencial.

$$2\frac{dI}{dt} + 50I = 100\,\text{sen}(10t)$$

   dividiendo entre 2 queda:

$$\frac{dI}{dt} + 25I = 50\,\text{sen}(10t)$$

   La ecuación es de primer orden y dando que tenemos que hallar el factor integrante μ

$$\mu = e^{\int 25dt} = e^{25t}$$

   A continuación se multiplica la ecuación por el factor integrante, es decir

$$e^{25t}\frac{dI}{dt} + 25Ie^{25t} = e^{25t}50\,\text{sen}(10t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{25t} \cdot I) = e^{25t}50\,\text{sen}(10t)$$

$$\int \frac{d}{dt}(e^{25t} \cdot I) = \int e^{25t}50\,\text{sen}(10t)$$

$$e^{25t} \cdot I = \frac{50}{29} e^{25t} \operatorname{sen}(10t) - \frac{20}{29} e^{25t} \cos(10t) + C$$

$$I = \frac{50}{29} \operatorname{sen}(10t) - \frac{20}{29} \cos(10t) + \frac{C}{e^{25t}}$$

Considerando la condición $t = 0$, $I(t) = 0$. Calculamos el valor de C:

$$0 = \frac{50}{29} \operatorname{sen}(0) - \frac{20}{29} \cos(0) + \frac{C}{e^{25t}}$$

$$C = \frac{20}{29}$$

Finalmente la corriente I en cualquier tiempo t es:

$$I(t) = \frac{50}{29} \operatorname{sen}(10t) - \frac{20}{29} \cos(10t) + \frac{20}{29}$$

5. Supongamos que una gota esférica se evapora a una velocidad proporcional a su superficie; si al principio el radio de la gota es $2mm$, y al cabo de 10 minutos es de 1 mm, hallar una función que relacione el radio r con el tiempo t.

   Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

   Superficie de la esfera: $S = 4\pi r^2$

   La gota se evapora proporcionalmente a la superficie:

$$\frac{dV}{dt} = kS$$

   Sustituyendo:

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4k\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = k$$

$$dr = kdt$$

$$\int dr = k \int dt$$

   la solución de la ecuación diferencial es:

$$r = kt + c$$

   tomando las condiciones iniciales : $\left\{ \begin{array}{c} t = 0 \rightarrow r = 2 \\ t = 10 \rightarrow r = 1 \end{array} \right.$

   se obtienen k y c:

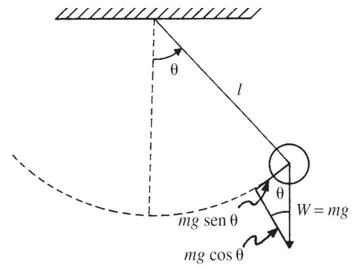
$$c = 2 \qquad r = kt + 2 \qquad 1 = 10k + 2 \qquad k = -\frac{1}{10}$$

   por lo tanto:

$$r(t) = -\frac{1}{10}t + 2$$

10. Aplicaciones 2do orden

1. El péndulo simple consta de una masa m suspendida de una varilla de longitud l y masa despreciable. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, determinar el ángulo de desplazamiento θ y el periodo de vibración.



Solución:

El arco s de un circulo de radio l que abre un ángulo θ, cumple la igualdad:

$$s = l\theta$$

y la aceleración angular es:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por la segunda ley de Newton, tenemos

$$F = ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

lo que da una fuerza tangencial que puede igualarse con la otra fuerza que representa la componente tangencial del peso w. Entonces,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen\theta$$

Es decir,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0$$

para valores pequeños del ángulo se puede considerar que

$$\theta \approx sen\theta$$

Entonces,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

cuya conclusión es:

$$\theta = c_1 sen\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

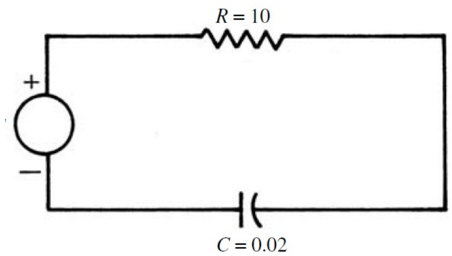
El periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2. Un circuito tiene una $fem\ E = 100e^{-5t}$ voltios, una resistencia de 10 ohmios y una capacitancia de 0,02 faradios. Si $q(0) = 0$, hallar

   a) La carga y la intensidad de la corriente en cualquier instante t

   b) Carga máxima y el tiempo necesario para obtener la carga máxima.



Solución:

Voltaje Proporcionado:

$$E = 100e^{-5t}$$

Caída de voltaje en la resistencia: $R = 10t$

Caída en el condensador :

$$\frac{q}{c} = \frac{q}{0{,}02} = 50q$$

a) por la segunda ley de kirchhoff:

$$10I + 50q = 100e^{-5t}$$

como $I = \dfrac{dq}{dt}$ entonces:

$$10\frac{dq}{dt} + 50q = 100e^{-5t}$$

$$\frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t}$$

con $q(0) = 0$

cuya solución es : $q = 10te^{-5t}$

La intensidad de la corriente es $I = \dfrac{dq}{dt}$, es decir

$$I = \frac{dq}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 10e^{-5t}(1 - 5t)$$

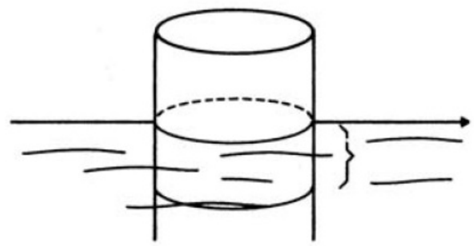
b) La carga máxima ocurre cuando $\dfrac{dq}{dt} = 0$

$$10e^{-5t}(1 - 5t) = 0 \qquad 0{,}2s$$

para este tiempo, la carga es

$$q = 2e^{-1} = 0{,}735culombios$$

3. Un cilindro circular recto de 2 m de radio está verticalmente sumergido en agua cuya densidad es $1,000kg/m^3$. Si se empuja hacia abajo y se suelta tiene un periodo de vibración de un segundo. Hallar el peso del cilindro.



Solución:

Sea positiva la dirección hacia abajo, y sea y m el movimiento del cilindro en el tiempo t. Según el principio de Arquímedes, todo cuerpo sumergido, total o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado. Entonces, la variación que corresponde a la fuerza de flotación es:

$$k = 1000\pi r^2 y$$

debido a la segunda ley de Newton $F = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = ky$ donde $k = -4000\pi$

$$m\frac{dy^2}{dt^2} = -4000\pi y$$

$$\frac{W}{g}\frac{d^2}{d^2} = -4000\pi y$$

donde w es el peso del cilindro y $g = 9{,}8m/s^2$ es decir,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{39200}{W}\pi y = 0$$

$\lambda^2 + \dfrac{39200}{W}\pi\lambda = 0 \qquad \lambda \pm \sqrt{\dfrac{39200\pi}{W}}i$

por lo que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{39200\pi}{W}} + c_2 sen\sqrt{\frac{39200\pi}{W}}t$$

vemos que el periodo T es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{39200\pi}{W}}} = \frac{2\sqrt{\pi W}}{\sqrt{39200}}$$

Es decir,

$$1 = \frac{2\sqrt{\pi W}}{39200}$$

de donde

$$W = \frac{39200}{4\pi} = 3119kg$$

11. Series de Potencias

Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial

1.
$$y' - y = 0$$

Solución:

sea $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_j x^j$ la solución general

Derivándola: $y' = \sum_{i=0}^{\infty} j a_j x^{j-1}$

sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0$$

para sumar las series, los exponentes de x deben ser iguales; es decir:

Si en la primera serie $j = j + 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_{j+1} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0$$

factorizando x^j, juntando las sumas:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+1) a_{j+1} - a_j \right] x^j = 0$$

como $x^j \neq 0$ por ser la solución propuesta.

$$(j+1) a_{j+1} - a_j \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$$

es la formula de recurrencia, de la que se obtiene cada una de las constantes para cada uno de los términos de la serie solución. Así:

para $j = 0 \rightarrow a_1 = a_0$

$j = 1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$

$j = 2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{c_0}{6}$

$j = 3 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{24}$

entonces si la solución tiene la forma $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

$$y = c_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots \right)$$

$$c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.

$$y'' - xy = 0$$

Solución:

sea la solución $y = \sum_{j=0}^{\infty}$

$$y' = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \qquad y'' = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$$

sustituyendo en la ecuación dada:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - x \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j-1} = 0$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1} = 0$$

recorriendo la primera suma $j = j + 2$ y la segunda y de la segunda suma $j = -1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} x^j = 0$$

extrayendo el primer termino de la primera suma, es decir, cuando $j = 0$

$$2c_2 \sum_{j=1}^{\infty} (j+2)(j+1) a_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} x^j = 0$$

ya se pueden sumar las series, quedando:

$$2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+2)(j+1) a_j x^j - a_{j+1} \right] x^j$$

y como $x^j \neq 0$ entonces:

$$(j+2)(j+1) a_{j+2} - a_{j-1} = 0 \qquad a_{j+2} = \frac{a_j - 1}{(j+2)(j+1)}$$

$j = 1 \rightarrow a_3 \dfrac{c_0}{6}$

$j = 2 \rightarrow a_4 = \dfrac{c_1}{12}$

$j = 3 \rightarrow a_5 = \dfrac{c_2}{20} = 0$

$j = 4 \rightarrow a_6 = \dfrac{a_3}{30} = \dfrac{c_0}{180}$

$j = 5 \rightarrow a_7 = \dfrac{a_4}{42} = \dfrac{a_1}{504}$

$j = 6 \rightarrow a_8 = \dfrac{a_5}{56} = 0$

$j = 7 \rightarrow a_9 = \dfrac{a_6}{72} = \dfrac{a_0}{12960}$

$j = 8 \rightarrow a_{10} = \dfrac{a_7}{90} = \dfrac{a_1}{45360}$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \ldots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} \right)$$

3.
$$y'' - y = 3x^2 - x + 4$$

solución:

suponemos $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ como solución

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 3x^2 - x + 4$$

recorriendo la primera suma $j = j+2$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 3x^2 - x + 4$$

Fatorizando

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+2(j+1)a_{j+2} - a_j\right] x^j = 3x^2 - x + 4$$

para $k = 0 \rightarrow 2a_2 - a_0 = 4 \qquad a_2 = \frac{4+a_0}{2}$

Porque los coeficientes del lado izquierdo de la igualdad deben ser iguales a los correspondientes coeficientes del lado derecho

para $j = 1 \rightarrow 6a_3 - a_1 = -1 \rightarrow a_3 = \frac{a_1 - 1}{6} = \frac{a_1 - 1}{3!}$

para $j = 2 \rightarrow 12a_4 - a_2 = 3 \rightarrow a_4 = \frac{10+a_0}{24} = \frac{10+a_0}{4!}$

Y
$$c_{j+2} = \frac{a_j}{(j+2)(j+1)}$$

$j = 3 \qquad a_5 = \frac{a_3}{20} = \frac{a_1 - 1}{120} = \frac{a_1 - 1}{5!}$

$j = 4 \quad a_6 = \frac{a_4}{30} = \frac{10+a_0}{720} = \frac{10+a_0}{6!}$

$j = 5 \qquad a_7 = \frac{a_5}{42} = \frac{a_1 - 1}{5040} = \frac{a_1 - 1}{7!}$

$j = 6 \qquad a_8 = \frac{c_6}{56} = \frac{10+c_0}{8!}$

sustituyendo los coeficientes en la serie solución:

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{4+a_0}{2!}x^2 + \frac{a_1 - 1}{3!}x^3 + \frac{10+a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1 - 1}{5!}x^5 \frac{10+a_0}{6!}x^6 + \frac{a_1 - 1}{7!}x^7 + \frac{10+a_0}{8!}x^8 + \dots$$

Agrupando:

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right) +$$

$$2x^2 - \frac{x^3}{3!} + 10\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + 10\frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + 10\frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$y = a_0 \cos hx + c_1 senhx + 10\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right) +$$

$$x - 10\left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) + 2x^3$$

se sumaron y se restaron los términos $10\left(1 + \dfrac{x^2}{2!}\right)$ y x para completar dos series más.

$$y = a_0 \cos hx + c_1 senhx + 10 \cos hx - senhx + x - 10 - 5x^2 + 2x^2$$

$$y = (c_0 + 10) \cos hx + (c_1 - 1) senhx - 3x^2 + x - 10$$

4. Encontrar soluciones con series de potencias para cada una de las siguientes ecuaciones alrededor de un punto apropiado $x = a$ usando el valor de a si se indica. En cada caso determine el conjunto de valores de x para el cual la serie converge y, si es posible, sume la serie en forma cerrada.

   a) $y' = xy; \quad y(0) = 5$
   Solución
   $y' - xy = 0$
   $y = \sum a_j x^j \qquad y' = \sum j a_j x^{j-1}$
   $\sum j a_j x^{j-1} - x \sum a_j x^j = 0$
   $\sum j a_j x^{j-1} - \sum a_j x^{j+1} = 0$
   $\sum (j+2) a_{j+2} x^{j+1} - \sum a_j x^{j+1} = 0$
   $\sum \left((j+2) a_{j+2} - a_j\right) x^{j+1} = 0$
   $(j+2) a_{j+2} - a_j = 0$
   $a_{j+2} = \dfrac{a_j}{j+2}$
   $a_2 = \dfrac{a_0}{2},\ a_3 = \dfrac{a_1}{3},\ a_4 = \dfrac{a_2}{4} = \dfrac{a_0}{8},\ a_5 = \dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a_1}{15},\ a_6 = \dfrac{a_4}{6} = \dfrac{a_0}{48},\ a_7 = \dfrac{a_5}{7} = \dfrac{a_1}{105}$
   $y = \sum a_j x^j$
   $y = a_0\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^6}{48} + \dots\right) + a_1\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{15} + \dfrac{x^7}{105} + \dots\right)$
   $y = 5\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{15} + \dfrac{x^7}{105} + \dots\right)$

   b) $y'' + xy' + y = 0$
   Solución:
   $y = \sum a_j x^j \qquad y' = \sum j a_j x^{j-1} \qquad y'' = \sum j(j-1) a_j x^{j-2}$
   $\sum j(j-1) a_j x^{j-2} + x \sum j a_j x^{j-1} + \sum a_j x^j = 0$
   $\sum (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j + \sum j a_j x^j + \sum a_j x^j = 0$
   $\sum \left[(j+2)(j+1) a_{j+2} + j a_j + a_j\right] x^j = 0$
   $(j+2)(j+1) a_{j+2} + j a_j + a_j = 0$
   $a_{j+2} = -\dfrac{(j+1) a_j}{(j+2)(j+1)}$
   $a_2 = -\dfrac{a_0}{2!},\ a_3 = -\dfrac{2a_1}{3!},\ a_4 = \dfrac{3a_2}{(4)(3)} = \dfrac{3a_0}{4!},\ a_5 = \dfrac{4a_3}{(5)(4)} = \dfrac{8a_1}{5!},\ a_6 = -\dfrac{5a_4}{(6)(5)} = -\dfrac{15a_0}{6!},$
   $a_7 = -\dfrac{6a_5}{((7)(6)} = -\dfrac{48a_1}{7!},\ a_8 = \dfrac{7a_6}{(8)(7)} = \dfrac{105a_0}{8!}$
   $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{3x^4}{4!} - \dfrac{15x^6}{6!} + \dfrac{105x^8}{8!} \dots\right) + a_1\left(1 - \dfrac{2x^3}{3!} + \dfrac{8x^5}{5!} - \dfrac{48x^7}{7!} \dots\right)$

12. Ecuaciones diferenciales por el método de Frobenius

Aplicando el método de Frobenius resolver la siguiente ecuación que tiene un punto singular regular en $x_0 = 0$

1. $2xy'' - y' + 2y = 0$

Solución:

sea

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2}$$

sustituyendo en la ecuación dada:

$$2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

se toman las sumas en donde la x tiene el menor exponente y $m = 0$

$$2[r(r-1)]c_0 - rc_0 = 0$$

y $c_0[r(2r-3)] = 0$

Aquí Frobenius pone siempre la condición $c_0 \neq 0$, entonces

$$r(2r-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{3}{2} \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

Queda asegurada al menos una solución de la forma:

$$y_1 = x^{3/2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

partiendo de la sustitución que se hizo de y y sus derivadas en la ecuación

$$2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

multiplicado por x

$$2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + 2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

haciendo una sustitución en las dos primeras sumas $m = k$ y en la tercer suma $m + 1 = k$, tenemos:

$$2\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^{k+r} + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0$$

Tomando un término de las dos primeras sumas para igualar los índices donde $k = 0$:

$$2[r(r-1)c_0] - rc_0 = 0$$

a esta ecuación se le conoce como ecuación indicial

$c_0(2r^2 - 3r)$ como: $c_0 \neq 0$

entonces $r(2r-3) = 0$ $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = 0$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r} + 2\sum_{k=1}^{\infty}c_k x^{k+r} = 0$$

La ecuación de recurrencia para $k = 1, 2, 3\ldots$ es:

$$c_k = \frac{-2c_{k-1}}{(k+r)(2k+2r-3)}$$

para $r_1 = \frac{3}{2}$

$$c_k = \frac{2c_{k-1}}{\left(k+\frac{3}{2}\right)2k} = \frac{-2c_{k-1}}{k(2k+3)}$$

para $k = 1$ $c_1 = \frac{-2c_0}{5}$

para $k = 2$ $c_2 = \frac{-2c_1}{14} = \frac{2}{23}c_0$

para $k = 3$ $c_3 = \frac{-2c_2}{27} = \frac{-4}{945}c_0$

para $k = 4$ $c_4 = \frac{-2c_3}{44} = \frac{2}{10395}c_0$

etcétera.

si $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \ldots$

$$y_1 = c_0\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{35}x^2 - \frac{4}{945}x^3 + \ldots\right)$$

volviendo a la ecuación de recurrencia para $r = 0$, tenemos:

$b_k = \frac{-2b_{k-1}}{k(2k-3)}$

para $k = 1$ $b_1 = \frac{-2b_0}{-1} = 2b_0$

para $k = 2$ $b_2 = \frac{-2b_1}{2} = -b_1 = -2b_0$

para $k = 3$ $b_3 = \frac{-2b_2}{9} = \frac{4}{9}b_0$

para $k = 4$ $b_4 = \frac{-2b_3}{20} = \frac{-2}{45}b_0$

para $k = 5$ $b_5 = \frac{-2b_4}{35} = \frac{4}{1575}b_0$

etcétera..

$$y_2 = b_1\left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{45}x^4 \ldots\right)$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_0\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{35}x^2 - \frac{4}{945}x^3 + \ldots\right) + b_1\left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{45}x^4 \ldots\right)$$

Use el método de Frobenius para hallar al menos los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en serie en torno de $x = 0$ para una solución de la ecuación dada, con $x > 0$

2. $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

Solución:

$y = \sum a_n x^{n+r} \qquad y = \sum a_n(n+r)x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$x^2\sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x\sum a_n(n+r)x^{n+r-1} + x^2\sum a_n x^{n+r} = 0$

$\sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum a_n(n+r)x^{n+r} + \sum a_n x^{n+r+2} = 0$

$\sum a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1)x^{n+r+2} + \sum a_{n+2}(n+r+2)x^{n+r+2} + \sum a_n x^{n+r+2} = 0$

$\sum [a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) + a_{n+2}(n+r+2) + a_n]x^{n+r+2} = 0$

si $n = -2$

$a_0(r)(r-1) + a_0(r) + a_{-2} = 0$

$a_0(r^2 - r + r) = 0 \qquad r^2 = 0$

$x^2\sum a_n(n)(n-1)x^{n-2} + x\sum a_n(n)x^{n-1} + x^2\sum a_n x^n = 0$

$\sum a_n(n)(n-1)x^n + \sum a_n(n)x^n + \sum a_n x^{n+2} = 0$

$\sum a_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n+2} + \sum a_{n+2}(n+2)x^{n+2} + \sum a_n x^{n+2} = 0$

$\sum [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+2}(n+2) + a_n]x^{n+2} = 0$

$\sum [a_{n+2}[(n+2)(n+1) + (n+2)] + a_n]x^{n+2} = 0$

$a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1) + (n+2)}$

$a_2 = -\dfrac{a_0}{(2)(1)+2},\ a_3 = -\dfrac{a_1}{(3)(2)+3}\ a_4 = -\dfrac{a_2}{(4)(3)+4} = \dfrac{a_0}{4!+16}\ a_5 = -\dfrac{a_3}{(5)(4)+5} = \dfrac{a_1}{5!+45}$

$a_6 = -\dfrac{a_4}{(6)(5)+6} = -\dfrac{a_0}{6!+240}\ a_7 = -\dfrac{a_5}{(7)(6)+7} = -\dfrac{a_0}{7!+1155}$

$y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{40} + \dfrac{x^6}{960}\dots\right) + a_1\left(x - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^5}{165} + \dfrac{x^7}{6195} - \dots\right)$

3. $xy''(3-x)y'-y=0$

$$y=\sum a_n x^{n+r} \qquad y'=\sum (n+r)a_n x^{n+r-1} \qquad y''=\sum (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\sum (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3\sum (n+r)a_n x^{n+r-1}-\sum (n+r)a_n x^{n+r-}-\sum a_n x^{n+r}=0$$

$$[[r(r-1)+3r]a_0]x^r+\sum [(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-(n+r-1)a_{n-1}-a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

entonces la ecuación indicial es:

$$[r(r-1)+3r]a_0=0 \qquad a_0\neq 0$$

$$r(r+2) \qquad r=0 \quad r=-2$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}(n-1+r+1}{(n+r)[(n+r-1)+3]}$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(n+r+2}$$

para $r=0$

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{n+2}$$

$n=1 \qquad a_1=\dfrac{a_0}{3}$

$n=2 \qquad a_2=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{a_0}{3*4}$

$n=3 \qquad a_3=\dfrac{a_2}{5}=\dfrac{a_0}{3*4*5}$

$n=4 \qquad a_4=\dfrac{a_3}{6}=\dfrac{a_0}{3*4*5*6}$

entonces la solución y_1 cuando $r=0$ es:

$$y_1=2a_0\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{5!}+\frac{x^4}{6!}+\ldots\ldots\right)$$

Para $r=-2$

$$b_n=\frac{b_{n-1}}{n}$$

$b=1 \qquad b_1=b_0$

$n=2 \qquad b_2=\dfrac{b_1}{2}=\dfrac{b_1}{2}$

$n=3 \qquad b_3=\dfrac{b_2}{2}=\dfrac{b_0}{2*3}$

$n=4 \qquad b_4=\dfrac{b_3}{4}=\dfrac{b_0}{2*3*4}$

solución cuando $r=-2$ es y_2:

$$y_2=b_0\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}\ldots\ldots\right)$$

la solución de la ecuación diferencial es $y=y_1+y_2$

$$y=2a_0\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{5!}+\frac{x^4}{6!}+\ldots\ldots\right)+b_0\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}\ldots\ldots\right)$$

4.
$$4x^2y'' - 4xy' + (3-4x^2)y = 0.$$

solución:

$y = \sum a_n x^{n+r} \qquad y' = \sum a_n(n+r)x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$4x^2\sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} - 4x\sum a_n(n+r)x^{n+r-1} + 3\sum a_n x^{n+r} - 4x^2\sum a_n x^{n+r} = 0$

$4\sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} - 4\sum a_n(n+r)x^{n+r} + 3\sum a_n x^{n+r} - 4\sum a_n x^{n+r+2} = 0$

$4\sum a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1)x^{n+r+2} - 4\sum a_{n+2}(n+r+2)x^{n+r+2} + 3\sum a_{n+2}x^{n+r+2} - 4\sum a_n x^{n+r+2} = 0$

$\sum[4a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) - 4a_{n+2}(n+r+2) + 3a_{n+2} - 4a_n]x^{n+r+2} = 0$

$4a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) - 4a_{n+2}(n+r+2) + 3a_{n+2} - 4a_n] = 0$

Si $n = -2$

$4a_0(r)(r-1) - 4a_0(r) + 3a_0 = 0$

$a_0[4(r)(r-1) - 4(r) + 3] = 0$

$a_0[4r^2 - 8r + 3] = 0$

$r = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8}$

$r = \dfrac{8 \pm 4}{8}$

$r_1 = \dfrac{1}{2} \qquad r_2 = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$y = \sum a_n x^{n+\frac{1}{2}} \qquad y' = \sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}} \qquad y'' = \sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{3}{2}}$

$4x^2\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{3}{2}} - 4x\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}} + 3\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}} - 4x^2\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}} = 0$

$4\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{2}} - 4\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{2}} + 3\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}} - 4\sum a_n x^{n+\frac{5}{2}} = 0$

$4\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{2}} - 4\sum a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{2}} + 3\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}} - 4\sum a_{n-2} x^{n+\frac{1}{2}} = 0$

$\sum\left[4a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) - 4a_n\left(n+\frac{1}{2}\right) + 3a_n - 4a_{n-2}\right]x^{n+\frac{1}{2}} = 0$

$a_n = \dfrac{a_{n-2}}{\left[\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)-1\right\}\right]+\frac{3}{4}\right]}$

$a_2 = \dfrac{a_0}{\left[\left[\left(2+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(2-\frac{1}{2}\right)-1\right\}\right]+\frac{3}{4}\right]} = \dfrac{a_0}{2}$

$a_3 = \dfrac{a_1}{\left[\left[\left(\frac{6}{2}+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{6}{2}-\frac{1}{2}\right)-1\right\}\right]+\frac{3}{4}\right]} = \dfrac{a_1}{6}$

$a_4 = \dfrac{a_2}{\left[\left[\left(\frac{8}{2}+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{8}{2}-\frac{1}{2}\right)-1\right\}\right]+\frac{3}{4}\right]} = \dfrac{a_2}{12} = \dfrac{a_0}{24}$

$a_5 = \dfrac{a_3}{\left[\left[\left(\frac{10}{2}+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{10}{2}-\frac{1}{2}\right)-1\right\}\right]+\frac{3}{4}\right]} = \dfrac{a_3}{20} = \dfrac{a_1}{120}$

$y = \sum a_n x^n$

$y = a_0\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dots\right) + a_1\left(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dots\right)$

13. Sistema de Ecuaciones diferenciales

Resuelva

a)

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Solución:

$|A - I\lambda| = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 4$

$|A - I\lambda_1| = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{matrix}$

tenemos que $k_1 = -k_2$ entonces el vector propio en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|A - I\lambda_2| = \begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{matrix}$

tenemos que $k_1 = \frac{3}{2}k_2$ entonces el vector propio en $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

La solución es:

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{dx}{dt} = -4x + y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 5y - z$$
$$\frac{dz}{dt} = y - 3z$$

Solución:

la matriz es $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$

tal que los valores propios son: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 5$

para $\lambda_1 = -3$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

para $\lambda_2 = -4$

$|A - \lambda_2 I| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x - 10z = 0 \qquad x = 10$

$y + z = 0$

$z = -y$

El vector propio $\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

para $\lambda_3 = 5$

$|A - \lambda_3 I| = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$
$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x - z = 0 \rightarrow x = z$

$y - 8z = 0 \rightarrow y = 8$

vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solución general del sistema

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$c)$

$$\frac{dx}{dt} = 6x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 4$$

Solución:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 4 & \end{pmatrix}$

$!A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$

$(\lambda - 5)^2 + 4 = 0$

$\lambda_1 = 5 + 2i \qquad \lambda_2 = 5 - 2i$

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$

$(1 - 2i)x - y = 0 \rightarrow y = (1 - 2i)x$

$5x - (1 + 2i)y = 0$

La solución general del sistema:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$