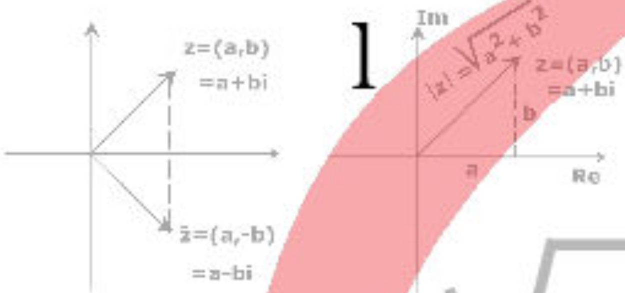
Universidad autónoma del estado de Hidalgo

Métodos Matemáticos de la Física

1



$$i=\sqrt{-1}$$

$$e^{i\pi}+1=0$$

Héctor Miguel

Palomares Maldonado

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada
Academia de Matemáticas y Física

Variable Compleja

Palomares Maldonado Héctor Miguel

Índice

1. Números Complejos

1. Verifique las siguientes expresiones :

   a) $(\sqrt{2}-i)(1-\sqrt{2}i)=-2i$
   Solución:
   $\sqrt{2}-i-i+(-\sqrt{2})=-2i$

   b) $(2,-3)(-2,1)=(1,8)$
   Solución:
   $(-4-(-3),6+2)=(-1,8)$

   c) $(3,1)(3,-1)(1/5,1/10)=(2,1)$
   Solución:
   $(9-(-1),3-3)(1/5,1/10)=(10,0)(1/5,1/10)=(2-0,0+1)=(2,1)$

2. Verificar los números $z=1\pm i$ satisface la ecuación $z^2-2z+2=0$
   Solución:
   si sustituimos $z=1+i$ en la ecuación:
   $(1+i)(1+i)-2(1+i)+2=0$
   $1+2i-1-2-2i+2=0$
   $0=0$

3. Muestre que la multiplicación de números complejos es conmutativa
   Solución:
   sea $z_1=(x_1,y_1)$ $\qquad z_2=(x_2,y_2)$
   entonces:
   z_1z_2 debe ser z_2z_1
   $z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2,-y_1y_2,y_1x_2+x_1y_2)=(x_2x_1-y_2y_1,y_2x_1+x_2y_1)=(x_2,y_2)(x_1y_1)=z_2z_1$

4. Use las leyes de asociatividad y distributividad para mostrar que $z(z_1+z_2+z_3)=zz_1+zz_2+z_3$
   Solución:
   $Z(z_1+z_2+z_3)=(x,y)[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)+(x_3,y_3)]$
   $=(x,y)(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$
   $=(xx_1+xx_2+xx_3-yy_1-yy_2-yy_3,yx_1+yx_2+yx_3+xy_1+xy_2+xy_3)$
   $=(xx_1-yy_1+xx_2-yy_2+xx_3-yy_3,yx_1+xy_1+yx_2+xy_2+yx_3+xy_3)$
   $=(xx_1-yy_1,yx_1+xy_1)+(xx_2-yy_2,yx_2+xy_2)+(xx_3-yy_3,yx_3+xy_3)$
   $(x,y)(x_1,y_1)+(x,y)(x_2,y_2)+(x_3,y_3)$
   $zz_1+zz_2+zz_3$

5. Escribiendo $i=(0,1)$ y $y=(y,0)$, mostrar que $-(iy)=-i(y)=i(-y)$
   Solución:
   $-(iy)=-[(0,1)(y,0)]$
   $-[(0,1)(y,0)]=-(0,1)[(y,0)]=-i(y)$
   $-[(0,1)(y,0)]=-[(y,0)(0,1)]=-(y,0)[(0,1)]=(0,1)[-(y,0)]=(0,1)(-y,0)=i(-y)$

6. Resuelva la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$ para $z(x, y)$ escribiendo $(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ y resuelva las ecuaciones simultáneas para x y y
   Solución:
   tenemos $(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$
   $(x^2 - y^2, xy + yx) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$
   $(x^2 - y^2 + x + 1, 2xy + y + 0) = (0, 0)$
   observemos que: $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ y $2xy + y = y(2x + 1) = 0$
   si $y = 0$ entonces $x^2 + x + 1 = 0$ pero esta ecuación tiene raices imaginarias, entonces solo nos queda que $x = -1/2$
   $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1$
   $y^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$
   $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
   por lo que la solución es: $z = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7. Reduzca cada una de las siguientes cantidades

   a) $\frac{1+2i}{3+4i} + \frac{2-i}{5i}$
   Solución:
   Multiplicando por el conjugado de cada termino
   $\frac{1+2i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i} + \frac{2-i}{5i}\frac{-5i}{-5i} = \frac{10i-5}{25} + \frac{-10i-5}{25} = \frac{-10}{25} = -\frac{2}{5}$

   b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$
   Solución:
   $= \frac{5i}{(2-2i-i-1)(3-i)} = \frac{5i}{(1-3i)(3-i)} = \frac{5i}{3-i-9i-3} = \frac{5i}{-10i} = -\frac{1}{2}$

   c) $(1-i)^4$
   Solución:
   $= [(1-i)(1-i)]^2 = [1-i-i-1]^2 = (-2i)^2 = 4(-1) = -4$

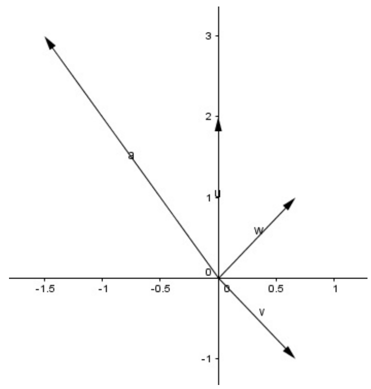
8. Mostrar que:

   a) $(-1)z = -z$
   Solución:
   demostremos
   $(-1)z + z = 0$
   $z + (-1z) = 0$
   $z[1-1] = 0$
   $z \cdot 0 = 0$
   $0 = 0$
   Entonces $(-1)z = -z$

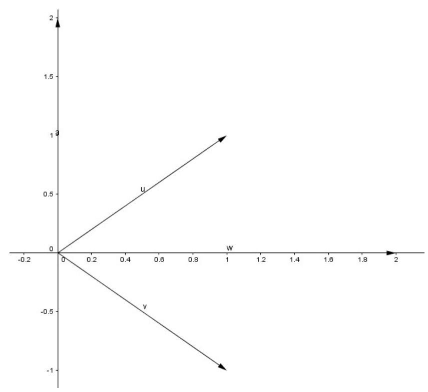
   b) $\frac{1}{1/z} = z$ $z \neq 0$
   Solución:
   $\frac{1}{1/z}\frac{z}{z} = \frac{1}{z^{-1}}\frac{z}{z} = \frac{z}{z^{-1}z} = \frac{z}{1} = z$

9. Localice los números complejos $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente cuando

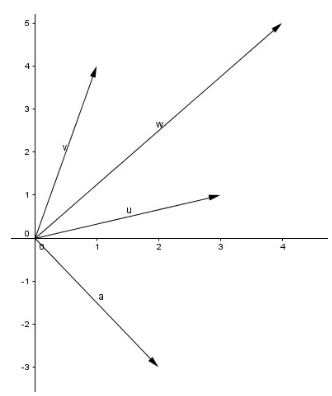
   a) $z_1 = 2i \qquad z_2 = \dfrac{2}{3} - i$
   Solución:



   b) $z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_1 - iy_1$
   Solución:



   c) $z_1 = (3,1) \qquad (1,4)$
   Solución:

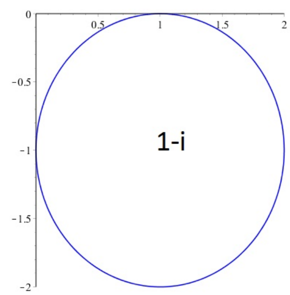


10. Mostrar que: $\sqrt{2}|z| \geq |Rez| + |Imz|$
    Solución:
    sabemos que $z(x,y) = x+iz$ y la norma o distancia es $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ donde $x \to Re(z)$ y $y = \to Im(z)$
    sustituyendo estos hechos en $\sqrt{2}|z| \geq |Rez| + |Imz|$
    $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x| + |y|$
    elevando al cuadrado
    $2(x^2+y^2) \geq |x^2| + 2|x||y| + |y|^2$
    Multiplicando por un menos $-2(x^2+y^2) < 0$ por lo que podemos decir

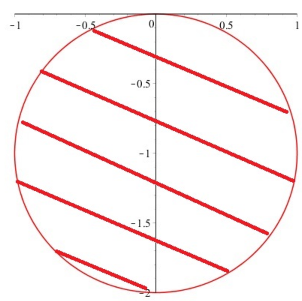
$|x|^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0$
rescribir
$(|x| - |y|)^2 \geq 0$
$(|x| - |y|)^2 \geq -2(x^2 + y^2)$
$2(x^2 + y^2) \geq -(|x| - |y|)^2$

11. Dibuje el conjunto de puntos determinado por la condición dada

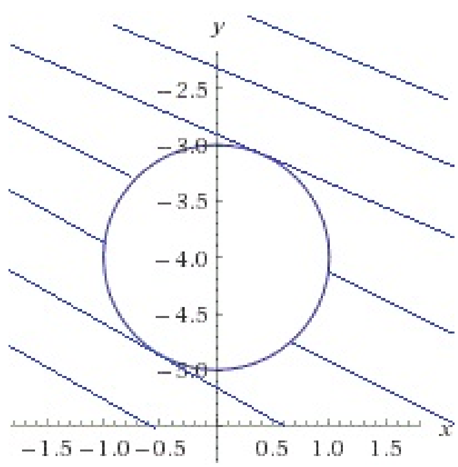
   a) $|z - 1 + i| = 1$
   Solución:



   b) $|z + i| \leq 1$
   Solución:



   c) $|z + 4i| \geq 1$
   Solución:



12. Use $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2 de argumentos geométricos para

    a) $|z-4i|+|z+4i|=10$
    Solución:
    representa una elipse con focos en $(0,\pm 4)$

    b) $|z-1|=|z+i|$
    Solución:
    representa una linea recta que pasa por el origen con pendiente -1

13. Mostrar que la ecuación $|z-z_0|=R$ de un circulo, centrado en z_0 con radio R se puedes escribirse

$$|z|^2 - 2R(zz_0) + |z_0|^2 = R^2$$

Solución:
Sabemos que $|z|^2 = z\bar{z}$ y $|z| = (z_1 - z_0) = R$
$|z||\bar{z}| = R^2$
$(z_1 - z_0)(\overline{z_1 - z_0}) = R^2$
$(z_1 - z_0)(\bar{z_1} - \bar{z_0}) = R^2$
$z_1\bar{z_1} - z_1\bar{z_0} - z_0\bar{z_1} + z_0\bar{z_0}$
$(z_1\bar{z_1} - (z_1\bar{z_0} + \overline{z_1\bar{z_0}}) + z_0\bar{z_0} = R^2$
$|z_1|^2 - 2Re(z_1z_0) + |z_0|^2 = R^2$

14. Establezca la identidad

$$1+z+z^2+\ldots+z^n = \frac{1-z^{n-1}}{1-z}(z\neq 1)$$

y úsela para derivar la identidad trigonométrica de Lagrange :

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\theta/2)}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$$

sugerencia Escriba $S = 1+z+z^2+\ldots+z^n$ y considere la diferencia $S-zS$, Después use $z=e^{i\theta}$
Solución: *usando $S-zS$*
$S = 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n$
$zS = z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^n$
$S-zS = 1+z^2+z^3+\ldots+z^n-(z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^{n+1})$
$S(1-z) = 1-z^{n+1}$
$S = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$

$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\ldots+e^{in\theta} = \dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$
sabemos que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ entonces la parte real es:
$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta$
encontrando la parte real de
$\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$
es:

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\left(\frac{e^{-i(\theta/2)}}{e^{-i(\theta/2)}}\right) = \frac{e^{-i(\theta/2)}-e^{[i(n+1)\theta]+[-i(\theta/2)]}}{e^{-i(\theta/2)}-e^{i\theta-i(\theta/2)}} = \frac{e^{-i(\theta/2)}-e^{i(2n+1)\theta/2)}}{e^{-i(\theta/2)}-e^{\theta/2}}$$

aplicando de euler

$$= \frac{\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta-\left[\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}-i\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}\right.}{-2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}\right]-i\left[\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

solo nos interesa la parte real

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}+\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

por lo que queda demostrado la identidad de Lagrange

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\theta/2)}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$$

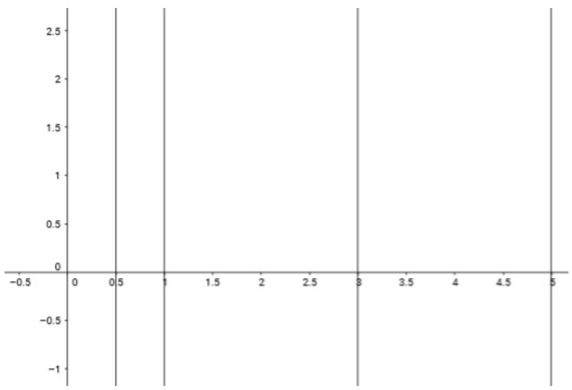
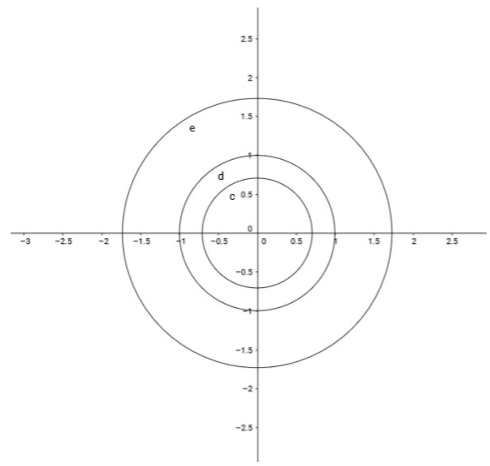
2. Funciones Analiticas

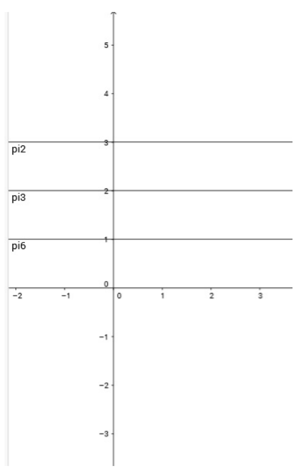
1. Considere la transformación $w = u + iv = \ln z = \ln r + i\theta$, muestre

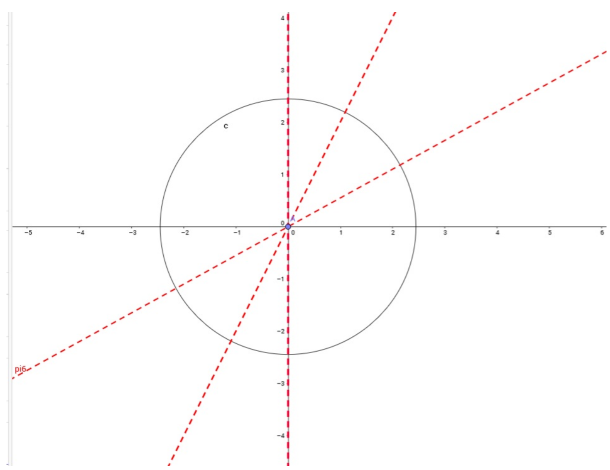
    a) Circunferencias con centro en el origen y radio α en el plano z, se llevan al plano w como rectas paralelas al eje v

    b) Rectas del plano z que parten del origen, se llevan al plano w como rectas paralelas al eje u

    solución:
    tenemos la función: $w = \ln z$ $w = u + iv$ dada la trasformación $u = \ln r$ y $v = \theta$ sustituyendo tenemos $w = \ln r + i\theta$ donde $0 \leq \theta < 2\pi$ y $r = |z| = a$ es igual que escribir $u = \ln a$ está ecuación vive en el plano w
    evaluando obtenemos:





    las rectas que pasan por el origen tienen la ecuación $\theta = \alpha$ y están en el plano w o bien $v = \alpha$

2. Un cuadrado S en el plano z tiene sus vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Determine la región del plano w a la que se lleva S mediante las transformaciones a)$w = z^2$ y b) $w = 1/(z+1)$

Solución

a) $w = u + iv \qquad z = x + iy$
$w = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + (2xy)i$
como $w = u + iv$ entonces:
$u = x^2 - y^2$
$v = 2xy$

Del punto $(0,0) \to (1,0)$
$0 \leq x \leq 1 \qquad y = 0$
$u = x^2 \qquad v = 0$

del punto $(1,0) \to (1,1)$
$x = 1 \qquad 0 \leq y \leq 1$ $u = 1 - y^2$
$v = 2y$
para tener solo los parámetros u y v sustituimos y
$u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$
v puede tomar los valores de 0 a 2
$v = 0 \to u = 1 \qquad v = 1 \to \dfrac{3}{4} \qquad v = 2 \to u = 0$ (puntos) en el plano w

del punto $(1,1) \to (0,1)$
$y = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1$ $u = x^2 - 1$
$v = 2x$
para tener solo los parámetros u y v sustituimos x
$u = \dfrac{v^2}{4} - 1$
v puede tomar los valores de 0 a 2
$v = 0 \to u = -1 \qquad v = 1 \to -\dfrac{3}{4} \qquad v = 2 \to u = 0$ (puntos) en el plano w

Del punto $(0,0) \to (0,1)$
$0 \leq y \leq 1 \qquad x = 0$
$u = x^2 \qquad v = 0$

forma una parábola

b) $w = u + iv \qquad\qquad z = x + iy$

$w = \dfrac{1}{z+1} \qquad\qquad w = \dfrac{1}{x+iy+1} = \dfrac{1}{(x+1)+iy}\dfrac{x+1-iy}{x+1-iy} = \dfrac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}$

$\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ parte real $\qquad\qquad u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$

$-\dfrac{iy}{(x+1)^2+y^2}$ parte imaginaria $\qquad\qquad v = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

Del punto $(0,0) \rightarrow (1,0)$

$0 \leq x \leq 1 \qquad y = 0$

$u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2} \qquad v = 0$

del punto $(1,0) \rightarrow (1,1)$

$x = 1 \qquad 0 \leq y \leq 1 \ u = \dfrac{2}{4+y^2}$

$v = \dfrac{y}{4+y^2}$

para tener solo los parámetros u y v sustituimos y

$u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$

v puede tomar los valores de 0 a 2

$v = 0 \rightarrow u = 1 \qquad v = 1 \rightarrow \dfrac{3}{4} \qquad v = 2 \rightarrow u = 0$ (puntos) en el plano w

del punto $(1,1) \rightarrow (0,1)$

$y = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1 \ u = x^2 - 1$

$v = 2x$

para tener solo los parámetros u y v sustituimos x

$u = \dfrac{v^2}{4} - 1$

v puede tomar los valores de 0 a 2

$v = 0 \rightarrow u = -1 \qquad v = 1 \rightarrow -\dfrac{3}{4} \qquad v = 2 \rightarrow u = 0$ (puntos) en el plano w

Del punto $(0,1) \rightarrow (0,0)$

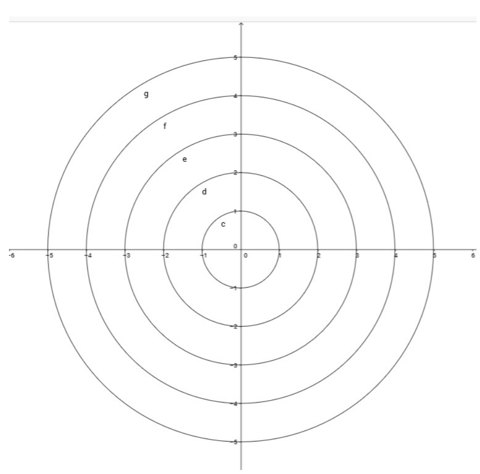
$0 \leq y \leq 1 \qquad x = 0$

$u = x^2 \qquad v = 0$

3. Suponga que $f(z) = 1/z = u + iv$. trace varios miembros de las familias $u(x,y) = \alpha$ y $v(x,y) = \beta$, donde α y β son constantes

Solución:

$f(z) = \alpha + i\beta$



4. Partiendo de la definición, encuentre la derivada en el punto indicado, de las funciones siguientes

   a) $f(z) = 3z^2 + 4iz - 5 + 1 \qquad z = 2$
   Solución:
   $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{3(z+\Delta z)^2 + 4i(z+\Delta z) - 5 + 1 - [3z^2 + 4iz - 5 + 1]}{\Delta z}$$
   $$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z^2 + 6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 + 4i\Delta z - 5 + 1 - [3z^2 + 4iz - 5 + 1]}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 + 4i\Delta z}{\Delta z}$$
   $$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(6z + 3\Delta z + 4i)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 6z + 3\Delta z + 4z = 6z + 4i$$
   en $z = 2$ la derivada es $12 + 4i$

   b) $f(z) = \dfrac{z - i}{z + 2i} \qquad z = i$
   Solución:
   $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{z + \Delta z - i}{z + \Delta z + 2i} - \dfrac{z - i}{z + 2i}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{z^2 + z\Delta z - iz + 2iz + 2i\Delta z + 2 - (z^2 - iz + z\Delta z - i\Delta z + 2iz + 2)}{(z + \Delta z + 2i)(z + 2i)}}{\Delta z}$$
   $$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{3i\Delta z}{(z + \Delta z + 2i)(z + 2i)}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3i\Delta z}{\Delta z(z + \Delta z + 2i)(z + 2i)} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3i}{(z + \Delta z + 2i)(z + 2i)} =$$
   $$\frac{3i}{(z + 2i)^2}$$
   la drivada en $z = i$
   $$\frac{3i}{(z + 2i)^2} = \frac{3i}{(i + 2i)^2} = \frac{3i}{(3i)^2} = -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3}i$$

   c) $f(z) = 3z^{-2} \qquad z = 1 + i$
   Solución:
   $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{3}{(z + \Delta z)^2} - \dfrac{3}{z^2}}{\Delta z} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{3}{z^2 + 2z\Delta z + z^2} - \dfrac{3}{z^2}}{\Delta z} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{-h[6z + 3\Delta z]}{z^4 + 2z^3\Delta z + x^2 z^2}}{\Delta z} = \frac{6z}{z^4} = \frac{6}{z^3}$$
   la derivada en $z = 1 + i$
   $$\frac{6}{z^3} = \frac{6}{(1+i)^3} = \frac{6}{1 + 3i^2 + 3i + i^3} = \frac{6}{1 - 3 + 3i - i} = \frac{6}{2i - 2}\frac{-2 - 2i}{-2 - 2i} = \frac{-6 - 6i}{8} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$$

5. Demuestre que $\dfrac{d}{dz}(z^2\overline{z})$ no existe en ninguna parte

   solución:
   $$\frac{d}{dz} f(z) * g(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} * \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z}$$

   sea $f = z^2$

   $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta z(2z + z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z$$

   sea $g = \overline{z}$

   $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x - iy}}{\Delta x i\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$
   veamos:

   cuando $\Delta y = 0$ el limite es $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

   cuando $\Delta y = 0$ el limite es $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$ la derivada no existe, es decir $g(z) = \overline{z}$no es analítica

6. Determine cuales de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como función analítica de z

   a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$
   Solución:
   $U_x = V_y \qquad u_y = -v_x$
   derivando
   $U_x = 6xy + 4x$
   integrando
   $V = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + c_x$
   derivando
   $V_x = 3y^2 + 4y + c'_x$
   derivando
   $U_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y$
   sabemos que por las ecuaciones de cauchy-Riemann
   $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
   $3x^2 - 3y^2 - 4y = -3y^2 - 4y - c'_x$
   simplificando
   $c'_x = 3x^2$
   integrando y para obtener c_x y sustituirla
   $c_x = -x^3$

   $V = 3xy^2 + 4xy - x^3$ encontrar $f(z)$
   Tenemos que $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$
   haciendo $y = 0$, $f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$
   remplazando x por z $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$
   $u(x, 0) = 2z^2$, $v(x, 0) = -z^3$
   $f(z) = 2z^2 - iz^3$

   b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$

   Solución:
   verfiquemos si la función es armónica
   $\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 3y^2$
   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
   $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 6xy - 6y^2$
   $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 12y$

   para que sea una función armonica de tiene que cumplir que
   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   pero en este caso
   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 12y$
   entonces esta función no es armónica

c) $e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2)$

Solución:
$U_x = V_y \qquad u_y = -v_x$
derivando
$U_x = -2ye^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) + 2x\cos(x^2-y^2)e^{-2xy}$
integrando
$V = \int(-2ye^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) + 2x\cos(x^2-y^2)e^{-2xy})dy =$
primera integral
$I = -\int(2ye^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2)dy$
$= -\left[e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) + 2x\int e^{-2xy}\cos(x^2+y^2)dy\right]$
$= -\left[e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) + 2x\left(-\frac{e^{-2xy}}{2x}\cos(x^2+y^2) - \frac{1}{2x}\int -2ye^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2+y^2)dy\right)\right]$
$I = -\left[e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) + 2x\left(-\frac{e^{-2xy}}{2x}\cos(x^2+y^2) - \frac{1}{2x}I\right)\right]$
$I = -\left[e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) - e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) - I\right]$
$I = -e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) + e^{-2xy}\cos(x^2+y^2) + I$
segunda integral
$\int\cos(x^2-y^2)[2xe^{-2xy}])dy$
$= -\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} + \int 2ye^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2)dy$
por la integral anterior sabemos que es 0, quedando
$v = -\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} + c_x$ $v_x = -2y\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} + 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)e^{-2xy} + c'_x$
$u_y = 2y\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)e^{-2xy}$
sabemos que por las ecuaciones de cauchy-Riemann
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
$2y\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)e^{-2xy} = 2y\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} - 2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)e^{-2xy} - c'_x$

$v = -\cos(x^2+y^2)e^{-2xy} + c_x$ encontrar $f(z)$
Tenemos que $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$
haciendo $y = 0,\ f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$
remplazando x por z $f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$
$u(x,0) = \operatorname{sen} z^2,\ v(x,0) = -\cos z^2$
$f(z) = \operatorname{sen} z^2 - i\cos z^2 = \cos z^2 + i\operatorname{sen} z^2 = e^{z^2}$

3. Tabla de identidades Trigonométricas

3.1. Funciones Trigonométricas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \csc z = \frac{2}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\sec z = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \tan z = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

- $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad 1 + \tan^2 z = \sec^2 z \qquad 1 + \cot^2 z = \csc^2 z$
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \qquad \cos(-z) = \cos z \qquad \tan(-z) = -\tan z$
- $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$

3.2. Funciones hiperbólicas

- $\operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
- $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sec hz = \dfrac{1}{\cosh z} = \dfrac{2}{e^z + e^{-z}}$
- $\csc hz = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z} = \dfrac{2}{e^z - e^{-z}}$
- $\tanh z = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$
- $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$
- $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
- $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z \qquad \cosh(-z) = \cosh z \qquad \tanh(-z) = -\tanh z$
- $\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$
- $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 z_2$
- $\tanh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$
- $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$
- $\cos iz = \cosh z$
- $\tan iz = i \tan z$
- $\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z$
- $\cosh iz = \cos z$
- $\tanh iz = i \tan z$

4. Funciones Elementales

1. Determine los ceros de:

   - $\operatorname{sen} z$
     Solución:
     $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} = \dfrac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i}$
     $= \dfrac{(e^{y} - e^{-y})\cos x - (e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x}{2i} = \dfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x - i\dfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})\cos x$
     Podemos observar que $\operatorname{sen} z = 0$ cuando $(e^{y} - e^{-y})\cos x = 0$ y $(e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x = 0$ como $e^{y} - e^{-y} > 0$ para todo y real, $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$ o $e^{y} - e^{-y} = 0$ es decir $\operatorname{sen} x = 0$ osea los ceros de $\operatorname{sen} z$ se presentan a lo largo del eje real en

     $$x = \pm k\pi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   - $\cos z$ **Solución:**
     $\cos z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{ix}e^{-y}}{+} e^{-ix}e^{y}2\dfrac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2}$
     $\dfrac{(e^{y} + e{-}y\cos x}{2} + \dfrac{(e^{y} + e{-}y\operatorname{sen} x}{2}$
     Podemos observar que $\cos z = 0$ cuando $(e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x = 0$ de manera que $\cos x = 0$ y $y = 0$, los ceros de $\cos z$ se presentan a lo largo del eje real en

     $$x = \pm\frac{1}{2}(2k + 1)\pi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   - $\operatorname{senh} z$
     Solución:
     Sea la función $f(z) = \operatorname{senh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ Las intersecciones se pueden encontrar igualando la función a cero.

     $$\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = 0$$
     $$e^{z} - e^{-z} = 0$$
     $$e^{z} = e^{-z}$$
     $$e^{2z} = 1$$
     $$2z = \ln 1$$
     $$2z = 0$$
     $$z = 0$$

     La función seno hiperbólico tiene una sola raíz en $z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0$

   - $\cosh z$
     Solución:
     Sea la función $f(z) = \cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ Las intersecciones se pueden encontrar igualando la función a cero.

     $$\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 0$$
     $$e^{z} + e^{-z} = 0$$
     $$e^{z} = -e^{-z}$$
     $$e^{2z} = -1$$
     $$2z = \ln(-1)$$
     $$2z = i\pi$$
     $$z = \frac{\pi}{2}i$$

2. Demuestre las siguientes identidades

- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$
  Solución:
  $\operatorname{sen}(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z$
- $\cos(-z) = \cos z$
  Solución:
  $\cos(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \dfrac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$
- $\tan(-z) = -\tan z$
  Solución:
  $\tan(-z) = \dfrac{\operatorname{sen}(-z)}{\cos(-z)} = \dfrac{-\operatorname{sen} z}{\cos z} - \tan z$
- $\sec(-z) = \sec z$
  Solución:
  $\sec(-z) = \dfrac{1}{\cos(-z)} == \dfrac{1}{\cos z} = \sec z$
- $\csc(-z) = -\csc z$
  Solución:
  $\csc(-z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-z)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}} = -\csc z$
- $\cot(-z) = -\cot z$
  Solución:
  $\cot(-z) = \dfrac{\cos(-z)}{\operatorname{sen}(-z)} = \dfrac{\cos z}{-\operatorname{sen} z} = -\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = -\cot z$

3. si $z = x + iy$, demuestre que en todas partes donde los denominadores no sean nulos

- $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 y} + i\dfrac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 y}$
  Solución:
  $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \dfrac{\operatorname{sen}(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos iy + cosx \operatorname{sen} iy}{\cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cosh y + icosx \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cosh y + icosx \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}\left(\dfrac{\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}\right)$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x \cosh^2 y + i \cos^2 \operatorname{senh} y \cosh y + i \operatorname{sen}^2 \operatorname{senh} y \cosh y - \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{senh}^2}{\cos^2 x \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x(1 + \cosh^2 y)}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + i \operatorname{senh} y \cosh y(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x + i \operatorname{senh} y \cosh y}{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x + i \operatorname{senh} y \cosh y}{\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x} + i\dfrac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x}$

- $\cot z = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} - i\dfrac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$
  Solución:
  $\cot z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \dfrac{\operatorname{sen}(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \dfrac{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x \cosh^2 y - i \operatorname{sen}^2 \operatorname{senh} y \cosh y - i \cos^2 \operatorname{senh} y \cosh y + \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{senh}^2}{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y)}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) - i \operatorname{senh} y \cosh y(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x - i \operatorname{senh} y \cosh y}{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)\cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x}$
  $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x - i \operatorname{senh} y \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos x - i \operatorname{senh} y \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} - i \frac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$$

- $\sec z = \dfrac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y} + i\dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$

  Solución:

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos(x+iy)} = \frac{1}{\cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy} = \frac{1}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}$$
$$= \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x(1+\operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x(1+\operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)} + i\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}$$
$$= \frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$$

- $\csc z = \dfrac{\operatorname{sen} x \cosh x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} + i\dfrac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$

  Solución:

$$\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x+iy)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{senh}^2 y) - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{senh}^2 y) - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{senh}^2 y(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)} + i\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{senh}^2 y(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{senh}^2 y} + i\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{senh}^2 y}$$

4. Demuestre que en todas partes donde los denominadores no sean nulos

- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \pm \tan z_1 \tan z_2}$

  Solución:

$$\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2)}{\cos(z_1 \pm z_2)} = \frac{\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2}{\cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} \pm \dfrac{\cos z_1 \operatorname{sen} z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}{\dfrac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} \mp \dfrac{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}{\cos z_1 \cos z_2}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} z_1}{\cos z_1} \pm \dfrac{\operatorname{sen} z_2}{\cos z_2}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen} z_1}{\cos z_1}\dfrac{\operatorname{sen} z_2}{\cos z_2}} =$$
$$\frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$$

- $\cot(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\cot z_1 \cot z_2 \pm 1}{\cot z_2 \pm \cot z_1}$

  Solución:

$$\cot(z_1 \pm z_2) = \frac{\cos(z_1 \pm z_2)}{\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2)} = \frac{\cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}{\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2} = \frac{\dfrac{\cos z_1 \cos z_2}{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} \mp \dfrac{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}}{\dfrac{\operatorname{sen} z_1 \cos z_2}{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} \pm \dfrac{\cos z_1 \operatorname{sen} z_2}{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}} = \frac{\dfrac{\cos z_1 \cos z_2}{\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} \mp 1}{\dfrac{\cos z_2}{\operatorname{sen} z_2} \pm \dfrac{\cos z_1}{\operatorname{sen} z_1}}$$
$$= \frac{\cot z_1 \cot z_2 \mp 1}{\cot z_2 \pm \cot z_1}$$

5. Demuestre que

- $\operatorname{sen}(i\overline{z}) = \overline{-\operatorname{sen} iz}$
  Solución:
  $\overline{i} = 1$
  $\operatorname{sen}(i\overline{z}) = \dfrac{e^{i(\overline{z})} - e^{-i(\overline{z})}}{2i} = \dfrac{\overline{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}}{2i} = \dfrac{\overline{e^{-iz} - e^{iz}}}{2i} = -\dfrac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{2i} = \overline{-\operatorname{sen} iz}$
- $\cos(i\overline{z}) = \overline{\cos iz}$
  Solución:
  $\cos(i\overline{z}) = \dfrac{e^{i\overline{z}} + e^{-i\overline{z}}}{2} = \dfrac{\overline{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}}{2} = \dfrac{\overline{e^{-iz)} + e^{iz}}}{2} = \dfrac{\overline{e^{iz)} + e^{-iz}}}{2} = \overline{\cos z}$
- $\tan(i\overline{z}) = \overline{-\tan iz}$
  Solución:
  $\tan(i\overline{z} = \dfrac{\operatorname{sen} i\overline{z}}{\cos i\overline{z}} = \dfrac{\overline{-\operatorname{sen} iz}}{\overline{\cos iz}} = \overline{-\tan iz}$
- $\cot(i\overline{z}) = \overline{-\cot iz}$
  Solución:
  $\cot(i\overline{z}) = \dfrac{\cos i\overline{z}}{\operatorname{sen} i\overline{z}} = \dfrac{\overline{\cos iz}}{\overline{-\operatorname{sen} iz}} = \overline{-\cot iz}$
- $\sec(i\overline{z}) = \overline{\sec iz}$
  Solución:
  $\sec(i\overline{z}) = \dfrac{1}{\cos i\overline{z}} = \dfrac{1}{\overline{\cos iz}} = \overline{\sec iz}$
- $\csc(i\overline{z}) = \overline{-\csc iz}$
  Solución:
  $\csc(i\overline{z}) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} i\overline{z}} = \dfrac{1}{\overline{-\operatorname{sen} iz}} = \overline{-\csc iz}$

5. Integrales de linea, Teorema de Green y Teorema de Cauchy

Palomares Maldonado Héctor Miguel

1. Determine las siguientes integrales de linea

   - $\int_c x^2y^3dx \qquad c$ es el arco $z = t(1+it^2), \qquad 0 \leq t \leq 1$

     Solución:
     $z = t + it^2 \qquad x = t$ y $y = t^3 \qquad dx = dt$
     $\int_0^1 t^2(t^3)^3dt = \int_0^1 t^{11}dt = \frac{t^{12}}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$

   - $\int_c \frac{1-(y/b)^2}{x}dx \qquad c$ es el arco $z = a\cos t + ib\operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

     Solución:
     $x = a\cos t \qquad y = b\operatorname{sen} t \qquad dx = -a\operatorname{sen} tdt$
     $\int_0^{2\pi} \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{a\cos t}(-a\operatorname{sen} t)dt \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{a\cos t}(-a\operatorname{sen} t)dt = \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t)dt = \frac{\cos^2 t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

   - $\int_c \frac{y}{x}dx \qquad c$ es el arco $z = \operatorname{sen} t + i\tan t, \qquad 0 \leq t \leq \pi/4$

     solución:
     $x = \operatorname{sen} t \qquad y = \tan t \qquad dx = \cos tdt$
     $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} t}{\tan t}\cos tdt \ = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} t}{\frac{\operatorname{sen} t}{cost}}\cos tdt \int_0^{\pi/4} \cos^2 tdt \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt \ = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/4}$
     $= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

   - $\int_c \frac{1+xy}{y}dx \qquad c$ es el arco $z = t + it^2, \qquad 1 \leq t \leq 2$

     solución:
     $x = t \qquad y = t^2 \qquad dx = dt$
     $\int_1^2 \frac{1+t^3}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2$

2. Calcule la integral de linea
$$\int_c (2xy^2 + \operatorname{sen} x)dx + (2x^2y + \cos y)dy$$
donde c es la elipse $z = a\cos t + ib\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. sugerencia Utilice el teorema de Green
Solución:
renombremos: $p(x,y) = 2xy^2 + \operatorname{sen} x$ y $Q(x,y) = 2x^2y + \cos y$
y el teorema de green nos dice
$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$
$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$
$$\int\int (4xy - 4xy)dxdy = 0$$

$$z = a\cos t + ib\operatorname{sen} t$$
$$z(0) = a\cos(0) + ib\operatorname{sen}(0) = a$$

$$z(2\pi) = a\cos(2\pi) + ib\,\mathrm{sen}(\pi) = a$$

$$\int_0^{2\pi} [2a\cos tb\,\mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}(a\cos t)]a\,\mathrm{sen}\,tdt + \int_0^{2\pi} [2a\cos^2 tb\,\mathrm{sen}\,t + \cos(b\,\mathrm{sen}\,t)]b\cos tdt$$

$$2a^2b\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{sen}^3\,tdt + \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(a\cos t)]a\,\mathrm{sen}\,tdt + 2ab^2\int_0^{2\pi} cos^3 t\,\mathrm{sen}\,t + \int_0^{2\pi} \cos(b\,\mathrm{sen}\,t)b\cos tdt$$

$$2a^2b\left[\frac{\mathrm{sen}^4\,t}{4}\right]_0^{2\pi} - \cos(a\cos t)|_0^{2\pi} + 2ab^2\left[\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} + \mathrm{sen}(b\,\mathrm{sen}\,t)|_0^{2\pi}$$

$$\frac{1}{2}a^2b(0-0) - [\cos(a) - \cos(a)] + \frac{1}{2}ab^2(1-1) + \mathrm{sen}(0b) - \mathrm{sen}(0b) = 0$$

3. Calcule la siguiente integral de linea

$$\int_c y\left(x + \frac{1}{2}xy + 1\right)dx + \frac{1}{2}x^2(1+y)dy$$

donde c es cualquier circunferencia de radio unitario.
Solución:
tenemos $c = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$, donde $x = \cos t$ y $y = \mathrm{sen}\,t$, sustituyendo en la integral y resolviendo para t

$$-\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,t\cos tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{sen}^2\,tdt - \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\cos tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,\mathrm{sen}\,tdt$$

$$-\left[\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right]_0^{2\pi} + -\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2\cos 2tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos tdt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,t\cos tdt + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$-\left[\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}[t]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}[\mathrm{sen}\,t]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}[\mathrm{sen}\,t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

4. Calcule

$$\int_c \mathrm{sen}\,zdz$$

donde c es el contorno $z = it$, $0 \leq t \leq \pi$
Solución:

$$\int f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy$$

tenemos $z = it$ entonces $x = 0 \to dx = 0$, $y = t \to dy = dt$, $\mathrm{sen}\,z = \mathrm{sen}\,x\cos iy + \cos x\,\mathrm{sen}\,iy$ y $v = \mathrm{sen}\,it = i\,\mathrm{sen}\,hy$

$$-\int_0^{\pi} i\,\mathrm{sen}\,htdt = i\cosh t|_0^{\pi} = -i(\cosh\pi - 1) = 1 - \cosh\pi$$

5. Calcule la siguiente integral de linea

$$\int_c z^n dz$$

donde n es un entero positivo y c es el contorno $z = ae^{it}$ $0 \leq y\pi$ y a es real positivo.
Solución:
Sabemos que $z = x + iy$, en este ejercicio $x = a\cos t \to dx = -a \operatorname{sen} t dt$ y $y = a \operatorname{sen} t \to dy = a\cos t dt$
$u = a^n \cos nt$, $v = a^n \operatorname{sen} nt$ $\qquad z^n = a^n e^{int}$, $a^n(\cos nt + i \operatorname{sen} nt)$

sustituyendo en

$$\int udx - vdy - \int udy + vdx$$

$$\int_0^{2\pi} [(a^n \cos nt(-a \operatorname{sen} t)dt - a^n \operatorname{sen} nt(a\cos t)dt] - i\int_0^{2\pi} [(a^n \cos nt(a\cos t)dt - a^n \operatorname{sen} nt(-a \operatorname{sen} t)dt]$$

$$-a^{n+1}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt+t)dt + ia^{n+1}\int_0^{2\pi} \cos(nt+t)dt$$

$$-a^{n+1}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt+t)dt + ia^{n+1}\int_0^{2\pi} \cos(nt+t)dt$$

$$-a^{n+1}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t(n+1))dt + ia^{n+1}\int_0^{2\pi} \cos(t(n+1))dt$$

$$\frac{-a^{n+1}}{n+1}\left[-\cos(t(n+1)\right]_0^{2\pi} + i\frac{a^{n+1}}{n+1}\left[\operatorname{sen}(t(n+1))\right]_0^{2\pi}$$

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}\left[\cos(\pi(n+1) - 1\right]$$

si n es impar es cero, si n es par $-\dfrac{2a^{n+1}}{n+1}$

6. Demuestre

$$\int_c \csc z dz = 2\pi i$$

donde c es la circunferencia centrada en el origen
Solución:

$$\csc z = \csc(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

$$\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen}(\cos t + i \operatorname{sen} t} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\cos t)\cos(\operatorname{sen} t) + i\cos(\cos t)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}$$

donde $x = \cos t \to dx = -\operatorname{sen} t dt$, $y = \operatorname{sen} t \to dy = \cos t dt$

$$\int udx - vdy - \int udy + vdx$$

$$\csc z \int_0^{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos(\cos t)\sinh(\operatorname{sen} t)\cos t}{\operatorname{sen}^2(\cos t) + \sinh(\operatorname{sen} t)}\right]dt$$

$$+i\int_0^{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t)\cos t - \cos(\cos t)\sinh(\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^2(\cos t) + \sinh^2(\operatorname{sen} t)}\right]dt$$

tomemos otro contorno en el cual este dentro

tomamos un cuadrado con vertices $(-1/2, -1/2)$, $(1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$ y $(1/2, 1/2)$
Definiendo los contornos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{2} + it & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\
c_2 &= -\frac{1}{2} - it & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\
c_3 &= \frac{1}{2} - it & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\
c_4 &= \frac{1}{2} + it & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

contorno c_1

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(-1/2)\sinh(-t)dt}{\operatorname{sen}^2(-1/2) + \sinh^2(-t)} - i\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(-1/2)\cosh(-t)dt}{\operatorname{sen}^2(-1/2) + \sinh^2(-t)}$$

Resolviendo esta integral definida $0 + i(1{,}655404)$

contorno c_2

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(1/2)\sinh(t)dt}{\operatorname{sen}^2(1/2) + \sinh^2(t))} + i\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(1/2)\cosh(t)dt}{\operatorname{sen}^2(1/2) + \sinh^2(t)}$$

Resolviendo esta integral definida $0 + i(1{,}65404)$

contorno c_3

$$-\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(-t)\cosh(1/2)dt}{\operatorname{sen}^2(-t) + \sinh^2(1/2)} + i\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(-t)\sinh(1/2)dt}{\operatorname{sen}^2(-t) + \sinh^2(1/2)}$$

Resolviendo esta integral definida $0 + i(1{,}48755)$

contorno c_4

$$-\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(t)\cosh(-1/2)dt}{\operatorname{sen}^2(t) + \sinh^2(-1/2)} - i\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(t)\sinh(-1/2)dt}{\operatorname{sen}^2(t) + \sinh^2(-1/2)}$$

Resolviendo esta integral definida $0 + i(1{,}48755)$

si sumamos las 4 integrales obtenemos $\displaystyle\int \csc z dz = 2i\pi$

1. Calcule las integrales siguientes

   a) $\displaystyle\int_C \frac{2z^2 - z}{z-1} dz$ donde C es un contorno cerrado simple en sentido positivo que encierra el punto $z = 1$

   b) $\displaystyle\int_C \frac{z^2 - z}{z-1} dz$ donde C es un contorno cerrado simple en sentido positivo que encierra el punto $z = 1$

   c) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{2\pi z i}$ donde C es un contorno cerrado simple en sentido positivo que encierra el punto $z = 0$

   Solución:

   a)
$$\int_c \frac{2z^2 - z}{z-1} dz = 2\pi i[2(1)^2 - (1)] = 2\pi i$$

   b)
$$\int_c \frac{z^2 - z}{z-1} dz = 2\pi i[(1)^2 - (1)] = 0$$

   c)
$$\int_c \frac{\frac{\cosh z}{2\pi i}}{z} = 2\pi i \left(\frac{\cosh(0)}{2\pi i}\right) = \cosh(0) = 1$$

2. Si C es una circunferencia en sentido positivo, de radio 2 y centro en $z = 0$, calcule

   a) $\displaystyle\int_C \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - z} dz$

   b) $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$

   Solución:

   a)
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - z} dz$$
$$\int_C \frac{z^2 - 3z + 2}{z(z-1)} dz = 2\pi i f(z_0)$$
$$\int_C \frac{(z^2 - 3z + 2)/(z-1)}{z} dz = 2\pi i f(z_0)$$

   entonces $f(z_0) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{z-1}$ en $z = 0$, $f(z_0) = -2$
$$\int_C \frac{(z^2 - 3z + 2)/(z-1)}{z} dz = -4\pi i$$

   b)
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz$$
$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = 2\pi i f(z_0)$$

   $f(z_0) = \operatorname{sen} z$ en $z = 0$
$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = 2\pi i \operatorname{sen}(0) = 0$$

3. Si el polinomio $P(z) = a + bz$, donde a y b son constantes complejas y si

a) $\displaystyle\int_C \frac{P(z)}{z} dz = 2\pi i$

b) $\displaystyle\int_C \frac{P(z)}{z-1} dz = 4\pi i$

donde C es una circunferencia en sentido positivo, de radio 2 y centro en el origen, demuestre que $a = b = 1$

solucion:

a)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a+bz}{z} dz = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{a+bz}{z} dz = 2\pi i f(z) = 2\pi i$$

donde $f(z) = p(z) = a + bz$ con $z = 0$, entonces $f(z) = a$
observemos

$$2\pi i f(z) = 2\pi i$$

entonces $f(z) = a = 1$

$$2\pi i = 2\pi i$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a+bz}{z-1} dz = 4\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a+bz+1}{z-1+1} dz = 4\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a+bz+1}{z} dz = 4\pi i$$

$$\int_C \frac{a+bz+1}{z} dz = 2\pi i f(z) = 2\pi i$$

donde $f(z) = p(z) = a + bz + 1$ con $z = 0$, entonces $f(z_0) = a + 1$
observemos

$$2\pi i f(z) = 4\pi i$$

entonces $f(z) = a + 1 = 2$ sustituyendo

$$2\pi i(2) = 4\pi i$$

$$4\pi i = 4\pi i$$

4. Si C es una circunferencia en sentido positivo, de radio 2 y centro en $z = 0$, Demuestre que

a) $\displaystyle\int_C \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos^2 z}{z} dz = 2\pi i b$

b) $\displaystyle\int_C \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i$

c) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z dz}{z-2} = 0$

Solución:

a)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos^2 z}{z} dz$$

$$\int_C \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos^2 z}{z} dz = 2\pi i f(z_0)$$

donde $f(z_0) = a \operatorname{sen} z + b\cos^2 z$ en $z = 0$ entonces $f(z_0) = b$

$$\int_C \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos^2 z}{z} dz = 2\pi i b$$

b)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z \cos z}{z} dz$$

$$\int_C \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i f(z_0)$$

donde $f(z_0)$ es $f(z) = e^z \cos z$ evaluada en $z = 0$ entonces $f(z_0) = 1$

$$\int_C \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i(1)$$

$$\int_C \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i$$

c)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cosh z dz}{z-2} = 0$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z\cosh z dz}{z(z-2)} = 0$$

$$\int_C \frac{z\cosh z dz}{z(z-2)} = 2\pi f(z_0)$$

$$\int_C \frac{\frac{z\cosh z}{z-2}}{z} dz = 2\pi f(z_0)$$

donde $f(z_0) = \dfrac{z\cosh z}{z-2}$, $z = 0$ es $f(z_0) = 0$

$$\int_C \frac{z\cosh z dz}{z(z-2)} = 0$$

6. Residuos y polos

1. Demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Solución:

Tenemos la forma polar de $z = e^{i\theta}$ su derivada es $dz = iei\theta d\theta$ reescribiendo $dz = izd\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz\left[a + b\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\right]}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dz}{iaz + \frac{iz^2 - ib}{2i}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2idz}{-2iza + iz^2b - ib}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2dz}{2za + z^2b - b}$$

hallando las raices de $2za + z^2b - b$

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{(2ai)^2 - 4b(-b)}}{2b}$$

$$z = \frac{-ai \pm i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

a esta raiz la re nombraremos z_1, para $z_1 = -\frac{-ai + i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

$$\lim_{z \to -\frac{-ai+i\sqrt{a^2-b^2}}{b}} z + \frac{ai - i\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \frac{2}{\left(z + \frac{ai - i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\left(z + \frac{ai + i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)b}$$

$$\lim_{z \to \frac{-ai+i\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \frac{2}{\left(z + \frac{ai + i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)b}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{-ai + i\sqrt{a^2 - b^2}}{b} + \frac{ai + i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)b}$$

$$= \frac{2}{\frac{(2i\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} b = \frac{1}{i\sqrt{a^2 + b^2}}$$

por lo que la integral

$$\int \frac{dz}{2az + z^2 - b} = 2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$