Отчёт

по аппроксимации решения системы дифференциальных уравнений
с помощью метода конечных разностей

Студента 405 группы
Коновалова Даниила

Задача

Аппроксмировать со вторым порядком следующую задачу с помощью метода конечных разностей и найти решение полученной системы алгебраических уравнений при различных f и g:

$$-u'' + \frac{uv}{u^2+v^2} = f(x),$$
$$v' - \frac{uv}{u^2+v^2} = g(x),$$
$$u(0) = u'(1) = v(1) = 0$$

Описание решения

Решать будем в соответствии с методом конечных разностей: отрезок [0,1] разделяется разбиением $0 = x_1, ..., x_n = 1$ на n равных частей длиной $h = \frac{1}{n}$. Затем задача дискретизируется по формулам:

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

$$v'(x_i) \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$$

Здесь $u_i = u(x_i), v_i = v(x_i)$
Далее вводятся фиктивные узлы в точках $x_0 = -h$, $x_{n+1} = x_n + h$. Добавляем натуральное граничное условие на функцию v в точке $x_1 = 0$: $v''(0) = 0$. Подставляем всё в заданные дифференциальные уравнения и получаем некоторую систему алгебраических уравнений, имеющую вид:

$$Aw - H(w) = 0,$$

где

$$w = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n+1} \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

а матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

где

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

а нелинейный член записывается следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$H_u = h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u_1 v_1}{u_1^2 + v_1^2} + f_1 \\ \dots \\ -\frac{u_n v_n}{u_n^2 + v_n^2} + f_n \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$H_v = 2h \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u_1 v_1}{u_1^2 + v_1^2} + g_1 \\ \dots \\ -\frac{u_n v_n}{u_n^2 + v_n^2} + g_n \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Наконец полученная система решается итеративно методом Ньютона:
1.Решаем $(A + H'(w^k))y^k = -(Aw^k + H(w^k))$ относительно y^k
2.Полагаем $w^{k+1} = w^k + y^k$

Вопрос разрешимости

Для неизвестных $v_0, \dots, v_{n+1}$ имеем n разностных уравнений и 2 граничных условия (с учётом добавленного). Получаем, что система $A_u w + H_u(w) = 0$ разрешима. Аналогичные рассуждения проводим для системы

$A_v w + h_v(w) = 0$. Так как система алгебраических уравнений, соответствующая заданной в условии системе дифференциальных уравнений, представима в виде объединения двух выше исследованных систем, то получаем, что вопрос разрешимости благополучно решён, и мы можем найти все 2n+4 неизвестных: $(u_0, \ldots, u_{n+1}, v_0, \ldots, v_{n+1})$

Результат

При проверке сходимости метода Ньютона выведено, что для любых заданных функций f, g количество итераций должно быть не меньше 4. В качестве начального приближения был выбран единичный вектор w^0

Ниже представлены некоторые примеры решений при разных функциях f, g, шагах сетки h, количествах итераций K и возможных ошибках err.

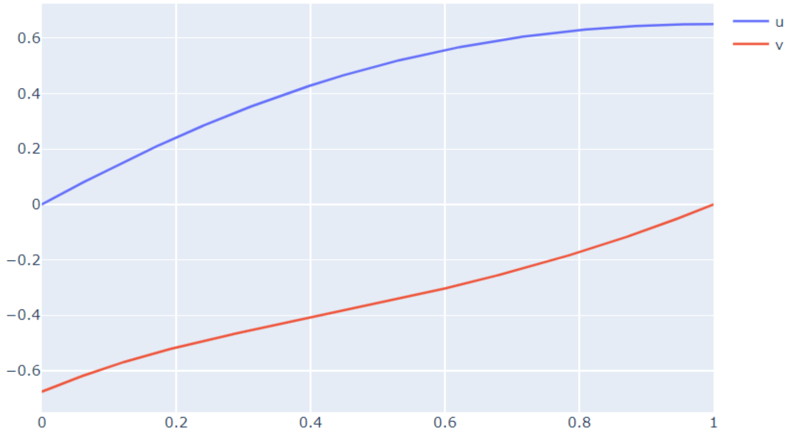

Рис.1$f(x) = 1, g(x) = 1, h = 0,001, K = 1000, err = 10^{-6}$

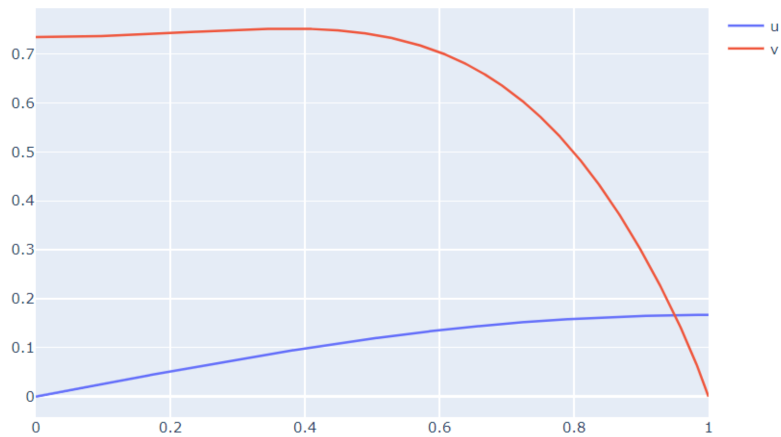

Рис.2$f(x) = sin(x), g(x) = 5x^3 + x^2, h = 0,001, K = 1000, err = 10^{-4}$

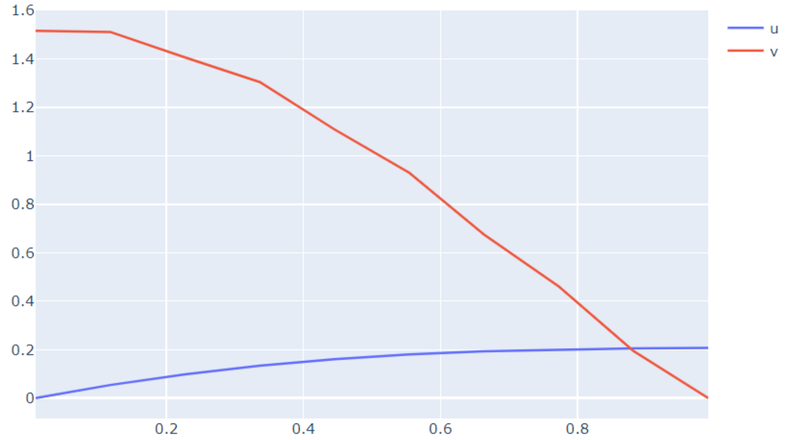

Рис.3$f(x) = cos(x), g(x) = -5xcos(x), h = 0,1, K = 100, err = 10^{-4}$

Список литературы

[1] *Дж. Ортега, У. Пул* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений