

月相和二十四節氣的計算

廖育棟(Yuk Tung Liu)

初稿:2018年11月8日, 上一次重大修改:2018年12月3日

英文 English 简体中文

農曆月日的編排是根據合朔和中氣而定,但是按傳統,農曆也列出望和二十四節氣的日期。本文詳細說明推算月相和二十四節氣時刻的方法。有關二十四節氣的基本概念可參閱此網頁,編算農曆的法則可參閱此網頁。

月相和二十四節氣的時刻計算頗為複雜,但是所有需要的資料和數據現在都可免費獲得。任何人只要熟悉數值計算方法及計算機¹程序都可以按照本文的方法自行計算月相和二十四節氣的準確時刻。

敘述計算方法前,先要略為講解一些重要概念。本文假設讀者已熟悉此網頁介紹的天文學和曆法概念。本文第一節簡單介紹現時世界上精確曆表採用的質心力學時(barycentric dynamical time)TDB及其與地球時(terrestrial time)TT和國際原子時(international atomic time)TAI的關係。不熟悉廣義相對論的讀者大可不理會其中公式。第二節介紹幾種現代天文學常用的天球座標系統,第三節列出IAU 2006/2000A歲差和章動模型的計算公式。

要計算準確的月相和節氣時刻,準確的太陽和月球曆表不可缺少。我用美國噴射推進實驗室(Jet Propulsion Laboratory, JPL)制定的曆表。第四節介紹JPL曆表,講述如何下載曆表數據和如何用下載的數據計算太陽和月球位置。JPL曆表其中一個目的是用於航天活動,月球和行星位置和速度用國際天球座標系(ICRS)的直角座標表示,所以必須把這些數據轉換成黃道座標系統才可用來計算月相和節氣。第五節講述如何計算光行時及光行差以求得視位置,第六節列出由JPL曆表來計算視黃經的詳細步驟,第七節講述如何用牛頓—拉弗森方法(Newton-Raphson method)來計算月相和二十四節氣的TDB時刻,最後一節講述如何把TDB時刻轉化為UTC時刻。

本文只是簡略介紹各種概念,讀者如想較深入地了解這些概念,可參考Urban和Seidelmann著的書*Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*([Urban & Seidelmann 2013])。

1 曆書時和質心力學時

十七世紀至十九世紀末的天文曆表都用以地球自轉為基礎而定的時間,當時的設想是地球自轉是均勻的,因此以其制定的時間也是均勻的。後來天文觀測精度漸漸提高,觀測數據顯示地球自轉其實是不均勻的。於是天文學家訂立以地球公轉為基礎而定的時間,稱為「曆書時」(ephemeris time),簡稱ET,用來作天文曆表的均勻時間標準。高精度的觀測數據也顯示牛頓力學在計算行星位置上有所不足,於是天文學家用廣義相對論修正牛頓力學方程來計算行星位置。

¹「電子計算機」或「計算機」又稱「電腦」,同樣是翻譯英文的computer。本文用「電子計算機」或簡稱「計算機」來譯computer,因為覺得這譯法比較貼切和符合computer的實際功能。

根據廣義相對論，時間流逝的快慢會隨著觀測者的運動速度及相對其他物體的位置而變，所以要計及廣義相對論效應時不能用ET來計算，必須用更精密的均勻時間來編算天文曆表。以廣義相對論為基礎的天體力學用四個座標值 (t, x^i) ($i = 1, 2, 3$)描述太陽系天體的四維時空位置，這個座標系統稱為「質心天球參考系」(barycentric celestial reference system)，簡稱BCRS。其中 t 描述時間，稱為「質心座標時」(barycentric coordinate time)，簡稱TCB。TCB是一個均勻時間系統，與觀測者的運動無關，適宜用來計算天體位置。牛頓的萬有引力用以下四維度規所取代[即[Urban & Seidelmann 2013]書中公式(2.38)]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) d(ct)^2 - \frac{4w_i}{c^3} d(ct) dx^i + \delta_{ij} \left[1 + \frac{2w}{c^2} + O(c^{-4}) \right] dx^i dx^j, \quad (1)$$

此處用了愛因斯坦的求和約定：相同的下標和上標(如 $w_i dx^i$)須要求和。式中 c 是光速， w 在弱重力²的極限時退化為 $-\Phi$ ，這裡 Φ 是牛頓力學的重力勢(gravitational potential)：

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -G \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2)$$

式中 ρ 是密度(即單位體積內的質量)。 w_i 由泊松方程(Poisson equation)來定義，方程式的源項(source term)與動量密度(momentum density)成正比。

TCB可視為遠離太陽系及相對於太陽系質心靜止的觀測者量度的固有時(proper time)，所以與太陽系天體運行無關。質心天球參考系適宜用來計算天文曆表，但是大多數的觀測在地球表面進行，所以天文學家也建立了以地球為中心的一套座標系統，稱為「地心天球參考系」(geocentric celestial reference system)，簡稱GCRS。在GCRS裡，時空座標以 (T, X^i) ($i = 1, 2, 3$)描述，其中 T 稱為「地心座標時」(geocentric coordinate time)，簡稱TCG。GCRS的座標原點隨地球質心移動，其空間座標軸相對於BCRS的空間座標軸維持不旋轉。TCG的選取是要使地球附近的時空度規可以寫成如(1)的類似公式。由於GCRS隨地球運行，而且處於太陽系重力場中，TCG流逝速率比TCB慢，這是廣義相對論的重力時間延緩(gravitational time dilation)和狹義相對論的時間延緩(time dilation)效應結合的結果。TCG和TCB的變換見於[Urban & Seidelmann 2013]書中公式(3.25)：

$$\text{TCB} - \text{TCG} = c^{-2} \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{v_e^2}{2} - \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}_e) \right) dt + \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \right] + O(c^{-4}), \quad (3)$$

式中 \mathbf{x}_e 和 \mathbf{v}_e 分別是地球質心的BCRS位置向量和速度向量， \mathbf{x} 是觀測者的BCRS位置向量， Φ_{ext} 是地球以外的太陽系天體的重力勢總和。 t_0 是常數，其作用是使1977年1月1日TAI零時時TCB、TCG、和ET三者時刻相等。

由於TCG的定義中沒有計及地球的重力，其時間流逝速率比TAI快，這又是廣義相對論和狹義相對論時間延緩兩效應總和的結果。於是天文學家又定義「地球時」(terrestrial time)，簡稱TT，其時間流逝速率和TAI一致。地球時以前稱為「地球力學時」(terrestrial dynamical time, TDT)，後來改稱地球時。TT的流逝速率比TCG慢，其值是在大地水準面(geoid)上 $-\Phi_{\text{eff}}/c^2$ 的值，這裡 c 是光速， $\Phi_{\text{eff}} = \Phi_E - v_{\text{rot}}^2/2$ 是地球重力勢減去離心勢， v_{rot} 是地球自轉速率。大地水準面可視為地球表面的平均海水面， Φ_{eff} 雖然在地球上處處不同，但在大地水準面上的值相同，因為大地水準面就是定義為 Φ_{eff} 的某個等值面。所以 $d\text{TT}/d\text{TCG} = 1 - L_G$ ，而 L_G 根據實測定為 $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$ 。TT和TCG因此有以下線性關係[取自[Urban & Seidelmann 2013]書中公式(3.27)]：

$$\text{TT} = \text{TCG} - L_G(\text{JD}_{\text{TCG}} - 2443144.5003725) \cdot 86400 \text{秒}, \quad (4)$$

²本文把 gravity 或 gravitation 譯為「重力」，很多文獻和書籍卻譯作「引力」，我認為這譯法不大貼切，故不取。

其中 JD_{TCG} 是TCG用儒略日數來表示。式中常數2443144.500375是爲了使TT、TCG、和ET三者的時刻在1977年1月1日TAI零時的時刻相等。由於TT和TAI的時間流逝速率相等，TT和TAI只差了個常數：

$$TT = TAI + 32.184 \text{秒} \quad (5)$$

這個常數是爲了使TT和ET在1977年1月1日TAI零時的時刻相等。

TCB適宜用來計算天文曆表，TT則可用原子鐘直接量度。兩者的轉換可用公式(3)和(4)和太陽系天體位置用數值積分法計算，所以TT不適宜用來計算天文曆表。爲方便起見，天文學家創立另一個時間來近似TT，這時間稱爲「質心力學時」(barycentric dynamical time)，簡稱TDB。TDB是TCB的線性函數，盡可能使之接近TT。問題是TT與TCB的偏差隨地球運行而變化，兩者的差異並非線性函數所能表示，我們只能使TDB的時間流逝接近TT時間流逝在某段時間的平均值，這樣TDB和TT在這段時間內的偏差只呈現週期性變化。這些週期性變化緣於地球公轉軌道是橢圓，其運行時快時慢，與太陽的距離也時近時遠，兩者的變化週期爲一年，此外，月球和其他行星的重力場也隨著它們與地球的相對位置變化而變。按照國際天文聯會(International Astronomical Union, IAU)2006年通過的B3決議，TDB用以下公式定義：

$$TDB = TCB - L_B(JD_{TCB} - 2443144.5003725) \cdot 86400 \text{秒} - 6.55 \times 10^{-5} \text{秒}, \quad (6)$$

其中 $L_B = 1.550519768 \times 10^{-8}$ ， JD_{TCB} 是TCB用儒略日數來表示。 L_B 的數值可視爲 $1 - dTT/dt$ 在某段時間的平均值。

TDB繼承了ET成爲現代天文曆表的時間標準。TT與TDB的換算可用以下近似公式[取自[Urban & Seidelmann 2013]書中圖3.2]:

$$\begin{aligned} TDB = & TT + 0.001658 \text{秒} \sin(g + 0.0167 \sin g) \\ & + \text{月球與行星項，大致幅度是 } 10^{-5} \text{秒} \\ & + \text{每日變化項，大致幅度是 } 10^{-6} \text{秒}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 g 是地球的軌道平近點角(mean anomaly)，所以 $g + 0.0167 \sin g$ 是偏近點角(eccentric anomaly)的近似值，因爲0.0167是地球軌道偏心率。較詳細的公式可參考美國海軍天文臺在2005年發佈的文件([Kaplan 2005])中公式(2.6)。其實TT和TDB在幾千年之間的偏差不會超過二毫秒(即0.002秒)，所以在計算月相和節氣時不必計較兩者的差異，可視兩者爲等同。

2 天球座標系

2.1 國際天球參考系(ICRS)

上一節說太陽系的時空度規以質心參考系(BCRS)表示，其座標原點是太陽系的質心。但是BCRS是動力學概念，說「用BCRS」相當於在牛頓力學裡說「用質心慣性參考系」。BCRS沒有定義座標軸的方向³

國際天球參考系(International Celestial Reference System，簡稱ICRS)是運動學概念，其原點也是太陽系的質心，然後建立一套方向固定的座標軸，爲了做到這一點，座標軸的方向用遍佈天球的數百個河外射電源(大多數是類星體)而定。所定的方向接近J2000.0曆元平赤道座標軸(下面會解釋)，兩者的偏差不多於0.0173角秒。ICRS的 x 軸指向J2000.0的平春分點， z 軸接近J2000.0的平北天極， y 軸在 x 軸以東 90° 並與 x 軸和 z 軸垂直。ICRS是右手座標系(right-handed coordinate system)。如下面所述，ICRS和J2000.0曆元平赤道和平春分點的赤道座標變換可用參考架偏差矩陣(frame bias matrix)表示。

³ 國際天文聯會在2006年B2決議建議補足BCRS的定義：「除非特別說明，在所有實際應用上，可假設BCRS的座標軸方向與ICRS的座標軸方向一致，GCRS的座標軸方向則由BCRS和GCRS的轉換公式決定。」

用河外射電源來建立ICRS座標系，基本假設是這些遙遠天體相對於BCRS的座標軸不旋轉。這假設其實應該用觀測檢驗，看看行星的ICRS位置是否符合用BCRS導出的運動方程，並無需引入額外的科里奧利力(Coriolis force)和離心力(centrifugal force)。到目前為止的觀測數據沒有發現與這假設有偏差。

由於太陽系質心繞銀河系中心轉，河外射電源相對於太陽系質心的視位置受到太陽系質心運動的光行差影響，而這光行差效應會隨太陽系質心的速度變化而改變，河外射電源的視位置因而會漂移，從而影響ICRS的定位精度。這漂移已經從幾十年的甚長基線干涉測量(VLBI)的數據測出([Titov, Lambert & Gontier 2011])，漂移幅度約為每年6微角秒，與預期的數值吻合。由於觀測精度不段提高，這漂移效應在將來便不可忽略了。

2.2 地心天球參考系(GCRS)

地心天球參考系(Geocentric Celestial Reference Sysytem，簡稱GCRS)的座標原點是地球質心。GCRS的空間座標 X^i 與BCRS的空間座標 x^i 的關係是

$$X^i = x^i - x_E^i + O((v_E/c)^2), \quad (8)$$

式中 x_E^i 是地球質心的BCRS位置，而 $(v_E/c)^2$ 項來自廣義相對論的修正，但是 $(v_E/c)^2 \sim 10^{-8} = 0.002''$ 。太陽運行的速度大約是每秒0.04''，月球運行的速度大約是每秒0.5''，所以略去了 $(v_E/c)^2$ 項只會在計算二十四節氣時刻時有約0.05秒的誤差，計算月相時刻時則只會有約0.004秒的誤差。這樣的誤差比《農曆的編算和頒行》([GB/T 33661-2017])裡的一秒精度要求小得多，所以可以忽略。

GCRS和BCRS的情況一樣，GCRS並沒有明確定義座標軸的方向。這裡用國際天文聯會2006年B2決議的推薦：BCRS座標軸的方向和ICRS的座標軸方向一致。GCRS的座標定義包括與BCRS的座標無旋轉，由於忽略了 $(v_E/c)^2$ 項，GCRS的座標軸方向也可視為和ICRS的座標軸方向一致。

2.3 赤道與黃道座標系

ICRS的座標軸是固定的，用來描述天體的位置十分方便。但是很多觀測在地球表面上進行，傳統上習慣用地球自轉軸或地球公轉軌道平面而定的參考系表示天體位置。用地球自轉軸來定的參考系稱為「赤道座標系」，而用地球公轉軌道平面來定的參考系稱為「黃道座標系」。

2.3.1 赤道、黃道及春分點

地球自轉軸在空間的運動頗為複雜，可分為「歲差」和「章動」兩成份。歲差和章動稍後會介紹。包括歲差和章動而定的地球自轉軸的方向稱為「天球中間極」(Celestial Intermediate Pole，簡稱CIP)，CIP可視為地球自轉軸的平均指向。只考慮歲差但不計章動而定的地球自轉軸在空間的指向是平北天極。

「真赤道」(true equator)定義為垂直於CIP並通過地球質心的平面。由於歲差和章動，真赤道在天球的位置不斷變動。「平赤道」(mean equator)定義為垂直於平北天極並通過地球質心的平面。由於歲差，平赤道在天球的位置也不斷變動。

「黃道」是地球公轉軌道投射到天球的大圓。但是由於行星對地球的重力攝動，地球公轉軌道不斷變化。為了精確定義黃道，國際天文聯會建議將黃極定義為通過天球中心與地月質心在BCRS的平均軌道角動量向量平行的直線與天球的交點。黃道則是垂直於黃極的大圓。

黃道與赤道相交於兩點，稱為「春分點」和「秋分點」。春分點是太陽從赤道以南運行到赤道以北的那個交點。黃道與真赤道的交點稱為「真春分點」和「真秋分點」，而黃道與平赤道的交點稱為「平春分點」和「平秋分點」。

2.3.2 歲差、章動及極移運動

受到太陽、月球和行星對地球扁球體的重力影響，地球自轉軸的方向不斷變動。地球自轉軸除了在空間的方向不斷變化外，相對於地殼的位置也不斷移動，稱為極移運動(polar motion)。

地球自轉軸的運動包括非週期性和週期性兩成份，週期性運動也有各種不同週期，非週期性運動以及週期長於約一萬年的運動統稱為「歲差」，週期短於約一萬年但長於兩天的週期性運動稱為「章動」。至於短於兩天的週期性運動無法與因潮汐而引起的極移分開，所以撥入極移運動。

歲差主要的成份是地球自轉軸繞公轉軸進動，週期是二萬六千年，這使北天極繞黃極轉，以及春分點每年沿黃道西退50.3"。章動的主要成份是週期為18.6年、幅度約9"的運動，成因是月球繞地球的軌道軸繞黃極進動。極移運動的幅度約0.3"，除了提及過的潮汐成份外，還有其他成份，例如週期為433天的錢德勒擺動(Chandler wobble)。計算二十四節氣和月相時刻不需要理會極移運動，因為二十四節氣和月相用太陽和月球的地心位置（即相對於地球質心的位置）來定義，而不是用相對於地面上某觀測站的太陽和月球視位置來定義，所以不涉及極移運動。

地月系統繞日軌道因為受到其他行星的重力攝動而在空間移動，所以黃道也在天球移動，稱為「黃道歲差」(precession of the ecliptic)，以區別「赤道歲差」⁴(precession of the equator)。

2.3.3 瞬時赤道座標

赤道座標由天赤道和春分點來定。座標的 x 軸指向春分點， z 軸指向北天極， y 軸在赤道平面並在春分點以東90°。由於天赤道和春分點都在動，用赤道座標表示天體位置時必須註明所用的曆元(epoch)，例如曆元J2000.0(即2000年1月1日TDB正午的天赤道和春分點)。

其中一個常用的赤道座標系是用曆元J2000.0的平赤道和平春分點的赤道座標系。上面說過，這個赤道座標系幾乎與ICRS一致，兩者的座標軸只有微少偏差，兩者的變換可用參考架偏差矩陣(frame bias matrix) B 來表示。具體地說，用 \mathbf{x}_{ICRS} 縱向量代表ICRS的座標值，再用 \mathbf{x}_{2000} 縱向量代表J2000.0曆元平赤道和平春分點的赤道座標值，則兩者的關係由下面公式給出。

$$\mathbf{x}_{2000} = B\mathbf{x}_{\text{ICRS}}. \quad (9)$$

參考架偏差矩陣 B 的公式可參考[Urban & Seidelmann 2013]書中公式(4.4):

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(d\alpha_0^2 + \xi_0^2) & d\alpha_0 & -\xi_0 \\ -d\alpha_0 - \eta_0\xi_0 & 1 - \frac{1}{2}(d\alpha_0^2 + \eta_0^2) & -\eta_0 \\ \xi_0 - \eta_0d\alpha_0 & \eta_0 + \xi_0d\alpha_0 & 1 - \frac{1}{2}(\eta_0^2 + \xi_0^2) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中 $d\alpha_0 = -0.0146''$ 、 $\xi_0 = -0.016617''$ 、 $\eta_0 = -0.0068192''$ ，三個數字都要先轉化為弧度然後代入公式，結果如下：

$$B = \begin{pmatrix} 0.999999999999999425 & -7.078279744 \times 10^{-8} & 8.05614894 \times 10^{-8} \\ 7.078279478 \times 10^{-8} & 0.999999999999999695 & 3.306041454 \times 10^{-8} \\ -8.056149173 \times 10^{-8} & -3.306040884 \times 10^{-8} & 0.9999999999999996208 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

欲將 \mathbf{x}_{2000} 轉化成瞬時赤道座標(即相對於曆元 t 的真赤道座標)，可用歲差矩陣 $P(t)$ 和章動矩陣 $N(t)$ 乘之：

$$\mathbf{x}_{\text{eq}} = N(t)P(t)\mathbf{x}_{2000} = N(t)P(t)B\mathbf{x}_{\text{ICRS}}. \quad (12)$$

⁴「赤道歲差」以前稱為「日月歲差」(luni-solar precession)，而「黃道歲差」以前稱為「行星歲差」(planetary precession)。但這些術語有欠準確，因為行星的重力攝動也使地球自轉軸移動，只是其幅度比太陽和月球的幅度小得多而已。

$P(t)$ 和 $N(t)$ 的計算方法在第三節敘述。

2.3.4 瞬時黃道座標

計算月相和二十四節氣需要知道太陽和月球在瞬時黃道的座標值。黃道座標系由黃道和春分點來定。座標的 x 軸指向春分點， z 軸指向黃極， y 軸在黃道平面、春分點以東 90° 。由此可推出某天體的黃道座標值可由其赤道座標值沿 x 軸旋轉 ϵ 角度而得，這裡 ϵ 稱為「黃赤交角」，即黃道與真赤道的傾斜角度，亦等於黃極與天球中間極CIP的角距離。值得注意的是黃赤交角 $\epsilon = \epsilon(t)$ 因歲差和章動會隨時間變化。黃赤交角可用下面的公式(30)計算。如果用 \mathbf{x}_{eq} 縱向量代表某天體在瞬時赤道的座標值，用 \mathbf{x}_{ec} 縱向量代表該天體在瞬時黃道的座標值，則兩者的關係如下：

$$\mathbf{x}_{\text{ec}} = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{x}_{\text{eq}} = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ICRS}}, \quad (13)$$

其中旋轉矩陣如下：

$$\mathbf{R}_1(\epsilon(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon(t) & \sin \epsilon(t) \\ 0 & -\sin \epsilon(t) & \cos \epsilon(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

「黃經」 λ 定義為 $\arg(x_{\text{ec}} + iy_{\text{ec}})$ ，這裡 $\arg(z)$ 表示複數 z 的輻角。黃經也可以寫成 $\lambda = \tan^{-1}(y_{\text{ec}}/x_{\text{ec}})$ ，只是角度要取適當的象限。很多計算機程式提供反正切函數並給出適當的象限，例如FORTRAN、C和python的`atan2`函數。

3 歲差和章動

3.1 歲差矩陣

用 $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z)^T$ 代表相對於在TDB時刻 t 的瞬時平赤道和平春分點的赤道座標值，再用 $\mathbf{X}_0 = (X_0 \ Y_0 \ Z_0)^T$ 代表J2000.0曆元平赤道和平春分點的赤道座標值，其中上標T代表矩陣轉置(transpose)，所以 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}_0 都是縱向量，兩者的關係以歲差矩陣 $\mathbf{P}(t)$ 表示：

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}_0. \quad (15)$$

2006年8月，國際天文聯會在第二十六屆全體大會通過了一項決議，建議採用Capitanie等人在2003年制定的P03歲差模型([Capitaine et al 2003])來計算歲差。這個歲差模型稱為IAU2006歲差理論。根據這個模型，歲差矩陣公式如下：

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R}_3(\chi_A)\mathbf{R}_1(-\omega_A)\mathbf{R}_3(-\psi_A)\mathbf{R}_1(\epsilon_0), \quad (16)$$

式中 x 軸旋轉矩陣 \mathbf{R}_1 見於公式(14)，而 z 軸旋轉矩陣 \mathbf{R}_3 的公式如下：

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

其中 $\epsilon_0 = 84381.406''$ 是J2000.0曆元黃道與J2000.0曆元平赤道的傾角，而 ψ_A 、 ω_A 和 χ_A 三個角度可從美國海軍天文臺在2005年發佈的文件[Kaplan 2005]公式(5.7)獲得，也可從國際地球自轉和參考系服務規範(IERS Conventions)在2010年發佈的文件[IERS Conventions 2010]中公式(5.39)和(5.40)找到。下面把這些公式列出。

$$\psi_A = 5038.481507''T - 1.0790069''T^2 - 0.00114045''T^3 + 0.000132851''T^4 - 9.51'' \times 10^{-8}T^5$$

$$\begin{aligned}
\omega_A &= 84381.406'' - 0.025754''T + 0.0512623''T^2 - 0.00772503''T^3 - 4.67'' \times 10^{-7}T^4 \\
&\quad + 3.337'' \times 10^{-7}T^5 \\
\chi_A &= 10.556403''T - 2.3814292''T^2 - 0.00121197''T^3 + 0.000170663''T^4 - 5.60'' \times 10^{-8}T^5,
\end{aligned} \tag{18}$$

式中 $T = (JD - 2451545)/36525$ 是時刻 t 離J2000.0的儒略世紀，而JD是時刻 t 對應的TDB儒略日數。公式(16)涉及四個矩陣的相乘，乘積結果在[Kaplan 2005]文件中公式(5.10)列出：

$$\begin{aligned}
P_{11}(t) &= C_4C_2 - S_2S_4C_3 \\
P_{12}(t) &= C_4S_2C_1 + S_4C_3C_2C_1 - S_1S_4S_3 \\
P_{13}(t) &= C_4S_2S_1 + S_4C_3C_2S_1 + C_1S_4S_3 \\
P_{21}(t) &= -S_4C_2 - S_2C_4C_3 \\
P_{22}(t) &= -S_4S_2C_1 + C_4C_3C_2C_1 - S_1C_4S_3 \\
P_{23}(t) &= -S_4S_2S_1 + C_4C_3C_2S_1 + C_1C_4S_3 \\
P_{31}(t) &= S_2S_3 \\
P_{32}(t) &= -S_3C_2C_1 - S_1C_3 \\
P_{33}(t) &= -S_3C_2S_1 + C_3C_1
\end{aligned} \tag{19}$$

式中的C和S項如下：

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sin \epsilon_0 & C_1 &= \cos \epsilon_0 \\
S_2 &= \sin(-\psi_A) & C_2 &= \cos(-\psi_A) \\
S_3 &= \sin(-\omega_A) & C_3 &= \cos(-\omega_A) \\
S_4 &= \sin \chi_A & C_4 &= \cos \chi_A
\end{aligned} \tag{20}$$

3.2 章動矩陣

章動計算根據國際天文聯會推薦的IAU2000A模型並加了IAU2006歲差模型對IAU2000A的微小修正。計算章動矩陣 $N(t)$ 之前須先計算以下十四個角度。這些公式取自[IERS Conventions 2010]公式(5.43)和(5.44)。

$$\begin{aligned}
F_1 \equiv l &= \text{月球平近點角} \\
&= 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''T + 31.8792''T^2 \\
&\quad + 0.051635''T^3 - 0.00024470''T^4 \\
F_2 \equiv l' &= \text{太陽平近點角} \\
&= 357.52910918^\circ + 129596581.0481''T - 0.5532''T^2 \\
&\quad + 0.000136''T^3 - 0.00001149''T^4 \\
F_3 \equiv F &= L - \Omega = \text{月球平黃經} - \Omega \\
&= 93.27209062^\circ + 1739527262.8478''T - 12.7512''T^2 \\
&\quad - 0.001037''T^3 + 0.00000417''T^4 \\
F_4 \equiv D &= \text{月球與太陽的平距角} \\
&= 297.85019547^\circ + 1602961601.2090''T - 6.3706''T^2 \\
&\quad + 0.006593''T^3 - 0.00003169''T^4 \\
F_5 \equiv \Omega &= \text{月球軌道的升交點平黃經}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$= 125.04455501^\circ - 6962890.5431''T + 7.4722''T^2 \\ + 0.007702''T^3 - 0.00005939''T^4$$

餘下的角度是太陽系八大行星的平黃經和平黃經總歲差，給出的角度單位是弧度。

$$\begin{aligned} F_6 &\equiv L_{\text{Mercury}} = 4.402608842 + 2608.7903141574T \\ F_7 &\equiv L_{\text{Venus}} = 3.176146697 + 1021.3285546211T \\ F_8 &\equiv L_{\text{Earth}} = 1.753470314 + 628.3075849991T \\ F_9 &\equiv L_{\text{Mars}} = 6.203480913 + 334.0612426700T \\ F_{10} &\equiv L_{\text{Jupiter}} = 0.599546497 + 52.9690962641T \\ F_{11} &\equiv L_{\text{Saturn}} = 0.874016757 + 21.3299104960T \\ F_{12} &\equiv L_{\text{Uranus}} = 5.481293872 + 7.4781598567T \\ F_{13} &\equiv L_{\text{Neptune}} = 5.311886287 + 3.8133035638T \\ F_{14} &\equiv p_A = 0.02438175T + 0.00000538691T^2 \end{aligned} \quad (22)$$

下一步是用以下公式計算黃經章動 $\Delta\psi$ 和黃赤交角章動 $\Delta\epsilon$ ：

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{1320} [A_i \sin \theta_i^A + A_i'' \cos \theta_i^A] + \sum_{i=1}^{38} [A_i' \sin \theta_i^{A'} + A_i''' \cos \theta_i^{A'}]T \quad (23)$$

$$\Delta\epsilon = \sum_{i=1}^{1037} [B_i \cos \theta_i^B + B_i'' \sin \theta_i^B] + \sum_{i=1}^{19} [B_i' \cos \theta_i^{B'} + B_i''' \sin \theta_i^{B'}]T, \quad (24)$$

式中正弦和餘弦函數裡的角度如下：

$$\theta_i^A = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^A F_j, \quad \theta_i^{A'} = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^{A'} F_j, \quad \theta_i^B = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^B F_j, \quad \theta_i^{B'} = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^{B'} F_j. \quad (25)$$

A_i 、 A_i' 、 A_i'' 、 A_i''' 、 C_{ij}^A 和 $C_{ij}^{A'}$ 這些系數可從IERS的ftp地址 <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter5/tab5.3a.txt> 獲得。 A_i 和 A_i'' 列在表中頭1320行中的第二和第三欄； A_i' 和 A_i''' 列在表中最後38行中的第二和第三欄； C_{ij}^A 列在表中頭1320行中的第四到第十七欄； $C_{ij}^{A'}$ 列在表中最後38行中的第四到第十七欄。 B_i 、 B_i' 、 B_i'' 、 B_i''' 、 C_{ij}^B 和 $C_{ij}^{B'}$ 這些系數可從IERS的ftp地址 <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter5/tab5.3b.txt> 獲得。

爲了確保讀取表中的數據無誤，下面列出 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的頭幾項以供參考：

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17.20642418'' \sin \Omega + 0.003386'' \cos \Omega \\ &\quad -1.31709122'' \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0.0013696'' \cos(2F - 2D + 2\Omega) + \cdots \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= 0.0015377'' \sin \Omega + 9.2052331'' \cos \Omega \\ &\quad -0.0004587'' \sin(2F - 2D + 2\Omega) + 0.5730336'' \cos(2F - 2D + 2\Omega) + \cdots \end{aligned} \quad (27)$$

章動矩陣 N 的計算公式如下：

$$N = R_1(-\epsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A), \quad (28)$$

式中 ϵ_A 是瞬時黃道相對於瞬時平赤道的傾角，而 ϵ 是瞬時黃道相對於瞬時真赤道的傾角，計算公式如下：

$$\begin{aligned} \epsilon_A = & 84381.406'' - 46.836769''T - 0.0001831''T^2 + 0.00200340''T^3 \\ & - 0.000000576''T^4 - 0.0000000434''T^5 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\epsilon = \epsilon_A + \Delta\epsilon \quad (30)$$

其實如果只計算天體相對於瞬時黃道的座標值，章動的計算可以簡化。從公式(13)可知要計算 $R_1(\epsilon)N$ 的乘積，又從公式(28)和 $R_1(\epsilon)R_1(-\epsilon) = I$ (單位矩陣)可得

$$R_1(\epsilon)N = R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi \cos \epsilon_A & -\sin \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_A & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ 0 & -\sin \epsilon_A & \cos \epsilon_A \end{pmatrix}. \quad (31)$$

也就是說不須計算黃赤交角章動 $\Delta\epsilon$ 。

黃經章動 $\Delta\psi$ 含一千多項，前面說過要達到《農曆的編算和頒行》([GB/T 33661-2017])規定的一秒精度要求就要把太陽視位置計算準到 $0.04''$ 。所以其實不必把 $\Delta\psi$ 公式中一千多項全部計算，因為其中有很多項是很小的。其中一個辦法是用IAU2000B章動模型，這是一個精度比較底的章動模型，計算公式少於80項，所得的結果與IAU2000A的偏差在1995年到2050年內不超過 $0.001''$ 。但是我還是用IAU2000A模型並把所有1358項都計算在內。這樣的確使計算變慢，但是即使用我家裡稍嫌舊的電子計算機，計算從1600年至3500年裡所有月相(包括朔、上弦、望和下弦)以及所有二十四節氣的時刻也只用了約十七秒。這樣的速度還可以接受，尤其考慮到對於每一個太陽和月球曆表，這些TDB時刻只須算一次。其實章動只影響二十四節氣的時刻，這點會在第七節說明。

4 噴射推進實驗室的曆表

美國噴射推進實驗室(JPL)編制及不斷改良的曆表用DE+數字表示，DE後的數字代表某個年代制定的模型。DE系列曆表都是用數值積分法推算太陽系行星及月球的位置和速度。曆表目的是用於航天活動和天文觀測，JPL自1960年代以來不斷改良DE曆表。最近一次重大的改良工作於2013年完成，發表了DE430和DE431兩個曆表([Folkner et al 2014])。美國海軍天文臺和英國皇家航海曆書局聯合編的《天文年曆》(*Astronomical Almanac*)自2015年起採用DE430曆表的數據，JPL的Horizons網站現在用DE431的數據計算太陽系天體的位置。兩個曆表是現在世界上其中兩個最準確的天文曆表。我的農曆網站裡月相和二十四節氣時刻是用DE431來計算的。

DE430和DE431曆表考慮到343個質量比較大的小行星對大行星的重力攝動。太陽系各天體的運動計及廣義相對論對牛頓力學的修正，廣義相對論的效應以參數化後牛頓 n 體度規推出的動力學方程描述。此外還計及地球、月球、及太陽因偏離完美球狀而引起的額外加速度。

DE430和DE431曆表最主要的差別在於兩曆表對月球運動的處理方法不同。DE430加了月球液體核心對固體月慢的阻尼項，使月球位置準確地符合近代的觀測數據，但是由於無法準確測出月球核心的狀況，這阻尼項的誤差隨時間迅速增加，所以只適宜用來推算近幾百年的月球位置。DE431沒有計及這個月核一月慢阻尼項，雖然月球位置在近百年內沒有DE430準，卻適宜用來推算超過幾百年前後的月球位置。所以DE430曆表的年限是1550年至2650年，而DE431曆表的年限則是-13200年至17191年。

發佈了DE430和DE431曆表後，JPL繼續精益求精，發佈了DE432、DE433……DE436和DE438曆表，這些新曆表只是對DE430曆表稍作改良。DE438在2018年3月30日發佈，所用的數值積分法和DE430一樣，只是在模型裡增加了水星、火星、木星和土星更多的觀測數據：水星位置加了信使號(MESSENGER)飛船的全部測距數據；火星的位置加了火星奧德賽(Mars Odyssey)飛行器和火星勘測軌道飛行器(Mars Reconnaissance Orbiter)直到2017年末的測距數據；木星的位置加了朱諾號(Juno)飛船在第一、三、六、八、十和十一次通過近木點的測距和VLBI數據；此外還用了卡西尼號(Cassini)飛船在探測任務結束後重新處理的測距數據。DE438的年限是1550年到2650年。

4.1 下載和讀取JPL曆表

JPL的DE曆表以二進制電子文件(binary file)發佈。電子文件存有切比雪夫多項式(Chebyshev polynomials)系數，作用是以內插方法計算太陽、行星和月球位置和速度的座標值。切比雪夫多項式系數分時段列出，時段的長度一般是32天。多項式系數的數目按天體而定，選擇原則是要使切比雪夫內插法所得的位置與DE曆表給出的位置偏差不超過0.5毫米([Newhall 1989])，即 3.3×10^{-15} 天文單位(astronomical unit)。這內插法的誤差小於編制DE曆表數值積分法的估計誤差，所以用內插法所得的數據可視為等同於數值積分的數據。

DE曆表的電子文件可從JPL的ftp地址(例如ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/Linux/)下載。主要文件用二進制格式，需要用軟件讀取然後用內插法計算天體的位置和速度。我用Project Pluto編制的C程式讀取DE曆表並計算天體的位置和速度。上述JPL的ftp地址對每一個DE曆表都提供一個檢驗檔案，這檔案載有數千或數萬個TDB時刻的天體位置或速度的座標值，目的是供用家檢驗所用的程式是否正確讀取及計算天體的位置和速度。

我從上述JPL的ftp地址下載了DE405、DE406、DE430、DE431和DE438曆表的電子文件。DE405的文件大小是53.3MB；DE406佔190MB；DE430佔85.5MB；DE431佔2.6GB。目前JPL對於DE431以後的曆表只提供用美國信息交換標準碼(ASCII)的電子文件。DE438有十一個ASCII檔案，總容量是321MB。我用Project Pluto提供的asc2eph程式把這些ASCII檔案轉化成一個97.5MB的二進制檔案。對於每一個下載的曆表，我都用Project Pluto的C程式計算JPL提供的檢驗檔案裡的數據，證實了該C程式算出的數據與檢驗檔案裡的數據偏差小於計算機的浮點舍入誤差(floating-point round-off error)，即相對誤差小於 $2^{-53} \approx 1.11 \times 10^{-16}$ 。

4.2 計算地心幾何位置及速度

Project Pluto的軟件提供了一個C程式函數，可以用來計算在特定的TDB時刻某天體(太陽、行星或月球)相對於目標天體(太陽、行星或月球)位置和速度的直角座標值。該函數先用切比雪夫內插法計算某天體的BCRS位置和速度的座標值 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ ，以及目標天體的BCRS位置和速度的座標值 $\mathbf{x}_t(t)$ 和 $\mathbf{v}_t(t)$ ，然後該天體相對於目標天體的位置座標值用 $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_t(t)$ 計算、相對速度的座標值用 $\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_t(t)$ 計算。要計算月相和二十四節氣的時刻，須計算地心視黃經。所以目標天體是地球，算出來的 $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)$ 和 $\mathbf{V} = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_E(t)$ 稱為「地心幾何位置」和「地心幾何速度」，座標軸的方向與ICRS的座標軸方向一致。要把地心幾何位置轉化為地心視位置，須計算光行時和光行差的修正，然後計算歲差和章動把視位置從ICRS座標值轉化成瞬時黃道和真春分點的座標值，再從瞬時黃道座標值算出地心視黃經。下面兩節會詳細敘述這些步驟。

5 光行時和光行差

由於光速有限，我們在地球上看到天體的位置是較早時該天體的位置，稱為「推遲位置」(retarded position)，即天體在時刻 t_r 的位置，其發出的光剛剛在時刻 t 到達地球。如果

用 $\mathbf{x}(t)$ 表示某太陽系天體在TDB時刻 t 的BCRS位置、 $\mathbf{x}_E(t)$ 表示地球的BCRS位置，則該天體在GCRS的推遲位置是 $\mathbf{X}_r(t) = \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)$ ，這個位置修正稱為「光行時修正」(light-time correction)。「推遲時」 t_r 和 t 有以下關係：

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \quad (32)$$

其中 $c = 299792.458$ 公里/秒是光速。這公式忽略了廣義相對論裡因時空彎曲而引起的時間修正，這修正十分微小：對太陽的時間修正小於 10^{-4} 秒、對月球的時間修正只有 $\sim 10^{-8}$ 秒。推遲時 t_r 出現在公式(32)的兩邊，也就是說 t_r 應用迭代方式算出。但是太陽和月球的運行速度遠小於光速，用以下近似公式計算 t_r 就足夠了。

$$t_r \approx t - \frac{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)|}{c}. \quad (33)$$

這個近似公式的相對誤差是 $\sim (v/c)^2$ ，這裡 v 是天體在BCRS的運行速率。太陽的質量佔太陽系總質量的99.86%，所以太陽在BCRS幾乎不動(參看附錄A)，因此太陽的 $(v/c)^2$ 十分微小。月球繞地球的運行速率約每秒一公里，而地月質心繞日的速率約每秒三十公里，所以月球的BCRS速率大約是每秒三十公里，而 $(v/c)^2 \sim 10^{-8}$ ，也就是說用上面近似公式計算 t_r 造成的誤差只會使月球位置誤差為 $0.002''$ ，所以可以忽略。

光行差也是由於光速有限而引起的。假設某觀測者測量某物體位於方向 \mathbf{n} ，另一觀測者正處於第一觀測者相同的位置，但以速度 \mathbf{v} 相對於第一個觀測者移動，則該物體相對於第二個觀測者的方向是 \mathbf{n}' ， \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 都是單位向量，兩者的關係可用狹義相對論中的洛倫茲變換(Lorentz transformation)推出⁵(見附錄C)：

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/(1 + \gamma^{-1})}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}, \quad (34)$$

其中 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 。我們現在要求太陽和月球的地心視位置，地球質心在BCRS動，所以 $\mathbf{n} = \mathbf{X}_r/|\mathbf{X}_r|$ ，而 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{x}}_E$ 是地球質心在BCRS的速度。由於 $|\mathbf{v}_E| \approx 30$ 公里/秒，所以只須把光行差算準到 v/c 就足夠了。把洛倫茲變換公式展開到 v/c 項時，所得的光行差公式與牛頓運動學推出的公式一致：

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}}{|\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}|}, \quad (35)$$

這稱為「週年光行差」(annual aberration)，因為 $\boldsymbol{\beta}$ 隨地球繞日公轉呈現一年的週期變化。另一種光行差稱為「週日光行差」(diurnal aberration)，這是由地球自轉而產生的光行差，但是週日光行差只影響天體相對於地面上的視位置。月相和節氣是根據太陽和月球的地心視位置來定，不涉及週日光行差。

光行差把天體的位置移了 $\sim v_E/c \approx 10^{-4} \approx 20.5''$ 。雖然太陽的光行時修正很微小，但是如果忽略光行差，二十四節氣的時刻會有約八分鐘的偏差，而八分鐘是光從太陽到地球所需的大約時間，這並不是巧合。[Urban & Seidelmann 2013]書中第7.2.3節講述了一個簡單方法計算光行時和光行差的總效應，這總效應又稱「行星光行差」(planetary aberration)。這裡把書中的所述的方法簡單推導出來。從 $\mathbf{n} = \mathbf{X}_r/|\mathbf{X}_r|$ 和公式(35)可得：

$$\mathbf{n}' \propto \frac{\mathbf{X}_r}{|\mathbf{X}_r|} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_E}{c}$$

⁵廣義相對論效應(例如光線的重力偏折)可略去，因為其修正對太陽和月球都非常小。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)}{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_E}{c} \\
&\propto \mathbf{x}(t_r) - \left[\mathbf{x}_E(t) - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \dot{\mathbf{x}}_E \right] \\
&\approx \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E \left(t - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \right) \\
&= \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r).
\end{aligned} \tag{36}$$

也就是說，光行時和光行差的總效應算準到 v/c 時得出的地心視位置可用以下簡單公式算出：

$$\mathbf{X}_{\text{apparent}}(t) = \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r). \tag{37}$$

太陽的推遲時 t_r 是光從太陽到地球所需的時間，約為八分鐘。月球的推遲時 t_r 約1.3秒，要達到《農曆的編算和頒行》([GB/T 33661-2017])規定的一秒精度要求也不可忽略。用公式(37)來計算光行時和光行差的總效應十分方便，如前述，Project Pluto已提供了C程式函數計算任何TDB時刻太陽系天體的地心幾何位置 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_E$ 。公式(37)說在時刻 t 的地心視位置等於在時刻 t_r 的地心幾何位置。

除了地心視位置外，計算地心視位置對時間的導數也很有用。對公式(37)兩邊取時間導數得：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}(t) = [\dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r)] \frac{dt_r}{dt}. \tag{38}$$

用 $D(t_r) = |\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|$ 代表天體的推遲距離，結合公式(32)可得：

$$\frac{dt_r}{dt} = 1 - \frac{\dot{D}(t_r)}{c} \frac{dt_r}{dt} \Rightarrow \frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 + v_r(t_r)/c}, \tag{39}$$

式中 $v_r = dD/dt$ 是天體相對於地球的徑向速度(radial velocity)。公式(38)可寫成：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r)}{1 + v_r(t_r)/c} \tag{40}$$

公式右邊的分母是解開超光速運動之謎的關鍵。超光速運動見於活動星系核發出的噴流，其解釋相當簡單：如果噴流以接近光速並大致沿觀測者的視線方向移動，則 $1 + v_r/c \ll 1$ 並有可能使噴流的切向速率(tangential speed)大於光速。但是 v_r/c 對於月球和太陽則可忽略，原因是地球繞日公轉軌道和月球繞地球軌道都很接近圓形，所以相對距離 D 變化很小，徑向速度也相應地小。太陽的徑向速度約 $|v_r| \sim 0.5$ 公里/秒(參看附錄A)，月球的徑向速度約 $|v_r| \sim 0.05$ 公里/秒(參看附錄B)。忽略了分母 $(1 + v_r/c)$ 只會使太陽的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}|$ 有約 10^{-6} 的相對誤差，使月球的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}|$ 有約 10^{-7} 的相對誤差。第七節會說到這誤差基本上不會影響月相和二十四節氣時刻的準確度，所以我把分母 $(1 + v_r/c)$ 略去，用以下公式計算 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}$ ：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r) = \mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r). \tag{41}$$

上面說過Project Pluto有C程式函數計算任何時刻的地心幾何速度 $\mathbf{v} - \mathbf{v}_E$ 。公式(41)說在時刻 t 的地心視速度 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}$ 等於在時刻 t_r 的地心幾何速度。

6 地心視黃經

朔、上弦、望、下弦和二十四節氣是用太陽和月球的地心視黃經來定義的。某TDB時刻 t 的地心視黃經可綜合第二節、第三節和第五節的公式計算。這裡把步驟列出。

1. 計算天體(太陽或月球)的GCRS幾何位置 $\mathbf{X}_{\text{geometric}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)$ ，這裡 \mathbf{x} 是該天體的BCRS位置， \mathbf{x}_E 是地球的BCRS位置。這可直接用Project Pluto提供的C函數計算。
2. 用近似公式 $t_r \approx t - |\mathbf{X}_{\text{geometric}}(t)|/c$ 計算推遲時 t_r 。
3. 用公式 $\mathbf{X}_{\text{apparent}}(t) \approx \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r)$ 計算天體的視位置。這步也是直接用Project Pluto的C函數計算，所得的是天體的GCRS座標值。如前述，GCRS座標原點在地球質心，座標軸方向與ICRS座標軸方向一致。
4. 用公式(18)、(19)和(20)計算歲差矩陣 $\mathbf{P}(t)$ ，再用公式(21)–(23)、(25)、(29)和(31)計算矩陣積 $\mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)$ 。
5. 用以下公式把天體的地心視位置從GCRS的座標值 $\mathbf{X}_{\text{apparent}}(t)$ 轉化為瞬時黃道和真春分點的黃道座標值：

$$\mathbf{X}_{\text{ec}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{X}_{\text{apparent}}(t), \quad (42)$$

其中參考架偏差矩陣 \mathbf{B} 由公式(11)給出。

6. 天體的地心視黃經 λ 用公式 $\lambda = \arg(X_{\text{ec}} + iY_{\text{ec}})$ 得出，即 $\lambda = \tan^{-1}(Y_{\text{ec}}/X_{\text{ec}})$ 並取適當象限。計算 λ 的時間導數也很有用。對公式 $\lambda(t) = \tan^{-1}[Y_{\text{ec}}(t)/X_{\text{ec}}(t)]$ 求時間導數得：

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{X_{\text{ec}}\dot{Y}_{\text{ec}} - Y_{\text{ec}}\dot{X}_{\text{ec}}}{X_{\text{ec}}^2 + Y_{\text{ec}}^2}. \quad (43)$$

要計算 \dot{X}_{ec} 和 \dot{Y}_{ec} ，可對公式(42)求時間導數：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}(t) + \frac{d}{dt}[\mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{B}\mathbf{X}_{\text{apparent}}(t). \quad (44)$$

第一項緣於天體與地球的相對運動；第二項緣於瞬時黃道和真春分點的黃道座標軸因歲差和章動而變動。第二項顯然遠小於第一項，可以忽略。也就是說天體地心視位置的瞬時黃道座標對時間的導數可用以下公式計算：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}(t) \approx \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}[\mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r)]. \quad (45)$$

式中 $\mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r)$ 也是直接用Project Pluto的C函數計算。

這裡不妨粗略計算因忽略了第二項而引起的誤差。地球繞日的恆星週期是365.2564日，所以太陽在黃道的GCRS座標值每日的變化大約是 $360^\circ/365.2564 \approx 1^\circ$ ，因此太陽的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}|/|\mathbf{X}_{\text{apparent}}| \approx 1^\circ/\text{日}$ 。月球繞地球的恆星週期是27.3217日，重複以上計算可得月球的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}|/|\mathbf{X}_{\text{apparent}}| \approx 13^\circ/\text{日}$ 。現在比較一下歲差和章動的效應。歲差的主要成份是使春分點沿黃道移動 $50.3''/\text{年}$ ，即 $|\dot{\mathbf{P}}| \sim 0.14''/\text{日}$ ，這裡 $|\dot{\mathbf{P}}|$ 是指矩陣元素絕對值之最大者。章動的主要成份是週期為18.6年、因月球繞地球軌道進動而產生的擺動，其效應見於公式(26)的第一項。因此 $|d(\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{N})/dt| \sim 17.2''|\dot{\Omega}|$ ，而從公式(21)可得 $|\dot{\Omega}| \approx 7000000''/\text{世紀} \approx 10^{-3}$ 弧度/日，由此可算出 $|d(\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{N})/dt| \sim 0.02''/\text{日}$ 。因此第二項由歲差主宰。對太陽來說， $|\dot{\mathbf{P}}|/|\mathbf{X}_{\text{apparent}}| \sim 4 \times 10^{-5}$ 。對月球來說，其值是 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 。總括來說，忽略了第二項會使太陽的 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}$ 有約 4×10^{-5} 的相對誤差，使月球的 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}$ 有約 3×10^{-6} 的相對誤差。下一節會說明這樣的誤差基本上不影響計算月相和二十四節氣時刻的準確度。

7 計算月相和二十四節氣的TDB時刻

二十四節氣的定義是太陽的地心視黃經達到 15° 的整數倍的時刻。用弧度表示， 15° 是 $\pi/12$ 弧度。此後所有角度都用弧度表示。朔的定義是月球的地心視黃經與太陽地心視黃經相等的時刻。為方便起見，這裡引入一個函數 P ，定義如下：

$$P(x) \equiv x - 2\pi \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right], \quad (46)$$

其中 $[x]$ 表示小於 x 的最大整數，也就是說算符 $[]$ 與C和python的floor函數一致。 $P(x)$ 其實是把 x 加上 2π 的整數倍，使其值規範在 $[-\pi, \pi)$ 區間內。

朔的定義可用函數 P 寫成 $P(\lambda_M - \lambda_S) = 0$ ，這裡 λ_S 是太陽的地心視黃經， λ_M 是月球的地心視黃經。上弦的定義是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = \pi/2$ ；望的定義是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = -\pi$ ；下弦的定義是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = -\pi/2$ 。

計算月相和二十四節氣的時刻最終是要求出方程 $f(t) = 0$ 的根，下表列出計算月相和二十四節氣所需的函數 f 。注意 λ_S 和 λ_M 都是時間 t 的函數。

月相	函數 f
朔	$P(\lambda_M - \lambda_S)$
上弦	$P(\lambda_M - \lambda_S - \pi/2)$
望	$P(\lambda_M - \lambda_S - \pi)$
下弦	$P(\lambda_M - \lambda_S + \pi/2)$

節氣	函數 f	中氣	函數 f
J1 (立春)	$P(\lambda_S + \pi/4)$	Z1 (雨水)	$P(\lambda_S + \pi/6)$
J2 (驚蟄)	$P(\lambda_S + \pi/12)$	Z2 (春分)	$P(\lambda_S)$
J3 (清明)	$P(\lambda_S - \pi/12)$	Z3 (穀雨)	$P(\lambda_S - \pi/6)$
J4 (立夏)	$P(\lambda_S - \pi/4)$	Z4 (小滿)	$P(\lambda_S - \pi/3)$
J5 (芒種)	$P(\lambda_S - 5\pi/12)$	Z5 (夏至)	$P(\lambda_S - \pi/2)$
J6 (小暑)	$P(\lambda_S - 7\pi/12)$	Z6 (大暑)	$P(\lambda_S - 2\pi/3)$
J7 (立秋)	$P(\lambda_S - 3\pi/4)$	Z7 (處暑)	$P(\lambda_S - 5\pi/6)$
J8 (白露)	$P(\lambda_S - 11\pi/12)$	Z8 (秋分)	$P(\lambda_S - \pi)$
J9 (寒露)	$P(\lambda_S + 11\pi/12)$	Z9 (霜降)	$P(\lambda_S + 5\pi/6)$
J10 (立冬)	$P(\lambda_S + 3\pi/4)$	Z10 (小雪)	$P(\lambda_S + 2\pi/3)$
J11 (大雪)	$P(\lambda_S + 7\pi/12)$	Z11 (冬至)	$P(\lambda_S + \pi/2)$
J12 (小寒)	$P(\lambda_S + 5\pi/12)$	Z12 (大寒)	$P(\lambda_S + \pi/3)$

表中的二十四節氣分節氣和中氣列出，節氣用J+數字標記，中氣用Z+數字標記。這些標記在以下7.4節所述的時間表用到。

月相的計算只涉及日月黃經之差 $\lambda_M - \lambda_S$ ，即日月的角距離投射到黃道的角度，這與章動無關，因為章動是由地球自轉軸在空間之擺動而生。計算月相時可把黃經章動定為零： $\Delta\psi = 0$ 。這也可從數式看出：章動矩陣中 $\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)$ 的作用是把黃經加上修正項 $\Delta\psi$ ，由於 λ_M 和 λ_S 都加上了相同的修正項， $\lambda_M - \lambda_S$ 便把加上的 $\Delta\psi$ 抵消了，我也從實際的數值計算上證實確是如此。從物理學上也可看出 $\lambda_M - \lambda_S$ 只涉及黃道歲差，而不涉及赤道歲差（見下面7.3節）。但是我並沒有簡化歲差的計算，因為計算歲差並不費時。

7.1 牛頓—拉弗森求根法

要計算月相和二十四節氣的TDB時刻，最好的解 $f(t) = 0$ 方程的方法是用牛頓—拉弗森(Newton-Raphson)求根法。這是一個用迭代方式來逼近 $f(t) = 0$ 方程的根。設若 t_n 為第 n 次迭代的數值，則下一輪迭代的數值用以下公式計算：

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{\dot{f}(t_n)} \quad (47)$$

在計算二十四節氣時，函數 f 的時間導數 $\dot{f} = \dot{\lambda}_S$ ；在計算月相時， $\dot{f} = \dot{\lambda}_M - \dot{\lambda}_S$ 。 $\dot{\lambda}_S$ 和 $\dot{\lambda}_M$ 可用上一節的方法計算。要用迭代公式(47)，必須提供初始值 t_1 。我們知道地球繞日軌道和月球繞地球軌道都接近圓形，所以太陽和月球在天球上的視運動大致均勻，故可用類似「平氣」或「平朔」方法計算 t_1 ，明確地說是假設 $\dot{\lambda}_S$ 和 $\dot{\lambda}_M$ 是常數，由此估算月相或二十四節氣的大約時刻。要計算 $f(t) = 0$ 在接近給定TDB時刻 t_0 的根，可用 $t_1 = t_0 - f(t_0)/\dot{f}(t_0)$ 作為初始值。但是這樣只會求得 $f(t) = 0$ 的一個根，我們知道 $f(t) = 0$ 有多重根，有時候或會要求某個特定的根。例如要求某個冬至之前的第一個朔，或是某個朔之後的第一個望。在這些情況下，要求的根可以表達成在某時刻 t_0 之前或之後的第一個根，而 t_1 的計算可以修改如下：

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{\dot{f}(t_0)} + \frac{2k\pi}{\dot{f}(t_0)}, \quad (48)$$

式中 k 是整數，其值視乎情況可以是0、1或-1。因為 \dot{f} 接近常數， $2\pi/\dot{f}$ 也接近常數。在計算二十四節氣時， $2\pi/\dot{f}$ 接近回歸年365.2422日；在計算月相時， $2\pi/\dot{f}$ 接近朔望月的平均值29.5306日。所以上面公式其實是先把 t_1 定為 $t_0 - f(t_0)/\dot{f}(t_0)$ ，然後視乎情況加上或減去一個週期。這裡考慮以下兩種情況。

情況一：要求 t_0 之前的第一個根。在這情況下，要使 $t_1 < t_0$ 。如果 $f(t_0) > 0$ ，則選 $k = 0$ ；如果 $f(t_0) < 0$ ，則選 $k = -1$ 。（注意 $f(t_0) \in [-\pi, \pi)$ 而且 $\dot{f}(t_0) > 0$ ）

情況二：要求 t_0 之後的第一個根。在這情況下，要使 $t_1 > t_0$ 。如果 $f(t_0) > 0$ ，則選 $k = 1$ ；如果 $f(t_0) < 0$ ，則選 $k = 0$ 。

定了 t_1 後，即可啓動迭代程序，數列 $\{t_n\}$ 迅速收斂。我定的收斂條件是當 $|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon$ 時就終止迭代程序，而我選 $\varepsilon = 10^{-8}$ 日 = 0.000864秒，從公式(47)可知這收斂條件等於 $|f(t_{n-1})/\dot{f}(t_{n-1})| < \varepsilon$ 。把 ε 定為 10^{-8} 日其實已接近計算機的浮點舍入誤差。原因是Project Pluto的C函數用儒略日數作TDB時間的輸入，然後計算天體的位置和速度。J2000.0的儒略日數是2451545，這是七個位的整數，其實從公元前1976年到公元2266年間儒略日數的整數部分都是七位數，所以時刻算準到 10^{-8} 日就等於說儒略日數算準到15個有效數位。

用牛頓—拉弗森方法計算月相和二十四節氣時刻十分有效，定了 t_1 後，只須經三到四次迭代過程就已達到指定的收斂條件。所以即使用我家裡已稍為嫌舊的電子計算機，計算從1600年到3500年所有朔、上弦、望、下弦和所有二十四節氣的時刻只用了大約十七秒。編程式的初期，我並沒有用公式(31)簡化 $\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{N}$ 的計算，把不必要的黃赤交角章動 $\Delta\epsilon$ 也計算了，計算月相時把不必要的 $\Delta\psi$ 也計算了，那時用了大約九十秒的時間才算完。 $\Delta\epsilon$ 的公式有1056項由三角函數組成的級數，而黃經章動 $\Delta\psi$ 的公式有1358項三角函數組成的級數。我也試過只計算 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的頭幾項，那時只用了幾秒就把1600年到3500年的所有月相和節氣時刻算完。由此可知在那十七秒裡，大部分的時間花在計算 $\Delta\psi$ 上。假如我不是用JPL的曆表，而用半解析(semi-analytic)的曆表例如VSOP87或ELP/MPP02曆表，情況也許不同，因為這些曆表含三角函數項達到數千以至數萬，比章動的級數項還要多數倍至數十倍。這就是JPL曆表的一個很大的優點，天體的位置和速度用切比雪夫內插法計算，不但計算速度快而且比那些半解析曆表

更準確。但是JPL曆表也有缺點。其一是曆表的電子文件大，這是為了使切比雪夫內插法的準確度達到數值積分法本身的準確度。不過目前最大的JPL文件(用於DE431曆表)是2.6GB，相對於現在一般記憶體容量來說還不算很大。另一個缺點是JPL曆表只能計算曆表包含的年限，年限以外的數據不能用外插法取得。不過DE431曆表的年限是從-13200年到17191年，對很多應用應該已足夠了。

上面說過，我設定的收斂條件相當於 $|f(t)/\dot{f}(t)| < \varepsilon$ 。因此計算出的時刻準確度基本上由 $f(t)$ 與0的偏差而定， $\dot{f}(t)$ 的作用是提供換算因子使 $f(t)$ 與0的偏差轉化為時間誤差。前面說過我計算 λ_S 和 λ_M 時略去了某些項。具體地說，略去了公式(38)中的 dt_r/dt 使 λ_S 有 $\sim 10^{-6}$ 的相對誤差，使 λ_M 有 $\sim 10^{-7}$ 的相對誤差；略去了公式(44)的第二項使 λ_S 有 $\sim 4 \times 10^{-5}$ 的相對誤差，使 λ_M 有 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 的相對誤差。由於計算出的時刻誤差由 $|f(t)/\dot{f}(t)| < \varepsilon$ 所決定， \dot{f} 的誤差相當於改變了 ε 的數值。例如假設 \dot{f} 的相對誤差是 10^{-4} ，在最壞的程況下等於把 ε 的數值變成 1.0001ε ，由於 $\varepsilon = 10^{-8}$ 日 = 0.000864秒， $1.0001\varepsilon = 0.0008640864$ 秒。所以計算出的時刻精確度幾乎不因 \dot{f} 的微小誤差而受影響。即使 \dot{f} 的相對誤差大到10%也無礙，只要把 ε 的數值定得遠少於真正要達到的精度就可以了。因為 \dot{f} 接近常數，我因好奇試把 \dot{f} 在計算節氣時定為常數 $2\pi/365.2422$ 日、在計算月相時定為常數 $2\pi/29.5306$ 日，然後計算從1600年到3500年的月相和二十四節氣時刻，發現所算出的節氣時刻與用精確 \dot{f} 算出的節氣時刻偏差不超過0.00016秒、月相的時刻偏差不超過0.00024秒，這些偏差都小於預設的 ε 。但是這並不是說精確的 \dot{f} 毫無用處。雖然用這些粗糙的 \dot{f} 不影響算出時刻的精度，但是收斂過程變得慢了。用粗糙的 \dot{f} 計算節氣時要用上多至七次迭代過程才達到預設的收斂條件、計算月相時則須要用到多至十二次迭代過程才能收斂，這使計算過程慢了很多。其實這也不奇怪，牛頓—拉弗森方法是二階的方法(second-order scheme)，收斂速度比一階方法快得多，但是二階收斂的先決條件是 \dot{f} 必需算得準。用JPL曆表計算準確的 \dot{f} 並不困難： \dot{f} 涉及地球、月球和太陽的運動速度，而天體的速度在JPL發佈的曆表裡取位置對時間的導數而得，位置用切比雪夫多項式展開，所以速度涉及切比雪夫多項式的導數。切比雪夫多項式及其導數都可用遞歸公式(recurrence equations)計算。

7.2 不同曆表和歲差模型的時間差異

我用JPL的DE431、DE430、DE406和DE438曆表計算了月相和二十四節氣的TDB時刻，然後比較這些曆表算出來的時刻差異。前面說過，DE430和DE431的差別只在於DE430加了月核一月慢的阻尼項來計算月球位置。JPL建議用DE430曆表來計算在J2000.0前後幾百年的月球位置，而在這段時間之外的月球位置應用DE431曆表。我比較了用DE430和DE431曆表從1600年到2500年期間的月相和節氣時刻，發現算出的月相時刻偏差不超過0.85秒、節氣時刻偏差不超過0.000419秒($< \varepsilon$)。而在1600年到2200年內的月相時刻偏差不超過0.2秒、節氣時刻偏差不超過0.00015秒($< \varepsilon$)。注意節氣時刻偏差小於預設的計算精度 $\varepsilon = 0.000864$ 秒，所以由兩曆表算出的二十四節氣時刻基本上沒有差別。

DE405曆表於1998年發行。美國海軍天文臺和英國皇家航海曆書局聯合編的《天文年曆》(*Astronomical Almanac*)從2003年到2014年的數據就是取自DE405曆表。DE406曆表在同一年與DE405曆表同時發行，DE406和DE405是用同一數值積分法來計算太陽系行星和月球位置，只是DE406的年限比較長(-3000年到3000年)，為了使發行的電子文件不至太大(以當年的標準來說)，DE406發行時把切比雪夫多項式系數的數目減小了，所以發行的曆表精度比較低。我比較過從DE431和DE406算出的月相和節氣時刻，發現從1600年到2500年，二十四節氣時刻偏差不超過0.14秒、月相時刻偏差不超過0.18秒。

JPL在2018年3月30日發佈了DE438曆表。比較DE431和DE438曆表算出的時刻，發現從1600年到2500年間，二十四節氣時刻的偏差不超過0.04秒，月相時刻的偏差不超過0.79秒。如果把比較年份限制在1800年到2200年間，二十四節氣時刻的偏差不超過0.013秒，月相時刻的偏差不超過0.12秒。

Vondrák等人在2011年發表的一篇文章([Vondrák et al 2011])指出，IAU2006歲差模型只適用

於J2000.0的前後一千年左右，在這時段以外的精度大減。[Vondrák et al 2011]文章的作者創立了一套新歲差模型，可以用來計算J2000.0前後二十萬年的歲差。廣受歡迎的開放源代碼天象軟件(open-source planetarium software)Stellarium採用了這個新歲差模型，我建立的星圖網站也用這歲差模型。在這個歲差模型中，公式(18)中的角度 ψ_A 、 ω_A 和 χ_A 改用[Vondrák et al 2011]文章中的公式(11)、(13)、表4和表6計算。我用DE431曆表計算太陽和月球的GCRS位置，然後比較用兩歲差模型計算的月相和節氣時刻。結果是在1600年與2500年內，兩歲差模型的二十四節氣時刻偏差不超過0.19秒、月相時刻偏差不超過0.00037秒($< \varepsilon$)；在1600年與3500年內，兩歲差模型的二十四節氣時刻偏差會達到3秒、但月相時刻偏差不超過0.0035秒。月相和節氣的時刻偏差相差很大，其實這並不難理解。二十四節氣用太陽的視黃經來定，即真春分點和太陽沿黃道的角距離。月相由月球和太陽的視黃經之差來定，即月球和太陽的角距離投射到黃道的角度。所以月相只涉及黃道歲差，二十四節氣卻涉及赤道歲差和黃道歲差，黃道歲差遠小於赤道歲差，加上月亮運行比較快，使月相時刻的差異遠小於節氣時刻的差異。

綜合以上各項比較，我估計用DE431曆表和IAU2006歲差模型計算出的月相和二十四節氣的TDB時刻在1800年至2200年內的誤差應該小於0.2秒。

7.3 Fukushima-Williams 歲差公式

(2019年5月9日附加)

IAU 2006 歲差模型的矩陣公式(16)採用Capitanie、Wallace和Chapront提出的公式。其實計算歲差還有若干個等價的表示式(見[Urban & Seidelmann 2013]第6.6.2節)，其中值得一提的是Fukushima-Williams公式：

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_1(-\epsilon_A)\mathbf{R}_3(-\Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma). \quad (49)$$

如果用 C_0 表示J2000.0的曆元北黃極， C 表示瞬時北黃極， P_0 表示J2000.0的曆元平北天極， P 表示瞬時平北天極。 γ 是從 P_0 看由 C_0 到 C 的角度， ϕ 是從 P_0 到 C 的角距離， Ψ 是從 C 看由 P_0 到 P 的角度， ϵ_A 是瞬時黃道相對於瞬時平赤道的傾角。[Urban & Seidelmann 2013]書中圖6.4描繪了這些角度。也可用另一方式描述這三個角度： ϕ 是瞬時黃道相對於J2000.0曆元平赤道的傾角， γ 是 C 的J2000.0曆元平赤經和 C_0 的J2000.0曆元平赤經(其值是 $-\pi/2$)之差， Ψ 是 P 的瞬時平黃經(其值是 $\pi/2$)和 P_0 的瞬時平黃經之差。從這些描述可知 γ 和 ϕ 涉及黃道歲差， Ψ 涉及從瞬時黃道參考系觀看的赤道歲差。結合公式(31)和(49)得出

$$\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{NP} = \mathbf{R}_3(-\Delta\Psi)\mathbf{R}_3(-\Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma) = \mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma). \quad (50)$$

其中 $\mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)$ 矩陣把黃經加上了 $\Psi + \Delta\Psi$ ，在計算 $\lambda_M - \lambda_S$ 時把加上去的值抵消了，所以計算月相時不須要計算 $\mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)$ 矩陣。這公式明確顯示月相的時刻只涉及黃道歲差，而與赤道歲差和章動無關。

計算與IAU 2006模型類同的歲差模型，可用[Urban & Seidelmann 2013]表6.3的公式計算 γ 、 ϕ 和 Ψ ：

$$\begin{aligned} \gamma &= 10.556403''T + 0.4932044''T^2 - 0.00031238''T^3 \\ &\quad - 2.788'' \times 10^{-6}T^4 + 2.60'' \times 10^{-8}T^5 \\ \phi &= 84381.406'' - 46.811015''T + 0.0511269''T^2 + 0.00053289''T^3 \\ &\quad - 4.40'' \times 10^{-7}T^4 - 1.76'' \times 10^{-8}T^5 \\ \Psi &= 5038.481507''T + 1.5584176''T^2 - 0.00018522''T^3 \\ &\quad - 2.6452'' \times 10^{-5}T^4 - 1.48'' \times 10^{-8}T^5 \end{aligned} \quad (51)$$

公式(50)配(51)所算出的矩陣 $\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{NP}$ 和用IAU2006/2000A歲差和章動模型算出的矩陣(即用公式(16)、(18)和(31))雖然在數值上不完全相同，但兩者的結果相對於IAU2006歲差模型的精度

來說是等同的。我比較了用公式(50)配(51)和用IAU2006/2000A模型的計算結果(月球和太陽位置都用DE431曆表計算)，發現在1600年到3500年間，月相和二十四節氣的時刻差異都不大於0.00016秒($< \epsilon$)。公式(50)雖然比較簡潔優美，但並沒有顯著提高整體計算效率，這也是意料之中，因為計算歲差並不費時。

7.4 月相和二十四節氣之TDB時間表

雖然計算月相和二十四節氣的TDB時刻頗為複雜，但是選定了某一特定曆表以及歲差和章動模型後只需要計算一次。我用DE431曆表的數據計算這些時刻，主要是因為這曆表的年限比較長(-13200年至17191年)。我把算出的時刻存在兩個ASCII檔案裡。第一個檔案的名稱是TDBtimes.txt，存有從1600年到3500年月相和二十四節氣的TDB時刻。第二個檔案的名稱是TDBtimes_extended.txt，存有從-4000年到8000年的TDB時刻。這兩個檔案可從我的GitHub儲存室下載。第二個檔案經過了壓縮，在儲存室的名稱是TDBtimes_extended.txt.gz，可用Linux的gzip程式或其他類似的程式解壓。

TDBtimes.txt的時刻用DE431曆表加上IAU2006/2000A歲差和章動模型計算。上面說過IAU2006歲差模型只適用於J2000.0前後約一千年。TDBtimes_extended.txt的時刻改用[Vondrák et al 2011]的歲差模型計算，這歲差模型的有效年限是J2000.0前後約二十萬年。至於IAU2000A章動模型的有效年限不大明確，這章動模型用到上面公式(21)中月亮和太陽相關的角度，這些公式取自[Simon et al 1994]文章，文章作者建議用這些公式時最好把使用年份限制在公元前4000年到公元8000年間。我想IAU2000A章動模型的有效年限大概也是這個時期，所以TDBtimes_extended.txt列出從-4000年(即公元前4001年)到8000年的時刻。

兩個檔案的數據結構是為了方便編算農曆而設。下面先講解TDBtimes.txt的數據結構，然後講述使用TDBtimes_extended.txt時要注意的事項。

TDBtimes.txt文件含1901行和87欄。第一欄是公曆年。第二欄以jd0標記，是公曆年1月-1日TDB16時的儒略日數，即1月0日(TDB+8)零時的儒略日數。例如在公元2000年那行jd0欄的值是2451543.166666667，是2000年1月-1日TDB16時(即1999年12月30日TDB16時)的儒略日數。jd0欄的值總會是某整數+1/6，因為其TDB時刻總是16時。jd0的值是該行其他欄列出日期的起始時刻，即是說該行其他欄所列日期的儒略日數是jd0+所列的日數。

第三欄以Z11a標記，是最接近jd0的那個冬至時刻，對於TDBtimes.txt涵蓋的年份，這個冬至是前一個公曆年的冬至。例如公元2000年那行的Z11a欄是-8.343841734507215，就是說1999年冬至的儒略日數是2451543.166666667 - 8.343841734507215，即1999年12月22日TDB 7:44:52。第四至二十七欄是Z11a以後的二十四節氣時刻，由J12(小寒)到Z11b(冬至)。Z11b欄的冬至時刻和下一行的Z11a欄的時刻一致，數值不同是因為兩行的jd0值不同。二十四節氣各欄的標記用J+數字表示節氣、用Z+數字表示中氣。所用標記的二十四節氣名稱可從在上面二十四節氣表查得。

第二十八欄以Q0_01標記，是發生在Z11a欄冬至之前的第一個朔的時刻。餘下的欄(第二十九至第八十七欄)所列的時刻是上弦(標以Q1_xx)、望(標以Q2_xx)、下弦(標以Q3_xx)和其他的朔(標以Q0_xx)依時間次序排列。這裡xx的值從01到15，是從Q0_01欄的朔算起的朔望月數。每行列出涵蓋15個朔望月裡的朔、上弦、望和下弦時刻。

TDBtimes_extended.txt的數據結構和TDBtimes.txt一樣，但有一點要注意。根據目前通用的公曆紀日法，1582年10月15日起才開始使用格里高利曆，之前是用儒略曆。所以1583年前的jd0是指儒略曆1月0日(TDB+8)零時的儒略日數。1582年10月4日之後的那一天是10月15日(雖然並不是所有國家都在這一天改用格里高利曆)，所以1582年和1583年的jd0只相差355天。由於儒略曆一年的平均值(365.25日)比回歸年稍長，1583年前二十四節氣的平均時刻漸漸在儒略曆裡後退，128年後退一天。當追溯上古年份時，就會發現節氣的時刻在儒略曆的日期比現在要遲。例如現在冬至在公曆的12月22日左右，在公元前1129年前卻會出現在1月份。

兩檔案的數據結構是爲了方便計算農曆而定。用每行的數據可以計算由Z11a冬至到Z11b冬至之間一歲內所有農曆月。Q0_01欄的朔通常是對應農曆十一月初一，但也有例外。根據規定Q0_02欄的朔必定發生在Z11a冬至之後，但是如果Q0_02欄的朔發生在冬至之後數小時，這個朔有可能和Z11a冬至落在同一日，如果出現這情況，Q0_02欄的朔才是對應農曆十一月初一，要知道是否如此就要知道一日的起始和終結時刻。但農曆用UTC+8爲時間標準，所以必須把TDB轉化爲UTC+8後才能準確判斷。一歲最多可以有十三個農曆月(包括第一個十一月但不計第二個十一月)，所以需要十四個朔日來定十三個農曆月的起始和終結日期。如果第一個十一月初一對應的朔是Q0_02欄的朔，則冬至日必定是十一月初一，簡單計算可推出這個歲只能有十二個農曆月。所以不論怎樣十四個朔日足以決定一歲內所有農曆月的起始和終結日期。每行列出十五個朔望月內的月相時刻對編算一歲內的農曆月綽綽有餘，而且會有若干月相與上一行和下一行重疊。這當然都不要緊，文件裡的數據結構全是爲了方便編算農曆。

8 TDB和UTC的轉換

選定了曆表以及歲差和章動模型後，月相和二十四節氣的TDB時刻只須算一次。TDB和UTC的轉換卻會隨新數據的出現而變，所以把TDB時刻計算和TDB到UTC+8的轉換分開有好處，當有新的轉換時只須更新轉換公式而無須重算月相和節氣的時刻。如果TDBtimes.txt和TDBtimes_extended.txt文件裡的月相和節氣時刻用UTC+8，新的變換出現後文件裡的數據就過時了。

UTC在1960年制定，經過多次修改，到1972年才定下來。爲了避免混亂，我的農曆網站所列的時刻在1972年以前是UT1+8，從1972年起才用UTC+8。由於TDB與TT在數千年來相差不超過0.002秒，可視兩者爲等同。TT到UT1的轉換公式可用 [Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的 $\Delta T = TT - UT1$ 擬合及外推公式，1972年到現在的TT-UTC可根據閏秒表計算(例如

<https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E9%97%B0%E7%A7%92>)。具體地說，

$$TT - UTC = (TT - TAI) + (TAI - UTC) = 42.184\text{秒} + \text{自1972年來加到UTC的閏秒總數} \quad (52)$$

未來的TT - UTC可用 [Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的 ΔT 外推公式計算。此外推公式可從其長期日長變化(lod)公式積分而得：

$$\begin{aligned} t &= (y - 1825)/100, \quad f(y) = 31.4115t^2 + 284.8436 \cos[2\pi(t + 0.75)/14], \\ \Delta T &= c_2 + f(y), \end{aligned} \quad (53)$$

其中 y 是年份， t 是從1825年累積的世紀數，此式給出的 ΔT 以秒爲單位。對於某一儒略日數JD，年份 y 可用公式 $y = (JD - 2451544.5)/365.2425 + 2000$ 計算。根據規定UTC和UT1相差不會超過0.9，所以用 ΔT 作TT - UTC的近似值，誤差應比 ΔT 的預推公式小。

以下舉兩個例子展示換算方法。

例一：從TDBtimes.txt文件得知2018年第一個朔是Q0_02欄(第三十二欄)所列的朔，其TDB時刻離2018年1月0日零時(TDB+8)有17.42943724648089日，即2018年1月17日10:18:23.378(TDB+8)。根據閏秒數據，從1972年到2018年加到UTC的閏秒總數是27秒，由此可得TT - UTC = 69.184秒。把上述TDB+8時刻減去69.184秒，得到的合朔時刻是2018年1月17日10:17:14(UTC+8)。這時刻與美國海軍天文臺和英國皇家航海曆書局聯合編的《2018年天象》(Astronomical Phenomena for the year 2018)數據(1月17日 02:17 UTC)一致。這毫不奇怪，《2018年天象》用DE430曆表數據，從7.2節得知用DE430和DE431計算的月相時刻在1600年至2200年內相差不超過0.2秒。

例二：從TDBtimes.txt文件裡得知在2165年Q0_13欄列出的合朔時刻離2165年1月0日零時(TDB+8)有338.0018578149057日，即2165年12月4日00:02:40.5(TDB+8)。用外推公式(53)算得

$\Delta T \approx 131.8$ 秒。假設 $TT - UTC = \Delta T = 131.8$ 秒，可得該合朔時刻是2165年12月4日00:00:29 (UTC+8)，離午夜零時只有29秒。如果真實的 $TT - UTC$ 比外推值大了超過29秒，則這個合朔日期會在12月3日。這個合朔日期決定農曆十一月初一的日期。所以只能說2165年、農曆乙丑年十一月初一的日期現在無法準確斷定，預推的日期是12月4日，但有可能是12月3日，確實情況要視乎在2165年12月時將會有多少閏秒加到UTC上，現在只能等待2165年的來臨。

由於地球自轉不均勻，數十年後的閏秒數目難以準確預測。這使數十年後的TDB到UTC轉換十分困難，所以轉換公式會因新數據的出現而變，使情況更複雜的是閏秒政策或會有變：有人自2005年起建議取消閏秒。

參考文獻

- [Capitaine et al 2003] N. Capitaine, P.T. Wallace, and J. Chapront, “Expressions for IAU 2000 precession quantities”, *Astron. Astrophys.*, 412(2), pp. 567-586, 2003, doi:10.1051/0004-6361:20031539.
- [Folkner et al 2014] W.M. Folkner et al, “The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431”, IPN Progress Report 42-196, February 15, 2014.
- [GB/T 33661-2017] 《農曆的編算和頒行》，中華人民共和國國家質量監督檢驗檢疫總局及中國國家標準化管理委員會聯合發佈，中國科學院紫金山天文臺草擬。
- [IERS Conventions 2010] IERS Conventions 2010, edited by G. Petit and B. Luzum.
- [Kaplan 2005] G.H. Kaplan, “The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models: Explanation and Implementation”, U.S. Naval Observatory Circular No. 179, U.S. Naval Observatory, Washington, D.C. 20392 (2005).
- [Morrison et al 2021] L.V. Morrison, F.R. Stephenson, C.Y. Hohenkerk, and M. Zawilski, “Addendum 2020 to ‘Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015’”, *Proc. R. Soc. A.*, 477:20200776 (2021).
- [Newhall 1989] X.X. Newhall, “Numerical Representation of Planetary Ephemerides”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 45, p.305, 1989.
- [Simon et al 1994] J.L. Simon et al, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, 282, 663 (1994).
- [Stephenson et al 2016] F.R. Stephenson, L.V. Morrison, and C.Y. Hohenkerk, “Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015”, *Proc. R. Soc. A.*, 472:20160404 (2016).

- [Titov, Lambert & Gontier 2011] O. Titov, S.B. Lambert and A.-M. Gontier, VLBI measurement of the secular aberration drift, *Astron. Astrophys.*, 529, A91 (2011).
- [Urban & Seidelmann 2013] S.E. Urban and P.K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 3rd edition, University Science Books, Mill Valley, California (2013). 勘誤:
http://www.uscibooks.com/urban_errata.pdf
- [Vondrák et al 2011] J. Vondrák, N. Capitaine, and P. Wallace, “New precession expressions, valid for long time intervals”, *Astron. Astrophys.*, 534, A22 (2011).

附錄

本附錄的內容對月相和節氣的計算關係不大，放在這裡是因為第五節提及過這些計算結果，另一方面，這些計算本身也頗有趣。

A 太陽的位置和速度

第五節提到太陽的質量佔太陽系總質量的99.86%，因此太陽相對於太陽系質心的移動甚微。在展示詳細計算前，不妨先簡單估算大概數值。

除了太陽外，太陽系最大質量的天體是木星，其質量是 $M_J = M_\odot/1047$ ，其中 M_\odot 是太陽質量。木星的軌道有微小的偏心率(≈ 0.05)，軌道半長徑是 $a_J = 5.2$ 天文單位 $= 1120R_\odot$ ，這裡 $R_\odot = 6.957 \times 10^5$ 公里是太陽半徑。木星的軌道週期是 $P_J = 4332.6$ 日。受木星的重力影響，太陽也會以微橢圓軌道運行，軌道半長徑是 $a_\odot = (M_J/M_\odot)a_J = 1.07R_\odot$ ，運行速率是 $v_\odot \approx 2\pi a_\odot/P_J = 12.5$ 米/秒。

現在來看精確的計算結果。太陽的BCRS位置和速度可直接用JPL的曆表得出，下面所示的數據都是用DE431曆表計算的。圖一和圖二展示太陽相對於太陽系質心在1950年至2050年的運動軌跡，太陽位置用J2000.0的曆元黃道及平春分點的黃道座標表示。具體地說，太陽的座標位置向量 $\mathbf{X}_{\text{ec2000}} = (X_{\text{ec2000}} \ Y_{\text{ec2000}} \ Z_{\text{ec2000}})^T$ 用以下公式計算：

$$\mathbf{X}_{\text{ec2000}} = \mathbf{R}_1(\epsilon_0)\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (54)$$

式中 \mathbf{x} 是太陽的BCRS座標向量， \mathbf{B} 是參考架偏差矩陣(11)， \mathbf{R}_1 是沿 x 軸的旋轉矩陣(14)， $\epsilon_0 = 84381.406''$ 是J2000.0曆元黃道與平赤道的傾角。

從兩圖可見太陽的運動比橢圓軌跡複雜，顯示太陽系其他天體對太陽的重力影響不可忽視。圖三展示太陽相對於太陽系質心的運動速率隨時間的變化。數據顯示太陽的速率小於16.5米/秒，均方根速率(root mean square speed)是12.8米/秒。由此可推出光行時對太陽的位置修正是 $v/c < 5.5 \times 10^{-8}$ 弧度 $= 0.01''$ 。

第五節也提到太陽相對於地球的徑向速度約為0.5公里/秒，這速度主要來自地球的軌道偏心率。徑向速度的值是用公式 $|v_r| \sim v_{\text{orb}}e$ 粗略估算，其中 $v_{\text{orb}} \approx 30$ 公里/秒是地球公轉速率，而 $e = 0.0167$ 是地球的軌道偏心率。這個粗略公式可推導如下。當天體以牛頓力學二體問題(two-body problem)描述的橢圓軌道運行時，其徑向位置 r 由以下公式描述：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (55)$$

其中 a 是軌道半長徑， θ 是真近點角(true anomaly)。對上面公式取時間導數得：

$$v_r = \dot{r} = -\frac{er \sin \theta \dot{\theta}}{1 + e \cos \theta} = -\frac{eh \sin \theta}{r(1 + e \cos \theta)} = -\frac{eh \sin \theta}{a(1 - e^2)}, \quad (56)$$

其中 $h = r^2 \dot{\theta}$ 是軌道角動量除以折合質量(reduced mass)。從牛頓力學的二體問題計算可推出以下方程式：

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{GM}, \quad P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \quad (57)$$

這裡 p 稱為「半通徑」(semi-latus rectum)、 G 是牛頓重力常數、 M 是系統的總質量、 P 是軌道週期。右邊的公式又稱「開普勒第三定理」(牛頓版)。從左邊的公式可得 $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$ 。公式(56)可改寫成

$$v_r = -e \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}} \sin \theta = -\frac{2\pi a}{P} \frac{e \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{e \bar{v}_{\text{orb}} \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (58)$$

其中 $\bar{v}_{\text{orb}} = 2\pi a/P$ 是平均軌道速率。當軌道偏心率 e 是小數目時，上面公式可寫成 $|v_r| \sim e \bar{v}_{\text{orb}}$ ，亦即是那個粗略公式。

圖四展示太陽在2010年至2020年相對於地球的徑向速度，徑向速度也是用DE431曆表計算。從圖中可見徑向速度呈現類似正弦波的週期變化，這與預期的一致，類似正弦波的變化來自 $\sin \theta$ 項。值得注意的是 θ 與時間的關係近似線性函數，其與線性函數的偏離源自地球的微小軌道偏心率。⁶ 徑向速率 $|v_r|$ 的最大值是0.515公里/秒，與用粗略公式算出的值十分接近。

B 月球的徑向速度

第五節提到月球相對於地球的徑向速率是 $|v_r| \sim 0.05$ 公里/秒，這也是用粗略公式 $|v_r| \sim e v_{\text{orb}}$ 估算的。對月球軌道而言， $v_{\text{orb}} \approx 2\pi a/P \approx 1$ 公里/秒、 $e \approx 0.05$ 。圖五展示用DE431來計算月球的 v_r 在2018年至2020年間的變化。圖中可見月球的徑向速度比太陽的複雜，並不是簡單的類似正弦波的變化。月球 $|v_r|$ 的最大值是0.074公里/秒，是上述估算值的1.5倍。造成這麼大差異的原因是太陽及其他行星對月球軌道的重力攝動，其中太陽的重力攝動最為重要。由於地月系統繞太陽公轉，太陽對月球繞地球軌道的重力攝動表現在太陽對月球的潮汐力，即太陽對月球重力與對地月質心的重力之差。太陽對月球的潮汐力是地球對月球重力的0.6%。月球繞地球轉，其相對於太陽的位置不斷改變，受到太陽的潮汐力呈現週期性變化，使到月球軌道參數也呈現週期性變化。也就是說，月球的軌道半長徑和軌道偏心率因太陽的重力攝動而變化。

月球的瞬時軌道參數可用JPL曆表計算，展示計算結果前應稍為解釋瞬時軌道的概念。當天體受到重力攝動時，其軌道會偏離以牛頓力學二體問題所描述的開普勒軌道(Keplerian orbit)，描述這些受攝動的軌道通常做法是計算天體的「吻切軌道根數」(osculating orbital elements)。「吻切」譯自英文osculate，在這裡的意思是一條曲線與另一條曲線相接觸，在接觸點處兩曲線的切線(tangent)相同。吻切軌道根數的概念很簡單。根據牛頓力學的二體問題計算結果，二體的相對運動可用六個軌道根數描述： $(a, e, i, \omega, \Omega, T_0)$ 。這裡 a 是軌道半長徑(orbital semi-major axis)、 e 是軌道偏心率(orbital eccentricity)、 i 是軌道傾角(orbital inclination)、 ω 是

⁶真近點角 $\theta(t)$ 可用天體力學的標準公式計算。首先是用公式 $M(t) = 2\pi(t - T_0)/P$ 來計算平近點角(mean anomaly) M 。這裡 T_0 是地球過近日點的時刻、 P 是軌道週期。下一步是解開普勒方程 $E - e \sin E = M$ 而求出偏近點角(eccentric anomaly) E 。最後用公式 $\tan(\theta/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(E/2)$ 計算真近點角 θ 。從這些公式可見平近點角 $M(t)$ 是時間的線性函數，但 $E(t)$ 和 $\theta(t)$ 卻不是。較為簡單的解釋是地球繞日運行速率因其橢圓軌道緣故而不斷變化。當地球離太陽較近時，運行速率較快，因此 θ 增加得較快；當地球離太陽較遠時，運行速率較慢，因此 θ 增加得較慢。所以 θ 不是時間的線性函數。

近點幅角(argument of periapsis)、 Ω 是升交點經度(longitude of ascending node)、 T_0 是過近拱點時刻(time of periapsis passage)。 i 、 ω 和 Ω 是三個歐拉角(Euler angles)，用以描述軌道相對於某個給定參考架(reference frame)的方向； a 和 e 描述軌道的大小和形狀； T_0 給出二體最接近的一個時刻。對於某一特定軌道， T_0 顯然可以有許多個數值，但彼此之間的差異必定是軌道週期 P 的整數倍，而 P 由開普勒第三定理給出： $P = 2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$ 。

知道了六個軌道根數後，可以計算出任何時刻二體的相對位置和相對速度。反之，如果知道了二體沿二體問題描述的開普勒軌道運行，也知道了系統的總質量，只要測定某個時刻二體的相對位置和相對速度，便何用二體問題的公式推出六個軌道根數。位置和速度都是三維向量，有六個值，正好與軌道根數的數目相同。可以證明如果 $i \neq 0$ 及 $e \neq 0$ ，二體在某一時刻的相對位置和相對速度與五個軌道根數 a 、 e 、 i 、 ω 、 Ω 有一一對應的關係，而 T_0 可以計算到某一特定數值加上 P 的整數倍。所以只要二體的運行遵從二體問題所描述的軌道，所用參考架的座標軸相對於系統的質心固定，用任何時刻二體的相對位置和相對速度都可求得相同的六個軌道根數(T_0 的值可以相差 P 的整數倍)。當二體的軌道受到重力攝動時，仍可以用相同的公式來計算軌道根數，但是算出的軌道根數會隨時間而變，這稱為「叻切軌道根數」，其意義是假如重力攝動突然在這時消失，二體便會沿以叻切軌道根數所描述的開普勒軌道運行。

月球軌道的叻切半長徑 a 和偏心率 e 可從月球的地心位置 \mathbf{X} 和速度 \mathbf{V} 輕易計算。從牛頓力學二體問題的動力學方程可得以下公式：

$$\epsilon = -\frac{GM}{2a} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R} \Rightarrow a = \left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{GM} \right)^{-1}, \quad (59)$$

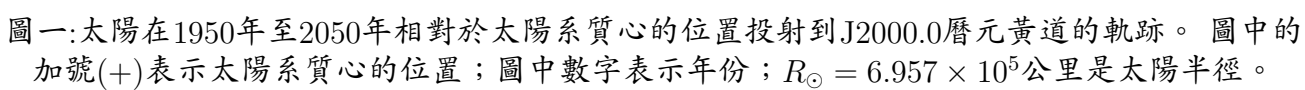
其中 ϵ 是軌道總能量除以折合質量、 $R = |\mathbf{X}|$ 、 $V = |\mathbf{V}|$ 。這公式也可以從天體力學的活力公式(vis-viva equation)直接推出。對於地月系統，用[Folkner et al 2014]表八數據可得 $GM = GM_{\text{地球}} + GM_{\text{月球}} = 8.997011390199871 \times 10^{-10}$ 天文單位³/日²。叻切軌道偏心率可用以下公式計算：

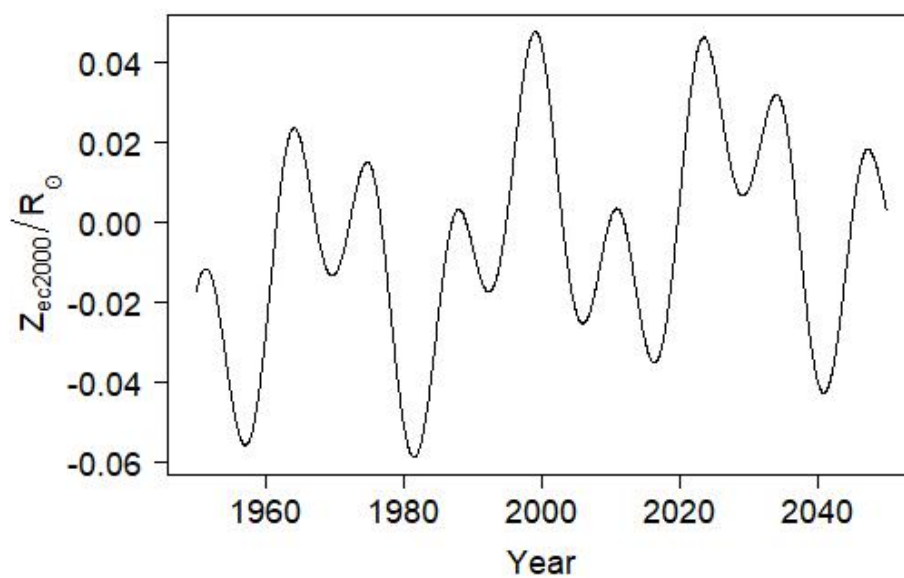
$$e = \sqrt{1 + \frac{\epsilon h^2}{(GM)^2}}, \quad (60)$$

式中 ϵ 和 h^2 可用以下公式計算：

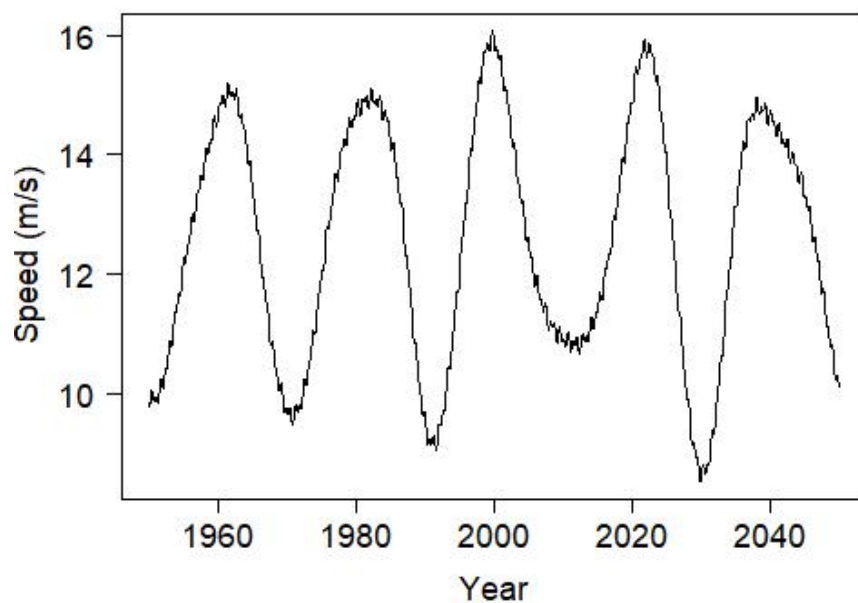
$$\epsilon = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R}, \quad h^2 = |\mathbf{X} \times \mathbf{V}|^2 = R^2V^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{V})^2. \quad (61)$$

圖六和圖七展示用DE431曆表計算出的月球軌道叻切半長徑和偏心率在2018年至2020年的變化。數據顯示在1600年至3500年間半長徑的變化只有2%，但是偏心率可在0.0256和0.0775之間變動，平均值是0.056。偏心率的最大值是最小值的三倍，難怪徑向速率的最大值是估算值的1.5倍。不過這偏差並不影響第五節的結論：在計算 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{apparent}}$ 時略去了 $1/(1 + v_r/c)$ 項對 $\dot{\lambda}_M$ 的計算誤差仍是微不足道。

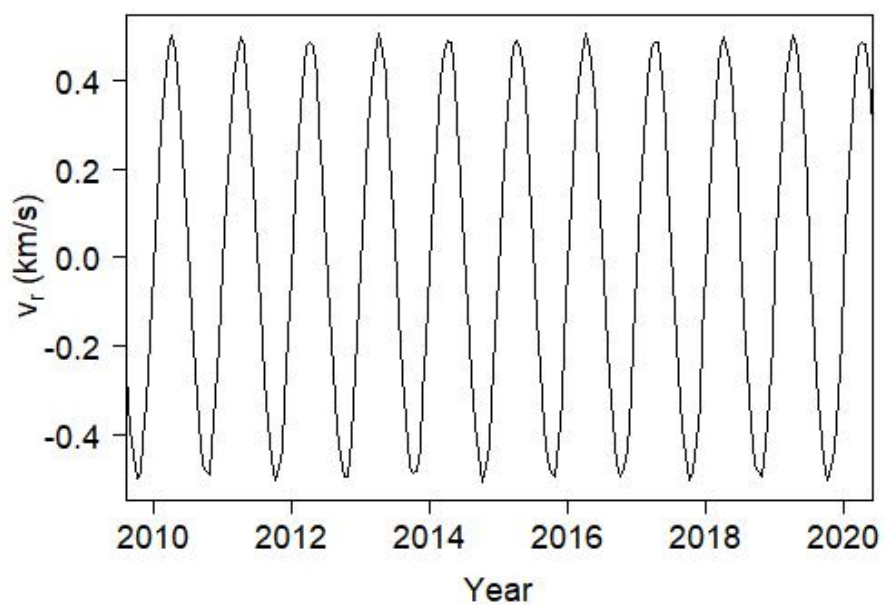




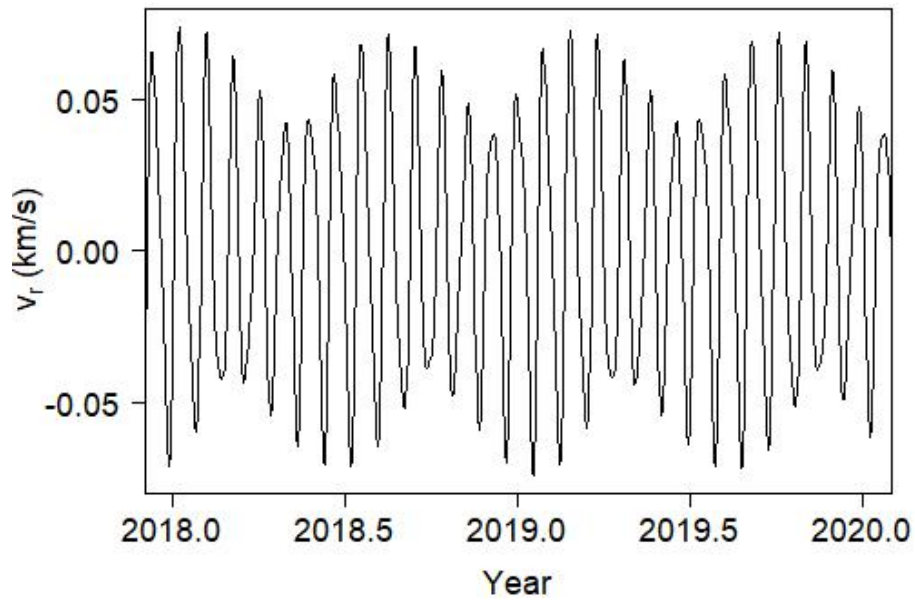
圖二:太陽相對於J2000.0曆元黃道的垂直位置。年份Year用以下公式計算: $\text{Year} = 2000 + (\text{JD} - 2451544.5)/365.25$ ，式中JD是TDB對應的儒略日數。



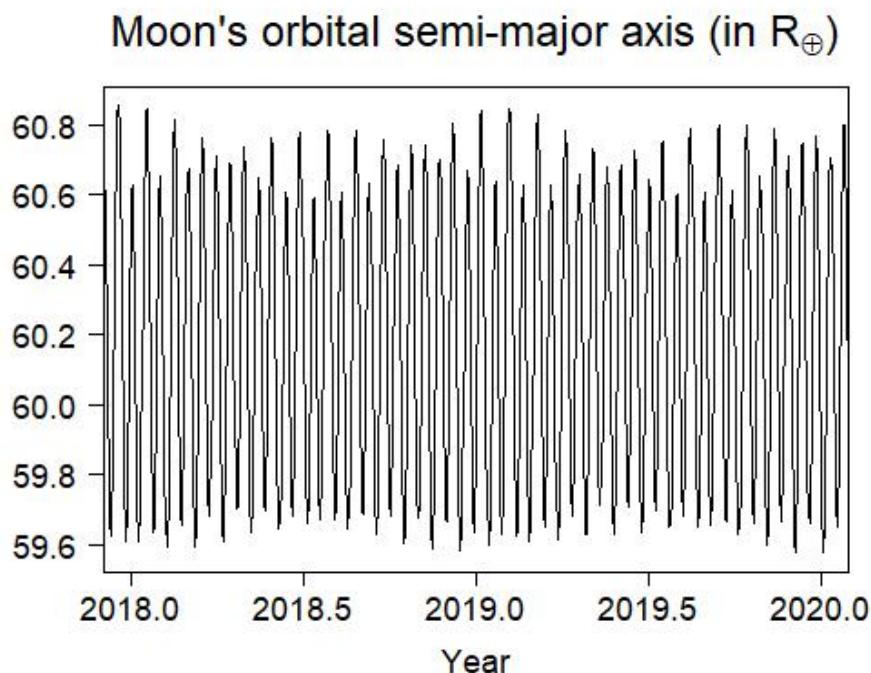
圖三:太陽相對於太陽系質心的運行速率。



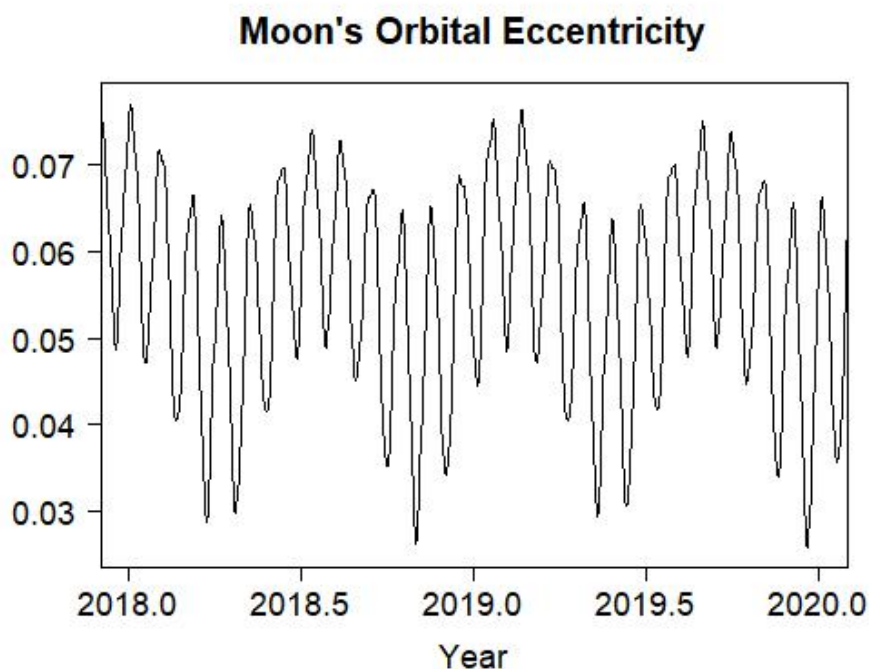
圖四:太陽相對於地球的徑向速度。



圖五:月球相對於地球的徑向速度。



圖六:月球的軌道半長徑，這裡 $R_{\oplus} = 6371$ 公里是地球半徑。



圖七:月球的軌道偏心率。

C 狹意相對論的光行差

這裡推導狹意相對論的光行差公式(34)。

設 \mathbf{p} 為光子相對於某觀測者的三維動量向量， \mathbf{p}' 為此光子相對於第二觀測者的三維動量向量。設 \mathbf{v} 為第二觀測者相對於第一觀測者的移動速度，又設 $p = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = E/c$ 為光子相

對於第一觀者的能量/光速， $p' = \sqrt{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'} = E'/c$ 爲此光子相對於第二觀者的能量/光速。則 $\mathbf{n} = -\mathbf{p}/p$ 爲第一觀測者觀測到光子射入方向的單位向量， $\mathbf{n}' = -\mathbf{p}'/p'$ 爲第二觀測者觀測到此光子射入方向的單位向量，設 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c = \beta \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 。建立座標系使 x 軸方向與 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 平行，根據洛倫茲變換，

$$\begin{pmatrix} p' \\ p'_x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p_x \end{pmatrix}, \quad (62)$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 、 $p_x = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{p}$ 、 $p'_x = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{p}'$ 。從 p' 公式推出

$$p' = \gamma(p - \beta p_x) \Rightarrow \frac{p'}{p} = \gamma(1 - \beta p_x/p) = \gamma(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}). \quad (63)$$

從 p'_x 公式推出

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta p) = -\gamma p(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}} + \beta). \quad (64)$$

\mathbf{p}' 垂直於 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量不變，因此有

$$\mathbf{p}'_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -p[\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}]. \quad (65)$$

由此得

$$\mathbf{p}' = p'_x \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{p}'_{\perp} \quad (66)$$

$$-p'\mathbf{n}' = -\gamma p[(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \beta] - p[\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}] \quad (67)$$

$$\mathbf{n}' = \frac{p}{p'}[\mathbf{n} + \gamma\boldsymbol{\beta} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}]. \quad (68)$$

將(63)代入上式得

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (1 - \gamma^{-1})(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}. \quad (69)$$

由於 $1 - \gamma^{-1} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \beta^2/(1 + \sqrt{1-\beta^2})$ ，上式可寫成

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/(1 + \gamma^{-1})}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}. \quad (70)$$

這就是(34)式，也是[Urban & Seidelmann 2013]的(7.40)，只是[Urban & Seidelmann 2013]所用的符號和此處不同，那裡的 \mathbf{p}_1 相當於這裡的 \mathbf{n}' ，那裡的 \mathbf{p} 相當於這裡的 \mathbf{n} ，那裡的 β 相當於這裡的 γ ，那裡的 \mathbf{V} 相當於這裡的 \mathbf{v} 。