LABORATORIO 1

Instrumentos de medición, incertidumbre, precisión y cifras significativas

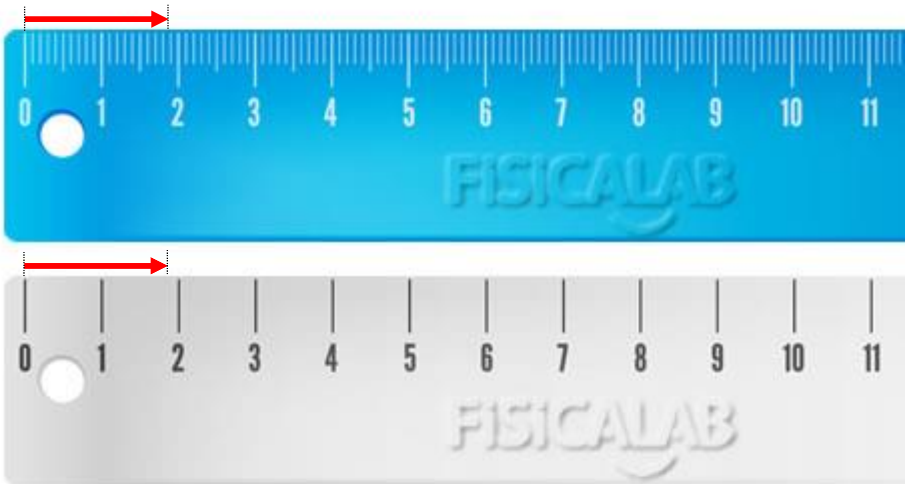
1. OBJETIVOS

- Escribir una medición usando los instrumentos analógicos y digitales.
- Determinar el error en una medición y escribir con el número correcto de cifras significativas.

2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

En la vida diaria cada persona entra en contacto con objetos cuya única finalidad es dar el valor instantáneo de algún parámetro en especial, **eso es medir**. Cuando medimos usando un instrumento hay una aproximación de un valor, pues ninguna medida es **exacta**, pero si podemos tener medidas más o menos precisas. La precisión de la medida depende de la precisión del instrumento, por ejemplo, hay reglas cuya **mínima unidad de medida** (o precisión) es 1 cm y otras cuya **mínima unidad de medida** (o precisión) es 1 mm, está me dará un valor más preciso que la primera. En ambas medidas estamos aproximando. Si quiero medir el tamaño de la flecha usando ambos instrumentos, de alguna manera tengo que indicar que he medido con un instrumento de alta o baja precisión.

Midamos el tamaño de la flecha, ver figura:

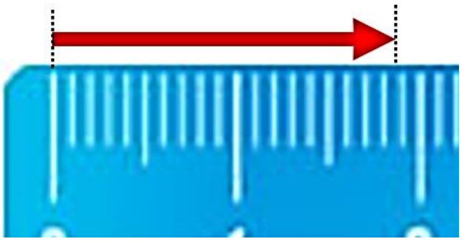


https://www.fisicalab.com/apartado/medidas

En el primer caso, en la regla cuya precisión es 1 mm, la flecha termina entre 1, 80 cm y 1,90 cm, de eso estamos seguros, y en el caso de la regla cuya precisión es 1 cm, sabemos que está entre 1,0 cm y 2,0 cm.

Al medir usando la regla de:

a) Precisión 1 mm, algunos darán valores como: 1,88 cm otros 1,87 cm, 1,85 cm y otros 1,89 cm.
b) Precisión 1 cm, algunos darán valores como: 1,9 cm, 1,8 cm y 1,7 cm.



En ambos casos vemos que hay cifras (las de color verde que no cambian según quien mida, y eso depende de la precisión del instrumento, por ejemplo, en el caso a) es preciso hasta el primer decimal (al milímetro) y como al medir aproximamos la cifra roja es la aproximada.

Igualmente en el caso b) la cifra verde son las cifras precisas (al centímetro) y la roja, la aproximada.

Este instrumento de medición tiene divisiones con rayitas, hay varios instrumentos que tienen esa forma, a esos se les llama instrumentos analógicos.

Aquellos instrumentos que te dan un valor directamente, como un cronómetro son instrumentos digitales.

Ejemplo el velocímetro: el clásico de un auto es analógico, y el que se ve se a la derecha es digital, ver figura.

I. **<u>Incertidumbre de lectura:</u>**

Si las medidas son aproximadas, cómo se debe escribir una medida según el instrumento que usamos. Todos los instrumentos indican en que unidades mide, entonces al expresar se debe expresar en esas unidades. En el ejemplo de las reglas, si observan su regla dice en un extremo cm, centímetro, en esas unidades expresaremos las medidas.

A. Medidores analógicos: La medida tendrá un margen de error y ese error está asociada a su precisión, **el error o la incertidumbre de lectura es la mitad de la precisión y aproximado a una 1 cifra**, si en caso la precisión fuese 0,5 cm, la incertidumbre de lectura será 0,25 cm=0,3 cm, ejemplos:

a) Si la precisión es 1mm=0,1 cm, la incertidumbre de lectura es la mitad de la precisión, es decir 0,5 mm,

$$\underbrace{1,8}_{\text{Cifras precisas O exactas}}\underbrace{9}_{\text{Cifra inexacta, aproximada o dudosa}}cm \pm \underbrace{0,05cm}_{\text{Incertidumbre de lectura.}}$$

b) Si la precisión es 1 cm, la incertidumbre de lectura es la mitad de la precisión, es decir 0,5 cm.

$$\underbrace{1,}_{\text{Cifras precisas O exactas}}\underbrace{8}_{\text{Cifra inexacta, aproximada o dudosa}}\,cm \underbrace{\pm 0,5\,cm}_{\text{Incertidumbre de lectura.}}$$

El error al medir se representa a través de la incertidumbre de lectura, que depende de la precisión del instrumento. En la medida de un instrumento debe haber cifras precisas o exactas y una aproximada, todas esas son cifras significativas pues significan precisión y la aproximación en la medida. Observar que la cantidad de decimales de la medida y de la incertidumbre de lectura deben ser iguales.
La cantidad de decimales indica precisión, por eso hay una diferencia entre escribir 2,00 cm y 2, 0 cm. En la primera hay dos decimales, eso implica que para la primera medida se utilizó un instrumento de mayor precisión. En este ejemplo es importante recalcar que los ceros a la derecha si son importantes pues indican precisión.

B. Medidores digitales: La medida tendrá un margen de error y ese error está asociada a su precisión. La precisión de un instrumento digital al igual que el de un instrumento analógico es su mínima unidad de medida. Por ejemplo: si tenemos un cronometro digital (imagen de la izquierda) vs el reloj del celular (figura de la derecha), ver figura.

En el primero la precisión 1 s y en el segundo la precisión es 1 min. Cuando tenemos instrumentos digitales al momento de medir no aproximamos solo colocamos el valor que se muestra, pero **el error o incertidumbre en la lectura en el caso de este tipo de instrumentos es su precisión**.
Entonces si queremos escribir las medidas mostradas en las figuras, serían:
07 h 05 min 08 s ± 00 h 00 min 01 s y 09 h 45 min ± 00 h 01 min.

II. **Propagación de errores:**

A veces la magnitud que medimos es la que necesitamos directamente, pero a veces la necesitamos para determinar otra magnitud física por ejemplo, medimos la masa y queremos hallar el peso, error se propaga debido a que lo que queremos no es una medida directa, la pregunta es cómo se propaga este error cuando hacemos cálculos con medidas directas. Es importante distinguir

Si las medidas directas son: $A \pm \Delta A_L$, $B \pm \Delta B_L$ y $C \pm \Delta C_L$ medidas una sola vez, el error de propagación va a depender netamente de la operación que se haga con ellas. El subíndice L significa que es la incertidumbre de lectura.

Pero si la medida de A, B y C, se hizo varias veces tenemos que hallar su incertidumbre de fluctuaciones, que es el error en la toma de datos.

A ± ΔA (cm)	B ± ΔB (cm)
13, 87 ± 0,05	30,2 ± 0,5
13, 88 ± 0,05	30,3 ± 0,5
13, 89 ± 0,05	30,3 ± 0,5
13, 88 ± 0,05	30,1 ± 0,5

Ejemplo: se mide A y B cuatro veces cada una con el mismo instrumento. Entonces tendremos dos errores o incertidumbres de lectura, debido al instrumento que usamos para medir por ejemplo en A es 0,05 cm y en B es 0,5 cm, pero también tendremos otro error o incertidumbre de fluctuaciones que es el asociado al que cada vez que se mide no anotamos el mismo valor necesariamente, pues según las condiciones externas, temperatura por ejemplo, que pude hacer que se dilate la regla o el objeto a medir, o simplemente por el mismo proceso de medición, la forma de medir. Entonces como expresar el valor de A o B cuando se hagan muchas mediciones, A será el promedio y lo denotaremos $\overline{A}$ y hay un error estadístico $\Delta\overline{A}$, que se calcula:

$\overline{A} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$ A1, A2, A3 y A4 son las medidas de A usando el mismo instrumento.

Para hallar el error estadístico $\sigma_{\overline{A}}$ primero hallamos la desviación estándar, está $\sigma_{\overline{A}} = \sqrt{\dfrac{\sum_i^N (A_i - \overline{A})^2}{N-1}}$ y donde N es el número de medidas, y la incertidumbre estándar es: $\Delta\overline{A} = \dfrac{\sigma_{\overline{A}}}{\sqrt{N}}$, donde N sigue siendo el número de datos.

Calculemos para A.

$$\overline{A} = \frac{13{,}87 + 13{,}88 + 13{,}89 + 13{,}88}{4} = 13{,}88cm$$

$$\sigma_{\overline{A}} = \sqrt{\frac{(13{,}87 - 13{,}88)^2 + (13{,}88 - 13{,}88)^2 + (13{,}89 - 13{,}88)^2 + (13{,}88 - 13{,}88)^2}{4-1}} =$$

$$\sigma_{\overline{A}} = \sqrt{\frac{(-0{,}01)^2 + (0)^2 + (0{,}01)^2 + (0)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2(0{,}01^2)}{2}} = 0{,}008164965\ ...cm$$

$$\sigma_{\overline{A}} = 0{,}008\ cm$$

$$\Delta\overline{A} = \frac{0{,}008}{\sqrt{4}} = 0{,}004cm$$

Entonces la medida de A tiene dos incertidumbres la de lectura (instrumento) y la estándar (la estadística), entonces su **incertidumbre total o absoluta** es: $\Delta A_T = \sqrt{\Delta A_L{}^2 + \Delta\overline{A}^2}$, entonces finalmente A es escribe: $\overline{A} \pm \Delta A_T$.

$$\Delta A_T = \sqrt{\Delta A_L{}^2 + \Delta \overline{A}^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}004^2} = 0{,}05cm$$

$\overline{A} \pm \Delta A_T = 13{,}88\,cm \pm 0{,}05\,cm$, observar que dede tener el mismo número de decimales. **TAREA, hacer los cálculos para B.**

Dependiendo de las operaciones que se realice se propaga el error, considerando que se midió una vez cada magnitud, las reglas de propagación por operar es:

a) <u>Suma y resta de medidas:</u>

Como se suman o restan magnitudes del mismo tipo que han sido medidas con diferentes instrumentos de medición, por tanto no tienen el mismo número de decimales, y la incertidumbre se calcula:

$D = A + B$	$E = A - B$
$\Delta D = \sqrt{\Delta A_T{}^2 + \Delta B_T{}^2}$	$\Delta E = \sqrt{\Delta A_T{}^2 + \Delta B_T{}^2}$
$D \pm \Delta D_T$	$E \pm \Delta E_T$

Por ejemplo: si los lados de un rectángulo son A= 13, 25 cm ± 0,05 cm y B=30,1 ± 0,5 cm, y queremos hallar el perímetro L, se debe escribir el perímetro con el número de decimales del dato menos preciso, la suma en la calculadora es 33,35 cm pero como la menor medida tiene un decimal debemos escribir la medida aproximando a un decimal, el error sería:

$$\Delta A_T = \sqrt{\Delta A_L^2 + \underbrace{\Delta \overline{A}^2}_{0}} = 0{,}05\,cm \quad \Delta B_T = \sqrt{\Delta B_L^2 + \underbrace{\Delta \overline{B}^2}_{0}} = 0{,}5\,cm$$

Las incertidumbres estándar son cero pues solo se hizo **una medida** de A y de B.

$$\Delta L = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5424 = 0{,}5\,cm.$$

Entonces la medida del perímetro es: 33,4 cm± 0,5 cm.

b) **<u>Multiplicación, división:</u>**

Si queremos hallar el área solo haciendo una medición de los datos, por ejemplo haber medido el largo y el ancho, se calcula:

Multplicación:

$$F = A\,B$$

$$\frac{\Delta F^2}{F^2} = \frac{\Delta A_T^2}{A^2} + \frac{\Delta B_T^2}{B^2} \rightarrow \Delta F = F\sqrt{\frac{\Delta A_T^2}{A^2} + \frac{\Delta B_T^2}{B^2}}$$

$$F \pm \Delta F$$

División:

$$G = A / B$$

$$\frac{\Delta G^2}{G^2} = \frac{\Delta A_T^2}{A^2} + \frac{\Delta B_T^2}{B^2} \rightarrow \Delta G = G\sqrt{\frac{\Delta A_T^2}{A^2} + \frac{\Delta B_T^2}{B^2}}$$

$$G \pm \Delta G$$

Ejemplo:

Queremos hallar el área del rectángulo:

$$F = (13{,}25)(30{,}1) = 398{,}825\,cm^2$$

$$\Delta F = 398{,}825cm^2\sqrt{\frac{(0{,}05cm)^2}{(13{,}25cm)^2}+\frac{(0{,}5cm)^2}{(30{,}1cm)^2}} = 6{,}7937cm^2$$

$$F \pm \Delta F = 398{,}825\,cm^2 \pm 6{,}7937cm^2$$

¿Cómo expresar F correctamente? Al multiplicar y dividir dos magnitudes, se debe contar el número de cifras significativas (c.s), por ejemplo si tengo 0,567 cm, este valor tiene solo 3 c.s, pues los ceros a la izquierda no significan nada, pero los ceros a la derecha como en esta medida: 2,500 cm indican precisión, entonces tiene 4 c.s.
Entonces, tenemos los valores 13,25 cm tiene 4 c.s. y la medida 30,1 cm tiene 3 c.s., entre las c.s. de los dos valores, el resultado debe de tener el mínimo valor de c.s. , en este caso 3 c.s. Como F sale del producto de ellas debe tener 3 c.s. y eso condiciona al número de decimales de F: $F \pm \Delta F = 399\,cm^2 \pm 7cm^2$, se debe aproximar 398,925=399 cm^2 y si no tiene decimales, el error tampoco por eso 6,7937=7 cm^2.

c) **<u>Multiplicación por una constante:</u>** Si se quiere hallar H, el número de cifras sifnificativas de H es igual al número de cifras de A:

$$H = \overbrace{k}^{cte} A \quad \rightarrow \quad \Delta H = \overbrace{k}^{cte} \Delta A_T$$

Ejemplo:

$$m \pm \Delta m = 37{,}5\,kg \pm 0{,}5\,kg$$

$$W \pm \Delta W = \overbrace{g}^{10}(37{,}5\,kg \pm 0{,}5\,kg) = 375\,N \pm 5\,N$$

Tarea: Halle el perímetro de una circunferencia de R=20,0 m ± 0,1 m.

d) **<u>Potenciación:</u>** Si se quiere hallar F, el número de cifras significativas de F es igual al número de cifras de A:

$$F = A^n$$

$$\frac{\Delta F}{F} = n\frac{\Delta A_T}{A} \rightarrow \quad \Delta F = n\frac{\Delta A_T}{A}F$$

Ejemplo: El volumen de un cubo de lado L=13, 25 cm ±0,05 cm.

$$F = 13{,}25^3 = 2326{,}20312\,cm^3$$

$$\Delta F = 3\left(\frac{0{,}05}{13{,}25}\right)2326{,}20312 = 26{,}334375cm^3$$

¿Cómo expresar finalmente F?
El lado L tiene 4 c.s entonces F=2326,20312=2326 cm^3 y el error se debe acomodar al número de decimales que tenga F, entonces ΔF=26 cm^3.

$$F \pm \Delta F = 2326\,cm^3 \pm 26\,cm^3$$

Ejemplo de aplicación: ¿Cómo se calcularía el error al hallar el volumen de un cilindro?

$$V = \pi R^2 l = \pi RRl \quad R \pm \Delta R_T \quad l \pm \Delta l \quad \pi \pm \overbrace{0}^{por\,ser\,una\,constante}$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2=\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2+\left(\frac{\Delta 0}{\pi}\right)^2=2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2$$

$$\rightarrow \Delta V=\sqrt{2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}\,V$$

III. Incertidumbre relativa o error relativo:

Si buscamos dos métodos experimentales para determinar una magnitud física como por ejemplo: el volumen de objetos:

Método 1, si usamos una probeta con agua, sumergimos el objeto y medimos el cambio de volumen, obtenemos el volumen del objeto sumergido.

Método 2, si usamos una regla y medimos sus dimensiones, luego calculamos.

Cómo saber que método me entrega un resultado más preciso del volumen del objeto, para eso es útil determinar el error o incertidumbre relativa: $\frac{\Delta A_T}{A}$, también se puede expresar de manera porcentual: $\frac{\Delta A_T}{A}\times 100\%$.

Ejemplos:

El volumen de un cubo hallado anteriormente fue:

$$F\pm\Delta F=2326\ cm^3\pm 26\ cm^3$$

Incertidumbre relativa:

$\frac{26\ cm^3}{2326\ cm^3}=0{,}011$, en forma porcentual, 1,1%

IV. <u>Notación científica:</u>

Cuando tenemos operaciones combinadas, la respuesta depende del menor número de c.s. de los **datos medidos**. Ejemplo el valor numérico después de operar es: 345 680 cm^3, los datos tienen 4 c.s. y 5 c.s., se tiene que escribir con 4 c.s, manda el menor número de c.s., entonces podemos escribir F usando notación científica: $3{,}456\times 10^5$ cm^3, pues nos ayuda a escribirlo con el número de c.s. que queremos.
Un número escrito usando notación científica se escribe: $\mathrm{N}\times 10^{\mathrm{n}}$, donde $1\leq N<10$ es un número real y n es un número entero positivo o negativo.

3. ACTIVIDAD EXPERIMENTAL:

El objetivo es que en un experimento pequeño, puedan aplicar estos conceptos. Debe escoger uno de estos dos pequeños experimentos.

A. Medir el tiempo en que se demoran en dar un salto, incluyendo el error, haciendo 5 5 saltos primero y luego haciendo 12 saltos. Comparen resultados. Repita ambos usando un reloj analógico y uno digital.

B. Medir las dimensiones de una habitación, por cada lado hacer 5 medidas. Repita usando un una cinta métrica y descargando una aplicación del celular que mida distancias.