Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Academia de Matemáticas y Física

Métodos Matemáticos de la física

Presenta:
Palomares Maldonado Héctor Miguel

Enero - Mayo 2019

.

Índice

1. Análisis Vectorial

3.2.2 Pruebe que

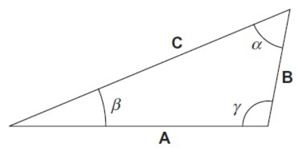
$$(A \times B) \cdot (A \times B) = (AB^2) - (A \cdot B)^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
(A \times B) \cdot (A \times B) &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}A_j B_k A_l B_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})A_j B_k A_l B_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km}A_j B_k A_l B_m - \delta_{jm}\delta_{kl}A_j B_k A_l B_m \\
&= A_l A_l B_m B_m - (A_m B_m)(B_l A_l) \\
&= (AB^2) - (A \cdot B)^2
\end{aligned}$$

3.2.7 La inducción magnética esta definida por la fuerza de Lorentz

$$F = q(v \times B)$$



Llevando a cabo tres experimentos, encontramos que si

$$v = \hat{e}_x \quad \frac{F}{q} = 2\hat{e}_z - 4\hat{e}_y$$

$$v = \hat{e}_y \quad \frac{F}{q} = 4\hat{e}_x - \hat{e}_z$$

$$v = \hat{e}_z \quad \frac{F}{q} = \hat{e}_y - 2\hat{e}_x$$

De los resultados de estos tres experimentos separados se calcula la inducción magnética B
Solución

$$v \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_k \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (\hat{e}_y B_z - \hat{e}_z \hat{e}_y)\hat{x} - (\hat{e}_x B_z - \hat{e}_z B_x)\hat{j} + (\hat{e}_x B_y - \hat{e}_y B_x)\hat{k}$$

entonces

$$(\hat{e}_z \hat{e}_y - \hat{e}_y B_z) = 2\hat{e}_z - 4\hat{e}_y$$

$$\hat{e}_x B_z - \hat{e}_z B_x = 4\hat{e}_x - \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_y B_x - \hat{e}_x B_y = \frac{F}{q} = \hat{e}_y - 2\hat{e}_x$$

las igualdades se cumplen si y solo si

$$B_x = 1 \quad B_y = 2 \quad B_z = 4$$

por lo tanto

$$B = \hat{x} + 2\hat{y} + 4\hat{z}$$

3.2.13 Pruebe que

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
[(A \times B) \cdot (C \times D)]_i &= (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \cdot (\varepsilon_{ilm} C_l D_m) \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} A_j B_k C_l D_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} A_j B_k C_l D_m - \delta_{jm}\delta_{kl} A_j B_k C_l D_m \\
&= A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m \\
&= C_l D_m (A_l B_m - A_m B_l) \\
&= (C_l D_m)(A_l B_m) - (C_l D_m)(A_m B_l) \\
&= (A_l C_l)(B_m D_m) - (A_m D_m)(B_l C_l) \\
&= (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)
\end{aligned}$$

3.5.8 Mostrar, componentes diferenciales son

a) $\dfrac{d}{dt}(A \cdot B) = \dfrac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \dfrac{dB}{dt}$

b) $\dfrac{d}{dt}(A \times B) = \dfrac{dA}{dt} \times B + A \times \dfrac{dB}{dt}$

Al igual que la derivada del producto de dos funciones algebraicas.

Solución:

a) veamos

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA_x}{dt} B_x + A_x \frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt} B_y + A_y \frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt} B_z + A_z \frac{dB_z}{dt}$$

por otra parte

$$\frac{dA}{dt} \cdot B = \frac{dA_x}{dt} B_x + \frac{dA_y}{dt} B_y + \frac{dA_z}{dt} B_z$$

y

$$\frac{dB}{dt} \cdot A = \frac{dB_x}{dt} A_x + \frac{dB_y}{dt} A_y + \frac{B_z}{dt} A_z$$

observemos que tienen los mismos términos entonces

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}$$

b) veamos

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA_x}{dt} \times B_x + A_x \times \frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt} \times B_y + A_y \times \frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt} \times B_z + A_z \times \frac{dB_z}{dt}$$

por otra parte

$$\frac{dA}{dt} \times B = \frac{dA_x}{dt} \times B_x + \frac{dA_y}{dt} \times B_y + \frac{dA_z}{dt} \times B_z$$

y

$$\frac{dB}{dt} \times A = \frac{dB_x}{dt} \times A_x + \frac{dB_y}{dt} \times A_y + \frac{B_z}{dt} \times A_z$$

observemos que tienen los mismos términos entonces

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$$

3.5.9 Pruebe

$$\nabla \cdot \bar{A} \times \bar{B} = \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) &= \partial_i \epsilon_{ijk} A_i B_j \\
&= \epsilon_{ijk} \partial_i A_j B_k \\
&= \epsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \epsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\
&= B_k \epsilon_{ijk} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k \\
&= \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A}(\nabla \times \bar{B})
\end{aligned}$$

3.5.10 el momento angular clásico esta dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ donde $\vec{p}$ es el momento lineal para la mecánica clásica a la mecánica cuántica se remplaza $\vec{p}$ por el operador $i\vec{\nabla}$. Mostrar que el operador momento angular en mecánica cuántica tiene componentes

$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Solución:

$$\vec{L} = ir \times \nabla = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{i} - i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{j} - i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{k} \tag{2}$$

el vector unitario correspondientes $x :: \hat{i}$, $y :: \hat{j}$ y $z = \hat{k}$ por lo que obtenemos

$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

3.5.11 Usando el operador momento angular definido en el ejercicio anterior mostrar que se satisfacen las relaciones

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = iL_z \qquad [L_y, L_z] = L_y L_z - L_z L_y = iL_x \qquad [L_z, L_x] = L_z L_x - L_x L_z = iL_y \tag{3}$$

Solución :
Usando ecuación 2

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$$

$$[-i(y\partial_z - z\partial_y), -i(z\partial_x - x\partial_z)] = -\left[(y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z) - (z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y)\right]\phi$$

$$= y\partial_z z\partial x\phi - y\partial_z z\partial_x\phi - z\partial_y x\partial_z\phi + z\partial_y x\partial_z\phi - z\partial_x y\partial_z\phi - z\partial_x z\partial_y\phi - x\partial_z y\partial_z\phi + x\partial_z z\partial_y\phi$$

$$= y\partial_x\phi + yz\partial_z\partial_x\phi - yx\partial_z^2\phi + zx\partial_y\partial_z\phi - zy\partial_x\partial_z\phi - z^2\partial_x\partial_y\phi - xy\partial_z^2\phi + x\partial_y\phi + xz\partial_z\partial_y\phi$$

como son por lo menos C^2

$$= -y\partial_x\phi + x\partial_y\phi = -i\left[i\left(x\partial_y - y\partial_x\right)\right]\phi = iL_z\phi$$

$$[L_y, L_z] = L_y L_z - L_z L_y$$

$$[i(z\partial_x - x\partial_z), -i(x\partial_y - y\partial_x)] = -[(z\partial_x - x\partial_z)(x\partial_y - y\partial_x) - (x\partial_y - y\partial_x)(z\partial_x - x\partial_z)]\phi$$

$$= z\partial_x x\partial_y \phi - z\partial_x y\partial_x \phi - x\partial_z x\partial_y \phi + x\partial_z y\partial_x \phi - x\partial_y z\partial_x \phi + x\partial_y x\partial_z \phi + y\partial_x z\partial_x \phi - y\partial_x x\partial_z \phi$$

$$= -[z\partial_y \phi + zx\partial_x\partial_y \phi - zy\partial_x^2 \phi - x^2\partial_z\partial_y \phi + xy\partial_z\partial_x \phi - xz\partial_y\partial_x \phi + x^2\partial_y\partial_z \phi + yz\partial_x^2 \phi - y\partial_z \phi - yx\partial_x\partial_z \phi]$$

Como son por lo menos de clase C^2, las derivadas cruzadas son iguales

$$-z\partial_y \phi + y\partial_z \phi = -i[i(y\partial_z - z\partial_y)]\phi = iL_x$$

$$[L_z, L_x] = L_z L_x - L_x L_z = iL_y$$

$$[i(x\partial_y - y\partial_x), i(y\partial_z - z\partial_y)] = -[(x\partial_y - y\partial_x)(y\partial_z - z\partial_y) - (y\partial_z - z\partial_y)(x\partial_y - y\partial_x)]\phi$$

$$= -[x\partial_y y\partial_z \phi - x\partial_y z\partial_y \phi - y\partial_x y\partial_z \phi + y\partial_x z\partial_y \phi - y\partial_z x\partial_y \phi + y\partial_z y\partial_x \phi + z\partial_y x\partial_y \phi - z\partial_y y\partial_x \phi]$$

$$= -[x\partial_z \phi + xy\partial_y\partial_z \phi - xz\partial_y^2 \phi - y^2\partial_x\partial_z \phi + yz\partial_x\partial_y \phi - yx\partial_z\partial_y \phi + y^2\partial_z\partial_x \phi + zx\partial_y^2 \phi - z\partial_x \phi - zy\partial_y\partial_x \phi]$$

Como son por lo menos de clase C^2, las derivadas cruzadas son iguales

$$z\partial_x \phi - x\partial_z \phi = -i[i(z\partial_x - x\partial_z \phi)] = iL_y$$

3.6.5 Verifique la identidad vectorial $\nabla \times (a \times b) = a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a) + b(\nabla \cdot a) - a(\nabla \cdot b)$ **Solución:**

$$\begin{aligned}
\nabla \times (a \times b) &= \varepsilon_{ijk}\nabla_j (a \times b)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\nabla_j \varepsilon_{klm} a_l b_m \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\nabla_j (a_l b_m) \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\nabla_j (a_l b_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(a_l \nabla_j b_m + b_m \nabla_j a_l) \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} a_l \nabla_j b_m + \delta_{il}\delta_{jm} b_m \nabla_j a_l - \delta_{im}\delta_{jl} a_l \nabla_j b_m - \delta_{im}\delta_{jl} b_m \nabla_j a_l \\
&= a_l \nabla_m b_m + b_m \nabla_m a_l - a_l \nabla_l b_m - b_m \nabla_l a_l \\
&= a_l \nabla_m b_m - b_m \nabla_l a_l + a_l \nabla_m b_m - b_m \nabla_l a_l \\
&= a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a) + b(\nabla \cdot a) - a(\nabla \cdot b)
\end{aligned}$$

3.6.6 Como alternativa a la identidad vectorial del Ejemplo 3.6.4, muestre que

$$\nabla(A \cdot B) = (A \times \nabla) \times B + (B \times \nabla) \times A + A(\nabla \cdot B) + B(\nabla \cdot A)$$

Solución:

$$\nabla(A \cdot B) - A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) = (A \times \nabla) \times B + (B \times \nabla) \times A$$

tomando la parte derecho

$$\begin{aligned}
(B \times \nabla) \times A + (A \times \nabla) \times B &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{kno} A_j \partial_n B_o + \epsilon_{ilm} B_l \epsilon_{mpq}\partial_p A_q \\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{kno} A_j \partial_n B_o + \epsilon_{mil}\epsilon_{mpq} B_l \partial_p A_q \\
&= (\delta_{in}\delta_{jo} - \delta_{io}\delta_{nj}) A_j \partial_n B_o + (\delta_{ip}\delta_{lq} - \delta_{pl}\delta_{iq}) B_l \partial_p A_q \\
&= \delta_{in}\delta_{jo} A_j \partial_n B_o - \delta_{io}\delta_{nj} A_j \partial_n B_0 + \delta_{ip}\delta_{lq} B_l \partial_p A_q - \delta_{pl}\delta_{iq} B_l \partial_p A_q \\
&= \underbrace{\delta_{in}\delta_{jo} A_j \partial_n B_o}_{i=n=1, j=o=1} - \underbrace{\delta_{io}\delta_{nj} A_j \partial_n B_o}_{i=o, j=n} + \underbrace{\delta_{ip}\delta_{lq} B_l \partial_p A_q}_{i=p, l=q} - \underbrace{\delta_{pl}\delta_{iq} B_l \partial_p A_q}_{p=l, i=q} \\
&= A_j \partial_i B_j - A_j \partial_j B_i + B_l \partial_i A_l - B_l \partial_l A_i \\
&= \partial_i (A_l B_l) - A_j \partial_j B_i - B_j \partial_j B_i - B_l \partial_l A_i \\
&= \nabla(A \cdot B) - (A \cdot \nabla) B - (B \cdot \nabla) A
\end{aligned}$$

3.6.7 Verifique la identidad

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2}\nabla(A^2) - (\vec{A}\nabla)\vec{A}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} A_j (\nabla \times A)_k \\
&= \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} \nabla_l A_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} A_j \nabla_l A_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j \nabla_l A_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} A_j \nabla_l A_m - \delta_{im}\delta_{jl} A_j \nabla_l A_m \\
&= A_m \nabla_l A_m - A_l \nabla_l A_m \\
&= A_m \nabla_l A_m - (A\nabla)_l A_m
\end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_l (A_m A_m) &= A_m \nabla_l A_m + A_m \nabla_l A_m \\
&= 2A_m \nabla_l A_m \\
\frac{1}{2}\nabla_l (A_m A_m) &= A_m \nabla_l A_m
\end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{1}{2}\nabla_l (A_m A_m) - (A\nabla)_l A_m \\
\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{1}{2}\nabla(A^2) - (\vec{A}\nabla)\vec{A}
\end{aligned}$$

3.10.6 Escriba los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas en términos de los vectores unitarios en coordenadas unitarias

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\operatorname{sen}\theta \\
\hat{\theta} &= -\hat{x}\operatorname{sen}\theta + \hat{y}\cos\theta \\
\hat{z} &= \hat{z}
\end{aligned}$$

Solución

Dado a un punto en coordenadas cartesianas $p = (x, y, z)$ tenemos $||r|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la magnitud de un vector y considerado la transformación de coordenadas

$$(x, y, z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$$

Establecemos entonces direcciones nuevas, la dirección de los incrementos en ρ, y la dirección de los incrementos en θ. Matemáticamente esto corresponde a derivar x con respecto a ρ y a θ

$$\hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

también lo podemos escribir como

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\operatorname{sen}\theta$$

Derivado respecto a θ

$$\begin{aligned}
\rho\hat{\theta} &= \rho(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \\
\hat{\theta} &= -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta
\end{aligned}$$

también lo podemos escribir como

$$\hat{\theta} = -\hat{x}\operatorname{sen}\theta + \hat{y}\cos\theta$$

3.10.10 *a*) Demuestre que $\rho = \hat{e}_\rho \rho + \hat{e}_z z$

b) Trabajando completamente en coordenadas cilíndricas, demuestre que

$$\nabla \cdot r = 3 \qquad \nabla \times r = 0$$

Solución:

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial r^2}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{2r}{r} + 1 = 3$$

$$\nabla \times C = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{x} & r\hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.10.18 Escriba los vectores unitarios en coordenadas esféricas en términos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas

$$\hat{r} = \hat{x}\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \hat{y}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + \hat{z}\cos\theta \qquad \hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\operatorname{sen}\phi - \hat{z}\operatorname{sen}\theta \qquad \hat{\phi} = -\hat{x}\operatorname{sen}\phi + \hat{y}\cos\phi \tag{4}$$

Solución:
Se realiza el mismo procedimiento que se hizo en el ejercicio 3.10.6. sabemos que las transformaciones de coordenadas son $x = \cos\phi\operatorname{sen}\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ y $z = \rho\cos\theta$, derivando
respecto a ρ

$$\hat{\rho} \quad = \quad \hat{x}\cos\phi\operatorname{sen}\theta + \hat{y}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \hat{z}\cos\theta$$

respecto a θ

$$\rho\hat{\theta}\hat{x}\cos\phi\cos\theta + \rho\hat{y}sen\phi\cos\theta - \hat{z}\operatorname{sen}\theta$$
$$\hat{\theta}\hat{x}\cos\phi\cos\theta + \hat{y}sen\phi\cos\theta - \hat{z}\operatorname{sen}\theta$$

Respecto a ϕ

$$\begin{aligned} \rho\hat{\phi} &= -\rho\hat{x}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \rho\hat{y}\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{x}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \hat{y}\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

3.10.28 Expresa ∂_x, ∂_y, ∂_z en coordenadas esféricas.
hint iguale ∇_{xyz} y $\nabla_{r,\theta,\phi}$
Solución:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{5}$$

sea $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos\left(\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$ y $\phi = \arctan\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{r} r\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\frac{d}{dx}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{xz}{\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}(x^2+y^2+z^2-z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}\frac{r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{d}{dx}\frac{y}{x} = -\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{y}{x^2} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi}}\frac{r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi} = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta\cos\phi} \\
&= \frac{1}{\sec^2\theta}\frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta\cos\phi} = \cos^2\theta\frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta\cos\phi} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}$$

sustituyendo en 5

$$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Ahora

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{6}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\frac{d}{dy}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{yz}{\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}(x^2+y^2+z^2-z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{r^2}\frac{r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta} \\
&= \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{d}{dy}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}$$

sustituyendo en 6

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Finalmente

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{7}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}r\cos\theta = \cos\theta$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-\dfrac{z}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2-z^2)^{1/2}}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
$$

3.10.30 Con el operador de momento angular orbital en mecánica cuántico esta definido como $L=-i(r\times\nabla)$ mostrar que

a) $L_x + iL_y = e^{i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$

b) $L_x - iL_y = e^{-i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$

$$
r\times\nabla = (y\partial_z - z\partial_y)\,\hat{i} - (x\partial_z - z\partial_x)\,\hat{j} + (x\partial_y - y\partial_x)\hat{k}
$$

$$
\begin{aligned}
L=i(r\times\nabla) &= i\left\{\left[y\left(\cos\theta\partial_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\partial_\theta\right) - z\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\partial_r + \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta}{r}\partial_\theta\right) + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\phi\right]\right. \\
&- \hat{j}\left[x\left(\cos\theta\partial_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\partial_\theta\right) - z\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\partial_\theta - \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\phi\right)\right] \\
&+ \hat{k}\left[x\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\partial_r + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}\partial_\theta + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\right) - y\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\partial\theta - \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\phi\right)\right] \\
&= \hat{i}\left[(y\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\partial_r - \left(z\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r} + \frac{y\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\partial_\theta - \frac{z}{r}\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\partial_\phi\right] \\
&- \hat{j}\left[x\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\partial_r - \left(\frac{x}{r}\operatorname{sen}\theta - \frac{z}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right)\partial_\theta + \frac{z\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\phi\right] \\
&+ \hat{k}\left[(x\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - y\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\partial_r + \left(\frac{x}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\phi - \frac{y}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\phi\right)\partial_\theta + \left(\frac{x\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta} + \frac{y\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_\phi\right] \\
&= \hat{i}\left[(r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\theta - r\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\partial_r + (\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi)\partial_\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\phi\partial_\phi\right] \\
&- \hat{j}\left[(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\cos\theta - r\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\partial_r - (\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi + \cos^2\theta\cos\phi)\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\phi\partial_\phi\right] \\
&+ \hat{k}\left[(r\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi - r\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi)\partial_r + (\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\phi)\partial_\theta\right] \\
&\quad +\hat{k}(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\partial_\phi \\
&= [\operatorname{sen}\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \cos\phi\partial_\theta + \tan\theta\operatorname{sen}\phi\partial_\phi + \partial_\phi
\end{aligned}
$$

2. Separación de variables

9.4.2 Muestre que la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

Se puede separar en coordenadas cilíndricas si k^2 se generaliza a $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$

Solución

En coordenadas cilindricas el laplaciano es

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2}{d\theta}\Theta + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + K^2 = 0$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2}{d\theta}\Theta + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left(k^2 f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)\right) = 0$$

Proponemos $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(x)$ la primera ecuación es y sustituyendo k

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + h(z) = -\beta^2 \qquad \frac{d^2 Z}{dz^2} + h(z)Z = -\beta^2 Z$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2}{d\theta}\Theta + k^2 + f(\rho) + \frac{1}{\rho^2}g(\varphi) = \beta^2$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2}{d\theta}\Theta + \left[k^2 + f(\rho) + \frac{1}{\rho^2}g(\varphi)\right]\rho^2 = \beta^2\rho^2$$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2}{d\theta}\Theta + g(\varphi) = -\alpha^2 \qquad \frac{d^2}{d\theta}\Theta + g(\varphi)\Theta = -\alpha^2\Theta$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + [k^2 + f(\rho)]\rho^2 - \beta^2\rho^2 = \alpha^2$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + [k^2 + \rho^2(f(\rho) - \beta^2) - \alpha^2]R = 0$$

9.4.3 Variables separadas en la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas, separando primero la dependencia radial. Demuestre que sus ecuaciones separadas tienen la misma forma que las ecuaciones. (9.74), (9.77), y (9.78).

Solución

En coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi + k\Phi = 0$$

proponemos $\Phi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ sustituimos y dividimos entre Φ

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + k^2r^2 = 0$$

donde

$$\frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} = -l(l+1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2 = l(l+1)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0$$

$$r\frac{d^2}{dr^2}R + 2r\frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0$$

haciendo $R(kr) = (kr)^{1/2}Z(kr)$ entonces $\frac{d}{dr}R(kr) = \frac{d}{dr}[(kr)^{1/2}Z(kr)]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}R(kr) &= (kr)^{1/2}\frac{d}{dr}Z(kr) - \frac{k}{2}(kr)^2 Z(kr) \\
&= (kr)^{1/2}\left[\frac{d}{dr}Z(kr) - \frac{k}{2}(kr)^{-1}Z(kr)\right] \\
\frac{d^2}{dr^2}R(kr) &= (kr)^{-1/2}\left[\frac{d^2}{dr^2}Z(kr) - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}Z(kr) + \frac{3}{4}\frac{1}{r^2}Z(kr)\right.
\end{aligned}$$

sustituyendo $r^2(kr)^{-1/2}\left[\frac{d^2}{dr^2}Z(kr) - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}Z(kr) + \frac{3}{4}\frac{1}{r^2}Z(kr)\right] + 2r(kr)^{1/2}\left[\frac{d}{dr}Z(kr) - \frac{k}{2}(kr)^{-1}Z(kr)\right] +$ $[k^2r^2 - l(l+1)](kr)^{-1/2}Z(kr) = 0$

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}Z(kr) + r\frac{d}{dr}Z(kr) + [k^2r^2 - l(l+1) - 1/4]Z(kr) = 0$$

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}Z(kr) + r\frac{d}{dr}Z(kr) + [k^2r^2 - (l+1/2)^2]Z(kr) = 0$$

9.4.4 Verifique que

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi)$$

Es separable (en coordenadas esféricas). Las funciones f, g y h son solo funciones de las variables indicadas; k^2 es una constante. **Solución:**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi + k\Phi \\
+ \quad &\left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0
\end{aligned}$$

proponemos $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ sustituimos y dividimos entre Φ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} \\
+ \quad &k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi) = 0
\end{aligned}$$

Multiplicando r^2

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + g(\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi) \\
+ \quad &\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + (k^2 + f(r))r^2 = 0
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + g(\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi) = l(l+1)$$

multiplicando por $\operatorname{sen}^2\theta$ y sabemos que $Y_{ml} = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta(\theta)\right)+\underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}+h(\varphi)}_{=m}+g(\theta)=l(l+1)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}+h(\varphi)\Phi(\phi)=-m\Phi(\phi)$$

Por otra parte

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+(k^2+f(r))r^2-l(l+1)=0$$

9.4.5 Una partícula atómica (mecánica cuántica) está confinada dentro de una caja rectangular de lados a; b, y c. La partícula se describe mediante una función de onda ψ que satisface la ecuación de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi=E\psi$$

Se requiere que la función de onda desaparezca en cada superficie de la caja (pero que no sea idénticamente cero). Esta condición impone restricciones en las constantes de separación y, por lo tanto, en la energía E. ¿Cuál es el valor más pequeño de E para el cual se puede obtener una solución de este tipo?

Solución:

$$\nabla\psi(x,y,z)+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x,y,z)$$

nombremos $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)+k^2\psi(x,y,z)=0$$

Proponemos $\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)X(x)Y(y)Z(z)+k^2X(x)Y(y)Z(z)=0$$

dividiendo por $X(x)Y(y)Z(z)$ obtenemos

$$\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2}+k_x^2X(x)=0$$
$$\frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2}+k_y^2X(y)=0$$
$$\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}+k_z^2X(z)=0$$

donde las soluciones son de la forma

$$\psi(w)=A\cos kw+B\operatorname{sen}kw \qquad w=x,y,z$$

$$\psi(w=0)=A\underbrace{\cos kw}_{=1}+\cancelto{=0}{B\operatorname{sen}kw}=0$$

por lo que $A=0$

$$\psi(w)=B\operatorname{sen}kw$$

descartamos que $B=0$ por lo que $kw=n\pi$

$$k_x=\frac{n_x\pi}{a}\qquad k_y=\frac{n_y\pi}{b}\qquad k_z=\frac{n_z\pi}{c}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \pi^2$$

sabemos que $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ entonces la energía es

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

9.4.7 La ecuación de Schrodinger en una dimensión de una partícula con un potencial $V = \dfrac{1}{2} k x^2$ es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \psi = E\psi(x)$$

a) Definiendo

$$a = \left(\frac{mk}{\hbar^2} \right)^{1/4} \qquad\qquad \lambda = \frac{2E}{\hbar} \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2}$$

y ajuste $\xi = ax$ muestre que

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0$$

b) sustituyendo

$$\psi(\xi) = y(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

muestre que $y(\xi)$ satisface la ecuación diferencial de Hermite

Solución:

a) reescribiendo la ecuación

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}\hbar^2} k x^2 \psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{mk}{\hbar^2} x^2 \psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

hacemos $\psi(x) \to \psi(ax)$

$$\frac{d^2\psi(ax)}{d(ax)^2} + \frac{mk}{\hbar^2}(ax)^2\psi(ax) = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(ax)$$

haciendo el cambio de variable $\xi = ax$ tenemos

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d\psi}{d\xi} = a\frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a\frac{d\psi}{d\xi} \right) = \left(x\frac{d}{d\xi} \right) a \frac{d\psi}{d\xi} = a^2 \frac{d\psi^2}{d\xi^2}$$

$$\left(\left(\frac{mk}{\hbar^2} \right)^{1/4} \right)^2 \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{\xi^2}{a^2} \right) \psi(\xi) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(\xi)$$

$$a^2 \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - a^4 \left(\frac{\xi^2}{a^2} \right) \psi(\xi) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(\xi)$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) = -\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} \psi(\xi)$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2 \right) \psi(\xi) = 0$$

b) tenemos la ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

haciendo $\psi(\xi) = y(\xi)e^{-\xi^2/2}$, ahora realizamos las derivadas 1ra y 2da

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{dy}{d\xi}e^{-\xi^2/2} - ye^{-\xi^2/2}\xi = e^{-\xi^2/2}\left[\frac{dy}{d\xi} - y\xi\right]$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2}e^{-\xi^2/2} - ye^{-\xi^2/2}\xi - \xi e^{-\xi^2/2}\frac{dy}{d\xi} - ye^{-\xi^2/2} - ye^{-\xi^2/2}\xi^2$$

$$e^{-\xi^2/2}\left[\frac{d^2y}{d\xi^2} - y\xi - \xi\frac{dy}{d\xi} - y - y\xi^2\right]$$

9.7.1 Para un sólido esférico homogéneo con difusividad térmica constante, y sin fuentes de calor, la ecuación de la conducción de calor se convierte en

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = K\nabla^2 T(r,t)$$

asume que la solución es de la forma

$$T(r,t) = R(r)T(t)$$

Solución
En coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi + k\Phi = \frac{1}{k}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

proponemos $\Phi(r,\theta,\phi,t) = R(r)Y(\theta,\phi)T(t)$ sustituimos y dividimos entre Φ

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + k^2 = \frac{1}{k}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} + k^2r^2 = -\alpha^2$$

entonces

$$\frac{1}{kT}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\alpha^2$$

donde

$$\frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\right) + \frac{1}{Y_{lm}\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm} = -l(l+1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \alpha^2k^2r^2 = l(l+1)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + [\alpha^2k^2r^2 - l(l+1)]R = 0$$

$$r\frac{d^2}{dr^2}R + 2r\frac{dR}{dr} + [\alpha^2k^2r^2]R = 0$$

9.7.3 La ecuación de conducción de calor en dos dimenciones espaciales es

$$\alpha^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}\right)=\frac{dU}{dt}$$

si se supone que $U(x,y,z)=X(x)Y(y)T(t)$ encuentre las ecuaciones ordinarias que sean satisfechas por $X(x)Y(y)T(t)$ **Solución**

$$\alpha^2\frac{d^2}{dx^2}X(x)Y(y)T(t)+\alpha^2\frac{d^2}{dy^2}X(x)Y(y)T(t)=\frac{d}{dt}X(x)Y(y)T(t)$$

$$\alpha^2Y(y)T(t)\frac{d^2}{dx^2}X(x)+\alpha^2X(x)T(t)\frac{d^2}{dy^2}Y(y)=X(x)Y(y)\frac{d}{dt}T(t)$$

$$\alpha^2\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x)+\alpha^2\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y)=\frac{1}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x)+\frac{k_1^2}{\alpha^2}X(x)=0$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y)+\frac{k_2^2}{\alpha^2}Y(y)=0$$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)+k_3^2T(t)=0$$

las soluciones son:

$X(x)=A\cos\left(\frac{k_1}{\alpha}x\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{k_1}{\alpha}x\right)$ $\qquad$ $Y(y)=A\cos\left(\frac{k_2}{\alpha}y\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{k_2}{\alpha}y\right)$ $\qquad$ $T(t)=A\cos(k_3t)+B\operatorname{sen}(k_3t)$

9.7.4 Escriba la ecuación de conducción de calor en coordenadas polares y suponga que $U(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encuentre las ecuaciones ordinarias que satisfacen $R(r)$, $\Theta(\theta)$ y $T(t)$
Solución

$$\alpha\left(\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)=\frac{dU}{dt}$$

$$\alpha\left(\frac{d^2}{dr^2}R(r)\Theta(\theta)T(t)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}R(r)\Theta(\theta)T(t)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}R(r)\Theta(\theta)T(t)\right)=\frac{d}{dt}R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

$$\alpha\Theta(\theta)T(t)\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\alpha\Theta(\theta)T(t)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}R(r)+\alpha R(r)T(t)\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)=R(r)\Theta(\theta)\frac{d}{dt}T(t)$$

Dividiendo por $U(r,\theta,t)$

$$\frac{\alpha}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{\alpha}{rR(r)}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{\alpha}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)=\frac{1}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)$$

para $T(t)$ tenemos

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)=-k_3^2$$

$$\frac{\alpha}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{\alpha}{rR(r)}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{\alpha}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)-K_3^2=0$$

$$\frac{\alpha r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{\alpha r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{\alpha}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)-r^2K_3^2=0$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)=-k_2^2$$

$$\frac{\alpha r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{\alpha r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r)-\alpha k_2^2-r^2K_3^2=0$$

3. Sturm liouville

8.2.1 Demuestre que la ecuación diferencial ordinaria de Laguerre, Tabla 7.1, se puede colocar en su forma auto-adjunta multiplicando por e^{-x} y que $\omega(x) = e^{-x}$ es la función de peso

Solución:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

se puede observar que $P_0' \neq P_1$
sea multiplicando por e^{-x}

$$xe^{-x}y'' + e^{-x}(1-x)y' + e^{-x}\lambda y = 0$$

su forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}y'\right) + xe^{-x}\lambda = 0$$

$$\omega(x) = \frac{1}{x}e^{\int(1/t-1)dt} = xe^{-x} = e^{x}$$

esa es la función de peso, $\omega(x) = e^{-x}$

8.2.2 Demuestre que la ecuación diferencial ordinaria de Hermite, Tabla 7.1, se puede colocar en su forma auto-adjunta multiplicando por e^{-x^2} y que $\omega(x) = e^{-x^2}$ es la función de peso

Solución:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

$$P_{0=}1 \quad P_1 = -2x \quad P_2 = \lambda$$

multiplicado por e^{-x}

$$e^{-x^2}y'' - 2xe^{-x^2}y' + e^{-x^2}\lambda y = 0$$

su forma auto-adjunta es

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y') + e^{-x^2}\lambda y = 0$$

por otra parte

$$\omega(x) = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$$

8.2.3 Demuestre que la ecuación diferencial ordinaria de Hermite, Tabla 7.1, se puede tener su forma de auto-adjunta multiplicando por e^{x^2} y que esto da $\omega(x) = e^{x^2}$ como la función de peso apropiada

Solución:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

dividiendo $(1-x^2)^{1/2}$

$$(1-x^2)^{1/2}y'' - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}y' + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}y = 0$$

la forma auto-adjunta es

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{1/2}y'] + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}y$$

Ademas

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(-\int^x \frac{t}{1-t^2}dt\right) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(\frac{1}{2}\int^x \frac{-2t}{1-t^2}dt\right) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}(1-x^2)^{1/2} \\
&= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2.8.6 Dado

$$P_1(x) = x \qquad Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

son solución de la ecuación diferencial de Legendre, correspondiente a diferentes eigeinvalores

(a) Evalué su ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

(b) Explique por qué estas dos funciones no son ortogonales, es decir, por qué no se aplica la prueba de ortogonalidad.

Solución:
integrando por partes

(a) $u = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ o bien $u = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ por lo tanto $du = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ y $dv = \frac{x}{2} \to v = \frac{x^2}{4}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \cancel{\frac{x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right.}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{1+x}}\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\cancel{(1-x)}(x+1)}{\cancel{1-x}} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x+1-(x-1))dx = \frac{1}{2}\int_0^2 dx = 1$$

expandiendo el logaritmo en series

$$\int_{-1}^{1} P_1 Q_0 dx = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{v=0}^{\infty} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{x^{2(v+1)}}{2v+1} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v+1)(2v+3)} \lim_{\epsilon \to 0} (1-\epsilon)^{2v+3} - (\epsilon - 1)^{2v+3}$$

$$= 2\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v+1)(2v+3)} = 1$$

(b) Se violan las condiciones de contorno necesarias porque Q0 es singular en $x \pm 1$

2.8.7 $T_0(x)$ y $V_1 = (1-x^2)$ son soluciones de la ecuación diferencial de Chebyshev correspondiente a diferente eigenvalor, explicar en términos de las condiciones de frontera, ¿por qué las dos funciones no son ortogonales?
Solución
La ecuación de Chebyshev es

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

dividiendo entre $P_0 = (1-x^2)$

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{n^2}{1-x^2}y = 0$$

para escribirlo en su f. Autoadjunta

$$f = e^{-\int^x t1-t^2 dt} = e^{\frac{1}{2}\int^x (1-t^2)^{-1}(-2t)dt} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = (1-x^2)^{1/2}}$$

multiplicado f a la ED

$$(1-x^2)^{1/2}y'' - (1-x^2)^{1/2}\frac{x}{1-x^2}y' + (1-x^2)^{1/2}\frac{n^2}{1-x^2}y = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2}y'' - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}y' + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left((1-x^2)^{1/2}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}y = 0$$

esta es su forma autoadjunta, y se puede ver que

$$\lambda = n^2 \qquad \omega = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$$

Para ver si son ortogonales, hacemos el producto interno entre $T_0(x)$ y $V_1 = (1-x^2)$ por otra parte sabemos que la ecuación tiene singularidades en $x \pm 1$

$$\begin{aligned}
\langle T_0 | V_1 \rangle &= \int_a^b T_0(x)\omega(x)V_1(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \left(\frac{1}{\cancel{(1-x^2)^{1/2}}} \right) \cancel{(1-x^2)^{1/2}} dx \\
&= 2
\end{aligned}$$

como el producto es distinto de cero, las funciones no son ortogonales

8.2.8 Un conjunto de funciones $u_n(x)$ satisface la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u_n(x)\right] + \lambda_n \omega_(x) u_n(x) = 0$$

Las funciones $u_m(x)$ y $u_n(x)$ satisfacen las condiciones de contorno que conducen a la ortogonalidad. Los valores propios correspondientes λ_m y λ_n son distintos. Demostrar que para las condiciones de contorno apropiadas, $u'_m(x)$ y $u'_n(x)$ son ortogonales con $p(x)$ como función de peso.

Solución:

Integrando por partes

$$\int_a^b u_m \frac{d}{dx} p(x) u'_x dx + \lambda_n \int_a^b u_m \omega(x) u_n = 0$$

$$\overbrace{\cancel{u_m p(x) u'_n|_a^b}}^{=0} - \int_a^b u'_m p u'_n dx + \lambda_n \int_a^b u_m \omega(x) u_n dx = 0$$

El primer término es cero debido a la condición de contorno, mientras que el tercer término se reduce a $\lambda_n \delta_{nm}$ por ortogonalidad. De ahí la relación de ortogonalidad.

$$\int_a^b u'_m p u'_n dx = \lambda_n \delta_{nm}$$

8.2.9 El operador lineal A tiene n valores propios distintos y n funciones propias correspondientes: $A\psi_i = \lambda_i \psi_i$. Demuestre que las n funciones propias son linealmente independientes. No asumas que A sea hermitiano.

Hint: Supongamos una dependencia lineal, es decir, que $\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \psi_i$. Utilice esta relación y la ecuación de la operación propia del operador primero en un orden y luego en el orden inverso. Demuestran que resulta una contradicción.

solución

Tenemos que

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \psi_i$$

entonces si aplicamos el operador $A\psi_n = \lambda \psi_n$

$$\lambda_n \psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda \psi_i$$

comparando los términos

$$\lambda_n \sum_{i=0}^{n-1} a_i \psi_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_i \psi_i$$
$$a_i \lambda_n \psi = a_i \lambda_i \psi_i$$

de aqui se puede decir que $\lambda_n = \lambda_i$ para cualquier i que cumpla $a_i \neq 0$, por contradicción queda demostrado

8.2.10 Los polinomios ultraesfércos $C_n^{(\alpha)}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-(2\alpha+1)x\frac{d}{dx}+n(n+2\alpha)\right\}C_n^{(\alpha)}=0$$

(a) Transformar esta ecuación diferencial en su forma autoadjunta

(b) Muestre que $C_n^{(\alpha)}$ son ortogonales para diferentes n especificar el intervaló de integración y la función de peso

Solución

(a)

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}-\frac{(2\alpha+1)x}{1-x^2}\frac{d}{dx}+\frac{n(n+2\alpha)}{1-x^2}\right\}C_n^{(\alpha)}=0$$

sea

$$f=exp\left(-\int^x\frac{(2\alpha+1)t}{1-t^2}dt\right)=exp\left(-\frac{2\alpha+1}{2}\int^x\frac{-2t}{1-t^2}dt\right)=exp\left(-\frac{2\alpha+1}{2}\ln(1-x^2)\right)=(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$$

multiplicando por f

$$\left\{(1-x^2)^{\alpha+1/2}\frac{d^2}{dx^2}-(1-x^2)^{\alpha-1/2}x(2\alpha+1)\frac{d}{dx}+(1-x^2)^{\alpha-1/2}n(n+2\alpha)\right\}C_n^{(\alpha)}=0$$

$$\left\{\frac{dy}{dx}\left((1-x^2)^{\alpha+1/2}\frac{dy}{dx}\right)+(1-x^2)^{\alpha-1/2}n(n+2\alpha)\right\}C_n^{(\alpha)}=0$$

esta es su forma autoadjunta

(b) la función de peso se calcula como $\frac{1}{p_0}e^{\int p_1/p_0dx}$

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(-\int^x\frac{(2\alpha+1)t}{1-t^2}dt\right)\\
&= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(-\frac{2\alpha+1}{2}\int^x\frac{-2t}{1-t^2}dt\right)\\
&= \frac{1}{(1-x^2)}exp\left(-\frac{2\alpha+1}{2}\ln(1-x^2)\right)\\
&= \frac{1}{(1-x^2)}(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\\
&= (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

entonces

$$\lambda=n(n+2\alpha)$$

veamos si son ortogonales

$$\begin{aligned}
\langle C_0^{(\alpha)}|C_1^{(\alpha)}\rangle &= \int_{-1}^1 C_0^{(\alpha)}\omega(x)C_1^{(\alpha)}dx\\
&= \int_{-1}^1 C_0^{(\alpha)}[(1-x^2)^{\alpha-1/2}]C_1^{(\alpha)}dx\\
&= \int_{-1}^1(1-x^2)^{-1/2}(2\alpha x)dx\\
&= \alpha\left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_{-1}^1\\
&= 0
\end{aligned}$$

$C_0^{(\alpha)}$, $C_1^{(\alpha)}$ Son ortogonales

4. Función de Green

10.1.1 Muestre

$$G(x,t) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq t \\ t & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es la función de Green del operador $\dfrac{d^2}{dx^2}$ en las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y'(1) = 0$

Solución:

Solución:

de la ecuación homogénea $y'' = 0$, y las soluciones son de la forma

$$y = mx + b$$

de la condición de frontera $y(0) = 0$

$$y_1(0) = b = 0 \Rightarrow y(x) = mx$$

de la condición $y'(1) = 0$

$$y'(1) = m$$

$$G(x,t) = \begin{cases} Ax & x < t \\ At & x > t \end{cases}$$

calculamos A de la siguiente expresión

$$A[y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)] = \frac{1}{p_0}$$

$$A[0 - 1] = \frac{1}{-1} \qquad A = 1$$

$$G(x,t) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq t \\ At & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

10.1.2 Encuentre la función de Green para

$a)$ $Ly(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x)$, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$b)$ $Ly(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x)$, para $-\infty < x < \infty$

Solución

$a)$ tenemos que $p(x) = 1$ proponemos una solución de la forma

$$G(x,t) = \begin{cases} Ay_1(x)y_2(t) & x < t \\ Ay_2(x)y_1(t) & x > t \end{cases}$$

la ecuación auxiliar es $m^2 + 1 = 0$ y su solución $m \pm i$ es

$$y_1 = a\cos x + b \operatorname{sen} x \qquad y_2 = c\cos x + d\operatorname{sen} x$$

de las condiciones iniciales

$$y_1(0) = a\cos(0) \qquad a = 0$$

entonces $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ y

$$y_2'(1) = -c\operatorname{sen}(1) + d\cos(1) \qquad c = d\tan(1)$$

por lo que $y_2(x) = c\cos x + d\tan(1)\operatorname{sen} x$

$$G(x,t) = \begin{cases} A\operatorname{sen} x(\cos t + \tan(1)\operatorname{sen} t) & x < t \\ A\operatorname{sen} t[\cos x + \tan(1)\operatorname{sen} x] & x > t \end{cases}$$

Obtenemos A de

$$A[y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)] = \frac{1}{p}$$

$$A\left[(-\operatorname{sen} t + \cos t)\operatorname{sen} t - \cos t(\cos t + \operatorname{sen} t)\right] = -1 \qquad A = \frac{-1}{1} = 1$$

$$G(x,t) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x(\cos t + \tan(1)\operatorname{sen} t) & x < t \\ -\operatorname{sen} t[\cos x + \tan(1)\operatorname{sen} x] & x > t \end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{x\to-\infty} G_1(1) = \lim_{x\to-\infty}\left[\cancelto{=0}{ce^{x}} + de^{-x}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} G_2(1) = \lim_{x\to\infty}\left[ae^{x} + \cancelto{=0}{be^{-x}}\right]$$

$$G(x,t) = \begin{cases} Ae^{x}e^{-t} & x < t \\ Ae^{-x}e^{t} & x > t \end{cases}$$

calculamos A con la siguiente expresión

$$A[-e^{-t}e^{t} - e^{t}e^{-t}] = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}e^{-t} & -\infty < x < t \\ \frac{1}{2}e^{-x}e^{t} & t < x < \infty \end{cases}$$

10.1.3 Demuestre que la función $y(x)$ definida por

$$\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)dt$$

satisface el problema de valor inicial definido por la ec.

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + y = f(t)$$

y sus condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$
Solución:

$$y(x) = \operatorname{sen}(x-x)f(x) + \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$$

$$y''(x) = \cos(x-x)f(x) = -\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)dt = f(x) - y(x)$$

Esta ecuación muestra que $y(x)$ satisface la ecuación.

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + y = f(t)$$

y las fórmulas para $y(0)$ y $y'(0)$ muestran que ambas desaparecen.

10.1.4 Encuentre la función de Green de la ecuación

$$\frac{d^2}{dy^2} - \frac{y}{4} = 0$$

con condiciones de frontera $y(0) = y(\pi/4) = 0$
Solución:
se puede observar $p = -1$ la ecuación auxiliar a esta ecuación diferencial es $m^2 + 1/4 = 0$, de aqui $m = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} \pm i/2$ la solución es

$$y(x) = A\operatorname{sen}\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2}$$

de las condiciones de frontera para $x < t$

$$y(0) = A\cancelto{=0}{\operatorname{sen}\frac{0}{2}} + B\underbrace{\cos\frac{0}{2}}_{=1} = 0$$

de aqui obtenemos que $B = 0$ entonces

$$G_1(x) = A\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$G_1'(x=t) = A\cos\frac{t}{2}$$

para $x > t$

$$y(\pi) = C\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1} + D\cancelto{=0}{\cos\frac{\pi}{2}} = 0$$

de aqui obtenemos que $C = 0$

$$G_2(x) = D\cos\frac{x}{2}$$

$$G_2(x=t) = -D\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

$$A[G_2'(t)G_1(t) - G_1'(t)G_2(t)] = \frac{1}{p}$$

sustituyendo

$$A\left[-\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2} - \frac{A}{2}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right] = -1$$

sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ entonces $A = 2$

$$G_1(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2} & 0 \leq x < t \\ 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2} & t < x \leq \pi \end{cases}$$

10.1.6 Dado que

$$L = (1-x^2)\frac{d^2}{dx} - 2x\frac{d}{dx}$$

y que $G(\pm 1, t)$ permanece finito, muestra que ninguna de las funciones de Green puede construirse con las técnicas de esta sección. Nota. Las soluciones a $L = 0$ necesarias para las regiones $x < t$ y $x > t$ son linealmente dependientes.
Solución:
Sabemos que esta ecuación tiene puntos singulares en $x \pm 1$ Solo hay una solución que es finita en estos puntos. Por lo tanto $u(x)v(t) = v(x)u(t)$ y no es posible obtener una discontinuidad en la derivada en $x = t$

10.1.7 Encuentra la función de Green para

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt} = f(t)$$

con condiciones iniciales $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ y resuelve la ecuación diferencial ordinaria para $t > 0$ dado $f(t) = exp(-t)$
Solución:
integramos la ecuación

$$int\frac{d^2\psi}{dt^2} + k\int\frac{d\psi}{dt} = c$$

$$\frac{d\psi}{dt} + k\psi = c$$

$$\frac{-k}{-k}\int\frac{d\psi}{c - k\psi} = \int dt$$

haciendo un cambio de variable $u = c - k\psi$ entonces $du = -kd\psi$

$$\frac{1}{-k}\int\frac{d\psi}{c - k\psi} = \int dt$$

$$-\frac{1}{k}\ln(c - k\psi) = t$$

$$e^{-(1/k)\ln(c-k\psi)} = e^t$$

$$(c - k\psi)^{-(1/k)} = e^t$$

multiplicando por 1^{-k}

$$c - k\psi = e^{-kt}$$

$$\psi = c - e^{-kt}k$$

$$G(t,u) = C(u)\underbrace{\left(1 - h(u)e^{-kt}\right)}_{=0}$$

esto es para $u > t$, y tambien podemos ver que $h(u) = e^{-kt}$

$$G(t,u) = C(u)\left(1 - e^{-k(t-u)}\right)$$

por otra parte

$$exp\left[\int \frac{P_1}{P_0}dx\right] = e^{kt}$$

multiplicando a la ED por este factor

$$e^{kt}\frac{d^2\psi}{dt^2} + ke^{kt}\frac{d\psi}{dt} = e^{kt}f(t)$$

su forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}\frac{d}{dt}\right) = e^{kt}f(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{kt}\frac{d}{dt}\right) = C(u)ke^{k(t-u)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{kt}\frac{d}{dt}\right) = C(u)k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{t=u} = \frac{1}{p_0} = e^{-ku}$$

significa que 1

$$C(u) = \frac{e^{ku}}{k}$$

$$G(t,u) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \leq t < u \\ \dfrac{e^{-ku} - e^{kt}}{k} & t > u \end{array}\right.$$

10.1.9 Construya la función Green en una dimensión para la ecuación de Helmholtz modificada,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - k^2\psi = f(x)$$

Las condiciones de contorno son que la función de Green debe desaparecer para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$
solución:
Observemos de la teoría de Sturm Louville $p(x) = 1$ y $q(x) = -k^2$, por otra parte

$$\mathscr{L}G_1 = 0$$

si $k > 0$

$$G = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

de aqui $y_1 = e^{-kx}$ y $y_2 = e^{kx}$

$$G(x_1, x_2) = \left\{\begin{array}{c} Ay_1(x_2)y_2(x_1) \\ Ay_2(x_2)y_1(x_1) \end{array}\right.$$

$$A[y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)] = \frac{1}{p}$$

donde $p = 1$

$$A = \frac{1}{ke^{-kx}e^{kx} + ke^{-kxe^{kx}}} = \frac{1}{2k}$$

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2k}exp\,(k(x_1 - x_2)$$

La solución de la ecuación inhomogenea es de la forma

$$\psi(t) = \int_0^t G(t,u)e^{ku}f(u)du$$

el ejercicio nos da $f(t) = e^{-t}$, sustituyendo

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_0^t \left(\frac{e^{-ku} - e^{-kt}}{k}\right) e^{(k-1)u}du \\
&= \frac{1}{k}\left[\int_0^t e^{-ku}e^{(k-1)u}du - \int_0^t e^{-kt}e^{(k-1)u}du\right] \\
&= \frac{1}{k}\left[\int_0^t e^{-u}du - \int_0^t e^{-kt}e^{(k-1)u}du\right] \\
&= \frac{1}{k}\left[1 - \frac{1}{k-1}(ke^{-t} - e^{-kt})\right]
\end{aligned}$$

5. Función Gamma

13.1.1 Derive la relación $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ de la forma integral de Euler

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{8}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

Solución

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\
&= \overset{=0}{\cancel{\left[-e^{-t}t^{z}\right]_0^\infty}} + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Nota $u = t^2$, $du = zt^{z-1}$, $dv = e^{-t}dt$, $v = -e^{-t}$
Asi se verifica la ecuación (1)

13.1.3 Mostrar que $\Gamma(z)$ se puede escribir como

a) $\Gamma(z) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}$, $\mathbb{R}(z) > 0$

b) $(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt$

Solución:

a)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

haciendo el cambio de variable $t = u^2$, $dt = 2udu$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u^2}u^{2(z-1)}(2u)du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2z-1}du$$

haciendo $u = t$

$$2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}dt$$

b)

$$(z)\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}dt$$

sea $t\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u \to dt = -\frac{du}{u}$

$$\int_1^0 e^{-\ln(\frac{1}{u})}\left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{2z-1}\left(-\frac{du}{u}\right) = \int_0^1 \frac{u}{u}\left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{2z-1}du = \int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{2z-1}du$$

Haciendo $u = t$

$$\int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{2z-1}du$$

13.1.5 Transformando la integral en una función Gamma, mostrar que

$$-\int_0^1 x^k\ln x dx = \frac{1}{(k+1)^2} \qquad k > -1$$

Solución
Haciendo el cambio de variable $x = e^t$, $dx = e^t dx$

$$\begin{aligned}-\int_0^1 x^k\ln x dx &= -\int_{-\infty}^0 e^{kt}\ln[e^t]e^t dt\\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{t(k+1)}t dt\end{aligned}$$

haciendo otro cambio de variable $u = -(k+1)t$, $du = -(k+1)dt$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-u}\frac{u}{k+1}\frac{du}{k+1} &= \frac{1}{(k+1)^2}\int_0^\infty e^u u^{2-1}du\\ &= \frac{\Gamma(2)}{(k+1)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

13.1.7 Mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{a}$$

Solución:

$$\frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)} = \frac{\dfrac{\Gamma(ax)}{ax}}{\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}} = \frac{\Gamma(ax+1)}{a\Gamma(x+1)}$$

haciendo el limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(ax+1)}{a\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(1)}{a\Gamma(1)} = \frac{1}{a}$$

13.1.10 Mostrar que, para un entero s

$a)$ $\displaystyle\int_0^\infty x^{2s+1}e^{-ax^2}dx$

$b)$ $\displaystyle\int_0^\infty x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Solución:

a) sea $u = ax^2$ por lo que $x = (u/a)^{1/2}$ entonces $dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)u^{-1/2}du$

$$\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{s+1/2} e^{-u}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)u^{-1/2}du\right] = \frac{1}{2a^{s+1}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^s e^{-u}du = \frac{1}{2a^{s+1}}s!$$

b) con el mismo cambio de variable tenemos que

$$\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^s e^{-u}\left[\frac{du}{2a^{1/2}u^{1/2}}\right] = \frac{1}{2a^{s+1/2}}\int_0^\infty u^{s-1/2}e^{-u}du = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}}$$

por la formula de duplicación de Legrendre

$$\Gamma(1+z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z+1)$$

sustituyendo

$$\frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{2z+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

13.1.11 Expresar el coeficiente de n-ésimo termino de la expansión de $(1+x)^{1/2}$ en potencias de x

a) En términos de factoriales de enteros
b) En términos de funciones doble factoriales

Solución:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}x^k$$

con $a = 1$ y $n = \frac{1}{2}$ queda

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{1/2} \frac{(1/2)!}{(1/2-k)!k!}x^k$$

sea $k = n$

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{1/2} \frac{(1/2)!}{(1/2-n)!n!}x^n$$

entonces el n-ésimo termino es

$$a_n = \frac{(1/2)!}{(1/2+1)!n!} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-n+1)n!} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma(1/2-n)n!}$$

sabemos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y $\gamma(1/2-n) = (-1)^n\sqrt{\pi}\frac{2^n}{(2n-1)!!}$ (Duplicación de Legendre). Sustituyendo..

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{(1/2-n)(-1)^n\sqrt{\pi}2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(1-2n)(-1)^n 2^n n!} = (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

o también

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n n!} = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

13.1.12 Expresar el coeficiente de n-ésimo termino de la expansión de $(1+x)^{-1/2}$ en potencias de x

a) En términos de factoriales de enteros

b) En términos de funciones doble factoriales

Solución:

$$(1+x)^{-1/2} = \sum \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{(-1/2-n)!n!}!x^n$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1/2)!}{(-1/2-n)!n!}! = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left[(-1)^n\sqrt{\pi}\frac{2^n}{(2n-1)!!}\right]n!} \\
&= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n n!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}
\end{aligned}$$

13.1.14 a) Mostrar que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = (-1)^n\pi \tag{9}$$

donde n es entero

b) expresar $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$ separe en términos de $\pi^{1/2}$ y una función doble Factorial

solución:

a)

$$\Gamma(z+1)\Gamma(z-1) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$$

para $z = n - \frac{1}{2}$

$$\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2-n) = \frac{\pi(n-1/2)}{\operatorname{sen}\pi(n-1/2)}$$

$$\Gamma(n+1/2)\cancel{(1/2-n)}\Gamma(1/2-n) = \frac{\pi\overbrace{\cancel{(n-1/2)}}^{=-1}}{-\operatorname{sen}\pi(n-1/2)}$$

$$\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2-n) = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}\pi(n-1/2)} = \frac{-\pi}{-(-1)^n} = (-1)^n\pi$$

b)

$$\Gamma(1/2-n) = \frac{(-1)^n\pi}{\Gamma(n+1/2)} \tag{10}$$

De la duplicación tenemos que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{2^{-2n}\sqrt{z}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(1+n)} = \frac{2^{-2n}\sqrt{z}(2n)!}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}$$

Regresando a ec 10

$$\Gamma(n-1/2) = \frac{2^n(-1)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$$

13.1.16 Pruebe que

$$|\Gamma(x+iy)| = |\Gamma(x)| \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right]^{-1/2} \tag{11}$$

Solución:
de la definición

$$\frac{1}{\Gamma} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z}{n}\right] e^{-z/n}$$

donde $z = x + iy$. y multiplicando por otra $\Gamma(w)$ donde $w = x - iy$ de la manera siguiente

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \left(ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z}{n}\right] e^{-z/n}\right) \left(we^{\gamma w} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{w}{n}\right] e^{-w/n}\right)$$

esto se puede rescribir como

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = zwe^{\gamma(z+w)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z}{n}\right] \left[1 + \frac{w}{n}\right] e^{-(z+w)/n}$$

tenemos que la suma y el producto de dos numeros complejos son $z + w = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2x$ y $z \cdot w = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$. Sustituyendo

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = (x^2 + y^2)e^{\gamma(2x)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x+iy}{n}\right] \left[1 + \frac{x-iy}{n}\right] e^{-(2x)/n}$$

Multiplicando por 1 convenientemente

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2} e^{\gamma(2x)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{x+iy}{n}\right] \left[1 + \frac{x-iy}{n}\right] \left[1 + \frac{x}{n}\right]^2}{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2} e^{-(2x)/n}$$

Rescribiendo

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \frac{x^2+y^2}{x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{x+iy}{n}\right] \left[1 + \frac{x-iy}{n}\right]}{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2} \left\{x^2 e^{2x\gamma} \left[1 + \frac{x}{n}\right]^2 e^{-(2x)/n}\right\}$$

Observemos que lo que esta en las llaves es $1/(\Gamma x^2)$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \frac{1}{\Gamma(x)^2} \frac{x^2+y^2}{x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{x - \cancel{iy}}{n} + \frac{x + \cancel{iy}}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right]}{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \frac{1}{\Gamma(x)^2} \frac{x^2+y^2}{x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}\right]}{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(w)} = \frac{1}{\Gamma(x)^2} \frac{x^2+y^2}{x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2 + y^2}{\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2}$$

Definición $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\left|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)}\right|^2 = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{(n+x)^2}\right)$$

8.1.18 **Ejercicio de la sexta edición** Desde una de las definiciones del factorial o gamma, muestre que

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh \pi x} \tag{12}$$

de la ec 9 remplazamos $z = ix$ donde $x \in \mathbb{R}/\{0\}$

$$\begin{aligned} \Gamma(-ix)\Gamma(1+ix) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(-i\pi x)} \\ i\frac{\pi}{\sinh(\pi x)} \end{aligned}$$

Vemos que $\Gamma(z+1) = z\gamma(z)$ entonces

$$\Gamma(1-ix)\Gamma(1+ix) = (-ix)i\frac{\pi}{\sinh(\pi x)} = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)}$$

finalmente denotamos $\Gamma(1+z) = z!$ y podemos ver que

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)}$$

así queda demostrado

6. Función Beta

13.3.1 *a*) $B(a,b) = B(a+1,b)B(a,b+1)$

b) $B(a,b) = \frac{a+b}{b}B(a,b+1)$

c) $B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a+1,b-1)$

d) $B(a,b)B(a+b,c) = B(b,c)B(a,b+c)$

Solución

a) $B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1)$

$$\begin{aligned} B(a+1,b) + B(a,b+1) &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} + \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \\ &= \frac{a\Gamma(a)\Gamma(b) + \Gamma(a)b\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} \\ &= \frac{\cancel{(a+b)}(\Gamma(a)\Gamma(b))}{\cancel{(a+b)}\Gamma(a+b)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= B(a,b) \end{aligned}$$

b) $B(a,b) = \frac{a+b}{b}B(a,b+1)$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{b}B(a,b+1) &= \frac{a+b}{b}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \\ &= \frac{\cancel{a+b}}{\cancel{b}}\frac{\Gamma(a)\cancel{b}\Gamma(b)}{\cancel{(a+b)}\Gamma(a+b)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= B(a,b) \end{aligned}$$

c) $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a} B(a+1, b-1)$

$$\begin{aligned}
\frac{b-1}{a} B(a+1,b-1) &= \frac{b-1}{a}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b-1)}{\Gamma(a+b)} \\
&= \frac{\cancel{b-1}}{\cancel{a}}\frac{\cancel{a}\Gamma(a)\frac{\Gamma(b)}{\cancel{b-1}}}{\Gamma(a+b)} \\
&= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\
&= B(a,b)
\end{aligned}$$

d) $B(a,b)B(a+b,c) = B(b,c)B(a,b+c)$

$$\begin{aligned}
B(a,b) &= \frac{B(b,c)B(a,b+c)}{B(a+b,c)} \\
&= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\frac{a\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)}\frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(b+c)\Gamma(c)} \\
&= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\
&= B(a+b)
\end{aligned}$$

13.3.4 Evaluar

$$\int (1+x)^a(1-x)^b dx$$

en términos de la función Beta

Solución

Haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$ y $dx = -\operatorname{sen}\theta d\theta$

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b dx = \int_{-1}^{1}(1+\cos\theta)^a(1-\cos\theta)^b(-\operatorname{sen}\theta d\theta)$$

y haciendo otro cambio de variable $\alpha = \theta/2$ donde $\alpha \in [0, \pi/2]$

$$\int_{-1}^{1}(1+\cos\theta)^a(1-\cos\theta)^b(-\operatorname{sen}\theta d\theta) = \int_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2\alpha)^a(1-\cos 2\alpha)^b(-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha d\alpha)$$

y usando las identidades trigonométricas

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{0}(1+\cos 2\alpha)^a(1-\cos 2\alpha)^b(-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha d\alpha) &= \int_{\pi/2}^{0}(2\cos^2\alpha)^a(2\operatorname{sen}^2\alpha)^b(-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha d\alpha) \\
&= -2^{a+b+2}\int_{\pi/2}^{0}(\cos\alpha)^{2a+1}(\operatorname{sen}^2\alpha)^{2b+1}d\theta \\
\text{usando la funcion Betta} & \\
B(m+1,n+1) &= 2\int_{0}^{\pi/2}(\cos\alpha)^{2m+1}(\operatorname{sen}^2\alpha)^{2n+1}d\theta \\
&= -2^{a+b+2}\frac{B(a+1,b+1)}{2} \\
&= -2^{a+b+1}B(a+1,b+1)
\end{aligned}$$

13.3.8 Evalué Usando la función Beta

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta d\theta = \frac{(2\pi)^{2/3}}{16[\Gamma(5/4)]^2}$$

Solución
Usando

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \operatorname{sen}^{2y-1}\theta d\theta$$

podemos ver que $2x - 1 = \frac{1}{2}$ de aquí $x = 3/4$ y $2y - 1 = 0$, $y = 1/2$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta d\theta = B(3/4, 1/2) = \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}$$

sabemos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y usando

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

$$\Gamma(3/4) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(1/4)}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta d\theta &= \frac{(\sqrt{2}\pi)\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/4)\Gamma(5/4)} \\ &= \frac{(\sqrt{2}\pi)\sqrt{\pi}}{\frac{1}{4}\Gamma(5/4)\Gamma(5/4)} \\ \text{usando } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) & \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{4[\Gamma(5/4)]^2} \\ \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta d\theta &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{16[\Gamma(5/4)]^2} \end{aligned}$$

13.3.13 Una partícula de masa m se mueve en un potencial simétrico, dado por $U(x) = A|x|^n$, con A una constante y n un entero. La partícula tiene una energía mecánica total $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$, donde $v = dx/dt$. Muestre que el periodo del movimiento es

$$T = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2\pi m}{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}$$

Solución:
Despejando la velocidad en la ecuación de la energía

$$\frac{dx}{dt} = \left[[E - A|x|^n]\left(\frac{2}{m}\right)\right]^{1/2}$$

$$\tau = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\left[[E - A|x|^n]\left(\frac{2}{m}\right)\right]^{1/2}}$$

como el potencial es simétrico, se toma la parte positiva

$$\tau = 4\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\left[[E - A|x|^n]\left(\frac{2}{m}\right)\right]^{1/2}}$$

El periodo esta dado por

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^x \frac{dx}{(E - Ax^n)^{1/2}}$$

Sabemos que $Ax^n = Ey$ y $dx = \dfrac{x}{ny}dy$

entonces $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + U(x) = Ax_{max}$, en $x = 0$, $v = 0$, ademas $v = \dfrac{Ax_{max}}{Ax_{max}} = 1$ por lo que estos son los limites de integración

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^1 \frac{xdy}{ny(E - Ey)^{1/2}} = 2\sqrt{2m}\int_0^x \frac{xdy}{nyE^{1/2}(1-y)^{1/2}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^1 \frac{xdy}{y(1-y)^{1/2}}$$

Por otra parte

$$x = x^n(1/n) = \left(\frac{yE}{A}\right)^{1/n}$$

Sustituyendo x

$$E = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^1 \frac{xdy}{y(1-y)^{1/2}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^1 \frac{\left(\frac{yE}{A}\right)dy}{y(1-y)^{1/2}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{2m}{E}}\left(\frac{E}{A}\right)\int_0^1 y^{(1/n)-1}(1-y)^{-1/2}dy$$

7. Función de Legendre

15.1.6 Por difereciacion la función generatriz $g(t,x)$ con respecto a t, multiplicada por $2t$ y agregando $g(t,x)$ muestra que

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_nt^n \tag{13}$$

tenemos que

$$g(x,t) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

la derivada es

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{2t-2x}{2(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}$$

multiplicando por $2t$

$$2t\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{2tx-2t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}2tP_n(x)t^n$$

Restando $g(x,t)$

$$\frac{2tx-2t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}2tP_n(x)t^n + P_n(x)t^n$$

$$\frac{2tx-2t^2+(1-2xt+t^2)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2t+1)P_n(x)t^n$$

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2t-1)P_n(x)t^n$$

15.1.7 Derive la ecuación 12.27

$$(1-x^2)P_n'(x) = n(n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \tag{14}$$

Solución:
en el libro da la siguiente ecuación

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

$$nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \tag{15}$$

por otra parte tenemos que una formula de recurrencia es

$$(1-x^2)P'n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

$$nP_{n-1}(x) = (1-x^2)P'n(x) + nxP_n(x) \tag{16}$$

igualando 15 y 16

$$(1-x2)P'n(x) + nxP_n(x) = (2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

$$(1-x^2)P'n(x) = (2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) - nxP_n(x)$$

$$(1-x^2)P'n(x) = (2n+1-n)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

$$(1-x^2)P'n(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

15.1.8 Pruebe que

$$P_n'(1) = \frac{d}{dx}P_{n x=1} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Solución:
De la ecuación diferencial de legendre

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P(x) = 0$$

si $x = 1$

$$-2P_n'(1) + n(n+1)P(1) = 0$$

$$2P_n'(1) = n(n+1)P(1)$$

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}P(1)$$

Sabemos que $P(1) = 1$

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

15.1.15 Muestra que

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!} \tag{17}$$

Solución:

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n dx$$

integrando por partes

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^2-1)^n - \int_{-1}^{1} nx^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^2-1)^n dx\right]$$

El primer termino evaluado es cero, integramos de nuevo por partes

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[nx^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(x^2-1)^n - \int_{-1}^{1} n(n-1)x^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(x^2-1)^n dx\right]$$

Integraciones adicionales por partes hasta la diferenciación dentro de la integral ha sido eliminado por completo llevar a

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} n!(x^2-1)^n dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2\int_0^1 (x^2-1)^n dx\right]$$

Observemos que la integral resultante es la función betta

$$B(1/2, n+1) = \frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!}$$

en consecuencia mostramos 17

15.2.1 Usando la formula de Rodrigues muestre que los $P_n(x)$ son ortogonales y que

$$I = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \tag{18}$$

Solución

$$I = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

Integrando por partes

$$2^{2n}(n!)^2 i = \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx$$

la diferenciación de $(x^2-1)^n$ cualquier cosa menor que n veces deja una expresión que tiene x^2-1 como un factor de modo que el primero de estos dos términos se puede omitir. integrando de nuevo por partes obtenemos

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n$$

La $2n$ derivada del polinomio que tiene el grado $2n$ es $(2n)!$ de modo

$$I_n = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$$

$$\int_0^1 s^n(1-s)^n ds = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

asi obtenemos

$$I = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

15.2.7 Una función $f(x)$ se expande en una serie de Legendre. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ muestre que

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n^2}{2n+1}$$

sabemos que

$$\int_{-1}^{1} P_n P_{n_1} dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx &= \int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n_1}(x)dx \\
&= \sum_{n,n_1}^{\infty} a_n a_{n_1} \int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n_1}(x)dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n^2}{2n+1}
\end{aligned}$$

15.3.1 Desarrolle el potencial electrostático para el conjunto de cargas que se muestra en la Fig. 15.7. Se trata de un cuadrupolo eléctrico lineal.

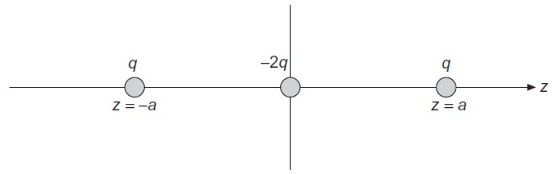


FIGURE 15.7 Linear electric quadrupole.

Solución

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|r+az|^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{|r-az|^2}\right)$$

sabemos $|A| = (r+az)\cdot(r+az) = |r|^2 + 2|a||r| + |a|^2$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2\right)^{-1/2} - \frac{2}{r} + \left(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2\right)^{-1/2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(-\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[2\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

15.3.4 Use $E = -\nabla\Phi$ determine las componentes del campo eléctrico correspondiente para el potencial del dipolo eléctrico

$$\varphi = \frac{2aqP_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) \\
&= \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2\cos\theta}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right) \\
&= \frac{-aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{aq\operatorname{sen}\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

15.3.2 Calculé el potencial electrostatico del arreglo que se muestra en la siguiente figura este es un ejemplo igual pero en direcciones opuestas del cuadripolo. La contribuciones del cuadripolo se cancelan y las del octopolo no se cancelan

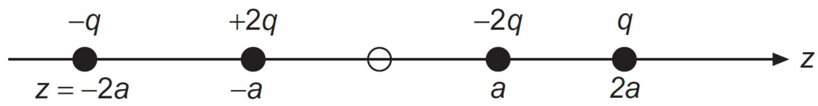


FIGURE 15.8 Linear electric octopole.

Solución:

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(r-(-2a))^2}+\frac{1}{(r-(-a))^2}-\frac{-1}{(r-2a)^2}\frac{1}{(r-a)^2}+\frac{1}{(r-2a)^2}\right]$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-(r^2+4ar\cos\theta+4a^2)^{-1/2}+2(r^2+2ar\cos\theta+a^2)^{-1/2}\right.\\ &+ 2(r^2+4ar\cos\theta+4a^2)^{-1/2}-2(r^2+2ar\cos\theta+a^2)^{-1/2}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(-\left(1+\frac{4a}{r}\cos\theta+\left(\frac{2a}{r}\right)^2\right)\right)^{1/2}+\left(1-\frac{4a}{r}\cos\theta+\left(\frac{-2a}{r}\right)^2\right)^{1/2}\right]\\ &+ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1+\frac{2a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2}-\left(1+\frac{2a}{r}\cos\theta+\left(\frac{-a}{r}\right)^2\right)^{1/2}\right]\end{aligned}$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{-2a}{r}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{-a}{r}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{2a}{r}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{2a}{r}\right)^n(-1)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n(-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{2a}{r}\right)^n\right]\\ &- \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]\end{aligned}$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}\left(\frac{2a}{r}\right)^{2n+1}-4\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]$$

$$V=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}\left(\frac{2a}{r}\right)^{2n+1}-2\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]$$

$$V=\frac{q}{\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}(2^{2n-1})\right]$$

$$=\frac{q}{\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{3}{2}(\cos^3\theta-3\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3+\frac{15}{8}(63\cos^5\theta-15\cos^2\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^5\right)$$

15.3.5 Operando en coordenadas esféricas demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right]=-(n+1)\frac{P_{n+1}}{r^{n+2}}$$

Sabemos que (ver notas del curso)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = \cos\theta\left(-\frac{n+1}{r^{n+2}}P_n\right) - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta P_n'(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{n+1}{r^{n+2}}(\cos\theta)P_n - \frac{\operatorname{sen}^2\theta P_n'(\cos\theta)}{r^{n+2}} \tag{19}$$

por otra parte tenemos (una forma de rescribir la ED de Legrendre)

$$(1-x^2)P_n'(x) - (n+1)xP_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x)$$
$$P_n'(x) = \frac{1}{(1-x^2)}\left((n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)\right) \tag{20}$$

sustituyendo 19 en20

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right] = \frac{(n+1)}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\cos\theta P_n - P_{n+1}\right)\operatorname{sen}^2\theta\frac{1}{r^{n+2}} - \frac{P_n(\cos\theta)(n+1)}{r^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{r^{n+2}}\left((n+1)\cos\theta P_n(\cos\theta) - (n+1)P_{n+1}(\cos\theta) - (n+1)\cos\theta P_n(\cos\theta)\right)$$

$$= -\frac{(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}}$$

15.3.8 se colocan un sistema de dos cargas como se muestra en la figura. q' esta a una distancia $a' = r_2/a$ desde el centro de la esfera y $q' = -qr/a$. Debemos mostrar que los potenciales producidos en P de la dos cargas es cero

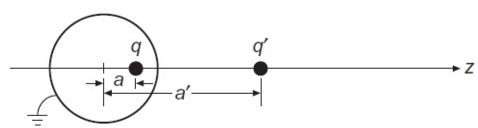


FIGURE 15.9 Image charges for Exercise 15.3.8.

Solución

para esto q/r_1 debe ser igual $-q'/r_2$

$$q^2r_2^2 = q'^2r_1^2$$
$$ar_2^2 = r_0^2r_1^2$$

utilizando la ley de los cosenos

$$r_1^2 = r_0^2 + a^2 + 2r_0a\cos\theta$$
$$r_2^2 = r_0^2 + a'^2 + 2r_0a'\cos\theta$$

entonces esta relación $ar_2^2 = r_0^2r_1^2$ se remplaza a' por r_0^2/a, obteniendo

$$r_0^2r_1^2 = r_0^4 + a^2r_0^2 - 2ar_0^2\cos\theta$$

$$a^2r_2^2 = a^2r_0^2 + a^2\left(\frac{r_0^2}{a^2}\right) - 2a^2r_0\left(\frac{r_0^2}{a^2}\right)\cos\theta$$

Estas dos expresiones son claramente iguales, completando nuestra prueba.

8. Ecuación Asociada de Legendre

15.4.3 Pruebe que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \tag{21}$$

donde P_n^m esta definido por

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(1-x^2)^n \tag{22}$$

Tomando P_m necesitamos

$$\left(\frac{d}{x}\right)^{l-m} (l-m)(l+m)$$

la formula de Leibniz se puede expresar en términos de suma

$$P_n^{-m} = (x-1)^{-m/2}(-1)^{-m/2}(x+1)^{-m/2} \sum_{j=0}^{l-m} \begin{pmatrix} l-m \\ j \end{pmatrix} \frac{l!}{(l-j)!}(x-1)^{l-j} \frac{l!}{(m+j)!}(x-1)^{m+j}$$

$$= (-1)^{-m/2} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-m)!l!(x-1)^{j-l-m/2}}{j!(l-m-j)!(l-j)!(m+j)!}$$

Ahora aplicamos un procedimiento similar a P_l^m. observemos que el número de diferenciaciones excede l, por lo que la suma j se observa que ninguno de los factores puede ser diferenciado más de 1 veces.

$$P_n^m = (x-1)^{m/2}(-1)^{m/2}(x+1)^{m/2} \sum_{j=0}^{l+m} \begin{pmatrix} l+m \\ j \end{pmatrix} \frac{l!}{(l-j)!}(x-1)^{l-j} \frac{l!}{(j-m)!}(x-1)^{j-m}$$

$$= (-1)^{m/2} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l+m)!l!(x-1)^{l-j-m/2}(x+1)^{j-m/2}}{j!(l+m-j)!(l-j)!(j-m)!}$$

reemplazando el índice de suma j por $k+m$ con esto paraP_l^m tenemos

$$P_l^m(-1)^{m/2} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(m+1)!l!l!(x-1)^{l-k-m/2}(x+1)^{k+m/2}}{(m+k)!(k-l)!(l-m-k)!k!}$$

Comparando la forma final de las expresiones P_l^m y P_l^{-m} resulta

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

15.4.4 Muestra que

$$P_{2l}^1(0) = 0$$

$$P_{2l+1}^1(0) = (-1)^{l+1} \frac{(2l+1)!!}{(2l)!!}$$

por cada uno de estos métodos

(a) Usando la relación de recurrencia

(b) expansión de la función generatriz

Solución:

(a) Dado la ecuación

$$(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)$$

con $x=0$ y $m=1$ tenemos

$$P_{l+1}^1(0) = \frac{l+1}{l}P_{l-1}^1(0)$$

para $l=0$

$$P_1^1(0) = \frac{0+1}{0}P_{-1}^1(0) = -1$$

para $l=1$

$$P_2^1(0) = \frac{1+1}{l}P_0^1(0) = 0$$

para $l=2$

$$P_3^1(0) = \frac{2+1}{2}P_{-1}^1(0) = \frac{3}{2}$$

para $l=4$

$$P_5^1(0) = \frac{4+1}{4}P_{-1}^1(0) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{15}{8}$$

para $l=6$

$$P_7^1(0) = \frac{6+1}{6}P_{-1}^1(0) = \left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{105}{42}$$

en general

$$P_{2l+1}^1(0) = \frac{(2l+1)!!}{(2l)!!}$$

y

$$P_{2l}^1(0) = 0$$

(b) Escribir P_{2n} y P_{2n+1} para distinguir incluso valores de índice impares, primero notamos que debido a que P_{2n+1} es impar bajo paridad, es decir, $x \to -x$, debe tener $P_{2n+1}(0) = 0$. Para obtener $P_{2n}(0)$ recurrimos nuevamente a la expansión binomial:

$$g(0,t) = \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{-1/2}{n}\right)t^{2n}\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n}(0)t^{2n}$$

$$P_{2l+1}^1(0) = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

15.4.7 Muestre que

$$P_l^l(\cos\theta) = (-1)^l(2l-1)!!\operatorname{sen}^l\theta \qquad l = 1,2,3\ldots$$

Solución

Tenemos la formula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

obteniendo la segunda derivada

$$P_n^n(x) = \frac{(-1)^n(1-x^2)^{n/2}}{2^n n!}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}(2n)! &= 2*4*6*8\ldots*(2n)\\ &= 2*[2(2)]*[2(3)]*[2(4)]\ldots*[2(n)]\\ &= 2^n[1*2*3*4\ldots]\\ &= 2^n n!\end{aligned}$$

y también

$$(2n-1)!! = 1*3*5\dots(2n-1) = \frac{1*2*3*4\dots(2n)}{2*4*6*8\dots*2n} = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!}$$

entonces

$$P_n^n(x) = (-1)^n(2n-1)!!(1-x^2)^{n/2}$$

haciendo $x = \cos\theta$

$$P_n^n(\cos\theta) = (-1)^n(2n-1)!!(\underbrace{1-\cos\theta^2}_{=\operatorname{sen}^2\theta})^{n/2}$$

$$P_n^n(\cos\theta) = (-1)^n(2n-1)!!\operatorname{sen}^n\theta$$

15.4.8 Derive la relación de recurrenncia asociada de Legrendre

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m(x) + [n(n+1)-m(m-1)]P_n^{m-1}(x) = 0 \tag{23}$$

Solución Usando la formula de Rodriguez y P_l^m satisface los polinomios asociados de Legrendre y escribiendo la forma autoadjunta

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)^{m/2}\frac{d}{dx}P_n = 0$$

Evaluamos todas las derivadas, excepto los que se aplican solo a P_N, obtenemos

$$(1-x^2)^{m/2+1}\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_n - m(1-x^2)^{m/2+1}\frac{d^m}{dx^m}P_n\left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n$$

Escribiendo, usando la formula de Rodriguez y sabiendo que tiene un termino $(-1)^m$

$$P_n^{m+2} - mP_n^m + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{m/2}}P_n^{m+1} + \frac{m^2x^2}{1-x^2}P_n^m + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m = 0$$

juntando las expresiones de P_n^m

$$P_n^{m+2} + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{m/2}}P_n^{m+1} + [n(n+1)-m(m+1)]P_n^m$$

haciendo $m = m-1$

$$P_n^m + \frac{2mx}{(1-x^2)^{(m-1)/2}}P_n^m + [n(n+1)-(m-1)m]P_n^{m-1}$$

15.4.11 Muestre que

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{dP_1^m}{d\theta}\frac{dP_{1'}^m}{d\theta} + \frac{m^2P_l^mP_{l'}^m}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{2l(l+1)}{2l+1}\frac{(l+1)!}{(l-1)!}\delta_{ll'}$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{P_l^1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{P_{l'}^1}{d\theta} + \frac{P_{l'}^1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{P_l^1}{d\theta}\right)\operatorname{sen}\theta d\theta = 0$

Solución:

(a)

$$I = \int_{-1}^1\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m(x)}{dx}\frac{dP_{l'}^m(x)}{dx} + \frac{m^2}{1-x^2}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\right]dx$$

integrando el primer termino por partes, la diferecial $(1-x^2)dP_l^m/dx$ y el integrando $dP_{l'}^m/dx$ Los términos de los límites desaparecen y obtenemos

$$I = \int_{-1}^{1} \left[-\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} \right] + \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m(x) \right] P_{l'}^m dx$$

$$I = \int_{-1}^{1} \left[\left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) + \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m(x) \right] P_{l'}^m dx$$

Ahora cancelamos los términos m^2 e identificamos lo que queda como una integral de ortogonalidad

$$I = \frac{2l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}$$

(b) la integral tiene la forma

$$\int_{-1}^{1} \left[P_l^1(x) \frac{dP_{l'}^1(x)}{dx} + P_{l'}(x) \frac{dP_l^1(x)}{dx} \right] dx$$

Por la regla del producto

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx} \left[P_l^1(x) P_{l'}^1 \right] dx$$

Sabemos que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) = \delta_{mn}$$

como $l' \neq l$ entonces la integral es cero

9. Funciones de Bessel

14.1.1 Del producto de las funciones generadoras $g(x,t) = g(x,-t)$, muestra que

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \dots \tag{24}$$

y por lo tanto $|J_0(x)| \leq 1$ y $|J_n(x)| \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$
Hint: Usar la unicidad de la serie de potencias
Sabemos que la función generadora se define
Solución:

$$g(x,t) = exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_n J_n(x) t^n \tag{25}$$

entonces el producto de

$$\begin{aligned} g(x,t)g(x,-t) &= exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] exp \left[\frac{x}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right) \right] \\ &= exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} - t + \frac{1}{t} \right) \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

reescribiendo

$$g(x,t)g(x,-t) = \sum_n J_n(x) t^n \sum_m J_m(x)(-t^n) = \sum_n \sum_m J_n(x) J_m(x) t^n (-t^m) = 1$$

Aplicando el teorema de Unicidad, sabemos que

$$J_n = (-1)^m J_{-m}$$

para $m = -n \neq 0$ obtenemos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m J_m (t^m * t^{-m}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2$$

esto resulta lo mismo que

$$J_0^2 + 2\sum_{m=0}^{\infty} [J_m]^2$$

porque es la imagen $[-\infty, 0]$ de $[0, \infty]$ así obtenemos 24

$$[J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \ldots = 1$$

14.1.2 Use una función generadora $g(x,t) = g(u+v,t) = g(u,t)g(v,t)$ Muestra que

a) $J_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_{n-s}(v)$

b) $J_0(u+v) = J_0(u)J_0(v) + 2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(u) J_{-s}(v)$

Estos son teoremas de adición para las funciones de Bessel.
Solución:

a) Sabemos que la función generadora es

$$g(x,t) = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_n J_n(x) t^n$$

entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)t^m \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(v)t^p$$

haciendo $p = n - m$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)t^m \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(v)t^{n-m}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} J_m(u)J_{n-m}(v)t^n$$

$$J_n(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)J_{n-m}(v)$$

b) del resultado anterior

$$J_n(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)J_{n-m}(v)$$

tenemos que para $n = 0$

$$J_0(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)J_{-m}(v)$$

sabemos que para cualquier u,

$$J_{-m}(u) = (-1)^m J_m(u)$$

si ambos términos son iguales

$$(-1)J_m(u)J_m(v)$$

$$(-1)J_m(u)J_m(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u)J_{n-m}(v)$$

14.1.3 Usando solo la función generadora

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{26}$$

y no la serie explícita de $J_n(x)$, muestran que $J_n(x)$ tiene paridad impar o par según si n es impar o par, esto es

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x) \tag{27}$$

Solución:
La función generadora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

multiplicando por 1

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x)(-t^n)$$

factorizando por $(-1)^n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(-x)t^n$$

14.1.4 Tenemos que las relaciones de recurrencia obtenidas por 25

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n(x) \tag{28}$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1} = 2J'_n(x) \tag{29}$$

a) $\dfrac{d}{dx}[x^n J_n] = x^n J_{n-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n J_n] &= nx^{n-1} J_n + x^n J' n \\
&= nx^{n-1} \frac{x[J_{n-1} + J_{n+1}]}{2n} + x^n \frac{[J_{n-1} - J_{n+1}]}{2} \\
&= x^n \frac{[J_{n-1} + J_{n+1}]}{2} + x^n \frac{[J_{n-1} - J_{n+1}]}{2} \\
&= x^n \frac{J_{n-1}}{2} + x^n \frac{J_{n+1}}{2} + x^n \frac{J_{n-1}(x)}{2} - x^n \frac{J_{n+1}}{2} \\
&= x^n J_{n-1}
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n] &= -nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x) \\
&= -nx^{-n-1} \frac{x[J_{n-1} + J_{n+1}]}{2n} + x^{-n} \frac{[J_{n-1}(x) - J_{n+1}]}{2} \\
&= -x^{-n} \frac{[J_{n-1} + J_{n+1}]}{2} + x^{-n} \frac{[J_{n-1} - J_{n+1}]}{2} \\
&= -x^{-n} J_{n+1}
\end{aligned}$$

c) $J_n = J'_{n+1} + \dfrac{n+1}{x} J_{n+1}(x)$
de (4) haciendo $n = n+1$

$$J_n(x) - J_{n+2} = 2J'_{n+1}(x)$$

y

$$J_n(x) + J_{n+2} = \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x)$$

remplazando J_{n+2}, en la anterior ecuación

$$J_n(x) = 2J'_{n+1} + \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x) - J_n(x)$$

$$2J_n(x) = 2J'_{n+1} + \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x)$$
$$J_n(x) = J'_{n+1} + \frac{n+1}{x} J_{n+1}(x)$$

14.1.5 Derive la expansión Jacobi-Anger

$$e^{ip\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(p) e^{im\varphi} \tag{30}$$

Esta es una expansión de una onda plana en una serie de ondas cilíndricas.
Solución:
La función generadora es

$$g(x,t) = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_n J_n(x) t^n$$

haciendo $t = ie^{i\varphi}$ y $x = \rho$, sustituyendo

$$\begin{aligned}
g(\rho, ie^{i\varphi}) &= exp\left[\frac{\rho}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{1}{ie^{i\varphi}}\right)\right] \\
&= exp\left[\frac{\rho}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{i}{i^2 e^{i\varphi}}\right)\right] \\
&= exp\left[\frac{i\rho}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)\right] \\
\text{Sabemos que } e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi & \\
&= exp\left[\frac{i\rho}{2}\left(2\cos\varphi\right)\right] \\
&= exp\left(i\rho\cos\varphi\right) \\
\text{Por otra parte Sustituyendo } t \text{ y } x & \\
g(\rho, ie^{i\varphi}) &= \sum_m J_m(\rho)[ie^{i\varphi}]^m \\
&= \sum_m J_m(\rho) i^m [e^{i\varphi}]^m
\end{aligned}$$

entonces demostramos 30

14.1.9 Probar que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \int_0^{\pi} J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta$$

usamos la función beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = 2\int_0^{\pi}\cos^{2p-1}\theta\operatorname{sen}^{2q-1}\theta d\theta$$

aquí $n = 1/2$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2^n n!][2^n n!]}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
(2n)! &= 2*4*6*8\ldots*(2n) \\
&= 2*[2(2)]*[2(3)]*[2(4)]\ldots*[2(n)] \\
&= 2^n[1*2*3*4\ldots] \\
&= 2^n n!
\end{aligned}$$

y también

$$(2n-1)!! = 1*3*5\ldots(2n-1) = \frac{1*2*3*4\ldots(2n)}{2*4*6*8\ldots*2n} = \frac{(2n)!}{(2n)!!}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

14.1.10 Derive

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x) \tag{31}$$

Hint: Prueba la inducción matemática

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right] = -x^{-n}J_{n+1}(x) \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{1^n}{x}J_n(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^n(-1)^n x^{-1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x)\right] \\
&= (-1)^n\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x)\right] \\
&= (-1)^n x\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}(x) &= -x^n \frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right. \\
&= -x^n \left[(-1)^n x \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} J_0\right] \\
&= (-1)^{n+1} x^{n+1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} J_0(x)
\end{aligned}
$$

9.1. Funciones de Neumann

14.3.1 Pruebe que las funciones de Neumann Y_n (con n entero) satisfacen las relaciones de recurrencia

$$
\begin{aligned}
Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} Y_n(x) \\
Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) &= 2Y'_n(x)
\end{aligned}
$$

Solución:
De las relaciones de recurrencia de Bessel

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

hacemos $n \to -n$

$$J_{-n-1}(x) + J_{1-n}(x) = -\frac{2x}{n} J_{-n}(x) \tag{33}$$

$$J_{-n-1}(x) - J_{1-n}(x) = -\frac{2x}{n} J'_n(x) \tag{34}$$

de la relación de Neumann

$$Y_n = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}}{\operatorname{sen} n\pi}$$

sustituimos 33 y 34

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} + Y_{n-1} &= \frac{\cos(n+1)_{n+1}(x) - J_{-n-1}}{\operatorname{sen}(n+1)\pi} + \frac{\cos(n-1)_{-n-1}(x) - J_{1-n}}{\operatorname{sen}(n-1)\pi} \\
&= \frac{\cos n\pi [J_{n+1}(x) + J_{n-1}]}{\operatorname{sen} n\pi} + \frac{J_{-(n+1)}(x) + J_{-(n-1)}}{\operatorname{sen} n\pi}
\end{aligned}
$$

sabemos que

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

entonces

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} + Y_{n-1} &= \frac{\cos n\pi \left(\frac{2n}{x} J_n(x)\right)}{\operatorname{sen} n\pi} - \frac{\left(\frac{2n}{x} J_{-n}(x)\right)}{\operatorname{sen} n\pi} \\
&= \frac{2n}{x}\left[\frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi}\right] \\
&= \frac{2n}{x} Y_n
\end{aligned}
$$

14.3.5 Verifique la formulas Wronskianas

$$J_v(x) J_{-v+1}(x) + J_{-v}(x) J_{v-1}(x) = \frac{2 \operatorname{sen} v\pi}{\pi x}$$

$$J_vY_v' - J_v'Y_v = \frac{2}{\pi x}$$

Solución:
usando

$$J_v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(v+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}$$

$$\begin{aligned}
J_v(x)J_{-v+1}(x) + J_{-v}(x)J_{v+1}(x) &= \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(v+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s-v+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v+1+2s}\right] \\
&+ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2s}\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(v+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1+2s}\right] \\
s = 0 & \\
&= \frac{x^{-v}}{2^{-v}\Gamma(-v+1)} \frac{x^{v-1}}{2^{v-1}\Gamma(v)} \\
&= \frac{x^{-1}}{2^{-1}\Gamma(v)\Gamma(1-v)} \\
&= \frac{x^{-1}}{2^{-1}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} v\pi}\right)} \\
&= \frac{2\operatorname{sen} v\pi}{x\pi}
\end{aligned}$$

Dado que la potencia inicial de x en $J_v(x)$ es x^v, la potencia principal para x pequeña (la potencia más baja) provendrá solo del segundo término del Wronskiano

Para la segunda expresión

tenemos que

$$Y_v = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\operatorname{sen} v\pi}$$

por otra parte

$$J_v'(x) = \frac{1}{x}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(v+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}$$

$$\begin{aligned}
J_vY_v' - J_v'Y_v &= J_v\left(\frac{\cos v\pi J_v'(x) - J_{-v}'(x)}{\operatorname{sen} v\pi}\right) \\
&- J_v'\left(\frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\operatorname{sen} v\pi}\right) \\
&= \frac{\cos v\pi J_v(x)J_v'(x) - J_{-v}'(x)J_v(x)}{\operatorname{sen} v\pi} - \frac{\cos v\pi J_v(x)J_v'(x) - J_{-v}(x)J_v'(x)}{\operatorname{sen} v\pi} \\
&= \frac{\cos v\pi[J_v(x)J_v'(x) + J_v(x)J_v'(x)]}{\operatorname{sen} v\pi} - \frac{J_v(x)J_{-v}(x)' + J_v'(x)J_{-v}(x)}{\operatorname{sen} v\pi}
\end{aligned}$$

sabemos que

$$J_v(x)J_{-v}'(x) - J_v'(x)J_{-v}(x) = -\frac{2\operatorname{sen} v\pi}{\pi x}$$

$$\begin{aligned}
J_vY_v' - J_v'Y_v &= -\frac{1}{\operatorname{sen} v\pi}\left(J_v(x)J_{-v}(x)' - J_v'(x)J_{-v}(x)\right) \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen} v\pi}\left(\frac{-2\operatorname{sen} v\pi}{\pi x}\right) \\
&= \frac{2}{\pi x}
\end{aligned}$$

9.2. Funciones de Hankel

14.4.1 Verifique las formulas del Wronskiano

(a) $J_v(x)H_v^{(1)\prime}(x) - J_v'(x)H_v^{(1)}(x) = \dfrac{2i}{\pi x}$

(b) $J_v(x)H_v^{(2)\prime}(x) - J_v'(x)H_v^{(2)}(x) = -\dfrac{2i}{\pi x}$

(c) $N_v(x)H_v^{(1)\prime}(x) - N_v'(x)H_v^{(1)}(x) = -\dfrac{2}{\pi x}$

(d) $N_v(x)H_v^{(2)\prime}(x) - N_v'(x)H_v^{(2)}(x) = -\dfrac{2}{\pi x}$

(e) $H_v^{(1)}(x)H_v^{(2)\prime}(x) - H_v^{(1)\prime}(x)H_v^{(2)}(x) = -\dfrac{4i}{\pi x}$

(f) $H_v^{(2)}(x)H_{v+1}^{(1)}(x) - H_v^{(1)}(x)H_{v+1}^{(2)}(x) = \dfrac{4}{i\pi x}$

(g) $J_{v-1}(x)H_v^{(1)}(x) - J_v(x)H_{v-1}^{(1)}(x) = \dfrac{2}{i\pi x}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
J_v(x)H_v^{(1)\prime}(x) - J_v'(x)H_v^{(1)}(x) &= J_v(x)\left[J_v(x) + iN_v(x)\right]' - J_v'(x)\left[J_v(x) + iN_v(x)\right] \\
&= J_v(x)J_v'(x) + iJ_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)J_v(x) - iJ_v'(x)N_v(x) \\
&= i[J_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)N_v(x)] \\
&= \frac{2i}{\pi x}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
J_v(x)H_v^{(2)\prime}(x) - J_v'(x)H_v^{(2)}(x) &= J_v(x)\left[J_v(x) - iN_v(x)\right]' - J_v'(x)\left[J_v(x) - iN_v(x)\right] \\
&= J_v(x)J_v'(x) - iJ_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)J_v(x) + iJ_v'(x)N_v(x) \\
&= -i[J_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)N_v(x)] \\
&= -\frac{2i}{\pi x}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
N_v(x)H_v^{(1)\prime}(x) - N_v'(x)H_v^{(1)}(x) &= N_v(x)\left[J_v(x) + iN_v(x)\right]' - N_v'(x)\left[J_v(x) + iN_v(x)\right] \\
&= N_v(x)J_v'(x) + iN_v(x)N_v'(x) - N_v'(x)J_v(x) - iN_v'(x)N_v(x) \\
&= -[J_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)N_v(x)] \\
&= -\frac{2}{\pi x}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
N_v(x)H_v^{(2)\prime}(x) - N_v'(x)H_v^{(2)}(x) &= N_v(x)\left[J_v(x) - iN_v(x)\right]' - N_v'(x)\left[J_v(x) - iN_v(x)\right] \\
&= N_v(x)J_v'(x) - iN_v(x)N_v'(x) - N_v'(x)J_v(x) + iN_v'(x)N_v(x) \\
&= -[J_v(x)N_v'(x) - J_v'(x)N_v(x)] \\
&= -\frac{2}{\pi x}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
H_v^{(1)}(x)H_v^{(2)\prime}(x) - H_v^{(1)\prime}(x)H_v^{(2)}(x) &= (J_v(x) + iN_v(x))(J_v(x) - iN_v(x))' \\
&- (J_v(x) + iN_v(x))'(J_v(x) - iN_v(x)) \\
&= J_v(x)J_v'(x) - iJ_v(x)N_v'(x) + iN_v(x)J_v'(x) + N_v(x)N_v'(x) \\
&- J_v'(x)J_v(x) + iJ_v'(x)N_v(x)iN_v'(x)J_v(x) - N_v(x)N_v'(x) \\
&= -i\left[(J_v(x)N_v'(x)) + (J_v(x)N_v'(x))\right] \\
&= -i\left[\frac{2}{\pi x} + \frac{2}{\pi x}\right] \\
&= -\frac{4i}{\pi x}
\end{aligned}$$

(f)

$$
\begin{aligned}
H_v^{(2)}(x)H_{v+1}^{(1)}(x) - H_v^{(1)}(x)H_{v+1}^{(2)}(x) &= \left(J_v(x) - iN_v(x)\right)\left(J_{v+1}(x) + iN_{v+1}(x)\right) \\
&- \left(J_v(x) + iN_v(x)\right)'\left(J_{v+1}(x) - iN_{v+1}(x)\right) \\
&= J_v(x)J_{v+1}(x) + iJ_v(x)N_{v+1}(x) - iN_v(x)J_{v+1}(x) \\
&+ N_v(x)N_{v+1}(x) - J_{v+1}(x)J_v(x) + iJ_v(x)N_{v+1}(x) \\
&- iN_v(x)J_{v+1}(x) - N_v(x)N_{v+1}(x) \\
&= i\left[J_v(x)N_{v+1}(x) - J_{v+1}(x)N_v(x)\right] \\
&= 2i\left[\frac{2}{\pi x} + \frac{2}{\pi x}\right] \\
&= -\frac{4i}{\pi x}
\end{aligned}
$$

(g) $J_{v-1}(x)H_v^{(1)}(x) - J_v(x)H_{v-1}^{(1)}(x) = \dfrac{2}{i\pi x}$

$$
\begin{aligned}
J_{v-1}(x)H_v^{(1)}(x) - J_v(x)H_{v-1}^{(1)}(x) &= J_{v-1}(x)[J_v(x) + iN_v(x)] - J_v(x)[J_{v-1}(x) + iN_{v-1}(x)] \\
&= J_{v-1}(x)J_v(x) + iN_v(x)J_{v-1}(x) - J_v(x)J_{v-1}(x) - iN_{v-1}(x)J_v(x) \\
&= i[N_v(x)J_{v-1}(x) - iN_{v-1}(x)J_v(x)] \\
&= \left[J_{v-1}\frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\operatorname{sen} v\pi} - J_v\frac{\cos(v-1)\pi J_{v-1}(x) - J_{1-v}(x)}{\operatorname{sen}(v-1)\pi}\right] \\
&= i\left[\tan v_{v-1}J_v - \frac{J_{v-1}J_v}{\operatorname{sen} v\pi} - \tan v\pi J_v J_{v-1} - \frac{J_v J_{1-v}}{\operatorname{sen} v\pi}\right] \\
&= -\frac{i}{\operatorname{sen} v\pi}[J_v J_{1-v} + J_{-v}J_{v-1}] \\
&= -\frac{i}{\operatorname{sen} v\pi}\frac{2\operatorname{sen} v\pi}{\pi x} \\
&= -\frac{2i}{\pi x} = \frac{2}{i\pi x}
\end{aligned}
$$

9.3. Funciones modificadas de Bessel

14.5.1 Muestre que $e^{(x/2)(t+1/t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$ la función generadora modificada de Bessel, $I_n(x)$ de la función generadora

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t+1/t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

hacemos $x = ix$ y $t = -it$

$$e^{(ix/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ix)(-it)^n$$

$$e^{(ix/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ix)(-i)^n(t)^n$$

sabiendo que

$$i^{-n} = \frac{1}{i^n}\frac{(-i)^n}{(-i)^n} = \frac{(-i)^n}{[(i)(-i)]^n]} = (-i)^n$$

$$e^{(ix/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^{-n} J_n(ix)(t)^n$$

definió las funciones de Bessel modificadas del primer tipo, denotadas $I_n(x)$ como

$$I_v(x) = i^{-v} J_v(ix)$$

Así obtenemos

$$e^{(x/2)(t+1/t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$$

14.5.2 Verificar las siguientes identidades.

(a) $1 = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)$

(b) $e^x = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)$

(c) $e^{-x} = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(x)$

(d) $\cosh x = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x)$

(e) $\sinh x = 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x)$

(a) $1 = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)$

solución

sabemos

$$e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n t^n$$

remplazando $t = ie^{i\varphi}$

$$exp\left[\frac{ix}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{1}{ie^{i\varphi}}\right)\right] = exp\left[\frac{ix}{2}\left(\cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi\right)\right] = exp\left(xi\cos\varphi\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(iexp(i\varphi))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x)exp(in\varphi)$$

realizando el cambio $x \to ix$

$$\begin{aligned}
exp\left[i(ix)\cos\frac{\pi}{2}\right] &= e^0 \\
&= 1 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(ix)\left[\cos\pi/2 - i\operatorname{sen}\pi/2\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n} J_n(ix) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(ix) \\
&= J_0(ix) + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n J_n(ix) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_n(ix) \\
&= J_0(ix) + \sum_{n=1}^{\infty}[J_n(ix) + (-1)^n J_n(ix)]
\end{aligned}$$

para n par

$$\begin{aligned}
&= J_0(ix) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(ix) \\
&= J_0(ix) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} I_{2n}(x) \\
&= J_0(ix) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)
\end{aligned}$$

(b) $e^x = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)$

solución

sabemos

$$e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n t^n$$

remplazando $t = ie^{i\varphi}$

$$exp\left[\frac{ix}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{1}{ie^{i\varphi}}\right)\right] = exp\left[\frac{ix}{2}\left(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi\right)\right] = exp\left(xi\cos\varphi\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(iexp(i\varphi))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) exp(in\varphi)$$

realizando el cambio $x \to -ix$ para φ

$$\begin{aligned}
exp\left[i\left(ix\cos 0\right)\right] &= e^x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(-ix) e^{i\pi(0)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(-ix)
\end{aligned}$$

para las funciones de bessel se sabe que n es para también lo es su función y es impar para n impar

$$\begin{aligned}
e^{x} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n} J_{2n}(-ix) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n+1} J_{2n+1}(-ix) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(ix) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n(-1) i J_{2n+1}(ix) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n i^{2n} I_{2n}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n i^{-1} i^{2n+1} I_{2n+1}(x) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n} I_{2n}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n} I_{2n+1}(x) \\
&= I_0(x) + \sum_{n=-\infty}^{-1} I_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x) \\
&= I_0(x) + \sum_{n=-\infty}^{-1} I_{-n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x) \\
&= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)
\end{aligned}$$

(c) $e^{-x} = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(x)$

Solución

sabemos

$$e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n t^n$$

remplazando $t = ie^{i\varphi}$

$$exp\left[\frac{ix}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{1}{ie^{i\varphi}}\right)\right] = exp\left[\frac{ix}{2}\left(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi\right)\right] = exp\left(xi\cos\varphi\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(iexp(i\varphi))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) exp(in\varphi)$$

realizando el cambio $x \to -x$

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= I_0(-x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(-x) \\
&= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(-x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n+1}(-x) \\
&= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n+1}(x) \\
&= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(x)
\end{aligned}$$

(d) $\cosh x = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x)$

solución

sabemos

$$e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n t^n$$

remplazando $t = ie^{i\varphi}$

$$exp\left[\frac{ix}{2}\left(ie^{i\varphi} - \frac{1}{ie^{i\varphi}}\right)\right] = exp\left[\frac{ix}{2}\left(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi\right)\right] = exp\left(xi\cos\varphi\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(iexp(i\varphi))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) exp(in\varphi)$$

Hacemos $\varphi = 0$

$$e^{ix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x)$$

sabemos $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned} \cos x + i\operatorname{sen} x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n} J_{2n}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n+1} J_{2n+1}(x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n i J_{2n+1}(x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

entonces

$$\cos x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$$\operatorname{sen} x = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)$$

Para la función coseno

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \\ &= J_0(x) + \sum_{-\infty}^{-1} (-1)^n J_{2n}(x) + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \\ &= J_0(x) + \sum_{-\infty}^{-1} (-1)^n (-1)^{2n} J_{-2n}(x) + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \\ &= J_0(x) + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \\ &= J_0(x) + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \end{aligned}$$

sustituyendo en

$$J_0(x) + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$x = ix$

$$\begin{aligned}
\cos(ix) &= J_0(ix) + 2\sum_1^{\infty}(-1)^n J_{2n}(ix) \\
\cosh(x) &= I_0(x) + 2\sum_1^{\infty}(-1)^n (i)^{2n} I_{2n}(x) \\
&= I_0(x) + 2\sum_1^{\infty} I_{2n}(x)
\end{aligned}$$

(e) $\sinh x = 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x)$

Solución

Para la función seno

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n J_{2n+1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(-1)^{2n+1} J_{-2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x) \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n J_{-2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x) \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n J_{2n+1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)
\end{aligned}$$

haciendo el cambio $x = ix$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(ix) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(ix) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-i)^{2n+1} I_{2n+1}(x) \\
&= 2i\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n+1}(x) \\
\sinh x &= 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x)
\end{aligned}$$

14.5.6 verifique que $k_v(x)$ como se define en la ec. (14.106) es equivalente a

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\operatorname{sen} v\pi} \tag{35}$$

y de este show que

$$k_v(x) = k_{-v}(x) \tag{36}$$

Solutions

La definición estándar de las funciones de Neumann es la siguiente combinación lineal de $J_v(x)$ and $J_{-v}(x)$

$$Y_v(x) = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\operatorname{sen} v\pi} \tag{37}$$

Para v no integrales, $Y_v(x)$ satisface claramente la ecuación de Bessel, ya que es una combinación lineal de soluciones conocidas, $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ El comportamiento de $Y_v(x)$ para una pequeña x, sustituyendo en la ecuación 35 I_v

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2} i^{v+1} \left[J_v(ix) + iY_v(ix)\right]$$

sustituyendo en ec37

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2} i^{v+1} \left[J_v(ix) + i\frac{\cos v\pi J_v(ix)}{\operatorname{sen} v\pi} - i\frac{J_{-v}(ix)}{\operatorname{sen} v\pi}\right]$$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} i^{v+1} [\operatorname{sen} v\pi J_v(ix) + i \cos v\pi J_v(ix) - iJ_{-v}(ix)]$$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} i^{v+1} [(\operatorname{sen} v\pi + i \cos v\pi) J_v(ix) - iJ_{-v}(ix)]$$

de la identidad de Euler

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} i^{v+1} [ie^{iv\pi} J_v(ix) - iJ_{-v}(ix)]$$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [i^{v+2} e^{-iv\pi} J_v(ix) - i^{v+2} J_{-v}(ix)]$$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [i^{v+2} e^{-iv\pi/2} e^{-iv\pi/2} J_v(ix) - i^{v+2} J_{-v}(ix)]$$

sabemos que $I_v(x) = i^{-v} J_v(ix)$ y $[e^{i\pi/2}]^{-v} = i^{-v}$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [i^2 i^v (i^{-v}) e^{-iv\pi/2} J_v(ix) - i^2 i^v J_{-v}(ix)]$$

por definición $I_v = e^{-iv\pi/2} J_v(e^{i\pi/2}x) = e^{-iv\pi/2} J_v(ix)$ e $i^2 = -1$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [-I_v(x) + I_{-v}(x)]$$

$$k_v(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\operatorname{sen} v\pi}$$

14.5.7 Demuestre que $k_v(x)$ satisface las siguientes relaciones de recurrencia

$$k_{v-1}(x) - k_{v+1}(x) = -\frac{2v}{x} k_v(x) \tag{38}$$

$$k_{v-1}(x) + k_{v+1}(x) = -2k_v'(x) \tag{39}$$

Solución

$$k_{v-1}(x) - k_{v+1}(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-(v-1)} - I_{v-1}}{\operatorname{sen}(v-1)\pi} - \frac{\pi}{2} \frac{I_{-(v+1)} - I_{v+1}}{\operatorname{sen}(v+1)\pi}$$

como $\operatorname{sen}(v\pi \pm 1)\pi = \cos\pi \operatorname{sen} v\pi \pm \operatorname{sen}\pi \cos v\pi = -\operatorname{sen} v\pi$ Factorizando

$$-\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [I_{-(v-1)} - I_{v-1} - I_{-(v+1)} + I_{v+1}]$$

como $I_n = I_{-n}$

$$-\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} v\pi} [I_{v-1} - I_{v+1} + I_{v-1} - I_{v+1}]$$

$$-\frac{\pi}{2\operatorname{sen} v\pi}\left[-\frac{2v}{x}I_v - \frac{2(-v)}{x}I_{-v}\right]$$

$$-\frac{\pi}{2\operatorname{sen} v\pi}\left[\frac{2v}{x}I_{-v} - \frac{2v}{x}I_v\right]$$

$$-\frac{2v}{x}\frac{\pi(I_{-v} - I_v)}{2\operatorname{sen} v\pi}$$

$$-\frac{2v}{x}k_v$$

$$\begin{aligned}
k_{v-1} + k_{v+1} &= \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{I_{1-v} - I_{v-1}}{\operatorname{sen}(v-1)}\right) + \left(\frac{I_{-v-1} - I_{v+1}}{\operatorname{sen}(v+1)}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2\operatorname{sen} v\pi}[I_{v-1} - I_{1-v} + I_{v+1} - I_{-(v+1)}] \\
&= \frac{\pi}{2\operatorname{sen} v\pi}[I_{v-1} + I_{v+1} - I_{-(v-1)} + I_{-(v+1)}] \\
&= \frac{\pi}{2\operatorname{sen} v\pi}[2I'_v - 2I'_{-v}] \\
&= -2\left[\frac{\pi}{2}\frac{I'_{-v} - I'_v}{\operatorname{sen} v\pi}\right] \\
&= -2k'_v
\end{aligned}$$

14.7.2 Muestra que, sí

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+1/2}(x) \tag{40}$$

eso es automáticamente igual

$$(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-1/2}(x) \tag{41}$$

Solución

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\frac{\cos[(n+1/2)\pi]J_{n+1/2}(x) - J_{-n-1/2}(x)}{\operatorname{sen}[(n+1/2)\pi]}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}(-1)^n[-J_{n+1/2}(x)]$$

$$= (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-1/2}(x)$$

14.7.5 a) Derivar las relaciones de recurrencia.

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1} = \frac{2n+1}{x}f_n(x) \tag{42}$$

$$nf_{n-1}(x) - (n+1)f_{n+1}(x) = (2n+1)f'_n(x) \tag{43}$$

Satisfechas por las funciones esféricas de Bessel.$J_n(x)$, $n_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ y $h_n^{(2)}(x)$

b) Muestre, a partir de estas dos relaciones de recurrencia, que el Bessel esférico funciona $a_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2f''_n(x) + 2xf'_n(x) + [x^2 - n(n+1)]f_n(x) = 0 \tag{44}$$

Solución

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1} = \frac{2n}{x}J_n$$

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(J_{n-3/2}(x)+J_{n-1/2}(x)\right)=\frac{2n}{x}\sqrt{\frac{2x}{\pi}}J_{n-1/2}(x)$$

$$J_{n-3/2}(x)+J_{n-1/2}(x)=\frac{2n}{x}J_{n-1/2}(x)$$

haciendo $n \to n+1/2$

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}=2J'_n$$

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(J_{n-3/2}(x)-J_{n+1/2}(x)\right)=2\left[\sqrt{\frac{2x}{\pi}}J'_{n-1/2}(x)+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n-1/2}(x)\right]$$

$$J_{n-3/2}(x)-J_{n+1/2}(x)=2J'_{n-1/2}(x)+\frac{1}{x}$$

hacemos $n=n+1/2$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J'_n(x)+\frac{1}{x}J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J'_n(x)+\frac{1}{2n+1}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]$$

$$(2n+1)J_{n-1}(x)-(2n+1)J_{n+1}(x)=2(2n+1)J'_n(x)+J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)$$

$$2nJ_{n-1}(x)-(2n+2)J_{n+1}(x)=2(2n+1)J'_n(x)$$

$$nJ_{n-1}(x)-(n+1)J_{n+1}(x)=(2n+1)J'_n(x)$$

14.7.6 Probar por inducción matemática que

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \tag{45}$$

por n un entero arbitrario no negativo

Solución

Asumiendo que se cumple para $n = k$ verificamos para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= -x^k \frac{d}{dx}[x^k J_k(x)] \\
&= -x^k \frac{d}{dx}\left(x^{-k}(-1)^k x^k \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right] \\
&= -x^k \frac{d}{dx}\left[(-1)^k \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right] \\
&= (-1)^{k+1} x^{k+1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{k+1} x^{k+1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{k+1} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

para $n = 0$

$$J_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$J_0(x) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!!(2k+1)!!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2s} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$