

Algoritmusok II. gyakorlat

8. gyakorlat, március 30.

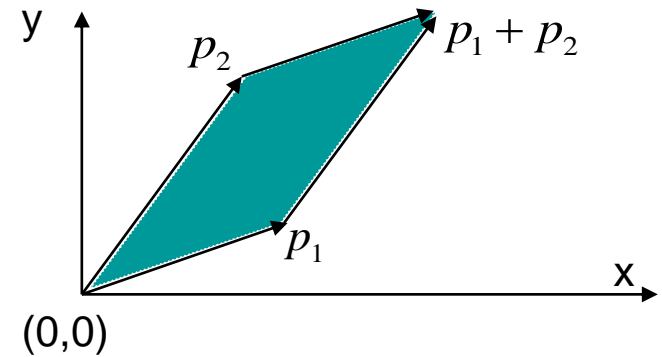
8. gyakorlat

- Két különböző $p_1 = (x_1, y_1)$ és $p_2 = (x_2, y_2)$ pont konvex kombinációja egy $p_3 = (x_3, y_3)$ pont, ha valamely $0 \leq \alpha \leq 1$ valós számra $(x_3, y_3) = \alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2)$.
- a $\overline{p_1 p_2}$ szakasz, ami összeköti p_1 -et és p_2 -t, a p_1 és p_1 összes konvex kombinációja.

8. gyakorlat

- Legyen p_1 és p_2 két pont a síkon.
- A $p_1 \times p_2$ keresztszorzat a megadott paralelogramma előjeles területként értelmezhető.

$$p_1 \times p_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -p_2 \times p_1.$$



Bővebb magyarázat Hirling Dominik videójában:

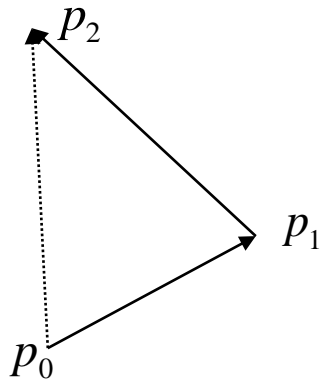
<https://www.youtube.com/watch?v=jv5YXkvMan4>

8. gyakorlat

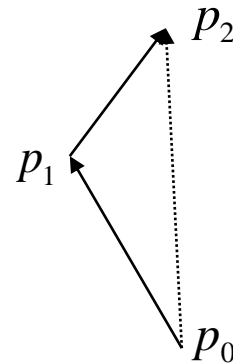
- Ha $p_1 \times p_2$ negatív, akkor $\overrightarrow{op_1}$ az óramutató járásával ellentétes forgásirányba esik $\overrightarrow{op_2}$ -höz képest.
- Ha $p_1 \times p_2$ pozitív, akkor $\overrightarrow{op_1}$ az óramutató járásával megegyező forgásirányba esik $\overrightarrow{op_2}$ -höz képest.
- Ha $p_1 \times p_2 = 0$, akkor $\overrightarrow{op_1}$ és $\overrightarrow{op_2}$ kollineárisak.
- Annak eldöntéséhez, hogy egy $\overrightarrow{p_0p_1}$ irányított szakasz óramutató járásával megegyező vagy azzal ellentétes forgásirányba esik-e egy másik, $\overrightarrow{p_0p_2}$ irányított szakaszhoz képest, közös p_0 végpontból felmérve őket, egyszerűen eltoljuk a vektorokat úgy, hogy p_0 az origóba essen.

8. gyakorlat

- Tekintsük a $p'_1 \times p'_2$ keresztszorzatot, ahol $p'_1 = p_1 - p_0$, $p'_2 = p_2 - p_0$.
- Ekkor $p'_1 \times p'_2 = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$.
- Döntsük el, hogy a két egymást követő szakasz, a $\overrightarrow{p_0 p_1}$, illetve a $\overrightarrow{p_1 p_2}$ esetében a p_1 -ben balra vagy jobbra fordul a $\overrightarrow{p_1 p_2}$.
- Vagyis $\overrightarrow{p_0 p_2}$ az óramutató mozgási irányában van $\overrightarrow{p_0 p_1}$ -hez képest, vagy nem.



$(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0) < 0$
Ekkor ellenkező
irány, vagy bal
fordulat.



$(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0) > 0$
Ekkor megegyező
irány, vagy jobb
fordulat.

8. gyakorlat

- Annak eldöntésére, hogy két szakasz metszi-e egymást, ellenőrizzük, hogy az egyik szakasz átfogja-e a másik egyenesét.
- A $\overline{p_1p_2}$ szakasz átfog egy egyenest, ha a p_1 pont az egyenes egyik oldalára, a p_2 pont pedig a másik oldalára esik. Határesetben p_1 vagy p_2 illeszkedik az egyenesre.
- Két szakasz akkor és csak akkor metszi egymást, ha:
 - Mindkét szakasz átfogja a másik egyenesét.
 - Az egyik szakasz egyik végpontja illeszkedik a másik szakaszra. (Ez a feltétel felel meg a határesetnek.)

8. gyakorlat

- Átfedés tesztelése keresztszorzattal:
 - ellenőrizzük, hogy $\overline{p_3p_4}$ átfogja-e a p_1 és p_2 által meghatározott L egyenest

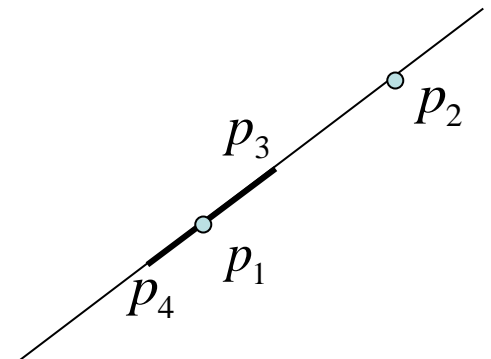
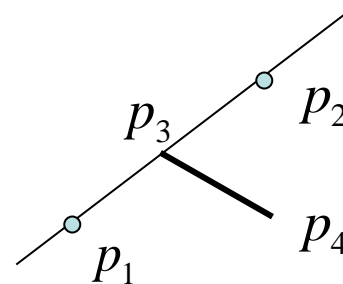
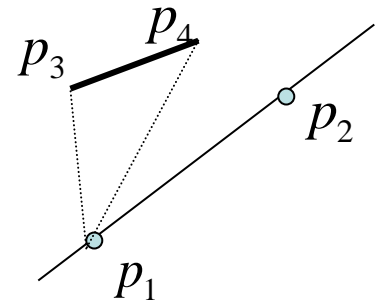
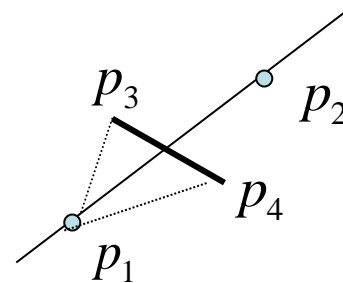
Ha $\overline{p_3p_4}$ átfogja a p_1 és p_2 által meghatározott egyenest, akkor a következő keresztszorzatok előjele különböző:

$$(p_3 - p_1) \times (p_2 - p_1)$$

$$(p_4 - p_1) \times (p_2 - p_1)$$

Határeset, amikor $\overline{p_3p_4}$ átfogja L -et.

Legalább egy keresztszorzat 0.



8. gyakorlat

```
Metsző-szakaszok(p1, p2, p3, p4)
  d1 ← Forgásirány(p3, p4, p1)
  d2 ← Forgásirány(p3, p4, p2)
  d3 ← Forgásirány(p1, p2, p3)
  d4 ← Forgásirány(p1, p2, p4)
  if ((d1 > 0 és d2 < 0) vagy (d1 < 0 és d2 > 0)) és
      (d3 > 0 és d4 < 0) vagy (d3 < 0 és d4 > 0))
  then return igaz
  else
      határesetek vizsgálata
```

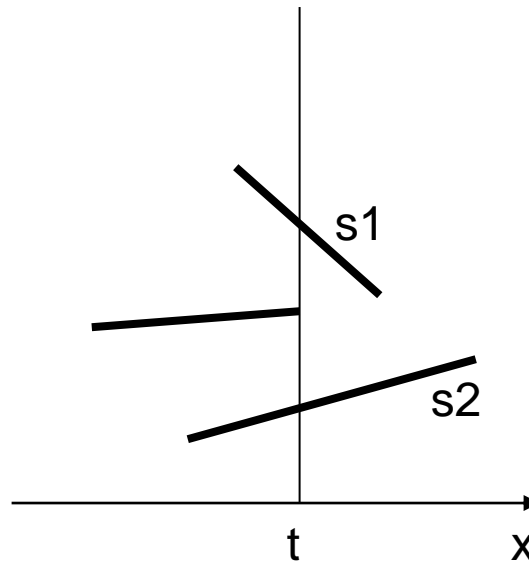
```
Forgásirány(pi, pj, pk)
  return (pk - pi) × (pj - pi)
```


8. gyakorlat

- Adott n szakasz, határozzuk meg, hogy létezik-e két olyan szakasz, melyek metszik egymást.
- Söprés: Egy képzeletbeli függőleges vonal mozog az x tengelyen (amely időtengelyként működik) balról jobbra.
- Az összes szakasz végpontot balról jobbra haladva sorrendben vesszük figyelembe. Abban az esetben, ha több pont x koordinátája megegyezik, tehát holtverseny esetén a szakaszkezdő pontokat a szakasz záró pontok elé soroljuk. Ha ezen belül is van még további holtverseny, akkor pedig a kisebb y -koordinátájú pontok nagyobbak elé sorolásával döntjük el.

8. gyakorlat

- Rendezés definíciója: Legyen s_1 és s_2 két szakasz.
 - A szakaszok összehasonlíthatók t -ben, ha a t -ben lévő függőleges egyenes mindkettőt metszi.
 - Ha s_1 és s_2 összehasonlíthatók t -ben, akkor azt mondjuk hogy s_1 fölött van s_2 -nek t -ben, amit úgy jelölünk hogy $s_1 >_t s_2$, ha s_1 magasabb pontban metszi az egyenest t -ben mint s_2 .



8. gyakorlat

- A seprő egyenesek T teljes rendezésének kezelésére a következő műveletekre van szükségünk:
 - $\text{INSERT}(T,s)$ az s szakasz beszúrása T -be
 - $\text{DELETE}(T,s)$ az s szakasz törlése T -ből
 - $\text{ABOVE}(T,s)$ visszaadja a közvetlenül s felett lévő szakaszt T -ben
 - $\text{BELOW}(T,s)$ visszaadja a közvetlenül s alatt lévő szakaszt T -ben
- Többek között kiegyensúlyozott keresőfákkal, pl. AVL-fa megvalósíthatók ilyen műveletek $O(\log n)$ időben.

8. gyakorlat

VAN-E-METSZŐ-SZAKASZPÁR(S)

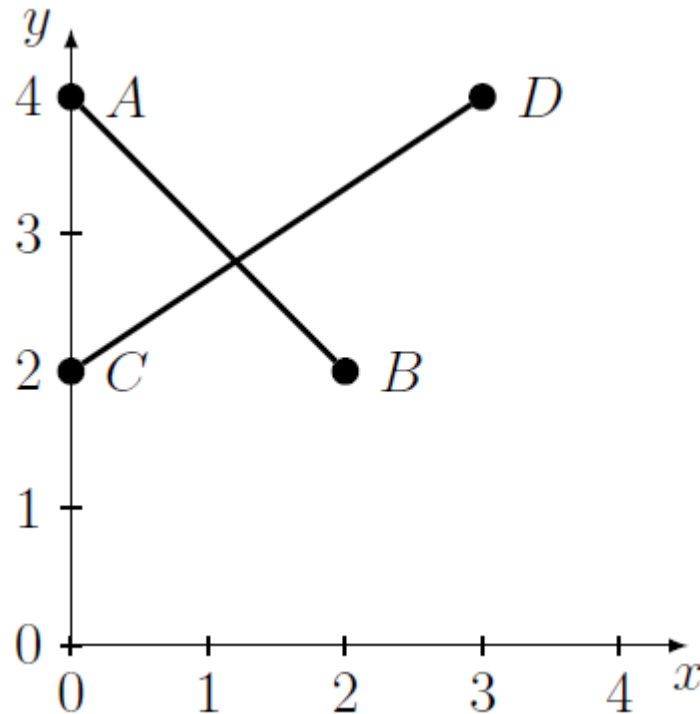
$T \leftarrow \emptyset$

Rendezzük az S -beli szakaszok végpontjait balról jobbra, döntsük el a holtversenyt a bal végpontok jobb végpontok elé sorolásával, a további holtversenyt pedig a kisebb y -koordinátájú pontok nagyobbak elé sorolásával.

```
for minden  $p$  pontra a végpontok rendezett listájában
    if  $p$  egy  $s$  szakasz bal végpontja then
        INSERT( $T, s$ )
        if [ABOVE( $T, s$ ) létezik and metszi  $s$ -et] or
            [BELOW( $T, s$ ) létezik and metszi  $s$ -et] then return TRUE
    if  $p$  egy  $s$  szakasz jobb végpontja then
        if [ABOVE( $T, s$ ) and BELOW( $T, s$ ) is létezik] and
            [ABOVE( $T, s$ ) metszi BELOW( $T, s$ )-t] then return TRUE
        DELETE( $T, s$ )
return FALSE
```

8. gyakorlat

Döntsük el az $A = [0; 4]; B = [2; 2]$, valamint a $C = [0; 2]; D = [3; 4]$ végpontokkal adott szakaszokról, hogy metszik-e egymást?



8. gyakorlat

I. CD átfogja-e AB-t?

$$\text{I/a) Forgásirány(A;B;C)} = \det \begin{pmatrix} 2-0 & 0-0 \\ 2-4 & 2-4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

Tehát az AB szakaszhoz képest a C csúcs jobbra fordulva érhető el.

$$\text{I/b) Forgásirány(A;B;D)} = \det \begin{pmatrix} 2-0 & 3-0 \\ 2-4 & 4-4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

Tehát az AB szakaszhoz képest a D csúcs balra fordulva érhető el.

8. gyakorlat

II. AB átfogja-e CD-t?

$$\text{II/a) Forgásirány}(C;D;A) = \det \begin{pmatrix} 3-0 & 0-0 \\ 4-2 & 4-2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

Tehát az CD szakaszhoz képest a A csúcs balra fordulva érhető el.

$$\text{II/b) Forgásirány}(C;D;B) = \det \begin{pmatrix} 3-0 & 2-0 \\ 4-2 & 2-2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

Tehát az CD szakaszhoz képest a B csúcs jobbra fordulva érhető el.

I. és II. alapján az AB és CD szakaszok metszik egymást.

8. gyakorlat

Döntsük el az $A = [0; 4]$; $B = [2; 2]$, valamint a $C = [1; 0]$; $D = [3; 3]$ végpontokkal adott szakaszokról, hogy metszik-e egymást?

8. gyakorlat

I. AB átfogja-e CD-t?

$$\text{I/a) Forgásirány}(C;D;A) = \det \begin{pmatrix} 3-1 & 0-1 \\ 3-0 & 4-0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 11 > 0$$

Tehát az CD szakaszhoz képest a A csúcs balra fordulva érhető el.

$$\text{I/b) Forgásirány}(C;D;B) = \det \begin{pmatrix} 3-1 & 2-1 \\ 3-0 & 2-0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

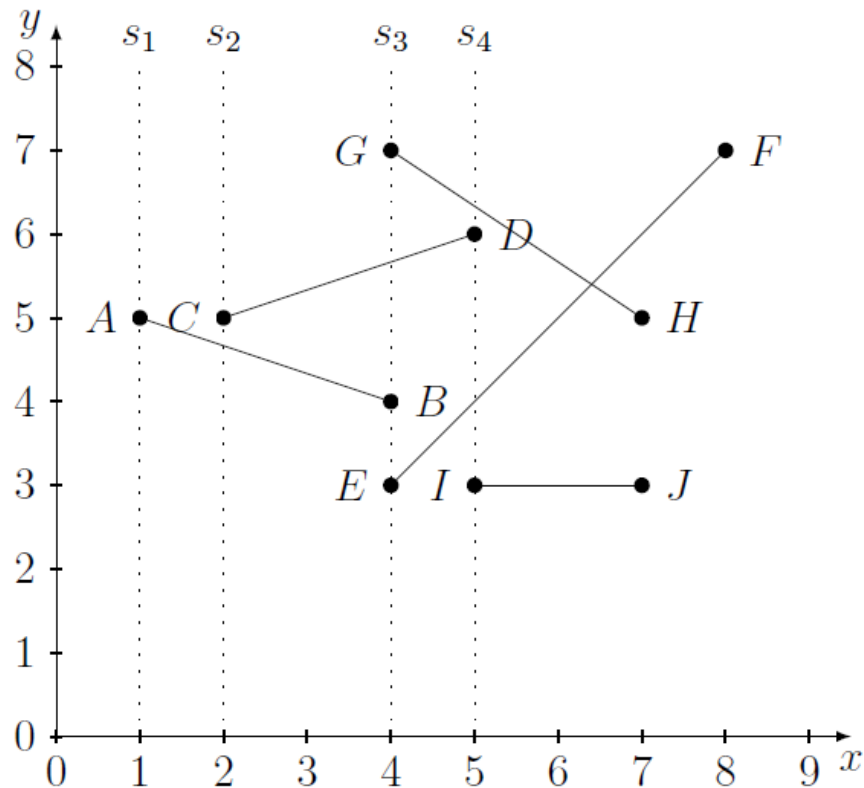
Tehát az CD szakaszhoz képest a B csúcs balra fordulva érhető el.

Az AB és CD szakaszok nem metszik egymást.

8. gyakorlat

Hatékony algoritmussal határozzuk meg, hogy az alábbi szakaszok között található-e egymást metsző szakaspár!

$AB = [(1; 5); (4; 4)]$ $CD = [(2; 5); (5; 6)]$ $EF = [(4; 3); (8; 7)]$ $GH = [(4; 7); (7; 5)]$
 $IJ = [(5; 3); (7; 3)]$



8. gyakorlat

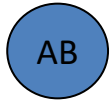
Rendezzük a szakaszok végpontjait x-koordinátájuk szerint. A holtversenyeket a szakaszok kezdőpontjainak végpontjainak elé sorolásával döntsük el. Az esetleges további holtversenyeket a kisebb y-koordinátájú pontok nagyobbak elé sorolásával oldjuk föl.

Eredmény: A;C;E;G;B;I;D;J;H;F

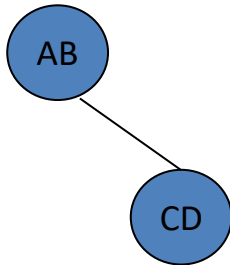
8. gyakorlat

A szakaszokat tartalmazó AVL keresőfa állapotai a seprőegyenés (s_i) haladása szerint.

S1: BESZÚR(AB)

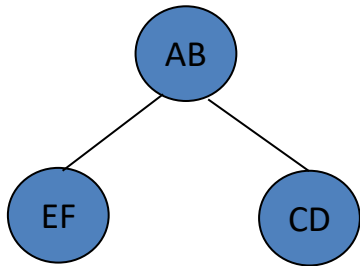


S2: BESZÚR(CD)

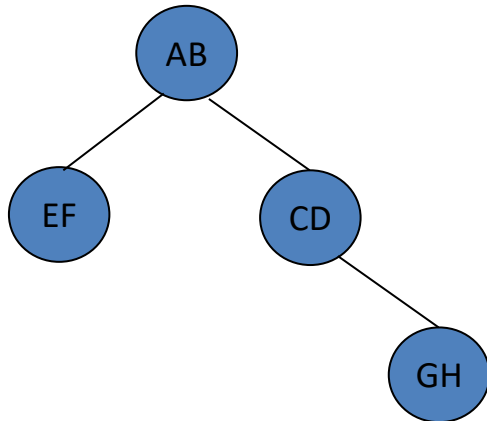


8. gyakorlat

S3(a): BESZÚR(EF)

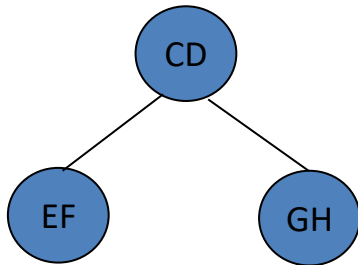


S3(b): BESZÚR(GH)

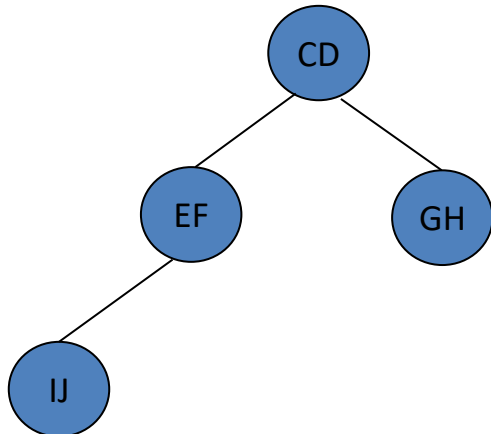


8. gyakorlat

S3(c): TÖRÖL(AB)

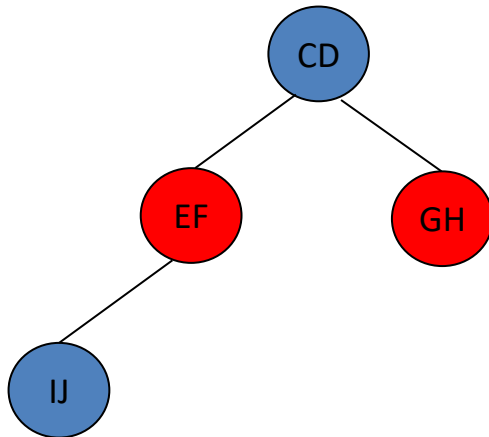


S4(a): BESZÚR(IJ)



8. gyakorlat

S4(b): TÖRÖL(CD)



8. gyakorlat

Szorgalmi feladat:

Adottak az alábbi ábrán látható szakaszok. Mutassuk be a példán az egymást metsző szakaszokat kereső algoritmus lépéseit piros-fekete fa használatával!

