Отчёт

по численному решению классической задачи вариационного исчисления

Студента 405 группы
Коновалова Даниила

I. Постановка задачи

$$J(x) = \int_0^1 u^2 dt \to inf, \quad \ddot{x} - xe^{\alpha x} = u,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = sh(1), \quad \dot{x}(1) = e(= sh(1) + ch(1))$$

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.01; \quad 0.5; \quad 1.5; \quad 10.5\}.$$

II. Метод решения

Обозначим $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$.‘:

$$\mathscr{L} = \int_0^1 L dt + l$$

- функция Лагранжа,

где $L = L(x_1, x_2, u, p_1, p_2, \lambda_0) = \lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x_1} - x_2) +$

$+ p_2(\dot{x_2} - u - x_1 e^{\alpha x_1})$ и

$l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_1(1) + \lambda_3 x_2(0) + \lambda_4 x_2(1).$

1. Выполняется уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} L_{\dot{x_1}} + L_{x_1} = 0 \Leftrightarrow -\dot{p_1} - p_2(1 + \alpha x_1) e^{\alpha x_1} = 0 \\ -\frac{d}{dt} L_{\dot{x_2}} + L_{x_2} = 0 \Leftrightarrow -\dot{p_2} - p_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2. Условие трансверсальности:

$$\begin{cases} L_{\dot{x_1}}(0) = l_{x_1(0)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1 \\ L_{\dot{x_2}}(0) = l_{x_2(0)} \Leftrightarrow p_1(1) = -\lambda_2 \\ L_{\dot{x_1}}(1) = -l_{x_1(1)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_3 \\ L_{\dot{x_2}}(1) = -l_{x_2(1)} \Leftrightarrow p_2(1) = -\lambda_4 \end{cases} \tag{2}$$

3. Условие Понтрягина оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = argmax_{u \in \mathbb{R}}(p_2 u - u^2) = \frac{p_2}{2\lambda_0}, \lambda_0 \neq 0 \tag{3}$$

4. Условие "НЕРОН"и неотрицательности:

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0,0), \lambda_0 \geq 0 \tag{4}$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$: Если $\lambda_0 = 0$, то возможны 2 случая:

1)$p_2 \equiv 0 \Rightarrow p_1 \equiv 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \Rightarrow$ Получаем противоречие с условием 4 $\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$

2)$p_2 \neq 0 \Rightarrow \hat{u} = \infty \Rightarrow$ Управление $\hat{u}$ неоптимально

Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Из (3) получаем, что $\hat{u} = p_2$

И краевая задача примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = p_2 + x_1 e^{\alpha x_1} \\ \dot{p_1} = -p_2(1+\alpha x_1) e^{\alpha x_1} \\ \dot{p_2} = -p_1 \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = sh(1)$$

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = e$$

Аналитическое решение при $\alpha = 0$. В данном случае система (5) разобьется на 2 подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 + x_1 \end{cases}$$

Продифференцируем 2 уравнение 1 системы по t: $\ddot{p}_2 = p_2 \Rightarrow p_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ Подставим получившееся выражение во 2 уравнение 2 системы. Продифференцируем его по t: $\ddot{x}_1 = x_1 + C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ Решение однородного уравнения аналогично p_2. Частное решение будем искать в виде $x_{1pr} = Ate^t + Bte^{-t}$. Подставляя это выражение в 1 уравнение 2 системы получаем $2Ae^t + Ate^t - 2Be^{-t} + Bte^{-t} =$

$Ate^t + Bte^{-t} + C_1e^t + C_2e^{-t}$

Откуда $A = \frac{C_1}{2}, B = \frac{-C_2}{2}$ и тогда

$$x_1 = C_3e^t + C_4e^{-t} + \frac{t}{2}C_1e^t - \frac{t}{2}C_2e^{-t}$$

$$x_2 = C_3e^t - C_4e^{-t} + \frac{t+1}{2}C_1e^t + \frac{t-1}{2}C_2e^{-t}$$

С учётом граничных условий: $C_1 = C_2 = 1, \quad C_3 = C_4 = 0$, и окончательно:

$x_1 = \frac{t}{2}e^t - \frac{t}{2}e^{-t} = t\operatorname{sh}t$

$x_2 = \frac{t+1}{2}e^t + \frac{t-1}{2}e^{-t} = t\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t$

$p_1 = -e^t + e^{-t} = -2\operatorname{sh}t$

$p_2 = e^t + e^{-t} = 2\operatorname{ch}t$

Метод стрельбы решения краевой задачи.

Отрезок $[0,1]$ разбивается на N равных частей: $t_i = i{\cdot}h, i = 0, ..., N$, где $h = \frac{1}{N}$.

Для параметров a и b производится численное решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = p_2 + x_1e^{\alpha x_1} \\ \dot{p_1} = -p_2(1+\alpha x_1)e^{\alpha x_1} \\ \dot{p_2} = -p_1 \end{cases} \tag{6}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$p_1(0) = a, \quad p_2(0) = b$$

Варьируя параметры a и b, необходимо добиться выполнения оставшихся краевых условий: $x_1(1) = 0$ и $p_2(1) = 0$. Для решения задачи Коши (6) воспользуемся численным методом Рунге-Кутты 4 порядка, а для отыскания параметров пристрелки - методом итераций с параметром.

Классический метод Рунге-Кутты

Описание метода:

1. Вводятся обозначения $\mathbf{y}(t) = (x_1(t), x_2(t), p_1(t), p_2(t)), \mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i)$, где $i = 0, ..., N$. (Здесь $\mathbf{y}_0$ - начальные условия).

2. Приближённые значения в узлах вычисляются по итерационной формуле:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$$

3. Вычисление новых значений проходит в четыре стадии:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i),$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1),$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2),$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{k}_3),$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ - многомерная функция, такая что задача Коши может быть записана в виде $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Метод, как следует из названия, имеет четвёртый порядок точности: на каждом шаге погрешность имеет $O(h^5)$, а суммарная ошибка - порядок $O(h^4)$

III. Результаты

При количестве узлов разбиения $N = 1000$ для метода Рунге-Кутты по полученным значениям решения краевой задачи в узлах строятся графики. По виду полученных кривых можно сделать вывод о выполнении исходных краевых условий. Рассмотрим графики решений при различных значениях α:

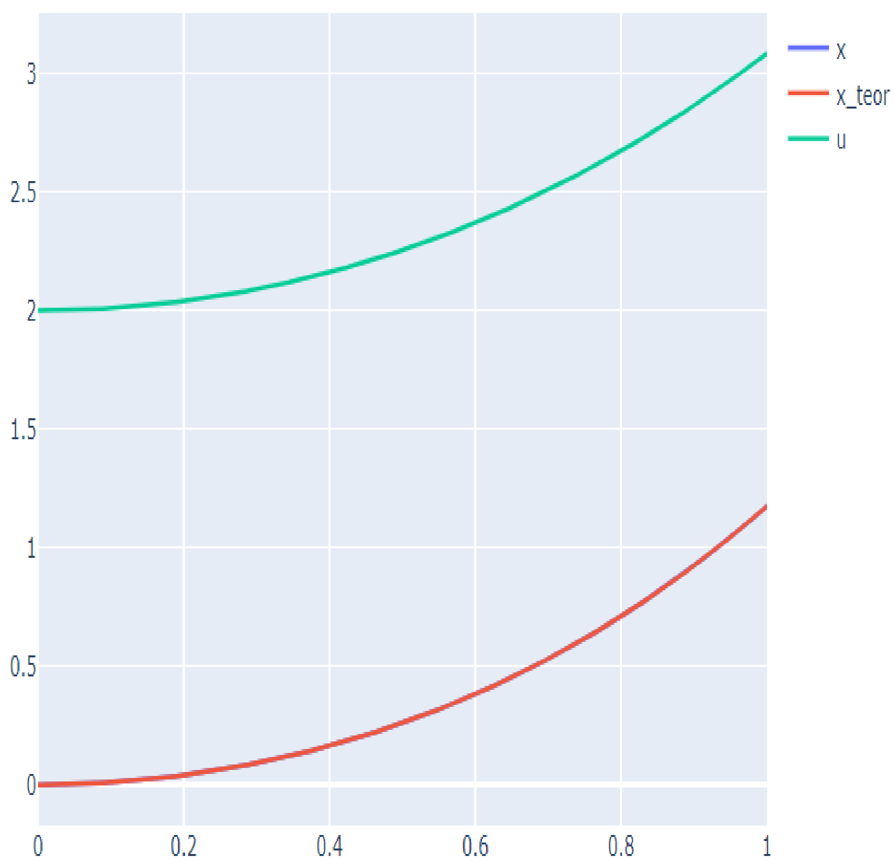

Рис. 1: $\alpha = 0.0$

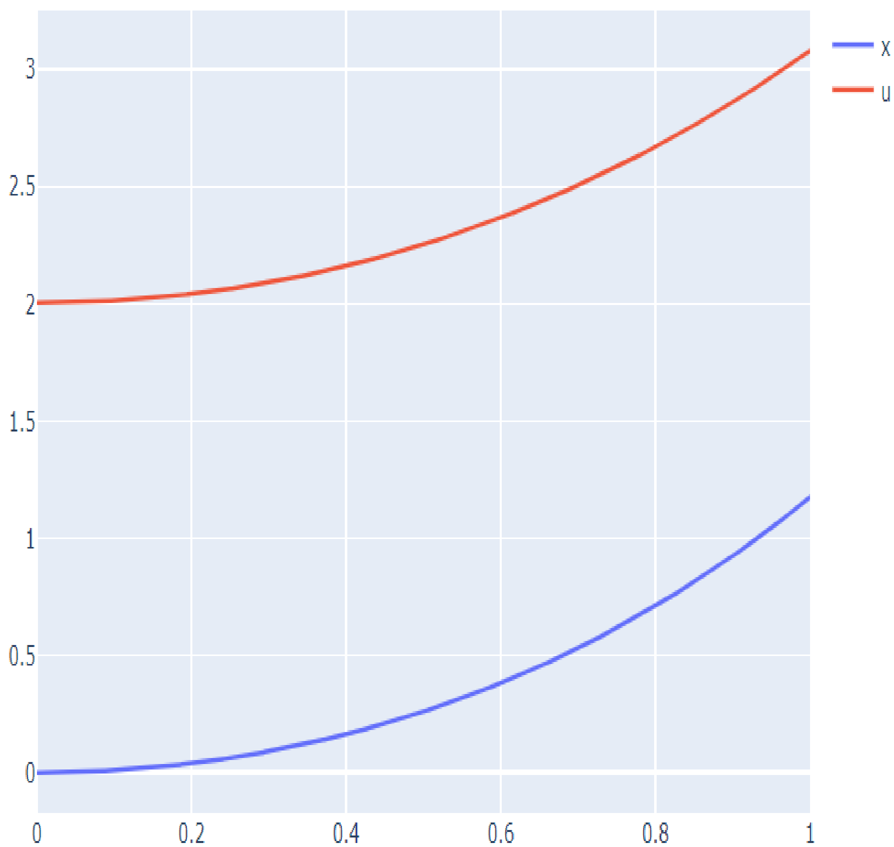

Рис. 2: $\alpha = 0.01$

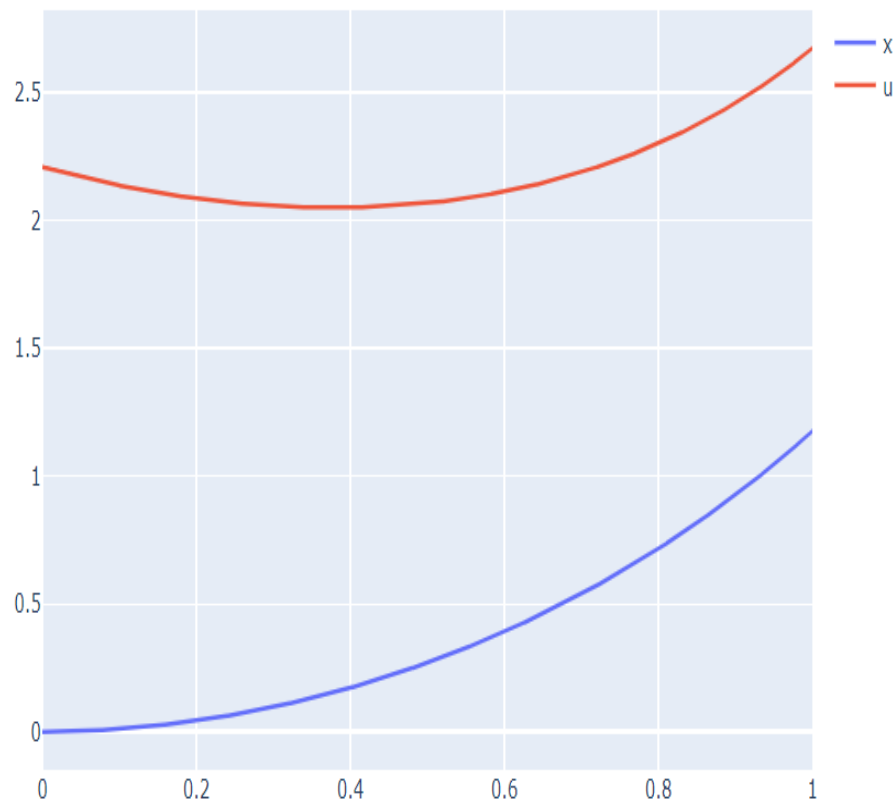

Рис. 3: $\alpha = 0.5$

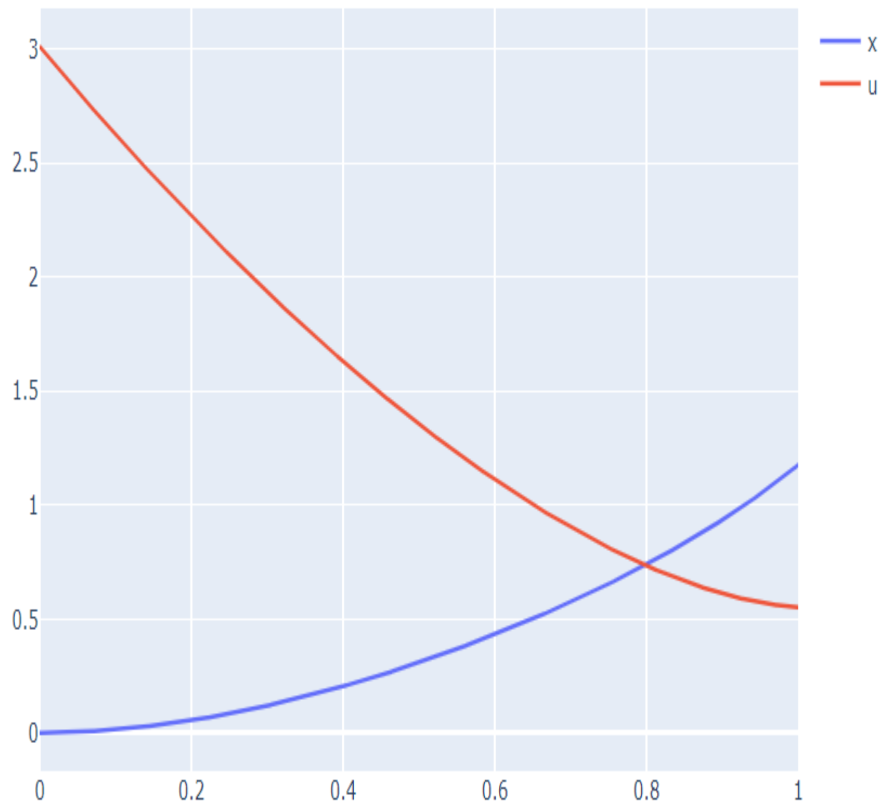

Рис. 4: $\alpha = 1.5$

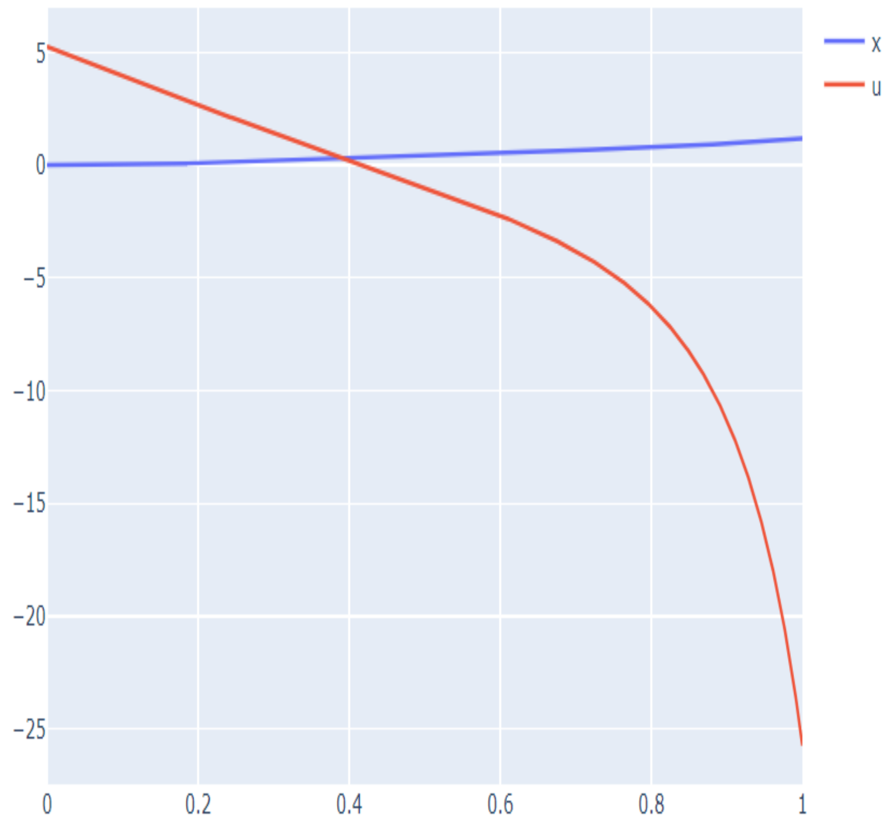

Рис. 5: $\alpha = 10.5$

Список литературы

[1] *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. - Сборник задач по оптимизации (теория, примеры, задачи).*

[2] *И.С.Григорьев - Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления.*

[3] *К.Г. Григорьев, И.С. Григорьев, М.П. Заплетин - Практикум по численным методам в задачах оптимального управления.*