Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Academia de Matemáticas y Física

Electrodinámica

Presenta:
Palomares Maldonado Héctor Miguel

Agosto - Noviembre 2018

.

Índice

1. Electrostática

1. Una distribución de carga estática produce un campo eléctrico radial

$$E = A\frac{e^{-br}}{r}\hat{r}$$

Donde A y b son constantes

  a) ¿Cual es la densidad de carga?

  b) ¿Cual es la Carga total Q?

Solución:
La densidad de carga se calcula como:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla E = \epsilon_0 A \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-br}}{r}\right)\hat{r} = \epsilon_0\left(\frac{-bre^{-br} - e^{-br}}{r^2}\right) = -\epsilon_0 A e^{-br}(br+1)\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$Q = \int \rho dT = \epsilon_0 A \int_0^\infty e^{-br}(br+1)\frac{\hat{r}}{r^2} r dr = \epsilon_0 A\left[\int_0^\infty -be^{-br}dr - \int_0^\infty e^{-br}r^{-1}dr\right]$$

la primera integral

$$\int_0^\infty -be^{-br}dr = e^{-br}|_0^\infty = 1$$

La segunda integral
$u = \frac{1}{r}$, $du = -\frac{1}{r^2}dr$, $dv = e^{-br}dr$ y $v = \frac{e^{-br}}{-b}$

$$\int_0^\infty e^{-br}r^{-1}dr = -\frac{e^{-br}}{rb} - \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{e^{-br}}{r^2}dr$$

2. Supongamos que, en lugar de la ley de fuerza de Coulomb, se descubriera experimentalmente que la fuerza entre dos cargas cualquiera q_1 y q_2 fuera

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_{12}})}{r_{12}^2}\hat{r}$$

donde α es una constante

  a) Escriba el campo eléctrico E apropiado que rodea una carga puntual

  b) Eliga una trayectoria alrededor de la carga puntual y calcule la integral de linea $\oint \bar{E}\cdot dl$ y compare su resultado con el de Coulomb

  c) Encuentre $\oint \bar{E}\cdot dS$ sobre una superficie esférica de radio r_1 con el punto carga en el centro. Compárelo con el resultado de Coulomb.

  d) Repita (c) para el radio $r_1 + \Delta$ y $\nabla \cdot E$ a una distancia r_1 de la carga puntual. Compare con el resultado de Coulomb. Tenga en cuenta que es Δ una cantidad pequeña.

Solución:

  a) Tomemos la siguiente definición de campo eléctrico $E = F/q$ siendo F la fuerza

$$E_2 = \frac{F}{q_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_2})}{r_2^2}\hat{r}$$

  o bien

$$E_1 = \frac{F}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r_1})}{r_1^2}\hat{r}$$

  escribiéndolo en términos de la densidad

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r_1^2}\hat{r}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

b)

$$\int \bar{E}\cdot dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r}-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}\right]_a^b$$

si es una trayectoria alrededor de la carga puntual, entonces es una trayectoria cerrada, lo que significa de $r(a)=r(b)$ por lo que

$$\oint \bar{E}\cdot dl = 0$$

ejemplo:
elijamos la trayectoria $x=\cos t$ y $y=\operatorname{sen} t$ en $0\le t\le 2\pi$, $F(\sigma(t))=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ que describe un circulo, la integral de linea se define:

$$\int F(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

$\sigma'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t)$ La integral de linea es

$$\int F(\sigma(t))\sigma'(t)dt \int_0^{2\pi}(\cos t,\operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)dt = (-\cos t\operatorname{sen} t+\cos t\operatorname{sen} t)dt = 0$$

c)

$$\oint \bar{E}\cdot ds = \int_0^{r_1}\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2}\hat{r}\right)dr$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\right]_0^{r_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r_1}}\right)$$

d)

$$\oint \bar{E}\cdot ds = \int_0^{r_1+\Delta}\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2}\hat{r}\right)dr$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_1+\Delta}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r^{3/2}}\right)dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\right]_0^{r_1+\Delta} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1+\Delta}-2\sqrt{\frac{\alpha}{r_1+\Delta}}\right)$$

$$\nabla\cdot\bar{E} = \nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}(1-\sqrt{\alpha r_1}\right)$$

en coordenadas cilindricas es

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^2\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}\right)\right]$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^2\left(\frac{1-\sqrt{\alpha r_1}}{r_1^2}\right)\right]$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}(1-\sqrt{\alpha r_1})$$

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha r_1}} = \frac{q\sqrt{\alpha}}{8\pi\epsilon_0 r_1^{5/2}}$$

3. Una cantidad de carga q se distribuye uniformemente en una capa en la superficie de un disco de radio a.

   a) Use métodos elementales basados en la simetría acimutal de la distribución de carga para encontrar el potencial en cualquier punto del eje de simetría.

   b) Con la ayuda de (a) encuentre una expresión para el potencial en cualquier punto r ($|r|>a$), como una expansión de polinomios de Legendre

Solución:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi r^2}\frac{\sigma}{r}da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r}\int_0^{2\pi r^2}da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r}(2\pi r^2) = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0}$$

4. Una esfera de metal de radio R, que tiene carga q, está rodeada por una concha de metal concéntrica gruesa (radio interior a, radio exterior b, como en la figura 2.48). El caparazón no tiene carga neta.

   a) Encuentre la densidad de carga superficial? para R, para a, y para b.

   b) Encuentre el potencial en el centro, utilizando el infinito como punto de referencia.

   c) Ahora la superficie externa toca un cable a tierra, que baja su potencial a cero (igual que en infinito). ¿Cómo cambiarían (a) y (b)?

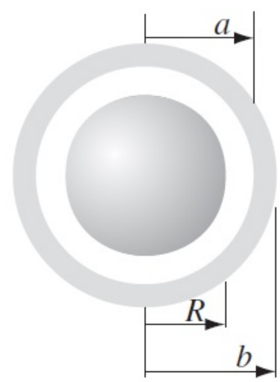


FIGURE 2.48

Solución

a) De la ley de Gauss

$$\oint EdA = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{\sigma A}{\varepsilon}$$

por lo que podemos decir que

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

para el Radio R y el area de una esfera es $4\pi r^2$ donde r es el radio

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

para el Radio a

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$$

para el Radio b

$$\sigma = \frac{q}{4\pi b^2}$$

b) El potencial lo calculamos como

$$V = \int \bar{E}ds$$

en este caso desde un punto lejano respecto a la primera distancia $[-\infty, b]$ es

$$V_1 = -\int_{-\infty}^{b}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b}$$

$$V_2 = -\int_a^b 0dr = 0$$

$$V_3 = -\int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}\bar{r}\frac{dr}{r^2} == \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_a^R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} =$$

$$V_4 = -\int_R^0 0dr = 0$$

Finalmente sumamos los potenciales

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

c) Como se coloca a tierra, entonces el b el potencial es $V_b = 0$ no hay densidad de carga $\sigma_b = 0$ el potencial total sería:

$$V(0) = -\int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

5. Dos cavidades esféricas, de radios a y b, están en el interior de una esfera conductora (neutra) de radio R (figura 2.49). En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual. llamadas estas cargas q_a y q_b.

   a) Encuentre las densidades de cargas superficiales O_a, O_b y O_R.
   b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor?
   c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?
   d) ¿Cuál es la fuerza sobre q_a y q_b?
   e) ¿Cuál de anteriores respuestas cambiaría si hay una tercera carga, q_c, que fuera llevada cerca del conductor?

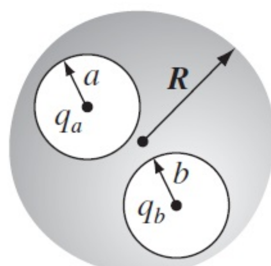


FIGURE 2.49

Solución

a)

$$\sigma = (\bar{E}\cdot n)\varepsilon$$

$$\sigma_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-a}{a^3}\right) = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$\sigma_b = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-b}{b^3}\right) = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

$$\sigma_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_a(R-a)}{|R-a|^3} + \frac{q_b(R-b)}{|R-b|^3}\right)$$

donde a y b son muy pequeños

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

b) de la ley de Gauss, donde r

$$\int \bar{E} \cdot dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} \int_0^{\text{area}} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada es $q_a + q_b$ el area de la esfera es $4\pi r^2$

$$\bar{E} \int_0^{4\pi r^2} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E}(4\pi r^2)\hat{r} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

c)

$$E_a \int_0^{4\pi r_a^2} dA = \frac{q_a}{\varepsilon} \qquad E_b \int_0^{4\pi r_b^2} dA = \frac{q_b}{\varepsilon}$$

$$E_a(4\pi r_a^2)\hat{r_a} = \frac{q_a}{\varepsilon} \qquad E_b(4\pi r_b^2)\hat{r_b} = \frac{q_b}{\varepsilon}$$

$$E_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon r_a^2}\hat{r_a} \qquad E_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon r_b^2}\hat{r_b}$$

d) Como la esfera es neutra no ejerce una fuera sobre las cargas q_a y q_b

e) El campo eléctrico afuera y la densidad de carga de la esfera (gris)

2. Potenciales

1. El potencial en la superficie de una esfera de radio R está dado por $\phi_0 = k\cos(3\theta)$, donde k es una constante. Encuentre el potencial dentro y fuera de la esfera, asi como también la densidad superficial de carga $\sigma(\theta)$ sobre la superficie de la esfera.
   solución:
   $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
   entonces

   $$V_0 = k\cos 3\theta = k(4\cos^3 x - 3\cos x)$$

   como esta en cosenos lo podemos poner en terminos de los polinomios de legrende, según la potencia $\cos^3 x \to P_3$ y $\cos x \to P_1$

   $$\begin{aligned} 4\cos^3 x - 3\cos x &= \frac{a}{2}\left[5(\cos^3\theta) - 3\cos\theta\right] + b\cos\theta \\ &= \frac{5a}{2}(\cos^3\theta) + \left(b - \frac{3}{2}a\right)\cos\theta \end{aligned}$$

   determinando a y b, conforme a $4\cos^3 x - 3\cos x$

   $$4 = \frac{5a}{2} \to a = \frac{8}{5}$$

   y

   $$-3 = b - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{5}\right) \to b = \frac{12}{5} - 3 = -\frac{3}{5}$$

   rescribiendo el potencial

   $$\phi_0(\theta) = \frac{k}{5}\left(8P_3(\cos\theta) - 3P_3(\cos\theta)\right)$$

Sabemos que la solución para un potencial es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

dado a las propiedades de ortogonalización

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta = 0 \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \tag{1}$$

donde P_m es el potencial en este caso

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{2r^n} \left[\frac{8k}{5} \int_0^{\pi} P_3(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta - \frac{3k}{5} \int_0^{\pi} P_1(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta \right] \\ &= \frac{2n+1}{2r^n} \left[\frac{8k}{5} \frac{2\delta_{n3}}{2n+1} - \frac{3k}{5} \frac{2\delta_{n1}}{2n+1} \right] \\ &= \frac{k[8\delta_{n3} - 3\delta_{n1}]}{5r^n} \end{aligned}$$

Sabemos que $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y para $n \neq m \rightarrow \delta_{mn} = 0$, entonces para la primera hacemos $n = 3$ y el segundo $n = 1$

$$A_n = \frac{8k}{5r^3} \qquad A_n = -\frac{3k}{5r}$$

El potencial para la primera contribución es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n) P_n(\cos\theta) = \frac{8k}{5} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5} \left(\frac{r'}{r} \right) P_1(\cos\theta)$$

sustituyendo $P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$ y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\phi(r,\theta) = \frac{8k}{10} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) - \frac{3k}{5} \left(\frac{r'}{r} \right) \cos\theta$$

si los términos A_l no van a cero en el infinito. Estas dos funciones deben ser unidos por las condiciones de contorno apropiadas en la superficie misma. Primero, el potencial es continuo en $r = R$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n) P_n(\cos\theta) \qquad r \leq R$$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \qquad r \geq R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n R^n) P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

Se deduce que los coeficientes de polinomios de Legendre similares son iguales

$$B_n = A_n R^{2n+1}$$

Para $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y para $n \neq m \rightarrow \delta_{mn} = 0$, entonces para la primera hacemos $n = 3$ y el segundo $n = 1$

$$B_n = \frac{8k}{5r^3} r^{2(3)+1} = \frac{8kr^4}{5} \qquad B_n = -\frac{3k}{5r} r^{2(1)+1} = -\frac{3kr^2}{5}$$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) = \frac{8k}{5} \left(\frac{r'}{r} \right)^4 P_3(\cos\theta) - \frac{3k}{5} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_1(\cos\theta)$$

2. Un cascaron esférico de radio R contiene una carga superficial uniforme σ_0 en el hemisferio norte y una densidad superficial $-\sigma_0$ en el hemisferio sur. Encuentre el potencial dentro y fuera de la esfera, calculando explicitamente los coeficientes de la solución con simetría axial hasta A_6 y B_6.
Solución
De la solución de Laplace para el potencial es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

por ec 1 tenemos

$$A_n = \frac{1}{r^n}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta$$

$P_m(\cos\theta) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$

$q = \sigma A = \sigma 2\pi r$ por otra parte el potencial es $\phi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$ sustituyendo q, tenemos $\phi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2\pi r\sigma}{r} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta$$

dado a la relación de ortogonalidad ec(1) haciendo el cambio de variable $\cos\theta = x$ los nuevos limites de integración son $\cos\pi = -1$ y $\cos 0 = 1$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^1 P_n(x)dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)dx$$

Por la propiedad $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ y por $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$ la integral se puede ver como:

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \int_{-1}^{0} P_n(-x)d(-x) = (-1)^n\int_0^1 P_n(x)dx$$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon r^n}\int_0^1 P_n(x)dx - (-1)^n\int_0^1 P_n(x)dx$$

$$A_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{n-1}}[1-(-1)^n]\int_0^1 P_n(x)dx$$

se puede observar que para n pares $[1-(-1)^n] = 0$ asi que $A_{2n} = 0$ y para n impares, los polinomios que obtenemos son

$$\int_0^{-1} P_1(x)dx = \int_0^1 xd = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{-1} P_3(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (5x^3 - 3x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\int_0^{-1} P_5(x)dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (63x^5 - 70x^3 + 15x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{63}{6} - \frac{70}{4} + \frac{15}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$A_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad A_3 = -\frac{\sigma}{8\varepsilon r^2} \qquad A_5 = \frac{\sigma}{16\varepsilon r^4}$$

del ejercicio anterior sabemos que $B_n = A_n^{r^{2n+1}}$

$$B_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}r^3 \qquad B_3 = -\frac{\sigma}{8\varepsilon}r^5 \qquad B_5 = \frac{\sigma}{16\varepsilon}r^7$$

El potencial es

$$V(r,\theta) = \frac{\sigma r'}{2\varepsilon}\left[P_1(\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{1}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_5(\cos\theta)\right]$$

$$V(r,\theta) = \frac{\sigma r^3}{2\varepsilon r^{2\prime}}\left[P_1(\cos\theta) - \frac{1}{4}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{1}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_5(\cos\theta)\right]$$

3. . Resuelva la ecuación de Laplace por separación de variables en coordenadas cilíndricas, suponiendo que no hay dependencia en la coordenada z. Encuentre las soluciones de la ecuación radial que sean compatibles con las soluciones de una linea infinita con densidad lineal de carga constante. Demuestre que su solución se reduce a la solución conocida de este sistema. El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$\nabla^2 V(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

proponemos que $V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)\Theta(\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{\Theta(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

multiplicando por $r^2(R(r)\Theta(\theta))^{-1}$

$$\nabla^2 V = \underbrace{\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)}_{=-k} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}}_{=k} = 0$$

sabemos que la solución de

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = -k\Theta(\theta) \qquad\qquad \Theta(\theta) = A\operatorname{sen} k\theta + B\cos k\theta$$

pero si $k = 0$, la derivada de una constante B es cero, entonces,

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = B$$

$$\int d\Phi = \int B d\phi$$

$$\Phi = B\phi + A$$

donde A es la constante de integración, como necesita ser periódica, esto es que regrese a su valor inicial, esta solución se descarta

para la ecuación para la parte radial

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = k^2 R(r)$$

proponemos $R(r)$ como r^n, sustituyendo

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr^n}{dr}\right) &= r\frac{d}{dr}\left(rnr^{n-1}\right) \\ &= nr\frac{d}{dr}\left(r^n\right) \\ &= n^2 r(r^{n-1}) \\ &= n^2 r^n = k^2 R \end{aligned}$$

entonces $n = \pm k$ para el segundo termino descartamos la solución trivial $s = 0$, pero sabemos que la derivada de una constante es cero

$$\frac{d}{dr}\left(\underbrace{r\frac{dR(r)}{dr}}_{=C}\right) = KR(r)$$

donde C es una constante, resolviendo

$$\frac{dR(r)}{dr} = \frac{C}{r}$$
$$\int dR(r) = C\int \frac{dr}{r}$$
$$R(r) = C\ln r + D$$

donde D es la constante de integración. Finalmente teniendo en cuenta que $\pm k$ el potencial es

$$V(r,\theta) = C\ln r + D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^k(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) + r^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)\right]$$

4. . Una densidad de carga superficial $\sigma(\theta) = a\operatorname{sen}(5\theta)$ se encuentra sobre la superficie de un cilindro infinito de radio R. Encuentre el potencial dentro y fuera del cilindro. (Sugerencia: Usa las soluciones generales encontradas en el problema anterior)
Solución:
Encontrado el potencial en el ejercicio anterior

$$V(r,\theta) = C\ln r + D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^k(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) + r^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)\right]$$

Dentro del cilindro, tenemos problemas en $\ln r$ y r^{-k} cuando el radio $r=0$, entonces el potencial es

$$\Phi_1(r,\theta) = D' + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)$$

y fuera, no esta definido para r^n y ln para cuando el radio muy grande

$$\Phi_2(r,\theta) = D + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^k}(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)\right]$$

por otra parte el potencial en la frontera

$$\nabla\Phi_2 - \nabla\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

de manera conveniente lo escribimos, ya que consideramos la componente normal

$$\nabla\Phi_2\hat{n} - \nabla\Phi_1\hat{n} = \frac{\partial}{\partial n}\Phi_2 - \frac{\partial}{\partial n}\Phi_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

El problema nos da la densidad $\sigma(\theta)$

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta) &= a\operatorname{sen} 5\theta\\
&= \epsilon\frac{\partial}{\partial n}\left(D + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right)\\
&- \epsilon\frac{\partial}{\partial n}\left(D' + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)\right)
\end{aligned}$$

$$\sigma(\theta) = a\operatorname{sen} 5\theta = \epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-k}{R^{k+1}}(a_k\cos k\theta + b_k\operatorname{sen} k\theta)\right] - kR^{k-1}(a'_k\cos k\theta + b'_k\operatorname{sen} k\theta)$$

como tienen que ser iguales solo queda que $k=5$,

$$a\operatorname{sen} 5\theta = \frac{-5}{R^6}(\cancel{a_k\cos k\theta} + b'_5\operatorname{sen} k\theta) - 5R^4(\cancel{a_k\cos k\theta} + b_k\operatorname{sen} k\theta)$$

$$a=\frac{5\epsilon}{R^6}b_5+5\epsilon R^4 b_5' \tag{2}$$

el potencial en la interface es igual $\Phi_1(r,\theta)=\Phi_2(r,\theta)$

$$\cancel{D_0}+\frac{5}{R^6}b_5\cancel{\operatorname{sen}5\theta}=\cancel{D_0'}+5R^4b_5'\cancel{\operatorname{sen}5\theta}$$

$$\frac{1}{R^6}b_5=R^4b_5' \qquad b_5=R^{10}b_5'$$

sustituyendo b_5 en 2

$$a=5\epsilon\left(R^4b_5'+R^4b_5'\right)=10\epsilon R^4b_5' \qquad b_5'=\frac{a}{10\epsilon R^4} \qquad b=\frac{aR^6}{10\epsilon}$$

El potencial dentro es

$$\Phi_1(r,\theta)=\frac{a\operatorname{sen}5\theta}{10\varepsilon}\frac{r^5}{R^4}$$

y el potencial fuera

$$\Phi_2(r,\theta)=\frac{a\operatorname{sen}5\theta}{10\varepsilon}\frac{R^6}{r^5}$$

5. Una caja cubica de arista a se forma con 5 placas de metal que son soldadas juntas y aterrizadas. La placa superior es de una metal distinto y está aislada de las otras y se mantiene a un potencial Φ_0. Encuentre el potencial dentro de la caja.
Solución:
en la figura se aprecia que las condiciones de frontera son

$$\Phi=\begin{cases} 0 & \text{en} \quad x=y=z=0, x=y=a \\ \Phi_0 & \text{en} \quad z=a \end{cases}$$

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2\Phi(x,y,z)=\frac{\partial^2\Phi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi(x,y,z)}{\partial z^2} \tag{3}$$

Proponemos $\Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{\partial^2X(x)Y(y)Z(z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2X(x)Y(y)Z(z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2X(x)Y(y)Z(z)}{\partial z^2}$$

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2}+X(x)Z(z)\frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2}+X(x)Y(y)\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}$$

dividiendo por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2}=k_xX(x) \qquad \frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2}=k_yY(y) \qquad \frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}=k_zZ(z)$$

las soluciones de 3 son

$$X(x)=A\operatorname{sen}k_xx+B\operatorname{sen}k_xx \qquad Y(y)=C\operatorname{sen}k_yy+D\cos k_yy$$

$$Z(z)=Eexp(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z)+Fexp(\sqrt{k_x^2+k_y^2}z)$$

donde $k_z=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ para $x=0$ y $y=0$

$$\cancel{A\operatorname{sen}k_x0}+B\overbrace{\cancel{\cos k_x0}}^{=1}=0 \qquad \cancel{C\operatorname{sen}k_y0}+D\overbrace{\cancel{\cos k_y0}}^{=1}=0$$

$B = D = 0$ y para $x = y = a$

$$A \operatorname{sen} k_x a + B \cos k_x a = 0 \qquad C \operatorname{sen} k_y a + D \cos k_y a = 0$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \qquad k_y = \frac{m\pi}{a}$$

$$Z(0) = Eexp(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}0) + Fexp(-\sqrt{k_x^2 + k_y^2}0) = 0 \qquad E + F = 0$$

$$Z(z) = 2E \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} z\right) = 2E \sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)$$

$$\Phi_0(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)$$

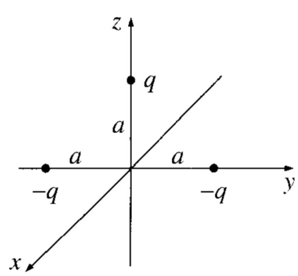
$$T_{mn} \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right) = \frac{4V_0}{a^2}\int_0^a\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} dxdy = \frac{16V_0}{\pi^2 nm}\delta_{mn}$$

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{n=2k}^{\infty}\sum_{m=2k}^{\infty}\frac{1}{mn} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a}\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} z\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)}$$

el potencial en el centro del cubo es

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{n=2k}^{\infty}\sum_{m=2k}^{\infty}\frac{1}{mn} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2 + m^2}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right)}$$

6. Tres cargas puntuales están localizadas como se muestra en la figura, cada una a una distancia a del origen. *a)* Calcular el momento dipolar del sistema. *b)* Encuentre el campo eléctrico aproximado para puntos lejanos al origen. *c)* Expresar la solución en coordenadas esféricas y escribir explicitamente los dos primeros términos en la expansión multipolar.



Solución:
Tenemos que el potencial para cargas puntuales es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r}$$

para una distrubución el momento dipolar es:

$$P \equiv \int r'\rho(r')d\tau$$

para la distribución del dipolo se simplifica a

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P\cdot\hat{r}}{r^2} \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i r_i$$

Por otra parte tenemos

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|r_1|} - \frac{q}{|r_2|}\right)$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

De la ley de los cosenos $r_1 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$ y $r_2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(pi - \theta)$ considerando el caso $r >> a$

$$r_1 = r\left(1 - 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$r_2 = r\left(1 + 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\left(1 - 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2} - \left(1 + 2\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^n(-1)^n\right]$$

observación $g(x,t) = (1 - 2x(-t) + (-t)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(-\frac{a}{r}\right)^n$

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}2\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}\left(P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots\right)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{2aq}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{2aq}{r^4}a^2P_3(\cos\theta) + \dots\right)$$

el momento dipolar es $d = 2aq$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{d}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{d}{r^4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \dots\right)$$

La contribución mas grande $r >> a$

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

El potencial

$$\Phi(r,\theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{aq\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$$

y sabemos que el campo electrico es $E = -\nabla\Phi$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + a\,\mathrm{sen}\,\theta r^2\hat{\theta} - \frac{1}{r^2}\hat{r}\right)$$

7. Demuestre que el termino del cuadrupolo en la expansión multipolar puede ser escrito como

$$\Phi_{quad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\hat{r_i}\hat{r_j}Q_{ij}$$

donde

$$Q_{ij} = \int [3r_i'r_j' - (r^2)\delta_{ij}]\rho_c(r')dV'$$

Solución:
Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|r-r'|} &= \frac{1}{\sqrt{(r-r')\cdot(r-r')}} = \frac{1}{\sqrt{|r|^2 - 2r\cdot r' + |r'|^2}} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1 + \left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2} + \frac{|r'|^2}{|r|^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2} + \frac{|r'|^2}{|r|^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-2\frac{r\cdot r'}{|r|^2} + \frac{|r'|^2}{|r|^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{|r|}\left[1 + \frac{r\cdot r'}{|r|^2} + \frac{3(r\cdot r')^2 + -|r|^2|r|^2}{2|r|^4} + \frac{|r'|^3}{|r|^3}\right] \\
&= \frac{1}{|r|} + \frac{r\cdot r'}{|r|^2} + \frac{3(r\cdot r')^2 + -|r|^2|r|^2}{2|r|^5} + \frac{1}{|r|}\frac{|r'|^3}{|r|^3}
\end{aligned} \tag{5}$$

Tomando en cuenta que $\frac{r\cdot r'}{|r|^2} \leq \frac{|r'|}{|r|} << 1$ y también pedimos $\frac{|r'|^2}{|r|^2} >> \frac{|r'|}{|r|} << 1$ El desarrollo multipolar, valido en principio para un punto alejado del cuerpo cargado (esto es si se cumple que $|r|$ es mucho mayor que el maximo de $|r'|$)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r|}\int \rho(r')d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r|^3}\int \rho(r')rd\tau$$
$$\Phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0|r|^5}\left(\int \rho(r')[3(r\cdot r')^2 - |r|^2|r'|^2]d\tau + \dots\right)$$

8. Hallar la densidad de carga inducida en un plano conductor cuando se coloca una linea cargada paralela a un plano conductor a una distancia d del plano.
Solución
el potencial es

$$V(y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

observemos que $a = y + (z-d)$ y $b = y + (z+d)$

$$V(y,z) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{y^2 + (z+d)^2}{y^2 + (z-d)^2}$$

la densidad es

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\epsilon\frac{\partial V}{\partial y} \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi}\left(\frac{2(z+d)}{y^2 + (z+d)^2} - \frac{2(z-d)}{y^2 + (z-d)^2}\right)_{z=0} \\
&= -\frac{2\lambda}{4\pi}\left(\frac{d}{y^2 + d^2} + \frac{d}{y^2 + d^2}\right) \\
&= -\frac{\lambda d}{\pi(y^2 + d^2)}
\end{aligned}$$

9. Una esfera dieléctrica de permitividad $K_e\epsilon$ y radio R se coloca en un campo eléctrico contante. Determinar, el campo eléctrico en todas las regiones, la densidad de carga superficial inducida por la polarización del dieléctrico y el momento dipolar de la esfera
Solución
Teniendo en cuenta la simetría axial la solución para el flujo en el interior es

$$\Phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{6}$$

en el exterior

$$\Phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(B_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

De la condición de frontera en el infinito $\Phi \to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$, se puede ver que el B_l que no se anula es $B_1 = -E_0$. Los otros coeficientes se calculan por las condiciones de contorno para $r = a$
La componente tangencial de E

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{int}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{ext}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}$$

La componente normal de D

$$-\epsilon\frac{\partial\Phi_{int}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\epsilon_0\frac{\partial\Phi_{ext}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

cuando se sustituye 15 y (7), los polinomios de legendre es igual a cero para cualquier θ, sabemos que $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$A_1 \cancel{r\cos\theta} = E_0 \cancel{r\cos\theta}$$
$$\left(\cancel{B_l r^l} + \frac{C_1}{r^2} \right)\cos\theta = E_0\cos\theta$$
$$A_l = E_0 + \frac{C_1}{a^3}$$
$$A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad l \neq 1 \tag{8}$$

para la parte tangencial tenemos

$$\epsilon A_1 = -\varepsilon_0\left(E_0 + \frac{2C_1}{r^3} \right)$$
$$\epsilon l A_l = -\varepsilon_0 (l+1)\frac{C_l}{r^{2l+1}} \tag{9}$$

las ecuaciones 8 y 9 se satisfacen si $A_l = C_l = 0$ para todo $l \neq 1$, Los coeficientes vienen dados en función del campo eléctrico E_0

$$A_1 = -\left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right) E_0$$
$$C_1 = -\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0} \right) a^3 E_0$$

por lo tanto el potencial es

$$\Phi_{int} = -\left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right) E_0 r\cos\theta$$

$$\Phi_{ext} = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0} \right) a^3 E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

Φ dentro de la esfera el campo eléctrico es paralelo al campo que se aplico

$$E_{int} = \left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right) E_0$$

y fuera es equivalente al campo que se aplico E_0 más el campo de un dipolo, colocado en el centro de la esfera, y el momento dipolar es

$$p = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right) a^3 E_0$$

la polarización es

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right) E_0$$

La densidad superficial de carga de polarización es

$$\sigma_p = 213\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right) E_0$$

10. El volumen entre dos esferas conductoras concentricas de radios a y b ($a < b$) está lleno de un dieléctrico con permitividad no homogénea dada por

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{1 + Kr}$$

donde ϵ_0 y K son contantes, r es la coordenada radial. Se asume que el material es lineal. Una carga Q se coloca dentro de la superficie interior, mientras que la otra superficie se mantiene aterrizada. Encontrar:

a) El vector desplazamiento en la región $a < r < b$.

b) La capacidad del sistema

c) La densidad de carga de polarización en $a < r < b$

d) La densidad de carga superficial de polarización en $r = a$ y $r = b$.

Solución

a) La ley de Gauus en forma integral es

$$\oint D \cdot ds = q$$

como tiene geometría esférica donde Q es la carga y $a < r < b$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

b) El Desplazamiento eléctrico lo definimos como $D = \epsilon E + P$ donde la polarización en este problema es $P = 0$ y sustituyendo la permitividad dada por el problema, resulta que el campo eléctrico es

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(\frac{1 + Kr}{\epsilon_0}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1 + Kr)$$

Conociendo el campo eléctrico, podemos calcular el potencial

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_a^b \bar{E} \cdot dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}(1 + kr) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right) dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + k\ln r\right]_a^b \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{aa} + k\ln\frac{b}{a}\right]
\end{aligned}$$

La capacidad es

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{b}-\frac{1}{aa}+k\ln\frac{b}{a}}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{b-a}{ab}+k\ln\frac{b}{a}}=\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)+abk\ln\frac{b}{a}}$$

c) La polarización es

$$P=(\epsilon-\epsilon_0)E$$

Sustituyendo el campo eléctrico y la permitividad del dieléctrico

$$P=\left(\frac{\epsilon_0}{1+Kr}-\epsilon_0\right)\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1+Kr)=\frac{Q}{4\pi r^2}-\frac{Q}{4\pi r^2}-\frac{QKr}{4\pi r^2}$$

$$P=\frac{QK}{4\pi r}$$

entonces la de densidad de polarización es

$$\rho=-\nabla P$$

en coordenadas esféricas solo nos queda el termino de la parte radial

$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{QK}{4\pi r}\right)=\frac{QK}{4\pi}$$

d) La densidad de carga superficial se define como

$$\sigma=P\cdot\hat{n}=P\cos\theta$$

en este caso es perpendicular $\cos\theta=1$

$$\sigma=\frac{QK}{4\pi a}$$

y para $r=b$, $\cos\theta=-1$

$$\sigma=-\frac{QK}{4\pi b}$$

11. el potencial electroestatico dentro y fuera de la esfera es

$$\Phi_1=\sum_{n=0}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_2=\sum_{n=0}\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

en $r=0$ para el primer potencial

$$\Phi_1=\sum_{n=0}\left(A_n(0)+\frac{B_n}{0}\right)P_n(\cos\theta)=\infty$$

esto sucede por que es la superficie dentro de la esfera
en $r=\infty$ para el segundo potencial

$$\Phi_2=\sum_{n=0}\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

sabemos que $k^\infty=k$ para $k>1$

$$\Phi_2=CrP(\cos\theta)$$

el polinomio de Legendre $P_1(x) = x$, entonces

$$\Phi_2 = C_1 r \cos\theta$$

y en el radio de la esfera $r = a$ El potencial debe ser continuo en la superficie

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \qquad \Phi_2 = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \tag{10}$$

de expresiones encontradas para Φ_2 tenemos

$$Ea\cos\theta + \sum_{n=0} \frac{D_n}{a^{n+1}} P(\cos\theta) = \sum_{n=0} A_n a^n P(\cos\theta) \tag{11}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo θ, el coeficiente de cada función de Legendre debe ser igual

$$A_1 = -E + \frac{C_1}{a^3} \qquad A_n = \frac{C_n}{a^{2l+1}} \;\; n \neq 1 \tag{12}$$

el primer termino de 16 es por lo dicho anteriormente solo se remplaza, y derivado para obtener ecuación 15, respecto al radio

$$-\varepsilon_2 \left(EP_1(\cos\theta) + \sum_{n=0} (n+1) \frac{D_n}{a^{n+1}} P(\cos\theta) \right) = \varepsilon_1 \sum_{n=0} n A_n a^{n-1} P(\cos\theta)$$

de igual manera coeficiente de cada función de Legendre son

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_1 = -E - \frac{2C_1}{a^2} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} n A_n = -(n+1) \frac{2C_n}{a^{2n+1}} \;\; n \neq 1 \tag{13}$$

Las segundas ecuaciones en 17 y 18 se pueden satisfacer simultáneamente solo con $A_n = C_n = 0$ para todo $n \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E

$$A_l = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 E \tag{14}$$

El potencial es por lo tanto

$$E_1 = -\nabla\Phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad r < a$$

$$E_2 = -\nabla\Phi_2 = E + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \left[\frac{3(E \cdot r)r}{r^5} - \frac{E}{r^3} \right] \qquad r < a$$

12.

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

en $r = 0$ para el primer potencial

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} \left(A_n(0) + \frac{B_n}{0} \right) P_n(\cos\theta) = \infty$$

esto sucede por que es la superficie dentro de la esfera en $r = \infty$ para el segundo potencial

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

sabemos que $k^\infty = k$ para $k > 1$

$$\Phi_2 = CrP(\cos\theta)$$

el polinomio de Legendre $P_1(x) = x$, entonces

$$\Phi_2 = C_1 r \cos\theta$$

y en el radio de la esfera $r = R$ El potencial debe ser continuo en la superficie

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \qquad \Phi_2 = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \tag{15}$$

de expresiones encontradas para Φ_2 tenemos

$$ER\cos\theta + \sum_{n=0} \frac{D_n}{R^{n+1}} P(\cos\theta) = \sum_{n=0} A_n R^n P(\cos\theta) \tag{16}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo θ, el coeficiente de cada función de Legendre debe ser igual

$$A_1 = -E + \frac{C_1}{R^3} \qquad A_n = \frac{C_n}{R^{2l+1}} \;\; n \neq 1 \tag{17}$$

el primer termino de 16 es por lo dicho anteriormente solo se remplaza, y derivado para obtener ecuación 15, respecto al radio

$$-\varepsilon_2 \left(EP_1(\cos\theta) + \sum_{n=0} (n+1) \frac{D_n}{R^{n+1}} P(\cos\theta) \right) = \varepsilon_1 \sum_{n=0} nA_n R^{n-1} P(\cos\theta)$$

de igual manera coeficiente de cada función de Legendre son

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_1 = -E - \frac{2C_1}{R^2} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} nA_n = -(n+1) \frac{2C_n}{R^{2n+1}} \;\; n \neq 1 \tag{18}$$

Las segundas ecuaciones en 17 y 18 se pueden satisfacer simultáneamente solo con $A_n = C_n = 0$ para todo $n \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E

$$A_l = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E \tag{19}$$

El potencial es por lo tanto

$$E_1 = -\nabla \Phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \qquad r < R$$

$$E_2 = -\nabla \Phi_2 = E + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 \left[\frac{3(E \cdot r)r}{r^5} - \frac{E}{r^3} \right] \qquad r < R$$

13. De los ejercicios anteriores tenemos que el campo eléctrico incidente es

$$E = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

La polarización del diaelectrico es

$$p = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E$$

sustituyendo E

$$p = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

La densidad de carga en la superficie de la esfera es

$$\sigma(\theta) = n \cdot p$$

donde n es el vector normal $E_0 \cos\theta$ sustituyendo:

$$\sigma(\theta) = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\theta$$

donde $\cos\theta = 1$

$$\sigma(\theta) = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0$$

el momento dipolar eléctrico es

$$P = Vp = \frac{4}{3}\pi R^3 p$$

$$P = \frac{4\pi R^3 E_0 \varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

14. a) Las condiciones iniciales son.

$$\Phi = \Phi = k$$

el potencial de la esfera conductora es constante k y la densidad de carga σ es

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{20}$$

esta ecuación proviene de la ley de Gauss, el potencial para un punto fuera de la esfera esta dado por la ecuación 60

$$\sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{21}$$

como en un ejercicio anterior, si $r \to \infty$ Entonces

$$\Phi = -ErP_1(\cos\theta) = -Er\cos\theta \tag{22}$$

por la igualdad de coeficientes de los polinomios de Lagrange obtenemos que

$$C_0 = 0 \qquad C_1 = -E \qquad D_1 = Ea^2 \qquad D_n = C_n = 0, n > 1 \tag{23}$$

para el $P_n(\cos\theta) = \cos\theta$, cuando $n = 1$ tenemos, donde a es el radio de la esfera

$$\Phi = -Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\cos\theta \tag{24}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial a} \left(-Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\cos\theta \right) \tag{25}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 E \frac{3a^2}{r^2} \cos\theta \tag{26}$$

haciendo $a = -r$

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E \cos\theta \tag{27}$$

b) Suponga que el dipolo eléctrico $P = Pe_z$ es puesto en el origen de la esfera, y el potencial por r producido por el dipolo es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \tag{28}$$

por la ecuación 24 podemos ver que el P

$$P = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \tag{29}$$

a) De la solución de la ecuación de Laplace obtenemos los potenciales fuera y dentro de la cascara esférica dados por Φ_1 y Φ_2

$$\Phi_1 = \sum_{n=0} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta) \qquad r > R \tag{30}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0} a_n r^{n} P_n(\cos\theta) \qquad r < R \tag{31}$$

cuando $R = r$ el radio del potencial al cascaron es el mismo dentro y fuera $\Phi_1 = \Phi_2$

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 P_n(\cos\theta) \tag{32}$$

Por la ley de Gauss tenemos

$$\sigma(\theta) = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) \tag{33}$$

Derivando y para $n = 1$, Obtenemos

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} = a_1\cos\theta \tag{34}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \frac{3b_1\cos\theta}{r^3} \tag{35}$$

de la ecuación 32 y 33 tenemos

$$\sigma_0\cos\theta = \varepsilon_0 a_1\cos\theta$$

$$a_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{36}$$

y

$$\sigma_0\cos\theta = \varepsilon\frac{3b_1\cos\theta}{r^3}$$

$$b_1 = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0} \tag{37}$$

Por lo tanto

$$\Phi_1 = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \tag{38}$$

$$\Phi_2 = \frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0}\cos\theta \tag{39}$$

El campo eléctrico esta dado por

$$E = -\nabla\phi \tag{40}$$

el campo eléctrico afuera y dentro es

$$E_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right) = -\left(\frac{-2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta + \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}(-\operatorname{sen}\theta)\right) = \frac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta - \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\operatorname{sen}\theta \tag{41}$$

$$E_2 = -\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right) = -\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\theta - \frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(r\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \tag{42}$$

15. Se obtiene ecuación diferencial de Poisson si la función depende solo de R

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\rho(\phi)}{\varepsilon_0} \tag{43}$$

Para el caso en que $r < R$

$$\nabla^2_-\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{44}$$

y en $r > R$

$$\nabla^2_+\Phi = 0 \tag{45}$$

la solución de esta ecuación son los polinomios de Langrange.
En el caso del potencial dentro de la esfera es la carga puntual y el potencial de la esfera, como la esfera es finita, tenemos

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{46}$$

En el exterior el potencial es

$$\Phi_+ = \sum_{n_0} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{47}$$

en la frontera el potencial es

$$\Phi_- = \Phi_+ = V_0 \cos\theta$$

como indica el problema esto es para $r = R$, para $n = 0$, $P_0(\cos\theta) = 1$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A_0 = 0 \qquad A_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

y

$$\Phi_+ = \sum_{n_0} \frac{B_0}{r} \qquad B_0 = 0$$

para $n = 1$

$$\Phi_- = A_1 r P_1(\cos\theta)$$

el polinomio $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$V_0 \cos\theta = A_1 R \cos\theta$$

$$A_1 = \frac{V_0}{R}$$

y

$$\Phi_+ = \frac{B_1}{r^2} \cos\theta = V_0 \cos\theta \qquad B_1 = V_0 R^2$$

Sustituyendo A_0 y $A_1 \to n = 1$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0}{R} r^n P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0 r}{R} \cos\theta \tag{48}$$

ahora B_0 y B_1 en la otra ecuación

$$\Phi_+ = \frac{V_0 R^2}{r^{1+1}} P_1(\cos\theta)$$

$$\Phi_+ = \frac{V_0 R^2}{r^2} \cos\theta \tag{49}$$

Separación de variables en coordenadas Esféricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi} \tag{50}$$

Sistemas con simetría axial $\phi=\phi(r,\theta)$ se simplifica

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \tag{51}$$

Por separación de variables $\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{T\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT}{d\theta}\right)=K \tag{52}$$

R satisface

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-KR=0 \tag{53}$$

Si la solución es de la forma $R=\alpha r^l$ el resultado que se obtiene es $[l(l+1)-K]R=0$ por lo que $k=l(l+1)$

Al sustituir k en ec 52

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT_l}{d\theta}\right)-l(l+1)T_l \tag{54}$$

T_1 debe ser una cantidad finita univaluada y continua sobre el rango completo de θ, es posible demostrarlo si l es un entero positivo incluyendo el cero

$$l=0,1,2,3\dots$$

los T_1 se pueden identificar como los polinomios de Legrendre

$$\frac{1}{R_i}=\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{55}$$

Se sabe que es solución de la ecuación de Laplace por lo tanto $\phi=1/R_i$ y debe ser solución de ec 51

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l\left[l(l+1)P_l\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP_l}{d\theta}\right)\right] \tag{56}$$

El termino que esta entre corchetes es igual a cero para cada l. Al comparar con 54 T_l y P_l satisfacen a la misma ecuación diferencial por lo que T_l puede tomarse a lo mucho como una constante multiplicada por P_l se puede absorber cualquier constante tal en el factor $R(r)$ por lo que $T_l(\theta)=P_l(\cos\theta)$, ahora $R_l=rP_l(\cos\theta)$ la solución de 51 para cada l se puede expresar como la solución general

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{57}$$

La ecuación que R_l debe satisfacer de acuerdo con 53 es

$$r^2\frac{d^2R_l}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-l(l+1)R_l=0 \tag{58}$$

se resuelve mediante la forma $R_l=\alpha_l r^n$ donde α es constante y n es entero, al sustituir en la ecuación 58 se encuentra que se debe satisfacer $n(n-1)-l(l+1)=0$ se tienen dos soluciones $n=l$ y $-(l+1)$ de modo que la solución general de 58 es

$$R_l(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}} \tag{59}$$

donde A_l y B_l son constantes de integración. Al sustituir este resultado en 57 se obtiene la forma general de solución de Laplace para una situación axialmente simétrica

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{60}$$

3. Magnetoestatica

1. Supongamos que el campo magnético en alguna región tiene la forma

$$B = kz\hat{x}$$

(donde k es una constante). Encuentre la fuerza en un bucle cuadrado (lado a), en el plano yz y centrado en el origen, si lleva una corriente I, fluyendo en sentido contrario a las agujas del reloj, cuando mira hacia abajo el eje x.
Solución
La fuerza se define como

$$F = \int dq(v \times B) = \int (v \times B)\lambda dl = I \int dl \times B$$

la fuerza de los lados izquierdo y derecho es la misma pero de sentido contrario
La fuerza de la parte superior es horizontal, por lo tanto

$$F = IBa$$

sustituyendo el campo magnético

$$IBa = Ia\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{Ika^2}{2}$$

En la parte inferior es la misma

$$IBa = Ia\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{Ika^2}{2}$$

Sumando las fuerzas de los cuatro lados, obtenemos

$$F = Ika^2$$

2. (a) Un registro fonográfico lleva una densidad uniforme de *electricidad estática* σ. Si gira a una velocidad angular ω, ¿cuál es la densidad de corriente de superficie K a una distancia r del centro?
(b) Una esfera sólida cargada uniformemente, de radio R y carga total Q, se centra en el origen y gira a una velocidad angular constante ω sobre el eje z. Encontrar la densidad de corriente J en cualquier punto (r, θ, φ) dentro de la esfera

Solución :

a) En un movimiento circular, tenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$
$$v = \omega r \quad (61)$$

Si tenemos una región del espacio con una densidad de carga, no necesariamente uniforme, en la que el movimiento de cargas se puede representar por un campo vectorial de velocidades, para esa distribución de cargas en movimiento tenemos:

$$J = \rho v \quad (62)$$

donde ρ es la densidad de carga en un punto y v la velocidad de las cargas en ese punto.

$$\frac{K}{\rho} = \omega r$$
$$K = \rho\omega r$$

b) la velocidad angular ω queda determinada la distribución de velocidades en todos los puntos del sólido rígido en rotación. La expresión 61 puede escribirse en la forma

$$v = \omega \times r = \omega r \operatorname{sen}\theta \quad (63)$$

sabemos que la superficie es esférica por lo que la densidad es $\rho = \dfrac{3Q\pi R^3}{4}$, sustituyendo en 62

$$J = \frac{3Q\pi R^3}{4}\omega r \operatorname{sen}\theta$$

3. Para una configuración de cargas y corrientes confinadas dentro de un volumen V, muestre que

$$\int_V J d\tau = \frac{dp}{dt}$$

Donde p es el momento dipolar total, *Hint* evalué $\int_v \nabla \cdot (xJ) d\tau$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_v \rho x d\tau \\ &= \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) x d\tau \\ &= -\int (\nabla \cdot J) x d\tau \end{aligned}$$

Dado la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (xJ) &= x(\nabla \cdot J) + J \cdot (\nabla x) \\ &= x(\nabla \cdot J) + J_x \end{aligned}$$

por lo que la integral es

$$\int_v (\nabla \cdot J) x d\tau = \int_v \nabla \cdot (xJ) d\tau - \int_v J_x d\tau$$

por el teorema de la divergencia, como J esta contenida en v, es cero

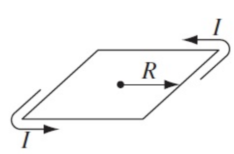
$$\int_v (\nabla \cdot J) x d\tau = -\int_v J_x d\tau$$

entonces

$$\frac{dp}{dt} = \int J d\tau$$

con lo cual queda demostrado

4. *a*) Encuentre el campo magnético en el centro de un ciclo cuadrado, que lleva una corriente constante I. Sea R la distancia de centro a lado (Figura).
   b) Encuentre el campo en el centro de un polígono regular de n lados, llevando una corriente constante I. Nuevamente, sea R la distancia desde el centro a cualquier lado.
   c) Verifique que su fórmula se reduzca al campo en el centro de un circuito circular, en el límite $n \to \infty$.



Solución:

a)

$$dl\,\mathrm{sen}\,\theta = dl\cos\theta$$

tenemos que $l = s\tan\theta$, $dl = s\sec^2\theta d\theta$ y $s = \imath\cos\theta$ el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl}{\imath}\cos\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_1=-45}^{\theta_2=45}\left(\frac{\cos^2\theta}{R^2}\right)\left(\frac{R}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\theta_1=-45}^{\theta_2=45}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\mathrm{sen}(45) - \mathrm{sen}(-45)) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi R}
\end{aligned}$$

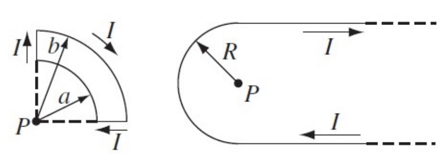
b) el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B &= \frac{n\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl}{\imath}\cos\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\left(\frac{\cos^2\theta}{R^2}\right)\left(\frac{R}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \frac{n\mu_0 I}{4\pi R}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \frac{n\mu_0 I}{2\pi R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

c) para ángulos muy pequeños $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$ del inciso anterior, diciendo que $\theta = \dfrac{n}{\pi}$ tenemos

$$\frac{\cancel{n}\mu_0 I}{2\cancel{\pi}R}\left(\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{n}}\right) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

5. Encuentre el campo magnético en el punto P para cada una de las configuraciones de corriente constante que se muestran en la Figura.



(a) (b)

Solución:

a) el campo magnético en las rectas no contribuye en campo magnético ya que es paralelo al punto P, $\operatorname{sen} 0 = 0$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_b^a \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_b^a \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \end{aligned}$$

b) Las lineas rectas, que terminan punteadas se van al infinito

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_\infty^R \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_\infty^R \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{aligned}$$

Las contribución del campo magnético, el los cuartos de los círculos es

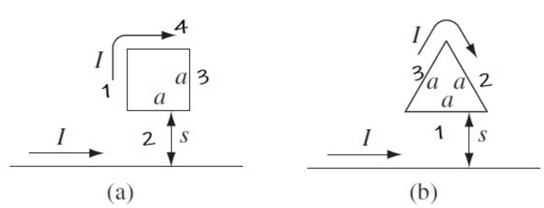
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_0^{\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4R} \end{aligned}$$

el campo magnético total es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$$

6. *a*) Encuentre la fuerza en un circuito cuadrado colocado como se muestra en la Fig (a), cerca de un alambre recto infinito. Tanto el lazo como el cable llevan una corriente constante I.

   b) Encuentre la fuerza en el bucle triangular en la Fig.(b).



Solución:

a) como la corriente va el sentido contrario en los lados 1 y 2, las fuerzas se cancelan en la parte de arriba, tenemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_\infty^s \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2}\right]_\infty^s \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \end{aligned}$$

la fuerza se define como $F = IaB$

$$F_1 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right) Ia = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s}$$

en la parte de abajo

b)

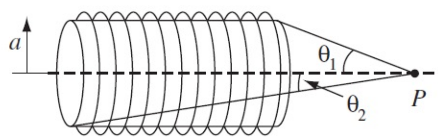
$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_\infty^{s+a} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2}\right]_\infty^{s+a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} Ia = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)}$$

La fuerza total es

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)} + \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s} = (2s+a)\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s(s+a)}$$

7. Encuentre el campo magnético en el punto P en el eje de un solenoide enrollado firmemente (bobina helicoidal) que consiste en n giros por unidad de longitud enrollado alrededor de un tubo cilíndrico de radio a y que lleva la corriente I Exprese su respuesta en términos de θ_1 y θ_2 (así es más fácil). Considera que los giros son esencialmente circulares, y usa el resultado de Ex. 5.6. ¿Cuál es el campo en el eje de un solenoide infinito (infinito en ambas direcciones)?



Solución

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl}{r^2} \cos\theta$$

observación dl es perpendicular a r

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\cos\theta}{r^2} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{I\mu_0 a \cos\theta}{2r^2}$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $r = \sqrt{a^2+z^2}$

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

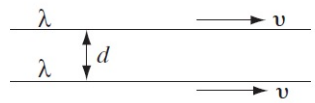
donde $z = a\cot\theta$ entonces $dz = -\csc^2\theta d\theta = -\dfrac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ además $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2+z^2}} = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta}{a^2}$ Sustituyendo

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\frac{a^2\operatorname{sen}^3\theta}{a^3\operatorname{sen}^2\theta}ad\theta = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

para un solenoide infinito

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = \frac{\mu_0 nI}{2}[1-(-1)] = \mu_0 nI$$

8. Suponga que tiene dos líneas rectas de cargas infinitas λ, a una distancia d, moviéndose a una velocidad constante v como se muestra en la figura. ¿Qué tan grande tendría v ¿Esta en orden para que la atracción magnética equilibre la repulsión eléctrica? Calcula el número real. ¿Es esta una velocidad razonable?



Solución

Una carga de línea que viaja por un cable a velocidad v. Constituye una corriente

$$I = \lambda v$$

el campo magnético es

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\int_{\infty}^{d}\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{\infty}^{d} \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \end{aligned}$$

La fuerza dirigida a (1), cuando las corrientes son alineadas, es

$$F = I_2\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)\int dl$$

la Fuerza por unidad de longitud es

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

sustituyendo las corrientes

$$f_m = \frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}$$

Calculando el campo eléctrico

$$EdA = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$E_0^{2\pi r} dA = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

sabemos $F = E/\lambda$

$$f_e = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$f_m = f_e$$

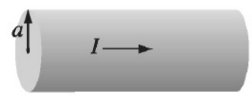
$$\frac{\mu_0 \cancel{\lambda^2} v^2}{\cancel{2\pi d}} = \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{2\pi d}\epsilon_0}$$
$$\mu v^2 = \frac{1}{\epsilon}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

donde $c \approx 3 \times 10^8$, tiene que se mayor que la velocidad de la luz, hasta la fecha, no es razonable, casi nada viaja a la velocidad de la luz

9. Una corriente constante fluye por un largo cable cilíndrico de radio a (como se muestra en la Figura). Encuentre el campo magnético, tanto dentro como fuera del cable, si

   (a) La corriente se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior del cable.

   (b) La corriente se distribuye de tal manera que J es proporcional a s, la distancia desde el eje.



Solución:

(a)
$$\oint B ds = \mu I$$

la superficie es un cilindro $S = 2\pi rl$, por lo que el campo magnetico es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

para $s > a$, y para $s < a$, $B = 0$

(b) La corriente se define como

$$I = \int J da$$

Supongamos que la densidad de corriente en el cilindro es proporcional a la distancia del eje,

$$J = kr$$

Para alguna contante k entonces

$$I = \int J da = \int kr da$$

pero la superficie es $a = 2\pi r^2$

$$I = k \int r(2\pi r) dr = 2\pi k \int r^2 dr = \frac{2\pi k r^3}{3}$$
$$k = \frac{3I}{2\pi r^3}$$
$$I_e = k \int^s r(2\pi r) dr = 2\pi k \int^s r^2 dr = \frac{2\pi k s^3}{3}$$
$$k = \frac{3I_e}{2\pi s^3}$$

igualando las expresiones k

$$\frac{\cancel{3}I}{\cancel{2\pi}r^3} = \frac{\cancel{3}I_e}{\cancel{2\pi}s^3}$$

$$\frac{I}{r^3} = \frac{I_e}{s^3}$$

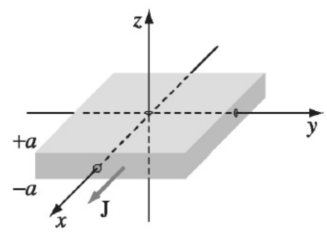
$$I_e = \frac{s^3}{r^3} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I s^2}{2\pi r^3} \hat{\phi}$$

para $r >> s$ tenemos que $I_e \approx I$ en el caso contrario $r < s$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

10. Una losa gruesa que se extiende desde $z = -a$ to $z = a$ (e infinita en las direcciones xy) lleva una corriente de volumen uniforme $J = J\hat{x}$ (como se muestra en la figura). Encuentre el campo magnético, en función de z, tanto dentro como fuera de la losa



Solución

El campo magnético se expresa

$$Bdl = \mu_0 I$$

sabemos que la corriente

$$I = \int Jda = \int Jzdl$$

donde $a = dl * z$, sustituyendo I

$$B \int dl = \mu_0 Jz \int dl$$

$$B = \mu_0 zJ$$

el campo magnético va en la dirección $\hat{y}$ para $z < 0$, y $-\hat{y}$ para $z > 0$ para dentro y fuera de la superficie $-a < z < a$, la corriente es

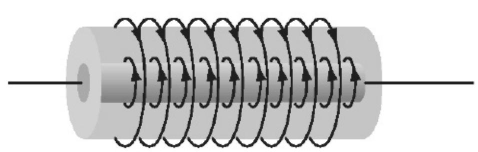
$$I_e = \mu_0 aJ$$

sustituyendo

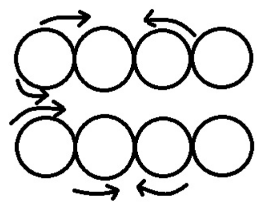
$$B = \mu_0 aJ\hat{y} \qquad z > a$$

$$B = -\mu_0 aJ\hat{y} \qquad z > -a$$

11. Dos solenoides coaxiales largos llevan cada uno la corriente I, pero en direcciones opuestas, como se muestra en la figura. El solenoide interno (radio a) tiene n_1 vueltas de longitud y el exterior (radio b) tiene n_2 Encuentre B en cada una de las tres regiones; (i) dentro del solenoide interno, (ii) entre ellos, y (iii) fuera de ambos



Solución:



fuera de ellos el campo magnético es cero, $B = 0$
entre ellos,

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_e$$

$$\bar{B}d\bar{l} = Bl\cancelto{1}{\cos 180^\circ}$$

La corriente encerrada es el numero de espiras por la corriente que pasa en cada una de ellas,

$$\int Bdl = \mu_0 n_2 i$$

dentro del solenoide

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_e$$

$$\int Bdl = \mu_0 I_e$$

sabemos tiene la misma corriente, pero el campo magnético en el solenoide exterior se dirige $\hat{z}$ y el en interior va $-\hat{z}$

$$\int Bdl = \mu_0 I_e$$

indicado que In_2 va $\hat{z}$ y In_1 va hacia $-\hat{z}$

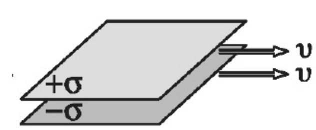
$$\int Bdl = \mu_0 I(n_2 - n_1)$$

12. Un capacitor grande de placas paralelas con carga superficial σ uniforme en la placa superior y $-\sigma$ en la inferior se mueve con una velocidad constante v, como se muestra en la Figura.

    (a) Encuentre el campo magnético entre las placas y también por encima y por debajo de ellas.

    (b) Encuentre la fuerza magnética por unidad de área en la placa superior, incluida su dirección.

    (c) ¿A qué velocidad v equilibraría la fuerza magnética la fuerza eléctrica?



Solución:
La densidad superficial de corriente viene dada por:

$$K = \sigma v$$

sabemos que la corriente es

$$I = \int k dl$$

sustituyendo en la expresión del campo

$$\begin{aligned}
\oint B dl &= Bl \\
&= \mu_0 I \\
&= \mu_0 \sigma v \int dl \\
Bl &= \mu_0 \sigma v l \\
B &= \mu_0 \sigma v
\end{aligned}$$

este es el campo entre las placas, Encima y por debajo, el campo magnético es $B = 0$, ya que se cancela

$$F_B = LI \times B$$

el campo magnético de una placa sobre otra, por la ley de Ampere

$$B = \frac{\mu I}{2\pi d}$$

por lo que la magnitud de la fuerza magnética es

$$\begin{aligned}
F_B &= \frac{\mu I^2 L}{2\pi d} \\
&= \frac{\mu L}{2\pi d}\sigma^2 v^2 \qquad (64)
\end{aligned}$$

De la ley de Gauss para el campo eléctrico

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 d}$$

La fuerza debido al campo eléctrico es

$$F_e = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 d}\sigma L \qquad (65)$$

de 65 y 64 obtenemos la velocidad

$$\frac{\sigma^2}{2\pi\epsilon_0 d}L = \frac{\mu L}{2\pi d}\sigma^2 v^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

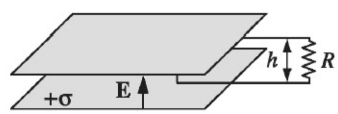
que es la velocidad de la luz

4. Electrodinámica

1. Una batería de emf ε y resistencia interna r está conectada a una resistencia de carga variable, R. Si desea entregar la máxima potencia posible a la carga, ¿qué resistencia R debería elegir? (Por supuesto, no puede cambiar ε y r).

   Solución:
   De la ley de ohm $\varepsilon = IR$,
   $$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$
   La potencia eléctrica se puede calcular como
   $$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$
   sustituyendo la corriente I
   $$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$$
   Para saber cual es el valor máximo de la potencia, derivamos e igualamos a cero
   $$\frac{dP}{dt} = \frac{\varepsilon^2[(R+r)^2 - 2R(R+r)]}{(R+r)^4} = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} - \frac{2R\varepsilon^2}{(R+r)^3} = 0$$
   $$\varepsilon^2\,(R+r-2R) = 0$$
   para obtener el máximo valor $R = r$

2. Un bucle rectangular de cable está situado de manera que un extremo (altura h) está entre las placas de un condensador de placa paralela (Figura), orientado en paralelo al campo E. El otro extremo está fuera, donde el campo es esencialmente cero. ¿Qué es la fem en este bucle? Si la resistencia total es R, ¿qué flujos actuales? Explique. [Advertencia: esta es una pregunta con trampa, así que ten cuidado; Si has inventado una máquina de movimiento perpetuo, es probable que haya algo mal con ella.]



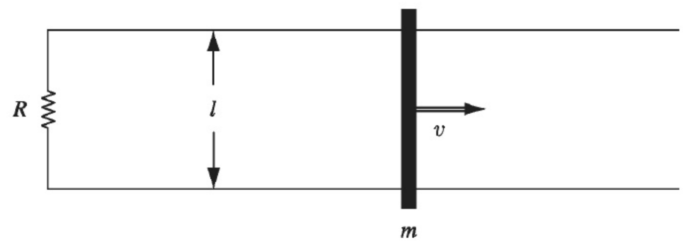
   Solución:
   para este problema el potencial es
   $$\phi = \oint E \cdot dl$$
   esto es $\Phi = 0$ se puede ver que, de la ley de gauss
   $$\phi = \oint E \cdot dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$$
   entre las placas se esperaría que fuera σ/ϵ, y fuera es cero. por lo tanto la corriente es cero

3. Una barra de metal de masa m se desliza sin fricción en dos carriles conductores paralelos a una distancia de l aparte (Figura). Una resistencia R está conectada a través de los rieles, y un campo magnético uniforme B, que apunta a la página, llena toda la región.

   a) Si la barra se mueve a la derecha a velocidad v, ¿cuál es la corriente en la resistencia? ¿En qué dirección fluye?

   b) ¿Cuál es la fuerza magnética en la barra? ¿En qué dirección? item Si la barra comienza con la velocidad v_0 en el momento $t = 0$, y se deja deslizar, ¿cuál es su velocidad en un momento posterior t?

   c) La energía cinética inicial de la barra era, por supuesto, $\frac{1}{2}mv_0^2$ Comprobar que la energía entregado a la resistencia es exactamente $\frac{1}{2}mv_0^2$



Solución:

a) de la ley de ohm

$$\phi = IR$$

donde el potencial por la ley de Lenz es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dx}{dt}$$

sabemos que dx/dt es la velocidad
sustituyendo el potencial en la ley de Ohm, obtenemos la corriente

$$I = \frac{Blv}{R}$$

La ley de lenz, tiene el signo negativo, asi que la dirección es hacia abajo

b) sabemos que la fuerza es

$$F = \int dq(v \times B) = \int (v \times B)\lambda dl = I \int dl \times B$$

sustituyendo I

$$F = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

y se dirige hacia la izquierda

c) por la segunda ley de newton

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2 m}{R} dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int dt$$

$$v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$$

d) sabemos que la potencia es w/t y I^2R

$$\frac{dW}{dt} = I^2R$$

sustituyendo I

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{B^2l^2v^2}{R^2}R$$

sustituyendo v

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}$$

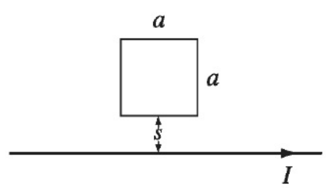
$$dW = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}dt$$

resolviendo la ecuación diferencial

$$W = -\frac{B^2l^2}{R}(v_0)^2\int e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}dt$$

$$W = -\frac{\cancel{B^2l^2}}{\cancel{R}}(v_0)^2\left[-\frac{m\cancel{R}e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}}}{2\cancel{B^2l^2}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}m(v_0)^2$$

4. Un lazo cuadrado de cable (lado a) se encuentra en una mesa, a una distancia de un cable recto muy largo, que lleva un I actual, como se muestra en la Figura.



a) Encuentra el flujo de B a través del bucle.

b) Si alguien ahora saca el lazo directamente del cable, a velocidad v, ¿qué se genera emf? ¿En qué dirección (hacia la derecha o hacia la izquierda) hace el flujo de corriente?

c) ¿Qué pasa si el bucle se tira a la derecha a velocidad v?

Solución

a) Hacemos una superficie gausiana sobre el cable que lleva la corriente I, el campo es

$$\int_0^{2\pi s} Bdl = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

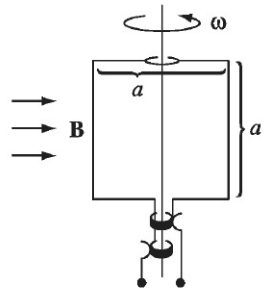
entonces el flujo es

$$\Phi = \int_s^{s+a} Bdl$$

sustituyendo B

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_s^{s+a}\frac{ds}{s}\\ &= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)\end{aligned}$$

5. Un bucle cuadrado (lado a) se monta en un eje vertical y se gira a velocidad angular ω vea la figura. Un campo magnético uniforme B apunta a la derecha. Encuentre el $\varepsilon(t)$ para este generador de corriente alterna



Solución:
El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = B \cdot a = Ba^2 \cos \omega t$$

de la ley de lenz

$$\begin{aligned} V(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= Ba^2 \omega \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

6. Un solenoide largo, de radio a, es impulsado por una corriente alterna, de modo que el campo interior es sinusoidal: $B(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{z}$. Se coloca un bucle circular de alambre, de radio $a/2$ y resistencia R, dentro del solenoide, y coaxial con él. Encontrar la corriente inducida en el bucle, en función del tiempo.
Solución:
El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = B \cdot a = Ba \cos \theta \tag{66}$$

en este caso la superficie es área del un circulo de radio $a/2$, $a = \pi(a^2/4)$ sustituyendo en 66 el área y el campo magnético

$$\Phi = \frac{\pi a^2 B_0 \cos \omega t}{4}$$

de la ley de lenz sabemos que el potencial es la variación del flujo

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2 B_0}{4}(-\omega \operatorname{sen} \omega t) \\ &= \frac{\pi a^2 B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t}{4} \end{aligned}$$

de la ley de Ohm, $V = IR$ podemos obtener la corriente, sustituimos el potencial obtenido

$$I = \frac{\pi a^2 B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t}{4R}$$

7. Un bucle cuadrado de alambre, con lados de longitud a, se encuentra en el primer cuadrante del plano xy, con una esquina en el origen. En esta región, hay un campo magnético no uniforme dependiente del tiempo $B(y,t) = ky^3t^2\hat{z}$ (donde k es una constante). Encuentra el emf inducido en el bucle.
Solución:

El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = Bs$$

sumando el flujo de toda la superficie

$$d\Phi = Bds$$

como el campo es función de x, y y como es un cuadrado de lados a entonces $ds = dxdy$, $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq a$

$$\begin{aligned} \Phi &= B\int_0^a dx \int_0^a dy \\ &= kt^2 \int_0^a dx \int_0^a y^3 dy \\ &= kt^2(a)\frac{a^4}{4} \\ &= \frac{kt^2a^5}{4} \end{aligned}$$

La variación del flujo obtenemos la fuerza electromotriz

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{kta^5}{2} \end{aligned}$$

8. Un solenoide largo con un radio de a y n vueltas por unidad de longitud lleva un $I(t)$ dependiente del tiempo en la dirección $\hat{\phi}$. Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) a una distancia s del eje (tanto dentro como fuera del solenoide), en la aproximación cuasiestática
Solución:
dentro

$$\Phi = BS$$

Donde la superficie es un circulo de radio s

$$\Phi = B\pi s^2$$

sabemos que el campo magnético se expresa

$$\oint BdS = \mu I$$

sustituyendo el campo magnético para n espiras

$$\Phi = \mu n I \pi s^2$$

Por otra parte el potencial eléctrico es

$$V = \oint Edl$$

$$V = 2\pi s E$$

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

sustituyendo

$$2\pi s E = \mu n \pi s^2 \frac{dI}{dt}$$

$$E = \frac{\mu n s}{2}\frac{dI}{dt}$$

fuera

$$\Phi = B\pi s^2$$

sustituyendo el campo magnético para n espiras

$$\Phi = \mu n I \pi a^2$$

Por otra parte el potencial eléctrico es

$$V = \oint E dl$$

$$V = 2\pi a E$$

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

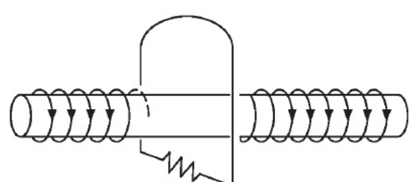
sustituyendo

$$2\pi a E = \mu n \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

$$E = \frac{\mu n a}{2}\frac{dI}{dt}$$

9. Un largo solenoide de radio a, que lleva n vueltas por unidad de longitud, se enrolla mediante un cable con resistencia R, como se muestra en la Figura

   - Si la corriente en el solenoide aumenta a una velocidad constante ($dl/dt = k$), ¿qué corriente fluye en el bucle y de qué manera (izquierda o derecha) pasa a través de la resistencia?
   - Si el I actual en el solenoide es constante pero el solenoide se saca del bucle (hacia la izquierda, a un lugar alejado del bucle), ¿qué carga total pasa a través de la resistencia?



Solución

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

observación dl es perpendicular a r

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\theta}{r^2}\int_0^{2\pi a} dl = \frac{I\mu_0 a\cos\theta}{2r^2}$$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $r = \sqrt{a^2+z^2}$

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

donde $z = a\cot\theta$ entonces $dz = -\csc^2\theta d\theta = -\dfrac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ además $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2+z^2}} = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta}{a^2}$ Sustituyendo

$$B = -\frac{\mu_0 n I}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\frac{a^2\operatorname{sen}^3\theta}{a^3\operatorname{sen}^2\theta} a d\theta = -\frac{\mu_0 n I}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1}\operatorname{sen}\theta\theta = \frac{\mu_0 n I}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

para un solenoide infinito

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = \frac{\mu_0 n I}{2}[1 - (-1)] = \mu_0 n I$$

El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

$$\Phi = AB\cos\theta$$

sustituyendo el campo magnético, y el area $A = \pi a^2$

$$\Phi = \pi a^2 \mu_0 n I$$

y la fuerza electromotriz viene dada por la ley le lenz

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \pi a^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

y La corriente se define como

$$I = \int J da$$

Supongamos que la densidad de corriente en el cilindro es proporcional a la distancia del eje,

$$J = kr$$

Para alguna contante k entonces

$$I = \int J da = \int k r da$$

$$\varepsilon = \pi a^2 \mu_0 n k$$

este potencial lo sustituimos en la ley de ohm, y así obtener la corriente

$$I = \frac{\pi a^2 \mu_0 n k}{R}$$

10. Un pequeño bucle de cable (radio a) se mantiene a una distancia z sobre el centro de un bucle grande (radio b), como se muestra en la Figura. Los planos de los dos bucles son paralelos y perpendiculares al eje común.

    a) Supongamos que los flujos actuales de I en el bucle grande. Encuentra el flujo a través del pequeño bucle. (El pequeño bucle es tan pequeño que puede considerar que el campo del gran bucle es esencialmente constante).
    b) Supongamos que los I corrientes fluyen en el pequeño bucle. Encuentra el flujo a través del bucle grande. (El pequeño bucle es tan pequeño que puede tratarlo como un dipolo magnético).
    c) Encuentra las inductancias mutuas, y confirma que $M_{12} = M_{21}$

    Solución:

    a) Para calcular el campo magnético, utilizamos la ley de Biot-Savart

    $$B = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi a} \frac{dl}{r}\cos\theta$$

    dl y r, son perpendiculares

    $$B = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi a} \frac{2\pi b(\cos\theta)}{r} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

    El flujo magnético, son la cantidad de lineas de campo que atraviesan una superficie, la definimos

    $$\Phi = AB\cos\theta$$

    sustituyendo el campo magnético, y el area $A = \pi a^2$

    $$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\pi a^2 b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

b)

$$A_{dip}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m \operatorname{sen}\theta}{r^2}\hat{\phi}$$

El campo magnifico

$$B_{dip} = \nabla \times A = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\hat{\phi})$$

donde m es $I\pi a^2$, integrando sobre la tapa

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \bar{B}\cdot d\bar{a} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2}{r^3}\int (2\cos\theta)(r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi) \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{r}\int_0^\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
\text{donde } r = \sqrt{b^2+z^2} & \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{\sqrt{b^2+z^2}}\int_0^\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{\sqrt{b^2+z^2}}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^\theta \\
\text{tenemos que } \operatorname{sen}\theta = b/r & \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{2\sqrt{b^2+z^2}}\frac{b^2}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{2\sqrt{b^2+z^2}}\frac{b^2}{b^2+z^2} \\
&= \frac{\mu_0 I \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

c) dividiendo por I

$$M_{1,2} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}} = M_{2,1}$$

11. Encuentre la autoinducción por unidad de longitud de un solenoide largo, de radio R, llevando n vueltas por unidad de longitud
    Solución:
    la integral de B alrededor de una trayectoria circular de radio R

    $$Bdl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl = \mu_0 I$$

    para n espiras, tenemos

    $$B = \mu_0 n I$$

    Sabemos que el flujo son las lineas de un campo vectorial que pasan sobre una superficie, en este caso es el el volumen de un cilindro, que tiene círculos de área πR^2, en una longitud l

    $$\Phi = B \cdot a = \mu_0 n I(\pi R^2)(nl)$$

    $$\Phi = \mu_0 n^2 I \pi l R^2$$

    La autoinducción viene dada por $\Phi = lI$, por lo que la autoinducción por unidad de longitud es

    $$L = \cancel{l}I = \mu_0 n^2 \pi \cancel{l} R^2$$

    $$L = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

12. suponga

$$\bar{E}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(r - vt)\hat{r}; \qquad \bar{B}(x,t) = 0$$

Demuestre que estos campos satisfacen todos Las ecuaciones de Maxwell, y determinan ρ y J. Describe la situación física que da origen a estos campos.

Solución:

Este campo es como el de una carga puntual en el origen, hacia una superficie esférica de radio vt, fuera de la superficie el campo es cero, el cascaron que carga $-q$ Calculando la divergencia del campo eléctrico, aplicando la regla del producto

$$\nabla \cdot E = \theta(vt - r)\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\nabla \cdot \theta(vt - r)$$

Sabemos que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(r)$$

, y en el segundo termino θ es función solo de r y

$$\nabla \cdot E = \theta(vt - r)\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt - r)$$

$$\nabla \cdot E = \theta(vt - r)\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(4\pi\delta^3(r)) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt - r)$$

$$\nabla \cdot E = \theta(vt - r)\frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(r) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt - r)$$

por otra parte

$$\delta^3(r)\theta(vt - r) = \delta^3(r)\theta(t)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta(vt - r) = -\delta(vt - r) \tag{67}$$

de la ley de Gauss

$$\rho = \epsilon\nabla \cdot E$$

sustituyendo

$$\rho = q\delta^4(r)\theta(r) - \frac{q}{4\pi r^2}\delta(vt - r)$$

de la ley de Maxwell-Amper

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 J + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

si $\nabla \times \bar{B} = 0$ entonces

$$J = -\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

sustituyendo el campo eléctrico

$$J = -\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(r - vt)\right)\hat{r}$$

y de 67 tenemos

$$J = \frac{vq}{4\pi r^2}\delta(r - vt)\hat{r}$$

13. Una cáscara esférica de radio perfectamente conductora gira alrededor del eje z con velocidad angular ω, en un campo magnético uniforme $B = B_0\hat{z}$. Calcula la fem desarrollada entre el polo norte y el ecuador. [Respuesta $\frac{1}{2}B_0\omega a^2$

Solución:

$$\begin{aligned} F &= q(\bar{v} \times \bar{B}) \\ &= vB\operatorname{sen}\theta\hat{z} \\ &= \omega avB\operatorname{sen}\theta(\hat{\phi} \times \hat{z}) \end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que

$$\varepsilon = \int F dl$$

donde $dl = ad\theta\hat{\theta}$ sustituyendo f y dl

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega a^2 B \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\ &= \omega a^2 B \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right] 0^{\pi/2} \\ &= \omega a^2 B \left[\frac{\cancelto{=1}{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}}{2} - \frac{\cancelto{=0}{\operatorname{sen}^2 0}}{2}\right] \\ &= \frac{a^2 B\omega}{2} \end{aligned}$$