A Belated Proof of Self – Stabilization

Edsger W. Dijkstra

Department Of Computer Sciences, The University Of Texas At Austin

Distributed Computing (1986) 1: 5-6

Consideraciones del algoritmo

- Anillo de al menos 3 maquinas de tres estados.
- Cada maquina esta definida por un privilegio.
- Un privilegio “existe” si el estado de la maquina es “Verdadero”.
- Un movimiento consiste en la observación de la maquina a que su privilegio exista, seguido de un cambio en el estado de la maquina.

Consideraciones

Bottom: B = S_0, Normal: S, Top: T=S_N

Orden de un anillo de N+1 maquinas: {B, .., S_i, .., S_{N-1}, T}

Para cada máquina S_i definimos la siguiente terminología:

- L = Estado de la máquina (i – 1)
- S = Estado de la máquina (i)
- R = Estado de la máquina (i + 1)

Objetivos

Demostrar que independientemente del estado inicial de un sistema y con un numero finito de movimientos:

- La existencia de exactamente 1 privilegio
- En cada sucesión no acotada de movimientos, cada maquina se mueve un número no acotado de veces

Algoritmo para una maquina de 3 estados

Bottom: B = S_0, Normal: S, Top: T=S_N
Estados de cada maquina están caracterizados en {0,1,2}

Bottom:
$(B+1) = R \rightarrow B := B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \vee S + 1 = R \rightarrow S := S + 1$

Top:
$L = B \wedge T \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$

Cadenas y Flechas

$$y = \#\leftarrow + 2\#\rightarrow, \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

Bottom:

De	$B \leftarrow R$	*a*	$B \rightarrow R$	Δy= 1	(0)

Normal:

De	$L \rightarrow S \quad R$	*a*	$L \quad S \rightarrow R$	Δy= 0	(1)
De	$L \quad S \leftarrow R$	*a*	$L \leftarrow S \quad R$	Δy= 0	(2)
De	$L \rightarrow S \leftarrow R$	*a*	$L \quad S \quad R$	Δy= -3	(3)
De	$L \rightarrow S \rightarrow R$	*a*	$L \quad S \leftarrow R$	Δy= -3	(4)
De	$L \leftarrow S \leftarrow R$	*a*	$L \rightarrow S \quad R$	Δy= 0	(5)

Top:

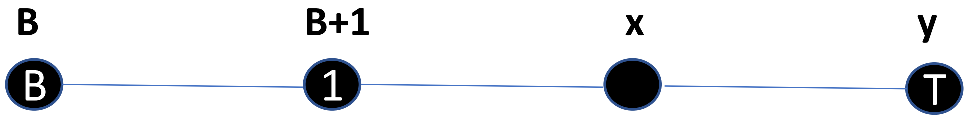
De	$L \rightarrow T$	*a*	$L \leftarrow T$	Δy= 1	(6)
De	$L \quad T$	*a*	$L \leftarrow T$	Δy= 1	(7)

Cadenas y Flechas

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S \coloneqq S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$

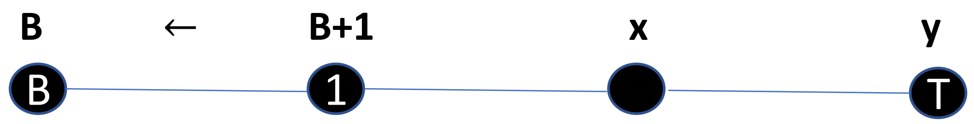


De $B \leftarrow R$ *a* $B \rightarrow R$ $\Delta y = 1$ (0)

Observemos que si “B” cumple su privilegio, se tiene que en la cadena el estado de B es menor por 1, entonces:

- Se asigna una flecha en dirección de B

Cadenas y Flechas



Bottom:

$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L = S+1 \ \vee \ S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L = B \ \wedge \ T \ \neq B+1 \rightarrow T = B+1$

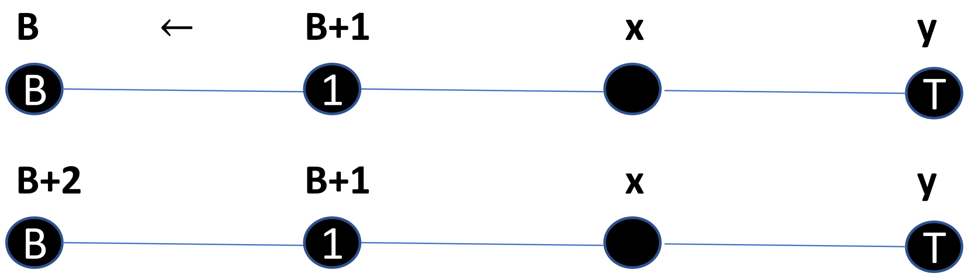
De $\quad B \leftarrow R \qquad$ *a* $\quad B \rightarrow R \qquad \Delta y = 1 \qquad$ (0)

Observemos que si “B” cumple su privilegio entonces se tiene que en la cadena el estado de B es menor por 1, entonces:

- Se asigna una flecha en dirección de la maquina B

Asumamos que B realiza su movimiento

Cadenas y Flechas



Bottom:

$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L = S+1 \ \vee \ S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L = B \ \wedge \ T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$

De $\quad B \leftarrow R \qquad$ *a* $\quad B \rightarrow R \qquad \Delta y = 1 \qquad (0)$

Observemos que si "B" cumple su privilegio entonces se tiene que en la cadena el estado de B es menor por 1, entonces:

- Se asigna una flecha en dirección de la maquina B

Asumamos que B realiza su movimiento.

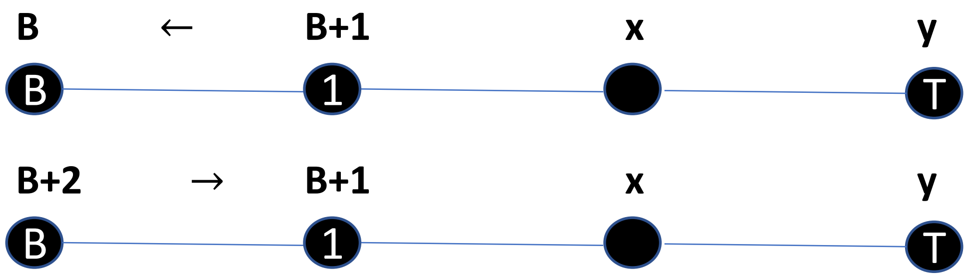
En este caso B ya no cumple su privilegio, pero la maquina 1 lo cumple cuando menos por la izquierda, de esta manera el estado de la maquina 1 es menor por 1 con respecto a la maquina 0

Cadenas y Flechas

Bottom:
$(B+1) = R \rightarrow B := B+2$

Normal:
$L = S+1 \vee S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:
$L = B \wedge T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



De $B \leftarrow R$ *a* $B \rightarrow R$ $\Delta y = 1$ (0)

Observemos que si “B” cumple su privilegio entonces se tiene que en la cadena el estado de B es menor por 1, entonces:

- Se asigna una flecha en dirección de la maquina B

Asumamos que B realiza su movimiento.
En este caso B ya no cumple su privilegio, pero la maquina 1 lo cumple
cuando menos por la izquierda, de esta manera el estado de la maquina 1 es menor por 1 con respecto a la maquina 0

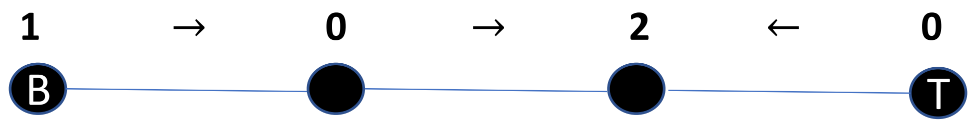
- Se asigna una flecha en dirección de la maquina 1

Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B := B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S := S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



Ejemplo

Bottom:

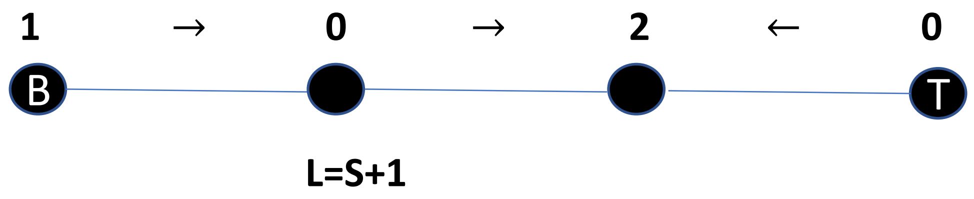
$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L = S+1 \ \vee \ S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L = B \ \wedge \ T \ \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



Ejemplo

Bottom:

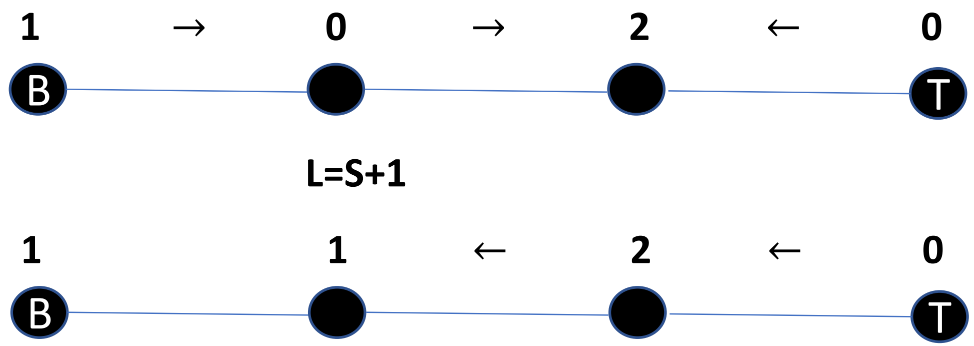
$(B+1)=R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L=S+1 \ \vee \ S+1=R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L=B \ \wedge \ T \neq B+1 \rightarrow T=B+1$

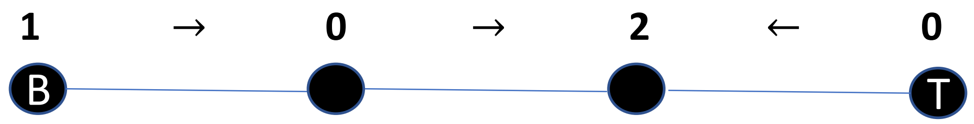


Ejemplo

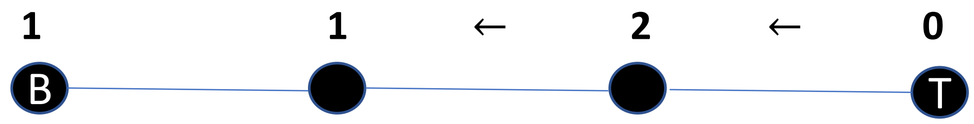
Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B := B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \lor \ S + 1 = R \rightarrow S := S + 1$

Top:
$L = B \ \land \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



L=S+1



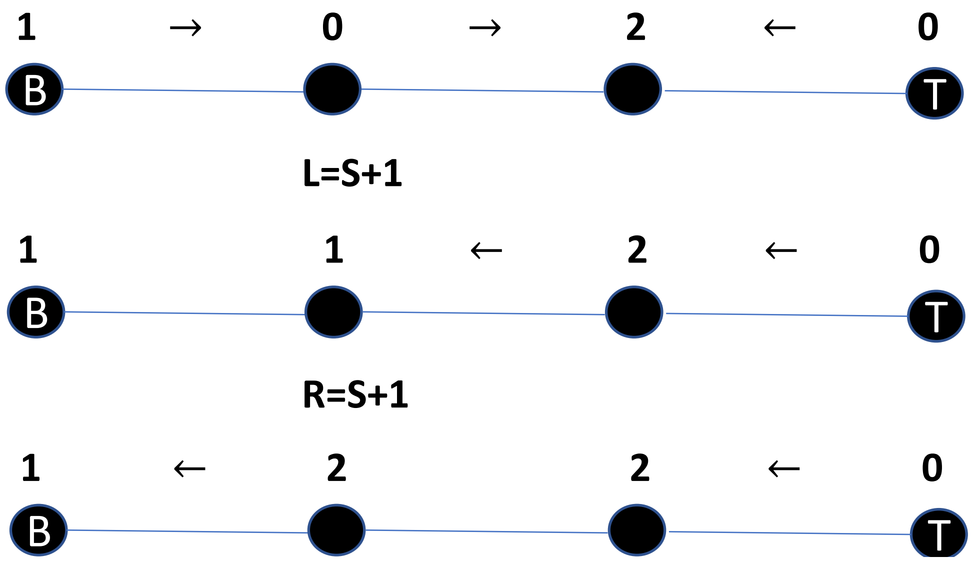
R=S+1

Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S \coloneqq S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



Ejemplo

Bottom:

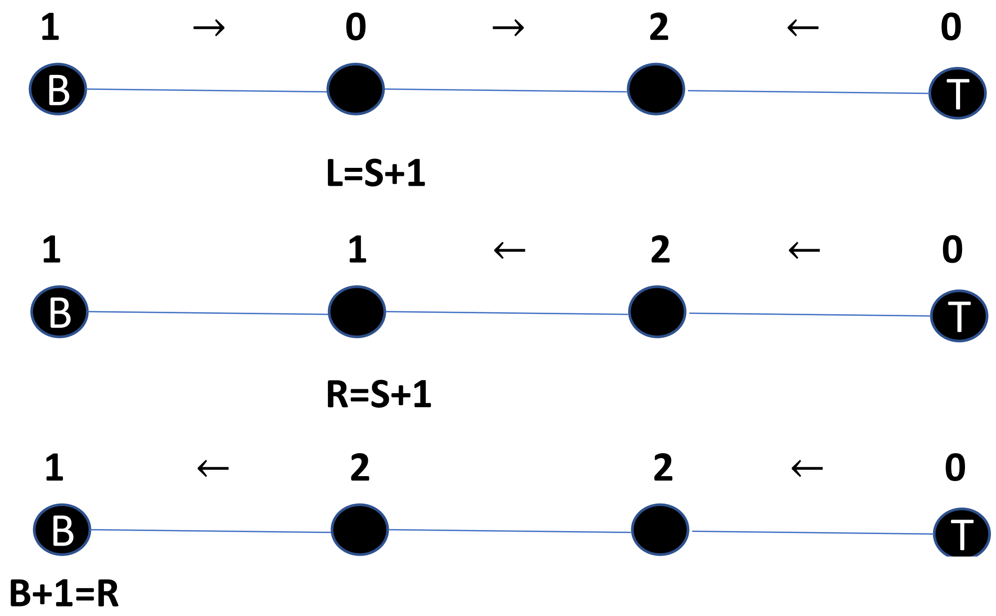
$(B + 1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B + 2$

Normal:

$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S \coloneqq S + 1$

Top:

$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



Ejemplo

Bottom:

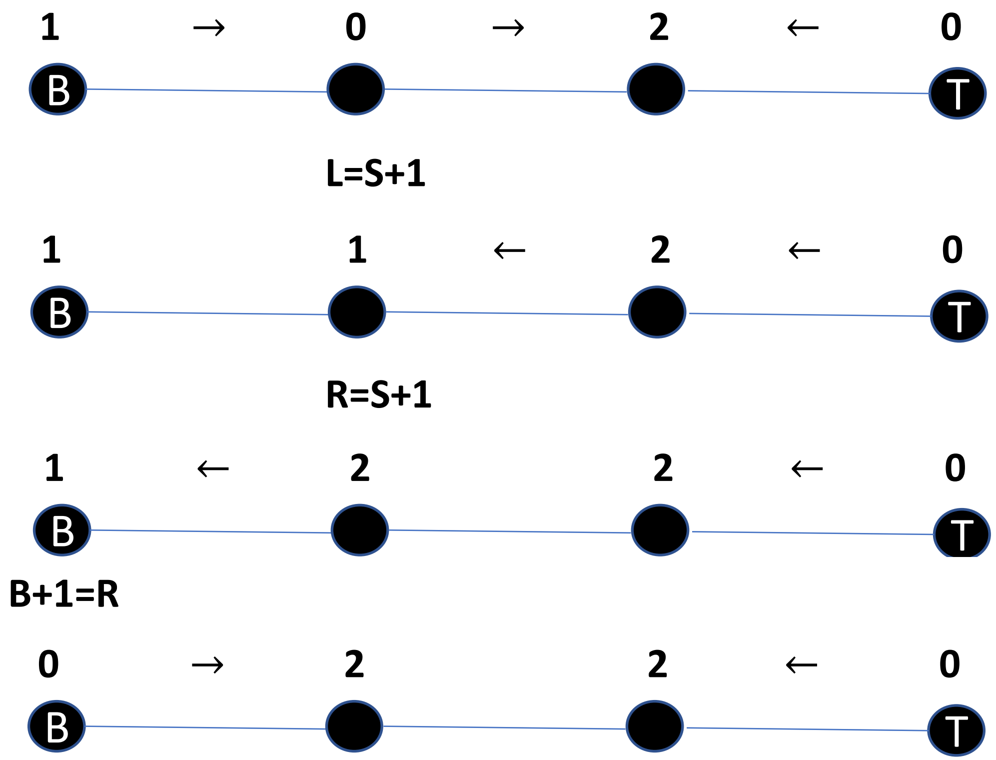
$(B+1) = R \;\rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L = S+1 \;\lor\; S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L = B \;\land\; T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$

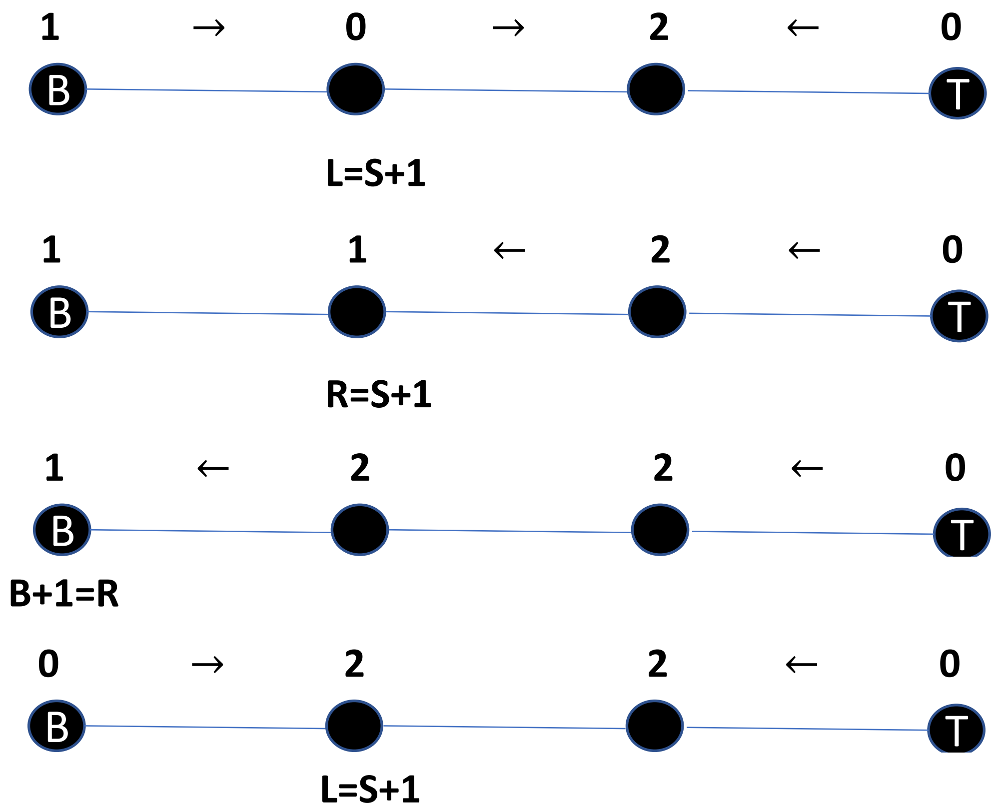


Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S \coloneqq S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$

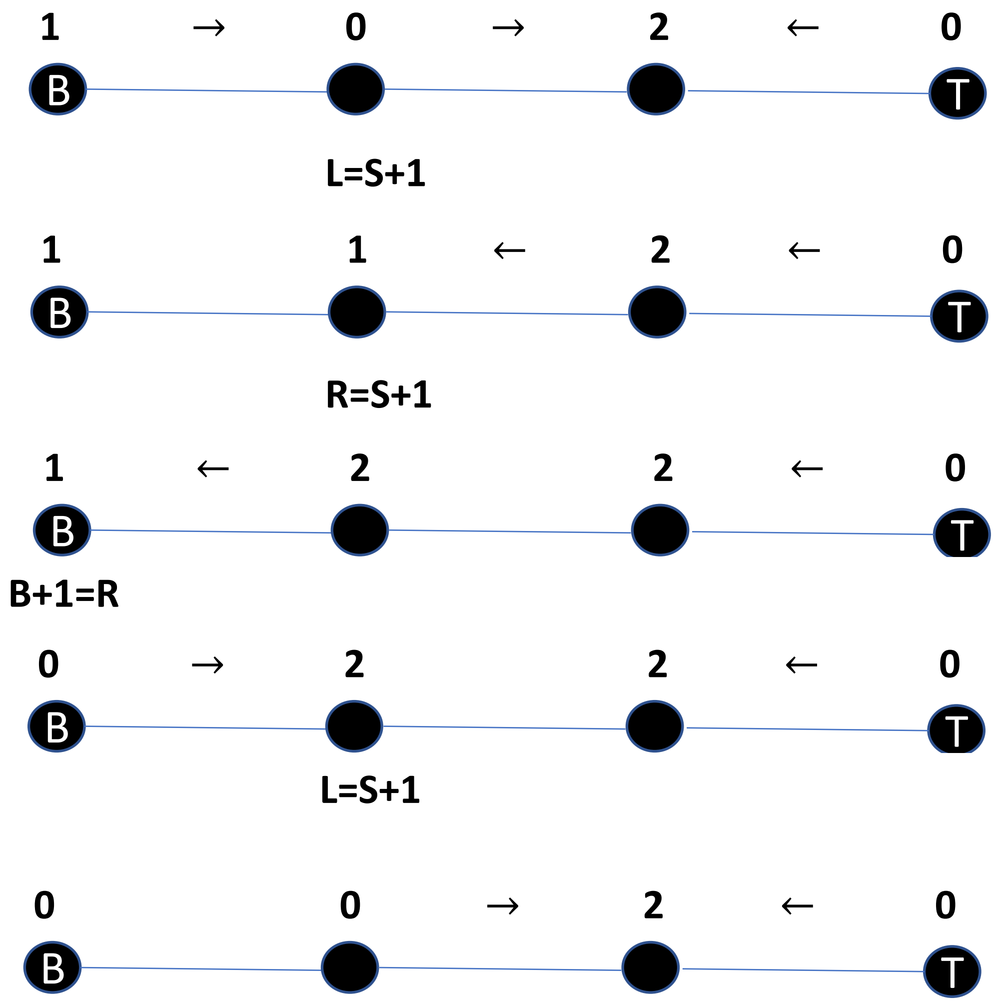


Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \rightarrow B := B+2$

Normal:
$L = S+1 \lor S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:
$L = B \land T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$

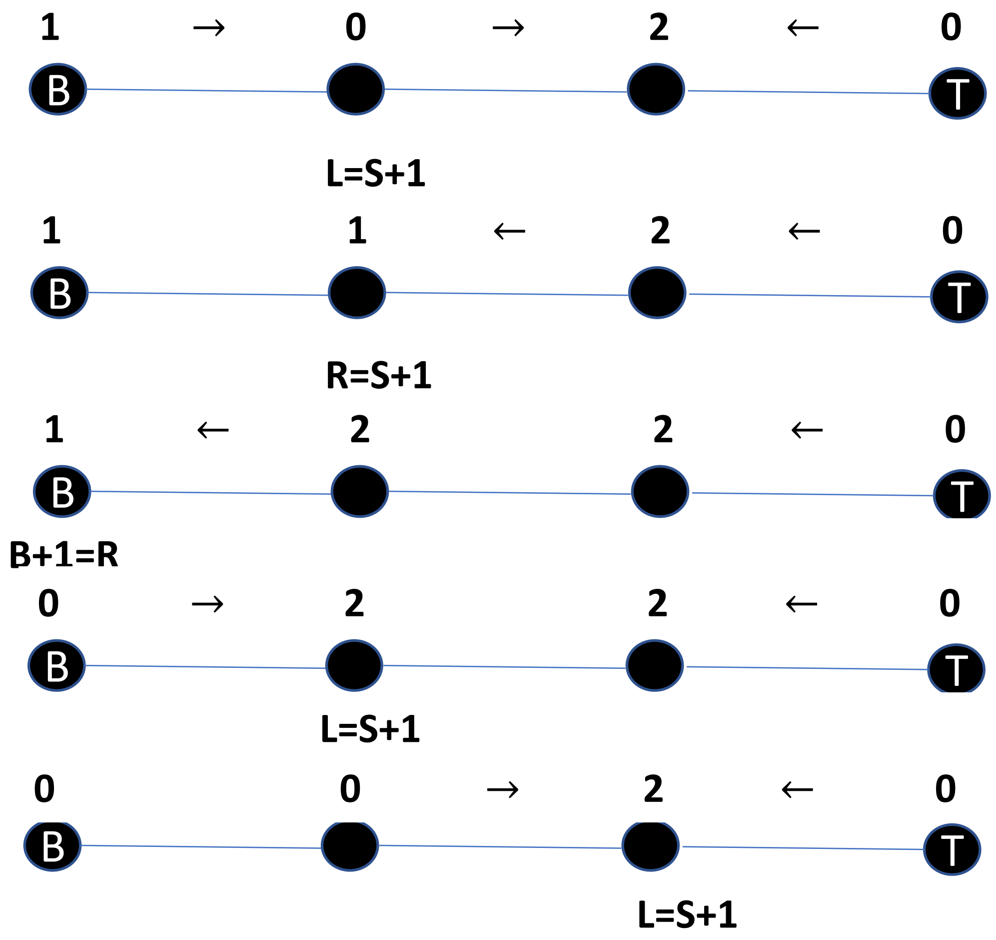


Ejemplo

Bottom:
$(B+1)=R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:
$L=S+1 \ \vee \ S+1=R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:
$L=B \ \wedge \ T \neq B+1 \rightarrow T=B+1$

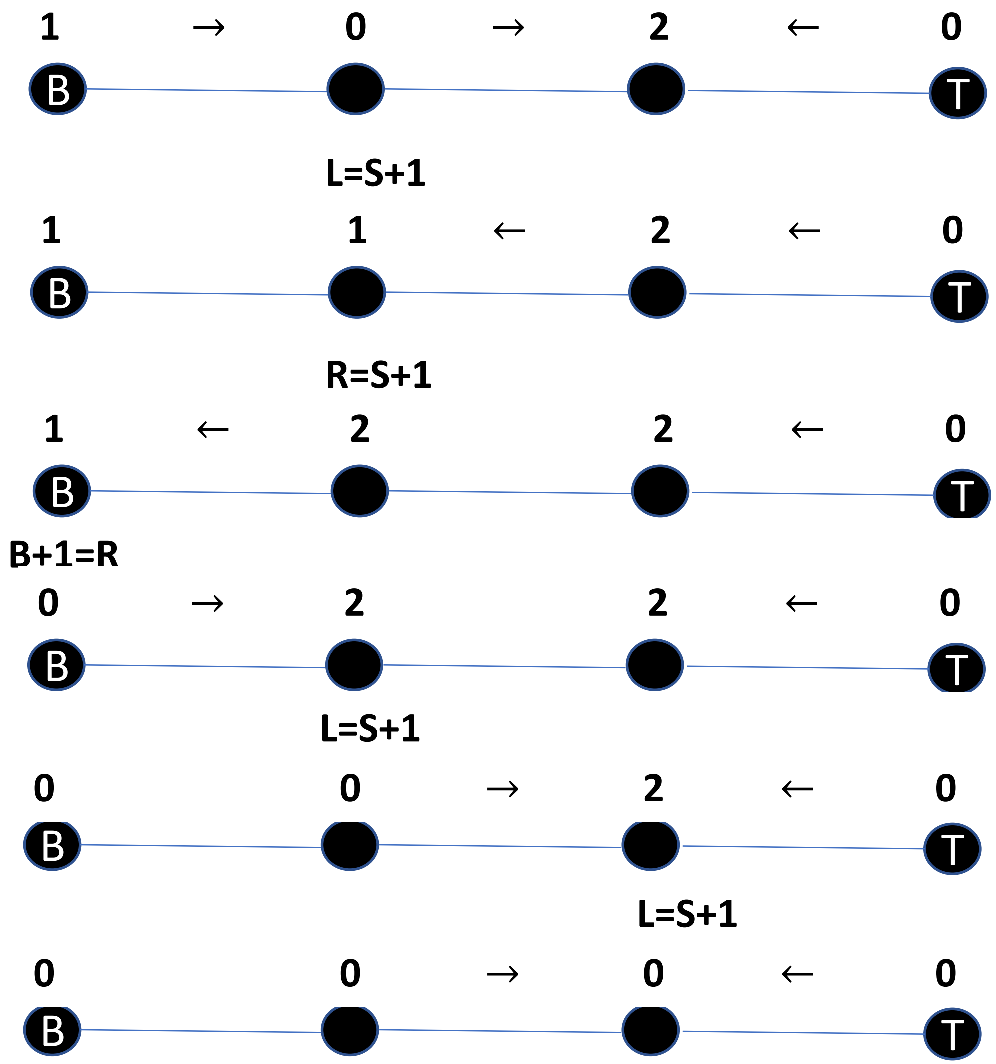


Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:
$L = S+1 \ \lor \ S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:
$L = B \ \land \ T \ \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



Ejemplo

Bottom:

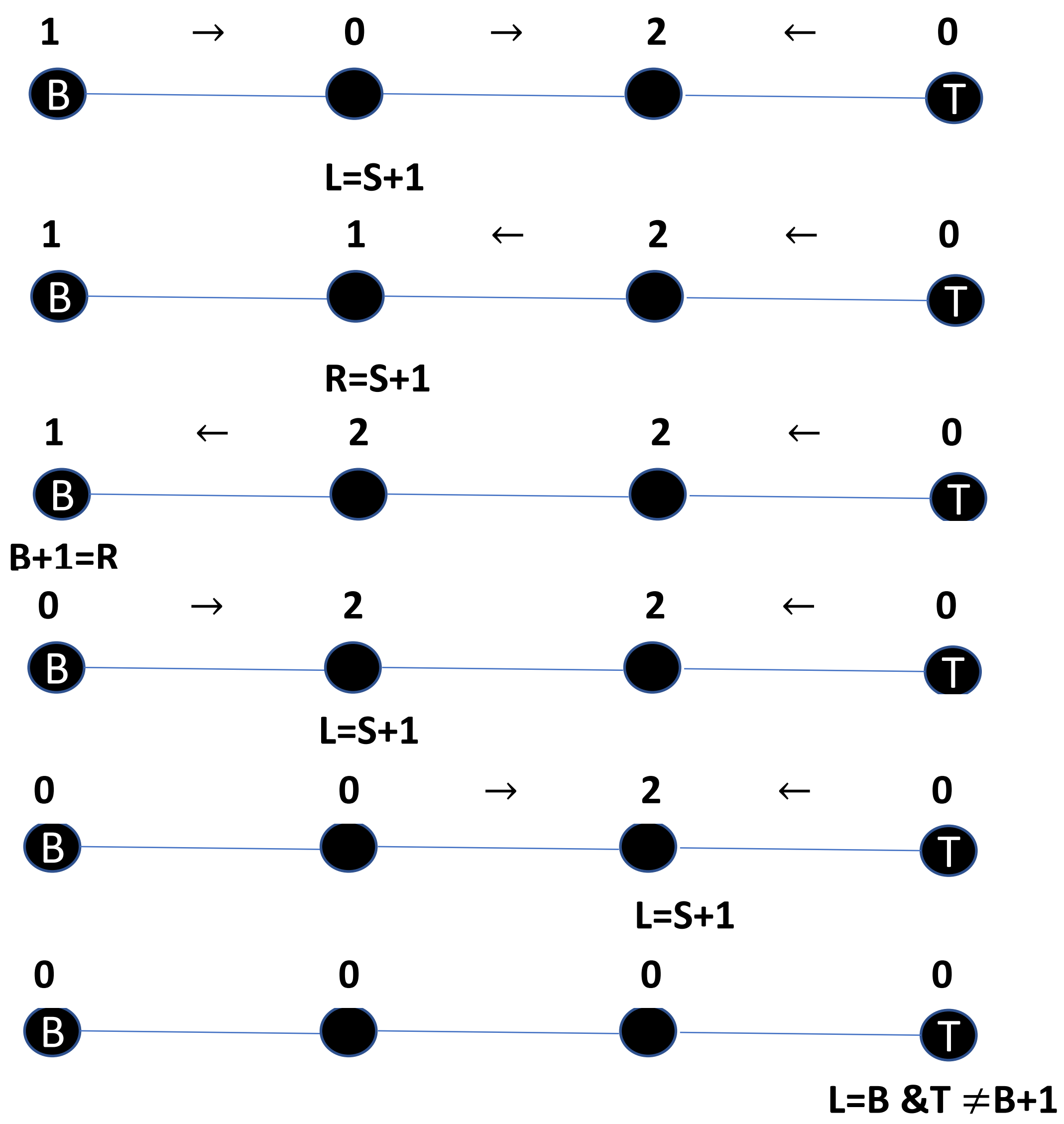
$(B+1) = R \;\rightarrow B \coloneqq B+2$

Normal:

$L = S+1 \;\vee\; S+1 = R \rightarrow S \coloneqq S+1$

Top:

$L = B \;\wedge\; T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



Ejemplo

Bottom:

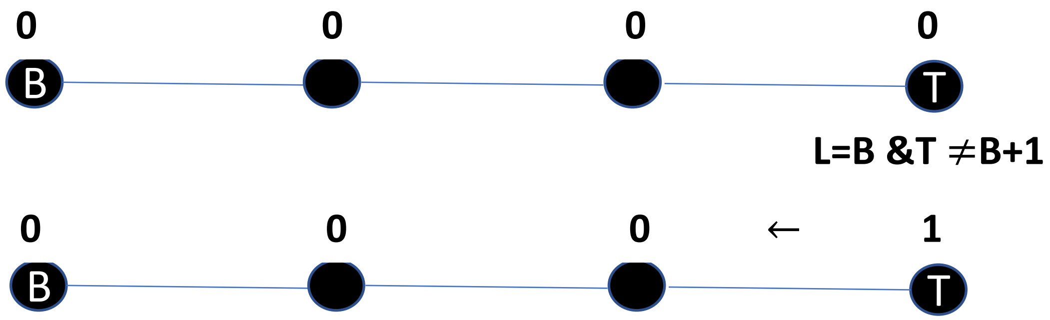
$(B+1) = R \;\rightarrow B := B+2$

Normal:

$L = S+1 \;\vee\; S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:

$L = B \;\wedge\; T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$

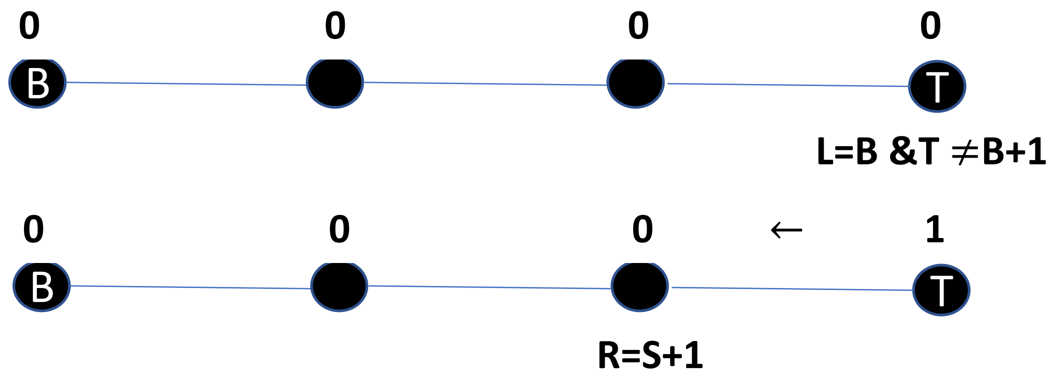


Ejemplo

Bottom:
$(B + 1) = R \ \rightarrow B \coloneqq B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S \coloneqq S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$

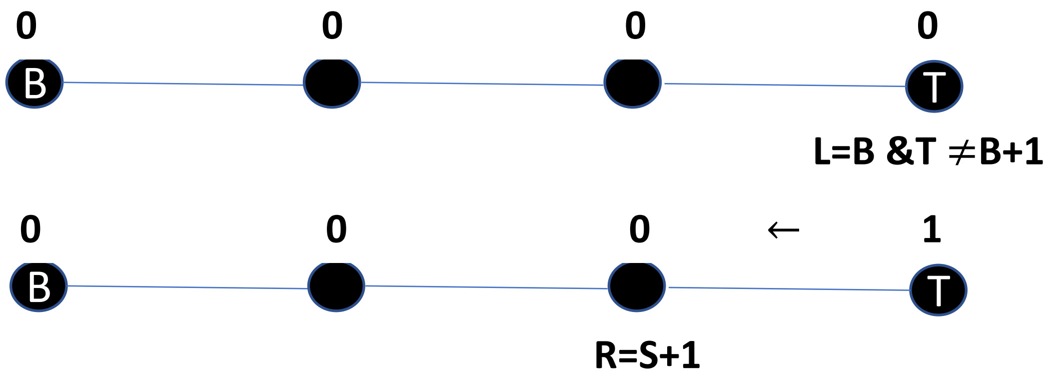


Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \;\rightarrow B := B+2$

Normal:
$L = S+1 \;\vee\; S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:
$L = B \;\wedge\; T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



Si una cadena no contiene flechas entonces:

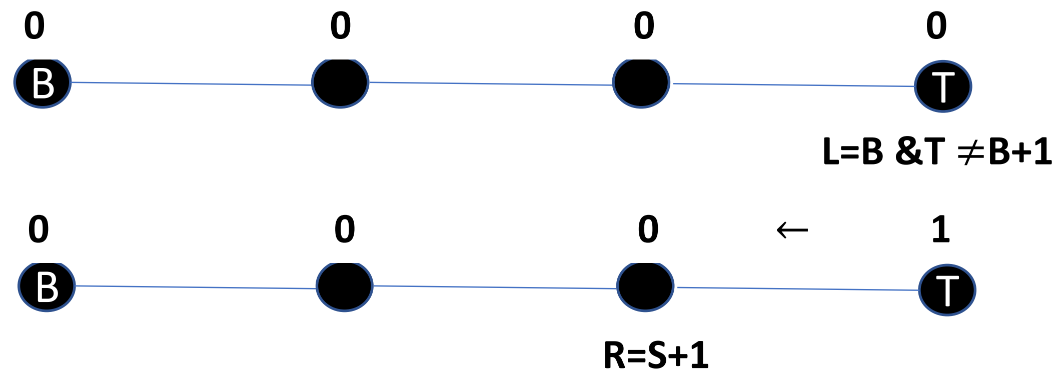
Se cumple el privilegio de T, y la siguiente transformación crea 1 flecha en la cadena

Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B := B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \lor S + 1 = R \rightarrow S := S + 1$

Top:
$L = B \ \land \ T \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



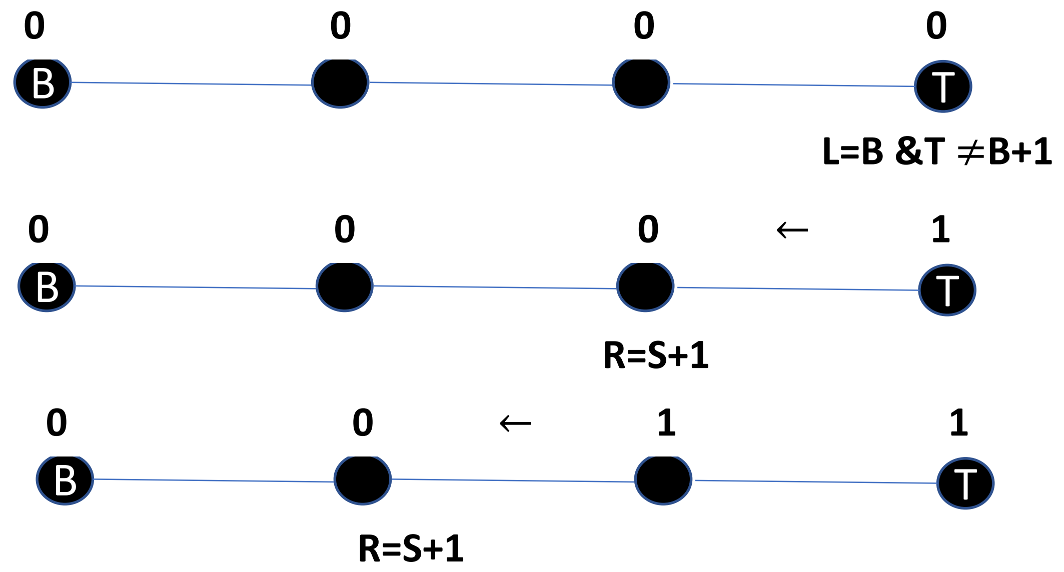
Si una cadena contiene 1 flecha, esta única flecha se moverá de arriba a abajo en la cadena debido a las transformaciones (1) y (2) y se refleja debido a las transformaciones (6) y (0)

Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \;\rightarrow B := B+2$

Normal:
$L = S+1 \;\vee\; S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:
$L = B \;\wedge\; T \neq B+1 \rightarrow T = B+1$



Si una cadena contiene 1 flecha, esta única flecha se moverá de arriba a abajo en la cadena debido a las transformaciones (1) y (2)
y se refleja debido a las transformaciones (6) y (0)

Ejemplo

Bottom:

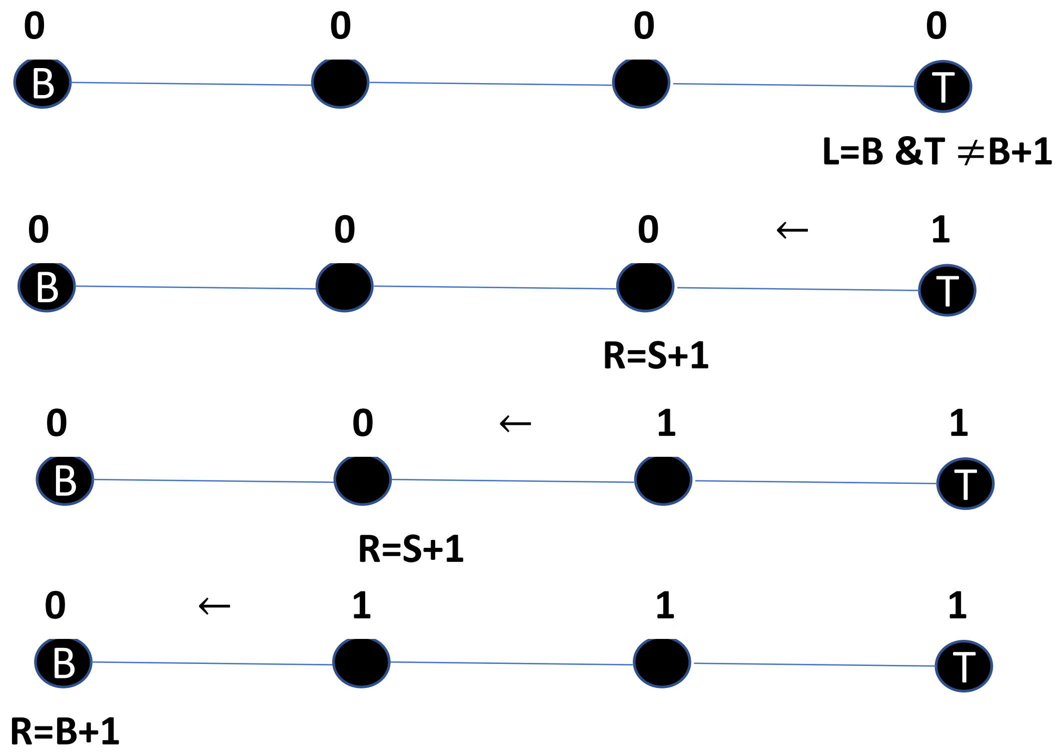
$(B+1) = R \;\rightarrow B := B+2$

Normal:

$L = S+1 \;\vee\; S+1 = R \rightarrow S := S+1$

Top:

$L = B \;\wedge\; T \;\neq B+1 \rightarrow T = B+1$



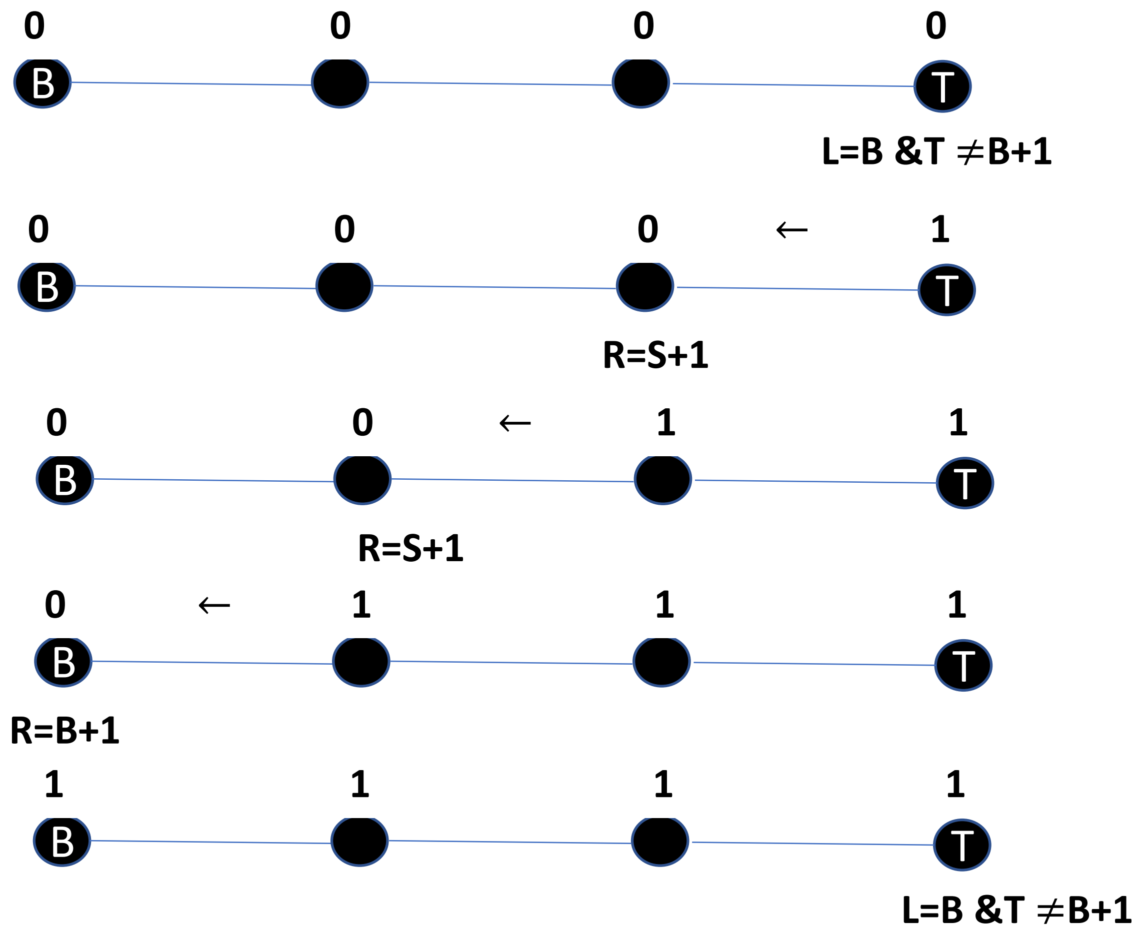
Si una cadena contiene 1 flecha, esta única flecha se moverá de arriba a abajo en la cadena debido a las transformaciones (1) y (2)
y se refleja debido a las transformaciones (6) y (0)

Ejemplo

Bottom:
$(B+1) = R \ \rightarrow B := B + 2$

Normal:
$L = S + 1 \ \vee \ S + 1 = R \rightarrow S := S + 1$

Top:
$L = B \ \wedge \ T \ \neq B + 1 \rightarrow T = B + 1$



Si una cadena contiene 1 flecha, esta única flecha se moverá de arriba a abajo en la cadena debido a las transformaciones (1) y (2)
y se refleja debido a las transformaciones (0) y (6)

Lema 0:Entre dos movimientos sucesivos de T(Top) al menos un movimiento de B se lleva a cabo

Lema 1:Una sucesión de movimientos en el cual B(Bottom) no se mueve es finita

Teorema: Mediante un numero finito de movimientos hay solo una flecha en la cadena

Lema 0

Entre dos movimientos sucesivos de T(Top) al menos un movimiento de B se lleva a cabo

Demostración:

Supongamos que T satisface su privilegio entonces se tiene que:
$L = B \ y \ T \neq B + 1$, además T realiza su movimiento y el estado de T pasa a ser B+1.
Ahora bien si T realiza un movimiento sucesivo, entonces T satisface su privilegio, es decir $L = B \ y \ T \neq B + 1$, pero eso no puede ser puesto que el estado de $T = B + 1$, por lo tanto B ha tenido que llevar a cabo un movimiento entre dos movimientos sucesivos de T.

Lema 1

Una sucesión de movimientos en el cual B(Bottom) no se mueve es finita.
Demostración:

Del Lema 0 se tiene si B no realiza un movimiento entonces al menos 1 vez T realiza un movimiento.
Por otra parte es suficiente demostrar que las transformaciones (1) y (2) son finitas (lo cual depende de la longitud de la cadena)

$$(B+1) = R \rightarrow B := B + 2$$

$$\begin{array}{llll} De \quad L \rightarrow S \quad R & a \quad L \quad S \rightarrow R & \Delta y = 0 & (1) \\ De \quad L \quad S \leftarrow R & a \quad L \leftarrow S \quad R & \Delta y = 0 & (2) \end{array}$$