Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Academia de Matemáticas y Física
Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada

Mecánica Cuántica

Presenta:
Palomares Maldonado Héctor Miguel

Enero - Mayo 2019

.

Índice

1. Origen de la Física Cuántica

1.7 Un haz de rayos X de una fuente de azufre ($\lambda = 53{,}7nm$) y un haz de rayos de una muestra de Cs^{137} ($\lambda = 0{,}19nm$) inciden en un objetivo de grafito. Dos detectores están configurados en ángulos de 30° y 120° De la dirección de las vigas incidentes.

a) Estime los desplazamientos de longitud de onda de los rayos X y los rayos registrados en ambos detectores.

b) Encuentre la energía cinética del electrón de retroceso en cada uno de los cuatro casos.

c) ¿Qué porcentaje de la energía fotónica incidente se pierde en la colisión en cada uno de los cuatro casos

Solución:

a) del efecto comptom

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lambda + \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \\
&= 53{,}7\times10^{-9}m + \frac{6{,}626070\times10^{-34}Js}{(9{,}10938291\times10^{-31}kg)(3\times10^8)}(1-\cos 30^\circ) \\
&= 53{,}7003\times10^{-9}m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lambda + \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \\
&= 0{,}19\times10^{-9}m + \frac{6{,}626070\times10^{-34}Js}{(9{,}10938291\times10^{-31}kg)(3\times10^8 m/s)}(1-\cos 120^\circ) \\
&= 1{,}912123\times10^{-10}m
\end{aligned}$$

b) La energía cinética del electrón después del choque no la podemos escribir como $m_e v^2/2$ ya que el electrón de retroceso alcanza velocidades cercanas a la de la luz, tenemos que reemplazarla por la fórmula relativista equivalente

$$E_k = \sqrt{m_e^2 c^4 + pc^2} - m_e c^2$$

donde m_e es la masa en reposo del electrón $9{,}10938291\times10^{-31}kg$ Energía después del la colisión (azufre)

$$\begin{aligned}
E_k &= \sqrt{(9{,}10938291\times10^{-31}kg)^2(3\times10^8m/s)^4 + \frac{6{,}626070\times10^{-34}Js}{53{,}7\times10^{-9}m}(3\times10^8m/s)^4} \\
&- (9{,}10938291\times10^{-31}kg)(3\times10^8m/s)^2 \\
&= 9997{,}32J
\end{aligned}$$

Energía antes de la colisión (azufre)

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}626070\times10^{-34}Js)(3\times10^8m/s)}{53{,}7\times10^{-9}m} = 3{,}70\times10^{-18}J$$

Energía después del la colisión ($Cs137$)

$$\begin{aligned}
E_k &= \sqrt{(9{,}10938291\times10^{-31}kg)^2(3\times10^8m/s)^4 + \frac{6{,}626070\times10^{-34}Js}{0{,}19\times10^{-9}m}(3\times10^8m/s)^4} \\
&- (9{,}10938291\times10^{-31}kg)(3\times10^8m/s)^2 \\
&= 1{,}68\times10^5J
\end{aligned}$$

Energía antes de la colisión ($Cs137$)

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}626070\times10^{-34}Js)(3\times10^8m/s)}{0{,}19\times10^{-9}m} = 3{,}70\times10^{-18}J = 3{,}7768599\times10^{-35}J$$

c) fuente de azufre

$$9997{,}32J - 3{,}70 \times 10^{-18}J = 9997{,}32J\,\%$$

$Cs137$

$$1{,}68 \times 10^{5}J - 3{,}7768599 \times 10^{-35}J = 167999{,}999J$$

1.9 Calcule la cantidad de fotones emitidos por segundo a partir de una bombilla de $75rmW$; use $575nm$ como la longitud de onda promedio de la luz (visible) emitida. ¿Es importante la naturaleza cuántica de esta radiación?

Solución:

Sabemos que la energía es

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

sustituyendo

$$E = \frac{(6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s)}{575 \times 10^{-9}m} = 3{,}445 \times 10^{-19}J$$

$$\frac{n^{\circ} de fotones}{tiempo} = 75 \times 10^{3}J/S \left(\frac{1 foton}{3{,}445 \times 10^{-19}J}\right) = 2{,}177 \times 10^{23}$$

1.13 Si el potencial en la detención sobre un metal cuando se ilumina con una radiación de longitud de onda de $480nm$ es $1{,}2V$, encuentre

a) la función de trabajo del metal,

b) la longitud de onda de corte del metal, y

c) La energía máxima de los electrones expulsados.

Solución:

a) El efecto fotoelectrico esta dado por la ecuación

$$E = h\nu - \Phi$$

donde E es la energía del eléctron $h\nu$ del foton y Φ la función trabajo

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{hc}{\lambda} - eV \\ &= \frac{(6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s)}{480 \times 10^{-9}m} - (9{,}11 \times 10^{-31}kg)(1{,}2) \\ &= 2{,}21 \times 10^{-19}J\end{aligned}$$

b) Sabemos

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

y tambien la relación de trabajo - Energía $W = E$, entonces la longitud de onda de corte es

$$\lambda = \frac{(6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s)}{2{,}21 \times 10^{-19}J} = 8{,}99 \times 10^{-7}m$$

c)

$$\begin{aligned}E &= hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \\ &= (6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s)\left(\frac{1}{480 \times 10^{-9}m} - \frac{1}{8{,}99 \times 10^{-7}m}\right) \\ &= 1{,}930169 \times 10^{-19}J\end{aligned}$$

1.14 Encuentre el máximo cambio de onda Compton correspondiente a una colisión entre un fotón y un protón en reposo.
Solución:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - cos\theta)$$

para la maximo valor el ángulo es 180°

$$\Delta\lambda = \frac{6{,}626070 \times 10^{-34}Js}{(1{,}6726 \times 10^{-27}kg)(3 \times 10^{8}m/s^{2})}(1-(-1)) = 2{,}641025 \times 10^{-15}m$$

1.17 Considere un metal con una frecuencia de corte de $1{,}2 \times 10^{14}Hz$.

a) Encuentre la función de trabajo del metal.

b) Encuentre la energía cinética de los electrones expulsados cuando el metal se ilumina con una radiación de frecuencia de 7×10^{14} Hz.

Solución:

a) Sea Φ la función trabajo, y se puede definir como

$$\Phi = h\nu_0 = (6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(1{,}2 \times 10^{14}Hz) = 7{,}95 \times 10^{-20}J$$

$$7{,}95 \times 10^{-20}J\left(\frac{1{,}0eV}{1{,}602 \times 10^{-19}J}\right) = 0{,}5eV$$

b) obtenemos la energía, con la ecuación del efecto fotoeléctrico

$$\begin{aligned} k &= h\nu - \Phi \\ &= (6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(7 \times 10^{14}Hz) - 7{,}95 \times 10^{-20}J \\ &= 3{,}84 \times 10^{-19}J \end{aligned}$$

1.21 Los fotones de longitud de onda de $5nm$ se dispersan de los electrones que están en reposo. Si los fotones se dispersan a 60° con relación a los fotones incidentes, calcular

a) la longitud onda de Compton,

b) la energía cinética impartida a los electrones de retroceso

c) El ángulo al que retroceden los electrones.

Solución:

a)

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{6{,}626070 \times 10^{-34}Js}{(3 \times 10^{8}m/s)((9{,}10938291 \times 10^{-31}kg)} = 2{,}4 \times 10^{-12}m$$

b)

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{(6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s^{2})}{5 \times 10^{-9}m} = 3{,}975642 \times 10^{-17}J$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \\ &= 5 \times 10^{-9}m + 2{,}4 \times 10^{-12}m(1 - \cos 60°) \\ &= 5{,}0012 \times 10^{-9}m \end{aligned}$$

entonces la energía asociada a esta longitud de onda es

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}626070 \times 10^{-34}Js)(3 \times 10^{8}m/s^{2})}{5{,}0012 \times 10^{-9}m} = 3{,}974688 \times 10^{-17}J$$

La energía cinética impartida por los electrones

$$k = E_0 - E_f$$

$$k = 3{,}975642 \times 10^{-17} J - 3{,}974688 \times 10^{-17} J \approx 1{,}0 \times 10^{-20} J$$

c)

$$\tan\varphi = \frac{\lambda_0 \operatorname{sen}\theta}{\lambda - \lambda_0 \cos\theta}$$

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{(5\times 10^{-9} m)\operatorname{sen} 60^\circ}{5{,}0012\times 10^{-9} m - (5\times 10^{-9} m)\cos 60^\circ} & = \\ \varphi &= \arctan 1{,}731 \\ &= 59{,}98^\circ \end{aligned}$$

1.33 Calcular la longitud de onda de Broglie de

a) un electrón de energía cinética $54eV$,

b) un protón de energía cinética $70MeV$

c) una bala de $100g$ que se mueve a $1200m/s$

Datos útiles: $m_e c^2 = 0{,}511MeV$, $m_p c^2 = 938{,}3MeV$, $hc \approx 197{,}3eVnm$.
Solución

a) Para calcular la longitud de onda de De-Broglie, necesitamos calcular el momento

$$P_e = \sqrt{2Em_e} = \sqrt{2(54eV)\left(\frac{1{,}602\times 10^{-19} J}{1eV}\right)(9{,}10938291\times 10^{-31} kg)} = 3{,}97\times 10^{-24} kgm/s$$

$$\lambda = \frac{h}{P_e} = \frac{(6{,}626070\times 10^{-34} Js}{3{,}97\times 10^{-24} kgm/s} = 1{,}67\times 10^{10} = 1{,}67\mathring{A}$$

b)

$$P = \sqrt{2Em} = \sqrt{2(70\times 10^6 eV)\left(\frac{1{,}602\times 10^{-19} J}{1eV}\right)(9{,}10938291\times 10^{-31} kg)} = 2{,}2428{\times}10^{-19} kgm/s$$

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{(6{,}626070\times 10^{-34} Js}{2{,}2428\times 10^{-19} kgm/s} = 2{,}954373\times 10^{-15} m$$

c) en clásica el momento es $p = mv$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{(6{,}626070\times 10^{-34} Js}{(0{,}1kg)(1200m/s)} = 5{,}521725\times 10^{-36} m$$

1.36 Considere las siguientes tres funciones de onda

$$\psi_1(y) = A_1 e^{-y^2} \qquad \psi_2(y) = A_2 e^{-y^2/2} \qquad \psi_3(y) = A_3(e^{-y^2} + ye^{-y^2/2})$$

donde A_1, A_2 y A_3 son constantes de normalizacion.

a) Encuentre las constantes A_1, A_2 y A_3 para que ψ_1, ψ_2 y ψ_3 estén normalizadas.

b) Encuentre la probabilidad de que cada uno de los estados esté en el intervalo $1 < y < 1$.

Solución:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(y)|^2 dy = 1 \qquad n = 1, 2, 3$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-y^4} dy = 1$$

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-y^2}\right)^2 dy = 1$$

tenemos que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/2-1} dt = \int_0^{\infty} e^{u} (u^{-1/2})^2 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$8 \int_0^{\infty} e^{-u^4} du = \int_0^{\infty} e^{u} (u^{1/4})^4 4u^3 du = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} t^{5/4-1} dt = 2\Gamma(5/4)$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{1}{2\Gamma(5/4)}}$$

2. Herramientas Matemáticas de la física cuántica

2.4 Considere un estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle$ que se da en términos de tres estados propios ortonormales $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$ de un operador $\hat{B}$ tal que $\hat{B}|\phi_n\rangle = n^2|\phi_n\rangle$. Encuentra el valor esperado de $\hat{B}$ para el estado $|\psi\rangle$

solución:

La expectativa o valor medio $\langle\hat{B}\rangle$ de un operador $\hat{B}$ con respecto a un estado $|\psi\rangle$ se define por

$$\langle\hat{B}\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{1}$$

calculamos

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{10}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{1}{5}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{1}{10}\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{10}}\langle\phi_3|\right) n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{2^2}{5}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{3^2}{10}\langle\phi_3|\phi_3\rangle \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} \\
&= \frac{11}{5}
\end{aligned}$$

sustituyendo en 1

$$\langle\hat{B}\rangle = \frac{11/5}{4/5} = \frac{11}{4}$$

2.5 *a*) Estudie la hermiticidad de estos operadores: $\hat{X}$, d/dx e id/dx. ¿Qué pasa con el complejo?, ¿Conjugado de estos operadores? Son los conjugados hermitianos de la posición y el momento. ¿Operadores iguales a sus complejos conjugados?

b) Utilice los resultados de (a) para discutir la hermiticidad de los operadores $e^{\hat{X}}$, $e^{d/dx}$ y $e^{id/dx}$.

c) Encuentre el conjugado hermitiano del operador $\hat{X}d/dx$.

d) Utilice los resultados de (a) para discutir la hermiticidad de los componentes del momento angular Operador (Capítulo 5): $\hat{L}_x = -i\hbar\left(\hat{Y}\partial_z - \hat{Z}\partial_y\right)$, $\hat{L}_y = -i\hbar\left(\hat{Z}\partial_x - \hat{X}\partial_z\right)$ y $\hat{L}_z = -i\hbar\left(\hat{X}\partial_y - \hat{Y}\partial_x\right)$

Solución:

a) sabemos

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\phi\rangle \tag{2}$$

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \qquad \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{X}\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)[x\psi(x)]dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[\psi^*(x)x]\psi(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[x\psi(x)]^*\psi(x)dx\\ &= \langle\psi\hat{X}|\psi\rangle\end{aligned}$$

En el caso de la derivada

$$\begin{aligned}\langle\psi|\frac{d}{dx}\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}dx\\ &= [\psi^*(x)\psi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)^*\psi(x)dx\\ &= -\langle\frac{d}{dx}\psi|\psi\rangle\end{aligned}$$

como se puede observar, la derivada no es hermitica, reescribiendo el resultado anterior

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx}$$

de esta expresión podemos ver

$$\left(i\frac{d}{dx}\right)^\dagger = i\frac{d}{dx} \tag{4}$$

el operador de momento $\hat{P} = i\hbar\dfrac{d}{dx}$ es hermitiano: por la relación 4 significa $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$
También podemos inferir que, aunque el operador del momento es hermitiano, su conjugado complejo no es igual a $\hat{P}$

$$\hat{P}^* = \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^* = i\hbar\frac{d}{dx} = -\hat{P}$$

Observemos

$$\hat{X}^\dagger = \hat{X}^* = \hat{X} \qquad \hat{P}^\dagger = P, \;\; \hat{P}^* = -\hat{P}$$

b) El adjunto de $F(\hat{A})$ está dado por

$$[F(\hat{A})]^\dagger = F^*(\hat{A}^\dagger)$$

Tenga en cuenta que si $\hat{A}$ es Hermitian, $F(\hat{A})$ no es necesariamente Hermitico; $F(\hat{A})$ será hermitiano solo si F es una función real y $\hat{A}$ es hermitiano. Un ejemplo es

$$(e^{\hat{A}})^\dagger = e^{\hat{A}^\dagger} \qquad (e^{i\hat{A}})^\dagger = e^{-i\hat{A}^\dagger} \qquad (e^{ia\hat{A}})^\dagger = e^{-ia^*\hat{A}^\dagger} \tag{5}$$

donde a es un numero complejo, con 5

$$(e^{\hat{X}})^\dagger = e^{\hat{X}^\dagger}$$
$$(e^{d/dx})^\dagger = e^{-d/dx}$$
$$(e^{id/dx})^\dagger = e^{id/dx}$$

c)

$$\left(\hat{X}\frac{d}{dx}\right)^\dagger = \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger \hat{X}^\dagger$$

por los incisos anteriores

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger \hat{X}^\dagger = -\frac{d}{dx}\hat{X}$$

donde $\dfrac{d}{dx}\hat{X}$ es

$$\frac{d}{dx}\left(\hat{X}\psi(x)\right) = \psi(x) + x\frac{d\psi(x)}{dx}$$
$$\left(\hat{X}\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$$

d) Sabemos que los operadores $i\partial_N$ y $\hat{N}$ donde $N = X, Y, Z$ son herméticos entonces

$$\hat{L}_x^\dagger = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial z}\hat{Y} - \frac{\partial}{\partial y}\hat{Z}\right) = i\hbar\left(\hat{Y}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{Z}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \bar{L}_x$$

$$\hat{L}_y^\dagger = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{Z} - \frac{\partial}{\partial z}\hat{X}\right) = i\hbar\left(\hat{Z}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{X}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \bar{L}_y$$

$$\hat{L}_z^\dagger = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial y}\hat{X} - \frac{\partial}{\partial x}\hat{Y}\right) = i\hbar\left(\hat{X}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{Y}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \bar{L}_z$$

2.6 *a*) Muestre que el operador $\hat{A} = i(\hat{X}^2 + 1)d/dx + i\hat{X}$ es Hermitico

b) Encentre el estado de $\psi(x)$ para cual $\hat{A}\psi(x) = 0$ y normalice

c) Calcular la probabilidad de encontrar una partícula, representada por $\psi(x)$ en la región $-1 \leq x \leq 1$

Solución:

a) El conjugado de $\hat{A}$ es

$$\begin{aligned}\hat{A}^\dagger &= -i(\hat{X}^2)^\dagger\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger - i\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger - i\hat{X}^\dagger \\ &= i\frac{d}{dx}\hat{X}^2 + i\frac{d}{dx} - i\hat{X} \\ &= i\hat{X}^2\frac{d}{dx} + i\left[\frac{d}{dx}, \hat{X}^2\right] + i\frac{d}{dx} - i\hat{X}\end{aligned}$$

por otra parte el conmutador es

$$\left[\frac{d}{dx}, \hat{x}^2\right] = \hat{X}\underbrace{\left[\frac{d}{dx}, \hat{X}\right]}_{=1} + \underbrace{\left[\frac{d}{dx}, \hat{X}\right]}_{=1}\hat{X} = 2\hat{X} \tag{6}$$

sustituyendo el conmutador 6

$$\begin{aligned}\hat{A}^\dagger &= i\hat{X}^2\frac{d}{dx}+2i\hat{X}+i\frac{d}{dx}-i\hat{X}\\ &= i\left(\hat{X}^2+1\right)\frac{d}{dx}+i\hat{X}\\ &= \hat{A}\end{aligned}$$

b) del inciso anterior tenemos

$$\hat{A}=i\left(\hat{X}^2+1\right)\frac{d}{dx}+i\hat{X}=0$$

$$\frac{d}{dx}=-\frac{i\hat{X}}{i\left(\hat{X}^2+1\right)}$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=-\frac{x}{(x^2+1)}\psi(x)$$

integrando. de ambos lados y asi normalizar

$$\int_{-\infty}^{\infty}A^2|\psi(x)|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)}=A^2\arctan x|_{-\infty}^{\infty}=A^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=A^2\pi=1$$

la constante de normalizacion es

$$A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

c) la probabilidad es

$$\int_{-1}^{1}|\psi(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)}=\frac{1}{\pi}\arctan x|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$$

2.7 Discutir las condiciones para que estos operadores sean unitarios. (a) $(1+i\hat{A})/(1-i\hat{A})$ (b) $(\hat{A}+i\hat{B})/\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}$

Solución

a) se dice que un operador lineal $\hat{U}$ es unitario si su inversa $\hat{U}^{-1}$ es igual a su adjunto $\hat{U}^\dagger$:

$$\hat{U}^\dagger=\hat{U}^{-1}\qquad \hat{U}\hat{U}^\dagger=\hat{U}^\dagger\hat{U}=\hat{I}$$

entonces

$$\left(\frac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}}\right)^\dagger=\frac{1-i\hat{A}^\dagger}{1+i\hat{A}^\dagger}$$

podemos observar que si es hermitico

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}}\right)^\dagger\frac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}} &= \frac{1-i\hat{A}}{1+i\hat{A}}\frac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}}\\ &= \frac{1-i\hat{A}+i\hat{A}-\hat{A}^2}{1-i\hat{A}+i\hat{A}-\hat{A}^2}=1=\hat{I}\end{aligned}$$

b) Similarmente sí $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son hermiticos y conmutan

$$\begin{aligned}\left(\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}}\right)^\dagger\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}} &= \frac{\hat{A}-i\hat{B}}{\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}}\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\sqrt{\hat{A}^2+\hat{B}^2}}\\ &= \frac{(\hat{A}-i\hat{B})(\hat{A}+i\hat{B})}{\hat{A}^2+\hat{B}^2}\\ &= \frac{\hat{A}^2-i\hat{B}\hat{A}+\hat{A}i\hat{B}+\hat{B}^2}{\hat{A}^2+\hat{B}^2}\\ &= \frac{\hat{A}^2+\hat{B}^2}{\hat{A}^2+\hat{B}^2}=1=I\end{aligned}$$

2.9 considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix}$

a) ¿Son A y B Hermiticos? Calcule AB y BA y verifique que $Tr(AB) = Tr(BA)$; luego calcule $[A, B]$ y verifique que $Tr([A, B]) = 0$.

b) Encuentre los valores propios y los vectores propios normalizados de A. Verifique que la suma de los valores propios de A es igual al valor de $Tr(A)$ calculado en (a) y que los tres vectores propios forman una base.

c) Verifique que $U^\dagger AU$ sea diagonal y que $U^{-1} = U^\dagger$, donde U es la matriz formada por los vectores propios normalizados de A.

d) Calcule el inverso de $A' = U^\dagger AU$ y verifique que A'^{-1} es una matriz diagonal cuyos valores propios son el inverso de los de A

Solución:

a) $\hat{A}^\dagger$ es el complejo conjugado de la matriz, transpuesta de A

$$\hat{A}^\dagger = (A^T)^*$$

La transpuesta es

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

y su conjugada

$$(A^T)^* = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

observemos que es Hermitica
Ahora la Matriz B, la transpuesta es

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & -5i \end{pmatrix}$$

su complejo conjugado es

$$(A^T)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & 5i \end{pmatrix}$$

Se puede ver que B no es hermitica

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 1 & 2i & -5 \\ -i & -2 & 5i \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3i & -3 \\ 0 & 2i & 2 \\ 7i & 5 & 5i \end{pmatrix}$$

el conmutador es

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 1 & 2i & -5 \\ -i & -2 & 5i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3i & -3 \\ 0 & 2i & 2 \\ 7i & 5 & 5i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3i & 24 \\ 1 & 0 & -7 \\ -8i & -7 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La permutación cíclica de matrices deja la traza sin cambios, se puede observar que la suma de las diagonales es $7+7i$ por lo tanto $Tr(AB)=Tr(BA)$ y del conmutador es $Tr([A,B])=0$

$b)$ para calcular los eigenvalores se hace $A-\lambda I$

$$|A-\lambda I| = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -i \\ 0 & i & -(1+\lambda) \end{vmatrix} (7-\lambda)\left[-(1-\lambda)(1+\lambda)-1\right.$$

$$|A-\lambda I| = (7-\lambda)(\lambda^2-2) = 0$$

los eigenvalores son

$$\lambda_1 = 7 \qquad \lambda_2 = \sqrt{2} \qquad \lambda_3 = -\sqrt{2}$$

para el primer eigenvalor $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 7x &= 7x \\ y - iz &= 7y \\ iy - z &= 7z \end{aligned}$$

Obtenemos
$x = 1$
$y = 0$
$z = 0$

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este eigenvector esta normalizado $\langle \lambda_1 | \lambda_1 \rangle = 1$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (7-\sqrt{2})x &= 0 \\ (1-\sqrt{2})y - iz &= 0 \\ iy - (1-\sqrt{2})z &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos
$x = 0$
$y = y \ z = i(\sqrt{2}-1)y$

$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ i(\sqrt{2}-1)y \end{pmatrix}$$

si normalizamos,

$$(0, y^*, i(\sqrt{2}-1)y^*) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ i(\sqrt{2}-1)y \end{pmatrix} = 2(2-\sqrt{2})|y|^2 = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}$$

sustituyendo y en $|\lambda_2\rangle$

$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ \dfrac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \end{pmatrix}$$

similarmente hacemos con λ_3

$$|\lambda_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ -\dfrac{i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}$$

Podemos decir que $|\lambda_1\rangle$, $|\lambda_2\rangle$ y $|\lambda_3\rangle$ son ortogonales, $\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$ donde $i, j = 1, 2, 3$ y satisfacen la relación de competes

$$\sum_{j=1}^{\infty}{}^{3}|\lambda_j\rangle\langle\lambda_j| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c)$ tenemos que U son los vectores propios calculados anteriormente

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}$$

sabemos que $\hat{A}^{\dagger} = (A^T)$ entonces

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{\dagger}UA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{-i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{-i(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{-i(2+\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

veamos que $\hat{A}^{\dagger}\hat{A} = 1$

$$
\begin{aligned}
\hat{A}^{\dagger}UA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{-i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \dfrac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\dfrac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & H_{23} \\ 0 & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{22} &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{2(2-\sqrt{2})} = 1 \\
H_{23} &= \frac{1-(\sqrt{2}+2-1-\sqrt{2})}{2\sqrt{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})}} = 0 \\
H_{32} &= \frac{1-(\sqrt{2}+2-1-\sqrt{2})}{2\sqrt{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})}} = 0 \\
H_{33} &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{2(2-\sqrt{2})} = 1
\end{aligned}
$$

d) tenemos que la matriz inversa se define

$$
A^{-1} = \frac{adj(A^T)}{|A|}
$$

en el insisto $U^{\dagger}UA = A'$ la transpuesta es igual

$$
A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

$$
det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{vmatrix} = 7(-1-(-i^2)) = -14
$$

entonces

$$
A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

2.10 Considera una partícula cuya matriz hamiltoniana es $H = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) es $|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 7i \\ -2 \end{pmatrix}$ un eigenestado de H?, ¿es hermitiano?

b) Encuentre los valores propios de energía, a_1, a_2 y a_3, y los vectores propios de energía normalizados, $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, y $|a_3\rangle$, de H.

c) Encuentre la matriz correspondiente al operador obtenido del producto de ket-bra del primer vector propio $P = |a_1\rangle\langle a_1|$. ¿Es P un operador de proyección?

d) Calcule el conmutador $[P, H]$ primero utilizando el álgebra del conmutador y luego utilizando productos de matriz.

Solución:

a)

$$H|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 7i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i-7 \\ 7i-1 \\ 7i \end{pmatrix}$$

Observemos que no cumple $H|\lambda\rangle = k|\lambda\rangle$
Veamos si es Hermitica La transpuesta es

$$H^T = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el conjugado de la transpuesta es

$$(H^T)^* = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $(H^T)^* = H$ por lo tanto es hermética

b) Calculando los eigienvalores

$$|H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & i & 0 \\ -i & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} (2-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-1] - i[(-i)(-\lambda)] = -(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda - (2-\lambda) + \lambda$$

$$-2\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda = 0$$

$$-(\lambda-1)(\lambda-1-\sqrt{3})(\lambda-1+\sqrt{3})$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = 1-\sqrt{3} \qquad \lambda = 1+\sqrt{3}$$

Calculando el primer eigenvector para λ_1

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones es

$$2x + iy = x \to x + iy = 0$$

$$-ix + y + z = y \to -ix + z = 0$$

$$y = z$$

entonces el eigienvector es

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

y el eigenvector normalizado es

$$|\lambda_1\rangle = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Calculando el segundo eigenvector para λ_2

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones es

$$2x + iy = \sqrt{2}x \to (2-\sqrt{2})x = i\sqrt{2}$$
$$-ix + y + z = \sqrt{2}y \to -ix + z = 0$$
$$y = \sqrt{2}z$$

$$|\lambda_2\rangle = \sqrt{6(2-\sqrt{3})}\begin{pmatrix} i(2-\sqrt{3}) \\ 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\lambda_3\rangle = \sqrt{6(2+\sqrt{3})}\begin{pmatrix} i(2+\sqrt{3}) \\ 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} P &= |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}(1, -i, -i) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

veamos ahora el cuadrado de P

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3i & -3i \\ 3i & 3 & 3 \\ 3i & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P \end{aligned}$$

d) calculando el conmutador

$$\begin{aligned} [P, H] &= PH - HP \\ &= |a_1\rangle\langle a_1|H - H|a_1\rangle\langle a_1| \\ &= |a_1\rangle\langle a_1| - |a_1\rangle\langle a_1| \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P, H] &= PH - HP \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Problemas en una dimensión

4.5 Una partícula se mueve en el potencial.

$$V = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\sinh^2 x - \frac{2}{5}\cosh x\right]$$

a) (a) Dibuje $V(x)$ y localice la posición de los dos mínimos.

(b) Demuestre que $\psi(x) = (1 + 4\cosh x)exp\left(-\frac{2}{15}\cosh x\right)$ es una solución del tiempo independiente de la Ecuación de Schrödinger para una partícula. Encuentre el nivel de energía correspondiente e indique su posición en el boceto de $V(x)$.

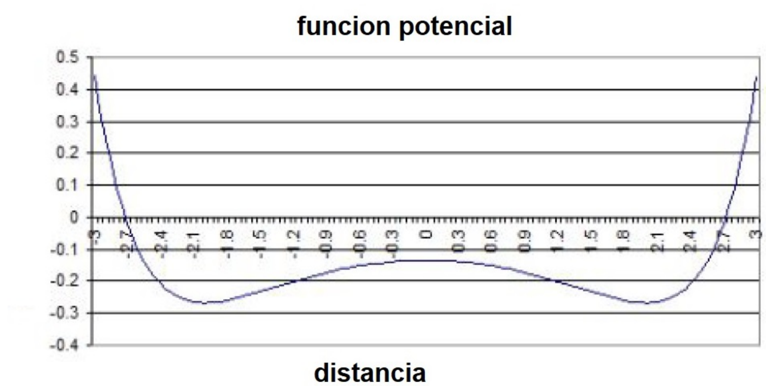
(c) Dibuje $\psi(x)$ y demuestre que tiene el comportamiento adecuado en los puntos de inflexión clásicos y en las regiones prohibidas clásicamente.

Solución:

(a) sabemos que para encontrar mínimos y máximos $\frac{d}{dx}V(x) = 0$

$$\frac{d}{dx}V(x) = \frac{2}{15}\left(\frac{2}{15}\cosh x - 1\right)\sinh x = 0$$

se observa que las soluciones son $\cosh x = \frac{15}{2}$ y $\sinh x = 0$, el $\operatorname{arc}\cos h(1/2) \approx \pm 1{,}9966315$ por lo que es el mínimo



(b) derivado $\psi(x) = (1 + 4\cosh x)e^{-(2\cosh x)/15}$

$$\frac{d\psi}{dx} = 4\sinh x e^{-(2\cosh x)/15} + \frac{15}{2}(1 + 4\sinh x)\sinh x e^{-(2\cosh x)/15}$$

la segunda derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi(x)}{dx} &= 4\cosh x e^{-(2\cosh x)/15} - \frac{8}{15}\sinh^2 x e^{-(2\cosh x)/15} - \frac{2}{15}\cosh^2 x e^{-(2\cosh x)/15} \\ &- \left(\frac{2}{15}\right)^2 \sinh^2 x e^{-(2\cosh x)/15} + 4\left(\frac{2}{15}\right)^2 \sinh^2 x \cosh x e^{-(2\cosh x)/15} - \frac{8}{15}\cosh^2 x e^{-(2\cosh x)/15}\end{aligned}$$

por otra parte tenemos la ecuación de schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E(x)\phi(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{2m}{\hbar^2}V(x)\psi(x) &= \frac{d^2\psi}{dx^2} \\ &= \left[\left(\frac{2}{15}\right)^2 \sinh^2 x + 4\left(\frac{2}{15}\right)^2 \sinh^2 x\cosh x - \frac{2}{15}\cosh x - \frac{8}{15}\cosh^2 x\right]e^{-(2\cosh x)/15}\end{aligned}$$

Veamos si es solución

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}=-\left[4\cosh x+\frac{16}{15}\sinh^2 x\right]e^{(2\cosh x)/15}$$

sabemos que $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$$\begin{aligned}
-4\cosh x-\frac{16}{15}\sinh x &= \frac{16}{15}\left[\frac{16}{15}-\frac{16}{15}\cosh^2 x-4\cosh x\right]e^{(2\cosh x)/5}\\
&= \frac{16}{15}\left[\frac{4}{15}\cosh x-\frac{16}{15}\right](1-4\cosh x)e^{(2\cosh x)/5}\\
&= \frac{16}{15}\left[\frac{1}{4}\cosh x+1\right](1-4\cosh x)e^{(2\cosh x)/5}\\
&= \frac{16}{15}\left[\frac{1}{4}\cosh x+1\right]\psi(x)
\end{aligned}$$

entonces

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}=\frac{16}{15}\left[\frac{1}{4}\cosh x+1\right]\psi(x)$$

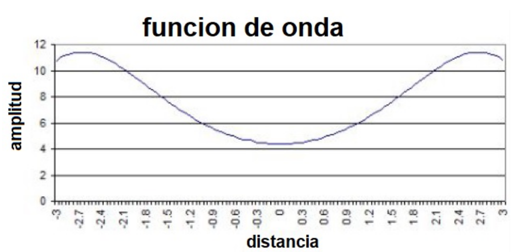
se puede ver que

$$E(x)=\frac{16}{15}\frac{2m}{\hbar^2}\left[\frac{1}{4}\cosh x+1\right]\psi(x)$$

considerando la región para $x=0$, ajustando $\varepsilon=\dfrac{2m}{\hbar^2}E$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(2) &= \left(\frac{16}{15}\right)^2\left(\frac{1}{4}+1\right)\\
&= \left(\frac{16}{15}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)\\
&= 0{,}85
\end{aligned}$$

(c) la función de onda se representa



se puede ver que cuando la energía potencial está en un máximo local, la amplitud de la función de onda es mínima: esto corresponde a la región prohibida clásicamente.
La amplitud es máxima en los mínimos locales de la energía potencial. como se esperaba. también se observa que la función de onda se desvanece en el límite como $x=\pm\infty$ Físicamente, esto se deduce del hecho de que $\lim_{x\to\pm\infty}V(x)\to\infty$

4.10 Calcule $\langle n|\hat{X}^2|m\rangle$ y $\langle m|\hat{X}^4|n\rangle$ en la n-representación $|n\rangle$ y $|m\rangle$ son los estados del oscilador armónico
Solución:
tenemos

$$\langle m|\hat{X}|m\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{m,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right.$$

donde $|n\rangle$ y $|m\rangle$ son los eigeinestados de la energía. el valor del operador posición es

$$\hat{X}=\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$$

donde $\hat{a}^\dagger$ es el operador de creación y $\hat{a}$ el de aniquilación, el valor de $\hat{X}^2$ lo calculamos de la siguiente manera

$$\hat{H}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)$$

esto es para $\hat{X}^2$ entonces sustituimos $\hat{H}^2$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle = \langle n\left|\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)\right|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n\left|(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)\right|m\rangle$$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle + 2\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle + \langle n|1|m\rangle\right)$$

Usando el operador de creación $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ y el de aniquilación $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} + (2m+1)\delta_{n,m}\right)$$

veamos, sí $n = m-2$, $\delta_{n,m-2} = 1$ y $\delta_{n,m+2} = \delta_{n,m} = 0$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{m(m-1)}\hbar}{2m\omega}$$

cuando $n = m+2$, entonces $\delta_{n,m+2} = 1$ y $\delta_{n,m-2} = \delta_{n,m} = 0$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{(m+1)(m+2)}\hbar}{2m\omega}$$

cuando $n = m$, entonces $\delta_{n,m} = 1$ y $\delta_{n,m-2} = \delta_{n,m+2} = 0$

$$\langle n|\hat{H}^2|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{(2m+1)}\hbar}{2m\omega}$$

Ahora sustituimos $\hat{H}^4$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}^4|m\rangle &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4 \langle m|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4|n\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle m|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|n\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle m|(\hat{a}^4 + \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 4} + 2\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}^3 + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^{\dagger 2} + 4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\ddagger\hat{a} \\
&+ 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 + \hat{a}^{\ddagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle
\end{aligned}$$

Usando el operador de creación $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ y el de aniquilación $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}^4|m\rangle &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4 (\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\delta_{m,n-4} + (n+1)(n+2)\delta_{m,n} + n\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} \\
&+ n(n-1)\delta_{n,m} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\delta_{m,n+4} + n\sqrt{(n+1)(n+2))}\delta_{m,n+2} \\
&+ \sqrt{(n+1)(n+2))}\delta_{m,n+2} + 2(n-2)\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + 2(n+2)\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n,m+2} \\
&+ 4n^2\delta_{m,n} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + (2n+1)\delta_{m,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}^4|m\rangle &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4 (\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\delta_{m,n-4} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\delta_{m,n+4} \\
&+ [n\sqrt{n(n-1)} + \sqrt{n(n-1)} + 2(n-2)\sqrt{n(n-1)} + \sqrt{n(n-1)}]\delta_{m,n-2} \\
&+ [n(n-1) + 4n^2 + 4n + 1 + (n+1)(n+2)]\delta_{n,m} \\
&+ [n\sqrt{(n+1)(n+2))} + \sqrt{(n+1)(n+2))} + 2(n+2)\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}]\delta_{m,n+2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}^4|m\rangle &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4 (\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\delta_{m,n-4} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\delta_{m,n+4} \\
&+ [(n+1+2n-4+1)\sqrt{n(n-1)}]\delta_{m,n-2} + [n^2-n+4n^2+4n+1+n^2+3n+2]\delta_{n,m} \\
&+ [n+1+2n+4+1]\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}^4|m\rangle &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4 (\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\delta_{m,n-4} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\delta_{m,n+4} \\
&+ [(3n-2)\sqrt{n(n-1)}]\delta_{m,n-2} + (6n^2+5n+3)\delta_{n,m} + [3n+6]\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}
\end{aligned}
$$

cuando $m = n-4$

$$\langle n|\hat{H}^4|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

cuando $m = n-2$

$$\langle n|\hat{H}^4|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{n(n-1)}(3n-2)\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

cuando $m = n$

$$\langle n|\hat{H}^4|m\rangle \qquad \frac{(6n^2+5n+3)\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

cuando $m = n+2$

$$\langle n|\hat{H}^4|m\rangle \qquad \frac{(3n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)}\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

cuando $m = n+4$

$$\langle n|\hat{H}^4|m\rangle \qquad \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

4.11 Considera el Hamiltoniano adimensional.$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}\hat{X}^2$ con $\hat{P} = -id/dx$

a) Muestre que la función de onda $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{\sqrt{\pi}}$ y $\psi_1(x) = \sqrt{2/\sqrt{\pi}}xe^{-x^2/2}$ son eigienfunciones de $\hat{H}$ con eigeinvalores de $1/2$ y $3/2$ respectivamente

b) Encuentre los valores de los coeficientes α y β tal que

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(\alpha x^2 - 1\right)e^{-x^2/2} \qquad \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{\pi}}}\left(1 + \beta x^2\right)e^{-x^2/2}$$

son ortogonales para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$ respectivamente, mostrar que $\psi_2(x)$ y $\psi_3(x)$ son eigeinfuncioones de $\hat{H}$ con eigeinvalores $5/2$ y $7/2$ respectivamente

Solución

a) dado a $\hat{H}\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0$ podemos ver que

$$\hat{P}\psi_0(x) = i\pi^{1/4}xe^{-x^2/2}$$

$$\hat{P}^2(x) = \pi^{1/4}e^{-x^2/2}(1-x^2)$$

además $\hat{X}\psi_0 = x^2\psi_0$

$$\hat{H}\psi_0 = \frac{1}{2}[(1-x^2)+x^2]\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0$$

Ahora $\hat{H}\psi_1(x) = \dfrac{3}{2}\psi_1(x)$

$$\begin{aligned}\hat{P}\psi_1(x) &= -i\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-x^2/2} \\ &= -i\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\left[e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}\right]\end{aligned}$$

también, derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{P}^2 &= -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\left[xe^{-x^2/2} + 2xe^{-x^2/2} + x^3e^{-x^2/2}\right] \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 xe^{-x^2/2}(3-x^2)\end{aligned}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[(3-x^2)+x^2]\psi_1 = \frac{3}{2}\psi_1$$

b) sabemos que si $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$, entonces ψ_i y ψ_i son ortogonales

$$\langle\psi_2|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha x - 1)e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x^2e^{-x^2/2}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx$$

sabemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{7}$$

por lo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\langle\psi_2|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

se puede ver que $\alpha = 2$ para que $\langle\psi_2|\psi_0\rangle = 0$(sean ortogonales)
Para calcular el valor de β hacemos

$$\langle\psi_3|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx + \frac{\beta}{\sqrt{3\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\beta\right] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)$$

se puede ver que $\beta = -2/3$ para que $\langle\psi_3|\psi_1\rangle = 0$(sean ortogonales)

Ahora mostraremos que $\hat{H}\psi_2 = \dfrac{5}{2}\psi_2$ y $\hat{H}\psi_3 = \dfrac{7}{2}\psi_3$

$$\begin{aligned}\hat{P}\psi_2 &= -i\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(4xe^{-x^2/2} - x(2x^2-1)e^{-x^2/2}\right) \\ &= -i\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(5xe^{-x^2/2} - 2x^3e^{-x^2/2}\right)\end{aligned}$$

y

$$\hat{P}^2\psi_2 = -i\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(5e^{-x^2/2} - 5x^2e^{-x^2/2} - 6x^2e^{-x^2/2} + 2x^4e^{-x^2/2}\right)$$

Como $\hat{X}^2\psi = x^2\psi$

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(5e^{-x^2/2} - 5x^2e^{-x^2/2} - 6x^2e^{-x^2/2} + 2x^4e^{-x^2/2} - (2x^4 - x^2)e^{-x^2/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 5e^{-x^2/2}(1 - 2x^2) \\
&= \frac{5}{2}\psi_2
\end{aligned}$$

para ψ_3

$$\hat{P}\psi_3 = i\left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(1 - 3x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)e^{-x^2/2}$$

-

$$\hat{P}^2\psi_3 = \left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(7x - \frac{17}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^5\right)e^{-x^2/2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(7x - \frac{17}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^5\right)e^{-x^2/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(x^3 - \frac{2}{3}x^5\right)e^{-x^2/2} \\
&= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{6\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} x\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)e^{-x^2/2} \\
&= \frac{7}{2}\psi_3
\end{aligned}$$

4.12 Considere el Hamiltoniano sin dimensiones $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}\hat{X}^2$ (con $\hat{P} = -id/dx$) cuya función de onda en el tiempo $t = 0$ está dada por

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{8}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{10}}\psi_2(x)$$

donde $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}$, $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-x^2/2}$ y $\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}}(2x^2 - 1)e^{-x^2/2}$

(a) Calcule $\Delta x_n \Delta p_n$ para $n = 0, 1$ donde $\Delta x_n = \sqrt{\langle\psi_n|\hat{X}^2|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|\hat{X}|\psi_n\rangle^2}$

(b) Calcule $\hat{a}^\dagger\psi_0(x)$, $\hat{a}\psi_0(x)$, $\hat{a}^\dagger\psi_1(x)$, $\hat{a}\psi_1(x)$ y $\hat{a}\psi_2(x)$ donde los operadores $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ son definidos por $\hat{a} = (\hat{X} + d/dx)/\sqrt{2}$ y $\hat{a}^\dagger = (\hat{X} - d/dx)/\sqrt{2}$

Solución:

(a) cuando $n = 0$

$$\langle\psi_0|\hat{X}^2|\psi_0\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\langle\psi_0|\hat{X}|\psi_0\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}dx = 0$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{P}\psi_0(x) = i\pi^{-1/4}xe^{-x^2/2}$$

$$\hat{P}^2 = \pi^{1/4}e^{-x^2/2}(1 - x^2)$$

de donde

$$\langle\psi_0|\hat{P}|\psi_0\rangle = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0|\hat{P}^2|\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

tenemos que $\Delta p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta x_0 \Delta p_0 = \frac{1}{2}$$

Para $n = 1$

$$\hat{P}\psi_1 = -i\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}\right)$$

$$\hat{P}^2\psi_1 = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(xe^{-x^2/2} - 2xe^{-x^2/2} + x^3e^{-x^2/2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} xe^{-x^2/2}\left(3 + x^3\right)$$

por lo cual

$$\langle\psi_1|\hat{P}|\psi_1\rangle = i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2} - i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^3e^{-x^2/2} = 0$$

por la expresión 7 tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1|\hat{P}^2|\psi_1\rangle &= \frac{2*3}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
&= 3 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

entonces $\Delta x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ en particular

$$\Delta x_1 \Delta p_1 = \frac{3}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}\psi_0 - \frac{d}{dx}\psi_0\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} xe^{-x^2/2} \\
&= \psi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}\psi_0 - \frac{d}{dx}\psi_0\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(xe^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}\psi_1 - \frac{d}{dx}\psi_1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(x^2 e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-x^2/2} \\
&= \psi_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}\psi_1 - \frac{d}{dx}\psi_1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2x^2 e^{-x^2/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \left[(2x^2-1)e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2x^2-1)e^{-x^2/2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-x^2/2} \\
&= \sqrt{2}\psi_2 + \psi_0
\end{aligned}
$$

4.17 Considere una partícula de masa m que se mueve en un potencial de oscilador armónico unidimensional, con $\hat{X} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ y $\hat{P} = \sqrt{\hbar m\omega/2}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$.

(a) Calcule el producto de las incertidumbres en posición y momento para la partícula en el quinto estado excitado, es decir, $(\Delta X \delta P)$.

(b) Compare el resultado de (a) con el producto de incertidumbre cuando la partícula está en su estado de energía más baja. Explica por qué los dos productos de incertidumbre son diferentes.

Solución:
Calculando el valor de expectación de $\hat{X}^2$

$$\langle X^2\rangle_n = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(2n\langle n|n\rangle + \langle n|n\rangle\right) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

la incertidumbre en la posición $\hat{X}$ es

$$\delta x = \sqrt{\langle \hat{X}^2\rangle_n - \langle \hat{X}\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

similarmente

$$\hat{P}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{a}\hat{a}^\dagger - I\right)$$

Calculando el valor de expectación de $\hat{P}^2$

$$\hat{P}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(2n\langle n|n\rangle + \langle n|n\rangle\right) = -\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)$$

La incertidumbre en el momento es

$$\delta p = \sqrt{\langle \hat{P}^2\rangle_n - \langle \hat{P}\rangle^2} = \sqrt{\hbar m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

por lo tanto

$$\Delta x_n \Delta p_n = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

para $n=5$

$$\Delta x_5 \Delta p_5 = \hbar\left(5+\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}\hbar$$

(b) Observamos

$$\Delta x_0 \Delta p_0 = \frac{\hbar}{2} \qquad {}_5\Delta p_5 = \frac{11}{5}\hbar$$

podemos decir que $\Delta x_5 \Delta p_5 > \Delta x_0 \Delta p_0$

4. Problemas en tres dimensiones

6.2 Una partícula de masa m se mueve en el plano xy en el potencial.

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega y & \text{Para toda } y \text{ y } 0 < x < a \\ +\infty & \text{En otra parte} \end{cases}$$

(a) Escriba la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para esta partícula y redúzcala a un conjunto de ecuaciones unidimensionales familiares.

(b) Encuentre las funciones propias normalizadas y las eigenenergía

Solución

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V(r,t)\psi(r,t)$$

proponemos $\psi(r,t) = R(r)T(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R(r) + V(r)R(r)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = ET(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R(r) + V(r)R(r) = ER(r)$$

La ecuación independiente del tiempo $R(x,y)$ y donde el potencial es $\hat{V}(\hat{X},\hat{Y}) = \frac{1}{2}m\omega^2 Y$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)R(x,y) + \frac{1}{2}m\omega^2 yR(x,y) = ER(x,y)$$

nuevamente por separación de variables, donde $R(x,y) = X(x)Y(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 y = E$$

obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = k_x^2 \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) + \frac{1}{2}m\omega^2 y = k_y^2$$

para la parte en x, la solución es

$$X(x) = A\cos k_x' x + B\,\mathrm{sen}\, k_x' x$$

de las condiciones de frontera $X(0) = X(a) = 0$

$$X(x=0) = A{=}\,1\cos k'_x x + B{=}\,0\text{sen}\, k'_x x = 0$$

de aqui $A = 0$

$$X(a) = Bsenk'_x a = 0$$

vemos que $k'_x a = n\pi$ normalizando

$$\begin{aligned} |B|^2 \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx &= 1 \\ &= |B|^2 \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]dx \\ 1 &= \frac{|B|^2 a}{2} \\ B &= \sqrt{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

la parte de la ecuación y

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dy}Y(y)\left(\frac{2}{\hbar\omega}k_y^2 - \frac{m\omega}{\hbar}y^2\right)Y(y) = 0$$

reescribiendo la ecuación

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2m}{2\hbar^2}kx^2\psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \frac{mk}{\hbar^2}y^2Y(y) = -\frac{2mE}{\hbar^2}Y(y)$$

hacemos $Y(y) \to Y(ay)$

$$\frac{d^2\psi(ay)}{d(ay)^2} + \frac{mk}{\hbar^2}(ay)^2\psi(ay) = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(ay)$$

haciendo el cambio de variable $\xi = ay$ tenemos

$$\frac{dY(y)}{dy} = \frac{d\xi}{dy}\frac{dY(y)}{d\xi} = a\frac{dY(y)}{dy}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{dY(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(a\frac{dY(y)}{d\xi}\right) = \left(y\frac{d}{d\xi}\right)a\frac{dY(y)}{d\xi} = a^2\frac{dY^2(y)}{d\xi^2}$$

$$\left(\left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}\right)^2\frac{d^2Y(\xi)}{d\xi^2} - \frac{mk}{\hbar^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2}\right)Y(\xi) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(\xi)$$

$$a^2\frac{d^2Y(\xi)}{d\xi^2} - a^4\left(\frac{\xi^2}{a^2}\right)Y(\xi) = -\frac{2mE}{\hbar^2}Y(\xi)$$

$$\frac{d^2Y(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2Y(\xi) = -\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}Y(\xi)$$

$$\frac{d^2Y(\xi)}{d\xi^2} + \left(\lambda^2 - \xi^2\right)Y(\xi) = 0$$

La solución de esta ecuación son los polinomios de Hermite

$$Y_j(\xi) = H_j(\xi)e^{\frac{1}{2}\xi^2} \qquad j = 1, 2, 3\ldots$$

6.3 Una partícula de masa m se mueve en el plano xy en un pozo rectangular de dos dimensiones

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \qquad 0 < y < b \\ +\infty & \text{En otra parte} \end{cases}$$

Al reducir la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo a un conjunto de ecuaciones unidimensionales más familiares, encuentre las funciones de onda normalizadas y los niveles de energía de esta partícula.

Solución

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t)$$

proponemos $\psi(r,t) = R(r)T(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R(r) + V(r)R(r)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = ET(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R(r) = ER(r)$$

La ecuación independiente del tiempo $R(x,y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)R(x,y) = ER(x,y)$$

nuevamente por separación de variables, donde $R(x,y) = X(x)Y(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)\right) = E$$

obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = k_x^2 \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) = k_y^2$$

donde $k = k_x + k_y$

$$k = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

para la parte en x, la solución es

$$X(x) = A\cos k'_x x + B\,\text{sen}\,k'_x x$$

de las condiciones de frontera $X(0) = X(a) = 0$

$$X(x=0) = A{=}\,1\cos k'_x x + B{=}\,0\text{sen}\,k'_x x = 0$$

de aqui $A = 0$

$$X(a) = Bsenk'_x a = 0$$

vemos que $k'_x a = n\pi$ normalizando

$$
\begin{aligned}
|B|^2 \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx &= 1 \\
&= |B|^2 \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] dx \\
1 &= \frac{|B|^2 a}{2} \\
B &= \sqrt{\frac{2}{a}}
\end{aligned}
$$

$$
X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)
$$

la parte de la ecuación y

para la parte en x, la solución es

$$
Y(y) = C \cos k'_y y + D \operatorname{sen} k'_y y
$$

de las condiciones de frontera $X(0) = X(b) = 0$

$$
Y(y=0) = C{=}\ 1\cos k'_y y + D{=}\ 0\operatorname{sen} k'_y y = 0
$$

de aqui $D = 0$

$$
Y(b) = Dsenk'_y b = 0
$$

vemos que $k'_y b = n\pi$ normalizando

$$
\begin{aligned}
|D|^2 \int_0^b \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy &= 1 \\
&= |D|^2 \int_0^b \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right] dy \\
1 &= \frac{|D|^2 b}{2} \\
D &= \sqrt{\frac{2}{b}}
\end{aligned}
$$

$$
Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}
$$

La solución es

$$
R(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)
$$

$$
k^2 = k_x^2 + k_y = \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right)\pi^2
$$

entonces

$$
E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right)
$$

6.6 Una partícula de masa m se mueve en el potencial tridimensional.

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 & \text{para } 0 < x < a \quad 0 < y < a \quad z > 0 \\ +\infty & \text{En otra parte} \end{cases}$$

(a) Escriba la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para esta partícula y redúzcala a un conjunto de ecuaciones unidimensionales familiares; luego encuentra la función de onda normalizada $\psi_{n_y,n_y,n_z}(x,y,z)$

(b) Encuentra las eigenenergías permitidas de esta partícula y muestra que se pueden escribir como: $E_{n_y,n_y,n_z} = E_{n_y,n_y} + E_{n_z}$

(c) Encuentre los cuatro niveles de energía más bajos en el plano xy (es decir, $E_{n_x n_y}$) y sus correspondientes

Solución

(a)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

sustituyendo el potencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z) + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 = E\psi(x,y,z)$$

proponemos una solución $\psi(x,y,z) = X(x)Y(z)Z(z)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 = E$$

las ecuaciones para x y y

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = k_x^2 \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) = k_y^2$$

donde $k = k_x + k_y$

$$k = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

para la parte en x, la solución es

$$X(x) = A\cos k'_x x + B\,\mathrm{sen}\,k'_x x$$

de las condiciones de frontera $X(0) = X(a) = 0$

$$X(x=0) = A{=}\,1\cos k'_x x + B{=}\,0\mathrm{sen}\,k'_x x = 0$$

de aqui $A = 0$

$$X(a) = Bsenk'_x a = 0$$

vemos que $k'_x a = n\pi$ normalizando

$$\begin{aligned} |B|^2\int_0^a \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx &= 1 \\ &= |B|^2\int_0^a\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]dx \\ 1 &= \frac{|B|^2 a}{2} \\ B &= \sqrt{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

la parte de la ecuación y
para la parte en x, la solución es

$$Y(y) = C\cos k'_y y + D\,\mathrm{sen}\,k'_y y$$

de las condiciones de frontera $X(0) = X(a) = 0$

$$Y(y=0) = C{=}\ 1\cos k'_y y + D{=}\ 0\mathrm{sen}\,k'_y y = 0$$

de aqui $D = 0$

$$Y(b) = Dsenk'_y a = 0$$

vemos que $k'_y a = n\pi$ normalizando

$$\begin{aligned}
|D|^2 \int_0^a \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy &= 1 \\
&= |D|^2 \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right] dy \\
1 &= \frac{|D|^2 b}{2} \\
D &= \sqrt{\frac{2}{a}}
\end{aligned}$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

La ecuación dependiente a z es

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) + \frac{1}{2}m\omega^2 z = k_z^2$$

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dz}Z(z)\left(\frac{2}{\hbar\omega}k_z^2 - \frac{m\omega}{\hbar}z^2\right)Z(z) = 0$$

reescribiendo la ecuación

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \frac{2m}{2\hbar^2}kz^2 Z(z) = -\frac{2mE}{\hbar^2}Z(z)$$

$$\frac{d^2 Z(y)}{dz^2} - \frac{mk}{\hbar^2}Z^2 Z(z) = -\frac{2mE}{\hbar^2}Z(z)$$

hacemos $Z(z) \to Z(az)$

$$\frac{d^2\psi(az)}{d(az)^2} + \frac{mk}{\hbar^2}(az)^2\psi(az) = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(az)$$

haciendo el cambio de variable $\xi = az$ tenemos

$$\frac{dZ(z)}{dz} = \frac{d\xi}{dz}\frac{dZ(z)}{d\xi} = a\frac{dZ(z)}{dz}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{dZ(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(a\frac{dZ(Z)}{d\xi}\right) = \left(Z\frac{d}{d\xi}\right)a\frac{dZ(z)}{d\xi} = a^2\frac{dZ^2(z)}{d\xi^2}$$

$$\left(\left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}\right)^2 \frac{d^2 Z(\xi)}{d\xi^2} - \frac{mk}{\hbar^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2}\right)Z(\xi) = -\frac{2mE}{\hbar^2}Z(\xi)$$

$$a^2\frac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2}-a^4\left(\frac{\xi^2}{a^2}\right)Z(\xi)=-\frac{2mE}{\hbar^2}Z(\xi)$$

$$\frac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2}-\xi^2Z(\xi)=-\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}Z(\xi)$$

$$\frac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2}+\left(\lambda^2-\xi^2\right)Z(\xi)=0$$

La solución de esta ecuación son los polinomios de Hermite

$$Z_{n_z}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2l^2n_z!z_0}}e^{-\frac{z^2}{2\pi\hbar/(m\omega)}}H_{n_z}\left(\frac{z}{\sqrt{\pi\hbar/(m\omega)}}\right)\qquad n_z=1,2,3\ldots$$

La solución es

$$\psi(x,y)=\frac{2}{a}\,\text{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n_y\pi}{a}y\right)\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2l^2n_z!z_0}}e^{-\frac{z^2}{2\pi\hbar/(m\omega)}}H_{n_z}\left(\frac{z}{\sqrt{\pi\hbar/(m\omega)}}\right)$$

(b) la energía es $E=E_x+E_y+E_z$ y también $k=\dfrac{2mE}{\hbar}$

$$E=\frac{\hbar^2\pi}{2ma^2}(n_x^2+n_y^2)+\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

(c) la energía en xy para en nivel de energía $n_x=1$ y $n_y=1$ es

$$E_{1,1}\frac{\hbar^2\pi}{ma^2}$$

con degeneración 1

la energía en xy para en nivel de energía $n_x=1$ y $n_y=2$ o $n_x=2$ y $n_y=1$ es

$$E_{1,2}=E_{2,1}=\frac{5\hbar^2\pi}{2ma^2}$$

con degeneración 2

la energía en xy para en nivel de energía $n_x=2$ y $n_y=2$ es

$$E_{1,1}\frac{4\hbar^2\pi}{ma^2}$$

con degeneración 1

la energía en xy para en nivel de energía $n_x=1$ y $n_y=3$ o $n_x=3$ y $n_y=1$ es

$$E_{1,2}=E_{2,1}=\frac{5\hbar^2\pi}{ma^2}$$

con degeneración 2

5. Momento Angular

article [latin1]inputenc [spanish]babel

5.10 Considera el operador $\hat{A} = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x\right)$

(a) Calcule el valor de expectación de $\hat{A}$ y $\hat{A}^2$ con respecto al estado $|j, m\rangle$

(b) Use el resultado de (a) para encontrar una expresión para $\hat{A}^2$ en términos de $\hat{J}^4$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z^2$, $\hat{J}_+^4$, $\hat{J}_-^4$

Solución
Sabemos que

$$\hat{J}_x\hat{J}_y = \frac{1}{4i}\left(\hat{J}_+^2 - \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ - \hat{J}_-^2\right) \qquad \hat{J}_y\hat{J}_x = \frac{1}{4i}\left(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+ - \hat{J}_-^2\right)$$

de aqui obtenemos que $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] =$

$$\hat{J}_x\hat{J}_y = \frac{1}{4i}\left(\hat{J}_+^2 - 2\hbar\hat{J}_z - \hat{J}_-^2\right) \qquad \hat{J}_y\hat{J}_x = \frac{1}{4i}\left(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_+ 2\hbar\hat{J}_z - \hat{J}_-^2\right)$$

Ahora realizamos

$$\langle j, m|\hat{J}_x\hat{J}_y|j, m\rangle = \frac{1}{4\pi}\langle j, m|\hat{J}_+^2 - 2\hbar\hat{J}_z - \hat{J}_-^2|j, m\rangle$$

sabemos que de los operadores de creación y aniquilación

$$\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle$$

$$\hat{J}_+^2|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\sqrt{j(j+1) - (m+1)}|j, m+1\rangle$$

$$\hat{J}_-^2|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\sqrt{j(j+1) - (m-1)}|j, m-1\rangle$$

$$\hat{J}_z = \hbar m|j, m\rangle$$

Por lo tanto notamos que $\langle j', m'|j, m\rangle = \delta_{j',j}\delta_{m',m}$ sustituyendo, obtenemos que $\langle\hat{A}\rangle = 0$ para calcular $\hat{A}^2 = \langle j, m|\hat{A}^2|j, m\rangle$ usamos la relación de competes

$$I = \sum_{j,m}|j, m\rangle\langle j, m|$$

$$\begin{aligned}
\langle j, m|\hat{A}^2|j, m\rangle &= \sum_{j',m'}\langle j, m|\hat{A}^2|j'm'\rangle\langle j', m'|\hat{A}^2|j, m\rangle \\
&= \sum_{j',m'}\langle j, m|\hat{A}^2|j'm'\rangle\langle j, m|\hat{A}^2|j', m'\rangle \\
&= \sum_{j',m'}\left|\langle j, m|\hat{A}^2|j'm'\rangle\right|^2 \\
\sum_{j',m'}\left|\langle j, m|\hat{A}^2|j'm'\rangle\right|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{j',m'}\left|\langle j, m|\hat{J}_+^2 - \hat{J}_-^2|j', m'\rangle\right| \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j',m'}\left|\langle j, m|\hat{J}_+^2|j', m'\rangle - \langle j, m|\hat{J}_+^2 - \hat{J}_-^2|j', m'\rangle\right|
\end{aligned}$$

se observa que $\hat{J}_+^2|j, m\rangle \propto |j, m+2\rangle$ y $\hat{J}_-^2|j, m\rangle \propto |j, m-2\rangle$ entonces

$$\sum_{j',m'}\left|\langle j, m|\hat{A}|j, m\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\langle j, m|\hat{J}_+^2|j, m-2\rangle\right| + \frac{1}{4}\left|\langle j, m|\hat{J}_-^2|j, m+2\rangle\right|$$

5.11 Considere la función de onda

$$\psi(\theta,\varphi) = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{i\varphi} - 2(1-\cos^2\theta)e^{2i\varphi}$$

(a) Escribe $\psi(\theta,\varphi)$ en terminos de los armonicos esfericos

(b) Escriba la función encontrada en el inciso (a) en términos de coordenadas cartesianas

(c) Es $\psi(\theta,\varphi)$ un eigenestado de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$

(d) Encuentre la probabilidad de medir $2\hbar$ para la componente z del momento angular orbital.

Solución:

(a) aplicando la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2 = 1$ en $\psi(\theta,\varphi)$

$$\psi(\theta,\varphi) = -3\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{i\varphi} - 2\operatorname{sen}^2\theta e^{2i\varphi}$$

Sabemos que

$$Y_2^{\pm} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}e^{\pm i\varphi}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}e^{\pm 2i\varphi}}\operatorname{sen}^2\theta$$

sustituyendo lo anterior

$$\psi(\theta,\varphi) = 3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_2^1 - 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_2^2$$

(b) para transformar a coordenadas cartesianas usamos

$$Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{(x\pm iy)z}{r^2} \qquad Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2}$$

sustituyendo en

$$\psi(\theta,\varphi) = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{i\varphi} - 2\operatorname{sen}^2\theta e^{2i\varphi}$$

tenemos

$$\psi(\theta,\varphi) = -3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{(x\pm iy)z}{r^2} - 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2}$$

(c) representemos Y_2^1 y Y_2^2 en coordenadas esféricas

$$Y_2^1 = \langle\theta,\varphi|2,1\rangle \qquad Y_2^2 = \langle\theta,\varphi|2,2\rangle$$

Sustituyendo en la definición $\hat{L}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$

$$\hat{L}^2|2,m\rangle = \hbar^2 2(2+1)|2,m\rangle = 6\hbar^2|2,m\rangle$$

tambíen usamos la definición $L_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$

$$L_z|2,m\rangle = \hbar m|2,m\rangle$$

Donde $m = 1$ y $m = 2$, Y_2^1, Y_2^2 en general para toda m las eigeinfunciones de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ son simultaneas

(d) La probabilidad de la medición $\langle\hat{L}_z\rangle = 2\hbar$, también sabemos es obtenida de la normalización de la función de onda

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= 1 \\
&= A^2\int\left[-3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(Y_2^1)^* - 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}(Y_2^2)^*\right]\left[-3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_2^1 - 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_2^2\right]\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \\
&= A^2\left[\frac{72\pi}{15}\int|Y_2^1|^2 d\operatorname{sen}\theta\theta d\phi + \frac{128\pi}{15}\int|Y_2^2|^2\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi\right. \\
1 &= A^2\frac{200}{15} \\
A &= \sqrt{\frac{3}{40\pi}}
\end{aligned}$$

Sustituimos A para calcular la probabilidad

$$\begin{aligned}
P(Y_2^2) &= |\langle 2,2|\psi\rangle|^2 \\
&= \frac{3}{40\pi}\left|-3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\langle 2,2|2,1\rangle - 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\langle 2,2|2,2\rangle\right] \\
&= \left(\frac{3}{40\pi}\right)(4)\left(\frac{32\pi}{15}\right) \\
&= \frac{16}{25}
\end{aligned}$$

5.13 Encuentre la expresión para los armónicos esféricos $Y_{30}(\theta,\varphi)$, $Y_{3,\pm1}(\theta,\varphi)$

$$Y_{30}(\theta,\varphi) = \sqrt{7/16\pi}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \qquad Y_{3,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{21/64\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\varphi}$$

en términos de las coordenadas cartesianas x, y, z
Solución:
Tenemos las siguientes expresiones de los armónicos esféricos

$$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \qquad Y_3^{\pm1} = \sqrt{\frac{21}{64}}\,\mathrm{sen}\,\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\varphi}$$

las transformaciones de coordenadas de esféricas y cartecianas esta dada por

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
5\cos^3\theta - 3\cos\theta &= \frac{z}{r}\left(5\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 3\right) \\
&= \frac{z}{r}\frac{5z^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{r^2} \\
&= \frac{z}{r}\frac{2z^2 - 3x^2 - 3y^2}{r^2}
\end{aligned}$$

sustituyendo en Y_{30}

$$Y_3^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}\frac{2z^2 - 3x^2 - 3y^2}{r^2}$$

para el $Y_3^{\pm1}$, primero calculamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\,\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm i\varphi} &= \mathrm{sen}\,\theta(5\cos^2\theta - 1)(\cos\varphi \pm i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \\
&= \frac{4z^2 - x^2 - y^2}{r^2}\left(\frac{x}{r} \pm i\frac{y}{r}\right)
\end{aligned}$$

sustituyendo en $Y_3^{\pm1}$

$$Y_3^{\pm1} = \sqrt{\frac{21}{64}}\frac{4z^2 - x^2 - y^2}{r^2}(x \pm iy)$$

5.19 Considere un sistema que está en el estado

$$\Psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{13}}Y_{3,-3} + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{3,-2} + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{3,2} + \sqrt{\frac{2}{13}}Y_{33}$$

(a) Si se midió $\hat{L}_z$, ¿qué valores se obtendrán y con qué probabilidades?

(b) Si después de una medición de $\hat{L}_z$ encontramos $l_z = 2\hbar$, calcule las incertidumbres ΔLx y ΔL_y y su producto $\Delta L_x \Delta L_y$.

(c) Encuentre $\langle\psi|\hat{L}_x|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\hat{L}_y|\psi\rangle$

Solución
para el eigenvalor $-3\hbar$ la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\langle 3, |-3\rangle) &= |\psi|3,-3\rangle|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,-3| + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2| + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2| + \sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,3|\right|^2 \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

para el eigenvalor $\lambda = -2\hbar$ la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\langle 3, |-2\rangle) &= |\psi|3,-3\rangle|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,-3| + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2| + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2| + \sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,3|\right|^2 \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

para el eigenvalor $\lambda = 0$ la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\langle 3, |0\rangle) &= |\psi|3,-3\rangle|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,-3| + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2| + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2| + \sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,3|\right|^2 \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

para el eigenvalor $\lambda = 2\hbar$ la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\langle 3, |2\rangle) &= |\psi|3,-3\rangle|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,-3| + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2| + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2| + \sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,3|\right|^2 \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

para el eigenvalor $\lambda = 3\hbar$ la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\langle 3, |3\rangle) &= |\psi|3,-3\rangle|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,-3| + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2| + \sqrt{\frac{3}{13}}Y_{30} + \sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2| + \sqrt{\frac{2}{13}}\langle 3,3|\right|^2 \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

(b) Dado que $\lambda(|\psi\rangle) = 2\hbar$ después de la medición $|\psi\rangle$ colapsará para el eigenestado $|3,2\rangle$, ahora calculemos las incentidubres ΔL_x, ΔL_y y $\Delta L_x \Delta L_y$
sabemos que por definición

$$\Delta L_n = \sqrt{\langle 3,2|\hat{L}_n^2|3,2\rangle - \langle 3,2|\hat{L}_n|3,2\rangle^2}$$

por otra parte

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad \hat{L}_x = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

también sabemos

$$\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l,m+1\rangle$$

entonces

$$\Delta \hat{L}_n = \sqrt{\langle 3,2|\hat{L}_n^2|3,2\rangle - \langle 3,2|\hat{L}_n|3,2\rangle^2}$$

$$L_x^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+^2 + \hat{L}_-^2 + \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+)$$

$$\begin{aligned}
\langle 3,2|L_x^2|3,2\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle 3,2|\hat{L}_+\hat{L}_-|3,2\rangle + \langle 3,2\hat{L}_-\hat{L}_+|3,2\rangle\Big) \\
&= 10\hbar - 6\hbar \\
\Delta L_x^2 &= 4\hbar \\
\Delta L_x &= 2\hbar
\end{aligned}$$

similarmente

$$L_y^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+^2 + \hat{L}_-^2 + \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+)$$

$$\begin{aligned}
\langle 3,2|L_y^2|3,2\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle 3,2|\hat{L}_+\hat{L}_-|3,2\rangle + \langle 3,2\hat{L}_-\hat{L}_+|3,2\rangle\Big) \\
&= 10\hbar - 6\hbar \\
\Delta L_y^2 &= 4\hbar \\
\Delta L_y &= 2\hbar
\end{aligned}$$

finalmente $\Delta L_x \Delta L_y$ es

$$\Delta L_x \Delta L_y = (2\hbar)(2\hbar) = 4\hbar^2$$

(c) Calculamos $\langle\psi|\hat{L}_n|\psi\rangle$ para $n = x, y$ desde $L_\pm|l,m\rangle \propto |l, m\pm 1\rangle$ se puede ver que

$$\begin{aligned}
2\langle\psi|\hat{L}_x|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-3|\hat{L}_x|3,-2\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2|\hat{L}_x|3,-3\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,3|\hat{L}_x|3,2\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2|\hat{L}_x|3,3\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar \\
&= \frac{12\sqrt{6}\hbar}{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\langle\psi|\hat{L}_y|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-3|\hat{L}_y|3,-2\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,-2|\hat{L}_y|3,-3\rangle + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,3|\hat{L}_y|3,2\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\langle 3,2|\hat{L}_y|3,3\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{6}\hbar \\
&= \frac{12\sqrt{6}\hbar}{13}
\end{aligned}$$

por la definición

$$\hat{L}_y = \frac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L_-})$$

$$\langle\psi|\hat{L}_y|\psi\rangle = 0$$

(a) Calcule los valores propios de energía de un rotador axialmente simétrico y encuentre la degeneración de cada nivel de energía (es decir, para cada valor del número cuántico acimutal m, encuentre cuántos estados $|lm\rangle$ corresponden a la misma energía). Podemos recordar que el hamiltoniano de un rotador axialmente simétrico viene dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_1} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_2}$$

donde I_1 y I_2 son los momentos de inercia.

(b) De la parte (a) deduzca los valores propios de energía para los distintos niveles de $l = 3$.

En el caso de un rotador rígido (es decir, $I_1 = I_2 = I$), encuentre la expresión de energía y la relación de degeneración correspondiente

(d) Calcule el número cuántico orbital y la correspondiente degeneración de energía para un rotador rígido donde la magnitud del momento angular total es $\sqrt{56}\hbar$

Solución

(a) El hamiltoniano con simetría axial se escribe

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_1}(\hat{L}^2 + \hat{L}^2) + \frac{1}{2I_2}\hat{L}_z^2$$

por definición

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$$

sustituyendo en $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_1}(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2) + \frac{1}{2I_2}\hat{L}_z^2$$

De las expresiones $\hat{H}|l,m\rangle = \hat{E}|l,m\rangle$, $\hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$ y $\hat{L}^2|l,m\rangle =^2 l(l+1)|l,m\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \frac{1}{2I_1}\left[\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2\right] + \frac{1}{2I_2}\hbar^2 m^2 \\ &= \frac{1}{2I_1}\hbar^2 l(l+1) + \frac{1}{2}\hbar^2 m^2\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \end{aligned}$$

esta es la energía del sistema, de aqui se observa que $E_{l,m} = E_{l,-m}$ y este es de segunda degeneración

(b) Los posibles valores de m para $l = 3$ son $\pm3, \pm2, \pm1, 0$, sustituimos en la ecuación

$$E_{l,m} = \frac{1}{2I_1}\hbar^2 l(l+1) + \frac{1}{2}\hbar^2 m^2\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \tag{8}$$

para $m = \pm3$

$$E_{3,\pm3} = \frac{3(3+1)\hbar^2}{2I_1} + \frac{(\pm3)^2\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = \frac{6\hbar^2}{I_1} + \frac{9\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)$$

para $m = \pm2$

$$E_{3,\pm2} = \frac{3(3+1)\hbar^2}{2I_1} + \frac{(\pm2)^2\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = \frac{6\hbar^2}{I_1} + 2\hbar^2\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)$$

para $m = \pm1$

$$E_{3,\pm1} = \frac{3(3+1)\hbar^2}{2I_1} + \frac{(\pm1)^2\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = \frac{6\hbar^2}{I_1} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)$$

para $m = 0$

$$E_{3,0} = \frac{3(3+1)\hbar^2}{2I_1} + \frac{(0)^2\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = \frac{6\hbar^2}{I_1}$$

estos son los eigenvalores de la energía

(c) para algún momento de inercia $I_n = I$ donde $n = x, y$

$$E_{l,m} = \frac{1}{2I_1}\hbar^2 l(l+1)$$

para $m = 0, \pm1, \pm2 \ldots \pm l$ se observa que los eigen valores de la energía son $2l + 1$

(d) tenemos que

$$\hat{L}^2|l,m\rangle = 56h^2$$

$$\begin{aligned} 56 &= l(l+1) \\ 0 &= l^2+l-56 \\ 0 &= (l+8)(l-7) \end{aligned}$$

l tiene que ser $l>0$, La degeneración es 15 veces degenerada.

6. Rotaciones y suma de momento angular

problemas

7.7 (a) Calcule la expresión $\langle 2,0|Y_{10}|1,0\rangle$

(b) Utilice el resultado de (a) junto con el teorema de Wigner-Eckart para calcular el elemento de matriz reducida $\langle 2||Y_1||1\rangle$

Solución:

(a)

$$\langle 2,0|Y_{10}|1,0\rangle = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_{20}^*(\theta,\varphi)Y_{10}(\theta,\varphi)Y_{10}(\theta,\varphi)d\varphi$$

usando la relación $Y_{20}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2 -1)$ y $Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ sustituyendo

$$\begin{aligned} \langle 2,0|Y_{10}|1,0\rangle &= \frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int_0^{\pi}\cos^2\theta(3\cos^2\theta-1)\operatorname{sen}\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \\ &= \frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int_{-1}^{1}x^2(3x^2-1)dx \\ &= \frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left[\frac{3x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \end{aligned}$$

(b) por el teorema de Wigner?Eckart $\langle 2,0|Y_{10}|1,0\rangle$ y de los coeficientes de Clebcsh-Gordan $\langle 1,1;0,0|2,0\rangle = 2/\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \langle 2,0|Y_{10}|1,0\rangle &= \langle 1,1;0,0|2,0\rangle\langle 2||Y_1||1\rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}}\langle 2||Y_1||1\rangle \end{aligned}$$

y así obtenemos $\langle 2||Y_1||1\rangle$

$$\langle 2||Y_1||1\rangle = \sqrt{\frac{3}{10\pi}}$$

7.9 Encuentre la matriz de rotación $d^{(1)}$ correspondiente a $j = 1$

Solución:

encontrando la matriz $\hat{J}_y$ dentro de los estados propios $|j, m\rangle$ de $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$ desde la base $j = 1$ hay tres estados $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$ y $|1, 1\rangle$ entonces $\hat{J}_y$ es

$$\hat{J}_y = \begin{pmatrix} \langle 1,1|\hat{J}_y|1,1\rangle & \langle 1,1|\hat{J}_y|1,0\rangle & \langle 1,1|\hat{J}_y|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|\hat{J}_y|1,1\rangle & \langle 1,0|\hat{J}_y|1,0\rangle & \langle 1,0|\hat{J}_y|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|\hat{J}_y|1,1\rangle & \langle 1,-1|\hat{J}_y|1,0\rangle & \langle 1,-1|\hat{J}_y|1,-1\rangle \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $\hat{J}_y^3 = \hat{J}_y$, veamos

$$\hat{J}_y^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{J}_y^3 = \frac{i\hbar^3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar^2 \hat{J}_y$$

Así podemos inferir

$$\hat{J}_y^{2n} = \hbar^{2(n-1)} \hat{J}_y^2 \qquad n > 0 \qquad \hat{J}_y^{2n+1} = \hbar^{2n} \hat{J}_y$$

Combinando estas dos relaciones con

$$\begin{aligned} e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\beta}{\hbar}\right)^n \hat{J}_y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(-\frac{i\beta}{\hbar}\right)^{2n} \hat{J}_y^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(-\frac{i\beta}{\hbar}\right)^{2n+1} \hat{J}_y^{2n+1} \end{aligned}$$

así obtenemos

$$e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{I} + \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{(2n)!} - \frac{i\hat{J}_y}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{I} + \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{(2n)!} - 1\right] - \frac{i\hat{J}_y}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Donde $\hat{I}$ es la matriz unitaria

$$e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{I} + \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2 [\cos\beta - 1] - \frac{i\hat{J}_y}{\hbar} \operatorname{sen}\beta$$

sustituyendo las matrices para $\hat{J}_y$ y $\hat{J}_2$.

$$e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar} = \hat{I} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\cos\beta - 1] - i\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}\beta$$

o

$$d^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & d_{10}^{(1)} & d_{1-1}^{(1)} \\ d_{01}^{(1)} & d_{00}^{(1)} & d_{0-1}^{(1)} \\ d_{-11}^{(1)} & d_{-10}^{(1)} & d_{-1-1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

usando las identidades $\frac{1}{2}(1+\cos\beta) = \cos^2(\beta/2)$ y $\frac{1}{2}(1-\cos\beta) = \operatorname{sen}^2(\beta/2)$

$$d^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta/2) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}(\beta/2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}^2(\beta/2) & \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \cos^2(\beta/2) \end{pmatrix}$$

7.11 Considere dos partículas no idénticas, cada una con un momento angular 1 y cuyo hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}(\hat{L}_1 + \hat{L}_2)\cdot\hat{L}_2 + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(\hat{L}_{1_z} + \hat{L}_{2z})^2$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 Son constantes las que tienen las dimensiones de la energía. Encuentre los niveles de energía y sus degeneraciones para aquellos estados del sistema cuyo momento angular total es igual a $2\hbar$

Solución:

El momento angular total del sistema se obtiene acoplando $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$; $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$. Esto lleva a $\hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 = \frac{1}{2}(\hat{L}^2 - \hat{L}_1^2 - \hat{L}_2^2)$ y, cuando se inserta en el Hamiltoniano del sistema, produce

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}(\hat{L}_1\cdot\hat{L}_2 + \hat{L}_2^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}\hat{L}_z^2 = \frac{\epsilon_1}{2\hbar^2}(\hat{L}^2 - \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}\hat{L}_z^2$$

Los operadores $\hat{H}, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}^2$, conmutan Denotamos sus estados por $|l,m\rangle$, los niveles de energía están dados por

$$E_{l,m} = \frac{\epsilon_1}{2}\left[l(l+1) - l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1)\right] + \epsilon_2 m^2$$

como $l_1 = l_2 = 1$

$$E_{l,m} = \frac{\epsilon_1}{2}l(l+1) + \epsilon_2 m^2$$

Escribamos $|l,m\rangle$ en términos de los estados $l_1, m_1\rangle|l_2, m_2\rangle = |l_1, l2; m_1 m_2\rangle$. los estados correspondientes a un momento angular total de $l = 2$ están dados por

$$|2,\pm 2\rangle = |1,1;\pm 1 \pm 1\rangle$$

$$|2,\pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1;\pm 1, 0\rangle + |1,1;0,\pm 1\rangle\right)$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1,1;1,-1\rangle + 2|1,1;0,0\rangle + |11,1;-1,1\rangle\right)$$

De 4 expresiones anteriores, observemos que la energía correspondiente a l_2 y $m = \pm 2$ está doblemente degenerada, porque los estados $|2,\pm 2\rangle$ tienen la misma energía $E_{2,\pm 2} = 3\epsilon_1 + 4\epsilon_2$. Los dos estados $|2,\pm 1\rangle$ también son degenerados, pues corresponden a la misma energía $E_{2,\pm 1} = 3\epsilon_1 + \epsilon_2$. La energía correspondiente a $|2,0\rangle$ no está degenerada: $E_{20} = 3\epsilon_1$

ejercicios

7.1 Muestra que la transformación lineal $y = Rx$ donde

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es una rotación en sentido antihorario del sistema de coordenadas cartesiano x_1x_2 en el plano sobre el origen con un ángulo ϕ

Solución:

tenemos que $\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$R\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} = \bar{r}_1'$$

que es precisamente un vector unitario que forma un ángulo ϕ mientras la transformación linea

$$R\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \bar{r}_2'$$

es justo el vector unitario $\bar{r}_2'$ que hace el angulo ϕ respecto al eje y es equivalente a $\dfrac{\pi}{2} - \phi$ respecto al eje x, por lo tanto, dado un vector arbitrario $x = x_1\bar{r}_1 + x_2\bar{r}_2$ la transformación lineal es

$$R\bar{x} = x_1\bar{r}_1 + x_2\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi + x_2\operatorname{sen}\phi \\ -x_1\operatorname{sen}\phi + x_2\cos\phi \end{pmatrix} = \bar{y}$$

7.2 Demostrar que la potencia n-th de la matriz de rotación.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

es igual para

$$R^n = \begin{pmatrix} \cos n\phi & \operatorname{sen} n\phi \\ -\operatorname{sen} n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el significado geométrico de este resultado?

Solución

La prueba se puede realizar por inducción matemática. Entonces, supongamos que

$$R^k(\phi) = \begin{pmatrix} \cos k\phi & -\operatorname{sen} k\phi \\ \operatorname{sen} k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix}$$

para algún $n = k$ ahora consideramos $R^{k+1}(\phi)$ por definición

$$\begin{aligned}
R^{k+1}(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k\phi & -\operatorname{sen} k\phi \\ \operatorname{sen} k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos k\phi\cos\phi - \operatorname{sen} k\phi\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen} k\phi\cos\phi - \cos k\phi\operatorname{sen}\phi \\ \cos k\phi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen} k\phi\cos\phi & -\operatorname{sen} k\phi\cos\phi + \cos k\phi\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k+\phi) & -\operatorname{sen}(k\phi+\phi)\operatorname{sen}(k\phi+\phi) & \cos(k\phi+\phi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos[(k+1)\phi] & -\operatorname{sen}[(k+1)\phi]\operatorname{sen}[(k+1)\phi] & \cos[(k+1)\phi] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y en la medida en que el resultado también vale para $n = k + 1$ así sigue la inducción, Por lo tanto

$$R^k(\phi) = \begin{pmatrix} \cos k\phi & -\operatorname{sen} k\phi \\ \operatorname{sen} k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix}$$

para $n = 0, 1, 2 \ldots$

como se afirma

7.3 Utilizando el operador de desplazamiento de espacio. $U(\hat{A}) = e^{-i\hat{A}\hat{P}/\hbar}$ donde $\hat{P}$ es el operador de momento lineal. Muestre que $e^{i\hat{A}\hat{P}/\hbar}\hat{R}e^{-i\hat{A}\hat{P}/\hbar} = \hat{R} + \hat{A}$

Solución:
Para el vector $\hat{A}$. Establecer que $U^{\dagger}(\hat{A})\hat{R}U(\hat{A}) = \hat{R} + \hat{A}$ donde $\hat{R}$ es un vector arbitrario y $U^{\dagger}(\hat{A}) = e^{i\hat{A}\hat{P}/\hbar}$ es hermitiano conjugado, notemos que $[\hat{R}, \hat{P}] = i\hbar$ sigue inmediatamente después de la sustitución que $U^{\dagger}(\delta\hat{A})\hat{R}U(\delta\hat{A}) = \hat{R} + \delta\hat{A}$ bajo la transformación infinitesimal, ya que bajo una finita traslación $\delta\vec{A}$ para algún vector constante $U^{\dagger}(\hat{A})\hat{R}U(\hat{A}) = \hat{R} + \hat{A}$ como se quería

7.4 Los componentes A_j (con $j = x, y, z$) de un vector $\hat{A}$ se transforman bajo rotaciones espaciales como $A'_i = R_{ij}A_j$, donde R es la matriz de rotación.

(a) Usando la invariancia del producto escalar de cualquiera de los dos vectores (por ejemplo, $\hat{A}\cdot\hat{B}$) bajo rotaciones, muestran que las filas y columnas de la matriz de rotación R son ortonormales entre sí (es decir, demuestre que $R_{ij}R_{lk} = \delta_{jk}$).

(b) Demuestre que la transpuesta de R es igual a la inversa de R y que el determinante de R es igual a ± 1 .

Solución:

a) Establecemos que $R'R = 1$ Donde R' es la matriz transpuesta de R, sabemos que el producto de vectores son invariantes ante una transformación lineal $A'B' = AB$

$$\begin{aligned} A'\cdot B' &= \sum_i Rij A_j \sum_k R_{ik}B_k \\ &= \sum_i \sum_{jk} Rij R_{ik} A_j B_k \\ &= \sum_{jk}\sum_i Rij R_{ik} A_j B_k \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_i A_i B_i = \sum_{ij} \delta_{ij} A_i B_j$$

implica a la vez que

$$\sum_i R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}$$

b) para establecer la primera afirmación, basta observar $A\cdot B = A'B$ como matrices, donde la transpuesta

$$A'^T = (RA')^T = A^T R^T$$

Sustituyendo $A'\cdot B' = A\cdot B$ nos lleva a

$$A^T R^T RB = A\cdot B$$

esto implica a la vez que $R^T R = I$, $R^T = R^{-1}$ esto se sigue

$$Det(I) = detR^T R = detRdetR = (detR)^2$$

Por lo tanto $detR = \pm 1$ como se afirma

7.5 El operador correspondiente a una rotación del ángulo θ sobre un eje $\vec{n}$ está dado por

$$U_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{J}/\hbar}$$

Demuestre que los elementos de la matriz del operador de posición $\hat{R}$ se giran a través de una rotación infinitesimal como $\hat{R}' = \hat{R} + \theta\vec{n}\times\hat{R}$ (es decir, en el caso donde θ es infinitesimal, muestre que

$U_n^+(\theta)\hat{R}_j U_n(\theta) = \hat{R}_j + \theta(\vec{n} \times \hat{R})_j)$

Solución:
Considerando el operador $U_{\vec{n}}(\theta) = e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{J}/\hbar}$ definimos el ángulo de rotación θ respecto a un vector $\vec{n}$, establecemos que bajo una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$ bajo $U_{\vec{n}}$, $\hat{R}' = \hat{R} + \delta\theta\vec{n} \times \hat{R}$, ahora bajo una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$

$$\begin{aligned} U_{\vec{n}}(\delta\theta) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J} + o(\delta\theta^2) \qquad (9) \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J} \qquad (10) \end{aligned}$$

para un primer orden en $\delta\theta$ por lo tanto $R' = U_{\vec{n}}^\dagger(\delta\theta)\hat{R}U_{\vec{n}}(\delta\theta)$ sustituyendo los campos de expresión anteriores

$$\begin{aligned} R' &= U_{\vec{n}}^\dagger(\delta\theta)\hat{R}U_{\vec{n}}(\delta\theta) \\ &= \left\{1 + \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J}\right\}\hat{R}\left\{1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J}\right\} \\ &= \left\{\hat{R} + \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J}\hat{R}\right\}\left\{1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J}\right\} \\ &= \hat{R} - \frac{i}{\hbar}\delta\theta\hat{R}\vec{n}\cdot\hat{J} + \frac{i}{\hbar}\delta\theta\vec{n}\cdot\hat{J}\hat{R} \\ &= \hat{R} - \frac{i}{\hbar}\delta\theta[\hat{R}, \vec{n}\cdot\hat{J}] \end{aligned}$$

sabemos que $[\hat{R}, \vec{n}\cdot\hat{J}] = i\hbar\vec{n}\times\hat{R}$ con esto, sustituimos

$$\hat{R}' \approx \hat{R} + \delta\theta\vec{n}\times\hat{R}$$

7.6 Considere la función de onda de una partícula $\psi(r) = \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z\right)$, donde $f(r)$ es un Función esférica simétrica.

(a) ¿Es $\psi(r)$ una función propia de $\hat{L}^2$ Si es así, ¿cuál es el valor propio?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de que la partícula se encuentre en el estado $m_l = -1$, $m_l = 0$, y $m_l = 1$?

(c) Si $\psi(\bar{r})$ es una función propia de energía con valores propios E y si $f(r) = 3r^2$, encuentre el expresión del potencial $V(r)$ al que esta partícula está sometida

Solución:

(a) $\psi(\bar{r})$ es eigeinfunción de $\hat{L}^2$, expresaremos a $\psi(\hat{r})$ como función de los armonicos esféricos $Y_{lm}(\theta,\phi)$ empezaremos renobrando

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x \pm iy}{r} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$$

entonces

$$x = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1,1} - Y_{1,-1})r \qquad y = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1,1} + Y_{1,-1})r \qquad z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}r$$

sustituyendo en $\psi(\bar{r})$

$$\psi(\bar{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}f(r)\left(-(1-i)Y_{1,1} + (1+i)Y_{1,-1} + Y_{1,0}\right)$$

rescribiendo en ket

$$|\psi\rangle = |r\rangle\left\{-(1-i)|1,1\rangle + (1+i)|1,-1\rangle + |1,0\rangle\right\}$$

aqui $\langle r|\psi\rangle = f(r)r$ esto es desde la observcación que $|\psi\rangle$ es un eigeinvector de $\hat{L}^2$

$$\hat{L}^2|\psi = 2\hbar^2|\psi\rangle$$

$$\hat{L}^2|\psi = 2\hbar^2|1,m\rangle \qquad -1 \leq m \leq -1$$

(b) Las probabilidades de las partículas para los estados $m = -1, 0, 1$ se determinan

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|r\rangle \{-(1-i)|1,1\rangle + (1+i)|1,-1\rangle + |1,0\rangle\} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|r\rangle\vartheta$$

donde $\vartheta = \{-(1-i)|1,1\rangle + (1+i)|1,-1\rangle + |1,0\rangle\}$ es el estado no normalizado que describe puramente el aspecto del momento angular orbital de la partícula. Por lo tanto, la probabilidad de que la partícula se encuentre en los estados $m = -1, 0, 1$ para todos los estados de energía determinados por $|r\rangle$, dado que $l = 1$, se determina normalizando $|\vartheta\rangle$ explícitamente, elija N tal que

$$\langle\vartheta|\vartheta\rangle = |N|^2 \left\{|1-i|^2 + |1+i|^2 + 1\right\}$$

es unitario, esto es

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\psi|\psi\rangle \\ &= |N|^2 \left\{|1-i|^2 + |1+i|^2 + 1\right\} \\ &= |N|^2 \{2 + 2 + 1\} \\ N &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

en particular las probabilidades son

$$|\langle 1,1|\vartheta\rangle|^2 = \frac{2}{5} \qquad |\langle 1,-1|\vartheta\rangle|^2 = \frac{2}{5} \qquad |\langle 1,0|\vartheta\rangle|^2 = \frac{1}{5}$$

7.8 Una partícula de espín 1/2 está en un estado d de momento angular orbital (es decir, $l = 2$). Calcule el acoplamiento del espín y el momento orbital de esta partícula, y encuentre todos los estados y los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes.
Solución:
recordemos que para $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ el rango permitido por

$$\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \left|l + \frac{1}{2}\right| \Rightarrow j = l \pm \frac{1}{2}$$

para partículas spin 1/2, los estados spin-orbitales tienen superposición de spin $\pm 1/2$

$$\left|l \pm \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + 1/2}{2l+1}}\left|l, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

el estado $|j, m, s, m_s\rangle$ donde $s = 1/2$, $m_s = \pm 1/2$ y m va $-l - \frac{1}{2} \leq m \leq l + \frac{1}{2}$, para $l = 2$ los valores posibles de m es el conjunto $\Delta = \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ oscila entre once valores posibles, en particular para el estado $J = 5/2$ los once posibles estados

$$\left|\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\rangle, \ldots, \left|\frac{5}{2}, 0\right\rangle, \ldots, \left|\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right\rangle$$

y para el estado $j = 3/2$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\rangle, \ldots, \left|\frac{3}{2}, 0\right\rangle, \ldots, \left|\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\ \right\rangle$$

los coeficientes de Clebsch-Gordan se determinan como

Cuando $l = 2$

$$\left|\frac{5}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{5}}\right| 2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |2, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

tomamos el producto interno con $|2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$$|2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\frac{5}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{m}{5}}$$

para todo $m \in \Delta$, para el estado

$$\left|\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{5}}\right| 2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |2, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

los coeficientes de Clebsch Gordon son

$$|2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\frac{3}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{5}}$$

y

$$|2, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\frac{3}{2}, m\rangle = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{5}}$$

7.9 El hamiltoniano dependiente del espín de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\vec{B} = B\vec{k}$) se puede escribir como

$$\hat{H} = \lambda \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \left(\frac{eB}{mc}\right)(\hat{S}_{1_z} - \hat{S}_{2_z})$$

donde λ es un número real y $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$ son los operadores de espín para el electrón y el positrón, respectivamente.

(a) Si la función de giro del sistema está dada por $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, encuentre los valores propios de energía y sus vectores propios correspondientes.

(b) Repita (a) en el caso donde $\lambda = 0$, pero $B \neq 0$.

(c) Repita (a) en el caso donde $B = 0$, pero $\lambda \neq 0$.

Solución:

(a) Dado que un sistema está en un espín de estado $|m_{1,s}, m_{2,s}\rangle = |1/2, -1/2\rangle$ los eigeinvalores de la energía pueden ser evaluados termino por termino. recordemos $\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = (1/2)(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)$ esto se puede establecer fácilmente observando que $[\hat{S}_{1,n}, \hat{S}_{2,n}] = 0$ donde $n = x, y, z$

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 |1/2, -1/2\rangle &= (1/2)(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)|1/2, -1/2\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2}\{s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\}|1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

sabemos que el spin de un electrón y un positrón es $1/2$ por lo tanto los números cuánticos s

$$|s_1 - s_2||s_1 - s_2| + 1, \ldots, s_1 + s_2$$

esto es, que hay dos eigeinvalores $s = 0, 1$. Los estados son denotados como

$$|s, m_1 + m_2; m_1, m_2\rangle \equiv |s, m_1 + m_2; s_1, s_2, m_1, m_2\rangle$$

caso 1: Los eigeinvalores para $(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2)$, cuando $s = 0$

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2|0,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left\{s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right\}|0,0,1/2,-1/2\rangle$$

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2|0,0,1/2,-1/2\rangle = -\frac{3\hbar^2}{4}|0,0,1/2,-1/2\rangle \tag{11}$$

los eigeinvalores de s_{1_z} estan dados por

$$S_{1_z}|0,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{\hbar}{2}|0,0,1/2,-1/2\rangle \tag{12}$$

los eigeinvalores de s_{2_z} estan dados por

$$S_{2_z}|0,0,1/2,-1/2\rangle = -\frac{\hbar}{2}|0,0,1/2,-1/2\rangle \tag{13}$$

los eigeinvalores de la energía están dados por

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0,1/2,-1/2\rangle &= \left(\lambda S_1 \cdot S_2 + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z} - S_{2_z})\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \lambda S_1 \cdot S_2|0,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z} - S_{2_z})|0,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \lambda S_1 \cdot S_2|0,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z})|0,0,1/2,-1/2\rangle - \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{2_z})|0,0,1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

sustituyendo las ecuaciones 11,12 y 13 en la anterior

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0,1/2,-1/2\rangle &= -\frac{3\hbar\lambda}{4}|0,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle - \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \left\{\left(\frac{eB}{mc}\right)\hbar - \frac{3\hbar\lambda}{4}\right\}|0,0,1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto, los eigeinvalores de la energía para $s = 0$ son

$$\left(\frac{eB}{mc}\right)\hbar - \frac{3\hbar\lambda}{4}$$

Caso 2 los eigeinvalores para $(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ cuando $s = 1$

$$\begin{aligned}
hatS_1 \cdot \hat{S}_2|1,0,1/2,-1/2\rangle &= \frac{\hbar^2}{2}\left\{s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right\}|1,0,1/2,-1/2\rangle && (14) \\
&= \frac{h^2}{2}|1,0,1/2,-1/2\rangle && (15)
\end{aligned}$$

los eigeinvalores de S_{1_z} estan dados por

$$S_{1_z}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{\hbar}{2}|1,0,1/2,-1/2\rangle \tag{16}$$

los eigeinvalores de S_{2_z} estan dados por

$$S_{2_z}|1,0,1/2,-1/2\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1,0,1/2,-1/2\rangle \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle &= \left(\lambda S_1 \cdot S_2 + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z} - S_{2_z})\right)|1,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \lambda S_1 \cdot S_2|1,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z} - S_{2_z})|1,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \lambda S_1 \cdot S_2|1,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{1_z})|1,0,1/2,-1/2\rangle - \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_{2_z})|1,0,1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

sustituyendo en 15, 16 y 17

$$\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \left(\frac{\hbar^2\lambda}{2} + \left(\frac{eB}{mc}\hbar\right)\right)|1,0,1/2,-1/2\rangle$$

observemos que los eigeinvalores para $s = 1$ es

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2} + \frac{eB}{mc}\hbar$$

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0,1/2,-1/2\rangle &= (0)\frac{3\hbar\lambda}{4}|0,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle - \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \left(\frac{eB}{mc}\right)\hbar|0,0,1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

entonces para el caso donde $\lambda = 0$, $B \neq 0$ y $s = 0$ los eigeinvalores son

$$\left(\frac{eB}{mc}\right)\hbar$$

$$\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \left(\frac{\hbar^2\lambda}{2}(0) + \left(\frac{eB}{mc}\hbar\right)\right)|1,0,1/2,-1/2\rangle$$

$$\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{eB}{mc}\hbar|1,0,1/2,-1/2\rangle$$

para el caso $\lambda = 0$, $B \neq 0$ y $s = 1$, los eigeinvalores son

$$\left(\frac{eB}{mc}\right)\hbar$$

(c)

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0,1/2,-1/2\rangle &= \frac{3\hbar\lambda}{4}|0,0,1/2,-1/2\rangle + \left(\frac{e(0)}{mc}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle - \left(\frac{e(0)}{mc}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|0,0,1/2,-1/2\rangle \\
&= \frac{3\hbar\lambda}{4}|0,0,1/2,-1/2\rangle
\end{aligned}$$

para el caso $\lambda \neq 0$, $B = 0$ y $s = 0$ los eigeinvalores son

$$\frac{3\hbar\lambda}{4}$$

$$\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \left(\frac{^2\lambda}{2} + \frac{e(0)}{mc}\frac{1}{2}\hbar\right)|1,0,1/2,-1/2\rangle$$

$$\hat{H}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{\hbar^2\lambda}{2}|1,0,1/2,-1/2\rangle$$

entonces, para el caso $\lambda \neq 0$, $B = 0$ y $s = 1$ el eigeinvalor es

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}$$

7.10 (a) Muestra que $e^{-i\pi\hat{J}_z/2}e^{-i\pi\hat{J}_x}e^{i\pi\hat{J}_z/2} = e^{-i\pi\hat{J}_y}$

(b) Pruebe que $\hat{J}_{-}e^{-i\pi\hat{J}_x} = e^{-i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_{+}$ y también muestra que $e^{-i\pi\hat{J}_x}|j,m\rangle = e^{-i\pi j}|j,-m\rangle$

(c) Usando (a) y (b) muestre que $e^{-i\pi\hat{J}_y}|j,m\rangle = (-1)^{j-m}|j,-m\rangle$

Solución:

(a) la expansión de $e^{i_x/\hbar}$ es

$$e^{i_x/\hbar} = I - \frac{i\pi}{\hbar}\hat{J}_x - \frac{\pi^2}{2!\hbar^2}\hat{J}_x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
R_\alpha(J_x) &= J_x + \frac{i\alpha}{\hbar}[J_y, J_x] + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2[J_z,[J_z,J_x]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3[J_z,[J_z,[J_z,J_x]]] + \dots \\
&= J_x + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 i\hbar[J_z,J_y] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 i\hbar[J_z,[J_z,J_y]] + \dots \\
&= J_x + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)^2 J_x + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^3 J_y + \dots \\
&= J_x\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots\right) - J_y\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{3!} + \dots\right) \\
&= J_x\cos\alpha - J_y\operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\hat{J}_x e^{i(\pi/2)J_z/\hbar} = -\hat{J}_y$$

ahora veamos

$$\begin{aligned}
e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}e^{i(\pi/2)J_z/\hbar} &= \sum_n \frac{(-i\pi/\hbar)^n}{n!}e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}(\hat{J}_x)^n e^{i(\pi/2)J_z/\hbar} \\
&= \sum_n \frac{(-i\pi/\hbar)^n}{n!}(-\hat{J}_y)^n \\
&= \sum_n \frac{(i\pi/\hbar)^n}{n!}\hat{J}_y^n \\
&= e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\hat{J}_x e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\right)^n &= \left(e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\hat{J}_x e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\right)\left(e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\hat{J}_x e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\right)\dots \\
&* \left(e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\hat{J}_x e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}\right) \\
&= e^{i(\pi/2)J_z/\hbar}(\hat{J}_x)^n e^{i(\pi/2)J_z/\hbar} \\
&= (-1)^n\hat{J}_y^n \\
&= e^{-i\pi}\hat{J}_y^n
\end{aligned}$$

(b) $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ establecemos que

$$\hat{J}_{-}e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_{+}$$

y

$$e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}|j,m\rangle = e^{-i\pi j}|j,m\rangle$$

observemos que

$$e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_{-}e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar} = e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}$$

en el inciso anterior vimos que

$$e^{i(\pi/2)\hat{J}_z/\hbar}\hat{J}_x e^{-i(\pi/2)\hat{J}_z/\hbar} = -\hat{J}_y$$

similarmente

$$e^{i(\pi/2)\hat{J}_z/\hbar}\hat{J}_y e^{-i(\pi/2)\hat{J}_z/\hbar} = \hat{J}_x$$

expandiendo

$$\begin{aligned}
e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_- e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} &= e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} \\
&= e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} - ie^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_y e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}
\end{aligned}$$

Sabemos que $[\hat{J}_x, \hat{J}_x] = 0$ y por lo tanto

$$e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = \hat{J}_x$$

para el segundo termino

$$\begin{aligned}
e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_y e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} &= \hat{J}_y + \frac{i\pi}{\hbar}[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^2 [\hat{J}_x, [\hat{J}_x, \hat{J}_y]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^3 [\hat{J}_x[\hat{J}_x, [\hat{J}_x, \hat{J}_y]]] + \dots \\
&= \hat{J}_y - \pi\hat{J}_z + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^2 i\hbar[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^3 i\hbar[\hat{J}_x, [\hat{J}_x, \hat{J}_y]] + \dots \\
&= \hat{J}_y - \pi\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)\hat{J}_y - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^2[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + \dots \\
&= \hat{J}_y - \pi\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)\hat{J}_y - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^3\hat{J}_z + \dots \\
&= \hat{J}_y\left\{1 - \frac{1}{2!}\pi^2 + \dots\right\} + \hat{J}_z\left\{\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \dots\right\} \\
&= \hat{J}_y \cos\pi + \hat{J}_z \operatorname{sen}\pi \\
&= -\hat{J}_y
\end{aligned}$$

entonces

$$e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_- e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$$

esto es igual

$$\hat{J}_- e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_+$$

para establecer que $e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}|j, m\rangle = e^{i\pi j}|j, -m\rangle$

$$e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = e^{-i\pi\hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}e^{i\pi\hat{J}_z/(2\hbar)}$$

$$\langle j, -m|e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}|j, m\rangle = \langle j, -m|e^{-i\pi\hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}e^{i\pi\hat{J}_z/(2\hbar)}|j, -m\rangle$$

Observemos

$$\hat{J}_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle \qquad e^{-i\alpha\hat{J}_z/\hbar}|j, m\rangle = e^{i\alpha m}$$

se sigue

$$\begin{aligned}
\langle j, -m|e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}|j, m\rangle &= e^{-i\pi m}\langle j, -m|e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}|j, m\rangle \\
&= (-1)^m\langle j, -m|e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}|j, m\rangle
\end{aligned}$$

por la formula de Wigner, tenemos

$$d^{(j)}_{m',m} = (-1)^{j-m}\delta_{m',-m}$$

$$d^{(j)}_{m',m} = \langle j, m'|e^{-i\beta \hat{J}_y/\hbar}|j,m\rangle$$

sustituyendo en

$$\begin{aligned}
\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_x/\hbar}|j,m\rangle &= (-1)^m\langle j,-m|e^{i\pi \hat{J}_y/\hbar}|j,m\rangle \\
&= (-1)^m(-1)^{j-m} \\
&= (-1)^j
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$e^{-i\pi \hat{J}_x/\hbar}|j,m\rangle = (-1)^j|j,-m\rangle$$

(c) Usando

$$e^{-i\pi \hat{J}_x/\hbar}|j,m\rangle = (-1)^j|j,-m\rangle$$

$$e^{-i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi \hat{J}_x/\hbar}e^{i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)} = e^{-i\pi \hat{J}_y/\hbar}$$

$$\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi \hat{J}_x/\hbar}e^{i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}|j,m\rangle = \langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_y/\hbar}|j,m\rangle$$

de acuerdo al inciso (b)

$$\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi \hat{J}_x/\hbar}e^{i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}|j,m\rangle = (-1)^m\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_x/\hbar}|j,m\rangle$$

$$\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}e^{i\pi \hat{J}_x/\hbar}e^{i\pi \hat{J}_z/(2\hbar)}|j,m\rangle = (-1)^{-m}(-1)^j$$

entonces

$$\langle j,-m|e^{-i\pi \hat{J}_y/\hbar}|j,m\rangle = (-1)^{m-j}$$

$$e^{-i\pi \hat{J}_y/\hbar}|j,m\rangle = (-1)^{m-j}|j,-m\rangle$$

7.12 (a) Muestre cómo $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ y $\hat{J}_z$ se transforman bajo una rotación de ángulo α (finito) sobre el eje x.

(b) Utilizando los resultados de la parte (a), determine cómo se transforma el operador de momento angular $\hat{J}$ bajo la rotación.

Solución:
derivamos esta regla de trasformación, donde $e^{i\alpha J_x}$ es la matriz de rotación del vector en un ángulo α respecto al eje x esto es evaluando

$$R_\alpha J_n e^{i\alpha J_x}J_n e^{-i\alpha J_x/\hbar} \qquad \forall n = x,y,z$$

conciderемos $R_\alpha(J_x) = e^{i\alpha J_x/\hbar}J_x e^{-i\alpha J_x\hbar}$ ya que $[J_x, J_x] = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}
R_\alpha(J_x) &= e^{i\alpha J_x/\hbar}J_x e^{-i\alpha J_x\hbar} \\
&= J_x e^{i\alpha J_x/\hbar}e^{-i\alpha J_x\hbar} \\
&= J_x
\end{aligned}$$

nuevamente consideremos $R_\alpha(J_y) = e^{i\alpha J_y/\hbar}J_y e^{-i\alpha J_y\hbar}$
y recordemos la regla de expansión

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{B}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \dots$$

y se sigue

$$
\begin{aligned}
R_\alpha(J_y) &= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}[J_x, J_y] + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 [J_x,[J_x,J_y]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 [J_x,[J_x,[J_x,J_y]]] + \dots \\
&= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}J_z + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 i\hbar[J_x, J_z] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 i\hbar[J_x,[J_x,J_y]] + \dots \\
&= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}J_z + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)^2 J_y + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^3 J_z + \dots \\
&= J_y\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots\right) - J_z\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots\right) \\
&= J_y \cos\alpha - J_z \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

Consideremos $R_\alpha(\hat{J}_z) = e^{i\alpha\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_z e^{-i\alpha\hat{J}_x/\hbar}$, haciendo la expansión

$$
\begin{aligned}
R_\alpha(J_z) &= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}[J_x, J_z] + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 [J_x,[J_x,J_z]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 [J_x,[J_x,[J_x,J_z]]] + \dots \\
&= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 i\hbar[J_x, J_y] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 i\hbar[J_x,[J_x,J_y]] + \dots \\
&= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)^2 J_z + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^3 J_y + \dots \\
&= J_z\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots\right) - J_y\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{3!} + \dots\right) \\
&= J_z \cos\alpha - J_y \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

similarmente

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_x e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_x \\
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_y e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_y \cos\alpha - J_z \operatorname{sen}\alpha \\
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_z e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_y \cos\alpha - J_z \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

obteniendo la regla de transformación para $\hat{J} = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}$ bajo la transformación $(\alpha, \hat{e}_x)$ es

$$
\begin{pmatrix} \hat{J}'_x \\ \hat{J}'_y \\ \hat{J}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \cos\alpha - \hat{J}_z \operatorname{sen}\alpha \\ \hat{J}_z \cos\alpha - \hat{J}_y \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}
$$

7.13 (a) Muestre cómo el operador $J_\pm$ se transforma bajo una rotación de ángulo alrededor del eje x.

(b) Usa el resultado de la parte (a) para mostrar que $\hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} = e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\mp$

Solución:

(a) concideremos $R_\alpha(J_x) = e^{i\alpha J_x/\hbar} J_x e^{-i\alpha J_x \hbar}$ ya que $[J_x, J_x] = 0$ por lo que

$$
\begin{aligned}
R_\alpha(J_x) &= e^{i\alpha J_x/\hbar} J_x e^{-i\alpha J_x \hbar} \\
&= J_x e^{i\alpha J_x/\hbar} e^{-i\alpha J_x \hbar} \\
&= J_x
\end{aligned}
$$

$$
e^{i\alpha J_x/\hbar}\hat{J}_y e^{-i\alpha J_x \hbar} = -\hat{J}_y
$$

$$e^{i\alpha J_x/\hbar}\hat{J}_z e^{-i\alpha J_x \hbar} = -\hat{J}_z$$

$$\begin{aligned} R_\pi(\hat{J}_\pm) &= R_\pi(\hat{J}_x) \pm iR_\pi(\hat{J}_y) \\ &= \hat{J}_x \mp i\hat{J}_y \\ &= \hat{J}_\mp \end{aligned}$$

(b) dado que $R_\pi(\hat{J}_\pm) = e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}$

$$\begin{aligned} \hat{J}_\pm &= e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} \\ e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\pm &= e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}e^{i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} \\ \hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar} &= e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\mp \end{aligned}$$

7.14 Considere una rotación de ángulo finito α alrededor de un eje $\vec{n}$ que transforma el vector unitario $\vec{a}$ en otro vector unitario $\vec{b}$. Muestra que $e^{i\beta\hat{J}_b/\hbar} = e^{i\alpha\hat{J}_n/\hbar}e^{-i\beta\hat{J}_a/\hbar}e^{-i\alpha\hat{J}_n/\hbar}$
Solución:
establecemos $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$ donde $\vec{a}_\parallel = \vec{a}\cdot\vec{n}$ y $\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\perp$ por simplificación $\vec{n} = \hat{e}_x$ también tenemos $\hat{J}_a = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}$ y $\hat{J}_b = \begin{pmatrix} \hat{J}'_x \\ \hat{J}'_y \\ \hat{J}'_z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} R_\alpha(J_x) &= e^{i\alpha J_x/\hbar}J_x e^{-i\alpha J_x \hbar} \\ &= J_x e^{i\alpha J_x/\hbar}e^{-i\alpha J_x \hbar} \\ &= J_x \end{aligned}$$

nuevamente consideremos $R_\alpha(J_y) = e^{i\alpha J_y/\hbar}J_y e^{-i\alpha J_y \hbar}$
y recordemos la regla de expansión

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{B}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots$$

y se sigue

$$\begin{aligned} R_\alpha(J_y) &= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}[J_x,J_y] + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2[J_x,[J_x,J_y]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3[J_x,[J_x,[J_x,J_y]]] + \ldots \\ &= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}J_z + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 i\hbar[J_x,J_z] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 i\hbar[J_x,[J_x,J_y]] + \ldots \\ &= J_y + \frac{i\alpha}{\hbar}J_z + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2(i\hbar)^2 J_y + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3(i\hbar)^3 J_z + \ldots \\ &= J_y\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right) - J_z\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{3!} + \ldots\right) \\ &= J_y\cos\alpha - J_z\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

Consideremos $R_\alpha(\hat{J}_z) = e^{i\alpha\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_z e^{-i\alpha\hat{J}_x/\hbar}$, haciendo la expansión

$$
\begin{aligned}
R_\alpha(J_z) &= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}[J_x, J_z] + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 [J_x,[J_x,J_z]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 [J_x,[J_x,[J_x,J_z]]] + \ldots \\
&= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 i\hbar[J_x, J_y] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 i\hbar[J_x,[J_x,J_y]] + \ldots \\
&= J_z + \frac{i\alpha}{\hbar}J_y + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^2 (i\hbar)^2 J_z + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^3 (i\hbar)^3 J_y + \ldots \\
&= J_z\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right) - J_y\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{3!} + \ldots\right) \\
&= J_z \cos\alpha - J_y \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

similarmente

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_x e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_x \\
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_y e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_y \cos\alpha - J_z \operatorname{sen}\alpha \\
e^{i\alpha J_x/\hbar} J_z e^{-i\alpha J_x \hbar} &= J_y \cos\alpha - J_z \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
e^{i\alpha J_x/\hbar} \hat{J}_n^2 e^{-i\alpha J_x \hbar} = e^{i\alpha J_x/\hbar} \hat{J}_n e^{-i\alpha J_x \hbar} e^{i\alpha J_x/\hbar} \hat{J}_n e^{-i\alpha J_x \hbar}
$$

$$
e^{i\alpha J_x/\hbar} \hat{J}_n^2 e^{-i\alpha J_x \hbar} = (\hat{J}_n')^2
$$

donde $n = x, y, z$ aquí $\hat{J}_n' = e^{i\alpha J_x/\hbar} \hat{J}_n e^{-i\alpha J_x \hbar}$ por el método de inducción tenemos

$$
e^{i\alpha J_x/\hbar} (\hat{J}_n)^m e^{-i\alpha J_x \hbar} = (\hat{J}_n')^m
$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$ remplazando $\vec{e}_x \to \vec{n}$ un vector unitario arbitrario

$$
e^{i\alpha J_x/\hbar} (\hat{J}_n)^k e^{-i\alpha J_x \hbar} = (\hat{J}_n')^k
$$

escribiendo $e^{i\beta \hat{J}_a/\hbar}$ en serie

$$
e^{i\beta \hat{J}_a/\hbar} = \sum_k \frac{(-i\beta/\bar{)}}{k!} \hat{J}_a^m
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha \hat{J}_n/\hbar} e^{-i\beta \hat{J}_a/\hbar} e^{-i\alpha \hat{J}_n/\hbar} &= \sum_k \frac{(-i\beta/\bar{)}^k}{k!} e^{-i\alpha \hat{J}_n/\hbar} e^{-i\beta \hat{J}_n/\hbar} \\
&= \sum_k \frac{(-i\beta/\bar{)}}{k!} (\hat{J}_a')^k \\
&= e^{-i\beta \hat{J}_b/\hbar}
\end{aligned}
$$

tenemos que $\hat{J}_b = \hat{J}_a'$ así se muestra

$$
e^{i\beta \hat{J}_b/\hbar} = e^{i\alpha \hat{J}_n/\hbar} e^{-i\beta \hat{J}_a/\hbar} e^{-i\alpha \hat{J}_n/\hbar}
$$

7.15 (a) Muestre que $e^{i\pi \hat{J}_y/2\hbar} \hat{J}_x e^{-i\pi \hat{J}_y/2\hbar} = \hat{J}_z$

(b) Mostrar también que $e^{i\pi \hat{J}_y/2\hbar} e^{i\alpha \hat{J}_x/\hbar} e^{-i\pi \hat{J}_y/2\hbar} = e^{i\alpha \hat{J}_z/\hbar}$

(c) Para algún operador vectorial $\hat{A}$. Muestre que $e^{i\alpha \hat{J}_z/\hbar} \hat{A}_x e^{-i\alpha \hat{J}_z/\hbar} = \hat{A}_x \cos\alpha + \hat{A}_y \operatorname{sen}\alpha$

Solución

(a) Sabemos que $e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/\hbar}$ recordemos la regla de expansión

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{B}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \dots$$

y la relación de conmutación $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z$

$$\begin{aligned}
e^{i\pi\hat{J}_y/\hbar}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/\hbar} &= \hat{J}_x + \frac{i\pi}{(2\hbar)}[\hat{J}_y,\hat{J}_x] + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^2[\hat{J}_y,[\hat{J}_y,\hat{J}_x]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^3 \\
&\quad [\hat{J}_y[\hat{J}_y,[\hat{J}_y,\hat{J}_x]] + \dots \\
&= \hat{J}_x + \frac{\pi}{2}\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^2 i\hbar[\hat{J}_y,\hat{J}_z] - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^3 i\hbar\hat{J}_y,[\hat{J}_y,\hat{J}_z] + \dots \\
&= \hat{J}_x + \frac{\pi}{2}\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^2 i\hbar[\hat{J}_y,\hat{J}_z] - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^3 i\hbar[\hat{J}_y,[\hat{J}_y,\hat{J}_z]] + \dots \\
&= \hat{J}_x + \frac{\pi}{2}\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^2 (i\hbar)\hat{J}_x - \frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{(2\hbar)}\right)^3 (i\hbar)^2[\hat{J}_y,\hat{J}_x] + \dots \\
&= \hat{J}_x - \frac{\pi}{2}\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\hat{J}_x - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\hat{J}_z + \dots \\
&= \hat{J}_x\left\{1 - \frac{\pi^2}{4(2)!}\right\} + \hat{J}_z\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8(3)!}\right\}
\end{aligned}$$

Observemos que son las series de $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

(b) tenemos $e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x^n e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)} = \hat{J}_z^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z^n &= \left(e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\right)^n \\
&= \left(e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\right)\left(e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\right)\dots\left(e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\right) \\
&= e^{i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}\hat{J}_x^n e^{-i\pi\hat{J}_y/(2\hbar)}
\end{aligned}$$

(c) De la regla de conmutación $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z$ y la permutación de indices intercambiando y por z y z por y

$$e^{i\alpha\hat{J}_z/\hbar}\hat{A}_x e^{-i\alpha\hat{J}_z/\hbar} = \hat{A}_x\cos\alpha + \hat{A}_y\operatorname{sen}\alpha$$

7.16 Usando $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ muestre que

$$d_{mm'}^{(j)}(\beta) = \sum_{m_1 m_2}\sum_{m_1' m_2'}\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j, m\rangle\langle j_1, j_2; m_1', m_2'|j, m'\rangle d_{m_1 m_1'}^{(j_1)}(\beta) d_{m_2 m_2'}^{(j_2)}(\beta)$$

Solución:
Sabemos

$$d^{(j)} = \langle j, m|e^{-i\beta J_y/\hbar}|j, m'\rangle$$

recordemos que

$$|j, m'\rangle = \sum_{m_1 m_2}\langle j_1, j_2; m_1', m_2'|j, m'\rangle|j_1, j_2; m_1', m_2'\rangle$$

$$\langle j, m'| = \sum_{m_1 m_2}\langle j_1, j_2; m_1', m_2'|j, m'\rangle\langle j_1, j_2; m_1', m_2'|$$

y

$$e^{-i\beta J_y/\hbar} = e^{-i\beta J_{1y}/\hbar}e^{-i\beta J_{2y}/\hbar}$$

aqui $|j_1, j_2; m_1', m_2'\rangle \equiv |j_1, m_1'\rangle|j_2, m_2'\rangle$
sustituyendo

$$
\begin{aligned}
d^{(j)} &= \langle j,m|e^{-i\beta J_y/\hbar}|j,m'\rangle \\
&= \left[\sum_{m_1m_2}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j,m\rangle\langle j_1,j_2;m_1,m_2|e^{-i\beta J_{1y}/\hbar}e^{-i\beta J_{2y}/\hbar}\right]\sum_{m_1'm_2'}\langle|j_1,j_2;m_1',m_2'|j,m'\rangle|j_1,j_2;m_1',m_2'\rangle \\
&= \sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j,m\rangle\langle j_1,j_2;m_1',m_2'|j,m'\rangle\langle j_1,m_1|e^{-i\beta J_{1y}/\hbar}|j_1,m_1'\rangle\langle j_2,m_2|e^{-i\beta J_{2y}/\hbar}|j_2,m_2'\rangle \\
&= \sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j,m\rangle\langle j_1,j_2;m_1',m_2'|j,m'\rangle d^{(j_1)}_{m_1,m_1'}(\beta)d^{(j_2)}_{m_2,m_2'}(\beta)
\end{aligned}
$$

7.20 Calcular la traza de la matriz de rotación $D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)$ para *(a)* $\beta=\pi$ (b) $\alpha=\gamma=\pi$ y $\beta=2\pi$
Solución:

$$\hat{J}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$e^{i\beta\sigma_y/2}=I\cos\frac{\beta}{2}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$$

donde

$$\sigma_y\equiv\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha+\gamma)/2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

la traza es

$$trD^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)=e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}+e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}$$

si $\beta=\frac{\pi}{2}$

$$trD^{(1/2)}(\alpha,\pi,\gamma)=e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\pi}{2}+e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

(b) sustituimos $\beta=2\pi$ y $\alpha=\gamma=\pi$

$$
\begin{aligned}
trD^{(1/2)}(\pi,2\pi,\pi) &= e^{-i(\pi+\pi)/2}\cos\frac{2\pi}{2}+e^{i(\pi+\pi)/2}\cos\frac{2\pi}{2} \\
&= (\cos\pi-i\operatorname{sen}\pi)\cos\pi+(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)\cos\pi \\
&= \cos^2\pi+\cos^2\pi \\
&= 2\cos^2\pi \\
&= 2
\end{aligned}
$$

7.23 Considere una partícula de espín 1/2 que tiene un momento angular orbital $l=1$. Encuentre todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados en la adición del momento orbital y el ángulo angular de esta partícula.
Solución
Tenemos que para los coeficientes de Clebsch-Gordan

$$|l\pm1/2,m\rangle=\sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m+1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle\pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}|l,m-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle$$

así para $j=\frac{3}{2}$, $m=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$ entonces

$$m = \pm\frac{1}{2} \quad (m_1, m_s) = \left(0, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm 1, \mp\frac{1}{2}\right)$$

$$m = \pm\frac{3}{2} \quad (m_1, m_s) = \left(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm 1, \mp\frac{1}{2}\right)$$

similarmente para $j = \frac{1}{2}$

$$m = \frac{1}{2} \quad (m_1, m_s) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$m = -\frac{1}{2} \quad (m_1, m_s) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

para $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ y $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2; 1, 1/2\rangle \qquad |3/2, -3/2\rangle = |1, 1/2; -1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{2/3}|1, 1/2; 0, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1/2; 1, -1/2\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1/2; -1, 1/2\rangle + \sqrt{2/3}|1, 1/2; 0, -1/2\rangle$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2/3}|1, 1/2; 1, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1/2; 0, 1/2\rangle$$

$$|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1/2; 0, -1/2\rangle + \sqrt{2/3}|1, 1/2; -1, 1/2\rangle$$

por lo tanto los coeficientes de Clebsch-Gordon para $l = 1/2$ de partículas spín 1/2 puede leerse inmediatamente tomando el producto interno (normalizado) con el operador bra

$$\langle 1, 1/2; 1, 1/2|3/2, 3/2\rangle = 1$$
$$\langle 1, 1/2; 1, 1/2|3/2, -3/2\rangle = 1$$
$$\langle 1, 1/2; 0, 1/2|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\langle 1, 1/2; 1, -1/2|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\langle 1, 1/2; 0, 1/2|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\langle 1, 1/2; 0, -1/2|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle 1, 1/2; -1, 1/2|1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

7.27 Una partícula de espín 1/2 está en un estado de momento angular orbital (es decir, $l = 2$).

(a) ¿Cuáles son sus posibles estados de momento angular total?

(b) Si su hamiltoniano está dado por $\hat{H} = a + b\hat{L} \cdot \hat{S} + c\hat{L}^2$ donde a, b y c son números, encuentra los valores de la energía para cada uno de los diferentes estados del momento angular total. Expresa tu respuesta en términos de a, b, c.

Solución:

(a) El momento angular total esta dado por $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$, los posibles estados de la partícula están dados por $|j,m\rangle$ donde $j = l \pm \dfrac{1}{2}$ y $-l \leq m \leq l$

$$|l \pm 1/2, m\rangle = \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}}|l, m+1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}}|l, m-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle$$

para todo $-l + \dfrac{1}{2} \leq m \leq l - \dfrac{1}{2}$

$$|3/2, m\rangle = \sqrt{\frac{2+m}{5}}|2,\frac{1}{2}; m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{2-m}{5}|2,\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

$$|5/2, m\rangle = \sqrt{\frac{3-m}{5}}|2,\frac{1}{2}; m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{3+m}{5}|2,\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

por lo tanto, los posibles estados para el momento angular son

$$|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}|2,\frac{1}{2};-1,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2,\frac{1}{2};-2,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}|2,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|2,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}|2,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{7}{10}}|2,\frac{1}{2};2,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}}|2,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}\rangle$$

y

$$|\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{9}{10}}|2,\frac{1}{2};-1,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}12,\frac{1}{2};-2,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{7}{10}}|2,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{5}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|2,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{7}{10}}|2,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}|2,\frac{1}{2};2,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{9}{10}}|2,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}\rangle$$

(b) los eigeinvalores de energía estan dados por

$$\hat{H}|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle = E_{j,m}|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{H}|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle &= \Big(a + b\hat{L}\cdot\hat{S} + c\hat{L}^2|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle \\ &= a|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle + b\hat{L}\cdot\hat{S}|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle + c\hat{L}^2|j, m_l \pm \frac{1}{2}\rangle\end{aligned}$$

Recordemos $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}\cdot\hat{S}$, para el estado $|j,l,s\rangle$

$$\hat{L}\cdot\hat{S}|j,l,s\rangle = \frac{1}{2}\{\}$$

$$|3/2,-3/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}|2,1/2;-1,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|2,1/2,-2,-1/2\rangle$$

$$\begin{aligned} E_{3/2,-3/2} &= a+\frac{b}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\right)-(2\times 3)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right]\hbar^2+6c\hbar^2 \\ &= a-\frac{3}{2}b\hbar^2+6c\hbar^2 \end{aligned}$$

Para $j=3/2$

$$E_{3/2,m} = a-\frac{3}{2}b\hbar^2+6c\hbar^2$$

y $m=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$ ahora para el estado $j=5/2$

$$\begin{aligned} E_{5/2,m} &= a+\frac{b}{2}\left[\left(\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}\right)-(2\times 3)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right]\hbar^2+6c\hbar^2 \\ &= a+2b\hbar^2+6c\hbar^2 \end{aligned}$$

para $m=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$

7.29 Veamos el hamiltoniano de dos partículas no idénticas de espín 1/2 sea

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}(\hat{S}_1+\hat{S}_2)\cdot\hat{S}_1 - \frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}(\hat{S}_{1_z}+\hat{S}_{2_z})$$

Donde ε_1 y ε_2 son constantes, teniendo dimensiones de energía. Encuentre los niveles de energía y sus degeneraciones

Solución:

Los estados son la superposición del producto tensorial de los estados de spin para cada partícula $|m,s\rangle$ donde $\hat{S}=\hat{S}_1+\hat{S}_2$, $m=m_{1,s}+m_{2,s}$ con $m_{1,s}=\pm\frac{1}{2}$, $m_{2,s}=\pm\frac{1}{2}$ y $0\leq s\leq 1$ Ahora notemos que

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+2\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2$$

$$\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{S}^2-\hat{S}_1^2-\hat{S}_2^2\right)$$

se sigue a la vez de $S_1=S_2$. Los estados estan definidos por

$$|s,m\rangle = \sum_{m_{1,s}}\sum_{m_{2,s}}|1/2,-1/2;m_{1,s},m_{2,s}\rangle|1/2,-1/2;m_{1,s},m_{2,s}\rangle$$

$$|0,0\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,0\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle+\langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|0,0\rangle|1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

Como $j=0$, $m=0$

$$|1,-1|\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|1,-1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle$$

$$|0,1\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle+\langle 1/2,1/2;1/2,1/2|0,1\rangle|1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$$

$$|1,1|\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|1,1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle$$

Sabemos que

$$\langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;-1/2,-1/2|1,-1\rangle = 1$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,1/2|1,1\rangle = 1$$

en particular

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

$$|1,-1|\rangle = -|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle$$

$$|0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

$$|1,1|\rangle = |1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$$

los eigeinvalores de la energía para $|0,0\rangle$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[[0]\right)+\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \frac{3}{4}\varepsilon_1|0,0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,-1\rangle &= \hat{H}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= -\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right)-\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1+\varepsilon_2\right\}|0,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,-1\rangle$ es

$$E_{1,-1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right)-\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1+\varepsilon_2\right\}|1,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,0\rangle$ es

$$E_{1,-1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1$$

Los eigeinvalores de energía para $|1,1\rangle$

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)\cdot\hat{S}_1 - \varepsilon_2\left(\hat{S}_{1,z} + \hat{S}_{2,z}\right)$$

$$\hat{S}_2\cdot\hat{S}_1 = \frac{1}{2}\hat{S}^2$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,1\rangle &= \hat{H}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= -\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1.\varepsilon_2\right\}|0,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,1\rangle$ es

$$E_{1,1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

No hay degeneraciones asociadas con los estados porque cada uno de los cuatro estados tiene distintos eigeinvalores de energía

7.29 Veamos el hamiltoniano de dos partículas no idénticas de espín 1/2 sea

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}(\hat{S}_1 + \hat{S}_2)\cdot\hat{S}_1 - \frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}(\hat{S}_{1_z} + \hat{S}_{2_z})$$

Donde ε_1 y ε_2 son constantes, teniendo dimensiones de energía. Encuentre los niveles de energía y sus degeneraciones

Solución:

Los estados son la superposición del producto tensorial de los estados de spin para cada partícula $|m,s\rangle$ donde $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$, $m = m_{1,s} + m_{2,s}$ con $m_{1,s} = \pm\frac{1}{2}$, $m_{2,s} = \pm\frac{1}{2}$ y $0 \le s \le 1$ Ahora notemos que

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2$$

$$\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2\right)$$

se sigue a la vez de $S_1 = S_2$. Los estados estan definidos por

$$|s,m\rangle = \sum_{m_{1,s}}\sum_{m_{2,s}}|1/2,-1/2;m_{1,s},m_{2,s}\rangle|1/2,-1/2;m_{1,s},m_{2,s}\rangle$$

$$|0,0\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,0\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|0,0\rangle|1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

Como $j=0$, $m=0$

$$|1,-1|\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|1,-1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle$$

$$|0,1\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \langle 1/2,1/2;1/2,1/2|0,1\rangle|1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$$

$$|1,1|\rangle = \langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|1,1\rangle|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle$$

Sabemos que

$$\langle 1/2,1/2;-1/2,1/2|0,0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,-1/2|0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2,1/2;-1/2,-1/2|1,-1\rangle = 1$$

$$\langle 1/2,1/2;1/2,1/2|1,1\rangle = 1$$

en particular

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

$$|1,-1|\rangle = -|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle$$

$$|0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle$$

$$|1,1|\rangle = |1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$$

los eigeinvalores de la energía para $|0,0\rangle$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[[0]\right) + \varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \frac{3}{4}\varepsilon_1|0,0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,-1\rangle &= \hat{H}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= -\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right) - \varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1+\varepsilon_2\right\}|0,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,-1\rangle$ es

$$E_{1,-1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{H}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right) - \varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1+\varepsilon_2\right\}|1,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,0\rangle$ es

$$E_{1,-1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1$$

Los eigeinvalores de energía para $|1,1\rangle$

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)\cdot\hat{S}_1 - \varepsilon_2\left(\hat{S}_{1,z} + \hat{S}_{2,z}\right)$$

$$\hat{S}_2 \cdot \hat{S}_1 = \frac{1}{2}\hat{S}^2$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}|1,1\rangle &= \hat{H}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= -\left\{\varepsilon_1\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[2]\right) - \varepsilon_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}|1/2,1/2;-1/2,-1/2\rangle \\
&= \left\{\frac{7}{4}\varepsilon_1.\varepsilon_2\right\}|0,0\rangle
\end{aligned}$$

el eigeinvalor para $|1,1\rangle$ es

$$E_{1,1} = \frac{7}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

No hay degeneraciones asociadas con los estados porque cada uno de los cuatro estados tiene distintos eigeinvalores de energía

7.30 el hamiltoneano de dos particulas 1/2 esta dado

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{\hbar^2}(\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 - \frac{\epsilon_0}{\hbar}(\hat{S}_{1_z} + \hat{S}_{2_z})$$

para algún ϵ_0 constante,Los estados son, por lo tanto, la superposición de productos tensoriales de los estados de espín de cada partícula $|s,m\rangle$ donde $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$, $m = m_{1s} + m_{2s}$ con $m_{1s} = m_{2s} = \pm\frac{1}{2}$ y $0 \leq S \leq 1$
Observemos $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ implica

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{\hbar^2}\hat{S}^2 - \frac{\epsilon_0}{\hbar}\hat{S}_z$$

Además como hay cuatro distintos estados

$$|0,0\rangle, \quad |1,-1\rangle, \quad |0,1\rangle, 0,\hat{2cm}|1,1\rangle$$

por lo tanto los eigenvalores de energía se pueden escribir

$$\hat{H}|0,0\rangle = \left\{\frac{\epsilon_0}{\hbar^2}(0) - \epsilon_0\hbar(0)\right\}|0,0\rangle = 0$$

$$\hat{H}|1,-1\rangle = \{2\epsilon_0 + \epsilon_0\}|1,-1\rangle = 3\epsilon_0|1,-1\rangle$$

$$\hat{H}|1,0\rangle = \{2\epsilon_0 - 0\}|1,0\rangle = 2\epsilon_0|1,0\rangle$$

$$\hat{H}|1,1\rangle = \{2\epsilon_0 - \epsilon_0\}|1,0\rangle = \epsilon_0|1,1\rangle$$

por lo tanto, los eigenvalores son $E_{0,0} = 0$, $E_{1,-1} = 3\epsilon_0$, $E_{1,0} = 2\epsilon_0$ y $E_{1,1} = \epsilon$, Como los eigenvalores son distintos No hay estados degenerados

7.33 Considere un sistema de tres partículas no idénticas, cada una con momento angular 3/2. Encuentre los valores posibles del giro total S de este sistema y especifique el número de estados propios de momento angular correspondientes a cada valor de S
Solución:
Un eigeinestado $\hat{S}$, lo podemos definir $|s_{13}, s, m\rangle$ donde $\hat{S}_{13} = \hat{S}_1 + \hat{S}_3$ y $m = m_{1,s} + m_{2,s} + m_{3,s}$ con $m_{i,s} = \pm\frac{1}{2}$ para $i = 1,2,3$ y como $\hat{S} = \frac{3}{2}$ entonces $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ esto es que los posibles eigienestados son

$$|1,3/2,-3/2\rangle, \quad |1,3/2,-1/2\rangle, \quad |1,3/2,1/2\rangle, \quad |1,3/2,3/2\rangle$$

entonces si $\hat{S} = \frac{3}{2}$ el único valor que puede tener es $S_{1,3} = 1$

7. Partículas Idénticas

8.1 Considere un sistema de tres bosones idénticos no interactivos que se mueven en un potencial oscilador armónico unidimensional externo común. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda del estado fundamental, el primer estado excitado y el segundo estado excitado del sistema

Solución

Tenemos ψ_i para $i = 1, 2, 3$ esto para cada uno de los estados de los bosones, de la ecuación de Schrodinger, tenemos

$$-\frac{\hbar}{2m_i}\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2} + \frac{1}{2}m_i x_i^2\psi_i = E_i\psi_i$$

aquí la función de onda es

$$\psi_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m_i\omega_i}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_i\left(\sqrt{\frac{m_i\omega_i}{\hbar}}x_i\right) e^{\frac{1}{2\hbar}m_i\omega_i x_i^2}$$

es un estado normalizado, y H es el polinomio de hermite, si las partículas son idénticas $m_i = m$ para $i = 1, 2, 3$, En particular el estado Ψ del sistema es

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\sum_{\Sigma}\Psi_{n_{\sigma(1)}}(r_1)\Psi_{n_{\sigma(2)}}(r_2)\Psi_{n_{\sigma(3)}}(r_3)$$

donde σ denota la permutación de $\{1, 2, 3\}$

Sabemos que los eigeinvalores de un oscilador armónico esta dados por

$$E_{n_i} = \hbar\omega_i\left(n_i + \frac{1}{2}\right)$$

como los tres bosones están sujetos a un potencial armónico externo común $\omega_i = \omega$ para $i = 1, 2, 3$ por lo tanto

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)$$

El estado base $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ su eigeinvalor correspondiente es $E_{0,0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega$ además, como $n_i = 0$ se deduce que la función de onda se reduce a $\Psi_{0,0,0} = \psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\psi_0(r_3)$ por lo tanto la función de onda del sistema es

$$\Psi_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} H_0\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_1\right) H_0\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_2\right) H_0\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_3\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$$

Para el primer estado excitado $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, los eigeinvalores de energía

$$E = \hbar\omega\left(1 + 1 + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\hbar\omega$$

y la función de onda es

$$\Psi_{1,1,1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_1\right) H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_2\right) H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_3\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$$

Para el primer estado excitado $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, los eigeinvalores de energía

$$E = \hbar\omega\left(2 + 2 + 2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}\hbar\omega$$

y la función de onda es

$$\Psi_{1,1,1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{8}\right)^{3/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_1\right) H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_2\right) H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_3\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$$

8.3 (a) Considere un sistema de dos partículas no idénticas, cada una de las cuales tienen spin 1 y no tiene momento angular orbital (es decir, ambas partículas están en estados s). Anote todos los estados posibles para este sistema. (b) ¿Qué restricciones obtenemos si las dos partículas son idénticas? Escriba todos los estados posibles para este sistema de dos partículas idénticas de spin 1.
Solución:

a) Determinamos los estados de dos partículas spin 1 no interactuantes en estado s (que es el número de momento angular orbital $l = 0$). Ahora, se toma en cuenta que como la partícula es de spin entero, las partículas son bosones. Sea $S = S_1 + S_2$ el operador de rotación del sistema de 2 partículas en el sistema de partículas. En particular, los giros totales del sistema satisfacen $|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2$ que es $0 < s < 2$ y el estado del sistema $|s, m\rangle$ satisface $-s \leq m \leq s$ para cada s fijo, para cada partícula $|s_i, m_i\rangle$, $-s_i \leq m_i \leq s_i$ por lo tanto

$$|s, m\rangle \sum_{m_1+m_2=m} \langle s_1, s_2; m_1, m_2|s, m\rangle |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$$

Definimos en general un estado un sistema de dos partículas, para $s = 0$

$$|0,0\rangle = \langle 1,1;0,0|0,0\rangle|1,1;0,0\rangle + \langle 1,1;1,-1|0,0\rangle|1,1;1,-1\rangle + \langle 1,1;-1,1|0,0\rangle|1,1;-1,1\rangle$$

$$\langle j,1;m,0|j-1,m\rangle = -\sqrt{\frac{(j-m)(j+m+1)}{j(2j+1)}}$$

$$\langle j,1;m+1,-1|j-1,m\rangle = \sqrt{\frac{(j-m)(j+m+1)}{j(2j+1)}}$$

se deduce de inmediato que

$$\langle 1,1,0,0|0,0\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

y

$$\langle 1,1,1,-1|0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

el siguiente es

$$\langle 1,1,-1,1|0,0\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Invocando el principio de la convención de fases

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-|1,1;0,0\rangle + |1,1,1,-1\rangle + |1,1,-1,1\rangle\right\}$$

b) para $s = 1$ hay tres estados $|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$, el primer estado

$$|1,-1\rangle = \langle 1,1,0,-1|1,-1\rangle|1,1,0,-1\rangle + \langle 1,1,-1,0|1,-1\rangle|1,1,-1,0\rangle$$

$$\langle s_1, s_2; m_1, m_2|s, m\rangle = (-1)^{s-s_1-s_1}\langle s_1, s_2; m_1, m_2|s, m\rangle$$

podemos observar $\langle 1,1,0,-1|1,-1\rangle = -\langle 1,1,0,-1|1,-1\rangle$ por lo tanto

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,0,-1\rangle - |1,1,-1,0\rangle\right\}$$

Como la probabilidad es 1, $\langle 1,-1|1,-1\rangle = 1$ vemos que $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,0,-1\rangle - |1,1,-1,0\rangle\right\}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-|1,1,0,-1\rangle + |1,\right.$ describen al mismo estado, Se diferencian entre sí por una fase global -1. La elección del signo

se puede calcular calculando explícitamente los coeficientes de Clebsch-Gordan
Para el estado $|1,0\rangle$ se tiene la siguiente superposición

$$|1,0\rangle = \langle 1,1;1,-1|1,0\rangle|1,1;1,-1\rangle + \langle 1,1;-1,1|1,0\rangle|1,1;-1,1\rangle + \langle 1,1;0,0|1,0\rangle|1,1;0,0\rangle$$

De nuevo, desde el principio de conversión de fase $\langle 1,1;1,-1|1,0\rangle = -\langle 1,1;-1,1|1,0\rangle$ ademas $\langle s,1;m,0|s,m\rangle = \dfrac{m}{\sqrt{s(s+1)}}$ por lo tanto $\langle 1,1;0,1|1,0\rangle = 0$, el estado

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,1,-1\rangle - |1,1,-1,1\right\}$$

aquí $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fue elegido para satisfacer $\langle 1,0|1,0\rangle$ y como anteriormente $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,1,-1\rangle - |1,1,-1,1\right\}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-|1,1,1,-1\rangle + |1,1,-1,1\right\}$ ambos describen el mismo estado físico, para resolver el signo explícito, emplear

$$\sqrt{2}j\langle j_1,j_2;j_1,j-j_2-j_1|j,j-1\rangle = \sqrt{(j_2-j+j_1+1)(j_2+j-j_1)}\langle j_1,j_2;j_1,j-j_1|j,j\rangle$$

después $\rangle 1,1,1,-1|1,0\rangle =\rangle 1,1,1,0|1,1\rangle$ desde la fase de conversión $\rangle 1,1,1,0|1,1\rangle > 0$, de la relación de ortogonalidad $\displaystyle\sum_{m_1+m_2=m}\langle j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$ por lo tanto podemos decir $\langle 1,1,1,0|1,1\rangle^2 + \langle 1,1,0,1|1,1\rangle^2 = 1$, observemos $\langle 1,1,1,0|1,1\rangle^2 = \langle 1,1,0,1|1,1\rangle^2$ esto significa $\langle 1,1,1,0|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\langle 1,1,0,1|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Para el estado $|1,1\rangle$

$$|1,1\rangle = \langle 1,1,0,1|1,1\rangle|1,1,0,1\rangle + \langle 1,1,1,0|1,1\rangle|1,1,1,0\rangle$$

siguiendo el principio de la convención de fases, el estado puede ser escrito inmediatamente

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,0,1\rangle - |1,1,1,0\rangle\right\}$$

la fase global es -1 (que puede resolverse explícitamente calculando los coeficientes Clebsch-Gordon) Aquí $\langle 1,1,1,0|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-|1,1,0,1\rangle + |1,1,1,0\rangle\right\}$$

Para $s=2$ tenemos 5 estados $|2,-2\rangle$, $|2,-1\rangle$, $|2,0\rangle$, $|2,1\rangle$ y $|2,2\rangle$ los estados respectivos tienen la siguiente superposición

$$|2,\pm 2\rangle = |1,1,\pm 1,\pm 1\rangle$$

$$|2,\pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,1,\pm 1,0\rangle - |1,1,0,\pm\rangle\right\}$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|1,1,1,-1\rangle + 2|1,1,0,0\rangle + |1,1,-1,1\rangle\right\}$$

8.5 Dos partículas idénticas de spin 1/2 están encerradas en un potencial de caja unidimensional de longitud L con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Suponiendo que el sistema de dos partículas está en un estado de spin singlete, encuentre los niveles de energía , las funciones de onda y las degeneraciones correspondientes a la tres estados más bajos

Solución:

Suponga que dos partículas spin-4, están confinadas para moverse en una dimensión a lo largo de $D = [0, L]$. Determinamos las funciones de onda y los valores propios de energía si el sistema de dos partículas está en un estado singlete de rotación. Primero, supongamos que $|s, m\rangle$ denota el estado de giro del sistema, donde s está asociado con el operador de spin $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$, siendo $\hat{S}_i$ el operador spin para la partícula i. De la suposición del giro 1, se deduce inmediatamente que $0 \leq s \leq 1$ y $-s \leq m \leq 1$. Finalmente, recuerde que un estado de singlete giratorio corresponde al estado $s = 0$. En particular, esto comprende precisamente un estado: $|0, 0\rangle$.

sabemos que este potencial esta dado

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D \\ \infty & \text{Otro caso} \end{cases}$$

a partir de estas condiciones llegamos a la siguiente función normalizada

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n_i \pi}{L_i} x_i\right)$$

y sus correspondientes eigeinvalores de energía son

$$E_i = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_i^2}{2mL} \qquad n_i = 1, 2, 3 \ldots \quad i = 1, 2$$

por lo tanto la energía total de este sistema es $E_{n_1,n_2} = E_{n_1} + E_{n_2}$ y por último, veamos $\psi_i(x_i) = \langle x_i | n_i \rangle$ es la representación de la posición. Luego $|n_i\rangle$ son los eigeivectores de la energía para una partícula El estado del sistema es una superposición de partículas individuales

$$|s, m\rangle = \sum_{m_1 + m_2} |s_1, s_2; m_1, 2_2 | s, m\rangle$$

aquí el número principal $n = n_1 + n_2$ se suprime temporalmente esto, para $s = 0$

$$|0, 0\rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -- \frac{1}{2} | 0, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

los coeficientes de Clebsch-Gordon son

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La función de onda esta dada por el producto tensorial

$$|n, s, m\rangle = \sum_{n_1 + n_2} \sum_{m_1 + m_2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 | s, m\rangle | n_1, n_2$$

aquí $|n, s, m\rangle = |n\rangle |s, m\rangle$ y $|n\rangle = |n_1, n_2\rangle$ recordemos en la representación de posiciones

$$\langle x_1, x_2 | n\rangle = \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n_1 \pi}{L} x_1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_2 \pi}{L} x_2\right)$$

Por lo tanto, para un estado spin singlete, los tres estados de energía más bajos corresponden a $|n\rangle = |1, 1\rangle$, $|1, 2\rangle$, $|2, 1\rangle$ Y por lo tanto, para el subespacio abarcado por el $|1, 1\rangle$

$$|1, 1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle \, \}1/2, 1/2; -1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle\}$$

con eigeinvalores $E_2 = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$ este estado no tiene degeneración
para $|n\rangle = |\alpha, \beta\rangle$ con $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ satisface $\alpha + \beta = 3$, el estado es

$$|\alpha, \beta, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha, \beta\rangle \}1/2, 1/2; 1/2, -1/2\rangle + |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle\}$$

Tenemos $E_3 = \dfrac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. la degeneración g_3 de los estados singletes de spin $|\alpha, \beta, 0, 0\rangle$ es así $g_3 = 2$ observemos que la función de onda puede ser obtenida si $Y_{l,m}\theta, \phi) = \langle\theta, \phi|l, m\rangle$ y $Y'_{l',m'}(\theta', \phi)Y_{l,m}(\theta, \phi) = \langle\theta', \phi', \theta, \phi|l', l, m', m\rangle$ en particular la función de onda corresponde a el estado $|\alpha, \beta, 1, \gamma\rangle$ es de la forma

$$\Psi_{n,s,m} = \langle x_1, x_2|n\rangle\langle\theta_1, \phi_1, \theta_2, \psi_2|1/2, 1/2, m_1, m_2\rangle$$

8.7 Encuentre la energía del estado fundamental, la energía promedio del estado fundamental por partícula y la función de onda del estado fundamental de un sistema de N bosones idénticos que no interactúan, que se mueven bajo la influencia de un potencial oscilador armónico unidimensional
Solución:

(a) Consideramos un sistema de N bosones idénticos que no interactúan, sujetos a un potencial oscilador armónico unidimensional. La energía del estado fundamental, la energía promedio del estado fundamental por partícula y la función de onda del estado fundamental del sistema se determinan a continuación. recordemos que la función de onda normalizada y el valor propio de energía de una sola partícula sujeta a un potencial armónico son, respectivamente

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_{n_i}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x_i\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

Como es un oscilador Sabemos que la energía esta dada

$$E_{n_i} = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right)$$

Definimos $\sum_{i=1}^{N} n_i - N$ si $n = 0$ corresponde al estado base del sistema
Por lo tanto, el valor propio de energía total del sistema $E_{|n\rangle} = \sum_{i=1}^{N} E_n$ que es

$$E_{|n\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i + \frac{N}{2}\right)\hbar\omega$$

Y la función de onda tiene la siguiente forma

$$\Psi_{|n\rangle}(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma}\psi\left(x_{\sigma(1)}\right)\ldots\psi\left(x_{\sigma(N)}\right)$$

Donde $\sigma : \{1 \ldots N\} \to \{1 \ldots N\}$ es de uno a uno, mapeo de correspondencia (llamado permutación), y la suma es sobre todas las permutaciones de $\{1 \ldots N\}$. Es decir,

$$\psi_{|n\rangle}(x_1 \ldots N) = \sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_{n_i}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

aquí $|n\rangle = |n_1, \ldots, n_N\rangle$, recordemos además que $\psi_i = \langle x_i|n_i\rangle$ para $i = 1, 2, 3 \ldots N$ en particular $\Psi_n(x_1, \ldots, x_N) = \langle x_1, \ldots x_N|n\rangle$ para partículas en estado base $n_1 \ldots N$ con $n_1 = 1$ los eigeinvalores de energía se reducen a $E_{|0\rangle} = \dfrac{3N}{2}\hbar\omega$ y la función de onda se reduce a

$$\Psi_0(x_1, \ldots x_n) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\right\}^N \sum_{\sigma}\prod_{n=1}^{N} H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

por lo tanto un sistema de N partículas que no interactuan la energía del estado base es $E_{|n\rangle} = \frac{3N}{2}\hbar\omega$ y su función de onda es

$$\Psi_0(x_1,\dots x_n) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\right\}^N \sum_\sigma \prod_{n=1}^{N} H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2_{\sigma(i)}\right)$$

en particular, la energía promedio del estado base por partícula es la relación entre la energía del estado bese y la cantidad de partículas que no interactúan $E_{|n\rangle}/N = \frac{3}{2}\hbar\omega$

8.9 Considere un sistema de cuatro partículas no interactivas que están confinadas en un pozo de potencial infinito unidimensional de longitud a: $V(x) = 0$ para $0 < x < a$ y $V(x) = \infty$ para otros valores de x. Determine las energías y las funciones de onda del estado fundamental, el primer estado excitado y el segundo estado excitado cuando las cuatro partículas están

(a) bosones distinguibles de modo que sus masas respectivas satisfagan esta relación: $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$, y

(b) bosones idénticos (cada uno de masa m).

Solución:
Tenemos un sistema de 4 bosones que no interactúan en una dimensión a un potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in (0,a) \\ \infty & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Recordemos que para los bosones que no interactúan, la función de onda de partícula única y los valores propios de energía son:

$$\psi_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}}\left(\frac{m_i\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m_i\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

y

$$E_{n_i} = \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$ La energía del sistema esta dada por

$$E_{n_1,n_2,n_3,n_4} = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + E_{n_4} = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)\hbar\omega$$

sabemos que $n = 0$ es el estado base, si todos los bosones son distintos, la función de onda es

$$\psi_{n_1,n_2,n_3,n_4} = \prod_{i=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}}\left(\frac{m_i\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m_i\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$
$$\psi_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}}\left(\frac{m_i\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m_i\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

Por otro lado, si los bosones fueran todos idénticos, no hay forma de identificar qué estado se encuentra la partícula, la función de onda del sistema esta dada por la suma de permutaciones del producto de las funciones de onda individuales

$$\Psi_{n_1,n_2,n_3,n_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\sqrt{4!}}\sum_\sigma \psi_1(x_{\sigma(1)})\psi_2(x_{\sigma(2)})\psi_3(x_{\sigma(3)})\psi_4(x_{\sigma(4)})$$

suponga que las masas de bosones satisfacen $m_1 < \ldots < m_4$. El valor propio de energía del sistema en el estado fundamental $|0\rangle$ es $E_{|0\rangle} = 2\hbar\omega$, Entonces, la función de onda del sistema en el estado fundamental $|0\rangle$ es

$$\Psi_{|0\rangle}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\omega}{4\pi\hbar}\prod_{i=1}^{4} m_i^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

Para el primer estado excitado $|1\rangle$, pero el eigeinvalor es independiente de la masa de las partículas, se deduce que existen los siguientes estados degenerados $|1,1,1,2\rangle$, $|1,1,2,1\rangle$, $|1,2,1,1\rangle$, $|2,1,1,1\rangle$, el eigeinvalor del sistema del primer estado excitado $|1\rangle$ es

$$E_{|1\rangle} = (1+1+1+2+2)\hbar\omega = 7\hbar\omega$$

La función de onda para este caso es

$$\Psi_{|1\rangle}(x_1,\dots x_n) = \frac{\omega}{8\pi\hbar}\prod_{n=1}^{4} m_i^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m_i\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

Para el segundo estado excitado $|2\rangle$ la degeneración es $|1,1,2,2\rangle$, $|1,2,2,1\rangle$, $|1,2,1{,}2\rangle$, $|2,1,1,2\rangle$, $|2,2,1,1\rangle$ y los eigeinvalores de este estado es: $E_{|2\rangle} = (1+1+2+2+2)\hbar\omega = 8\hbar\omega$ y su función de onda es

$$\Psi_{|2\rangle}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\omega}{16\pi\hbar}\prod_{i=1}^{4} m_i^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega}{\hbar}}x_i\right) exp\left(\frac{-m_i\omega}{2\hbar}x_i^2\right)$$

(b) Suponemos que los boossones son idénticos $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ para $n = 0$ el estado del sistema es $|1,1,1,1\rangle$, la energía del sistema en el segundo estado excitado $|2\rangle$ es

$$E_{|0\rangle} = (1+1+1+1+2)\hbar\omega = 6\hbar\omega$$

en este caso la función de onda es

$$\Psi_{|0\rangle}(x_1,\dots x_4) = \frac{1}{4\sqrt{4!}}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{4} H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

Ahora consideremos el primer estado excitado $|1\rangle$ del sistema $|2,1,1,1\rangle$, $|1,2,1,1\rangle$, $|1,1,2,1\rangle$, $|1,1,1,2\rangle$ la energía del sistema en el primer estado excitado es $E_{|1\rangle} = (1+1+1+2+2)\hbar\omega = 7\hbar\omega$ la función de onda asociada es

$$\Psi_{|1\rangle}(x_1\dots x_4) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3!}{4!}}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

$$\Psi_{|1\rangle}(x_1\dots x_4) = \frac{1}{16}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

para el segundo estado $|2\rangle$ excitado es representado por $|2,2,1,1\rangle$, $|1,2,2,1\rangle$, $|1,2,1,2\rangle$ los eigeinvalores son

$$E_{|2\rangle} = (1+1+2+2+2)\hbar\omega = 8\hbar\omega$$

en este caso la función de onda es

$$\Psi_{|2\rangle}(x_1,\dots x_4) = \sqrt{\frac{2!2!}{4!}}\frac{\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2^{n_i}n_i!}} m^{1/4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

$$\Psi_{|2\rangle}(x_1,\dots x_4) = \frac{1}{16\sqrt{6}}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{4} H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(i)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(i)}^2\right)$$

donde $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \{1,2,3\}$ y $n_1+n_2+n_3+n_4 = 6$

$$\Psi_{|1,1,2,2}(x_1,\dots x_4) = \frac{1}{16\sqrt{4!}}\frac{m\omega}{\pi\hbar}\sum_{\sigma} H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(1)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(1)}^2\right)\times$$

$$H_1\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(2)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(2)}^2\right) H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(3)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(3)}^2\right)\times$$

$$H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_{\sigma(4)}\right) exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x_{\sigma(4)}^2\right)$$

8.11 Considere un sistema de cuatro spin 1/2 idénticos no interactivos, partículas que están en el mismo estado de rotación $|1/2, 1/2\rangle$ y confinadas para moverse en un pozo de potencial infinito unidimensional de longitud a: $V(x) = 0$ para $0 < x < a$ y $V(x) = \infty$ para otros valores de x . Determine las energías y las funciones de onda del estado fundamental, el primer estado excitado y el segundo estado excitado

Solución:

Tenemos un sistema de 4 partículas que no interaccionan de spin (fermiones), su estado $|1/2, 1/2\rangle$, de masa M, sujeta a un potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in (0, a) \\ \infty & \text{Otro caso} \end{cases}$$

De la ecuación de schrodinger Tenemos que los eigeinvalores de la energía y la función de onda están dados

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2Ma^2} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

por lo tanto para los 4 fermiones que no interaccionan la energía y la función de onda son

$$E_{|n\rangle} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{Ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2\right)$$

$$\Psi_{|n\rangle} = \frac{1}{\sqrt{4!}}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{n_1\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{n_1\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{sen}\left(\frac{n_4\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \cdots & \operatorname{sen}\left(\frac{n_4\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

La razón para definirlo de esta manera se deriva del hecho de que todos los fermiones tienen estados de espín idénticos. un fermión puede ocupar un nivel de energía vacío en cualquier momento sin violar el Principio de Exclusión de Pauli. Por lo tanto. el estado fundamental debe satisfacer $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (1, 2, 3, 4)$ para $n = 0$ defina el estado fundamental del sistema.
para $n = 0$ el eigeinvalor de la energía es

$$E_{|0\rangle} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{Ma^2}(1 + 4 + 9 + 16) = \frac{60\hbar^2\pi^2}{Ma^2}$$

este es el valor del estado base y su función de onda es

$$\Psi_{|0\rangle} = \frac{1}{\sqrt{4!}}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \cdots & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Para el primer estado excitado $n = 1$ solo tenemos una posibilidad de escribir el estado $|1\rangle = |1, 2, 3, 5\rangle$ los eigeinvalores para este es

$$E_{|0\rangle} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{Ma^2}(1 + 4 + 9 + 25) = \frac{78\hbar^2\pi^2}{Ma^2}$$

este es el valor del estado base y su función de onda es

$$\Psi_{|1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{4!}}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Para el segundo estado excitado $|2\rangle$ hay una sola posibilidad $|2\rangle = |1,2,4,5\rangle$ y su eigeinvalor de energía es

$$E_{|2\rangle} = \frac{2\hbar^2 n^2}{Ma^2}(1+4+16+25) = \frac{102\hbar^2 n^2}{Ma^2}$$

su función asociada es

$$\Psi_{|2\rangle} = \frac{1}{\sqrt{4!}}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{a}x_1\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{a}x_4\right)\chi\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

8.13 Asumiendo que los electrones en el átomo de litio son bosones sin espín y descuidando las interacciones entre ellos, encuentre la energía y la función de onda del estado fundamental y el primer estado excitado de este sistema (hipotético).

Solución:

Si se tiene tres electrones orbitando en el átomo de litio , no interactuan estos bossones, recordemos que para un potencial de Coulomb los valores propios de la energía para una partícula son

$$E_n = \frac{Z^2 e^2}{2a_0 n^2}$$

donde a_0 es el radio de Borh Z es el numero de protones en el núcleo

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\theta)$$

Se tiene que el átomo de litio $Z = 3$ y los eigeinvalores de este sistema son

$$E_{|n\rangle} = -\frac{9e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2}\right) \tag{18}$$

y la función de onda de los tres bossones idénticos esta dada por todas las posibles permutaciones de $\{1,2,3\}$ esto es {1,2,3}$\{3,1,2\}$, {2,3,1}, $\{1,3,2\}$, {3,2,1}, $\{2,1,3\}$ entonces

$$\begin{aligned} \psi(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{3!}}\left[\psi_{n_1l_1m_1}(\xi_1)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_2)\psi_{n_3l_3m_3}(\xi_3) + \psi_{n_1l_1m_1}(\xi_3)\psi_{n_2l_2m_2(\xi_1)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_2)}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3!}}\left[\psi_{n_1l_1m_1}(\xi_2)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_3)\psi_{n_3l_3m_3}(\xi_1) + \psi_{n_1l_1m_1}(\xi_1)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_3)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_2)\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3!}}\left[\psi_{n_1l_1m_1}(\xi_3)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_2)\psi_{n_3l_3m_3}(\xi_1) + \psi_{n_1l_1m_1}(\xi_1)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_2)\psi_{n_2l_2m_2}(\xi_3)\right] \end{aligned}$$

aquí $\xi_i = (r_i,\theta_i,\phi_i)$ para $i = 1,2,3$

Para el estado base $n = 0$, $|0\rangle = |1,1,1\rangle$, los eeigeinvalores son calculados, sustituyendo en 18

$$E_{|0\rangle} = -\frac{9e^2}{2a_0}(1+1+1) = \frac{27e^2}{2a_0}$$

este es el eigeinvalor del estado base y correspondiente función de onda es

$$\Psi_{|0\rangle} = \sqrt{6}\psi_{1,0,0}(\xi_1)\psi_{1,0,0}(\xi_2)\psi_{1,0,0}(\xi_3)$$

Ahora para el primer estado excitado tenemos $|1\rangle = |1,1,2\rangle, |1,2,1\rangle, |2,1,1\rangle$ entonces para obtener los eigeinvalores de energía, tenemos $n_1 = n_2 = 1$ y $n_3 = 2$, sustituyendo en 18

$$E_{|0\rangle} = -\frac{9e^2}{2a_0}\left(1+1+\frac{1}{2^2}\right) = -\frac{81e^2}{8a_0}$$

y su función de onda esta dada por

$$\Psi_{|1\rangle}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{\sqrt{3!}}\left[\psi_{1,0,0}(\xi_1)\psi_{1,0,0}(\xi_2)\psi_{2,0,0}(\xi_3) + \psi_{1,0,0}(\xi_3)\psi_{1,0,0}(\xi_1)\psi_{2,0,0}(\xi_2) + \psi_{1,0,0}(\xi_2\psi_{1,0,0}(\xi_3)\psi_{2,0,0}(\xi_1)\right]$$

8.15 Considere un sistema de dos partículas de spin 1/2 idénticas no interactivas (con masa m) que están confinadas para moverse en un potencial oscilador armónico unidimensional común. Suponga que las partículas están en un estado con la función de onda

$$\Psi(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x_0^2}(x_2-x_1)exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_0^2}\right)\chi(s_1,s_2) \tag{19}$$

donde x_1 y x_2 son las posiciones de las partículas 1 y 2, respectivamente, y $\chi(s_1,s_2)$ es el estado de rotación de las dos partículas.

(a) ¿$\chi(s_1,s_2)$ va a ser un estado singlete o triplete?

(b) Encuentre la energía de este sistema.

Solución:
Sean dos particulas de masa m con spin 1/2 estan confinadas en un potencial de una dimensión (armónico)

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2+x_2^2)$$

Por lo tanto la función de onda de este sistema es

$$\Psi(x_1,x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x_0^2}(x_2-x_1)exp\left(\frac{-(x_1^2+x_2^2)}{2x_0^2}\right)\chi(s_1,s_2)$$

donde x_0 es una constante real y $\chi(s_1,s_2)$ denotamos el spin del estado del sistema, recordando en general

$$\Psi(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) - \psi_{n_1}(x_2)\psi_{n_2}(x_1)\right]\chi(s_1,s_2)$$

donde $\psi_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^k k!(\sqrt{\pi})}}H_k\left(\dfrac{x}{x_0}\right)e^{-\frac{1}{2}(x/x_0)^2}observe\mathrm{H}_0\left(\dfrac{x}{x_0}\right) = 1$ y $H_1\left(\dfrac{x}{x_0}\right) = \dfrac{2x}{x_0}$ es claro que $\psi_{n_1} = \psi_0$ y $\psi_{n_2} = \psi_1$ en particular $n_1 = 0$ y $n_2 = 1$

a) Recordemos que como sistema de fermiones está definido por las funciones de onda antisimétricas de los fermiones individuales. Porque el factor espacial es una función antisimétrica. se deduce que el estado de rotación debe ser una función simétrica. y por lo tanto, el estado de spin debe ser un estado de triplete de spin

b) para el potencial dado, los eigeinvalores de energía para una partícula esta dado por

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

los eigeinvalores de la energía en $|n_1,n_2\rangle = |0,1\rangle$ son

$$E_{0,1} = (0+1+1)\hbar\omega = 2\hbar\omega$$

8. Métodos de aproximación para estados estacionarios

9.1 Calcule la energía del enésimo estado excitado a la perturbación de primer orden para un potencial de caja unidimensional de longitud $2L$, con paredes en $x = -L$ y $x = L$, que se modifica en la parte inferior por las siguientes perturbaciones con $V_0 << 1$

(a) $V_p(x) = \begin{cases} -V_0 & -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

(b) $V_p(x) = \begin{cases} -V_0 & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Solución:

a) Los valores de un pozo cuadrado infinito asimétrico estan dados por

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$$

La función de onda para el pozo asimétrico de ancho 2L viene dada por

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) \qquad [0, 2L]$$

Haciendo un cambio de variable $\xi = x + a$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2L}(\xi - a)\right)$$

Perturbamos el potencial $0 < V_0 << 1$ como

$$V(x) = V(x) + V_p(x)$$

aquí $V_p(x)$ es el potencial perturbado
La energía perturbada esta dada por

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2m(2L)^2} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8mL^2}$$

el potencial perturbado es

$$V_p(x) = \begin{matrix} -V_0 & & x \in [-L, L]0 \\ & \text{En otro caso} & \end{matrix}$$

Los eigenvalores de la energía del sistema perturbado de primer orden esta dado por

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n | V | \psi_n \rangle$$

sustituyendo $\dfrac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2L}(\xi - a)\right)$ por ψ_n

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2L}(\xi - a)\right) V_0 d\xi \\ &= \frac{V_0}{L}\left[\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2L}(\xi - a)\right) + \frac{2n\pi}{L}(\xi - a)}{\frac{4n\pi}{L}}\right]_{-L}^{L} \\ &= V_0 \end{aligned}$$

por lo tanto la energía del estado excitado enésimo, con perturbación a primer orden es

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2m(2L)^2} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8mL^2} - V_0$$

(b) La energía esta dada por

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL}$$

para $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, $\xi = \frac{1}{2}(x - L)$ con con $a = -\frac{L}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$ y la función de onda se convierte

$$\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\left(\xi + \frac{L}{2}\right)\right)$$

sustituyendo esta función en $E_n^{(1)} = \langle|\psi_n|\hat{H}\rangle$

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= -\frac{L}{2}\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}(\xi - a)\right) V_0 d\xi \\ &= -\frac{2V_0}{L}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(\xi - a)\right) + \frac{4n\pi}{L}(\xi - a)}{\frac{8n\pi}{L}}\right. \\ &= \frac{V_0}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la energía del n-esimo estado excitado para la perturbación a primer orden es

$$E_n = \frac{{}^2\pi^2 n^2}{2mL} - \frac{V_0}{2}$$

9.5 Considere una partícula de masa m que se mueve en un potencial tridimensional $V(r) = kr$, donde k es una constante que tiene las dimensiones de una fuerza. Use el método variacional para estimar su energía del estado fundamental; puede tomar $R(r) = e^{-r^2/2a^2}$ como la función radial de prueba donde a es un parámetro ajustable.
Solución:

Sí tenemos una partícula de masa m está sujeta a un potencial tridimensional $V(r) = kr$. donde k es alguna constante. Determinamos el valor propio de la energía del estado fundamental mediante el método variacional.

$$0 = \frac{\partial E(\lambda_1, \ldots \lambda_n)}{\partial_{\lambda_i}} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\langle \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)|\hat{H}|\psi(\lambda_1, \ldots \lambda - k)\rangle$$

Para todo $i = 1, \ldots k$. donde, se determinarán. Como función de prueba, considere la función de onda radial $R(r) =$.sabemos que en coordenadas esféricas.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right.$$

los componentes angulares se ignorarán aquí los escribimos como $\nabla_{\phi,\theta}$ Por lo tanto, $\nabla^2 R(r) = \nabla_r^2 R(r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r)\right. &= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} e^{-r^2/(2a^2)} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} e^{-r^2/(2a^2)} \\ &= \frac{3}{a^2} e^{-r^2/(2a^2)} + \frac{r^2}{a^4} e^{-r^2/(2a^2)} \end{aligned}$$

Observemos $\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} dr = \frac{1}{2}a^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} dx = a\sqrt{\pi} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2/a^2} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_0^\infty r^2 e^{-ax^2} dx = \frac{a^3\sqrt{\pi}}{4}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\langle R(a)|\hat{H}|R(a)\rangle &= \int_0^\infty e^{-r^2/2a^2}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + kr\right]e^{-r^2/2a^2}dr \\
&= -\int_0^\infty e^{-r^2/2a^2}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 e^{-r^2/2a^2}dr + k\int_0^\infty re^{-r^2/a^2} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{3}{a^2}\int_0^\infty e^{-r^2/a^2} - \frac{1}{a^4}\int_0^\infty r^2 e^{-r^2/a^2}dr\right] + k\int_0^\infty re^{-r^2/2a^2}dr \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{3}{a^2}\frac{a\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{a^4}\frac{a^3\sqrt{\pi}}{4}\right] + \frac{1}{2}ka^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle R(a)|R(a)\langle &= \int_0^\infty e^{-r^2/(2a^2)}e^{-r^2/(2a^2)}dr \\
&= \int_0^\infty e^{-r^2/a^2}dr \\
&= \frac{\sqrt{\pi}a}{2}
\end{aligned}
$$

es decir $\langle R(a)|\hat{H}|R(a)\rangle = \frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8ma} + \frac{1}{2}ka^2$ por lo tanto, tomando la variación con respecto al parámetro a

$$
\frac{\partial}{\partial a}\langle R(a)|\hat{H}|R(a)\rangle = -\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8ma^2} + ka
$$

pero

$$
\frac{\partial}{\partial a}\langle R(a)|\hat{H}|R(a)\rangle = 0
$$

$$
a = \left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{1/3}
$$

La energía para el estado base, la aproximamos como

$$
E_0 = \frac{\langle R(a)|\hat{H}|R(a)\rangle}{\langle R(a)|R(a)\rangle} = \frac{\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8ma} + \frac{1}{2}ka^2}{\frac{\sqrt{\pi}a}{2}} = \frac{\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8m\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{1/3}} + \frac{1}{2}k\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{2/3}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{1/3}}
$$

$$
E_0 = \frac{5\hbar^2\sqrt{\pi} + 4mk\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)}{8m\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{2/3}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{5\hbar^2\sqrt{\pi} + \frac{5}{2}\hbar^2\sqrt{\pi}}{8m\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{2/3}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{15\hbar^2}{8m\left(\frac{5\hbar^2\sqrt{\pi}}{8mk}\right)^{2/3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{5\hbar^2k^2}{\pi m}\right)
$$

Esta es la energía del estado base

9.9 Considere dos partículas idénticas de espín 1/2 que están confinadas en un potencial de frecuencia de oscilador armónico tridimensional isotrópico

(a) Encuentre la energía del estado fundamental y la función de onda correspondiente de este sistema cuando las dos partículas no interactúan.

(b) Considere ahora que existe un potencial dependiente de espín débilmente atractivo entre las dos partículas, $V(r_1, r_2) = -kr_1r_2 - \lambda\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}$, donde k y λ son dos números reales positivos pequeños. Encuentre el estado fundamental de la teoría de perturbación independiente del tiempo de primer orden

(c) Utilice el método variacional para estimar la energía del estado fundamental de este sistema de dos partículas de spin 1/2 no interactivas confinadas a un oscilador armónico tridimensional isotrópico. ¿Cómo se compara su resultado con el obtenido en (a)?

Solución:

(a) Dadas dos partículas de espín idénticas de masa m, sujetas a un potencial de oscilador armónico 3D isotrópico

$$V_0(\bar{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Determinemos el valor propio de energía del estado fundamental cuando las dos partículas no interactúan. Ahora, tenemos que para una sola partícula tiene el valor propio

$$E_{n_1,l_1} = \left(2n_1 + l_1 + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

Aquí $n_1, l_1 = 0, 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, $E_{n_1,l_1,n_2,l_2} = (2(n_1+n_2) + l_1 + l_2 + 3)\hbar\omega$ Es la energía del sistema no interactiva de dos partículas.
La energía del estado bese se calcula sustituyendo $n_1 = n_2 = 0$ y $l_1 = l_2 = 0$

$$E_0 = (2(0+0) + 0 + 0 + 3)\hbar\omega = 3\hbar\omega$$

Por lo tanto, el estado fundamental la energía es $E_0 = 3\hbar\omega$

(b) Dado el potencial del oscilador armónico en (a), suponemos que existe un potencial débil dependiente del espín perturbador entre las dos partículas dado por

$$V_p(r_1, r_2) = -k\hat{r}_1\hat{r}_2 - \lambda\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}$$

para $|k| << 1$ y $|\lambda| << 1$
es decir $V_0 \to V = V_0 + V_p$ para simplificar $W' = r_1 r_2$ y $W'' = S_{1z}S_{2z}$ Determinando el estado base. recuerde que debido a que el operador de Schrodinger es lineal, la teoría de la perturbación se puede aplicar dos veces al potencial de perturbación, donde la perturbación se realiza sobre la función de onda de los estados propios del oscilador armónico no perturbado.

$$E'^{(1)}_{N_1,N_2} = \langle N_{n_1,l_1,m_1}, N_{n_2,l_2,m_2}, m_{s1}, m_{s2}|\hat{W}'|N_{n_1,l_1,m_1}, N_{n_2,l_2,m_2}, m_{s1}, m_{s2}\rangle$$

$$E'^{(1)}_{m_{s,1},m_{s,2}} = \langle N_{n_1,l_1,m_1}, N_{n_2,l_2,m_2}, m_{s1}, m_{s2}|\hat{W}''|N_{n_1,l_1,m_1}, N_{n_2,l_2,m_2}, m_{s1}, m_{s2}\rangle$$

aquí m_i representa el estado de spin de la partícula i y $N_i = 2n_i + l_i$
La perturbación a primer orden los eigeinvalores de la energía son

$$E_{N_1,N_2} = E^{(0)}_{N_1,N_2} + E'^{(1)}_{N_1,N_2} + E''^{(2)}_{m_1,m_2}$$

La corrección a primer orden del estado base es

$$\begin{aligned}
\langle 0,0,0,0,m_1,m_2|\hat{W}'|0,0,0,0,m_1,m_2\rangle &= \langle 0,0,0,0,m_1,m_2|r_1r_2|0,0,0,0,m_1,m_2\rangle \\
&= \langle 0,0,0,0,m_1,m_2|r_1|0,0,0,0,m_1,m_2\rangle \\
&\quad\ \langle 0,0,0,0,m_1,m_2|r_2|0,0,0,0,m_1,m_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\langle r,\theta,\phi|N_{000}\rangle \propto e^{-m\omega r^2/2\hbar}Y_{0,0}(\theta,\phi)$$

por lo tanto

$$\langle 0,0,m_i|r_i|0,0,m_i\rangle \equiv 0$$

$$\langle 0,0,0,0,m_1,m_2|\hat{W}'|0,0,0,0,m_1,m_2\rangle = 0$$

Para obtener el estado del spin del sistema definimos

$$|s,m_s\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},m_{s1},m_{s2}\right\rangle$$

$$2\hat{S}_{1z},\hat{S}_{2z}|s,m_s\rangle = \hbar^2\left(s_z^2 - \frac{1}{2}\right)|s,m_s\rangle$$

donde $s = s_1 + s_2$, con $-s \leq m_s \leq s$ se sigue que

$$\langle 0,0,0,0,s,m_s|\hat{W}''|0,0,0,0,s,m_s\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(m_s^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Recordemos que existen dos estados de spín: singlete, y triplete, ya que las partículas son idénticas tienen el mismo spín, por lo tanto $s = 1 \Rightarrow m_s \in \{-1,0,1\}$ es un estado de triplete de spin La correción de energía en el estado base es

$$E_{0,0} = 3\hbar\omega \pm \frac{1}{4}\lambda^2\hbar^2$$

(c) Tenemos la energía del estado base

$$E_0(\beta) = \langle\psi_0(\beta),s,m_s|\hat{H}|\psi_0(\beta),s,m_s\rangle$$

´.donde $\beta : \delta E_0(\beta) = 0$ y la función es $\psi_0(r_1,r_2;\beta) = Ae^{-\frac{1}{2}\beta(r_1^2+r_2^2)}$ donde A es la constante de normalización

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - kW' - \lambda W''$$

El Hamiltoneano se puede evaluar termino a termino

$$\langle\psi_0(\beta),s,m_s|\hat{H}|\psi_0(\beta),s,m_s\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\langle\psi_0(\beta)|\nabla_1^2 + \nabla_2^2|\psi_0(\beta)\rangle$$

usamos ∇^2 en coordenadas esféricas, solo la parte radial

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} = -3\beta e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} + \beta^2 r^2 e^{-\frac{1}{2}\beta r^2}$$

Usando la relación $\displaystyle\int_0^\infty r^{2n}e^{-\beta r^2}dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\frac{1*3*\ldots*(2n-1)}{(2\beta)^n}$ resulta lo siguiente

$$A\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{1}{2}\beta r^2}\left[-3\beta e^{-\frac{1}{2}\beta r^2} + \beta^2 r^2 e^{-\frac{1}{2}\beta r^2}\right]dr = -3\beta + \frac{3}{2}\beta$$

para normalizar hacemos que sea 1

$$A^2\int_0^\infty r_1^2 e^{-\beta r_1^2}dr_1\int_0^\infty r_2^2 e^{-\beta r_2^2} = 1$$

Asi obtenemos el valor de A

$$A = 4\beta\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}$$

por lo tanto

$$\frac{\hbar^2}{2m}\langle\psi_0(\beta)|\nabla_1^2 + \nabla_2^2|\psi_0(\beta)\rangle = \frac{3\hbar^2\beta}{m}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\langle\psi_0(\beta)|\hat{r}^2+\hat{r}^2|\psi_0(\beta)\rangle = m\omega A\int_0^\infty r^4e^{-\beta r^2}dr = \frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{\beta}$$

observemos que

$$\langle\psi_0(\beta),s,m_s|\hat{H}|\psi_0(\beta),s,m_s\rangle = \frac{3\hbar^2\beta}{m}+\frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{\beta}$$

El segundo termino $\langle\psi_0(\beta),s,m_s|W'|\psi(\beta),s,m_s\rangle = \langle\psi_0(\beta)|r_1r_2|\psi(\beta)\rangle$

$$\int_0^\infty r^3e^{-\beta r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \xi e^{-\beta\xi}d\xi = \frac{1}{2\beta^2}\left[e^{-\beta\xi}(\beta\xi+1)\right]_0^\infty = \frac{1}{2\beta^2}$$

el cambio de variable $\xi = r^2$

$$\langle\psi_0(\beta),s,m_s|\hat{H}|\psi_0(\beta),s,m_s\rangle = \frac{4}{\pi\beta}$$

Para el tercer termino $\langle\psi_0(\beta),s,m_s|W'|\psi(\beta),s,m_s\rangle = \pm\frac{\hbar^2}{4}$

Así, realizando la variación $\delta E(\beta)=0$ tenemos

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\hat{H}_0\rangle + k\langle\hat{w}'\rangle+\lambda\langle\hat{W}''\rangle = \frac{3\hbar^2\beta}{m}+\left(\frac{3}{2}m\omega^2+\frac{4k}{\pi}\right)\frac{1}{\beta}\mp\frac{\lambda\hbar^2}{4}$$

y por lo tanto

$$\frac{3\hbar^2\beta}{m}+3\left(\frac{1}{2}m\omega^2+\frac{4k}{3\pi}\right)\frac{1}{\beta}=0$$

$$\beta = \frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{1}{2}\omega^2+\frac{4k}{3\pi m}}$$

Sustituyendo esto en $\langle\hat{H}\rangle = 6\hbar\omega\sqrt{\frac{1}{2}\omega^2+\frac{4k}{3\pi m}}\mp\frac{\lambda\hbar^2}{4}$

$$E_0^{var} = 3\hbar\omega\sqrt{2-\frac{16k}{3\pi m\omega^2}}\mp\frac{\lambda\hbar^2}{4}$$

en particular en el limite $\lambda\to 0,\ k\to 0$

$$E^{var} = 3\sqrt{2}\hbar\omega > 3\hbar\omega$$

por lo tanto, para esta elección de la función de onda de prueba es $\frac{E_0^{var}}{E_0}\leq\sqrt{2}$

9.13 Considere una partícula de masa m que rebota vertical y elásticamente sobre un piso liso reflectante en el campo gravitacional de la Tierra

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z>0 \\ +\infty & z\leq 0\end{cases}$$

donde g es una constante (la aceleración debida a la gravedad). Utilice el método variacional para estimar la energía del estado fundamental de esta partícula por medio de la función de onda de prueba, $\psi(z) = zexp(-az^4)$ donde a es un parámetro ajustable que debe determinarse. Compare su resultado con el valor exacto $E_0^{exact} = 2{,}338\left(\frac{1}{2}mg^2h^2\right)^{1/3}$ calculando por el error relativo.

Solución:

El Hamiltoneano para este sistema es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} - mgz$$

usando la función de prueba $\psi = ze^{\alpha z^4}$ considerar la minimización de la energía aproximada

$$E(\alpha) = \langle \psi(\alpha)|\hat{H}|\psi(\alpha)\rangle$$

$$\frac{d^2}{dz^2} ze^{\alpha z^2} = -16az^3 e^{-az^4} + 12a^2 z^7 e^{-az^4}$$

ahora, observamos

$$\int z^4 e^{-2\alpha z^4} dz = -\frac{1}{64\alpha}\left\{ 8ze^{-2\alpha z^4} + \left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4} 2z\alpha^4\right)\right.$$

sabemos que $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ es la función gamma incompleta superior, con $\Gamma(a, 0) \equiv \Gamma(a)$
Recordando que $a \leq 0$ es entero cuando $\Gamma(a) = a!$, notemos que la integral

$$\int z^8 e^{-2\alpha z^4} dz = -\frac{1}{512\alpha^2}\left\{ 8ze^{-2\alpha z^4}(8\alpha z^4 + 5) + 5\left(\frac{8}{a}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4} 2z\alpha^4\right)\right\rangle$$

Usando la relación de la segunda integral se sigue

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ze^{-\alpha z^4}\left[\frac{d^2}{dz^2} ze^{-\alpha z^4}\right] dz &= -16\alpha \int_0^\infty z^4 e^{-2\alpha z^4} dz + 12\alpha \int_0^\infty z^8 e^{-2\alpha z^4} dz \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{15}{128}\left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{17}{128}\left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

de igual manera notamos que $\int z^3 e^{-2\alpha z z^4} dz = -\frac{e^{-2\alpha z^4}}{8\alpha}$, entonces $\int_0^\infty z^3 e^{-2\alpha z z^4} dz = -\frac{1}{8\alpha}$

$$\langle \psi(\alpha)|\hat{H}|\psi(\alpha)\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{17}{128}\left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{mg}{8\alpha}$$

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{17}{128}\left(\frac{8}{\alpha}\right)^{1/4} 8^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\alpha^{-5/4} - \frac{mg}{8\alpha}$$

Para Saber cuanto Vale α, hacemos $\frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$

$$\alpha = \frac{128m^2 g}{17(8)\hbar^2 \Gamma(1/4)}$$

Sustituyendo el valor de $E(\alpha)$

$$\begin{aligned}
E(\alpha) &= -3{,}17\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{3/4}\left(\frac{\hbar^8}{m^5 g}\right)^{1/3} \\
&= -3{,}17\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{3/4} \frac{\hbar}{m}\left(\frac{\hbar^5}{m^2 g}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

En Particular, La relación entre el resultado aproximado y el resultado exacto es

$$\frac{E(\alpha)}{E_0} = -1{,}356\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{4/3}\frac{\hbar^2}{m^2 g}$$

9.17 Considere una partícula de masa m que se mueve en un potencial unidimensional $V(x) = V_0x^4$. Estime la energía del estado fundamental de esta partícula mediante el método WKB.

Solución:

Recordemos que la estimación del metodo WKB

$$2\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$$

Donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $p = \sqrt{2m(E_n - V)}$ los dos puntos finales x_i satisface $E_n(x_i) = V(x_i)$ para $i = 1, 2, 3\ldots$

$$E_n = Vx_i^4 \qquad x_i = \left(\frac{E_n}{V}\right)^{1/4}$$

podemos escribir $a = \left(\frac{E_n}{V}\right)^{1/4}$ luego $x_1 = -a$ y $x_2 = a$ así podemos observar

$$2\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$$

$$\sqrt{2mV_0}a^2\int_{-a}^{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Notemos que

$$\int\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}dx = \frac{1}{3}x\left\{F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \left(\frac{x}{a}\right)^4\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}\right\}$$

por lo tanto, sustituyendo

$$\frac{4}{3}\sqrt{2mV_0}a^3xF_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

resolviendo para a

$$a = \left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\frac{4}{3}\sqrt{2mV_0}xF_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1\right)}\right)^{1/3}$$

La energía del n-esimo estado es : $E_n = V_0a^4$

$$E_n = V_0\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\frac{4}{3}\sqrt{2mV_0}xF_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1\right)}\right)^{1/3}$$

La energía del estado base, es cuando $n = 0$ resultando

$$E_0 = V_0\left(\frac{3}{8}\frac{\pi\hbar}{\sqrt{2mV_0}xF_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1\right)}\right)^{1/3}$$

9.21 Considere una partícula sin aguja de momento angular orbital $l = 1$ cuyo Hamiltoniano es

$$\hat{H}_0 = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}(L_x^2 - L_y^2)$$

donde ε es una constante que tiene las dimensiones de la energía.

(a) Calcule los niveles exactos de energía y los estados propios correspondientes de esta partícula.

(b) Ahora agregamos una perturbación $\hat{H}_p = \alpha L_z/\hbar$, donde α es una constante pequeña (pequeña en comparación con ε) que tiene las dimensiones de energía. Calcule los niveles de energía de esta partícula para secundar la teoría de perturbación.

(c) Diagonalice la matriz de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_p$ y encuentre los valores propios de energía exactos. Luego expanda cada valor propio a la segunda potencia en α y compárelos con los resultados derivados de la teoría de perturbación en (b)

Solución:

(a) El hamiltoneano esta definido por

$$\hat{H} = \frac{\tilde{E}}{\hbar^2}(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)$$

donde el numero cuántico del momento orbital angular es $l = 1$, $\tilde{E}$ es una constante, recordamos $\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ \hat{L}_-)$, $\hat{L}_y = \frac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-)$ donde $L_\pm$ satisface

$$\hat{L}_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle$$
$$\hat{L}_-|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l, m-1\rangle$$

En particular $\hat{L_x}^2 + \hat{L}_y^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+)$

$$\hat{H}_0|l, m\rangle = \tilde{E}(l(l+1) - m^2)|l, m\rangle$$

Por lo tanto para $l = 1$ tenemos $\langle\hat{H}_0\rangle = \tilde{E}(2 - m^2)$ y los eigeivalores son : $E_{1,0} = 2\tilde{E}$ y $E_{1,\pm1} = \tilde{E}$, que es el eigenvalor $|1, \pm1\rangle$ es degeenarado mientras el estado $|1, 0\rangle$ No es degenerado, por inspección que $|l, m\rangle$ no es un vector propio de no. Esto se debe a que $\hat{L}_x|l, m\rangle \propto |l, m+1\rangle$ y $\hat{L}_y|l, m\rangle \propto |l, m-1\rangle$. Por lo tanto, $\hat{H}_0|l, m\rangle|l, m\rangle$ Explícitamente, se puede mostrar con algunos tedio que

$$\hat{H}_0|l, m\rangle = \frac{\tilde{E}}{2}\sqrt{(l(l+1) - (m+1)^2)^2 - (m+1)^2}|l, m+2\rangle + \frac{\tilde{E}}{2}\sqrt{(l(l+1) - (m-1)^2)^2 - (m+1)^2}|l, m-2\rangle$$

Eso es. $|1, m\rangle$ no es un vector propio de $\hat{H}_0$. como se afirma. Alternativamente, es suficiente recordar que

$$\rangle\hat{J}_\alpha^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right) \qquad \alpha = x, y$$

Por lo tanto, $\langle\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2\rangle = 0$. implica $\langle\hat{H}\rangle = 0$

(b) Suponga que el sistema descrito en (a) está perturbado por $\hat{H}_p = \frac{\alpha}{\hbar}\hat{L}_z$, para $0 < |a| << |\tilde{E}|$, α real. Los valores propios de energía aproximados hasta estados propios de energía de perturbación de segundo orden están dados por $E_{lm} = E_{lm}^{(0)} + \alpha E_{lm}^{(1)} + \alpha^2 E_{lm}^{(2)}$ Sin embargo, como los estados de energía son degenerados para $l = 1$, se debe aplicar la teoría de perturbación degenerada: los estados propios $|1, -1\rangle$ y $|1, 1\rangle$ tienen el mismo valor propio de energía. Por lo tanto, un estado general es una combinación lineal de los dos estados $|\psi\rangle = a|1, -1\rangle + b|1, 1\rangle$ Para $|a|^2 + |b^2| = 1$, dado $\hat{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$ para algún E real, la ecuación de valor propio $|\hat{H} - \varepsilon I| = 0$

$$\begin{vmatrix} \langle 1, -1|\hat{H}_0 + \hat{H}_p|1, -1\rangle & \langle 1, -1|\hat{H}_0 + \hat{H}_p|1, 1\rangle \\ \langle 1, 1|\hat{H}_0 + \hat{H}_p|1, -1\rangle & \langle 1, 1|\hat{H}_0 + \hat{H}_p|1, 1\rangle \end{vmatrix} = 0$$

Aquí, invocando la condición de ortogonalidad $\langle l, m|l', m'\rangle = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$ y $\hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle$, Por lo tanto

$$\langle 1, -1|\hat{H}_0 + \hat{H}_p|1, -1\rangle = \tilde{E} - \alpha$$

$$\langle 1,1|\hat{H}_0+\hat{H}_p|1,1\rangle = \tilde{E}+\alpha$$
$$\langle 1,-1|\hat{H}_0+\hat{H}_p|1,1\rangle = 0$$
$$\langle 1,1|\hat{H}_0+\hat{H}_p|1,-1\rangle = 0$$

resolviendo la ecuación de Eigeinvalores tenemos $\varepsilon_\pm = \tilde{E}\pm\alpha$ la perturbación a segundo orden es

$$E^{(2)}_{l,m} = \sum_{(l,k)\neq(l,m)} \frac{|\langle l,k|\hat{W}|l,m\rangle|^2}{E^0_{l,m}-E^0_{l,k}}$$

aqui $E^{(1)}_{1,\pm1}$ recordando que la corrección a primer orden es $E_{l,m} =^{1,m|\hat{W}|1,m\rangle = m}$ donde $\hat{W} = \dfrac{\hat{L}_z}{\hbar}$, evaluando el segundo termino de la corrección $E^{(2)}_{l,m}$

$$\begin{aligned}\sum_{(l,k)\neq(l,m)} |\langle l,k|\hat{W}|l,m\rangle|^2 &= \langle 1,m|\hat{W}\sum_{l,m}|l,k\rangle\langle l,k|1,m\rangle \\ &= \langle 1,m|\hat{W}|1,m\rangle \\ &= m^2\end{aligned}$$

dado a la condición de ortogonalidad $\langle l,m|l',m'\rangle = \delta_{m,m'}\delta_{l,l'}$ y $\hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$ a partir del cual

$$E^{(2)}_{1,-1} = \frac{1}{\varepsilon_- - \varepsilon_+} \qquad E^{(2)}_{1,1} = \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}$$

esto es

$$E^{(2)}_{1,-1} = -\frac{1}{2\alpha} \qquad E^{(2)}_{1,1} = \frac{1}{2\alpha}$$

los eigeinvalores de la energía dado a la perturbación a segundo orden es

$$E_{1,\pm1} = \tilde{E}\mp\alpha\pm\frac{\alpha}{2} = \tilde{E}\pm\frac{3\alpha}{2}$$

(c) Para diagonalizar la representación matricial del hamiltoniano $\hat{H}$ para determinar los valores propios de energía exactos, es suficiente observar que

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle 1,-1|\hat{H}|1,-1\rangle & \langle 1,-1|\hat{H}|1,1\rangle \\ \langle 1,1|\hat{H}|1,-1\rangle & \langle 1,1|\hat{H}|1,1\rangle \end{pmatrix}$$

Del resultado derivado en (b), se deduce que

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \tilde{E}-\varepsilon & 0 \\ 0 & +\varepsilon \end{pmatrix}$$

En particular, como la matriz ya está en forma diagonal, del álgebra lineal elemental se deduce que los valores propios de la energía son precisamente los elementos diagonales. $E_{1,-1} = \tilde{E}-\varepsilon$ y $E_{1,1} = \tilde{E}+\varepsilon$ Por lo tanto,son estos los valores propios de energía

9.25 Utiliza la función de prueba

$$\psi_0(x,a) = \begin{cases} A(a^2-x^2)^2 & |x|\geq a \\ 0 & |x|\leq a \end{cases}$$

estimar la energía del estado base de un oscilador armónico unidimensional mediante el método variacional; a es un parámetro ajustable y A es la constante de normalización. Calcular el error relativo y evaluar la precisión del resultado
Solución:
El hamiltoniano del sistema oscilador armónico de masa m es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

la variación $E(\alpha) = \langle\psi_0(\alpha)|\hat{H}|\psi_0(\alpha)\rangle$ respecto a α $\dfrac{\partial E}{\partial\alpha} = 0$, determinamos la constante de normalización

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0(\alpha)|\psi_0(\alpha)\rangle &= A^2\int_0^\alpha \left(\alpha^2 - x^2\right)^4 dx && (20)\\
&= A^2\left[\alpha^8 x - \frac{4\alpha^6x^3}{3} + \frac{6\alpha^4x^5}{5} - \frac{4\alpha^2x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_0^\alpha && (21)\\
A^2 &= \frac{315}{128\alpha^9} && (22)
\end{aligned}$$

Ahora concederemos $\langle\psi_0(\alpha)\left|\dfrac{d^2}{dx^2}\right|\psi_0(\alpha)\rangle$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha^2 - x^2\right)^2 = -4\left(\alpha^2 - 3x^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0(\alpha)\left|\frac{d^2}{dx^2}\right|\psi_0(\alpha)\rangle &= -4A^2\left[\alpha^6 x - \frac{5\alpha^4x^3}{3} - \frac{7\alpha^2x^3}{3} - \frac{3x^7}{7}\right]_0^\alpha\\
&= -4\frac{135}{128\alpha^9}\frac{32}{105}\alpha^7\\
&= -\frac{3}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0(\alpha)\left|\hat{x^2}\right|\psi_0(\alpha)\rangle &= A^2\int_0^a x^2\left(\alpha^2 - x^2\right)^4 dx\\
&= A^2\left[\frac{\alpha^8x^3}{3} - \frac{-4\alpha^6x^5}{5} + \frac{6\alpha^4x^7}{7} - \frac{4\alpha^2x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11}\right]_0^\alpha\\
&= \frac{315}{128\alpha^9}\frac{384}{10395}\alpha^{11}\\
&= \frac{3}{13}\alpha^2
\end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en $E(\alpha)$

$$E(\alpha) = \frac{3\hbar^2}{2m\alpha^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{3}{13}\alpha^2$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(\alpha)}{\partial\alpha} &= 0\\
\frac{3\hbar^2}{m\alpha^3} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{6}{13}\alpha &= 0\\
\alpha^4 &= 13\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2
\end{aligned}$$

La estimación del estado base es $E(\alpha) = \dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)\hbar\omega$ observemos que es similar a $E = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$, por lo tanto

$$|E(\alpha) - E_0| = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)\hbar\omega$$

el error es $|E(\alpha) - E_0| > E_0$ cual es grande

9.29 Use la aproximación WKB para encontrar los niveles de energía de una partícula de masa m que se mueve en el siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} V_0(x^2/a^2 - 1) & |x| < a \\ 0 & |x| > 0 \end{cases}$$

Solución:
El momento de la partícula es $p = \sqrt{2mE}$ Además, recuerde que para una partícula libre, su función de onda es la de una onda plana: $\psi = Ae^{-ip_0x/\hbar} + Be^{ip_0x/\hbar}$, con el primer término que indica la onda incidente y el segundo término la onda reflejada. Su coeficiente de transmisión se determina mediante la aproximación WKB de la siguiente manera. Por simplicidad de notación. conjunto $D_- = (-\infty, -a]$, $D = (-a, a)$ y $D_+ = [a, \infty)$. Luego, en D_-, la partícula es libre y, por lo tanto, la función de onda es

$$\psi_- = A_-e^{-ip_0x/\hbar} + Ae^{ip_0x/\hbar}$$

Aquí, el primer término corresponde a la onda incidente y el segundo término corresponde a la onda reflejada en el límite, $x = -a$, donde A_-, A son algunas constantes. En D_+ no hay onda reflejada en $x = \infty$ y por lo tanto. la función de onda es simplemente

$$\psi_+ = A_+e^{-ip_0x/\hbar}$$

siendo A_+ la amplitud de la onda de propagación hacia el exterior a través de la barrera potencial.

En el dominio D, $E \leq V_0$ y, por lo tanto, la región clásica prohibida $\tilde{D} \subset D$ está definida por $\tilde{D} = \{x \in D : E \leq V(x)\}$ Para simplificar, establezcamos $x = \tilde{a}$ tal que $E = V(\tilde{a})$. Específicamente, $\tilde{a} = \sqrt{1 + \frac{E}{V_0}}$. Entonces, $\tilde{D} = (-\tilde{a}, \tilde{a})$ es la región clásica prohibida, donde $x = \pm a$ son los puntos de inflexión
La función de onda se halla a través de la aproximación WKB en la región clásica prohibida

$$\psi_D(x) = \frac{B_-}{\sqrt{|p(x)|}} exp\left[-\frac{1}{h}\int_{-a}^{a} |p(x)|dx\right] + \frac{B_+}{\sqrt{|p(x)|}} exp\left[-\frac{1}{h}\int_{-a}^{a} |p(x)|dx\right]$$

para algunas constantes $B_\pm$. Observe que el momento es imaginario: $p(x) = i\sqrt{2m[V(x) - E]}$ y $E < V(x)$ en D

Ahora, para simplificar la ecuación supongamos $\tilde{a} - (-\tilde{a})$ es suficientemente grande también que la aproximación de $B_+ \approx 0$ es valida asi la función de onda se reduce

$$\psi_D(x) \approx \frac{B_-}{\sqrt{|p(x)|}} exp\left[-\frac{1}{h}\int_{-a}^{x} |p(s)|ds\right]$$

después las condiciones de frontera deben ser especificadas, como $x = -\tilde{a}$, $\psi_-(-\tilde{a}) = \psi_D(-\tilde{a})$ y

$$\frac{d}{dx}\psi_-(-\tilde{a}) = \frac{d}{dx}\psi_D(-\tilde{a})$$

De igual forma $x = \tilde{a}$

$$\psi_+(\tilde{a}) = \psi_D(\tilde{a})$$

y $\dfrac{d}{dx}\psi_+ = \dfrac{d}{dx}\psi_D(\tilde{a})$ entonces, el coeficiente de transmisión esta dado por

$$T = \left|\frac{A_+}{A_-}\right|^2$$

también dicho coeficiente se puede aproximar como

$$T \sim e^{-2\gamma}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \sqrt{2m(V(x)-E)}dx$ evaluando

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \sqrt{1+\frac{E}{V_0}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+\frac{E}{V_0}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+a\left(1+\frac{E}{V_0}\right)\arctan\left(\frac{x}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{E}{V_0}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)\right]_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}$$

sabemos $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$ y $\tan(-x) = -x$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mV_0}}{2\hbar}a\left(1+\frac{E}{V}\right)\pi$$

por lo tanto el coeficiente de transmisión es

$$T \sim exp\left[\frac{\sqrt{2mV_0}}{2\hbar}a\left(1+\frac{E}{V}\right)\pi\right]$$

33. Utilice las siguientes dos funciones de prueba:

$$(a)Ae^{-a|x|} \qquad\qquad (b)A(1+a|x|)e^{-a|x|} \tag{23}$$

estimar, mediante el método variacional, la energía del estado fundamental de una partícula de masa m que se mueve en un potencial unidimensional $V(x) = \lambda|x|$; a es un parámetro de escala, λ es una constante y A es la constante de normalización. Compara los resultados obtenidos.

Solución

El hamitoneano de la partícula es

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \lambda|x|$$

$E = \langle\psi_\alpha|\hat{H}|\psi_\alpha\rangle$ Luego el principio Varacional

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0$$

produce el parámetro deseado α

(a) para $\psi_\alpha(x)$ reescribimos esto como

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha|x|} & \text{para} \quad x < 0 \\ Ae^{-\alpha|x|} & \text{para} \quad x \le 0 \end{cases}$$

$$\psi''_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^2 Ae^{\alpha|x|} & \text{para} \quad x < 0 \\ \alpha^2 Ae^{-\alpha|x|} & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

así

$$\begin{aligned} \langle\psi_\alpha\left|\frac{d^2}{dx^2}\right|\psi_\alpha\rangle &= A^2\alpha^2\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}dx + A^2\alpha^2\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha x}dx \\ &= A^2\alpha^2\frac{1}{2\alpha}\left\{\left[e^{2\alpha x}\right]_{-\infty}^{0} - \left[e^{-2\alpha x}\right]_{0}^{\infty}\right\} \\ &= A^2\alpha \end{aligned}$$

Para saber A normalizamos

$$\begin{aligned}
A^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}dx\right] &= \frac{A^2}{\alpha}\left\{\left[e^{\alpha x}\right]_{-\infty}^{0} - \left[e^{-\alpha x}\right]_{0}^{\infty}\right\} \\
&= \frac{A^2}{\alpha} \\
A^2 &= \alpha
\end{aligned}$$

$$\langle\ \psi_\alpha \left|\frac{d^2}{dx^2}\right| \psi_\alpha\ \rangle = \alpha^2$$

De igual forma

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\alpha||\hat{x}||\psi_\alpha &= -A^2\int_{-\infty}^{0} xe^{\alpha x}dx + A^2\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x}dx \\
&= -\alpha\frac{1}{4\alpha^2}\left[e^{2\alpha x}(2\alpha x-1)\right]_{-\infty}^{0} - \alpha\frac{1}{4\alpha^2}\left[e^{2\alpha x}(2\alpha x+1)\right]_{0}^{-\infty} \\
&= \frac{1}{2\alpha}
\end{aligned}$$

Asi

$$E(\alpha) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{\lambda}{\alpha}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{\lambda}{\alpha}\right) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2\alpha}{m} - \frac{\lambda^2}{2\alpha^2} = 0$$

$$\alpha = -\sqrt[3]{\frac{\lambda m}{2\hbar^2}}$$

$$E(\alpha) = -\frac{3}{2}\left(\frac{\lambda^2\hbar^2}{4m}\right)^{1/3}$$

(b) Para la función $\psi_\alpha(x) = A(1+a|x|)e^{-a|x|}$

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} A(1-ax)e^{\alpha x} & \text{Para} \quad x<0 \\ A(1+ax)e^{-ax} & \text{Para} x>0 \end{cases}$$

derivando la función

$$\psi''_\alpha(x) = \begin{cases} A(1-ax)e^{\alpha x} & \text{Para} \quad x<0 \\ A(1+ax)e^{-ax} & \text{Para} x>0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\alpha\left|\frac{d^2}{dx^2}\right|\psi_\alpha\rangle &= -A^2\alpha^2\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}(\alpha x+1)dx + A^2\alpha^2\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}(\alpha x-1)dx \\
&= A^2\alpha^2\frac{1}{4\alpha}\Big\}\left[e^{2\alpha x}(2\alpha x+1)\right]_{-\infty}^{0} - \left[e^{-2\alpha x}(2\alpha x-1)\right]_{0}^{\infty}\Big\} \\
&= \frac{A^2\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Para saber el valor de A normalizamos

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha &= 1 \\
&= A^2\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}(\alpha x+1)dx + A^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\alpha x-1)dx\right\} \\
&= A^2\frac{1}{4\alpha}\left\{\left[e^{2\alpha x}\left(2\alpha^2x^2-6\alpha x+5\right)\right]_{-\infty}^{0} - \left[e^{-2\alpha x}\left(2\alpha^2x^2-6\alpha x+5\right)\right]_0^\infty\right\} \\
&= A^2\frac{5}{2\alpha} \\
A^2 &= \frac{2\alpha}{5}
\end{aligned}$$

entonces

$$\langle\psi_\alpha\left|\frac{d^2}{dx^2}\right|\psi_\alpha\rangle = \frac{\alpha}{2}\frac{2\alpha}{5} = \frac{\alpha^2}{5}$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\alpha||\hat{x}||\psi_\alpha &= -A^2\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}x(1-\alpha x)^2dx + A^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\alpha x-1)dx \\
&= -\frac{2\alpha}{5}\frac{1}{8\alpha^2}\left[e^{2\alpha x}\left(4\alpha^3x^3-14\alpha^2x^2+18\alpha x-9\right)\right]_{-\infty}^{0} \\
&- \frac{2\alpha}{5}\frac{1}{8\alpha^2}\left[e^{-2\alpha x}\left(4\alpha^3x^3+14\alpha^2x^2-18\alpha x+9\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{9}{10\alpha}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$E(\alpha) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{10m} + \frac{9\lambda}{10\alpha}$$

derivando

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial\alpha} = -\frac{\hbar^2\alpha}{5m} - \frac{9\lambda}{10\alpha^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2\alpha}{5m} &= \frac{9\lambda}{10\alpha^2} \\
-\frac{10\hbar^2\alpha}{5mI(9\lambda)} &= \frac{1}{\alpha^2} \\
\frac{10\hbar^2}{5mI(9\lambda)} &= -\frac{1}{\alpha^3} \\
\alpha &= -\left(\frac{45m\lambda}{10\hbar^2}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

entonces

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2}{10m}\left(\frac{45m\lambda}{10\hbar^2}\right)^{2/3} + \frac{9\lambda}{10}\left(\frac{45m\lambda}{10\hbar^2}\right)^{-1/3}$$

37. Considere una parte superior esféricamente simétrica con los principales momentos de inercia I.
    (a) Encuentre los niveles de energía de la parte superior.
    (b) Suponiendo que la parte superior está en el estado de momento angular l_1, encuentre su energía para ordenar la teoría de perturbación cuando se agrega una perturbación débil,$\hat{H}_p = \frac{\varepsilon}{I}\left(\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2\right)$, donde $\varepsilon << 1$.

Solución:

NOTA: en el libro de texto, la perturbación hamiltoniana es $\hat{H}_p = \frac{\tilde{E}}{I}\left(\hat{L}_x - \hat{L}_y\right)$ Esto es un error tipográfico, ya que $\langle l,m|\hat{L}_x^2|l,m\rangle = \langle l,m|\hat{L}_y^2|l,m\rangle$ implica de inmediato que $\langle l,m|\hat{H}_p|l,m\rangle = 0$ es decir, no hay perturbación de primer orden.

(a) Ahora, para una parte superior simétrica esférica, el hamiltoniano es $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ en coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

en este caso soló tomamos la parte angular

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2mr^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)$$

Tenemos que $I = mr^2$

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar}{2I}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{L}^2}{2I}$$

en particular

$$\hat{H}_0|l,m\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}|l,m\rangle$$

es decir, el nivel de energía de una parte superior simétrica es $E_{lm}^{(0)} = \frac{\hbar^2(l(l+1))}{2I}$

(b) Supongamos que la parte superior está perturbada por $\hat{H}_p = \frac{\tilde{E}}{I}\left(\hat{L}_x - \hat{L}_y\right)$ el termino de la corrección a primer orden es $E_{lm}^{(1)} = \langle l,m|\hat{W}|l,m\rangle$ donde $\hat{W} = \frac{\tilde{1}}{I}\left(\hat{L}_x + \hat{L}_y\right)$, por definición observamos que $\hat{L} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ por lo tanto $\hat{W} = \frac{\tilde{1}}{I}\left(\hat{L} - \hat{L}_z\right)$ entonces

$$\langle l,m|\hat{W}|l,m\rangle = \frac{\hbar^2}{I}\left[l(l+1) - m^2\right)$$

y la corrección a primer orden de la energía es

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{I}\left[\frac{1}{2}l(l+1) + \tilde{E}\left(l(l+1) - m^2\right)\right]$$

para $l = 1$

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{I}\left[1 + \tilde{E}\left(-m^2\right)\right]$$

41. (a) Calcule para la teoría de perturbación de primer orden la contribución debida a la interacción espín-órbita para el enésimo estado excitado para un átomo de positronio.

(b) Use el resultado de la parte (a) para obtener valores numéricos para los términos de corrección de giro-órbita para el nivel $2p$ y compárelos con la energía de $n = 2$.

Solución:

(a) Recordemos que la interacción giro-órbita hamiltoniana está dada por

$$\hat{H}_p = -\hat{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

donde $\mu = -\frac{e\hat{S}}{m_e c}$ donde está el momento magnético del giro electrónico, $-e$ es la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y c la velocidad de la luz. Aquí, $\hat{B}$ es el operador de campo magnético del positrón, donde se supone que el electrón orbita alrededor del positrón.

$$\hat{H}_p = \frac{e^2}{2m_e^2 c^2 r^3} \hat{S} \cdot \hat{L}$$

y

$$\hat{S} \cdot \hat{L} = \frac{1}{2}\left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2\right)$$

donde $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$
Por lo tanto, los valores propios de $\hat{S} \cdot \hat{L}$ son

$$\hat{S} \cdot \hat{L}|n, l, j, m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}[j((j+1) - l(l+1) - s(s+1)]|n, l, j, m\rangle$$

Observe que para un electrón y un positrón.$s = \frac{1}{2}$ y por lo tanto, $s(s+1) = \frac{3}{4}$ en particular

$$\begin{aligned}
\langle n, l, j, m|\hat{H}_p|n, l, j, m\rangle &= \frac{e^2}{2m_e^2 c^2}\langle n, l|r^{-3}|n, l\rangle\langle j, m|\hat{S} \cdot \hat{L}|j, m\rangle \\
&= \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{2}{n^3 l(l+1)(2l+1)a_0^3} \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

La corrección de la energía a primer orden es

$$E = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} + \frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2 c^2} \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{n^3 l(l+1)(2l+1)a_0^3}$$

(b) Para el estado $2p$, $n = 2$, $l = 1$ los posibles niveles de energía para ese estado están dados por $j = l \pm \frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ respectivamente sus eigenvalores son

$$E_{2,1,1/2} = -\frac{e^2}{2a(2)^2} + \frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2 c^2}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - (1)\left((1) + 1\right) - \frac{3}{4}}{2^3(1+1)(2+1)a_0^3}\right) = -\frac{e^2}{8a_0} - \frac{e^2\hbar^2}{80m_e^2 c^2 a_0^3}$$

$$E_{2,1,3/2} = -\frac{e^2}{2a(2)^2} + \frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2 c^2}\left(\frac{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) - (1)\left((1) + 1\right) - \frac{3}{4}}{2^3(1+1)(2+1)a_0^3}\right) = -\frac{e^2}{8a_0} - \frac{9e^2\hbar^2}{64m_e^2 c^2 a_0^3}$$

tenga en cuenta que en ausencia de la interacción giro-órbita, el valor propio de la energía es $E_2 = -\frac{e^2}{8a_0}$

45. Dos partículas idénticas de spin 1/2 están encerradas en una caja cúbica del lado L.

(a) Calcule según la teoría de perturbación de primer orden la energía del estado fundamental cuando las dos partículas están sujetas a una interacción atractiva de corto alcance débil:

$$\hat{V}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4}{3}\pi a^3 V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

(b) Encuentre un valor numérico para la energía derivada en (a) para $L = 10^{-10}m$, $a = 10^{-12}m$, $V_0 = 10^{-3}eV$, y la masa de cada partícula individual debe tomarse como la masa de el electrón.

Solución:

(a) Consideremos dos partículas de spín $\frac{1}{2}$ confinadas en un potencial

$$V(x,y,z) = \{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Para} \quad 0 \leq x \end{array}$$

sujeto a un pequeño potencial de perturbación $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4}{3}\pi a^3 V_0 \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ para algunas constantes reales $0 < V_0$, $a << 1$. Calcule la energía del estado fundamental hasta la perturbación de primer orden.
la energía para una sola partícula confinada por un potencial de caja es

$$E_{n_{1,x},n_{1,y},n_{1,z}} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}(n_{1,x}, n_{1,y}, n_{1,z})$$

para $n_{1,x}, n_{1,y}, n_{1,z} = 1, 2, 3\ldots$ En particular, dos partículas pueden ocupar el mismo estado siempre que sus espines estén orientados en sentido opuesto. Por lo tanto, la energía del sistema no perturbado es

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}(n_1 + n_2 + 6)$$

donde $n_i = n_{i,x} + n_{i,y} + n_{i,z} - 3$ para $i = 1, 2$. Entonces, $n_i = 0$ corresponde al estado fundamental de la partícula i. Finalmente, la función de onda ψ_{i,n_i} para la partícula i, en representación de coordenadas es

$$\langle x_i, y_i, z_i | n_{i,x}, n_{i,y}, n_{i,z} = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \operatorname{sen}\left(\frac{n_{i,x}\pi}{L}x_i\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_{i,y}\pi}{L}y_i\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_{i,z}\pi}{L}z_i\right)$$

como $\hat{W} = \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ donde $\vec{r}_i$ es el desplazamiento de la partícula i, y por definición $\delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2)$

$$\begin{aligned}
\langle n_1, n_2 | \hat{W} | n_1, n_2 \rangle &= \int \psi^*_{1,n_1}(\vec{\xi}_1)\psi^*_{2,n_2}(\vec{\xi}_2)\delta^2(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2)\psi_{1,n_1}(\vec{\xi}_1)\psi_{2,n_2}(\vec{\xi}_2)d^3\vec{\xi}_1 d^3\vec{\xi}_3 \\
&= \int \psi^*_{1,n_1}(\vec{\xi})\psi^*_{2,n_2}(\vec{\xi})\psi_{1,n_1}(\vec{\xi})\psi_{2,n_2}(\vec{\xi})d^3\xi \\
&= \left(\frac{2}{L}\right)^6 \int_0^L \int_0^L \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,x}\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,y}\pi}{L}y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,z}\pi}{L}z\right) \\
&\quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,x}\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,y}\pi}{L}y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,z}\pi}{L}z\right) dxdydz \\
&= \left(\frac{2}{L}\right)^6 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,x}\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,x}\pi}{L}x\right) dx \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,y}\pi}{L}y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,y}\pi}{L}y\right) dy \\
&\quad \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,z}\pi}{L}z\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,z}\pi}{L}z\right) dz
\end{aligned}$$

resolviendo la integral respecto a la variable x tenemos

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{1,x}\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n_{2,x}\pi}{L}x\right) dx$$

$$
= \frac{1}{16}\left\{ \frac{\operatorname{sen}\left(2x\frac{\pi}{L}(n_{1,x}-n_{2,x})\right)}{\frac{\pi}{L}(n_{1,x}-n_{2,x})} + \frac{\operatorname{sen}\left(2x\frac{\pi}{L}(n_{1,x}+n_{2,x})\right)}{\frac{\pi}{L}(n_{1,x}+n_{2,x})} + 4x - \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}n_{1,x}x\right)}{\frac{\pi n_{1,x}}{L}} - \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}n_{2,x}x\right)}{\frac{\pi n_{2,x}}{L}} \right\}_0^L
$$

$$
= \frac{L}{4}
$$

en consecuencia

$$
\langle n_1, n_2|\hat{W}|n_1, n_2\rangle = \left(\frac{2}{L}\right)^6 \left(\frac{L}{4}\right)^3 = \frac{1}{L^3}
$$

entonces la corrección de la energía a primer orden es

$$
E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}(n_1+n_2+6) - \frac{4\pi a^3 V_0}{3L^3}
$$

en particular el estado base es

$$
E_{0,0} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{mL} - \frac{4\pi a^3 V_0}{3L^3}
$$

(b) Sí $L = 10^{-10}m$, $a = 10^{-12}m$, $V_0 = 10^{-3}eV$, sustituyendo estos valores la energía es

$$
E_{0,0} = \frac{(3\left(1{,}055\times 10^{-34}Js\right)^2\pi^2}{(9{,}11\times 10^{-31})(10^{-10}m)^2} - \frac{4\pi(10^{-12}m)^3(10^{-3}eV)\left(\frac{1{,}6\times 10^{-19}J}{1eV}\right)}{3(10^{-10})^3}
$$

$$
E_{0,0} = 3{,}65\times 10^{-19}J - 4{,}19\times 10^{-28}J
$$

$$
E_{0,0} = 3{,}65\times 10^{-19}J
$$

9. Teoría de perturbaciones independientes del tiempo

10.1 Considere una partícula de masa m sin espín en un pozo de potencial infinito unidimensional con paredes en $x = 0$ y $x = a$ que está inicialmente (es decir, en $t = 0$) en el estado $\psi(x,0) = [\phi_1(x) + \phi_3(x)]/\sqrt{2}$, donde $\phi_1(x)$ y $\phi_3(x)$ son los estados excitados base y del segundo, respectivamente, con $\phi_n(x) = \sqrt{2/a}\,\operatorname{sen}(n\pi x/a)$

(a) ¿Cuál es el vector de estado $\psi(x,t)$ para $t > 0$ en la imagen de Schrodinger?

(b) Evalúe $\langle\hat{X}\rangle$, $\langle\hat{P}\rangle$, $\langle\hat{X}^2\rangle$ y $\langle\hat{P}^2\rangle$ como funciones de tiempo para $t > 0$ en la imagen de Schrodinger.

(c) Repita la parte (b) en la imagen de Heisenberg: es decir, evalúe $\langle\hat{X}\rangle_H$, $\langle\hat{P}\rangle_H$, $\langle\hat{X}^2\rangle_H$ y $\langle\hat{P}^2\rangle_H$ como funciones de tiempo para ello $t > 0$.

Solución

(a) De la ecuación de Schrodinger tenemos

$$
i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle
$$

Donde el hamiltoneano es

$$
\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}
$$

y la solución de esta ecuación es

$$
|\psi(t)\rangle = e^{it\hat{H}/\hbar}|\psi(0)\rangle
$$

en particular de la serie de Taylor tenemos

$$e^{it\hat{H}/\hbar} = \sum_k (-1)^k \left(\frac{it\hat{H}}{\hbar}\right)^k$$

eso es claro por $\hat{H}|\phi_1(0)\rangle = E_1|\phi_1\rangle$ y $\hat{H}|\phi_3(0)\rangle = E_3|\phi_3\rangle$ Cual $e^{it\hat{H}/\hbar}|\phi_n(0)\rangle = e^{itE/\hbar}|\phi_n\rangle$ para $n = 1, 3$ por lo tanto

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x)e^{itE_1/\hbar} + \phi_3 e^{itH_3/\hbar}\right)$$

(b) Los valores de expectación se calculan de la siguiente manera

$$\langle\hat{X}\rangle = \langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle 1|\hat{X}|1\rangle e^{itE_1/\hbar} + \langle 3|\hat{X}|3\rangle\right\}$$

Evaluando el primer termino

$$\begin{aligned}
\langle 1|\hat{X}|1\rangle &= \frac{a}{2}\int_0^a x \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{a} dx \\
&= \frac{2}{a}\left[-\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{4\left(\frac{\pi}{a}\right)} + \frac{x^2}{4}\right]_0^a \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Para el segundo termino tenemos

$$\langle 3|\hat{X}|3\rangle = \frac{a}{2}\int_0^a x \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi x}{a} dx \tag{24}$$

$$= \frac{2}{a}\left[-\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\frac{6\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2} - \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{a}x\right)}{4\left(\frac{3\pi}{a}\right)} + \frac{x^2}{4}\right]_0^a \tag{25}$$

$$= \frac{a}{2} \tag{26}$$

por lo tanto

$$\langle\hat{X}\rangle = \frac{a}{2\sqrt{2}}\left\{e^{itE_1/\hbar} + e^{itE_3/\hbar}\right\}$$

es el valor de expectativa deseado dependiente del tiempo

Para evaluar $\langle\hat{P}\rangle$ tenemos que recordar que $\hat{P} = i\hbar\dfrac{d^2}{dx^2}$

$$\hat{P}\phi_k(x) = i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1|\hat{P}|1\rangle &= i\hbar\frac{2\pi}{a^2}\int_0^a \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a} dx \\
&= i\hbar\frac{\pi}{a^2}\int_0^a \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 3|\hat{P}|3\rangle &= i\hbar\frac{3\pi}{a}\frac{2}{a}\int_0^a \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{3\pi x}{a}dx\\ &= i\hbar\frac{3\pi}{a^2}\int_0^a \operatorname{sen}\frac{6\pi x}{a}dx\\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle\hat{P}\rangle = 0$$

Evaluando $\langle\hat{X}^2\rangle$

$$\begin{aligned}\langle 1|\hat{X}^2|1\rangle &= \frac{2}{a}\int_0^a x^2\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}dx\\ &= \frac{2}{a}\left[-\frac{x}{4}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - \frac{2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 x^2 - 1}{8}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^a\\ &= \frac{a^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 3|\hat{X}^2|3\rangle &= \frac{2}{a}\int_0^a x^2\operatorname{sen}^2\frac{3\pi x}{a}dx\\ &= \frac{2}{a}\left[-\frac{x}{4}\frac{\cos\left(\frac{6\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2} - \frac{2\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 x^2 - 1}{8}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{a}x\right)}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^a\\ &= \frac{a^2}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{a^2}{3\sqrt{2}}\left\{e^{itE_1/\hbar} + e^{itE_3/\hbar}\right\}$$

es el valor de expectativa deseado dependiente del tiempo

Ahora calculamos $\langle\hat{P}^2\rangle$ observemos que $\hat{P}\phi_k(x) = \hbar^2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{a}x$

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{a}xdx = \frac{a}{2}$$

entonces

$$\langle\hat{P}^2\rangle = \frac{\hbar\pi}{a}^2\left\{e^{-itE_1/\hbar} + 9e^{-itE_3/\hbar}\right\}$$

(c) Para obtener la imagen de Heisenberg de $\langle\hat{X}\rangle$, $\langle\hat{P}\rangle$, $\langle\hat{X}^2\rangle$ y $\langle\hat{P}^2\rangle$ denote por conveniencia por $\langle\hat{X}\rangle_H$, $\langle\hat{P}\rangle_H$, $\langle\hat{X}^2\rangle_H$ y $\langle\hat{P}^2\rangle_H$ es suficiente recordar la transformación entre el Schrodinger y la imagen de Heisenberg. Específicamente, $|\psi\rangle_H = e^{it\hat{H}/\hbar}|\psi(t)\rangle$ es la imagen de Heisenberg del vector de estado $\hat{T}$ si es un operador en la imagen de Schrodinger, entonces su representación de Heisenberg es $\hat{T}_H = e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{T}e^{-it\hat{H}/\hbar}$ si. Por lo tanto,

$$\langle\psi_H|\hat{T}_H|\psi_H\rangle = \langle\psi(t)|e^{-it\hat{H}/\hbar}\left(e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{T}e^{-it\hat{H}/\hbar}\right)e^{it\hat{H}/\hbar}|\psi(t) = \langle\psi(t)|\hat{T}_H|\psi(t)\rangle$$

esto da $\langle\hat{X}\rangle_H = \langle\hat{X}\rangle$, $\langle\hat{P}\rangle_H = \langle\hat{P}\rangle$, $\langle\hat{X}^2\rangle_H = \langle\hat{X}^2\rangle$ y $\langle\hat{P}^2\rangle_H = \langle\hat{P}^2\rangle$

10.3 Evalúe el valor esperado $\langle \hat{X}\hat{P}_H(t)\rangle$ para el enésimo estado excitado de un oscilador armónico unidimensional.

Solución:

Tenemos que recordar que

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$$

y

$$\hat{P} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)$$

también sabemos que los eigeinestados de energía son

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

tenemos la siguiente relación

$$\hat{P}_H(t) = e^{itE_n/\hbar}\hat{P}e^{-itE_n/\hbar}$$
$$\hat{P}_H(t) = \hat{P}\cos\omega t - m\omega\hat{X}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

por lo cual

$$\langle \hat{X}\hat{P}_H(t)\rangle_n = \langle \hat{X}\hat{P}\rangle_n \cos\omega t - m\omega\langle \hat{X}^2\rangle\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Ahora $\langle \hat{X}\hat{P}\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) = -i\frac{\hbar}{2}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\right)$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{X}\hat{P}|n\rangle &= \frac{-i\hbar}{2}\left(\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle - \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) \\
&= \frac{-i\hbar}{2}[n - (n+1)] \\
&= \frac{i\hbar}{2}
\end{aligned}$$

Similarmente $\hat{X}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{X}^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(n + 1 + n) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle \hat{X}\hat{P}_h(t)\rangle = \frac{i\hbar}{2}\cos\omega t + \frac{\hbar}{2}(2n+1)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

10.5 (a) Calcule el operador de coordenadas $\hat{X}_H(t)$ para una partícula libre en una dimensión en la imagen de Heisenberg.

(b) Evaluar el conmutador $[\hat{X}_H(t), \hat{X}_H(0)]$

Solución:

(a) Transformando un operado $\hat{X}$ de una particula libre en la imagen de Schrodinger a la imagen de Heisenberg, se puede dar está transformación dado una transformación unitaria : $\hat{X}_H(t) = e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{X}e^{-it\hat{H}/\hbar}$

por otra parte tenemos la identidad, donde $\hat{A}$ es un operador lineal

$$e^{\hat{A}}\hat{X}e^{\hat{A}} = \hat{X} + [\hat{A}, \hat{X}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [A, \hat{X}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{X}]]] + \ldots$$

y utilizando el hecho de que $[\hat{H},\hat{X}] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{P}$ y $[\hat{P},\hat{X}] = -i\hbar I$ tambiéen debemos recordar la expansión de la serie de taylor de $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ y $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, sustituyendo obtenemos

$$\hat{X}_H(t) = \hat{X} + \frac{t}{m}\hat{P} - \frac{(\omega t)^2}{2!}\hat{X} - \frac{(\omega t)^3}{3!}\frac{1}{m\omega}\hat{P}$$

$$\hat{X}_H(t) = \hat{X}\left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \ldots\right] - \frac{1}{m\omega}\hat{P}\left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \ldots\right]$$

y por lo tanto $\hat{X}_H(t) = \hat{X}\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\hat{P}\operatorname{sen}\omega t$ es la imagen deseada de Heisenberg

(b) El conmutador $[\hat{X}_H(t),\hat{X}_H(0)]$ se evalúa notando trivialmente que $\hat{X}_H(0) = \hat{H}$ de la expansión del inciso (a), obtenemos

$$\begin{aligned} [\hat{X}_H(t),\hat{X}_H(0)] &= \cos\omega t[\hat{X},\hat{X}] + \frac{\operatorname{sen}\omega t}{m\omega}[\hat{P},\hat{X}] \\ &= -i\hbar\frac{\operatorname{sen}\omega t}{m\omega} \end{aligned}$$

10.7 Evalúe la cantidad $\langle n|\hat{P}_H(t)\hat{P}|n\rangle$ para el enésimo estado excitado de un oscilador armónico unidimensional, donde $\hat{P}_H(t)$ y $\hat{P}$ designan los operadores de momento en la imagen de Heisenberg y la imagen de Schrodinger, respectivamente.

Solución:

Dado un oscilador armónico unidimensional el valor de expectación

$$\langle n|\hat{P}_H\hat{P}|n\rangle$$

donde $\hat{P}_H$ es la imagen de Heisenberg y $\hat{P}$ es la imagen de schrodinger $\hat{H}|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle$, Recordamos que la imagen entre la imagen de Heisenberg y la de Schrodinger esta dada $[\hat{H},\hat{P}] = i\hbar m\omega^2\hat{X}$ y $[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar I$

$$\begin{aligned} \hat{P}_H(t) &= e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{P}e^{-it\hat{H}/\hbar} \\ &= \hat{P} + \frac{it}{\hbar}[\hat{H},\hat{P}] + \frac{1}{2!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^2[\hat{H},[\hat{H},\hat{P}]] + \ldots \\ &= \hat{P}\cos\omega t - m\omega\hat{X}\operatorname{sen}\omega t \\ \hat{P}_H(t)\hat{P} &= \hat{P}^2\cos\omega t - m\omega\hat{X}\hat{P}\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

Notando ademas que $\hat{P}- = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$ entonces $\hat{P}^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2})$

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{P}^2|n\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2}\left\{\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right\} \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1) \end{aligned}$$

$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Rightarrow \hat{X}\hat{P} = -\frac{i\hbar}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2})$

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{X}\hat{P}|n\rangle &= -\frac{i\hbar}{2}\left(-\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) \\ &= -\frac{i\hbar}{2}\left(-(n+1)+n\right) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle n|\hat{P}_H(t)\hat{P}|n\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)\cos\omega t - \frac{i\hbar m\omega}{2}\operatorname{sen}\omega t$

10.9 Ejercicio 10.9 Una partícula está inicialmente (es decir, cuando $t < 0$) en su estado base en un potencial oscilador armónico unidimensional. En $t = 0$, una perturbación $\hat{V}(x,t) = V_0\hat{x}^2e^{-t/\tau}$ está activada. Calcule en primer orden la probabilidad de que, después de un tiempo suficientemente largo (es decir, $t \to \infty$), el sistema haya realizado una transición a un estado excitado dado; considerar todos los estados finales.

Solución:

De la teoría de la perturbación dependiente del tiempo, que en esencia resuelve la siguiente ecuación integral en la imagen de interacción (denotada por el subíndice I)

$$\hat{U}_I(t,t_0) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{V}_I(t')\hat{U}_I(t',t_0)dt'$$

donde $\hat{U}(t,t_0)$ define la evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(t_0)\rangle$ que satisface $\hat{U}(t,t_0) = I$. Denotamos $\hat{H}_0$ como el hamiltoniano perturbado

$$\hat{U}_I(t,t_0) = e^{it\hat{H}_0/\hbar}\hat{U}e^{-it\hat{H}}$$

La probabilidad de que un estado inicialmente en $|\psi_0\rangle$ en transición al estado $|\psi_n\rangle$ el primer orden en V_0

$$P_{n,0}(t) = \left|\langle\psi_n|\psi_0\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{n,0}t'}\langle\psi_n|\hat{V}|\psi_0(t')\rangle dt' + \dots\right|^2$$

Aquí, la probabilidad de transición $\omega_{n0} \equiv \dfrac{1}{\hbar}\left\{\langle\psi_n|\hat{H}_0|\psi_n\rangle - \langle\psi_0|\hat{H}_0|\psi_0\rangle\right\}$

En particular, ya que $\langle\psi_0|\psi_n\rangle = 0$, por ortorgonialidad, a menos que $|\psi_n\rangle = |\psi_0\rangle$, se deduce que la probabilidad de transición de primer orden 2 es

$$P_{n,0}(t) = \left|-\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{n,0}t'}\langle\psi_n|\hat{V}|\psi_0(t')\rangle dt' + \dots\right|^2$$

Así. para resolver el problema de la oscilación armónica. es suficiente para evaluar $\langle 2|\hat{x}^2|0\rangle$. Ahora. recordar que

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \qquad \hat{X}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2})$$

y de donde,

$$\langle 2|\hat{X}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 2|\hat{a}^{\dagger 2}|0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega}$$

Y en particular. $\langle 2|\hat{V}(t')|0\rangle = \dfrac{V_0\hbar}{\sqrt{2}m\omega}e^{-t/\tau}$ Sustituyendo esta expresión en la integral se obtiene la primera transición de orden global desde el estado base segundo estado excitado:

$$P_{2,0}(\infty) = \left|\frac{V_0}{\sqrt{2}m\omega}\int_0^\infty e^{i\omega t'}e^{-t'/\tau}dt'\right|^2 = \left|\frac{V_0}{\sqrt{2}m\omega}\frac{\tau}{1-i\omega_{2,0}\tau}\right|^2$$

Finalmente. sustituyendo lo siguiente en la probabilidad de transición es

$$\omega_{2,0} = \left\{\left\langle 2|\hat{H}_0|2\rangle - \langle 0|\hat{H}_0|\right\rangle\right\} = 2\omega$$

Se sigue que $P_{2,0}(\infty) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_0\tau}{m\omega}\right)^2\left|\dfrac{1}{1-i\omega\tau}\right|^2$ notemos que $|z|^2 = z^*z$ donde z es un número complejo.

Resulta que $\left|\dfrac{1}{1-i\omega\tau}\right|^2 = \dfrac{1}{1+4\omega^2\tau^2}$ Por lo tanto.

$$P_{2,0}(\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{V_0\tau}{m\omega}\right)^2\frac{1}{1+4\omega^2\tau^2}$$

10.11 Encuentre la intensidad asociada con la transición $3s \to 2p$ en el átomo de hidrógeno.
Solución:
La intensidad de radiación esta dada por

$$I_{n\to m} = \frac{4\omega^4 e^2}{3c^3}\left|\langle\psi_m|\hat{r}|\psi_m\rangle\right|^2$$

Para el estado de transición $|3,0\rangle \to |2,1\rangle$

$$\langle 3,0|\hat{r}|2,1\rangle = \int_0^\infty r^3 R^*_{3,0}(r)R_{2,1}(r)dr$$

Recordando la definición de $R_{n,I}$

$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{\sqrt{6a_0^3}}\frac{r}{2a_0}e^{-r/2a_0}$$

$$R_{3,0}(r) = \frac{2}{3\sqrt{3a_0^3}}e^{-r/3a_0}\left\{1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right\}$$

por lo tanto

$$\langle 3,0|\hat{r}|2,1\rangle = \frac{1}{9a_0^4}\left\{\int_0^\infty r^3 e^{5r/6a_0}dr - \frac{2}{3a_0}\int_0^\infty r^4 e^{-5r/6a_0}dr + \frac{2}{27a_0^2}r^5 e^{-5r/6a_0}dr\right\{$$

Resolviendo cada integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^3 e^{5r/6a_0}dr &= -\left(\frac{5}{6a_0}\right)^{-4} e^{5r/6a_0}\left[\left(\frac{5}{6a_0}\right)^3 r^3 + 3\left(\frac{5}{6a_0}\right)^2 r^2 + 6\left(\frac{5}{6a_0}\right) r + 6\right]_0^\infty \\ &= 6\left(\frac{6a_0}{5}\right)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^4 e^{5r/6a_0}dr &= -\left(\frac{5}{6a_0}\right)^{-5} e^{5r/6a_0}\left[\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^4 + 4\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^3 + 12\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^2 + 24\left(\frac{5r}{6a_0}\right) + 24\right]_0^\infty \\ &= 24\left(\frac{6a_0}{5}\right)^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^5 e^{5r/6a_0}dr &= -\left(\frac{5}{6a_0}\right)^{-6} e^{5r/6a_0}\left[\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^5 + 5\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^4 + 20\left(\frac{5r}{6a_0}\right)^3 + 60\left(\frac{5r}{6a_0}\right) r^2 + 120\left(\frac{5r}{6a_0}\right) + 120\right]_0^\infty \\ &= 120\left(\frac{6a_0}{5}\right)^6\end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en la integral obtenemos

$$\langle 3,0|\hat{r}|2,1\rangle = -0{,}391$$

por lo tanto la intensidad de radiación $3p \to 2p$ es

$$I_{3p\to 2p} \approx \frac{\omega^4 e^2}{5c^3}$$

10.12 Un átomo de hidrógeno en su estado base se coloca en una región donde, para $t = 0$, se activa un campo eléctrico dependiente del tiempo:

$$\vec{E}(t) = E_0(i + j + k)e^{-t/\tau} \tag{27}$$

donde τ es un número real positivo. Utilizando la teoría de perturbación dependiente del tiempo de primer orden, calcule la probabilidad de que, después de un tiempo suficientemente largo (es decir, $t \gg \tau$), el átomo se encuentre en cada uno de los $n = 2$ estados (es decir, considere las transiciones a todos los estados en el nivel $n = 2$).

Hint: puedes usar $\displaystyle\int_0^\infty r^3 R_{21}^*(r) R_{10}(r) dr = \frac{24 a_0}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Solución:

Supongamos que un átomo de hidrógeno en estado fundamental se coloca en un campo eléctrico definido por

$$E(t) = \begin{cases} E_0(i+j+k)e^{-t/\tau} & \text{para} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{Para} \quad t < 0 \end{cases}$$

$\tau > 0$ y E_0 son constantes. De la teoría de pertubaciones. Calculemos las probabilidades de las transiciones: $1s \to 2s$, $2p$.

Ahora, el Hamiltoniano resultante del momento dipolar de los electrones y el campo eléctrico está dado por

$$\hat{H}_p = e\vec{r} \cdot \vec{E}$$

En coordenadas esféricas

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$

entonces

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = rE\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\theta\right)$$

Por lo tanto, la probabilidad de transición, dada en el Capítulo 10, para el átomo de hidrógeno es

$$P_{n\to m} \approx \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty \left\langle \psi_m | \hat{H}_p | \psi_n \right\rangle e^{i\omega_{m,n}t} dt\right|^2 \tag{28}$$

Así. se requiere resolver $\langle 2,0|r\cdot E|1,0\rangle$ y $\langle 2,0|r\cdot E|1,0\rangle$ la energía no perturbada del átomo de hidrógeno viene dada por $\langle n|\hat{H}_0|n\rangle = -\dfrac{e^2}{2a_0n^2}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, de la definición

$$\omega_{n,m} \equiv \left(\langle m|\hat{H}_0|m\rangle - \langle n|\hat{H}_0|n\rangle\right)$$

se deduce de inmediato que $\omega_{2,1} = \dfrac{2e^2}{8a_0\hbar}$

Teniendo en cuenta el armónico esférico $Y_{1,\pm1} = \mp\dfrac{3}{8\pi}e^{\pm i\phi}\operatorname{sen}\theta$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1} + Y_{1,1})$$

y

$$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1} - Y_{1,1})$$

claramennte

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}$$

sustituyendo tenemos

$$\vec{r}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}eE_0\left[(i+1)Y_{1,-1} + (i-1)Y_{1,1} + \sqrt{2}Y_{1,0}\right]$$

Consideremos el valor de expectación $\langle 2,0|\vec{r}\cdot\vec{E}|1,0\rangle$ y por otra parte sabemos

$$R_{1,0} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_0} \qquad R_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/a_0}$$

Evaluando

$$\begin{aligned}
\langle 2,0|\hat{r}|1,0\rangle &= \int_0^\infty r^3 R_{2,0}^*(r)R_{1,0}(r)dr \\
&= \frac{\sqrt{2}}{a_0^3}\int_0^\infty r^3\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-2r/a_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}a_0^3}\left[r^4 e^{-2r/a_0}\right]_0^\infty \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así demostramos que la transición $\langle 2,0|\vec{r}\cdot\vec{E}|1,0\rangle = 0$

Finalmente consideremos el valor de expectación $\langle 2,1|\vec{r}\cdot\vec{E}|1,0\rangle$

$$\int_0^\infty r^3 R_{2,1}^*(r)R_{1,0}(r)dr = \frac{24a_0}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Para la parte radial tomemos en cuenta $Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{2,1}^* Y_{1,0}^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0 2\pi e^{-i\phi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta d\theta d\phi = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{2,1}^* Y_{1,1}Y_{1,0}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta d\theta d\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{2\pi}{30}[\cos^3\theta(3\cos(2\theta)-7)]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{10}\sqrt{\frac{15}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{2,1}^* Y_{1,-1}Y_{1,0}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-2i\phi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta d\theta d\phi = 0$$

Por lo tanto $\langle 2,1|\vec{r}\cdot\vec{E}|1,0\rangle = \frac{12a_0}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5(i-1)E_0$

De 28 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left\langle\psi_m|\hat{H}_p|\psi_n\right\rangle e^{i\omega_{m,n}t}dt &= \frac{12a_0 e}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5(i-1)E_0\int_0^\infty e^{-t/\tau}e^{i\omega_{m,n}t}dt \\
&= \frac{12a_0 e}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5(i-1)E_0\frac{\tau}{1-i\omega\tau}\left[exp\left(\frac{1}{\tau}-i\omega_{m,n}\right)t\right]_0^\infty \\
&= \frac{12a_0 e}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5(i-1)E_0\frac{\tau}{1-i\omega\tau}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_{1s\to 2s}\approx\left[\frac{12a_0 e}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5\tau E_0\right]^2\left|\frac{i-1}{1-i\omega\tau}\right|^2$$

$$P_{1s\to 2s}\approx\left[\frac{12a_0 e}{\sqrt{15}}\left(\frac{2}{3}\right)^5\tau E_0\right]^2\sqrt{\frac{2}{1+\omega^2\tau^2}}$$

10.15 Una partícula de masa en el estado base de un oscilador armónico unidimensional se coloca en una perturbación $V(t) = -V_0\hat{x}e^{-t/\tau}$. Calcule según la teoría de perturbación de primer orden la probabilidad de encontrar la partícula en su primer estado excitado después de mucho tiempo.

Solución: la perturbación a primer orden es

$$P_{n\to k}(t) \approx \left| -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \left\langle k|\hat{V}_p(t)|n\right\rangle e^{i\omega_{n,k}t'}dt' \right|$$

Donde $\omega_{n,k} = \frac{i}{\hbar}\left(\left\langle k|\hat{H}_0|k\right\rangle + \left\langle n|\hat{H}_0|n\right\rangle\right)$ sea H_0 el hamiltoneano no perturbado y recordemos que sus eigenvalores estan dados por $\langle n|\hat{H}_0|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ para $n = 1, 2, \ldots$

por lo tanto $\omega_{n,k} = \omega(k-n)$ y sabemos $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$

$$\begin{aligned} \langle k|\hat{X}|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle k|\hat{a}|n\rangle + \langle k|\hat{a}^\dagger|n\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(((\langle k|\hat{a}|n\rangle\sqrt{n}\langle k|n-1\rangle + \sqrt{n-1}\langle k|n+1\rangle) \end{aligned}$$

para $n = 0$ y $k = 1$

$$\langle 1|\hat{X}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{1,0}}}$$

se sigue

$$\int_0^t \langle k|\hat{V}_p(t)|n\rangle = V_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_0^\infty e^{\frac{1}{\tau}i\omega_{1,0}t'}dt' = V_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\tau}{1-i\omega\tau}$$

Por lo tanto, la probabilidad de transición es

$$P_{0\to 1} = (\infty) \approx \frac{1}{2m\hbar\omega}\frac{\tau^2V_0^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

10.17 Un oscilador armónico unidimensional tiene una constante de resorte repentinamente reducida a la mitad.

(a) Si el oscilador está inicialmente en su estado fundamental, encuentre la probabilidad de que el oscilador permanezca en el estado fundamental.

(b) Encuentre el trabajo asociado con este proceso.

Solución:
Suongamos una partícula con un potencial armónico en una dimensión definido por

$$V(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & \text{para} t < 0 \\ \frac{1}{4}m\omega^2x^2 & \text{para} t \leq 0 \end{cases}$$

definamos $\omega' \equiv \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ para $t \leq 0$ en el potencial, para $t < 0$ los eigeinvalores de la energía son $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y si $t \leq 0$ los eigeinvalores de energía son $E'_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega'$ si el oscilador es un estado base para $t < 0$

(a) La transición de probabilidad $|n\rangle \to |k\rangle$ esta definida $P_{n\to k} = |\langle n|k\rangle|^2$ donde $|n\rangle$ es el estado para $t < 0$ correspondiente al hamiltoneano no perturbado $\hat{H}_0$ y $|k\rangle$ es el estado para $t \leq 0$ correspondiente al hamiltoneano $\hat{H}$. entonces para $n = 0$

$$\omega_{0,k} = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left(k+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Específicamente, en la representación de coordenadas, los estados respectivos son

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-m\omega x^2/2\hbar} \qquad t<0$$

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega'}{\hbar}}x\right) e^{-m\omega' x^2/2\hbar} \qquad t<0$$

para $n=0$ y $k=0$ los estados bases son

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$\psi_0'(x) = \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega' x^2/2\hbar}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle 0'|0\rangle &= \left(\frac{m^2\omega'\omega}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4}\int_0^\infty e^{-m\omega x^2/2\hbar}e^{-m\omega' x^2/2\hbar}dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/8}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-m(\omega'+\omega)x^2/2\hbar}dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/8}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{20\pi\hbar}{17m\omega}}
\end{aligned}$$

Usando la aproximación: $1+\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{17}{10}$ y $\int_0^\infty e^{ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ obtenemos

$$\langle 0'|0\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/9}\sqrt{\frac{20}{17}}$$

por lo tanto la probabilidad de transición es

$$P_{0\to 0'} \approx \frac{10}{17}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

(b) La energía expandida en este proceso es precisamente la diferencia de energía entre los dos estados fundamentales diferentes. El trabajo realizado es $\delta W = \hbar\omega_{0,0}$ De Por lo tanto, el trabajo realizado es $\delta W = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, donde aproximamos $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{5}$. Tanto como la energía de entrada es negativa, la energía debe ser absorbida por el sistema para permanecer en su estado base original. Esto es evidente ya que el estado base original está en un nivel de energía más alto que el estado fundamental para cualquier $t \leq 0$.

10.19 Suponiendo que $\langle\psi_f|\bar{r}|\psi_i\rangle$ es aproximadamente igual al tamaño del sistema en estudio, utilice un cálculo bruto para estimar la vida media de

(a) una transición dipolo eléctrica en un átomo donde $\hbar\omega \sim 10eV$ y

(b) una transición dipolo eléctrica en un núcleo donde $\hbar\omega \sim 1MeV$.

Solución:

a) (a) Dado que $\rangle\psi_f|\hat{r}|\psi_r$ es aproximadamente el tamaño del sistema en estudio, haga una estimación aproximada de la vida útil, la transición dipolar eléctrica en un átomo emite un fotón de energía $\hbar\omega \sim 10eV$.

recordemos $1eV = 1{,}602\times 10^{-19}J$. Por lo tanto. $h\omega \sin 1{,}6\times 10^{-18}J$ implica a la vez que

$\omega \sim 1{,}5x10^{17}$ rad/s. Ahora. Para que la aproximación sea válida, la relación $kr = \dfrac{2\pi r}{\lambda} << 1$. donde r es el radio medio del sistema y $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$
Esto es: $\dfrac{\omega r}{c} << 1 \Leftrightarrow r << \dfrac{c}{\omega}$
En la medida en que la condición $r << 1{,}5 \times 10^{-9} m$ debe cumplirse para que funcione la aproximación del dipolo eléctrico, es suficiente tomar $|\langle \psi_f | \bar{r} | \psi \rangle| \sim a_0$, el radio de Bohr, donde $a_0 = 5{,}3 \times 10^{-11} m$.
Por lo tanto, de la transición dipolar

$$W_{i\to f} = \frac{4\omega^3 e^2}{3\hbar c^3} |\langle \psi_f | \bar{r} | \psi_i \rangle|^2$$

La transición aproximada es

$$W_{i\to f} \sim \frac{4\omega^3 e^2 a_0^2}{3\hbar c^3}$$

Reescribiendo esto como $W_{i\to f} = \dfrac{4(\hbar\omega)^3 e^2}{3\hbar^4 c^3}$. convirtiendo $eV \to J$

$$\hbar\omega = 10eV \left(\frac{1{,}6 \times 10^{-19} J}{1eV} \right) = 1{,}6 \times 10^{-18} J$$

sustituyendo

$$W_{i\to f} = \frac{4(1{,}6 \times 10^{-18} J)^3 (1{,}6 \times 10^{-19} C)^2 (5{,}3 \times 10^{-11} m)^2}{(1{,}06 \times 10^{-34} Js)^4 (3 \times 10^8 m/s)^3} = 1{,}1 \times 10^{-3} s^{-1}$$

la vida media $\tau = \dfrac{1}{\sum_f W_{i\to f}}$ sustituyendo

$$\tau = \frac{1}{1{,}1 \times 10^{-3} s^{-1}} \approx 900s$$

b) Dado que $\rangle \psi_f | \hat{r} | \psi_i \rangle$ es aproximadamente del tamaño del sistema. Hacemos una estimación aproximada de la vida útil si la transición dipolar eléctrica en un átomo emite un fotón de energía $\hbar\omega \sim 1MeV$

sabemos $1eV = 1{,}602 \times 10^{-19} J$. Por lo tanto, $\hbar\omega \sim 1{,}6 \times 10^{-13} J$ implica a la vez que $\omega \sim 1{,}5 \times 10^{21} rad/s$.

Para que la aproximación sea válida, la relación $kr = \dfrac{2\pi r}{\lambda}$, donde r es el radio medio del sistema $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$. Es decir, $\dfrac{\omega r}{c} << 1$, $r >> \dfrac{\omega}{c}$. En la medida en que debe cumplirse la condición $r = 2 \times 10^{-13} m$ para que funcione la aproximación del dipolo eléctrico, es suficiente tomar $|\rangle \psi_f | \bar{r} | \psi_i \rangle \sim 10^{-15}$, el radio aproximado de un núcleo. Por lo tanto, de la transición

$$W_{i\to f} = \frac{4\omega^3 e^2}{3\hbar c^3} |\langle \psi_f | \bar{r} | \psi_i \rangle|^2$$

La transición aproximada es

$$W_{i\to f} \sim \frac{4\omega^3 e^2}{3\hbar c^3} \times 10^{-30}$$

Convertir $h\omega$ de MeV a J

$$\hbar\omega = 1MeV \left(\frac{1{,}6 \times 10^{-13} J}{1MeV} \right) = 1{,}6 \times 10^{-13} J$$

Reescribiendo esto como

$$W_{i\to f} \sim \frac{4(h\omega)^3 e^2}{3\hbar^4 c^3} \times 10^{-30} \sim \frac{4(h\omega)^3 e^2}{3\hbar^4 c^3 a_0^2}$$

sustituyendo

$$W_{i\to f} = \frac{4(1{,}6\times 10^{-13}J)^3(1{,}6\times 10^{-19}C)^2 10^{-30}m^2}{(1{,}06\times 10^{-34}Js)^4(3\times 10^8 m/s)^3} = 4\times 10^{-13}s^{-1}$$

la vida media $\tau = \dfrac{1}{\sum_f W_{i\to f}}$ sustituyendo

$$\tau = \frac{1}{4\times 10^{-13}s^{-1}} \approx 2{,}5\times 10^{12}s$$

10.20 Inicialmente, una partícula (es decir, cuando $t < 0$) está en su estado fundamental en el potencial $V(x) = -V_0\delta(x)$ con $V_0 > 0$.

(a) Si la fuerza del potencial cambia lentamente a $3V_0$, encuentre la función de energía y onda de la partícula en el nuevo potencial.

(b) Calcule el trabajo realizado con este proceso. Encuentre un valor numérico para este trabajo en MeV si esta partícula fuera un electrón y $V_0 = 200 MeV fm$.

(c) Si la fuerza del potencial cambia repentinamente a $3V_0$, calcule la probabilidad de Encontrar la partícula en el estado fundamental del nuevo potencial.

Solución

(a) Sea $V_0 > 0$ una constante y suponga que una panícula de masa m en el estado base está sujeta al potencial definido por $V(x) = V_0\delta(x)$ para $t < 0$. Sea $V_0 \to 3V_0$ una transformación continua en el tiempo para $t >> 1$ lo suficientemente grande (es decir, potencial de variación lo suficientemente lento). Calculemos la función de onda y la energía en el nuevo estado para $t >> 1$

Supongamos que $\hat{H}_0$ denota el hamiltoniano para $t < 0$ y $\hat{H}_\infty$ el hamitonio para $t >> 1$ como el potencial es una distribución Dirac-delta. la partícula está limitada por $E < 0$ constante y $x < 0$
$D_- = (-\infty, 0)$ y $D_+ = (0, \infty)$ para que sean intervalos infinitos semiabiertos. Entonces. de la ecuación de Schrodinger.

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0\delta(x))\psi = 0$$

hagamos $\varepsilon^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \left(-\varepsilon + \frac{2m}{\hbar^2}V_0\delta(x)\right)\psi = 0$$

en D_- la función de onda es $\psi_-(x) = A_-e^{\varepsilon x} + B_-e^{-\varepsilon x}$ como $V(x) = 0$, D_- por definición. Además, como el estado está limitado

$$\lim_{x\to-\infty}\psi_-(x) = 0 \Rightarrow B_- \equiv 0$$

Del mismo modo, en D_+. la función de onda general es $\psi_+(x) = A_+e^{-\varepsilon x} + B_+e^{\varepsilon x}$, $V_0(x) = 0$ en D_+ por definición.
Además, el requisito físico de que $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x) = 0$ implica que $B_+ = 0$. Esto es $\psi_+(x) = A_+e^{-\varepsilon x}$. Específicamente, la función de onda es, por lo tanto,$\psi(x) = Ae^{-\varepsilon|A|}$ La constante de normalización A se determina mediante $\displaystyle\int_0^\infty \psi^2(x)dx$. Por lo tanto.

$$\begin{aligned} A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\varepsilon|x|}dx &= 1 \\ &= A^2\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\right) \\ A &= \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Luego, en $x = 0$. tenemos $\lim_{x\to 0^-} \psi_-(x) = \lim_{x\to 0^+} \psi_+(x)$ y, por lo tanto, $V = V(x)$ establezcamos $A = A_\pm$. Es decir, $\psi_-(0) = \psi_+(0)$. Finalmente, notando que $V = V(x)$ usando la distribución delta-Drac, la siguiente integral está bien definida:

$$\lim_{\delta\to x}\left\{\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\psi dx - \varepsilon^2\int_{-\delta}^{\delta}\psi dx + \frac{2m}{\hbar^2}V_0\int_{-\delta}^{\delta}\delta(x)\psi dx\right\}$$

para cualquier $\delta > 0$. Es decir, $\lim_{\delta\to x}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\psi dx + \frac{2m}{\hbar^2}V_0 A = 0$

Ahora. por definición.y sustituyendo $\psi_\pm = A_\pm e^{\mp\varepsilon x}$

$$\lim_{\delta\to x}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\psi dx = \lim_{\delta\to x}\left[\frac{d}{dx}\psi_+(\delta) - \frac{d}{dx}\psi_-(-\delta)\right] = \lim_{\delta\to x}\left[-\varepsilon A_+ e^{-\varepsilon x} - -\varepsilon A_+ e^{\varepsilon x}\right]$$

$$\lim_{\delta\to x}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\psi dx = -2\varepsilon A$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 2\varepsilon A &= \frac{2m}{\hbar}V_0 A \\ -\frac{2m}{\hbar}E &= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \end{aligned}$$

La energía del estado base es $E = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$

La energía del estado base cuando $V(x) = -3V_0\delta(x)$ el campo del nuevo estado base de energía $E' = -\frac{9mV_0^2}{2\hbar^2}$ y la nueva función de onda $\psi'(x) = A'e^{-2\varepsilon'|x|}$ donde $\varepsilon' = -\frac{2m}{\hbar^2}E$ en particular $\psi'(x) = \sqrt{\frac{3mV_0}{\hbar^2}}e^{-6mV_0|x|/\hbar^2}$ es la función nueva del estado base

(b) Del proceso de transición en apartado (a) puede estimarse mediante $\delta W = E' - E$.Donde el trabajo es $\delta W = -\frac{4mV_0}{\hbar^2}$

En particular Si la partícula fuera un electrón $V_0 = 200MeVfm$ y observando que la masa de un electrón es $m = 0{,}51MeV/c^2$ y $\hbar c = 197{,}3MeVfm$ consideramos las unidades de MeV.

$$\delta W = -\frac{4mV_0^2}{\hbar^2 c^2}$$

evaluando

$$\delta W = -\frac{4(0{,}51MeV/c^2)(200MeVfm)^2}{(197{,}3MeVfm)^2} \approx 2MeV$$

(c)

10.21 Un átomo de hidrógeno en su estado fundamental se coloca en el tiempo $t = 0$ en un campo eléctrico uniforme en la dirección y, $\vec{E}(t) = E_0\vec{j}e^{-t^2/\tau^2}$ Calcule según la teoría de perturbación de primer orden la probabilidad de que el átomo se encuentre en cualquiera de los $n = 2$ estados después de un tiempo suficientemente largo ($t = +\infty$).

Solución:

Supongamos que un átomo de hidrógeno en su estado base está sujeto a un campo eléctrico de la forma

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{Para} \quad t < 0 \\ E_0 e^{-t^2/r^2}\vec{e}_y & \text{Para} \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Aquí. E_0, τ son constantes. Calculemos la probabilidad de transición $|1,0\rangle \rightarrow |2,l\rangle$ bajo la perturbaciones de primer orden, para $t \rightarrow \infty$

El potencial perturbado resultante del campo eléctrico está definido por $\hat{V}(t)$. De la teoría de perturbación dependiente del tiempo de primer orden. La probabilidad de transición.

$$P_{1,2}(t) = \frac{1}{\hbar}\left|\int_0^t \left\langle 3,l|\hat{V}|1,0\right\rangle e^{i\omega t'}dt'\right|(30)$$

tenemos que, $\hbar\omega = \left\langle 2,l|\hat{H}|3,l\right\rangle$ donde $\hat{H}_0$ es el Hamitoniano para $t<0$ Ahora, $\left\langle n,l|\hat{H}|n,l\right\rangle = -\dfrac{e^2}{2a_0n^2}$ y por lo tanto, $\omega = \dfrac{3e^2}{8\hbar a_0}$ Mao Para evaluar $\left\langle 2,l|\hat{V}|1,0\right\rangle$, es suficiente evaluar $\langle 2,l|\hat{y}|1,0\rangle$ donde $\hat{y} = \hat{r}\hat{e}_r$. En coordenadas esféricas, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow y = i\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}(Y_{1,1}+Y_{1,-1})$, cuando se expresa en armónicos esféricos apelando a las relaciones $\sqrt{\dfrac{8\pi}{3}}Y_{1\pm1} =$
$pme^{\pm i\varphi}\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x\pm iy}{r}$ Por lo tanto, $Y_{0,0} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$ se deduce que

$$\langle 3,l,m|\hat{y}|1,0,0\rangle = \int_0^\infty r^3R_{2,l}^*R_{1,0}dr\int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y_{m,l}^*(Y_{1,1}+Y_{1,-1})\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$$

Sin embargo, invocando ortorgonalidad: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y_{m,l}^*Y_{m',l'}\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi = \delta_{m,m'}\delta_{l',l}$ está claro que

$$\langle 2,l,m|\hat{y}|1,0,0\rangle = \int_0^\infty r^3R_{2,l}^*R_{1,0}dr\delta_{l,1}(\delta_{m,1}+\delta_{m,-1})$$

Implica inmediatamente que $l=1$ y $m=\pm1$
Por lo tanto. la integral se reduce a

$$\langle 2,1,1|\hat{y}|1,0,0\rangle = \int_0^\infty r^3R_{2,l}^*R_{1,0}dr$$

De hecho, es evidente que $\langle 2,1,1|\hat{y}|1,0,0\rangle = \langle 2,1,-1|\hat{y}|1,0,0\rangle$
Así, observando que

$$R_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{6a_0^2}}\frac{r}{2a_0}e^{-r/2a_0}$$

La integral se convierte en

$$\langle 2,1,1|\hat{y}|1,0,0\rangle = \frac{1}{a_0^4\sqrt{6}}\int_0^\infty r^4e^{-3r/2a_0}dr$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^4e^{-3r/2a_0}dr &= -\frac{2a_0}{81}e^{-3r/2a_0}dr\left[128a_0^4+192a_0^3r+144a_0^2r^2+72a_0r^3+27r^4\right]\\ &= \frac{256}{81}a_0^4\end{aligned}$$

Por lo tanto. $\langle 2,1|\hat{V}1,0\rangle = -\dfrac{256}{81}eE_0a_0^4e^{-t^2/\tau}$ implica a la vez que

$$\int_0^t\langle 2,1|\hat{V}1,0\rangle e^{i\omega t'}dt' = -\frac{256}{81}eE_0a_0^4\int_0^t e^{-t'^2/\tau}e^{i\omega t'}dt'$$

10.22 Una partícula, inicialmente (es decir, cuando $t < 0$) en su estado base en un pozo de potencial infinito con sus paredes en $x = 0$ y $x = a$, está sujeta, comenzando en el tiempo $t = 0$, a una perturbación dependiente del tiempo $\hat{V}(t) = V_0 \hat{x} \delta(x - 3a/4) e^{-t/\tau}$ donde V_0 es un parámetro pequeño. Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en su primer estado excitado ($n = 2$) en $t = +\infty$.

Solución:

Suponga que para r ¡0 un partícula tiene un potencial.

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para} \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Y para $t \leq 0$. la perturbación es dependiente del tiempo.

$$V(x) = V_0 x \delta \left(x - \frac{3}{4} a \right) e^{-t/\tau}$$

Entonces, la probabilidad de transición $|1\rangle \to |2\rangle$ en el límite $t\infty$. se calcula de la siguiente forma Recordemos que para $t < 0$.los valores propios de la energía y las funciones son.

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \qquad \psi_a(x) = \sqrt{\frac{2}{q}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right)$$

Luego, de la teoría de perturbación dependiente del tiempo, la probabilidad de transición es

$$P_{1\to 2} = \frac{1}{\hbar} \left| \int_0^\infty \langle 2 | \hat{V}(t') | 1 \rangle e^{i\omega t'} dt' \right|^2$$

donde $\hbar\Omega = E_f - E_i$ y $\omega = \dfrac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}$

$$\begin{aligned} \left\langle 2 \middle| x\delta \left(x - \frac{3}{4} a \right) \middle| 1 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x\delta \left(x - \frac{3}{4} a \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{a} x \\ &= \frac{3}{4} a \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \\ &= \frac{3a}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t/\tau} e^{i\omega t} dt &= \int_0^\infty e^{-t(1/\tau - i\omega)} dt \\ &= -\frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \left[e^{-t(1/\tau - i\omega)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \end{aligned}$$

Por lo tanto la transición de probabilidad es

$$P_{1\to 2} = \frac{1}{2\hbar} \left| \frac{3aV_0}{4} \right|^2 \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

10.24 Considere una partícula que está inicialmente (es decir, cuando $t > 0$) en su estado fundamental en un potencial de caja tridimensional

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \;\; 0 < y < 2a \;\; 0 < z < 4a \\ \infty & \text{En otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre las energías y las funciones de onda del estado fundamental y el primer estado excitado.

(b) Esta partícula está sujeta, comenzando en el tiempo $t = 0$, a una perturbación dependiente del tiempo

$\hat{V}(t) = V_0 \hat{x}\hat{z}e^{-t^2}$ donde V_0 es un parámetro pequeño. Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en el primer estado excitado después de mucho tiempo $t = +\infty$

Solución:

Suponga que una partícula está confinada en un potencial tridimensional para $t < 0$ definido por

$$V_0(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{Para} \quad (x,y,z) = (0,a) \times (0,2a) \times (0,4a) \\ \infty & \text{otro caso} \end{cases}$$

Supongamos además que esa partícula está en estado base y su masa es M. Por simplicidad de notación. conjunto $D = (0,a) \times (0,2a) \times (0,4a)$

(a) Determinando los eigenvalores energías y funciones de onda del estado base y el primer estado excitado de la partícula. la partícula debe satisfacer la ecuación de Schradinger

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi = E\psi$$

En coordenadas rectangulares.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y aplicando separación de variables para resolver la ecuación diferencial $\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}X(x)Y(y)Z(z) = EX(x)Y(y)Z(z)$$

Implica que

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial X(x)}{\partial x} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial Y(y)}{\partial y} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial Z(z)}{\partial z} = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

Y en la medida en que cada término es por separado es igual a una constante

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial X(x)}{\partial x} = \lambda_x^2 \qquad \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial Y(y)}{\partial y} = \lambda_y^2 \qquad \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial Z(z)}{\partial z} = \lambda_z^2$$

Aquí, λ_ξ^2, $\xi = x, y, z$. son constantes reales y por construcción,

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$$

Las soluciones a esta ecuación diferencial tienen forma

$$\phi(\xi) = A_\xi \operatorname{sen}(\lambda_\xi \xi) + B_\xi \cos(\lambda_\xi \xi)$$

condiciones para $X(0) = 0$ y $X(a) = 0$ se deduce de inmediato que $A_x = 0$ y $\operatorname{sen}(\lambda_x a) = 0$ de aquí $\lambda_x a = n\pi$ Es decir. $\lambda_x = \dfrac{n_x\pi}{a}$ para $n_x = 1, 2, \ldots$

las condiciones para $Y(0) = 0$ y $Y(2a) = 0$ Al sustituir encontramos que $A_y = 0$ y $\operatorname{sen}(2\lambda_y a) = 0$ para que esto se cumpla $2\lambda_y a = n_y\pi$ Específicamente, $\lambda_y = \dfrac{n_y\pi}{2a}$

las condiciones para $Z(0) = 0$ y $Z(4a) = 0$ Al sustituir encontramos que $A_z = 0$ y $\operatorname{sen}(4\lambda_z a) = 0$ para que esto se cumpla $4\lambda_z a = n_z\pi$ Específicamente, $\lambda_z = \dfrac{n_z\pi}{4a}$

Por lo tanto

$$\frac{2ME}{\hbar} = \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{4a}\right)^2$$

es decir

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left[n_x^2 + \left(\frac{n_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{4}\right)^2\right]$$

son los estados propios de energía de la partícula.

La función de onda de la partícula es

$$\psi_{n_x,n_y,n_z} = A \operatorname{sen}\frac{n_x\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n_y\pi y}{2a}\operatorname{sen}\frac{n_z\pi z}{4a}$$

La constante de normalización A se calcula

$$\begin{aligned} A\int_0^a \operatorname{sen}^2\frac{n_x\pi x}{a}dx\int_0^{2a}\operatorname{sen}^2\frac{n_y\pi y}{2a}dy\int_0^{4a}\operatorname{sen}^2\frac{n_z\pi z}{4a}dz &= 1 \\ &= A^2\left(\frac{a}{2}\right)(a)(2a) \\ A &= a^{-3/2} \end{aligned}$$

observemos que al configurar $n = 4\left(n_x + \frac{n_y}{2} + \frac{n_z}{4} - \frac{7}{4}\right)$ equivalente $n = 4n_x + 2n_y + n_z - 7$, se deduce que el estado base es $n = 0$. correspondiente a $(n_x, n_y, n_z) = (1,1,1)$ y el primer estado excitado es $n = 1$. correspondiente $(n_x, n_y, n_z) = (1,1,2)$ Por lo tanto, las energías respectivas para $n = 0$ y $n = 1$. son.

$$E_0 = \frac{31\hbar^2}{32M}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad E_1 = \frac{3\hbar^2}{2M}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Las funciones de onda asociadas para los estados respectivos son:

$$\psi_{1,1,1} = \frac{1}{a^3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{2a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{4a}$$

y

$$\psi_{1,1,2} = \frac{1}{a^3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{2a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{2a}$$

(b) Dadas las condiciones del inciso (a). supongamos que la partícula está sujeta a un potencial de perturbación $\hat{V}(t) = V_0\hat{x}\hat{z}e^{-t^2}$ dependiente del tiempo, para alguna pequeña constante $0 < V_0 \ll 1$. Determine la probabilidad de transición $|1,1,1\rangle \to |1,1,2\rangle$ en el límite cuando $r \to \infty$. En primer lugar, recuerde que la fórmula de perturbación dependiente del tiempo de primer orden produce.

$$P_{|0\rangle\to|1\rangle} = \frac{1}{\hbar}\left|\int_0^\infty \left\langle 1,1,2|\hat{V}(t)|1,1,1\right\rangle e^{i\omega t}dt\right|^2$$

Donde $\omega = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_0) = \frac{17\hbar}{32M}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left\langle 1,1,2|\hat{V}(t)|1,1,1\right\rangle &= V_0 a^3\int_0^a x\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}dx\int_0^{2a}\operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{2a}dy\int_0^{4a} z\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{4a}\frac{\pi z}{2a}dz \\ &= \frac{V_0}{a^3}\left[\frac{\cos\frac{2\pi}{a}x}{8\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - \frac{x\operatorname{sen}\frac{2\pi}{a}}{\frac{4\pi}{a}} + \frac{x^2}{4}\right]_0^a a \\ &\times \frac{1}{2}\left[\frac{z\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{4a}\right)}{\frac{\pi}{4a}} - \frac{z\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi z}{4a}\right)}{\frac{3\pi}{4a}} + \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{4a}\right)}{\left(\frac{\pi}{4a}\right)^2} - \frac{\cos\left(\frac{3\pi z}{4a}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4a}\right)^2}\right] \\ &= -\frac{V_0}{2}\frac{a^2}{\pi}\left(\frac{11}{3} + \frac{64}{9\pi}\right) \\ &= \frac{2{,}95V_0a^2}{\pi} \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la probabilidad de transición se obtiene

$$P_{|0\rangle\to|1\rangle} = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2{,}95V_0a^2}{\pi}\right)^2\left|\int_0^\infty e^{-r^2+i\omega t}dt\right|^2$$

Finalmente podemos notar $t - i\omega t = \left(t - \frac{i\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2$ para simplificar hacemos el cambio de variable $t \to \xi = t - \frac{i\omega}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{t^2}e^{i\omega t}dt &= e^{-\omega^2/4}\int_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi \\ &= \frac{\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_{|0\rangle\to|1\rangle} = \frac{\pi}{\hbar}\left(\frac{1{,}48V_0a^2}{\pi}\right)^2 e^{-\omega^2/2}$$

10. Teoría de dispersión

1. Considere la dispersión de una partícula alfa de $5MeV$ (es decir, un núcleo de helio con $Z_1 = 2$ y $A_1 = 4$) de un núcleo de aluminio ($Z_2 = 13$ y $A_2 = 27$). Si el ángulo de dispersión de la partícula alfa en el marco de laboratorio es $\theta_1 = 30°$

   (a) encuentre su ángulo de dispersión θ en el cuadro CM y

   (b) dé una estimación numérica de la sección transversal de Rutherford

   Solución:

   (a) Suponga que una partícula alfa de $5MeV$ se dispersa desde un núcleo de aluminio en un ángulo, en el marco del laboratorio, de $\theta_1 = 30°$. Determinando su ángulo de dispersión en el centro del marco de masa. Ahora, sabemos que la transformación del centro del marco de masa al marco del laboratorio viene dada por

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \frac{2m_1}{m_2}\cos\theta}}$$

   Por lo tanto, cuadrar ambos lados y reorganizar la expresión produce la transformación inversa $\theta_1 \to \theta$

$$\cos\theta = \frac{\left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 1\right]\cos^2\theta_1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 - \frac{2m_1}{m_2}\cos^2\theta}$$

   De ahí, observando que para una partícula alfa, $(z_1, A_1) = (2, 4)$ y para un núcleo $(Z_2, A_2) = (3, 27)$, tomando la masa de un protón sea aproximadamente igual al de un neutrón, se sigue que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2}$ Es decir, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{27}$ Por lo tanto, sustituyendo esto en la ecuación anterior

$$\cos\theta = \frac{\left[\left(=\frac{4}{27}\right)^2 + 1\right]\frac{3}{4} - \frac{4}{24}}{1 - = \frac{4}{27}\frac{3}{4}} \approx 0{,}795$$

(b) Calculando la sección transversal para el proceso de colisión en (a).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^2 q^2}\left|\int_0^\infty r' V(r')\,\mathrm{sen}(qr')dr'\right|^2$$

Cuando $V = V(r)$ es el potencial de Coulomb, la sección transversal

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \mathrm{sen}^{-4}\frac{\theta}{2}$$

Aquí, E es la energía cinética incidente de la partícula alfa. Por lo tanto, expresando en unidades de $\mathrm{fm}^2 utilizandolaestructurafinaconstante\alpha = \frac{1}{137}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{26}{4}\frac{1}{137}\right)^2 \left(\frac{197{,}3MeVfm}{E}\right)^2 (5MeV)^2\,\mathrm{sen}^{-4}\frac{37{,}3^\circ}{2} = 8{,}5fm^2$$

2. (a) Encuentre las secciones transversales diferenciales y totales para la colisión clásica de dos esferas duras de radio r y R, donde R es el radio de la esfera más grande; se considera que la esfera más grande ser estacionario

(b) De los resultados de (a) encuentre las secciones transversales diferenciales y totales para la dispersión de partículas puntiagudas de una esfera rígida estacionaria de radio R. Sugerencia: puede usar el clásico relación $d\sigma/d\Omega = -[b(\theta)/\,\mathrm{sen}\,\theta]db/d\theta$, donde $b(\theta)$ es el parámetro de impacto

Solución:

(a) Calculemos las secciones transversales diferenciales y totales entre la colisión clásica de dos esferas duras S_r, S_R, donde la esfera incidente es de radio r y la esfera estacionaria de radio $R > r$ Ahora, dado que S_r es incidente en S_R, que $\vec{v}_r$ denota la velocidad de S_r, considere un eje definido por el vector unitario $\bar{u}$ que pasa por el centro de S_R, paralelo a $\vec{v}_r$. el ángulo θ_u esta definido respecto al eje $-u$. Luego, el ángulo de dispersión viene dado por $\theta = \pi - 2\theta_u$ el parámetro de impacto clásico está definido por $b(\theta_u) = (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta_u$ En particular, con respecto al ángulo de dispersión, $\theta_u = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ implica que $b(\theta) = (R+r)\cos\frac{\theta}{2}$ Por lo tanto, de la relación $\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b(\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{db(\theta)}{d\theta}$ usando la identidad $\mathrm{sen}\,2\theta \equiv 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ se deduce $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(R+r)^2}{4}$

La sección transversal total se define por

$$\sigma = \int_\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

donde $d\Omega = \mathrm{sen}\,\theta d\theta d\phi$ es un ángulo sólido diferencial en coordenadas esféricas. Por lo tanto, $\int_\Omega d\Omega = 4\pi$ implica inmediatamente que $\sigma = \pi(R+r)^2$.

(b) Suponga que las partículas incidentes son partículas puntuales, entonces $r = 0$ y, por lo tanto, la sección transversal diferencial es $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$ y la sección transversal total es $\sigma = \pi R^2$

3. Considere la dispersión del potencial $V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$ Encontrar

(a) la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born y

(b) la sección transversal total

Solución

(a) Calcule la primera aproximación de Born para la sección transversal diferencial dado que el potencial de dispersión es $v(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$ la aproximación de Born para un potencial central es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty r'V(r)\operatorname{sen}(qr)dr\right|^2$$

Donde $q = 2k\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\hbar k$ es el momento lineal de la partícula dispersa y θ es el ángulo de dispersión.
Por lo tanto, para evaluar la integral

$$\int_0^\infty r'V(r)\operatorname{sen}(qr)dr = V_0\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}\operatorname{sen}\left(2kr\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)dr$$

De la identidad $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

$$\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}\operatorname{sen}\left(2kr\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)dr = \frac{1}{2i}\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}e^{2ikr\operatorname{sen}(\theta/2)}dr - \frac{1}{2i}\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}e^{-2ikr\operatorname{sen}(\theta/2)}dr$$

si hacemos $\alpha = 2kr\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ se deduce que $r^2 - 2ika^2 sen\frac{\theta}{2}r = \left(r - \frac{i\alpha}{2}\right)^2 + \alpha$ ahora definiendo $\xi = r - \frac{i\alpha}{2}$ y $\zeta = r + \frac{i\alpha}{2}$ las dos integrales se convierten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}e^{2ikr\operatorname{sen}(\theta/2)}dr - \frac{1}{2i}\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}e^{-2ikr\operatorname{sen}(\theta/2)}dr &= \frac{e^{-\alpha^2}}{2i}\int_0^\infty\left(\xi+\frac{i\alpha}{2}\right)e^{-\xi^2/a^2}d\xi \\ &- \frac{e^{-\alpha^2}}{2i}\int_0^\infty\left(\zeta-\frac{i\alpha}{2}\right)e^{-\zeta^2/a^2}d\zeta \\ &= \frac{\alpha e^{-\alpha^2}}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty re^{-r^2/a^2}\operatorname{sen}\left(2kr\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)dr = \frac{1}{2}ka^2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-4k^2a^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$$

por lo tanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2\pi a^3}{4\hbar^4}e^{-2q^2a^2}$$

(b) Calcule la sección transversal total a considerada en (a). Recuerde que, por definición, la sección transversal total

$$d\sigma = \int_\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

Donde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$. Así,

$$d\sigma = \frac{\mu^2\pi a^3}{4\hbar^4}\int_\Omega e^{8a^2k^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}d\Omega$$

Ahora, observando que $2\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, Haciendo $\xi = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$ por lo tanto $d\xi = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$$\int_\Omega e^{8a^2k^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}d\Omega = \pi\int_0^1 e^{8a^2k^2\xi}d\xi$$

$$d\sigma = \frac{\mu^2\pi a^3\pi}{4\hbar^4}\int_0^1 e^{8a^2k^2\xi}d\xi = \frac{\mu^2\pi a}{32\hbar^4k^2}\left(1-e^{-8a^2k^2}\right)$$

4. Calcule la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born para la dispersión de un partícula por un potencial de pozo cuadrado atractivo: $V(r) = -V_0$ para $r < a$ y $V(r) = 0$ para $r > a$,con $V_0 > 0$.
Solución:
Considere un pozo cuadrado potencial

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{Para}0 \leq r < a \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Y una partícula incidente dispersando el potencial. Determinamos la primera aproximación de Born, para $V_0 > 0$. Ahora, debido a que el potencial es esféricamente simétrico, se deduce que se aplica la primera aproximación de Born para el potencial esférico simétrico.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty r' V(r') \operatorname{sen}(qr') dr' \right|^2$$

Aquí $q = 2k \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ es el ángulo dispersión y $\hbar k$ es el momento lineal del incidente de la partícula y μ es la masa reducida del sistema.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty rV(r)\operatorname{sen}(qr)dr &= -V_0 \int_0^a r \operatorname{sen}(qr)dr \\
&= -V_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(qr) - qr\cos(qr)}{q^2} \right]_0^a \\
&= V_0 \left[\frac{qa\cos(qa) - \cos(qa)}{q^2} \right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| V_0 \frac{qa\cos(qa) - \cos(qa)}{q^2} \right|^2$$

5. Considere la dispersión elástica del potencial delta $V(r) = V_0\delta(r-a)$.

   (a) Calcule la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born.

   (b) Encuentre una expresión entre V_0, a, μ y k para que la aproximación de Born sea válida.

   Solución:

   (a) Considere un potencial delta $V(r) = V_0\delta(r-a)$, donde V_0 y a son constantes. Determinamos la primera aproximación si la dispersión es elástica.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) d^3\vec{r} \right|^2$$

   Aquí $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}\hbar\vec{k}_0(\hbar\vec{k})$ es el momento lineal de la partícula incidente (dispersa), y μ es la masa reducida del sistema. En particular, para una colisión elástica, $\vec{k}_0 = \vec{k}$. Ahora, resolviendo la integral tomando en cuenta la fórmula de Euler $e^{i\alpha}$ y usando la integración por partes, se deduce que

$$\begin{aligned}
\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) d^3\vec{r} &= V_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{iqr\cos\theta} \delta(r-a) \operatorname{sen}\theta d\theta dr d\phi \\
&= 2\pi V_0 \int_0^\pi e^{iqa\cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta
\end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $\xi = \cos\theta \Rightarrow d\xi = -\operatorname{sen}\theta d\theta$ y, por lo tanto, sustituyéndolo en la integral

$$\begin{aligned}
\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) d^3\vec{r} &= 2\pi V_0 \int_0^{\pi} e^{iqa\cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= -2\pi V_0 \int_{-1}^{1} e^{iqa\xi} d\xi \\
&= 2\pi V_0 \frac{1}{iqa}\left(e^{-iqa} - e^{iqa}\right) \\
&= -4\pi V_0 \frac{\operatorname{sen} qa}{qa}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sección transversal diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4}\left|\frac{V_0 \operatorname{sen} qa}{qa}\right|^2$$

(b) Dado $\{V_0, a, \mu, k\}$ de modo que la aproximación de Born sea válida. Ahora, sabeos que la aproximación es válida si

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^a V(r)\left(e^{2ikr} - 1\right) dr\right| \ll 1 \Leftrightarrow \frac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\left|\int_0^a \delta(r-a)\left(e^{2ikr} - 1\right) dr\right| \ll 1$$

Es decir, $\frac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\left|\left(e^{2ikr} - 1\right) dr\right| \ll 1$. pero $|e^{ia}| = 1\ \forall a$, se deduce que para cualquier $a > 0$,es suficiente para

$$\frac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\left|\left(e^{2ikr} - 1\right) dr\right| \ll \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 k} \ll 1$$

Por lo tanto , es suficiente para $2\mu V_0 \ll \hbar^2 k$ garantizar que se mantenga la aproximación de Born. Este criterio es independiente de $a > 0$.

6. Considere la dispersión elástica del potencial $V(r) = V_0 e^{-r/a}$, donde V_0 y a son constantes.

   (a) Calcule la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born.

   (b) Encuentre una expresión entre V_0, a, μ y k para que la aproximación de Born sea válida. (c) Encuentre la sección transversal total usando la aproximación de Born

Solución

(a) Suponga que una partícula se dispersa en un potencial definido por $V(r) = V_0 e^{-r/a}$, donde V_0 y a son constantes aplicamos la fórmula de aproximación a un potencial esféricamente simétrico,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^{\infty} r' V(r') \operatorname{sen}(qr') dr'\right|^2$$

Donde $q = 2k \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ es el ángulo de dispersión y $\hbar k$ es el momento lineal de la partícula incidente, y μ es la masa reducida del sistema. Luego, de la identidad de Euler $e^{ia} = \cos a + i \operatorname{sen} a$ e integrando por partes, se deduce

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} rV(r)\operatorname{sen}(qr) dr &= V_0 \int_0^{\infty} r e^{-r/a} \operatorname{sen}(qr) dr \\
&= \frac{V_0 a}{(a^2q^2+1)^2}\left[e^{-r/a}\left(aq\left(a^2q^2r + 2a + r\right)\right)\cos qr + \left(-a^3q^2 + a^2q^2r + a + r\right)\operatorname{sen} qr\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2qV_0 a}{(a^2q^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4V_0 a^2 \mu}{(a^2q^2+1)^2 h^2}$$

(b) La expresión para las cantidades V_0, a, μ, k tal que la aproximación de Born sea válida se deriva de la siguiente manera. recordemos que la condición de validez es

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^\infty V(r)\left(e^{2ikr}-1\right)dr\right| \ll 1$$

$$\frac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\left|\int_0^\infty e^{-r/a}\left(e^{2ikr}-1\right)dr\right| \ll 1$$

Así, evaluando la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-r/a}\left(e^{2ikr}-1\right)dr &= \int_0^\infty e^{-r/a}e^{2ikr}dr - \int_0^\infty e^{-r/a}dr \\
&= a\left[\frac{1}{1-2iak}-1\right] \\
&= \frac{2ika^2}{1-2iak}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{\mu V_0}{\hbar^2 k}\left|\dfrac{2ika^2}{1-2iak}\right| \Leftrightarrow \dfrac{4a^2\mu V_0}{\hbar^2}\dfrac{1}{1+4k^2a^2} \ll 1$ Es decir, el siguiente criterio debe $4a^2\left(\mu V_0 - \hbar^2 k^2\right) \ll \hbar^2$

(c) La sección transversal total a través de la aproximación de Born para (a) se obtiene de $\sigma = \displaystyle\int_\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$ Por lo tanto. sustituyendo el valor calculado en (a)

$$\sigma = \left|\frac{4V_0a^2\mu}{(a^2q^2+1)^2h^2}\right|^2 \int_\Omega d\Omega = 4\pi\left|\frac{4V_0a^2\mu}{(a^2q^2+1)^2h^2}\right|^2 = \left|\frac{8\sqrt{\pi}V_0a^2\mu}{(a^2q^2+1)^2h^2}\right|$$

7. Encuentre la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born para la dispersión elástica de una partícula de masa m, que inicialmente se desplaza a lo largo del eje z, desde un doble triángulo no esférico potencial

$$V(\vec{r}) = V_0\delta(\vec{r}-a\vec{k}) - V_0\delta(\vec{r}+a\vec{k})$$

donde $\vec{k}$ es el vector unitario a lo largo del eje z.

Solución:

Supongamos que una partícula de masa se dispersa a un potencial

$$V(\vec{r}) = V_0\delta^3(\vec{r}-a\vec{e}_z) - V_0\delta^3(\vec{r}+a\vec{e}_z)$$

Supongamos además que el momento inicial de la partícula $\hbar k_0$ es paralelo a $\vec{e}_z$. Aplique la primera aproximación de Born para calcular la sección transversal diferencial. Ahora, la primera aproximación de Born viene dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int e^{-iqr}V(\vec{r})d\vec{r}\right|$$

donde $\hbar k$ es el momento incidente (disperso) de las partículas y $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$ Finalmente, como la colisión es elástica, $k = k_0$

Ahora, evaluando la integral

$$\int e^{-iqr}V(\vec{r})d\vec{r} = V_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{iqr}\left[\delta^3(\vec{r}-a\vec{e}_z) - \delta^3(\vec{r}+a\vec{e}_z)\right]dxdydz$$

Al notar que $\delta^3(\vec{r}\pm a\vec{e}_z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z\pm a)$ y $\vec{q}\cdot\vec{r} = xq_x + yq_y + zq_z$

$$\begin{aligned}
\int e^{-iqr}V(\vec{r})d\vec{r} &= V_0\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iq_zz}\delta(z-a) - e^{iq_zz}\delta(z+a)\right)dz \\
&= V_0(e^{-iq_zz} - e^{iq_zz}) \\
&= -2iV_0\,\mathrm{sen}(q_za)
\end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2 V_0}{2\pi^2\hbar^4}|\operatorname{sen}(q_z a)|$$

8. Encuentre la sección transversal diferencial en la primera aproximación de Born para la dispersión de neutrones y neutrones en el caso donde el potencial se aproxima por $V(r) = V_0 e^{-r/a}$
Solución:
cuando se produce una dispersión neutrón-neutrón a un potencial $V(r) = V_0 e^{-r/a}$, donde V_0 y a.al aproximar la sección transversal diferencial a través de la primera aproximación. debido a que el potencial es esféricamente simétrico, está viene dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty rV(r)\operatorname{sen}(qr)dr\right|^2$$

Aquí $q = 2k\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y θ es el ángulo de dispersión.

Dado que $e^{ia} = cosa + i\operatorname{sen} a$ y usando la integración por partes, se deduce que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty rV(r)\operatorname{sen}(qr)dr &= V_0\int_0^\infty re^{-r/a}\operatorname{sen}(qr)dr \\
&- \frac{V_0 a}{(q^2a^2+1)^2}e^{-r/a}\left[\left(aq\left(a^2q^2r+2a+r\right)\right)\cos qr + \left(-a^3q^2+a^2q^2r+a+r\right)\operatorname{sen} qr\right]_0^\infty \\
&= \frac{2qV_0a^3}{(a^2q^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \left|\frac{4\mu V_0 a^3}{\hbar^2(a^2q^2+1)^2}\right|^2$$

9. Considere la dispersión elástica de una partícula de masa m y el momento inicial $\hbar k$ fuera de un delta potencial $\hat{V}(\vec{r}) = V_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$, donde V_0 es una constante.

   (a) ¿Cuáles son las dimensiones físicas de la constante V_0?

   (b) Calcule las secciones transversales diferenciales en la primera aproximación de Born.

   (c) Repita (b) para el caso donde el potencial ahora viene dado por

   $$\hat{V}(\vec{r}) = V_0\delta(x)\left[\delta(y-b)\delta(z) + \delta(y)\delta(z-a)\right]$$

   Solución:

   (a) Suponga que una partícula de masa m tiene un momento inicial $\hbar k$ se dispersa elásticamente a un potencial $V(r) = V_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$, donde V_0 es una constante. Determinando las dimensiones físicas de V_0. Como $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)du = 1$ se deduce que $\delta(u)$ tiene las dimensiones de por metro; por lo tanto, la unidad de V_0 es J/m^3

   (b) La sección transversal diferencial de (a) se puede evaluar de la siguiente manera. Desde la primera aproximación de Born

   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}V(\vec{r})d^3\vec{r}\right|^2$$

   Donde $\vec{q} = \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}(\hbar\vec{k})$ es el momento incidente (disperso) de las partículas. Además, como la colisión es elástica, $k_0 = k$. Así, evaluando la integral,

   $$\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}V(\vec{r})d^3\vec{r} = V_0\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(q_x x+q_y y+q_z z)}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)dxdydz$$

Sustituyendo $V_0 e^{iq_z a}$ por $\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|V_0 e^{iq_z a}\right|^2 = \frac{\mu^2 V_0}{4\pi^2\hbar^4}$$

está es la sección diferencial

(c) Calculando la sección diferencial, si el potencial es definido por

$$\hat{V}(\vec{r}) = V_0\delta(x)\left[\delta(y-b)\delta(z) + \delta(y)\delta(z-a)\right]$$

Evaluando la integral

$$\begin{aligned}
\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r} &= V_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)}\delta(x)\delta(y-b)\delta(z) dxdydz \\
&+ V_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) dxdydz \\
&= V_0 \left(e^{iq_y b) + e^{iq_z a}}\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $V_0\left(e^{iq_y b) + e^{iq_z a}}\right)$ por $\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r}$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|V_0\left(e^{iq_y b) + e^{iq_z a}}\right)\right|^2 \\
&= \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4 V_0^2}\left|\left(e^{iq_y b) + e^{iq_z a}}\right)\right|^2 \\
&= \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4 V_0^2}
\end{aligned}$$

esta es la sección transversal diferencial deseada

10. Considere la dispersión de la onda $S(l = 0)$ de una partícula de masa m de un esférico repulsivo potencial $V(r) = V_0$ para $r < a$ y $V(r) = 0$ para $r > a$, con $V_0 > 0$.

(a) Calcule el desplazamiento de fase s-onda ($l = 0$) y la sección transversal total.

(b) Muestre que en el límite $V_0 \to \infty$, el cambio de fase viene dado por $\delta_0 = -ka$. Encuentra la sección transversal total

Solución

(a) Suponga que una partícula de masa m y onda s se dispersa de un potencial esférico definido por

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{para} \quad 0 \le r < a \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Donde $V_0 > 0$, Evaluando el cambio de fase y la sección transversal total del proceso de dispersión. Primero, observamos que para una onda s, el número de momento angular orbital $l = 0$. Luego, a través de la ecuación de onda de Schrodinger, la función de onda radial se rige por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \left\{V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right\}u(r) = Eu(r)$$

Número cuántico orbital $l = 0$, reduce la ecuación a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + V(r)u(r) = Eu(r)$$

Aqui $u(r) = rR(r)$
Ahora, la ecuación diferencial parcial en el intervalo $0 \leq r < a$ conduce a la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + V_0 u(r) = Eu(r)$$

Sabemos que solución general es

$$u(r) = Acos(kr) + B\,\text{sen}(kr)$$

Aquí, A, B son coeficientes que se determinarán por las condiciones de frontera

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)} \qquad \text{para} \quad E > 0$$

Finalmente, observemos que, por definición, $u(0) = 0$, se deduce que

$$u_-(r) = Bsin(kr)$$

es la solución.
Para el intervalo $a < r < \infty$, la ecuación se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} = Eu(r)$$

Por lo tanto, la solución es,

$$u(r) = C\cos(kr + \delta_0) + D\,\text{sen}(kr + \delta_0)$$

en este caso $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$, $E > 0$ y δ_0 es un cambio de fase.
Del mismo modo, $u(0) = 0$ implica a la vez que la solución es

$$u_+(r) = B\,\text{sen}(kr + \delta_0)$$

El cambio de fase δ_0 se incluyó para que $u_-(a) = u_+(a)$ se mantenga, porque el potencial es discontinuo en $r = a$, la solución para $E > 0$ es

$$u(r) = \begin{cases} B\,\text{sen}(kr) & \text{para} \quad 0 < r < a \\ D\,\text{sen}(kr + \delta_0) & \text{para} \quad r > a. \end{cases}$$

En particular, la solución satisface $B\,\text{sen}(ka) = D\,\text{sen}(ka + \delta)$. Lueg de la derivada de primer orden de $u = u(r)$ en el límite $r = a$ produce

$$kB\cos(ka) = kcos(ka + \delta_0)$$

dividiendo las dos ecuaciones hunde

$$\frac{\text{sen}\,k_-a}{k_-\cos k_-a} = \frac{k_+\,\text{sen}(k_+a + \delta_0)}{k_+\cos(k_+a + \delta)}$$

$$\tan(k_+a + \delta_0) = \frac{k_+}{k_-}\tan k_-a$$

$$(k_+a + \delta_0) = \arctan\left[\frac{k_+}{k_-}\tan k_-a\right]$$

$$\delta = \arctan\left[\frac{k_+}{k_-}\tan k_- a\right] - k_+ a$$

Por último, para obtener la sección transversal total, recordemos que para $l = 0$. la sección transversal total es

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_-^2}\operatorname{sen}^2\delta_0$$

pero

$$\operatorname{sen}^2\delta_0 = \left\{1 + \left(\frac{k_- + k_+ \tan k_- a \tan_+ k_+ a}{k_+ \tan k_- a - k_- \tan k_+ a}\right)^2\right\}^{-1}$$

Sustituyendo, la sección transversal total es,

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_-^2}\left\{1 + \left(\frac{k_- + k_+ \tan k_- a \tan_+ k_+ a}{k_+ \tan k_- a - k_- \tan k_+ a}\right)^2\right\}^{-1}$$

(b) Probando que $\lim\limits_{V_0\to\infty}\delta_0 = -ka$, y calculando la sección transversal total en el límite como $V_0 \to \infty$. la función de onda de partículas desaparece en la región $0 \leq r < a$.
Por lo tanto, de la parte (a), de la solución

$$u(r) = \begin{cases} B_- \operatorname{sen}(k_- a) & \text{Para} \quad 0 \leq r < a \\ B_+ \operatorname{sen}(k_+ a + \delta_0) & \text{Para} \quad r > a \end{cases}$$

la solución se reduce a $u(r) = B_+ \operatorname{sen}(k_+ a + \delta_0)$ en su dominio de definición $a \leq r < \infty$. Por lo tanto, $u(a) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(k_+ a + \delta_0) = 0$ es decir, el cambio de fase es;$\delta_0 = -k_+ a$, En particular, la sección transversal total

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_-^2}\operatorname{sen}^2\delta_0$$

Sustituyendo δ_0

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_-^2}\operatorname{sen}^2(ka)$$

en el límite como $V_0 \to \infty$