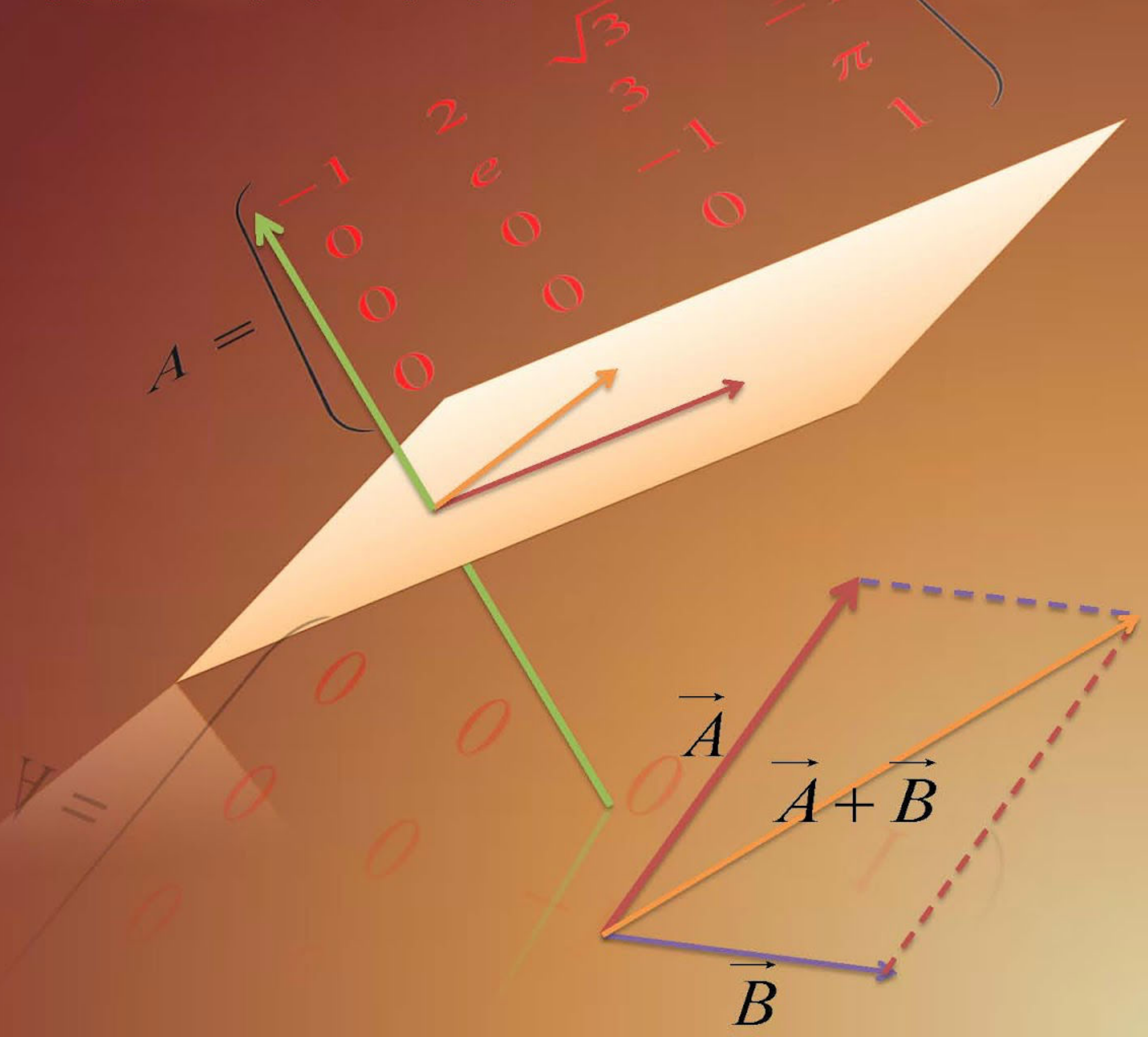
Algebra Lineal

Hector Palomares



1.- encuentre las condiciones para a y b de forma que el sistema tenga una única solución

$$
\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 &= c \\
ax_1 - bx_2 &= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
ax_1 + bx_2 = c \\
\underline{ax_1 - bx_2 = c} \\
ax_1 \qquad\quad c
\end{array}
$$

$$x_1 = \frac{c}{a} \qquad \text{si solo si } a \neq o$$

2.- encuentre las condiciones para a, b y c de forma que el sistema tenga un número de infinitas soluciones

$$
\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 &= c \\
bx_1 + ax_2 &= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
ax_1 + bx_2 = c(b) \\
bx_1 + ax_2 = c(-a)
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
abx_1 + b^2x_2 = c \\
\underline{-abx_1 - a^2x_2 = c} \\
\qquad\quad b^2x_2 - a^2x_2 = c \\
(b^2 - a^2)x_2 = c
\end{array}
$$

$$x_2 = \frac{c}{(b^2 - a^2)} \qquad \text{si solo si } \Leftrightarrow \ (b^2 - a^2) = 0$$

3.- encuentre las condiciones para a, b y c de forma que el sistema tenga un número de infinitas soluciones

$$
\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 &= c \\
bx_1 + ax_2 &= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
ax_1 - bx_2 = c(-b) \\
\underline{bx_1 + ax_2 = d(a)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-abx_1 - b^2x_2 = -bc \\
\underline{abx_1 + a^2x_2 = ad} \\
\qquad\quad a^2x_2 - b^2x_2 = ad - bc
\end{array}
$$

$$x_2(a^2 - b^2) = ad - bc$$

$$x_2 = \frac{ad - bc}{a^2 - b^2}$$

$$\text{si solo si } a^2 + b^2 = 0$$

4.- un zoológico tiene aves (bípedos) y bestias (cuadrúpedos). Si el zoológico tiene 60 cabezas y 200 patas. ¿Cuántas aves y cuantas bestias viven allí?

$$\begin{cases} 2x+4y=200 \\ x+y=60 \end{cases}$$

$$2x+4y=200$$
$$\underline{x+y=60(-2)}$$

$$2x+4y=200$$
$$\underline{-2x-2y=-120}$$
$$2y=80$$
$$y=40 bestias$$

$$sustituir$$
$$2x+4y=200$$
$$2x+4(40)=200$$
$$2x=200-160$$
$$2x=40$$
$$x=20 aves$$

5.- una heladería vende solo helado con soda y leches malteadas. En el primero se usa una onza de jarabe y cuatro onzas de helado. En la segunda, se utiliza una onza de jarabe y 3 onzas de helado. Si el expendio usa 4 galones de helado y 5/4 de jarabe en un día. ¿Cuántos helados con soda y malteadas vende diariamente?

Equivalencias: 1 cuarto = 32 onzas; 1 galón = 128 onzas

$$x \to jarabe$$
$$y \to helado$$
$$\begin{cases} 3y+4y=512 \\ x+x=160 \end{cases}$$

$$3x+4y=512$$
$$\underline{x+y=160(-3)}$$

$$3x+4y=512$$
$$\underline{-3x-3y=480}$$
$$y=32$$

$$sustituir$$
$$3x+3y=512$$
$$3x+3(32)=512$$
$$3x+96=512$$

$$3x=512-96$$
$$3x=416$$
$$x=\frac{416}{3}\approx 138$$

32 helados y 138 leches malteadas

6.- en un laboratorio se cuenta con 10ml una solución con una concentración de ácido al 30% ¿Cuántos mililitros de ácido puro deben ser adicionados para incrementar la concentración al 50%

8 sea $a=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ y $c=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ encuentre un vector v tal que $2a-b+3v=4c$

En los problemas 9 – 12 efectué las operaciones indicadas con

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix} \qquad \text{Y} \quad C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

9.- $A-2B$ 10.- $A+B+C$ 11.- $C-A-B$

$$A-2B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5&0\\-3&4&-5\\-14&13&-1\end{pmatrix}$$

$$A+B+C\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&5\\9&5&10\\7&-7&3\end{pmatrix}$$

$$C-A-B=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-3&-3&-10\\-7&3&5\end{pmatrix}$$

12.- Halle una matriz D de manera que $A+B+C+D$ sea la matriz cero de 3×3

$$A+B+C\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&5\\9&5&10\\7&-7&3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\-9&-5&-10\\-7&7&-3\end{pmatrix}$$

$$A+B+C+D\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\-9&-5&-10\\-7&7&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

En los ejercicios del 13 – 23 efectúe las operaciones indicadas

13.- $\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&20\\-4&11\end{pmatrix}$

14.- $\begin{pmatrix}3&-2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&6\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&12\\-1&18\end{pmatrix}$

15.- $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\1&3\end{pmatrix}$

16.- $\begin{pmatrix}-4&5&1\\0&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\5&6&4\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&35&18\\20&4&2\end{pmatrix}$

17.- $\begin{pmatrix}7&1&4\\2&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&6\\0&4\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&58\\-8&15\end{pmatrix}$

18.- $\begin{pmatrix}1&6\\0&4\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1&4\\2&-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-17&34\\8&-12&20\\-8&-11&7\end{pmatrix}$

19.- $\begin{pmatrix}2&-3&5\\1&0&6\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&6\\-2&3&5\\1&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-1&17\\7&4&30\\-3&17&31\end{pmatrix}$

20.- $\begin{pmatrix}1&4&6\\-2&3&5\\1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&5\\1&0&6\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&12&35\\9&21&13\\10&9&9\end{pmatrix}$

21.- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

22.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

23.- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \end{pmatrix}$

Sea A una matriz cuadrada entonces A^2 se define como AA

24.- Calcule A^2 para A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 50 \\ -3 & 1 & 23 \\ 5 & 4 & 22 \end{pmatrix}$$

25.- Determine A^3 para $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^2 A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 57 & 106 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 57 & 106 \end{pmatrix}$$

26.- Evalué $A^2, A^3, A^4 A^5$ en donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.- El precio de admisión a un partido de baloncesto fue de 300 pesos para estudiantes y 450 pesos para el público en general. Si se vendieron 450 boletos para un total de 155; 550 pesos, ¿cuántos de cada tipo se vendieron?

$$300x + 450y = 155,550$$
$$x + y = 450$$

$$Ec(2)$$
$$x = 450 - y$$

$$\text{sustitur en ec(1)}$$
$$300(450 - y) + 450y = 155,550$$
$$135,000 - 300y + 450y = 155,550$$
$$150y = 20550$$
$$y = \frac{20550}{150}$$
$$y = 137 \text{ boletos "publico en general}$$

$$\text{sustituir en ec(2)}$$
$$x + y = 450$$
$$x + 137 = 450$$
$$x = 450 - 137$$
$$x = 313 \text{ boletos}$$
$$\text{"estudiantes"}$$

2. Cunado una pelota rueda hacia abajo por un plano inclinado, su velocidad $v(t)$ (en $cm = seg$) en el tiempo t (en segundos) está dada por, $v(t) = v_0 + at$
Para una velocidad inicial v_0 y aceleración a (en $cm = seg^2$). Si $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$, encuentre v_0 y a .

$$v(2) = v_0 + at \quad \rightarrow \quad v_0 + 2a = 16$$
$$v(5) = v_0 + at \quad \rightarrow \quad v_0 + 5a = 25$$

$$ec(2)$$
$$v_0 = 25 - 5a$$
$$\text{sustituimos en } ec(1)$$
$$(25 - 5a) + 2a = 16$$
$$3a = 9$$
$$a = 3$$

$$\text{sustituimos en } ec(2)$$
$$v_0 + 5(3) = 25$$
$$v_0 = 25 - 15$$
$$v_0 = 10$$

En los ejercicios 3 - 12, calcule el DETERMINANTE y encuentre todas las Soluciones de cada sistema de ecuaciones.

3.-

$$\frac{3x}{2} + y = 11$$
$$x + \frac{y}{2} = 7$$

$$\text{determinante}$$
$$\frac{3xy}{4} + xy$$

$$ec(2)$$
$$x = 7 - \frac{y}{2}$$
$$ec(1)$$
$$\frac{3\left(7 - \frac{y}{2}\right)}{2} + y = 11$$

$$\frac{42 - 3y}{4} + y = 11$$
$$\frac{42 - 3y + 4y}{4} = 11$$
$$y = 44 - 42$$
$$y = 2$$

$$ec(2)$$
$$x + \frac{2}{2} = 7$$
$$x = 6$$

$$soluciones$$
$$y = 2$$
$$x = 6$$

4.-

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{2}{3}x_2=2$$
$$3x_1+4x_2=12$$

determinante

$2x_1x_2-2x_1x_2$

$ec(2)$

$$x_1=\frac{12-4x_2}{3}$$

$ec(1)$

$$\frac{12-4x_2}{6}+\frac{2x_2}{3}=2$$
$$\frac{36-12x_2+12x_2}{18}=2$$
$$2=2$$

Tiene una única solución

5.-

$$x-\frac{3y}{4}=15$$
$$\frac{15x}{2}-y=9$$

determinante

$-xy+\frac{45xy}{8}$

$ec(2)$

$$\frac{15\left(15+\frac{3y}{4}\right)}{2}-y=9$$
$$\frac{225+\frac{45y}{4}}{3}-y=9$$
$$\frac{900+45y-12y}{12}=9$$
$$900+45y-12y=108$$
$$33y=-792$$
$$y=-24$$

$ec(1)$

$$x-\frac{3(-24)}{4}=15$$
$$x-\frac{-72}{4}=15$$
$$x=15-18$$
$$x=-3$$

soluciones

$y=-24$

$x=-3$

6.-

$$\frac{3}{2}x_1+\frac{2}{3}x_2=1$$
$$9x_1+4x_2=6$$

determinante

$6x_1x_2-6x_1x_2$

$ec(2)$

$$x_1=\frac{6-4x_2}{9}$$

$ec(1)$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{6-4x_2}{9}\right)+\frac{2}{3}x_2=1$$
$$\frac{18-12x_2}{18}+\frac{2}{3}x_2=1$$
$$\frac{18-12x_2++12x_2}{18}=1$$
$$1=1$$

7.-

$$\frac{3}{5}x-\frac{1}{4}y=2$$
$$2x-\frac{5}{2}y=0$$

determinante

$-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{2}xy$

$ec(2)$

$$x=\frac{5}{4}y$$

$ec(1)$

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{4}y\right)-\frac{1}{4}y=2$$
$$\frac{15y-5y}{20}=2$$
$$10y=40$$
$$y=4$$

$$2x-\frac{5}{2}(4)=0$$
$$x=\frac{20}{4}$$
$$x=5$$

soluciones

$y=4$

$x=5$

8.-

$$\frac{4}{5}x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$
$$3x_1 + 5x_2 = 7$$

determinante

$$3x_1x_2 - 4x_1x_2$$

$$ec(2)$$
$$x_2 = \frac{7-3x_1}{5}$$
$$ec(1)$$
$$\frac{4}{5}x_1 + \frac{7-3x_1}{5} = \frac{3}{2}$$
$$4x_1 + 7 - 3x_1 = \frac{15}{2}$$
$$x_1 = \frac{1}{2}$$
$$ec(2)$$
$$\frac{3}{2} + 5x_2 = 7$$
$$5x_2 = 7 - \frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{11}{5}$$
$$ec(2)$$
$$\frac{\frac{3y}{4} - 4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3$$
$$\frac{3y-16}{8} + \frac{y+2}{5} = 3$$

c

$$\frac{15y - 80 + 8y + 16}{40} = 3$$
$$23y = 184$$
$$y = 8$$

9.-

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0$$
$$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3$$

determinante

$$\frac{xy + 2x - 3y - 6}{15} + \frac{xy - 4x - 4y + 16}{8}$$

$$ec(1)$$
$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4}$$
$$x - 3 = \frac{3y-12}{4}$$
$$x = \frac{3y - 12 + 12}{4}$$
$$x = \frac{3y}{4}$$

$$ec(1)$$
$$\frac{x-3}{3} - \frac{(8)-4}{4} = 0$$
$$\frac{x-3}{3} = 1$$
$$x - 3 = 3$$
$$x = 0$$

10.-

$$\frac{4}{5}x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$
$$8x_1 + 10x_2 = 15$$

determinante

$$8x_1x_2 + 8x_1x_2$$

11.-

$$\frac{x+y}{6} = \frac{x-y}{12}$$
$$\frac{2x}{3} = y + 3$$

$$\frac{x+y}{6} - \frac{x-y}{12} = 0$$
$$\frac{2x}{3} - (y+3) = 0$$

$$ec(2)$$
$$x_2=\frac{15-8x_1}{10}$$
$$ec(1)$$
$$\frac{4x_1}{5}+\frac{15-8x_1}{10}=\frac{3}{2}$$
$$8x_1+15-8x_1=15$$
$$15=15$$

tiene una única solución

determinante

$$\frac{-y^2-xy-3x-3y}{6}-\frac{2x^2-2xy}{36}$$
$$ec(2)$$
$$x=\frac{3y+9}{2}$$
$$ec(1)$$
$$\frac{\frac{3y+9}{2}+y}{6}-\frac{\frac{3y+9}{2}-y}{12}=0$$

Continúa el ejercicio 11.-

$$\frac{3y+9+2y}{6}-\frac{3y+9-2y}{12}=0$$
$$\frac{6y+18+4y-3y-9+2y}{12}=0$$
$$6y+18+4y-3y-9+2y=0$$
$$9y=-9$$
$$y=-1$$

$$ec(2)$$
$$\frac{2x}{3}=-1+3$$
$$x=3$$

$$soluciones$$
$$y=-1$$
$$x=3$$

$$\frac{x_1}{2}+\frac{2x_2}{3}=2$$
$$3x_1+4x^2=11$$

determinante

$$2x_1x_2-2x_1x_2$$

$$ec(2)$$
$$x_1=\frac{11-4x_2}{3}$$

$$ec(1)$$
$$\frac{11-4x_2}{6}+\frac{2x_2}{3}=2$$
$$11-4x_2+4x_2=12$$
$$11=12$$

no existe ninguna solución

En los ejercicios 13 - 21, determine si la matriz dada esta en forma escalonada (pero no en forma escalonada reducida), en forma escalonada reducida o en ninguna de las dos.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

escalonada

14. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

escalonada

15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

escalonada reducida

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

escalonada

17. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

escalonada

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ escalonada reducida

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ escalonada

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ninguna de las dos

En los ejercicios 22 - 33 lleve el sistema a la forma Ax = b, luego use la eliminación Gaussiana o la eliminación de Gauss-Jordan para encontrar todas las soluciones, si existen, de los sistemas dados.

22

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

$-R_3 + 2R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$R_2 - 4R_1 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & 40 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$3R_3 + R_2 \to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

$R_3 / 4$

$R_1 + 3R_3 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$R_2 - 13R_3 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$9R_1 + 2R_2 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} R_1/9 \\ R_2/9 \\ R_3(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

solucion

$x_1 = 8, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1$

23

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{array}\right)$$

$2R_3 + 3R_1 \to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 0 & 7 & -2 & 48 \end{array}\right)$$

$2R_2 + 5R_1 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 5 & 46 & 58 \\ 0 & 7 & -2 & 48 \end{array}\right)$$

$-5R_3 + 7R_2 \to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 5 & 46 & 58 \\ 0 & 0 & 322 & 166 \end{array}\right)$$

$-3R_1 + R_3 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 0 & -53 \\ 0 & 5 & 46 & 58 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$-23R_2 + R_3 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 0 & -53 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$5R_1 + 3R_2 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} R_1/30 \to R_1 \\ R_2/5 \to R_2 \\ R_3/2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

solucion

$x_1 = -2$

$x_2 = 7$

$x_3 = \dfrac{1}{2}$

24

$$\begin{aligned}3x_1+6x_2-6x_3&=9\\2x_1-5x_2+4x_3&=6\\-x_1+16x_2-14x_3&=-3\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&-6&9\\2&-5&4&6\\-1&16&-14&-3\end{array}\right)$$

$3R_3+R_1\to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&-6&9\\2&-5&4&6\\0&54&-48&0\end{array}\right)$$

$3R_2-2R_1\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&-6&9\\0&-27&24&0\\0&54&-48&0\end{array}\right)$$

$R_3/6$

$R_2/3$

$R_3+R_2\to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&-6&9\\0&-9&8&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$R_1+6R_3\to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}18&36&0&54\\0&-9&8&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$R_2-8R_3\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}18&36&0&54\\0&-9&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$R_1/6$

$9R_1+6R_2\to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}27&0&0&81\\0&-9&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

25

$$\begin{aligned}x_1+x_2-x_3&=7\\4x_1-x_2+5x_3&=4\\2x_1+2x_2-3x_3&=0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\4&-1&5&4\\2&2&-3&0\end{array}\right)$$

$R_3-2R_1\to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\4&-1&5&4\\0&0&-1&-14\end{array}\right)$$

$R_2-4R_1\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\0&-5&9&-24\\0&0&-1&-14\end{array}\right)$$

$-9R_1+R_3\to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-9&-9&0&-77\\0&-5&9&-24\\0&0&-1&-14\end{array}\right)$$

$R_2+9R_3\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-9&-9&0&-77\\0&-5&0&-150\\0&0&-1&-14\end{array}\right)$$

$-5R_1+9R_2\to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}45&0&0&-259\\0&-5&0&-150\\0&0&-1&-14\end{array}\right)$$

$R_1/45\to R_1$

$R_2/5(-1)\to R_2$

$R_3(-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{259}{45}\\0&1&0&30\\0&0&1&14\end{array}\right)$$

solucion

$$\left(-\frac{259}{45}x_1, 30x_2, 14x_3\right)$$

26.-

$$\begin{aligned}x_1+x_2-x_3&=7\\4x_1-x_2+5x_3&=4\\6x_1+x_2+3x_3&=20\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\4&-1&5&4\\6&1&3&20\end{array}\right)$$

$R_3-6R_1\to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\4&-1&5&4\\0&-5&9&-22\end{array}\right)$$

$R_2-4R_1\to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&7\\0&-5&9&-24\\0&-5&9&-22\end{array}\right)$$

$R_3 - R_2 \to R_3$ $\quad$ $9R_1 + R_2 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 39 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

No tiene soluciones

27.-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 - 6R_1 \to R_3$ $\quad$ $R_2 - 4R_1 \to R_2$ $\quad$ $R_3 + R_2 \to R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-1/5R_2 \to R_2$ $\quad$ $R_1 - R_2 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

solucion

$$\left(x_1 + \frac{14}{5}x_3, x_2 + \frac{9}{5}x_3, x_3\right)$$

tiene un número infinito de soluciones

28.-

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

$R_2 + 3R_1 \to R_2$ $\quad$ $-2R_2 + R_1 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 10 & -5 & 19 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{10} \end{array}\right)$$

Solucion

$$\left(4x_1, \frac{19}{10}x_2 - \frac{1}{2}x_3, x_3\right)$$

29.-

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 8 & -9 \end{array}\right)$$

$2R_1 + R_2 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

NO tiene soluciones

32.-

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$R_3 - 3R_1 \to R_3$ $\quad$ $R_2 - 2R_1 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 19 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 19 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{5}R_2 \to R_2$

$R_1 - R_3 \to R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 19 \end{array}\right)$$

Solucion

$$\left(4x_1, 1/5x_2\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

$R_2/3 \to R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{7}{3} \\ 3 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

$R_1 - R_2 \to R_1$ $\quad$ $-R_2 + R_1/(1/2)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/3 & 0 & 5/3 \\ 2/3 & -1 & 7/3 \\ 3 & -2 & 11 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 17/3 \\ 3 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

$R_1/(1/3)$ $\quad$ $R_3-3R_1\rightarrow R_3$ $\quad$ *solucion*

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 17/3\\ 3 & -2 & 11\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 17/3\\ 0 & -2 & 4\end{array}\right)\quad\left(5x_1,\frac{17}{3}x_{2,}2x_3\right)$$

31

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3+x_4&=2\\ 3x_1+2x_3-2x_4&=-8\\ 4x_2-x_3-x_4&=1\\ 5x_1+3x_3-x_4&\end{aligned}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & -2 & -8\\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3 & -1 & -3\end{array}\right)$$

$R_4-R_1\rightarrow R_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & -2 & -8\\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -2 & -5\end{array}\right)$$

$R_2-3R_1\rightarrow R_2$ $\quad$ $-3R_4+R_2\rightarrow R_4$ $\quad$ $-6R_3+4R_2\rightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14\\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -2 & -5\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14\\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14\\ 0 & 0 & 2 & -14 & 62\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$R_3/2\rightarrow R_3$

$R_4+7R_3\rightarrow R_4$ $\quad$ $-48R_1+R_4\rightarrow R_1$ $\quad$ $24R_2+5R_4\rightarrow R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 31\\ 0 & 0 & 0 & 48 & 218\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}-48 & 96 & -48 & 0 & 122\\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 31\\ 0 & 0 & 0 & 48 & 218\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 0 & 48\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -118\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 31\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 109\end{array}\right)$$

$24R_3+7R_4\rightarrow R_3$ $\quad$ $R_1-R_3\rightarrow R_1$ $\quad$ $R_2+R_3\rightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 0 & 48\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -118\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1507\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 109\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 48\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -118\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1507\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 109\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 48\\ 0 & 6 & 0 & 0 & -118\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1507\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 109\end{array}\right)$$

$$3R_1+R_2\to R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3&0&0&0&26\\ 0&6&0&0&-118\\ 0&0&1&0&1507\\ 0&0&0&24&109 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1/3\to R_1\\ R_2/6, R_2/2\to R_2\\ R_4/24 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&26/3\\ 0&1&0&0&-59/3\\ 0&0&1&0&1507\\ 0&0&0&1&109/24 \end{array}\right)$$

$$\left(\frac{26}{3}x_1, \frac{-59}{3}x_2, 1507x_3, \frac{109}{24}x_4\right)$$

32.- Determine el polinomio de grado dos $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ cuya grafica pasa por los puntos $(1,4),(2,0)y(3,12)$

$$\begin{aligned} p(1)&=a_0+a_1+a_2=4\\ p(2)&=a_0+2a_1+4a_2=0\\ p(3)&=a_0+3a_1+9a_2=12 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4\\ 1&2&4&0\\ 1&3&9&12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-R_1\to R_2\\ R_3-R_1\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4\\ 0&1&3&-4\\ 0&2&8&8 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_2\to R_1\\ R_3-2R_2\to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&8\\ 0&1&3&-4\\ 0&0&2&16 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&8\\ 0&1&3&-4\\ 0&0&1&8 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+2R_3\to R_1\\ R_2-3R_3\to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&24\\ 0&1&0&-28\\ 0&0&1&8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} a_0=24\\ a_1=-28\\ a_2=8 \end{array}$$

$$p(x)=8x^2-28x-24$$

33.- Encuentre (de ser posible) condiciones sobre a; b y c de modo que el sistema de ecuaciones lineales (a) no tenga solución (b) tenga exactamente una solución y (c) tenga infinidad de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=a\\ x+y+2z&=b\\ 3y+z&=c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-1&1&a\\ 1&1&2&b\\ 0&3&3&c \end{array}\right) R_1-R_2\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&a-b\\ 1&1&2&b\\ 0&3&3&c \end{array}\right) R_2-R_1\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&a-b\\ 0&3&3&2b-a\\ 0&3&3&c \end{array}\right) \frac{1}{3}R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&a-b\\ 0&1&1&\frac{2b-a}{3}\\ 0&3&3&c \end{array}\right)$$

$$R_1+2R_2\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&\frac{a-b}{3}\\ 0&1&1&\frac{2b-a}{3}\\ 0&3&3&c \end{array}\right) R_3-3R_2\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&\frac{a-b}{3}\\ 0&1&1&\frac{2b-a}{3}\\ 0&0&0&c-2b+a \end{array}\right)$$

En los problemas 1 – 8 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos

1.- $\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad 1/2R_1\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad R_2 - 3R_1 \to R_2\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \quad 2/5R_2\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 + 1/2R_2 \to R_1\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Solucion

$(0x_1, 0x_2)$

2.- $\begin{matrix} x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 0 \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{array}\right) R_2 + R_1 \to R_2\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solucion

$(5x_2, x_2), x \in R$

3.-

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{6}R_2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{6}R_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} R_1 + 1/6R_3 \to R_1 \\ R_2 + 5/6R_3 \to R_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

4.-

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ -5 & 13 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 + 5R_1 \to R_3 \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 18 & -15 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{6}R_2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 18 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 - 18R_1 \to R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{12}R_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} R_1 + 1/6R_3 \to R_1 \\ R_2 + 5/6R_3 \to R_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Solucion

$(0x_1, 0x_2, 0x_3), x \in R$

5.-

$$\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad 5R_1 + 3R_2 \to R_1\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad 2R_2 - 6R_1 \to R_2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - 8R_1 \to R_1\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_1/2 \\ R_2/-10 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/10 \end{pmatrix}$$

Solucion

$(x_1, -8/10x_3, x_3)$

6.-

$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= 0\\ 7x_1 + 3x_2 &= 0\\ -8x_1 + 6x_2 &= 0\end{aligned}\qquad \left(\begin{array}{cc|c}4 & -1 & 0\\ 7 & 3 & 0\\ -8 & 6 & 0\end{array}\right) 1/4R_1 \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/4 & 0\\ 7 & 3 & 0\\ -8 & 6 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}R_2 - 7R_1 \to R_2\\ R_3 + 8R_1 \to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/4 & 0\\ 0 & 19/4 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{array}\right) 4/19R_2 \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}R_1 + 1/4R_2 \to R_1\\ R_3 - 4R_2 \to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Solucion

$(0x_1, 0x_3)$

7.-

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}\qquad \begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & -1\\ 2 & 3 & -8 & 1\end{pmatrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & -1\\ 0 & 7 & -22 & 3\end{pmatrix} \frac{1}{7}R_2 \begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & -1\\ 0 & 1 & \frac{-22}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$R_1 + 2R_2 \to R_1 \begin{pmatrix}1 & 0 & 5/7 & -1/7\\ 0 & 1 & -22/7 & 3/7\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4\\ x_2 &= \frac{-22}{7}x_3 + 3x_4\end{aligned}\qquad \left(\frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4, \frac{-22}{7}x_3 + 3x_4\right)$$

8.-

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 0\\ 3x_1 + 5x_2 &= 0\\ 7x_1 - 3x_2 &= 0\\ -2x_1 + 3x_2 &= 0\end{aligned}\qquad \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 7 & -3 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{array}\right) \frac{1}{2}R_1 \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 7 & -3 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}R_2 - 3R_1 \to R_2\\ R_3 - 7R_1 \to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 13/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{array}\right) R_4 + 2R_1 \to R_4 \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 13/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\frac{2}{13}R_2 \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}R_4 - 2R_2 \to R_4\\ R_3 - 1/2R_2 \to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) R_1 + \frac{1}{2}R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Solucion

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

9.- Explique porque las formulas $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ y $(A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$ no son válidas para matrices

si tenemos:

A una matriz mxn

B una matriz mxn

$(A+B) \to mxn$

$(A\pm B) \to mxn$

entonces

$(A+B)(A\pm B) \quad \to \quad mx\boxed{n \;\; m}xn$

No tiene las mismas dimensiones y por lo tanto las formulas no son válidas para matrices.

10.- Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valores de k tiene solución única?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & -11 & k & 0 \end{array}\right) R_1 + R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & -11 & k & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 - 4R_1 \to R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & -27 & k-16 & 0 \end{array}\right) \frac{R_2}{11} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & -27 & k-16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1 - 4R_2 \to R_1 \\ R_3 + 27R_2 \to R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 32/11 & 0 \\ 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & k-95/11 & 0 \end{array}\right)$$

Para que tenga una única solución la matriz el renglón 3 columna 3 debe ser diferente de "cero"

Entonces tenemos

$$k - \frac{95}{11} \neq 0$$

$$k = \frac{95}{11}$$

K debe ser diferente de 95/11. Si no tendrá infinitas soluciones el sistema

En los problemas 11 – 22 determine si la matriz dada es invertible, si lo es calcule su inversa

11.- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) 2R_2 - 3R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) R_1 - R_2 \to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \frac{1}{2} R_1 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

12.- $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & -12 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 + 2R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ NO tiene inversa

13.- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \leftrightarrow R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

14.- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 - 3R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ NO tiene inversa

15.- $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} a & a & 1 & 0 \\ b & b & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 1/aR_1 \\ 1/bR_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 - R_1 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ No tiene inversa

16.- $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&3&0&1&0\\5&5&1&0&0&1\end{array}\right) R_3-5R_1\to R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&3&0&1&0\\0&0&-4&5&0&1\end{array}\right) 2R_1-R_2\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&2&3&0&1&0\\0&0&-4&5&0&1\end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{4}R_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&2&3&0&1&0\\0&0&1&-5/4&0&-1/4\end{array}\right)\begin{array}{c}R_1+R_3\to R_1\\R_2-3R_3\to R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/4&-1&-1/4\\0&2&0&15/4&1&3/4\\0&0&1&-5/4&0&-1/4\end{array}\right)\frac{1}{2}R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/4&-1&-1/4\\0&1&0&2/15&1/2&2/3\\0&0&1&-5/4&0&-1/4\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}3/4&-1&-1/4\\2/15&1/2&2/3\\-5/4&0&-1/4\end{pmatrix}$$

17.- $C=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}R_1-R_3\to R_1\\R_2-2R_3\to R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&1&0&-1\\0&2&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)R_1-R_2\to R_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&1&-1&1\\0&2&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\frac{1}{3}R_1\\\frac{1}{2}R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&1&0&0&1/2&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&-1/3&1/3\\0&1/2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

18.- $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)R_1-R_2\to R_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)R_2-R_3\to R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

19.- $E=\begin{pmatrix}1&6&2\\-2&3&5\\7&12&-4\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&2&1&0&0\\-2&3&5&0&1&0\\7&12&-4&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_2+2R_1\rightarrow R_2\\R_3-7R_1\rightarrow R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&2&1&0&0\\0&15&9&2&1&0\\0&-30&-10&-7&0&1\end{array}\right)\frac{1}{5}R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&6&2&1&0&0\\0&1&3/5&2/15&1/15&0\\0&-30&-10&-7&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}R_1-6R_2\rightarrow R_1\\R_3+30R_2\rightarrow R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-8/5&1/5&-2/5&0\\0&1&3/5&2/15&1/15&0\\0&0&8&-3&-5&1\end{array}\right)\frac{1}{8}R_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-8/5&1/5&-2/5&0\\0&1&3/5&2/15&1/15&0\\0&0&1&-3/8&5/8&1/8\end{array}\right)\begin{array}{l}R_1+8/5R_2\rightarrow R_1\\R_2-3/5R_3\rightarrow R_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/5&-7/5&1/5\\0&1&0&43/120&53/120&-3/40\\0&0&1&-3/8&5/8&1/8\end{array}\right)\qquad E^{-1}=\begin{pmatrix}-2/5&-7/5&1/5\\43/120&53/120&-3/40\\-3/8&5/8&1/8\end{pmatrix}$$

$F=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}R_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/3&0&1&0&0\\1&-1&2&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_2-R_1\rightarrow R_2\\R_3-R_1\rightarrow R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/3&0&1/3&0&0\\0&-4/3&2&-1/3&1&0\\0&2/3&1&-1/3&0&1\end{array}\right)R_2-2R_3\rightarrow R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/3&0&1/3&0&0\\0&-8/3&0&1/3&1&2\\0&2/3&1&-1/3&0&1\end{array}\right)$$

$$-\frac{3}{8}R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/3&0&1/3&0&0\\0&1&0&-3/24&-3/8&-3/4\\0&2/3&1&-1/3&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_1-1/3R_2\rightarrow R_1\\R_3-2/3R_2\rightarrow R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/8&1/8&1/4\\0&1&0&-3/24&-3/8&-3/4\\0&0&1&35/3&1/4&1/2\end{array}\right)$$

$$F^{-1}\begin{pmatrix}3/8&1/8&1/4\\-3/24&-3/8&-3/4\\35/3&1/4&1/2\end{pmatrix}$$

21.- $G=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-1&0&5\\19&-7&3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&4&1&0&0\\-1&0&5&0&1&0\\19&-7&3&0&0&1\end{array}\right)19R_2+R_3\rightarrow R_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&4&1&0&0\\-1&0&5&0&1&0\\0&-7&98&0&19&1\end{array}\right)2R_2+R_1\rightarrow R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&4&1&0&0\\0&-1&14&1&2&0\\0&-7&98&0&19&1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}R_1-R_2\rightarrow R_1\\R_3-7R_2\rightarrow R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-10&0&-2&0\\0&-1&14&1&2&0\\0&0&0&-7&5&1\end{array}\right)\begin{array}{l}1/2R_1\\-R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&0&-1&0\\0&1&-14&-1&-2&0\\0&0&0&-7&5&1\end{array}\right)\textit{No tiene inversa}$$

$$22.- \quad H=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

-

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right) R_2-R_1\to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right) \begin{matrix}R_1+2R_2\to R_1\\R_3+R_2\to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&2&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$-R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-1&2&0\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right) \begin{matrix}R_1-R_3\to R_1\\R_2-R_3\to R_2\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right) \qquad H^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Demuestre que la Matriz $\begin{pmatrix}3&4\\-2&-3\end{pmatrix}$ Es igual a su propia inversa

$$\begin{pmatrix}3&4\\-2&-3\end{pmatrix} 2R_1+3R_2\to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc}3&4&1&0\\0&-1&2&3\end{array}\right) \frac{1}{3}R_1 \left(\begin{array}{cc|cc}1&4/3&1/3&0\\0&-1&2&3\end{array}\right) \frac{4}{3}R_2+R_1\to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&4\\0&-1&2&3\end{array}\right) -R_2 \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&4\\0&-1&2&3\end{array}\right)$$

24.- Sea $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ Tal que $|A|\neq 0$ Demuestre que

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}a_{11}&a_{12}&1&0\\a_{21}&a_{22}&0&1\end{array}\right) \frac{1}{a_{11}}R_1 \left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\frac{1}{a_{11}}&0\\a_{21}&a_{22}&0&1\end{array}\right) -a_{21}R_1+R_2\to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\frac{1}{a_{11}}&0\\0&\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}&-\frac{a_{21}}{a_{11}}&-1\end{array}\right)$$

$$a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}$$

$$\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}R_2 \left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\frac{1}{a_{11}}&0\\0&1&-\frac{a_{21}a_{11}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}&\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{array}\right)$$

$$R_1-\frac{a_{12}}{a_{11}}R_2\to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{a_{11}}&0\\0&1&-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}&\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{array}\right)$$

$$\frac{1}{a_{11}}+\frac{a_{21}a_{12}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}=\frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}+a_{11}a_{21}a_{12}}{(a_{11})(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})}=$$

1.- Encuentre números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sea simétrica

Es simétrica si la matriz es igual a la transpuesta

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & \beta \\ \alpha & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = 5$, $\beta = 3$

2.- Se dice que una matriz cuadrada es anti simétrica si At = A, ¿Cuáles de las siguientes matrices son simétricas y cuales son anti simétricas?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Simétrica antisimetrica simétrica antisimetrica

En los problemas 3 – 12 calcule el determinante.

$3.-$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$

$4.-$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-4) - 0(0-8) + 3(0-2)$$

$$= -4 - 6$$

$$= -10$$

$5.-$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(6-20) - 1(12-4) + 0(10-1)$$

$$= 14 - 8$$

$$= 6$$

$6.-$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$3(18+5) - [-1(36-10] + 4(-6-6)$$

$$= 69 + 26 - 48 = 47$$

$7.-$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-6-8) - 0 + 6(0-2) = 14 - 12 = 2$$

$8.-$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(6-10) - 4(4-0) + 1(8-0)$$

$$8 - 16 + 8 = 0$$

$9.-$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix} \qquad b\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} \qquad b\left((a\cdot 0\cdot 0)+(0\cdot 0\cdot d)+(0\cdot 0\cdot c)\right)=0$$

$10.-$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2\left[1(0-15)+2(20-2)\right]=2(-15+36)=42$$

$$1\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad -1\left[15-1\right]=-14$$

$42-14$

28

$11.-$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad 6\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix} \qquad 6\left[-3(-7)\right]=126$$

12.-

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}=a\left(d\left(ad-(-bc)\right)-b\left(c\left(ad+cb\right)\right)\right)$$

$$=a(ad^2+bcd)-b(cad+c^2b)$$

$$=a^2d^2+abcd-abcd-c^2b^2$$

$$|A|=\left(a^2d^2-c^2b^2\right)$$

Demuestre que si A y B son matrices diagonales $n \times n$ entonces $|AB| = |A||B|$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_1 a_2 a_3 \qquad |B| = b_1 b_2 b_3$$

Y si tenemos:

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 b_3 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$$

$$|AB| = |A||B|$$

En los ejercicios del 15 al 17 calcule el determinante suponiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$

15-. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -8$ $\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 16$ $\qquad$ 17.- $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -16$

1.- Dados $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 4-6i$ calcular:

$(a) z_1 + z_2$

$(3+2i)+(-5+3i) = -2-5i$

$(b) z_2 - z_3$

$(-5+3i)-(4-6i) = -9+9i$

$(c) z_1 z_2 z_3$

$(3+2i)(-5+3i)(4-6i)$

$= (-15+9i-10i-6)(4-6i)$

$= -60+36i-40i-24+90i+54-60+36i$

$= -90+122i$

$d)\dfrac{z_1}{z_2}$

$$\frac{3+2i}{-5+3i}\left(\frac{-5+3i}{-5+3i}\right)$$

$$=\frac{-15+9i-10i-6}{25+9}$$

$$=-\frac{21}{34}-\frac{i}{34}$$

$(e)\dfrac{z_2}{z_3}$

$$\frac{-5+3i}{4-6i}\left(\frac{4-6i}{4-6i}\right)$$

$$=\frac{-20+30i+12i+18}{16-36}$$

$$=-\frac{2}{52}-\frac{42}{52}$$

$(e)\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$

$$\frac{(3+2i)(4-6i)}{-5+3i}=\frac{12-18i+8i+12}{-5+3i}=\frac{24-10i}{-5+3i}\left(\frac{-5-3i}{-5-3i}\right)$$

$$=\frac{-220-72i+50i-30}{25+9}=-\frac{250}{34}-\frac{22}{34}i$$

2.- En los ejercicios 2 - 7, reducir a la forma a + bi.

$2.-$

$$(2+i)(1+i)=2+2i+i-1=1+3i$$

$3.-$

$$\frac{1+i}{-i}$$

$$\frac{1+i}{-i}\left(\frac{i}{i}\right)=\frac{i+(-1)}{1}=-1+i$$

$4.-$

$$\frac{(2+i)(1+i)}{1-i}=\frac{1+3i}{1-i}\left(\frac{1+i}{1+i}\right)$$

$$=\frac{-2+3i}{2}=-1+\frac{3}{2}i$$

$5.-$

$$\frac{(4+3i)(1-2i)}{7-i}=\frac{4-8i+3i+6}{7-i}$$

$$\frac{10-5i}{7-i}\left(\frac{7+i}{7+i}\right)=\frac{70-35i+5}{50}$$

$$=\frac{14}{5}-\frac{7}{5}i$$

$6.-$

$$\frac{(1+i)^3}{1-i}=\frac{1+3i+3i^2+i^3}{1-i}$$

$$=\frac{-2+2i}{1-i}\left(\frac{1+i}{1+i}\right)$$

$$=\frac{-2-2i+2i-2}{2}=-2+0i$$

$7.-$

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{9}{8}-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$$=-\frac{7}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

8.- Hallar las raíces reales de la ecuación

$$(1+i)x^3+(1+2i)x^2-(1+i)x-1-2i=0$$

$$(1+i)(x^3-x)+(1+2i)(x^2-1)=0$$
$$x(x^2-1)(1+i)+(1+2i)(x^2-1)=0$$
$$[x(1+i)+(1+2i)](x^2-1)=0$$
$$[x(1+i)+(1+2i)](x-1)(x+1)=0$$

$$(x-1)(x+1)=0$$
$$x=1,\quad x=-1$$

$$x(1+i)+(1+2i)=0$$
$$x=\frac{1+2i}{1+i}$$

$$x=\frac{1+2i}{1+i}\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$$
$$x=\frac{1-i+2i+2}{2}$$
$$x=\frac{3+i}{2}$$

9.- En los ejercicios 9 - 11, hallar los módulos de los números

9.-
$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

10.-
$$\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

11.-
$$\frac{(4+3i)(1+i)}{7-i}=\frac{4+4i+3i-3}{7-i}$$
$$\frac{1+7i}{7-i}\left(\frac{7+i}{7+i}\right)=\frac{7+i+49i-7}{50}$$
$$=\frac{50i}{50}=i$$
$$|i|=\sqrt{1}=1$$

Demostrar que $\forall z_1, z_2 \in C$ sugerencia $z_1=z_2+(z_1-z_2)$

$a)$
$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$
$$|z_2+(z_1-z_2)+z_2|$$
$$|z_2|+|z_1|\le|z_1|+|z_2|$$

b)
$$|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$$
$$|z_2+(z_1-z_2)-z_2|$$
$$|z_2-z_2+(z_1-z_2)|$$
$$|z_1|-|z_2|\ge|z_1|-|z_2|$$

Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

$$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$r=1$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$
$$\theta=-60°$$

$$-4-3i$$
$$z=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$$
$$z=5$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\theta=-143°13$$

$$\sqrt{3}-i$$
$$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}$$
$$r=2$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\theta=-30°$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$r=1$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$
$$\theta=120°$$

$$-2+i$$
$$r=\sqrt{(-2)^2+(1)^2}$$
$$r=\sqrt{5}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$
$$\theta=153°43'$$

19.- Demostrar que para cuales quiera complejos z_1 y z_2 se cumple que

En los problemas 20 – 27, expresar en forma polar las raíces de las ecuaciones.

$x^4 = -16i$

$|z| = 16$

$\theta - 90$

$\sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{-90}} =$

$2\frac{-90° + 360°(1)}{4}$
$= 2(\cos 67.5° + isen 67.5°)$
$= (0.7635, 1.8477)$

$2\frac{-90° + 360°(2)}{4}$
$= 2(\cos 157.5° + isen 157.5°)$
$= (-1.84, 0.7653)$

$2\frac{-90° + 360°(3)}{4}$
$= 2(\cos 247.5° + isen 247.5°)$
$= (-0.7653, -1.8477)$

$x^4 = 1 + i$

$x = \sqrt[4]{1+i}$

$z = \sqrt{2}$

$\theta = 45$

$\sqrt[4]{2}\frac{45° + 360°(1)}{4}$
$= \sqrt[4]{2}(\cos 101.25° + isen 101.25°)$
$= (-0.23, 1.16i)$

$\sqrt[4]{2}\frac{45° + 360°(2)}{4}$
$= \sqrt[4]{2}(\cos 191.25° + isen 191.25°)$
$= (-1.16, -0.23i)$

$\sqrt[4]{2}\frac{45° + 360°(3)}{4}$
$= \sqrt[4]{2}(\cos 258.75° + isen 258.75°)$
$= (-0.23, -1.16i)$

$x^3 = -2i$

$z = \sqrt{2}$

$\theta = 45$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(0)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{15°} = \sqrt[3]{2}(\cos 15° + isen 15°)$
$= (1.21, 0.32)$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(1)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{135°} = \sqrt[3]{2}(\cos 135° + isen 135°)$
$= (-0.89, 0.89i)$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(2)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{225°} = \sqrt[3]{2}(\cos 255° + isen 255°)$
$= (-0.32, -1.21i)$

$x^3 = 1 - i$

$z = \sqrt{2}$

$\theta = 45$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(0)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{15°} = \sqrt[3]{2}(\cos 15° + isen 15°)$
$= (1.21, 0.32)$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(1)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{135°} = \sqrt[3]{2}(\cos 135° + isen 135°)$
$= (-0.89, 0.89i)$

$\sqrt[3]{2}\frac{45° + 360°(2)}{3}$
$= \sqrt[3]{2}_{225°} = \sqrt[3]{2}(\cos 255° + isen 255°)$
$= (-0.32, -1.21i)$

$$x^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z=1$$
$$\theta=120°$$

$$\frac{120°+360°(0)}{4}=(\cos 30°+isen30°)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}i\right)$$
$$\frac{120°+360°(1)}{4}=(\cos 120°+isen120°)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\frac{120°+360°(2)}{4}=(\cos 210°+isen210°)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{120°+360°(3)}{4}=(\cos 300°+isen300°)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$x^3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z=1$$
$$\theta=120°$$

$$\frac{120°+360°(0)}{3}=(\cos 40°+isen40°)=(0.76,0.64i)$$
$$\frac{120°+360°(1)}{3}=(\cos 160°+isen160°)=(-0.94,0.34i)$$
$$\frac{120°+360°(2)}{3}=(\cos 280°+isen280°)=(0.17,0.98)$$

$$x^6=-4$$
$$z=4$$
$$\theta=180°$$

$$4\frac{180+360(0)}{6}=4(\cos 30,isen30)\quad\left(\frac{4\sqrt{3}}{2},2i\right)$$
$$4\frac{180+360(1)}{6}=4(\cos 90,isen90)\quad\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}i\right)$$
$$4\frac{180+360(2)}{6}=4(\cos 150,isen150)\quad\left(-\frac{4\sqrt{3}}{2},2\right)$$
$$4\frac{180+360(3)}{6}=4(\cos 210,isen210)\quad\left(-\frac{4\sqrt{3}}{2},-2\right)$$
$$4\frac{180+360(4)}{6}=4(\cos 270,isen270)\quad(0-4)$$
$$4\frac{180+360(5)}{6}=4(\cos 330,isen330)\quad\left(\frac{4\sqrt{3}}{2},-2\right)$$

$$x^6=1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)$$
$$x^6=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$x^6=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}$$
$$x=\sqrt{8}$$
$$\theta=-15$$

$$8\frac{-15+360(0)}{6}=8(\cos 30,isen30)\quad(7.99,-0.4361)$$
$$8\frac{-15+360(1)}{6}=8(\cos 9.58,isen9.58)\quad(7.88,-1.33i)$$
$$8\frac{-15+360(2)}{6}=8(\cos 117.5,isen117.5)\quad(-3.69,-0.096)$$
$$8\frac{-15+360(3)}{6}=8(\cos 27.8,isen27.8)\quad(7.12,-3.7310)$$
$$8\frac{-15+360(4)}{6}=8(\cos 39.6,isen39.6)\quad(6.16,5.09)$$
$$8\frac{-15+360(5)}{6}=8(\cos 49.58,isen49.58)\quad(5.18,6.09i)$$

28.- Demostrar que (a) $\left|e^{i\theta}\right|=1$ y (b) $\overline{e^{i\theta}}$

$\left|e^{i\theta}\right|=1$

$\cos\theta - isen\theta$

$=\sqrt{\cos^2\theta - sen^2\theta}$

$=\sqrt{1}$

$=1$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

$si, e^{i\theta} = \dfrac{1}{e^{-i\theta}}$

$=\dfrac{1}{\cos + isen\theta}\left(\dfrac{\cos - \theta isen\theta}{c\,os - \theta isen\theta}\right)$

$\dfrac{\cos\theta - sen\theta}{\cos^2 - isen^2\theta}$

$\cos\theta - sen\theta$

29.- Usar la formula DEMoivre para deducir las siguientes identidades trigonométricas

$a)\qquad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta sen^2\theta$

$\left(\cos\theta + isen\theta\right)^3 = \cos 3\theta + isen3\theta$

$\left(\cos\theta + isen\theta\right)^2\left(\cos\theta + isen\theta\right) = \cos 3\theta + isen3\theta$

$\left(c\,os^2\theta + 2i\cos\theta sen\theta - sen^2\theta\right)\left(\cos\theta + isen\theta\right) = \cos 3\theta + isen3\theta$

$\cos^3\theta + 2isen\theta\cos^2\theta - \cos\theta sen^2\theta + isen\theta\cos^2\theta - 2sen^2\theta\cos\theta - isen^3\theta - isen3\theta$

$\cos^3\theta + 3isen\theta\cos^2\theta - sen^2 - isen3\theta - 3sen^2\theta\cos\theta$

$\cos^3\theta + 3\cos\theta sen^2\theta = \cos 3\theta$

$b)\qquad sen3\theta = 3\cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta$

$\left(\cos\theta + sen\theta\right)^3 = \cos 3\theta + isen3\theta$

$\left(\cos^2\theta + 2i\cos\theta sen\theta - sen^2\theta\right)\left(\cos\theta + isen\theta\right) - \cos 3\theta = isen3\theta$

$\cos^3\theta + 3i\cos^2 sen\theta - sen^2\theta\cos\theta - 2\cos\theta sen^2\theta - isen^2\theta - \cos 3\theta = isen3\theta$

$3i\cos^2\theta sen\theta - isen^3\theta = isen3$

$3\cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta = isen3\theta$

$\cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta = sen3\theta$

$sen3\theta = 3\cos^2\theta sen\theta\theta - sen^3\theta$

31.- Hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 2x + (1-i) = 0$

$x^2 + 2x + (1-i) = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1-i)}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4i}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4i}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 2i}{2}$

$x_2 = \dfrac{-2 - 2i}{2}$

En los ejercicios 33 – 40 descomponer en factores lineales los siguientes polinomios

33.- $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

34.- $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

35.- $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

36.- $x^4+1=(x+1)(x+1)(x^2+1)$

37.-
$$x^3-i=(x-i)(x^2+i+i^2)$$
$$=(x-i)(x^2+i-1)$$

38.- $x^3-\frac{1+i}{2}=\left(x-\left(\frac{1+i}{2}\right)^{1/3}\right)\left(x^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{1/3}x+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2/3}\right)$

39.- $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

40.-

$$x^4-x^2+1$$
$$(x^2)^2-(x)^2+1=0$$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$x=\frac{1\pm 3i^2}{2}$$

$$\left(x^2+\frac{1+3i^2}{2}\right)\left(x^2+\frac{1-3i^2}{2}\right)$$
$$x^2=-\frac{1+3i^2}{2}\quad\rightarrow\quad x=\sqrt{-\frac{1+3i^2}{2}}$$
$$x^2=-\frac{1-3i^2}{2}\quad\rightarrow\quad x=\sqrt{-\frac{1-3i^2}{2}}$$

1.- Hallar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyos puntos iniciales y finales se dan. Mostrar que $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son equivalentes

A. $\vec{u}:(3,2),(5,6)\quad \vec{v}:(-1,4),(1,8)$

$\vec{u}=(5,6)-(3,2)=\langle 2,4\rangle$

$\vec{v}=(1,8)-(-1,4)=\langle 2,4\rangle$

$\vec{v}=\vec{u}$

B. $\vec{u}:(0,3),(6,-2)\quad \vec{v}:(3,10),(9,5)$

$\vec{u}=(6,-2)-(0,3)=\langle 6,-5\rangle$

$\vec{v}=(9,5)-(3,10)=\langle 6,-5\rangle$

$\vec{u}=\vec{v}$

En los ejercicios del 2 – 5 se dan los puntos inicial y final de un vector $\vec{v}$ Dibujar el segmento de la recta dirigido dado, expresar el vector mediante sus componentes y dibujar al vector con su punto inicial en el origen

2.-

$\vec{v}=(1,2),(5,5)$

$\vec{v}=(5,5)-(1,2)$

$\vec{v}=\langle 4,3\rangle$

3.-

$\vec{v}=(2,-6),(3,6)$

$\vec{v}=(3,6)-(2,-6)$

$\vec{v}=\langle 1,12\rangle$

4.-

$\vec{v}=(10,2),(6,-1)$

$\vec{v}=(6,-1)-(10,2)$

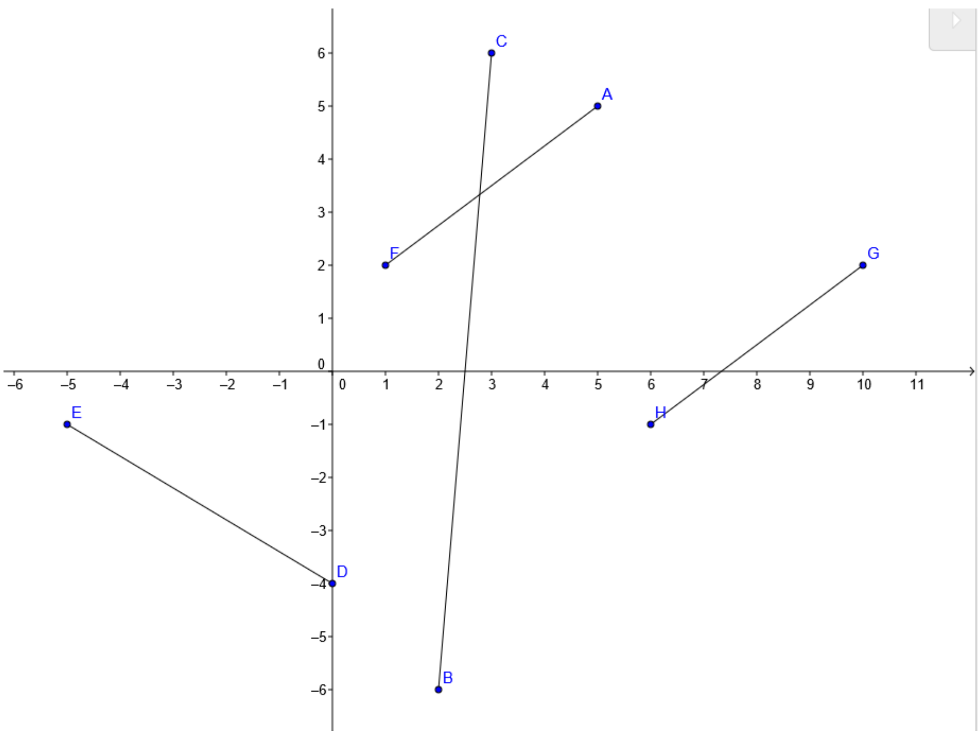
$\vec{v}=\langle -4,-3\rangle$

5.-

$\vec{v}=(0,-4),(-5,-1)$

$\vec{v}=(-5,-1)-(0,-4)$

$\vec{v}=\langle -5,3\rangle$



Hallar el vector $\vec{v}$ donde $\vec{u}=\langle 2,-1\rangle$ y $\vec{w}=\langle 1,2\rangle$ Ilustrar geométricamente las operaciones vectoriales

a.-

$\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{u}$

$\vec{v}=\frac{3}{2}\langle 2,-1\rangle$

$\vec{v}=\left\langle 3,-\frac{3}{2}\right\rangle$

b.-

$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$

$\vec{v}=\langle 2,-1\rangle+\langle 1,2\rangle$

$\vec{v}=\langle 3,1\rangle$

c.-

$\vec{v}=\vec{u}+2\vec{w}$

$\vec{v}=\langle 2,-1\rangle+2\langle 1,2\rangle$

$\vec{v}=\langle 2,-1\rangle+\langle 2,4\rangle$

$\vec{v}=\langle 4,3\rangle$

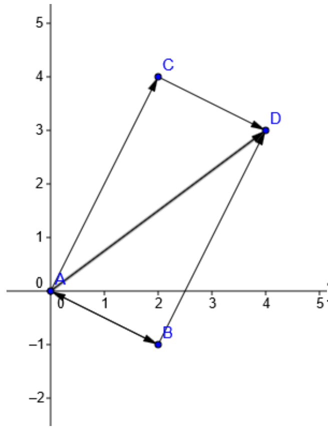
d.-

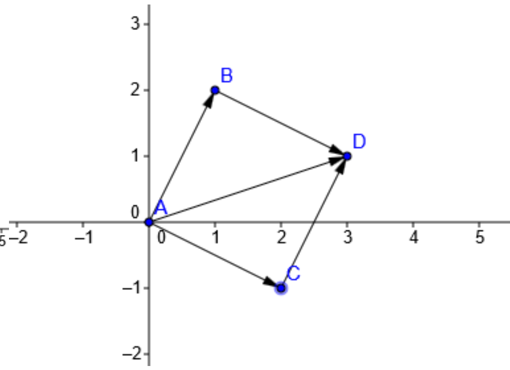
$\vec{v}=5\vec{u}-3\vec{w}$

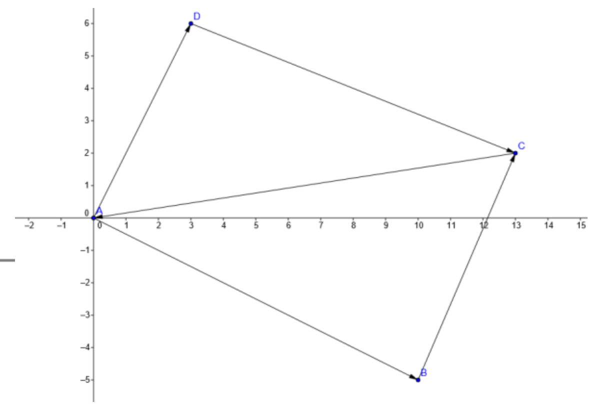
$\vec{v}=5\langle 2,-1\rangle-3\langle 1,2\rangle$

$\vec{v}=\langle 10,-5\rangle-\langle 3,6\rangle$

$\vec{v}=\langle 7,-11\rangle$







7.- Encontrar la magnitud de $\vec{v}$

a)

$$\vec{v} = \langle 12, -5 \rangle$$
$$v = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$$
$$v = \sqrt{169}$$
$$v = 13$$

b)

$$\vec{v} = -10i + 3j$$
$$v = \sqrt{(10)^2 + (9)^2}$$
$$v = \sqrt{109}$$

c)

$$\vec{v} = 4j$$
$$v = \sqrt{(4)^2}$$
$$v = 4$$

10.- Hallar la distancia entre los puntos

a) $(2,2,3),(4,-5,6)$

$$\sqrt{(4-2)^2 + (-5-2)^2 + (6-3)^2}$$
$$\sqrt{4+49+9}$$
$$\sqrt{62}$$

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{9}, 7\right), \left(\frac{5}{2}, 6, \frac{3}{-4}\right)$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(6 - \left(-\frac{5}{9}\right)\right)^2 + \left(-\frac{3}{4} - 7\right)^2}$$
$$\sqrt{4 + \frac{3481}{81} + \frac{961}{16}}$$
$$\sqrt{107.0378086}$$

11.- Hallar las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se dan, y determinar si el triángulo es rectángulo, isósceles o escaleno

a) $(5,3,4),(7,1,3),(3,5,3)$

$$(7,1,3) - (5,3,4)$$
$$\vec{v} = \langle 2, -2, -1 \rangle$$
$$v = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$
$$v = 3$$

$$\vec{u} = (7,1,3) - (3,5,3)$$
$$\vec{u} = \langle 4, -4, 0 \rangle$$
$$u = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$
$$u = \sqrt{32}$$

$$(5,3,4) - (3,5,3)$$
$$\vec{z} = \langle 2, -2, 1 \rangle$$
$$z = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$
$$z = 3$$

el triángulo es isósceles ya que tiene dos lados iguales v y z

b) $(5,0,0),(0,2,0),(0,0,-3)$

$$(5,0,0)-(0,2,0)$$
$$\vec{A}=\langle 5,-2,0\rangle$$
$$A=\sqrt{(5)^2+(-2)^2}$$
$$A=\sqrt{29}$$

$$(5,0,0)-(0,0,-3)$$
$$\vec{B}=\langle 5,0,3\rangle$$
$$B=\sqrt{(5)^2+(3)^2}$$
$$B=\sqrt{34}$$

$$(0,2,0)-(0,0,-3)$$
$$\vec{B}=\langle 0,2,3\rangle$$
$$B=\sqrt{(2)^2+(3)^2}$$
$$B=\sqrt{13}$$

El triangulo es escaleno ya que sus lados son *desiguales*

$$A\neq B$$
$$A\neq C$$
$$B\neq C$$

12.- Hallar la ecuación ordinaria de la esfera con centro $(3,2,4)$ tangente al plano yz

$$(x-(-3))^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$$
$$(x-(-3))^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$$
$$\sqrt{(-3-0)^2+(2-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{4}=2$$

la ecuacion de la esfera es:

$$(x-(-3))^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$$

13.- Completar el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma ordinaria. Hallar el centro y el radio

a.)

$$x^2+y^2+z^2+9x-2y+10z+19=0$$
$$x^2+9x+y^2-2y+z^2+10z=-19$$
$$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=-19+\frac{81}{4}-1+25$$
$$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=\frac{101}{4}$$

b)

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x-32y+8z+33=0$$
$$4x^2-4x+4y^2-32y+4z^2+8z=-33$$
$$4\left(x^2-x+\right)4\left(y^2-8y\right)+4\left(z^2+2z\right)=-33$$
$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4(y-4)^2+4(z+1)^2=-33+\frac{1}{4}-16+1$$
$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4(y-4)^2+4(z+1)^2=\frac{191}{4}$$

14.- Dado el vector v y su punto inicial, hallar su punto final

$$\vec{v}=\langle 3,-5,5\rangle,\ \text{punto inicial } (0,6,2)$$
$$p_2-p_1=\vec{v}$$
$$p_2-(0,6,2)=\langle 2,-5,5\rangle$$
$$x=2 \quad y-6=-5 \quad z-2=5$$
$$y=1 \quad z=7$$
por lo tanto:
$$p_2=(2,1,7)$$

$$\vec{v}=\left\langle 1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\ \text{punto inicial } \left(0,2,\frac{5}{2}\right)$$
$$p_2-p_1=\vec{v}$$
$$p_2-\left(0,2,\frac{5}{2}\right)=\left\langle 1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$x=1 \quad y-2=-\frac{3}{2} \quad z-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{1}{2} \quad z=3$$
por lo tanto:
$$p_2=\left(1,\frac{1}{2},3\right)$$

15.- Encontrar el vector $\vec{z}$ dado que $\vec{u}=\langle 1,2,3\rangle, \vec{v}\langle 2,2,-1\rangle$ y $\vec{w}=\langle 4,0,-4\rangle$

a)

$$\vec{z}=\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$$
$$\vec{z}=\langle 1,2,3\rangle-\langle 2,2,-1\rangle+2\langle 4,0,-4\rangle$$
$$\vec{z}=\langle 1,2,3\rangle-\langle 2,2,-1\rangle+\langle 8,0,-8\rangle$$
$$\vec{z}=\langle 7,0,-4\rangle$$

b)

$$\vec{z}=5\vec{u}-3\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$$
$$\vec{z}=5\langle 1,2,3\rangle-3\langle 2,2,-1\rangle-\frac{1}{2}\langle 4,0,-4\rangle$$
$$\vec{z}=\langle 5,10,15\rangle-\langle 6,6,-3\rangle-\langle 2,0,-2\rangle$$
$$\vec{z}=\langle -3,4,20\rangle$$

c)

$$2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}+3\vec{z}$$
$$3\vec{z}=-2\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$
$$\vec{z}=\frac{\vec{v}}{3}+\frac{\vec{w}}{3}-\frac{2\vec{u}}{3}$$
$$\vec{z}=\frac{\langle 2,2,-1\rangle}{3}+\frac{\langle 4,0,-4\rangle}{3}-\frac{2\langle 1,2,3\rangle}{3}$$
$$\vec{z}=\frac{\langle 2,2,-1\rangle}{3}+\frac{\langle 4,0,-4\rangle}{3}-\frac{\langle 2,4,6\rangle}{3}$$
$$\vec{z}=\left\langle \frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{-11}{3}\right\rangle$$

16.- Si $\vec{u}=i+2j+3k$ determinar los valores de c que satisfacen la ecuación $\|c\vec{u}\|=3$

$$\|c(1,2,3)\|=3$$
$$\|c,1,2c,3c\|=3$$
$$\sqrt{c^2+4c^2+9c^2}=3$$
$$\sqrt{14c^2}=3$$
$$c=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2+4\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2+9\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2}=3$$
$$\sqrt{\frac{9}{14}+\frac{36}{14}+\frac{81}{14}}=3$$
$$\sqrt{\frac{126}{14}}=3$$
$$\sqrt{9}=3$$

17.- Encontrar el Angulo θ entre dos vectores

a) $\vec{u} = 3i + 2j + k \quad \vec{v} = 2i - 3j$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\langle 3,2,1\rangle \cdot \langle 1,-3,0\rangle = 3 - 6 = -3$$
$$u = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (1)^2}$$
$$u = \sqrt{14}$$
$$v = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2}$$
$$v = \sqrt{10}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{10}}\right)$$
$$\theta = 104°68'$$

b) $\vec{u} = 2i - 3j + k \quad \vec{v} = i - 2j + k$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\langle 2,-3,1\rangle \cdot \langle 1,-2,1\rangle = 2 + 6 + 1 = 9$$
$$u = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$$
$$u = \sqrt{14}$$
$$v = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$
$$v = \sqrt{6}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right)$$
$$\theta = 10°89$$

18.- Determinar si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas

$\vec{u} = -2i + 3j - k \quad \vec{v} = -2i + j - k$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\langle -2,3,-1\rangle \cdot \langle -2,1,-1\rangle = 4 + 3 + 1 = 0$$
$$u = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}$$
$$u = \sqrt{14}$$
$$v = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}$$
$$v = \sqrt{6}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right)$$
$$\theta = 90°$$

los vectores son ortogonales

$\vec{u} = \langle \cos\theta, sen\theta, -1\rangle \quad \vec{v} = \langle sen\theta, -\cos\theta, 0\rangle$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\langle \cos\theta, sen\theta, -1\rangle \cdot \langle sen\theta, -\cos\theta, 0\rangle$$
$$= \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta = 0$$
$$u = \sqrt{\cos^2\theta + sen^2\theta + (-1)^2}$$
$$u = \sqrt{2}$$
$$v = \sqrt{sen^2\theta + \cos^2\theta + 1}$$
$$v = \sqrt{2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)$$
$$\theta = 90°$$

Los vectores son ortogonales

19.- Se dan los vértices de un triángulo. Determinar si el triángulo es agudo, obtuso o rectángulo

a)

$$(1,2,0),(0,0,0),(-2,1,0)$$
$$(1,2,0) - (0,0,0) = \langle 1,2,0\rangle \to \|\vec{A}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$
$$(-2,1,0) - (0,0,0) = \langle -2,1,0\rangle \to \|\vec{B}\| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$
$$(1,2,0) - (-2,1,0) = \langle 3,1,0\rangle \to \|\vec{C}\| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle 1,2,0\rangle \cdot \langle -2,1,0\rangle = -2 + 2 + 0 = 0 \to \text{ son perpediculares}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \langle 1,2,0\rangle \cdot \langle 3,1,0\rangle = 3 + 2 + 0 = 5$$
$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \langle -2,1,0\rangle \cdot \langle 3,1,0\rangle = -6 + 1 + 0 = -5$$

$$angulo$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B}\cos\theta$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\right)$$
$$\theta = 90°$$

el triángulo que forman los vectores es rectangulo b)

$$(2,-3,4),(0,1,2),(-1,2,0)$$

$$(2,-3,4)-(0,1,2)=\langle 2,-4,2\rangle \rightarrow \|\vec{A}\|=\sqrt{(2)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{24}$$

$$(2,-3,4)-(-1,2,0)=\langle 3,-5,4\rangle \rightarrow \|\vec{B}\|=\sqrt{(3)^2+(-5)^2+(4)^2}=\sqrt{50}$$

$$(-1,2,0)-(0,1,2)=\langle -1,1,-2\rangle \rightarrow \|\vec{C}\|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\langle 2,-4,2\rangle\cdot\langle 3,-5,4\rangle=6+20+8=34$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=\langle 2,-4,2\rangle\cdot\langle -1,1,-2\rangle=-2-4-4=-10$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C}=\langle 3,-5,4\rangle\cdot\langle -1,1,-2\rangle=-3-5-8=-16$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{34}{\sqrt{24}\sqrt{50}}\right)$$

$$\theta\approx 11°$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-10}{\sqrt{24}\sqrt{6}}\right)$$

$$\theta\approx 146°$$

el triangulo es obtuso
ya que un angulo es mayor
de 90°

20.- Encontrar los senos directores del vector $\vec{u}$ y demostrar que la suma de sus cuadrados de los cosenos directores es 1

$a)\quad \vec{u}=5i+3j-k$

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{(5)^2+(3)^2+(-1)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{(5)^2+(3)^2+(-1)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{(5)^2+(3)^2+(-1)^2}}$$

demostracion:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{35}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{35}}\right)^2=\frac{25+9+1}{35}=\frac{35}{35}=1$$

$b)\quad \vec{u}=\langle 0,6,-4\rangle$

$$\cos\alpha=\frac{0}{\sqrt{(0)^2+(6)^2+(-4)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{6}{\sqrt{(0)^2+(6)^2+(-4)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{(0)^2+(6)^2+(-4)^2}}$$

demostracion:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\left(\frac{0}{\sqrt{52}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{52}}\right)^2+\left(\frac{-4}{\sqrt{52}}\right)^2=\frac{0+36+16}{52}=\frac{52}{52}=1$$

21.- Encontrar los ángulos de dirección del vector

$a)\qquad \bar{u}=3i+2j-2k$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-2)^2}}\right)=43°31'$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-2)^2}}\right)=60°98'$$

$$\delta=\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-2)^2}}\right)=119°$$

$b)\qquad \bar{u}=\langle -1,5,2\rangle$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(5)^2+(2)^2}}\right)=100°51'$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{(-1)^2+(5)^2+(2)^2}}\right)=24°09'$$

$$\delta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{(-1)^2+(5)^2+(2)^2}}\right)=68°52$$

Calcular $\bar{u} \times \bar{v}$ y probar que es ortogonal tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$

A)

$\bar{u} = 3i + 5k, \bar{v} = 2i + 3i - 2k$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-15, 16, 9)$$

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{u} = (-15,16,9) \cdot (3,0,5) = -45 + 45 = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{v} = (-15,16,9) \cdot (2,3,-2) = -30 + 48 - 18 = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} = \langle 3,-2,-2 \rangle, \bar{v} = \langle 1,5,1 \rangle$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (8, -5, 17)$$

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{u} = (8,-5,17) \cdot (3,-2,-2) = 24 + 10 - 34 = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{v} = (8,-5,17) \cdot (1,5,1) = 8 - 25 + 17 = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} = \langle -1,1,2 \rangle, \bar{v} = \langle 0,1,0 \rangle$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, -1)$$

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{u} = (-2,0,-1) \cdot (-1,1,2) = 2 - 2 = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{v} = (-2,0,-1) \cdot (0,1,0) = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} = \langle -10,0,6 \rangle, \bar{v} = \langle 7,0,0 \rangle$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 42, 0)$$

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{u} = (0,42,0) \cdot (-10,0,6) = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{v} = (0,42,0) \cdot (7,0,0) = 0$

$\theta = \cos^{-1}(0)$

$\theta = 90°$ son ortogonales

2.- Calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores dados, como lados adyacentes.

$a)$

$\bar{u} = j, \bar{v} = j + k$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$$

$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1u^2$

$b)$

$\bar{u} = \langle 3,2,-1 \rangle, \bar{v} = \langle 1,2,3 \rangle$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (8, -10, 4)$$

$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{(8)^2 + (10)^2 + (4)} = 6\sqrt{5}u^2 \leftarrow area$

3.- Verificar que los puntos dados son los vértices de un paralelogramo y calcular su área

$$a=(1,1,1), b=(2,3,4), c=(6,5,2), d=(7,7,5)$$
$$\bar{A}=b-a=(1,2,3)$$
$$\bar{B}=d-c=(1,2,3)$$
$$\bar{C}=d-b=(5,4,1)$$
$$\bar{D}=c-a=(5,4,1)$$

$$\bar{A}\times\bar{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-10,14,-6)$$
$$\left|\bar{A}\times\bar{C}\right|=\sqrt{(-10)^2+(14)^2+(-6)}=2\sqrt{83}\rightarrow area$$

$$a=(2,-3,1), b=(6,5,-1), c=(3,-6,4), d=(7,2,2)$$
$$\bar{A}=b-a=\langle 4,8,-2\rangle$$
$$\bar{B}=d-c=\langle 4,8,-2\rangle$$
$$\bar{C}=d-b=\langle 1,-3,3\rangle$$
$$\bar{D}=c-a=\langle 1,-3,3\rangle$$

$$\bar{A}\times\bar{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 8 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=(18,-14,-20)$$
$$\left|\bar{A}\times\bar{C}\right|=\sqrt{(18)^2+(-14)^2+(-20)^2}=2\sqrt{230}\rightarrow area$$

4.- Calcular el área del triángulo con los vértices dado. Sugerencia $\frac{1}{2}\|\bar{u}\times\bar{v}\|$ es el ara del triángulo que tiene a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ como lados adyacentes

$a)$
$$a(0,0,0), b(1,2,3), c(-3,0,0)$$
$$\bar{A}=b-a=\langle 1,2,3\rangle$$
$$\bar{B}=c-a=\langle -3,0,0\rangle$$

$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,9,6)$$

si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los lados adyacentes

tenemos: $\frac{1}{2}\|\bar{A}\times\bar{B}\|$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{9^2+6^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[3\sqrt{13}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{13}\rightarrow \text{area del triangulo}$$

$b)$
$$a(2,-7,3), b(-1,5,8), c(4,6,-1)$$
$$\bar{A}=b-a=\langle -3,12,5\rangle$$
$$\bar{B}=c-a=\langle 2,13,-4\rangle$$

$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 5 \\ 2 & 13 & -4 \end{vmatrix}=(-133,2-57)$$

si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los lados adyacentes

tenemos: $\frac{1}{2}\|\bar{A}\times\bar{B}\|$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{(-113)^2+(2)^2+(-57)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16022}\rightarrow \text{area del triangulo}$$

5.- calcular $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})$

$a)$
$$\bar{u}=i,\quad \bar{v}=j,\quad \bar{w}=\hat{k}$$
$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$b)$
$$\bar{u}=\langle 2,0,1\rangle,\quad \bar{v}=\langle 0,3,0\rangle,\quad \bar{w}=(0,0,1)$$
$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=6$$

6.- Usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$

$a)$

$\bar{u} = i + j,\quad \bar{v} = j + k,\quad \bar{w} = i + k$

$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, -1 + 0 = 0$$

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = 0$

$b)$

$\bar{u} = \langle 1,3,1\rangle \quad \bar{v} = \langle 0,6,6\rangle,\quad \bar{w} = \langle -4,0,-4\rangle$

$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 72 + 24 = 72$$

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = 72u^3$

En los ejercicios del 8 – 13 hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta indicada

8.- Que contenga a los puntos $(2,1,3)\, y (1,2,-1)$

$\bar{v} = (1,2,-1) - (2,1,3)$

$\bar{v} = \langle -1,1,-4\rangle$

$(x,y) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1 + v_2 + v_3)$

$(x,y) = (2,1,3) + t(-1,1,-4)$

$(x,y) = 2 - t, 1 + t, 3 - 4t) \rightarrow parametrica$

$simetrica$

$x = 2 - t$

$y = t$

$z = 3 - 4t$

$$-x + 2 = y = \frac{z-3}{-4}$$

9.- Que contenga los puntos $(-4,1,3)\, y (-4,0,1)$

$\bar{v} = \langle 0,-1,-2\rangle$

$(x,y) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1 + v_2 + v_3)$

$(x,y) = (-4,1,3) + t(0,-1,-2)$

$(x,y) = (0, 1 - t, 3 - 2t) \rightarrow parametrica$

si algunas de las componentes es 0 no se puede expresar la ecuación en forma simétrica

10.- Que contenga los puntos $(1,2,3)\, y (3,2,1)$

$\bar{v} = \langle 2,0,-2\rangle$

$(x,y) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1 + v_2 + v_3)$

$(x,y) = (1,2,3) + t(2,0,-2)$

$(x,y) = (1 + 2t, 0, 3 - 2t) \rightarrow parametrica$

si algunas de las componentes es 0 no se puede expresar la ecuación en forma simétrica

11.- Que contenga al punto $(2,2,1)$ y sea paralela a $2i - j - k$

$(x,y) = (2,2,1) + t(2,-1,-1)$

$(x,y) = (2 + 2t, 2 - t, 1 - t) \rightarrow parametrica$

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{2} = 2 - y = 1 - z \rightarrow simetrica$$

12.- Que contenga al punto $\left(-1,-2,5\right)$ y sea paralela a $-3j+7k$

$$(x,y)=\left(-1,-2,5\right)+t\left(0,-3,7\right)$$
$$(x,y)=\left(-1,-2-3t,5+7t\right)\rightarrow parametrica$$

13.- Que contenga al punto $\left(0,0,0\right)$ y sea paralela a $\left\langle -2,\frac{5}{2},1\right\rangle$

$$(x,y)=\left(0,0,0\right)+t\left\langle -2,\frac{5}{2},1\right\rangle$$
$$(x,y)=\left(0,0,0\right)+\left\langle -2t,\frac{5}{2}t,t\right\rangle$$
$$(x,y)=\left(-2t,\frac{5}{2}t,t\right)\rightarrow parametrica$$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=\frac{5}{2}t \\ z=t \end{cases}$$

$$-\frac{x}{2}=\frac{2}{5}y=z\rightarrow simetrica$$

En los ejercicios 14 – 20, hallar la ecuación del plano indicado

14.- Que contenga al punto $\left(0,0,0\right)$ y con vector normal $\hat{n}=j$

$$\left(x-0,y-0,z-0\right)\cdot\left(0,1,0\right)=y$$
$$y=0$$
$$\therefore \text{ el plano es el xz}$$

15.- Que contenga al punto $\left(1,2,3\right)$ y con vector normal $\hat{n}=i+j$

$$\left(x-1,y-2,z-3\right)\cdot\left(1,1,0\right)=0$$
$$x-1+y-2=0$$
$$x+y-3=0$$
$$\therefore \text{ el plano es el } x-y-3=0$$

16.- Que contenga al punto $\left(1,2,3\right)$ y con vector normal $\hat{n}=j+k$

$$\left(x-1,y-2,z-3\right)\cdot\left(0,1,1\right)=0$$
$$y-2+z-3=0$$
$$y+z-5=0$$
$$\therefore \text{ el plano es el } y+z-5=0$$

17.- Que contenga al punto $\left(-4,-7,5\right)$ y con vector normal $\hat{n}=-3i-4j+k$

$$\left(x+4,y+7,z-5\right)\cdot\left(-3,-4,1\right)=0$$
$$-3x-12-4y-28-z-5=0$$
$$-3x-4y-z-45=0$$
$$\therefore \text{ el plano es: } -3x-4y-z-45=0$$

18.- Que contenga al punto $(3,-2,5)$ y con vector normal $\hat{n}=2i-7j-8k$

$$(x-3,y+2,z-5)\cdot(2,-7,-8)=0$$
$$2x-6-7y-14-8z+40=0$$
$$2x-7y-8z+26=0$$
$$\therefore \text{ el plano es: } 2x-7y-8z+26=0$$

19.- Que contenga a los puntos $(-7,1,0),(2,-1,3),(4,-1,3)$

$$a=(-7,1,0)$$
$$b=(2,-1,3)$$
$$c=(4,-1,3)$$

$$\bar{u}=b-a=(2,-1,3)-(-7,1,0)$$
$$\bar{u}=b-a=(9,-2,3)$$
$$\bar{v}=c-a=(4,-1,3)-(-7,1,0)$$
$$\bar{v}=c-a=(11,-2,3)$$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & -2 & 3 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\bar{u}\times\bar{v}=0i-6j+4k$$

z20.- Que contenga a los puntos $(2,3,-2),(4,-1,-1),(3,1,2)$

$$a=(2,3,-2)$$
$$b=(4,-1,-1)$$
$$c=(3,1,2)$$

$$\bar{u}=b-a=(4,-1,-1)-(2,3,-2)$$
$$\bar{u}=b-a=(2,-4,1)$$
$$\bar{v}=c-a=(3,1,2)-(2,3,-2)$$
$$\bar{v}=c-a=(1,-2,4)$$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$\bar{u}\times\bar{v}=-14i-7j$$

21.- Demostrar los teoremas referentes a las propiedades algebraicas y geométricas del producto cruz

1) $\quad \bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$

$$sea:\bar{u}(u_1,u_2,u_3) \quad \text{y} \quad \bar{v}(v_1,v_2,v_3)$$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=(u_2v_3-v_2u_3)i-(u_1v_3-v_1u_3)j+(u_1v_2-v_1u_2)k$$

$$\bar{v}\times\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}=(v_2u_3-u_2v_3)i-(v_1u_3-u_1v_3)j+(v_1u_2-u_1v_2)k$$

$$obtenemos:$$
$$\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$$

2) $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\times\bar{v}+\bar{u}\times\bar{w}$

$$\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\times\left[(v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)\right]$$
$$\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\times(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3)$$
$$\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3 \end{vmatrix}$$
$$\left[u_2(v_3+w_3)-(v_2+w_2)v_3\right]i-\left[u_1(v_3+w_3)-(v_1+w_1)u_3\right]j+\left[u_1(v_2+w_2)-(v_1+w_1)u_2\right]k$$

por otro lado se tiene

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=(u_2v_3-v_2u_3)i-(u_1v_3-v_1u_3)j+(u_1v_2-v_1u_2)k$$
$$\bar{u}\times\bar{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=(u_2w_3-w_2u_3)i-(u_1w_3-w_1u_3)j+(u_1w_2-w_1u_2)k$$
$$\bar{u}\times\bar{v}+\bar{u}\times\bar{w}=\left[(u_2v_3+u_2w_3)-(v_2u_3+w_2u_3)\right]i-\left[(u_1v_3+u_1w_3)-(v_1u_3+w_1u_3)\right]j+$$
$$\left[(u_1v_2+u_1w_2)-(v_1u_2+w_1u_2)\right]k$$

$$\left[u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2)\right]i-\left[u_1(v_3+w_3)-u_3(v_1+w_1)\right]j+$$
$$\left[u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)\right]k$$

concluimos:

$$\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\times\bar{v}+\bar{u}\times\bar{w}$$

3) $\bar{u}\times\bar{0}=\bar{0}\times\bar{u}=0$

$sea:\bar{u}(u_1,u_2,u_3)$

$$\bar{u}\times\bar{0}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0i-0j+0k=\bar{0}$$

$sea:\bar{u}(u_1,u_2,u_3)$

$$\bar{0}\times\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_2 \end{vmatrix}=0i-0j+0k=\bar{0}$$

4) $\bar{u}\times\bar{u}=0$

$sea:\bar{u}(u_1,u_2,u_3)$

$$\bar{u}\times\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$
$$\bar{u}\times\bar{u}=(u_2u_3-u_3u_2)i-(u_1u_3-u_3u_1)j+(u_1u_2-u_2u_1)=0$$
$$\bar{u}\times\bar{u}=0$$

5 $\quad c(\bar{u}\times v)=c\bar{u}\times\bar{v}=\bar{u}\times c\bar{v}$

$sean: sea: \bar{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\bar{v}(v_1,v_2,v_3)$

por definicion:

$c(\bar{u}\times\bar{v})=c\left[(u_2v_3-v_2u_3)i-(u_1v_3-v_1u_3)j+(u_1v_2-v_1u_2)k\right]$

$=(cu_2v_3-cv_2u_3)i-(cu_1v_3-cv_1u_3)j+(cu_1v_2-cv_1u_2)k$

$si, \quad c\bar{u}\times\bar{v}$ entonces $c\bar{u}=(cu_1,cu_2,cu_3)$

$$c\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ cu_1 & cu_2 & cu_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=(cu_2v_3-v_2cu_3)i-(cu_1v_3-v_1cu_3)j+(cu_1v_2-v_1cu_2)k$$

podemos decir que: $c(\bar{u}\times\bar{v})=c\bar{u}\times\bar{v}$

$tenemos: \bar{u}\times c\bar{v}$ entonces $c\bar{v}=(cv_1,cv_2,cv_3)$

$$c\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ cv_1 & cv_2 & cv_3 \end{vmatrix}=(u_2cv_3-cv_2u_3)i-(u_1cv_3-cv_1u_3)j+(u_1cv_2-cv_1u_2)k$$

$concluimos$ que se cumple la igualdad

$c(\bar{u}\times v)=c\bar{u}\times\bar{v}=\bar{u}\times c\bar{v}$

6) $\quad \bar{v}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$

$sean: \bar{u}=(u_1,u_2,u_3) \quad \bar{v}=(v_1,v_2,v_3) \quad w=(w_1,w_2,w_3)$

sabemos que:$\bar{v}\times\bar{w}=(v_2w_3-w_2v_3)i-(v_1w_3-w_1v_3)j+(v_1w_2-w_1v_2)k$

$\bar{v}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(u_1,u_2,u_3)\cdot\left[(v_2w_3-w_2v_3)-(v_1w_3-w_1v_3)+(v_1w_2-w_1v_2)\right]$

$=u_1(v_2w_3-w_2v_3)-u_2(v_1w_3-w_1v_3)+u_3(v_1w_2-w_1v_2)$

sabemos que: $\bar{u}\times\bar{v}=(u_2v_3-v_2u_3)i-(u_1v_3-v_1u_3)j+(u_1v_2-v_1u_2)k$

$(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}=\left[(u_2v_3-v_2u_3)-(u_1v_3-v_1u_3)+(u_1v_2-v_1u_2)\right]\cdot(w_1,w_2,w_3)$

$=w_1(u_2v_3-v_2u_3)-w_2(u_1v_3-v_1u_3)+w_3(u_1v_2-v_1u_2)$

$=w_1u_2v_3-w_1v_2u_3-w_2u_1v_3+w_2v_1u_3+w_3u_1v_2-w_3v_1u_2$

En los ejercicios 1 – 6, determinar si los planos son paralelos, ortogonales, o ninguna de las dos cosas, si no son ortogonales ni paralelos, hallar el ángulo entre ellos

1.-

$$5x-3y+z=4, \qquad x+4y+7z=1$$
$$\hat{n}_1=\langle 5,-3,1\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 1,4,7\rangle$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 5,-3,1\rangle\cdot\langle 1,4,7\rangle=5-12+7=0$$
los planos son ortogonales

2.-

$$3x+y-4z=3, \qquad -9x-3y+12z=4$$
$$\hat{n}_1=\langle 3,1,-4\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle -9,-3,12\rangle$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 3,1,-4\rangle\cdot\langle -9,-3,12\rangle=-27-3-48=-70$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-70}{\sqrt{28}\sqrt{234}}\right) \qquad \theta=170°$$

3.-

$$x-3y+6z=4, \qquad 5x+y-z=4$$
$$\hat{n}_1=\langle 1,-3,6\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 5,1,-1\rangle$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 1,-3,6\rangle\cdot\langle 5,1,-1\rangle=-4$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{27}\sqrt{46}}\right) \qquad \theta=96°31'$$

4.-

$$3x+2y-z=7, \qquad x-4y+2z=0$$
$$\hat{n}_1=\langle 3,2,-1\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 1,-4,2\rangle$$
$$|\hat{n}_1|=14 \qquad |\hat{n}_2|=21$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 3,2,-1\rangle\cdot\langle 1,-4,2\rangle=-7$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) \qquad \theta=114°09'$$

5

$$x-5y-z=1, \qquad 5x-25y-5z=-3$$
$$\hat{n}_1=\langle 1,5,-1\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 5,-25,-5\rangle$$
$$|\hat{n}_1|=\sqrt{27} \qquad |\hat{n}_2|=\sqrt{675}$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 1,5,-1\rangle\cdot\langle 5,-25,-5\rangle=5-125-5$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{125}{\sqrt{27}\sqrt{675}}\right) \qquad \theta=157°8'$$

6.-

$$2x-z=1, \qquad 4x+y+8z=10$$
$$\hat{n}_1=\langle 2,0,-1\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 4,1,8\rangle$$
$$|\hat{n}_1|=\sqrt{5} \qquad |\hat{n}_2|=\sqrt{81}$$
$$\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\langle 2,0,-1\rangle\cdot\langle 4,1,8\rangle=8-8=0$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{81}}\right) \qquad \theta=0°$$
los planos son ortogonales

En los ejercicios 7 – 10, hallar la distancia del punto al plano

7.-

$$(0,0,0),2x+3y+z=0$$
$$\hat{n}=\langle 2,3,1\rangle\to h(6,0,0)$$
$$p(0,0,0)$$
$$\overrightarrow{ph}=(0,0,0)-(6,0,0)=\langle -6,0,0\rangle$$
$$\overrightarrow{ph}\cdot\hat{n}=\langle -6,0,0\rangle\cdot\langle 2,3,1\rangle=-12$$
$$|\hat{n}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=14$$
$$D=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

8.-

$$(0,0,0),8x-4y+z=8$$
$$\hat{n}=\langle 8,-4,1\rangle\to h(1,0,0)$$
$$p(0,0,0)$$
$$\overrightarrow{ph}=(0,0,0)-(1,0,0)=\langle -1,0,0\rangle$$
$$\overrightarrow{ph}\cdot\hat{n}=\langle -1,0,0\rangle\cdot\langle 8,-4,1\rangle=-8$$
$$|\hat{n}|=\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}=9$$
$$D=-\frac{8}{9}$$

9.-

$$(2,8,4),2x+y+z=5$$
$$\hat{n}=\langle 2,1,1\rangle\to h(0,0,5)$$
$$p(2,8,4)$$
$$\overrightarrow{ph}=(2,8,4)-(0,0,5)=\langle 2,8,-1\rangle$$
$$\overrightarrow{ph}\cdot\hat{n}=\langle 2,8,-1\rangle\cdot\langle 2,1,1\rangle=4+8-1=11$$
$$|\hat{n}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$
$$D=\frac{11}{\sqrt{6}}$$

10.-

$(3,2,1), x-y+2z=4$

$\hat{n}=\langle 1,-1,2\rangle \to h(0,0,2) \quad p(3,2,1)$

$\overrightarrow{ph}=(3,2,1)-(0,0,2)=\langle 3,2,-1\rangle$

$\overrightarrow{ph}\cdot\hat{n}=\langle 3,2,-1\rangle\cdot\langle 1,-1,2\rangle=3-2-2=-1$

$|\hat{n}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$D=\frac{1}{\sqrt{6}}$

En los ejercicios 11 – 14, verificar que los dos planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

11.-

$x-3y+4z=10, \quad x-3y+4z=6$

$\hat{n}_1=\langle 1,-3,4\rangle \hat{n}_2=\langle 1,3,4\rangle$

$\hat{n}_1 \parallel \hat{n}_2$

$a=(10,0,0) b=(0,-2,0)$

$$D=\frac{|\overrightarrow{ab}\cdot u|}{\|\vec{u}\|}=\frac{|\langle 10,-2,0\rangle|\cdot\langle 1,-3,4\rangle}{\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(7)^2}}=\frac{26}{\sqrt{94}}$$

12.-

$4x-4y-9z=7, \quad 4x-4y-9z=18$

$\vec{u}=\langle 4,-4,-9\rangle \qquad \vec{v}=\langle 4,-4,-9\rangle$

$\hat{n}_1=\hat{n}_2 \therefore \hat{n}_1 \parallel \hat{n}_2$

$a=\left(\frac{7}{4},0,0\right) \qquad \mathrm{b}=(0,2,0)$

$$D=\frac{|\overrightarrow{ab}\cdot v|}{\|\vec{v}\|}=\frac{\left|\left(\frac{7}{4},0,0\right)\cdot(4,-4,9)\right|}{\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(9)^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$$

13.-

$-3x+6y+7z=1, \qquad 6x-12y-14z=25$

$\hat{n}_1=\langle -3,6,7\rangle \qquad \hat{n}_2=\langle 6,-12,-14\rangle$

$2\hat{n}_1=\hat{n}_2 \therefore \hat{n}_1 \parallel \hat{n}_2$

$a=\left(\frac{1}{3},0,0\right) \qquad \mathrm{b}=\left(0,0,-\frac{25}{14}\right)$

$$D=\frac{|\overrightarrow{ab}\cdot u|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\left|\left\langle \frac{1}{3},0,-\frac{25}{14}\right\rangle\right|\cdot\langle -3,6,7\rangle}{\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(7)^2}}=\frac{27}{2\sqrt{94}}$$

14.-

$2x-4z=4, \qquad 2x-4z=10$

$\vec{u}=\langle 2,-4\rangle \qquad \vec{v}=\langle 2,-4\rangle$

$\hat{n}_1=\hat{n}_2 \therefore \hat{n}_1 \parallel \hat{n}_2$

$a=(2,0) \qquad \mathrm{b}=(5,0)$

$$D=\frac{|\overrightarrow{ab}\cdot u|}{\|\vec{u}\|}=\frac{|(3,0)\cdot(2,-4)|}{\sqrt{(2)^2+(20)^2}}=\frac{6}{\sqrt{20}}$$

14.-

$2x-4z=4, \qquad 2x-4z=10$

$\hat{n}_1=\langle 2,0,-4\rangle \quad \hat{n}_2=\langle 2,0,-4\rangle$

$\hat{n}_1 \parallel \hat{n}_2$

$a=(0,0,1) \qquad b=(5,0,0)$

$$D=\frac{|\overrightarrow{ab}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}=\frac{|\langle 5,0,1\rangle\cdot\langle 2,0,-4\rangle|}{\sqrt{(2)^2+(-4)^2}}=\frac{6}{\sqrt{20}}$$

En los ejercicios 15 – 18 hallar la distancia del punto a la recta dad por medio del conjunto de ecuaciones paramétricas.

15.-

$$Q=(1,5,-2) \qquad \begin{cases} x=4t-2 \\ y=3 \\ z=-t+1 \end{cases}$$

$$p_1 \rightarrow t=1 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \qquad (2,3,0)$$

$$p_2 \rightarrow t=2 \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases} \qquad (6,3,-1)$$

$$\overrightarrow{p_2p_1}=(6,3,-1)-(2,3,0)=\langle 4,0,-1\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}=(2,3,0)-(1,5,-2)=\langle 1,-2,-2\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\langle -2,-7,8\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}\right|=3\sqrt{13}$$

16.-

$$Q=(1,-2,4) \qquad \begin{cases} x=2t \\ y=t-3 \\ z=2t+2 \end{cases}$$

$$p_1 \rightarrow t=1 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=4 \end{cases} \qquad (2,-2,4)$$

$$p_2 \rightarrow t=2 \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=6 \end{cases} \qquad (4,-1,6)$$

$$\overrightarrow{p_2p_1}=(4,-1,6)-(2,-2,4)=\langle 2,1,2\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}=(2,-2,4)-(1,-2,4)=\langle 1,0,0\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\langle 0,-2,1\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}\right|=\sqrt{5}$$

17.-

$$Q=(-2,1,3) \qquad \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$$

$$p_1 \rightarrow t=1 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases} \qquad (0,3,-2)$$

$$p_2 \rightarrow t=2 \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \\ z=-4 \end{cases} \qquad (-1,4,-4)$$

$$\overrightarrow{p_2p_1}=(-1,4,-4)-(0,3,-2)=\langle -1,1,-2\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}=(0,3,-2)-(-2,1,3)=\langle 2,2,-5\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\langle 1,9,4\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2p_1}\right|=\sqrt{97}$$

18.–

$$Q=(4,-1,5) \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$$

$$p_1 \to t=1 \to \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \qquad (3,4,2)$$

$$p_2 \to t=2 \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=3 \end{cases} \qquad (3,7,3)$$

$$\overrightarrow{p_2 p_1}=(3,7,3)-(3,4,2)=\langle 0,3,1\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}=(3,4,2)-(4,-1,5)=\langle -1,5,-3\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2 p_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=\langle -14,-1,3\rangle$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\overrightarrow{p_2 p_1}\right|=\sqrt{206}$$

1.- El conjunto de matrices diagonales de tamaño $n \times n$, con la suma común de matrices y la multiplicación escalar común.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & b_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & a_{22}+b_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

sea:a y b una matriz de n $\times n$

$a+b \in V$

$$\beta \begin{pmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \beta a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta a_{nn} \end{pmatrix}$$

por el axioma $\forall x \in V,\ \forall \alpha \in K,\ x\alpha \in V$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & -a_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & a_{22}-a_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn}-a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por el axioma $\forall x \in V,\ \exists -x \in V,\ \ x+(-x)=0$

por el axioma $\exists \vec{0} \in V\ ,x+\vec{0}=x,\ \ \forall x \in V$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

pero la matriz $0 \in \nexists V \therefore$ *no* es un espacio vectorial

2.- $\{(x,y) \in R^2 \,|\, y \le 0\}$ con operaciones usuales de suma y multiplicación escalar de vectores

$(x_1,x_2)+(y_1+y_2)=0$

$x_1+y_1=0$

$x_2+y_2=0$

$si: y \le 0$

$-x_2-y_2 \ne 0$

$\forall x \in V,\ \exists -x \in V,\ \ x+(-x)=0 \rightarrow$ *no* se cumple

asi que no es un espacio vectorial

4.- Un conjunto de vectores en R^3 de la forma (x,x,x)

$(x,x,x)+(x,x,x)=2x+2x+2x$

se cumple $\forall x \in xV, x+x \in V$

$(x,x,x)+(0,0,0)=(x,x,x)$

se cumple $\forall x \in V, \exists \vec{0} \in V, x+0 \in V$

$(x,x,x)+\left[-(x,x,x)\right]=(0,0,0)$

se cumple $\forall x \in V, \exists -x \in V, x+(-x)=0$

$\alpha(x,x,x)=(\alpha x,\alpha x,\alpha x)$

se cumple $\forall x \in V, \forall \alpha \in K, \alpha x \in V$

$(\alpha+\beta)(x,x,x)=\alpha(x,x,x)+\beta(x,x,x)=(\alpha x,\alpha x,\alpha x)+(\beta x,\beta x,\beta x)$

se cumple $\forall x \in V, \forall \alpha\beta \in V, x(\alpha+\beta)=\alpha x+\beta x$

$\alpha\beta(x,x,x)=\alpha(\beta x,\beta x,\beta x)$

se cumple $\forall x \in V,\ \forall \alpha,\beta \in V,\ (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

$1(x,x,x)=(x,x,x)$

se cumple $\forall x \in V, \exists 1 \in K, 1x=x$

Por lo tanto es un espacio vectorial

5.- El conjunto de matrices simétricas de 3×3 con la suma en común y la multiplicación escalar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a & b+b & c+c \\ b+b & e+e & d+d \\ c+c & d+d & f+f \end{pmatrix} la\ matriz \in V$$

$$\beta\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta a & \beta b & \beta c \\ \beta b & \beta e & \beta d \\ \beta c & \beta d & \beta f \end{pmatrix} la\ matriz \in V$$

$$1\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

se cumple $\forall x \in V, \exists 1 \in V, 1x=x$

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha b & \alpha e & \alpha d \\ \alpha c & \alpha d & \alpha f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b & \beta c \\ \beta b & \beta e & \beta d \\ \beta c & \beta d & \beta f \end{pmatrix}$$

$\forall x \in V, \forall \alpha\beta \in V, x(\alpha+\beta) = \alpha x + \beta x$ la matriz $\in$ V

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

se cumple $\forall x \in V, \exists 0 \in V, x+0=x$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -b & -e & -d \\ -c & -d & -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple $\forall x \in V, \exists -x \in V, x+(-x)=0$ la matriz $\in$ V

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ b_{21} & e_{22} & d_{23} \\ c_{31} & d_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_{11} & b+b_{12} & c+c_{13} \\ b+b_{21} & e+e_{22} & d_{23}+d \\ c+c_{31} & d+d_{32} & f_{33}+f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ b_{21} & e_{22} & d_{23} \\ c_{31} & d_{23} & f_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a & b_{12}+b & c+c_{13} \\ b_{21}+b & e_{22}+e & d+d_{23} \\ c_{31}+c & d_{32}+d & f+f_{33} \end{pmatrix}$$

$dado:$

$$\begin{pmatrix} a+a_{11} & b+b_{12} & c+c_{13} \\ b+b_{21} & e+e_{22} & d_{23}+d \\ c+c_{31} & d+d_{32} & f_{33}+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a & b_{12}+b & c+c_{13} \\ b_{21}+b & e_{22}+e & d+d_{23} \\ c_{31}+c & d_{32}+d & f+f_{33} \end{pmatrix} la\ matriz \in V$$

por el axioma $\forall xy \in V, x+y=y+x$

6.- El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ con $a,b \in R$ con la suma común y la multiplicación escalar

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+a \\ b+b & 0 \end{pmatrix}$$ la matriz $\in V$

$$\chi\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \chi a \\ \chi b & 0 \end{pmatrix}$$ la matriz $\in V$

7.- El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ con $a,b \in R$ con la suma común y la multiplicación escalar

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 2b & 2 \end{pmatrix}$$ la matriz $\notin V$

8.- El conjunto de polinomios de grado n, con termino constante igual a cero

$$a_0 + at + at^2 + \ldots at^n = 0$$
$$a = 0$$
$$0 + (0)t + (0)t^2 + \ldots (0)t^n = 0$$
$$0 = 0$$

$$a_0 + at + at^2 + \ldots at^n$$
$$a = 0 \text{ y dado un } \beta$$
$$\beta a_0 + \beta at + \beta at^2 + \ldots \beta at^n$$
$$(0)\beta + (0)\beta t + (0)\beta t^2 + \ldots (0)\beta t^n$$

$$p = a_0 + at + at^2 + \ldots at^n$$
$$a = 0 \text{ y entonses}$$
$$-p = -a_0 + (-at) + (-at^2) + \ldots (-at^n)$$
$$-0 - (0t) - (0t^2) - \ldots (0t^n)$$
$$-0$$
$$-0 \notin \text{V}$$

9.- El conjunto de polinomios de grado n, con termino constante positivo a_0

$$a_0 + at + at^2 + \ldots at^n = 0$$
$$si: t = 0$$
$$a_0 + a(0) + a(0)^2 + \ldots a(0)^n = 0$$
$$a_0 = 0$$
$$pero: \ a > 0$$
entonces: no es un espacio vectorial

10.- El conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ con operaciones definidas de manera usual

$$f(0) + g(0) = 0$$
$$f(1) + g(1)$$
$$0 \in V$$

11.- el conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$ donde $a, b \in Q$ con la suma usual de números reales y con la multiplicación escalar definida solamente para escalares racionales

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in V$$

$$\alpha(a + b\sqrt{2}) = \alpha a + \alpha b\sqrt{2}$$
$$\alpha a + \alpha b\sqrt{2} \in V$$

12.- Demuestre que en un espacio vectorial el neutro aditivo es único

$$sea: x, y \in V \quad \text{pero } y = (-x)$$
$$(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) + (y_1, y_2 \ldots\ldots y_n)$$
$$(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) + (-x_1, -x_2 \ldots\ldots - x_n) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2) \ldots\ldots x_n + (-x_n)) = (0, 0, 0 \ldots\ldots 0)$$
$$\text{se } \ cumple$$
$$\forall x \in V, \exists - x \in V, x + (-x) = 0$$

13.- Demuestre que en un espacio vectorial cada vector tiene un inverso aditivo

$$sea: x \in V \quad \exists \vec{0} \in V$$
$$(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) + (0, 0 \ldots\ldots 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0 \ldots\ldots x_n + 0) = (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$
se $cumple$
$$\forall x \in V, \exists \vec{0} \in V, x + 0 = x$$

14. Demuestre que el conjunto de los números reales positivos forman un espacio vectorial con las operaciones $x + y = xy$ y $ax = x^a$

En los ejercicios 15 – 24 determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V. JUSTIFIQUE SU RESPUESTA.

$$V = \Re^2; H = \{(x, y) \in \Re^2 \,|\, x = y\}$$
$$si, (x_1, y_1)\, y\, (x_2, y_2) \in V$$
$$Entonces:$$
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$
$$dado: x = y \rightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \rightarrow \in V$$

$$si, (x_1, y_1) \in V \quad -(x_1, y_1) \in V$$
$$tenemos:$$
$$(x_1, y_1) + [-(x_1, y_1)]$$
$$= (x_1, y_1) - (x_1, y_1)$$
$$(x_1 - x_1, y_1 - y_1)$$
$$(0, 0)$$
$$y \;\; si: x = y \rightarrow 0 = 0 \in V$$
$$dado: \forall x \in V, \;\; \exists -x \in V, \;\; x + (-x) = 0$$

$$si, (x_1, y_1) \in V \quad y \; \alpha \in V$$
$$Entonces:$$
$$\alpha(x_1, y_1) = \alpha x_1 + \alpha y_1 \in V$$
$$dado \; a:$$
$$\forall x \in V, \; \forall \alpha \in K, \; x\alpha \in V$$

16.- $V = \Re^2; H = \{(x, y) \in \Re^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$

$$si, (x, y) \quad y \quad \alpha$$

$$\alpha(x, y) = \alpha x, \alpha y \notin H$$

17.- $V = \Re^3; H = \{(x, y) \in \Re^3 \,|\, z = 0\}$ → $\in H$

$si,(x,y,z)$ y $z=0$

$\alpha(x,y,z)=\alpha x,\alpha y,\alpha z$

$\alpha x,\alpha y,\alpha(0)$

$\alpha x,\alpha y$

$si,(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ y $z=0$

$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2,0+0)$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

18. $V=M_{n\times n};H=\{D\in M_{n\times n}\,|D=D^t\}$

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad D^T=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nm} \end{pmatrix}$$

sea $\mathrm{D}_{n\times n}$ y un α

$$\alpha\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha d_{11} & \alpha d_{12} & \cdots & \alpha d_{1n} \\ \alpha d_{21} & \alpha d_{22} & \cdots & \alpha d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha d_{m1} & \alpha d_{m2} & \cdots & \alpha d_{mn} \end{pmatrix}$$

$entonces:\alpha D^T$

$$=\begin{pmatrix} \alpha d_{11} & \alpha d_{21} & \cdots & \alpha d_{m1} \\ \alpha d_{12} & \alpha d_{22} & \cdots & \alpha d_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha d_{1n} & \alpha d_{2n} & \cdots & \alpha d_{nm} \end{pmatrix}\rightarrow D^T\in V$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \cdots & D_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11}+D_{11} & d_{12}+D_{12} & \cdots & d_{1n}+D_{1n} \\ d_{21}+D_{21} & d_{22}+D_{22} & \cdots & d_{2n}+D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}+D_{m1} & d_{m2}+D_{m2} & \cdots & d_{mn}+D_{mn} \end{pmatrix}$$

19. $V=M_{n\times n};H=\{T\in M_{n\times n}\,|T\ \text{ es triangular superior}\}$

Sea a y b matrices de $n\times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

se cumple : $\forall x, y \in H, x+y \in H$

$$\alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ 0 & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha b_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz triangular superior $\in$ H

se cumple: $\forall x \in H, \forall \alpha \in K, \alpha x \in H$

20. $V = P_4; H = \{ p \in P_4 \mid p(0) = 0 \}$ el polinomio es un subespacio vectorial

$sea: p \ \ y \ \ p_a \ \ polinomios \ \ \in p_4$

$p(0) = 0 \qquad p_a(0) = 0$

$p = c + cx + cx^2 + cx^3 + cx^4$

$p_a = d + dx + dx^2 + dx^3 + dx^4$

$p + p_a = c + d + (c+d)x + (c+d)x^2 + (c+d)x^3 + (c+d)x^4$

$cumple: \forall x, y \in V, x+y \in V$

$sea: p \ \ \in p_4$ y una α

$\alpha p = \alpha\left(c + cx + cx^2 + cx^3 + cx^4\right)$

$\alpha p = \alpha c + \alpha cx + \alpha cx^2 + \alpha cx^3 + \alpha cx^4$

$cumple: \forall x \in H, \forall \alpha \in K, \alpha x \in H$

21. $V = P_n; H = \{ p \in P_n \mid p(0) = 1 \}$

$sea: p \ \ y \ \ p_o$ polinomios de grado n

p(0)=1 $\qquad$ $\mathrm{p}_0(0) = 1$

$p + p_0 = 1 + 1 = 2$

$p + p_0 \notin H$

En los ejercicios 1 - 10 determine si el conjunto de vectores dado es linealmente Independiente o dependiente

1.-

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ son linealmente independiente porque no se pueden escribir como combinación lineal

2.-

$\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}=\begin{matrix}2\alpha+4\beta=0\\-\alpha-2\beta=0\\4\alpha+7\beta=0\end{matrix}\quad\begin{matrix}\alpha=-2\beta\\a=-2\beta\\4\alpha=-7\beta\end{matrix}$ son linealmente independientes

3.-

$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes

$$a\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}=\begin{matrix}-3a+b+4c=0\\2a+10b-5c=0\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&10&-5\end{pmatrix}-1/3R_1\to R_1\begin{pmatrix}1&-1/3&-4/3\\2&10&-5\end{pmatrix}R_2-2R_1\to R_2\begin{pmatrix}1&-1/3&-4/3\\0&32/3&-7/3\end{pmatrix}$$

$$3/32R_2\begin{pmatrix}1&-1/3&-4/3\\0&1&-7/32\end{pmatrix}1/3R_2-R_1\to R_1\begin{pmatrix}1&0&45/32\\0&1&-7/32\end{pmatrix}$$

$$a-\frac{45}{32}c=0 \qquad a=\frac{45}{32}c$$

$$b-\frac{7}{32}c=0 \qquad b=\frac{7}{32}c$$

4.-

$\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}$ son linealmente independientes

$$a\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{matrix}-3a+7b+c=0\\4a-b+c=0\\2a+3b+8c=0\end{matrix}\begin{pmatrix}-3&7&1\\4&-1&1\\2&3&8\end{pmatrix}R_2-2R_3\to R_2\begin{pmatrix}-3&7&1\\0&-7&-15\\2&3&8\end{pmatrix}-1/3R_1\begin{pmatrix}1&-7/3&-1/3\\0&-7&-15\\2&3&8\end{pmatrix}$$

$$R_3-2R_1\to R_3\begin{pmatrix}1&-7/3&-1/3\\0&-7&-15\\0&23/3&26/3\end{pmatrix}-1/7R_2\begin{pmatrix}1&-7/3&-1/3\\0&1&-15/7\\0&23/3&26/3\end{pmatrix}7/3R_2+R_1\to R_1\begin{pmatrix}1&0&-16/3\\0&1&-15/7\\0&23/3&26/3\end{pmatrix}$$

$$R_3-23/3R_2\begin{pmatrix}1&0&-16/3\\0&1&15/7\\0&0&\frac{4321}{483}\end{pmatrix}\frac{483}{4321}R_3\begin{pmatrix}1&0&-16/3\\0&1&15/7\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}7/15R_3+R_2\to R_2\\-16/3R_3+R_1\to R_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5.-

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Son linealmente dependientes

$$a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}5\\0\\3\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}a+3b+5d=0\\-2a+4c=0\\a+2b-c+3d=0\\a-2b-c-d=0\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}1&3&0&5\\-2&0&4&0\\1&2&-1&3\\1&-2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}2R_1+R_2\to R_2\\-R_1+R_3\to R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&6&4&10\\0&-1&-1&-2\\1&-2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}-R_1+R_4\to R_4\\1/6R_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&1&4/6&5/3\\0&-1&-1&-2\\0&-5&-1&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}-3R_2+R_1\to R_1\\R_2+R_3\to R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&4/6&5/3\\0&0&-2/6&-1/3\\0&-5&-1&-6\end{pmatrix}$$

$$5R_2+R_4\to R_4\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&4/6&5/3\\0&0&-2/6&-1/3\\0&0&7/3&7/3\end{pmatrix}-3R_3\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&4/6&5/3\\0&0&1&1\\0&0&7/3&7/3\end{pmatrix}-7/3R_3-R_4\to R_4\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&4/6&5/3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

6. En $p_2:1-x,x$

$$sea: c_1(1-x)+c_2(x)=0$$
$$c_1+(c_2-c_1)x=0$$
$$c_1=0$$
$$c_2-c_1=0$$
$$c_2=c_1=0$$

linealmente independientes

7. $p_2:1-x,1+x,x^2$

$$c_1(1-x)+c_2(1+x)+c_3x^2=0$$
$$c_1+c_2+(c_2-c_1)x+(c_3)x^2=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)R_2+R_1\to R_2\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\frac{R_2}{2}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)R_1-R_2\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

son linealmente dependientes

8.- $p_3 = 2x,\ \ x^3-3,\ \ 1+x-4x^3,\ \ x^3+18x-9$

$$sea: c_1(2x)+c_2(x^3-3)+c_3(1+x-4x^3)+c_4(x^3+18x-9)=0$$

$$\begin{aligned} -3c_2+c_3-9c_4&=0\\ 2c_1+c_3+18c_4&=0\\ c_2-4c_3+c_4&=0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -9\\ 2 & 0 & 1 & 18\\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2/2 \to R_2\\ R_1+3R_3 \to R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -11 & -6\\ 1 & 0 & 1/2 & 9\\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \frac{-R_1}{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 6/11\\ 1 & 0 & 1/2 & 9\\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2-1/2R_1 \to R_2\\ R_3+4R_1 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 6/11\\ 1 & 0 & 0 & 96/11\\ 0 & 1 & 0 & 35/11 \end{pmatrix} \text{ linealmente dependientes}$$

9.- En una matriz de 2 X 2: $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3\\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -3\\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 7 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2\alpha+4\lambda=0$$

$$-\alpha-3\beta+\lambda=0$$

$$4\alpha+\beta+7\lambda=0$$

$$\boxed{5\beta-5\lambda=0} \to \boxed{\beta=\lambda} \therefore son: Li$$

10.- En una matriz de 2 X 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_4-6R_2 \to R_4\\ R_2+R_1 \to R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} -R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1+R_2 \to R_1\\ R_3-3R_2 \to R_3\\ R_4-7R_2 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\frac{R_3}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4/5\\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1+R_3 \to R_1\\ R_2+2R_3 \to R_2\\ -R_4+10R_3 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/5\\ 0 & 1 & 0 & 3/5\\ 0 & 0 & 1 & 4/5\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.- Formule una condición para que los números a, b, c, y d tal que los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sean

(a) linealmente dependientes
(b) linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$ad - bc = 0$$

12.- Para que valores reales de α son linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & \alpha - 6 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} 5R_3 - 2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & \alpha - 6 \\ 0 & 0 & -2\alpha - 13 \end{pmatrix}$$

$$2\alpha + 13 = 0$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{13}{2}}$$

13.- ¿para qué valores reales c los vectores $(1-c, 1+c)$ y $(1+c, 1-c)$ son linealmente independientes?

$$\begin{vmatrix} 1-c & 1+c \\ 1+c & 1-c \end{vmatrix} = (1-c)^2 - (1+c)^2 = 1 - 2c + c^2 - 1 - 2c - c^2 = -4c \qquad \text{para valores de: } c \neq 0$$

14.- Demuestre que los vectores $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$ son linealmente independientes si: $a \neq b, a \neq c, b \neq c$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\neq 0, si \quad a \neq b, a \neq c, b \neq c$$

En los ejercicios 15 – 22 determinar si el conjunto de vectores dado genera al espacio vectorial que se da.

15 – En R^2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ si genera al espacio vectorial

Dado que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in a_1, a_2 \text{ tal que: } a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -2 & -2x + y \end{pmatrix} \to a_1, a_2 existen$$

16.- En R^2 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$

17.- En R^3 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ si genera en R^3

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\1&1&0&y\\1&1&1&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{|ccc|c}1&0&0&x\\0&1&0&y-x\\0&0&1&z-x-y\end{array}\right)$$

18.- En R^3 $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$ si genera en el espacio vectorial

$\begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $c_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}c_1=1\\c_2=1\\c_3=2\end{matrix}$

19.- En el polinomio $P_2: 1-x, 3-x^2$

$$a(1-x)+b(3-x^2)=$$
$$a+3b=0$$
$$-ax-bx^2=0$$
$$ax+bx^2=0$$
$$x(a+bx)=0$$

20.- en el polinomio $p_2: 1-x, 3-x^2, x$

$\{1-x, 3-x^2, x\}$ es de la forma ax^2+bx+c

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&a\\-1&0&1&b\\1&3&0&c\end{array}\right)R_1\leftrightarrow R_3\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&c\\-1&0&1&b\\0&-1&0&a\end{array}\right)R_2\leftrightarrow -R_3\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&c\\0&1&0&-a\\-1&0&1&b\end{array}\right)$$ si genera $1-x, 3-x^2, x$ en P_2

$$R_3+R_1\to R_3\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&c\\0&1&0&-a\\0&3&1&b+c\end{array}\right)\begin{matrix}R_1-3R_2\to R_1\\R_3-3R_2\to R_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3a+c\\0&1&0&-a\\0&0&1&3a+b+c\end{array}\right)$$

21.- En la matriz 2 x 2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$a_1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Generan en las matrices de 2x2

22.- En la matriz 2 x 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\notin\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ las ecuaciones

$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no siempre generan

23.- Halle un conjunto de tres vectores linealmente independientes en R^3 Tal que tenga a los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & b \\ 2 & 4 & c \end{pmatrix}$ para cualquier a, b, c se determina que no todos los ceros

En los ejercicios 1 – 10 determine si el conjunto de vectores dad es una base del espacio vectorial correspondiente.

1.- En el polinomio $p_2 : 1 - x^2, x$ son linealmente independientes y no generan en el espacio, no es una base

$$c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(x\right)=0$$
$$c_1=0$$
$$c_2=0$$

$$c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2$$
$$c_1=a_0$$
$$c_2=a_1$$
$$c_3=a_2$$

2.- En el polinomio $P_2 : -3x, 1+x^2, x^2-5$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+5) = 18$$

el determinante es distinto de cero, por lo tanto si forma el espacio vectorial

3.- En el polinomio $p_2 : x^2-1, x^2-2, x^2-3$ son linealmente dependientes por lo tanto no forman una base

$$c_1\left(x^2-1\right)+c_2\left(x^2-2\right)+c_3\left(x^2-3\right)=0$$
$$-\left(c_1+c_2+c_3\right)+\left(c_1+c_2+c_3\right)x^2=0$$
$$-\left(c_1+c_2+c_3\right)=0$$
$$c_1+c_2+c_3=0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} R_1+R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} R_2-R_1 \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

4.- En el polinomio $= P_3 : 1, 1+x, 1+x^2+1+x^3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

el determinante es distinto de cero, por lo tanto son linealmente independientes y forma una base en el espacio

5.- En el polinomio $p_3 : 3, x^3-4x+6, x^2$ no se pueden expresarse como combinación lineal. No genera una base

6.- En la matriz 2 x 2 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

$$3c_1 + 3c_2 - 5c_1 = 0$$
$$c_1 + 2c_2 + c_1 + c_4 = 0$$
$$6c_3 - 7c_4 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{6}{7}c_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & \frac{13}{7} \end{pmatrix} - 3R_2 + R_1 \rightarrow R_2 \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -\frac{74}{7} \end{pmatrix} R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{109}{7} \\ 0 & -3 & -\frac{74}{7} \end{pmatrix}$$

$$3c_1 - \frac{109}{7}c_3 = 0$$
$$-3c_2 - \frac{74}{7}c_3 = 0$$

$$21c_1 - 109c_3 = 0$$
$$-21c_2 - 74c_3 = 0$$

son linealmente dependientes, no generan base

7.- en una matriz de 2 x 2 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad abcd \neq 0$

$$c_1\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$ac_1 = 0 \therefore c_1 = 0$$
$$bc_2 = 0 \therefore c_2 = 0$$
$$cc_3 = 0 \therefore c_3 = 0$$
$$dc_4 = 0 \therefore c_4 = 0$$

9.- $H = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x + y = 0\}; (1, -1)$

$dado: (x, y) \in H$ entonces $(x, y) = (x, x) = x(1, -1)$ si forma una base

10.- $H\{(x, y) \in R^2 \,|\, x + y = 0\}; (1, -1), (-3, 3)$

Son dependientes $(-3, 3) = -3(1, -3)$ por lo tanto, no forma una base

11.- Halle una base en R^3 para el conjunto de vectores en el plano $2x - y - z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{la base es } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

12.- Halle una base en R^3 para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 6z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2/3)y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{la base es } \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

13.- Halle una base en R^3 para el conjunto de vectores en la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (3/2)x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{la base es } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

14.- Halle una base en R^3 para el conjunto de vectores en la recta $x = 3t, \quad y = -2t, \quad z = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{la base es } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

15.- Determine una base para D_3, el espacio de las matrices diagonales de 3×3 ¿cuál es $\dim D_3$? Y ¿Cuál es $\dim D_n$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \dim D_3 = 3$$

16.- Para que valores del número real α forman una base de R^3 los vectores $(\alpha, 1, 0)(1, 0, \alpha)$ y $(1+\alpha, 1, \alpha)$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a-a) = 0$$

los vectores nunca forman una base ya que todos los valores de a son dependientes

En los ejercicios 1 – 14 determine si la transformación dada de V en W es lineal

1)

$$T:R^2 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

si es lineal

2)

$$T:R^2 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \alpha T\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

No es lineal

$$\alpha T\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \alpha \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

3)

$$T:R^3 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha x_3 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Si es lineal

4)

$$T:R^3 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$aT\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Si es lineal

5)

$$T:R^3 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$ No es lineal

6)

$$T:R^2 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} (\alpha x_1 + x_2)^2 \\ (\alpha y_1 + y_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 + 2\alpha x_1 y_1 + y_1^2 \\ a^2 x_2^2 + 2\alpha x_2 y_2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\left(\alpha x_1^2 + 2x_1 y_1\right) + y_1^2 \\ \alpha\left(\alpha x_2^2 + 2x_2 y_2\right) + y_2^2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} ax_1^2 + 2x_1 y_1 \\ ax_2^2 + 2x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$$

No es lineal

7)

$$T:R^2 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

8)

$$T:R^2 \to R; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha x_1 + x_2)(\alpha y_1 + y_2)$$

$$= \alpha^2 x_1 y_1 + \alpha x_1 y_2 + \alpha x_2 y_1 + x_2 y_2$$

$$= a(\alpha x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

No es lineal

9)

$$T:R^2 \to R; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) \\ (\alpha y_1 + y_2) - (\alpha y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ \alpha(y_1 + y_2) - (y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

10)

$$T:R^4 \to R^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ w_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha w_1 + w_2 \\ \alpha z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha z_1 + z_2) \\ (\alpha y_1 + y_2) - (\alpha w_1 + w_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) \\ \alpha(y_1 + y_2) - (w_1 + w_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 - w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + z_2 \\ y_2 - w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T\begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 - w_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 + z_2 \\ y_2 - w_2 \end{pmatrix}$$

11)

$$T:R^2 \to R^3; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 + x_2 \\ (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

12)

$$T:R^2\to R^3;T(x)=\begin{pmatrix} x\\ 2x\\ x+1\end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha(x_1)+(x_2)\right]=T(\alpha x_1+x_2)=\begin{pmatrix}\alpha y_1+x_2\\ 2(\alpha x_1+x_2)\\ (\alpha x_1+x_2)+1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ 2x_1\\ x_1+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ 2x_1\\ x_2+1\end{pmatrix}=\alpha T(x_1)+T(x_2)$$

13)

$$T:R^n\to R;T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1+x_2+\ldots x_n$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}\alpha x_1+x_{11}\\ \alpha x_2+x_{22}\\ \vdots\\ \alpha x_n+x_{nn}\end{pmatrix}=(\alpha x_1+x_{11})+(\alpha x_2+x_{22})+(\alpha x_n+x_{nn})=\alpha T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}$$

14)

$$T:R\to R^n;T(x)=\begin{pmatrix}x\\ x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}\qquad =T\left[\alpha(x_1)+(x_2)\right]=T(\alpha x_1+x_2)=\begin{pmatrix}\alpha x_1+x_2\\ \alpha x_1+x_2\\ \vdots\\ \alpha x_n+x_{nn}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}=\alpha T(x_1)+T(x_2)$$

15) $T:R^4\to R^2;T\begin{pmatrix}w\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xz\\ yw\end{pmatrix}$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix}w_1\\ x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_2\\ x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}\alpha w_1+w_2\\ \alpha x_1+x_2\\ \alpha y_1+y_2\\ \alpha z_1+z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha x_1+x_2)(\alpha z_1+z_2)\\ (\alpha y_1+y_2)(\alpha w_1+w_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^2x_1z_1+\alpha x_1z_2+\alpha x_2z_1+x_2z_2\\ \alpha^2y_1w_1+\alpha y_1w_2+\alpha y_2w_1+y_2w_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha(\alpha x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1)+x_2z_2\\ \alpha(\alpha y_1w_1+y_1w_2+y_2w_1)+y_2w_2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\alpha x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1\\ \alpha y_1w_1+y_1w_2+y_2w_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2z_2\\ y_2w_2\end{pmatrix}$$ No es lineal

25.- Sea T una transformación lineal de $R^2 \to R^3$ tal que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$ encuentre $(a)T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ y (b) $T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$

$a)$

$$(2,4)=2(1,0),4(0,1)$$
$$2T(1,0),4T(0,1)$$
$$T(2,4)=2(1,2,3)+4(-4,0,5)$$
$$=(2,4,6)+(-16,0,20)$$
$$=(-14,4,26)$$

$a)$

$$(-3,7)=-3(1,0)+7(0,1)$$
$$-3T(1,0)+7T(0,1)$$
$$T(2,4)=-3(1,2,3)+7(-4,0,5)$$
$$=(-3,-6,-9)+(-28,0,35)$$
$$=(-31,-6,26)$$

En los ejercicios 1-6, encuentre la representación matricial A_T de la transformación lineal T. En las matrices de los ejercicios 1; 4 y 6 encuentre los valores
y vectores propios.

1) $A_T \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

$$|A-\lambda I| = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)-10$$

$$= -2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-10$$

$$= \lambda^2+\lambda-12=0$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda=-4$$

$$\lambda=3$$

$$|A-\lambda_1 I| = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_1 I| = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} 2R_2+5R_1 \to R_2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x-2y=0$$

$$vector \;\; propio \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_2 I| = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_2 I| = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} R_2+R_1 \to R_2 \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-5x-2y=0$$

$$vector \;\; propio \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

v

4)

$$T: R^2 \to \mathrm{R}^2, \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & -y \\ 5x & -2y \end{pmatrix}$$

$$A_T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)5+$$

$$= -4-2\lambda+2\lambda+\lambda^2+5$$

$$= \lambda^2+1$$

$$\lambda=i \qquad \lambda-i$$

$$|A-\lambda_1 I| = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_1 I| = \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}(2+i)R_1+R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-i)x-y=0$$

$$vector \;\; propio \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_1 I| = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda_1 I| = \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix}(2-i)R_1+R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5x-2y=0$$

$$vector \;\; propio \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

2)

$$T:R^2\to R^2,T:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\2x+3y\end{pmatrix}$$

$$A_T=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\2&3\end{pmatrix}$$

3)

$$T:R^2\to R^2,T:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+z\\-2x-2y-2z\end{pmatrix}$$

$$A_T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

5)

$$T:R^3\to R^3,T:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+2z\\3x+y+4z\\5x-y+8z\end{pmatrix}$$

$$A_T=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\5&-1&8\end{pmatrix}$$

6)

$$T:R^3\to R^3,T:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\x+2y+z\\2x+2y+3z\end{pmatrix}$$

$$A_T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$$

$$|A_T-\lambda I|=\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|A_T-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&2-\lambda&1\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right]-\left[2-4+2\lambda\right]$$

$$(1-\lambda)\left(6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-2\right)+2-2\lambda$$

$$\lambda^2-5\lambda+4-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda-2\lambda+2$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-5\lambda+6\right)$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$\lambda=1,\qquad \lambda=3,\qquad \lambda=2$$

$$\left|A_T - \lambda I\right| = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|A_T - \lambda I\right| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} 2R_2 - R_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-z = 0$

$x + y + z = 0$

$x + y = 0$

$x = -y$

$vector$ propio

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|A_T - \lambda I\right| = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|A_T - \lambda I\right| = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$2y - z = 0 \rightarrow 2y = z$

$2x + 2y = 0$

$z = 2$

$y = 1$

$x = -1$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_T-\lambda I| = \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$|A_T-\lambda I| = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$x+z=0 \to x=-z$$

$$2x+2y+z=0 \to -2z+z+2y=0 \to -z+2y=0$$

$$2y=z \qquad \boxed{z=2} \qquad \boxed{y=1} \qquad \boxed{x=-2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$